



**HAL**  
open science

## Systemes non-lineaire et chaos

Paul Manneville

► **To cite this version:**

| Paul Manneville. Systemes non-lineaire et chaos. DEA. 2006. cel-00092941

**HAL Id: cel-00092941**

**<https://cel.hal.science/cel-00092941>**

Submitted on 12 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEA de Physique des Liquides  
Paris VI - Ecole polytechnique



**Dynamique non-linéaire  
et  
Chaos**

**Paul Manneville**



# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	La convection, exemple de formation de structure dissipative . . . . .	1
1.2	Oscillateurs auto-entretenus . . . . .	5
1.3	Chaos en convection . . . . .	7
1.4	Conclusion . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques</b>	<b>14</b>
2.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	14
2.2	Stabilité . . . . .	21
2.3	Éléments de dynamique qualitative . . . . .	26
2.4	Éléments de mécanique analytique . . . . .	42
2.5	Résumé . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Dynamique linéaire et non-linéaire</b>	<b>49</b>
3.1	Dynamique non-linéaire et modes normaux . . . . .	49
3.2	Dynamique linéaire dans le cas général . . . . .	54
3.3	Dynamique non-linéaire et résonances . . . . .	62
3.4	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Dynamique en dimension <math>d = 1</math> et <math>2</math></b>	<b>72</b>
4.1	Bifurcations en dimension $d = 1$ et catastrophes . . . . .	72
4.2	Dynamique en dimension 2 . . . . .	80
4.3	Période des oscillateurs non-linéaires . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Dynamique en dimension <math>d &gt; 2</math></b>	<b>94</b>
5.1	Introduction . . . . .	94
5.2	Régime stationnaire des oscillateurs forcés . . . . .	95
5.3	Stabilité d'un cycle limite . . . . .	100
5.4	Bifurcation d'un cycle limite . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Transition vers le chaos</b>	<b>110</b>
6.1	Mathématique du chaos . . . . .	112
6.2	Routes classiques vers le chaos . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Caractérisation du chaos temporel</b>	<b>134</b>
7.1	Exposants de Lyapunov . . . . .	134
7.2	Chaos et dimensions . . . . .	141
7.3	Caractérisation empirique des régimes chaotiques . . . . .	145
7.4	Appendice: Réactions chimiques . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Du chaos temporel au chaos spatio-temporel</b>	<b>165</b>
8.1	Introduction . . . . .	165
8.2	Instabilités et confinement . . . . .	166
8.3	Limites du concept de chaos temporel, exemple . . . . .	170
8.4	Transition vers le chaos spatio-temporel . . . . .	175
8.5	Modélisations spécifiques . . . . .	185
8.6	Conclusion . . . . .	188
	<b>Bibliographie</b>	<b>189</b>
	<b>Index</b>	<b>193</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Plutôt que de démarrer classiquement de l'idée de système dynamique que l'on se forme en partant de la mécanique, nous allons commencer par illustrer sur des exemples simples, fabriqués avec les moyens du bord, l'échantillonnage de "comportements" que nous allons rencontrer et analyser plus en détail dans la suite. Ainsi, l'émergence de la convection naturelle dans une couche de fluide au repos chauffée par le bas nous introduira au problème des bifurcations entre régimes stationnaires. Puis nous passerons aux régimes périodiques grâce aux oscillateurs électroniques. Enfin, compliquant le modèle de convection nous verrons apparaître les premiers comportements chaotiques. Nous concluons en notant les ingrédients qui paraissent indispensables au développement progressif de la complexité des dynamiques observées.

### 1.1 La convection, exemple de formation de structure dissipative

La convection naturelle répond à un mécanisme très intuitif. Lorsqu'un fluide au repos est chauffé par le bas, la densité augmente quand on s'élève dans le fluide: cette situation est potentiellement instable, car dans le champ de pesanteur, la tendance naturelle est de mettre le lourd en bas et le léger en haut. Cette redistribution se traduit par l'apparition d'une circulation sous forme de rouleaux de convection. De façon plus précise, considérons une bulle de fluide à une certaine altitude dans la couche et admettons qu'elle subisse une fluctuation de température  $\theta > 0$ . Elle se trouve alors plus légère que son environnement et tend à s'élever. Ce faisant, elle rencontre du fluide plus froid donc plus lourd. La différence de densité s'accroît et la bulle accélère sous l'effet de cette *poussée d'Archimède différentielle* (cf. Fig. 1.1). Pour que ce mouvement se produise effectivement, il faut que la bulle ne soit pas trop freinée par le frottement visqueux et que la différence de température se maintienne. On assiste donc à une compétition entre un mécanisme d'amplification de la perturbation et un mécanisme d'amortissement combinant les effets de viscosité et de diffusion de chaleur. Si l'écart de température  $\Delta T$  appliqué entre la plaque chaude et la plaque froide est trop petit, l'accélération vers le haut est faible et les processus dissipatifs l'emportent. La couche retourne à son *état de base*. Quand l'écart de température augmente, le mécanisme déstabilisant augmente d'intensité. Il finit par l'emporter au delà d'un écart critique  $\Delta T_c$  appelé *seuil de convection*. On peut naturellement transposer le raisonnement au cas d'une fluctuation de température négative qui induirait un accroissement de densité faisant plonger une bulle plus froide que son environnement originel. Une circulation apparaît ainsi dans la couche initialement au repos, circulation sous forme d'une alternance de régions où le fluide monte et descend. L'expérience montre (et la théorie justifie) que, suffisamment près du seuil, cette circulation s'organise en rouleaux de longueur d'onde  $\lambda$  de l'ordre de  $2h$ ,  $h$  représentant la hauteur de la couche fluide sur laquelle on pratique l'expérience. De plus, cette circulation est sensiblement indépendante du temps.

Autrement dit, appelant  $x$  la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux, il semble légitime de représenter le champ de vitesse verticale associé aux rouleaux sous la forme

$$v_z = X(t)f_v(z)\sin(kx), \quad k = 2\pi/\lambda. \quad (1.1)$$

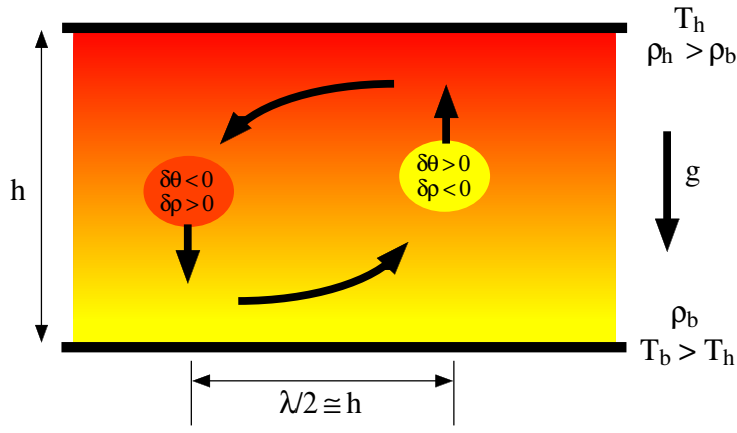


Figure 1.1: Convection naturelle.

Dans cette expression, la périodicité en  $x$  a été explicitée et la dépendance spatiale séparée de la dépendance temporelle. La forme analytique de  $f_v(z)$  est sans importance bien que calculable. La variable  $X(t)$  mesurant l'intensité de la convection est donc supposée rendre compte de la dépendance temporelle.

Pour ce qui est de la fluctuation de température associée, le mécanisme esquissé ci-dessus suggère fortement d'admettre une dépendance horizontale en phase avec celle de  $v_z$ , i.e.  $\sim \sin(kx)$ . Naturellement les deux perturbations sont couplées (nous y reviendrons plus loin), mais pour l'instant essayons de décrire de façon purement phénoménologique le comportement temporel de la perturbation de vitesse qui conduit à l'établissement des rouleaux décrits par (1.1). En dessous du seuil, celle-ci est amortie, tandis qu'au dessus elle est amplifiée. Son taux de croissance  $\sigma$  passe donc de valeurs négatives à des valeurs positives lorsque l'écart de température  $\Delta T$ , le *paramètre de contrôle* de notre problème, atteint puis dépasse la valeur critique  $\Delta T_c$ . Définissons un paramètre de contrôle réduit

$$r = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}. \quad (1.2)$$

L'évolution de  $X$ , *amplitude* de la perturbation, est alors décrite par

$$\frac{d}{dt}X = \sigma X, \quad (1.3)$$

où  $\sigma$  est *a priori* fonction de  $r$ . En  $r = 0$ , c'est à dire au seuil  $\Delta T = \Delta T_c$  les perturbations ne sont ni amorties ni amplifiées et  $\sigma = 0$ . Pour  $r$  suffisamment petit, on peut se contenter du premier terme d'un développement de  $\sigma$  en puissances de  $r$  soit

$$\sigma = r/\tau_0, \quad (1.4)$$

où  $\tau_0$ , homogène à un temps, caractérise l'évolution "naturelle" des fluctuations.

L'équation (1.3) assortie de (1.4) décrit, selon le signe de  $r$ , l'amortissement ou l'amplification de petites perturbations initiales. Lorsque  $r$  est négatif, celles-ci régressent et l'état de base correspondant à la solution triviale  $X = 0$  est *stable*, sinon il est *instable*. Cette évolution des perturbations, dans un sens ou dans l'autre, est exponentielle. Autant dire que, si elles sont amplifiées, elles ne restent pas longtemps petites et qu'il va falloir tenir compte des effets non-linéaires. De façon heuristique, admettons que (1.3) reste valable à condition de corriger  $\sigma$  qui devient ainsi fonction de  $X$  lui même. Observant que le changement de  $X \mapsto -X$ , correspond à un changement du sens de rotation des rouleaux (ou au décalage de la structure de  $\lambda/2$ ) et que la physique du problème doit rester indifférente à ce changement, on en déduit que ce  $\sigma$  effectif doit être une fonction paire de  $X$ . Réduisant cette fonction au premier terme significatif de son développement en puissances de  $X$  on obtient:

$$\tau_0 \sigma_{\text{eff}} = r - gX^2, \quad (1.5)$$

où la constante  $g$  est homogène à  $1/X^2$ , ce que l'on peut formaliser en écrivant  $g = 1/\bar{X}^2$ , où  $\bar{X}$  représente une certaine amplitude caractéristique mesurant l'intensité des couplages non-linéaires. Lorsque la convection se

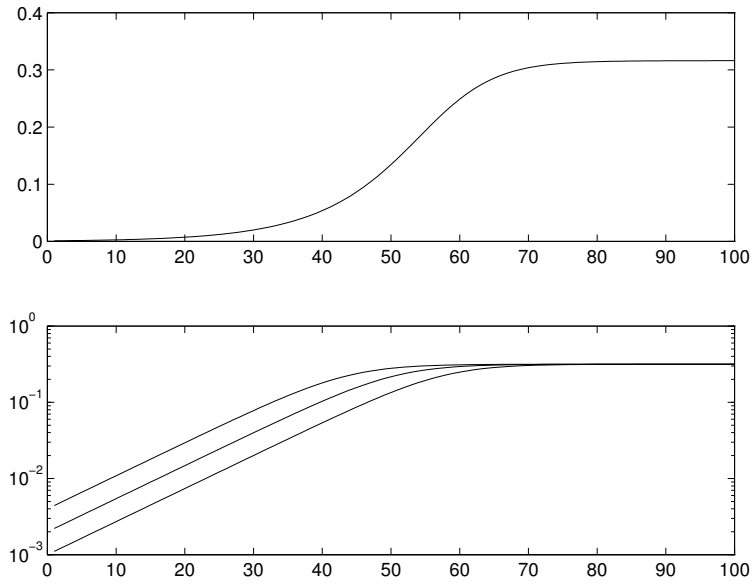


Figure 1.2: Évolution de  $X$  en fonction du temps pour le modèle (1.6) avec  $g = 1$ ,  $\tau_0 = 1$  et  $r = 10^{-1}$ . En haut, coordonnées linéaires et  $X_0 = 10^{-3}$ . En bas, coordonnées semi-logarithmiques et  $X_0 = 10^{-3}$ ,  $2.10^{-3}$  et  $4.10^{-3}$ . Noter que la durée du transitoire n'est pas très sensible à la valeur de la condition initiale.

développe, la chaleur transportée par l'écoulement ("flux convectif") augmente au détriment de celle transportée par conduction ("flux conductif"). Or le mécanisme d'instabilité résulte de la poussée d'Archimède différentielle dans le gradient de température local. Celui-ci est lié au flux conductif par la loi de Fourier. Ce gradient étant affaibli au cœur de la couche fluide, on admettra sans difficulté que le taux de croissance effectif se trouve diminué par le développement du mode d'instabilité, ce qui correspond à  $g > 0$  avec les notations introduites par la formule (1.5). Le modèle non-linéaire décrivant la convection au voisinage du seuil va donc s'écrire:

$$\tau_0 \frac{d}{dt} X = F_r(X) = rX - gX^3. \quad (1.6)$$

Son étude, élémentaire, sera reprise plus loin dans un contexte général. Il constitue un premier exemple de système dynamique, gouvernant ici une simple variable réelle  $X$ . Empruntant et dévoyant quelque peu la terminologie de la mécanique classique, nous dirons que cette *variable d'état* est le *degré de liberté* du problème, que la droite réelle  $\mathbb{R}$  est l'*espace des phases* correspondant. L'expression  $F_r$  définit sur l'espace des phases un *champ de vecteurs* qui rend compte de la dynamique du système dans cet espace. Formellement, la couche fluide en convection est un milieu continu décrit par des champs (vitesse, température), c'est donc un système à nombre infini de degrés de liberté (la valeur des champs aux différents points du domaine considéré). Les rétroactions associées au mécanisme d'instabilité introduisent dans le système une cohérence qui autorise à se ramener au seul degré de liberté *effectif*  $X$ . Sous des formes diverses, la légitimation de cette réduction et ses conséquences seront examinées à plusieurs reprises dans ce cours.

Revenons à (1.6) et supposons la couche fluide préparée près de son état de repos ( $X = 0$ ). Soumettons la en  $t = 0$  à une perturbation  $X(t = 0) = X_0 > 0$  suffisamment petite pour que les termes non-linéaires soient négligeables ( $|gX_0^3| \ll |rX_0|$ ) et laissons la perturbation évoluer. Il vient immédiatement  $X(t) \simeq X_0 \exp(t/\tau)$  avec  $\tau = \tau_0/r$ . On a bien relaxation ou amplification exponentielle selon que  $r$  est négatif ou positif. Observons cependant que l'évolution se fait sur une échelle de temps qui diverge comme  $1/|r|$ . C'est ce que l'on appelle le *ralentissement critique*. Pour  $r < 0$  les non-linéarités restent négligeables et la couche retourne au repos. Par contre si  $r > 0$ ,  $X(t)$  augmente et les non-linéarités doivent être prises en compte. Sur la Fig. 1.2 (en haut) nous avons porté l'évolution de  $X(t)$  pour  $r$  légèrement positif. On y observe qu'après la phase de croissance exponentielle attendue (également représentée en coordonnées semi-logarithmiques sur la figure

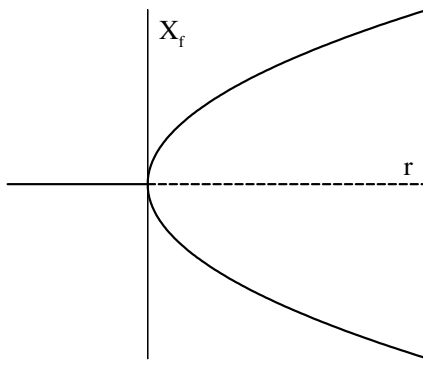


Figure 1.3: Diagramme de bifurcation du modèle (1.6). En traits continus, points fixes stables; en trait interrompu, point fixe trivial instable pour  $r > 0$ .

du bas) le taux de croissance effectif diminue à mesure que  $X(t)$  se rapproche de

$$X_f = \sqrt{r/g}. \quad (1.7)$$

Cette valeur, solution de  $F_r(X) = 0$  est appelée *point fixe* du champ de vecteurs. Pour  $r < 0$  le système n'admet que la solution triviale pour point fixe. Pour  $r > 0$  elle possède deux points fixes non triviaux  $\pm X_f$ .

Il n'est pas difficile de déterminer l'évolution terminale de  $X(t)$  au voisinage de (1.7). Pour cela, insérant le changement  $X = X_f + X'$  dans (1.6), nous trouvons:

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{d}{dt}(X_f + X') &= \tau_0 \frac{d}{dt} X' = r(X_f + X') - g(X_f + X')^3 \\ &= [rX_f - gX_f^3] + (r - 3gX_f^2) X' + \mathcal{O}(X'^2), \end{aligned}$$

de sorte qu'à l'ordre le plus bas, utilisant (1.7), nous obtenons simplement:

$$\tau_0 \frac{d}{dt} X' = -2r X'. \quad (1.8)$$

L'évolution terminale de  $X(t)$  est donc une relaxation exponentielle vers le point fixe  $X_f$  qui, de ce fait est *stable* ( $-2r < 0$ ).

La position et la nature, stable ou instable, des points fixes peuvent être reportés en fonction de  $r$  sur un *diagramme de bifurcation*, cf. Fig. 1.3. En raison de l'aspect de son graphe, cette transition est appelée *bifurcation en fourche*. Selon le signe de  $X_0$  le système tend vers les solutions appartenant à l'une ou l'autre des deux branches non-triviales stables (trait plein). La solution triviale est stable pour  $r < 0$  et instable pour  $r > 0$  (tirets). Plus généralement, on appellera *diagramme de bifurcation* un graphe représentant les *états asymptotiques* du système dans l'espace des phases en fonction des coordonnées de l'*espace de contrôle*  $r \equiv \{r\} \equiv \{r_p; p = 1, 2, \dots\}$ .

Notons qu'il aurait pu être utile de changer de variables pour mettre l'équation sous forme adimensionnée. Effectuant les changements  $t \mapsto \tau_0 t$  et  $X \mapsto \bar{X} X$  avec  $g = 1/\bar{X}^2$  on arrive à la forme *universelle*

$$\frac{d}{dt} X = rX - X^3 \quad (1.9)$$

Cela permet de préciser ce que l'on entend par condition initiale "suffisamment petite": en variables adimensionnées cela signifie simplement  $X_0 \ll 1$ . Il n'est dès lors pas difficile d'estimer la durée du transitoire, c'est à dire le temps  $t_{tr}$  nécessaire pour que  $X$  passe de  $X_0$  à une valeur proche de sa valeur d'équilibre. Il vient:  $X(t_{tr}) = X_0 \exp(r t_{tr}) \sim 1$  soit  $t_{tr} \sim \ln(X_0)/r$ . Le facteur  $1/r$  décrit le ralentissement critique déjà évoqué; notons plutôt ici la dépendance logarithmique du temps de transitoire sur l'amplitude initiale, reflet de la croissance exponentiellement rapide des perturbations instables. Laissant de côté un strict point de vue mathématique, on s'attend donc en général à atteindre "rapidement" les états asymptotiques pertinents même pour des perturbations aussi "physiquement infinitésimales" que les fluctuations thermiques dans les systèmes macroscopiques.



Usuellement, nous n'avons pas le contrôle du signe de la perturbation initiale  $X_0$ . Or selon ce signe, le système évolue vers l'un ou l'autre de deux états physiquement équivalents, se répondant dans une symétrie du système, ici le changement  $X \mapsto -X$ . Par analogie avec la théorie des changements de phases, e.g., la transition "para-ferro" en magnétisme, nous dirons qu'il s'est produit une *rupture spontanée de symétrie*.

Pour clore ce paragraphe, remarquons enfin que nous avons fait l'hypothèse, justifiée par l'expérience, que les non-linéarités saturaient les perturbations au delà du seuil, conduisant à une bifurcation continue analogue aux transitions de phases du second ordre. Ce type de bifurcation est appelé *super-critique*. Dans le cas contraire, le système ne dispose d'aucun état asymptotique stable continûment connecté à l'état de base près du point de bifurcation. Dans le meilleur des cas, on observe l'apparition d'un état bifurqué stable à distance finie de l'état de base. La bifurcation, alors appelée *sous-critique*, est l'analogue direct des transitions de phase du premier ordre. Tout ceci sera repris plus en détail au chapitre 4.

## 1.2 Oscillateurs auto-entretenus

Le modèle que nous venons de considérer ne met en œuvre qu'une seule variable dynamique. Le comportement qui en découle, appelé "relaxationnel," est dû au fait que l'on peut toujours, au moins formellement, écrire

$$\frac{d}{dt}X = -\partial G/\partial X \quad \text{avec} \quad G(X) = -\int F(X) dX,$$

de sorte que la dynamique se limite à une recherche monotone des minima d'un potentiel approprié  $G(X)$ . On peut y voir l'effet dominant de la dissipation qui tend à faire relaxer les perturbations. Pour observer une dynamique d'ordre plus élevé, il faut donner au système une certaine inertie qui lui permet de "dépasser" sa position d'équilibre.

Les exemples de systèmes oscillants abondent dans tous les domaines, à commencer par la mécanique usuelle (pendule) et l'électricité (circuits de type RLC), mais aussi dans des domaines fort éloignés de la physique comme l'écologie (systèmes proies-prédateurs) ou l'économie (cycles expansion-récession).

Ici, nous allons prendre l'électronique pour exemple. Alors que la résistance ohmique et l'effet Joule rendent compte de la dissipation et conduisent à une caractéristique "courant-tension" banale,  $U_R = RI$ , l'inertie s'introduit dès que l'on ajoute des inductances ou des condensateurs *via* un déphasage entre courant et tension: pour un condensateur de capacité  $C$ , la charge est donnée par  $Q = CU_C$ , avec  $I = \frac{d}{dt}Q$ , tandis qu'une inductance soumise à une intensité variable développe une force contre-électromotrice  $U_L = L\frac{d}{dt}I$ . Considérons le montage RLC "série" de la Fig. 1.4, il vient

$$U = U_C + U_R + U_L = Q/C + R\frac{d}{dt}Q + L\frac{d^2}{dt^2}Q. \quad (1.10)$$

La décharge du condensateur après mise en court-circuit [boucle (A)] est alors décrite par:

$$Q/C + R\frac{d}{dt}Q + L\frac{d^2}{dt^2}Q = 0.$$

Cette équation gouverne l'oscillateur linéaire amorti dont la pulsation complexe  $\omega \in \mathbb{C}$  [ $I \propto \exp(-i\omega t)$ ] est racine de

$$\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0,$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance, donnée par  $LC\omega_0^2 = 1$  et  $\gamma = R/L$  le facteur d'amortissement. L'énergie stockée initialement dans le condensateur est dissipée par la résistance  $R$ .

Cette dissipation est à l'origine de l'amortissement: si on arrive à injecter de l'énergie dans le système de façon à compenser les pertes, on peut obtenir des *oscillations auto-entretenuées*. Pour cela, on ferme le circuit sur un dipôle à résistance négative (DRN) et prenons  $I = \frac{d}{dt}Q$  pour variable plutôt que  $Q$  [boucle (B)]. De tels dipôles peuvent être concrètement réalisés à l'aide d'amplificateurs opérationnels. Il répondent à des caractéristiques courant-tension de type ohmique mais avec une résistance négative. La compensation des pertes suppose un apport d'énergie en fait puisée à la source d'alimentation du dispositif. En pratique,

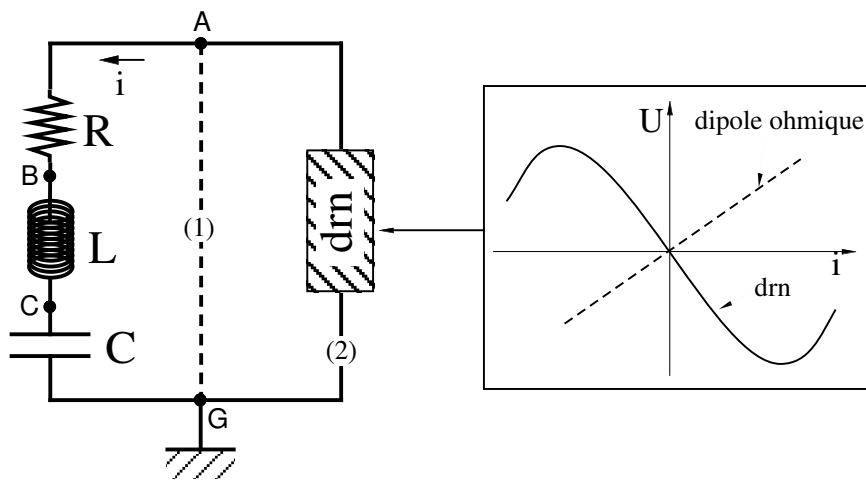


Figure 1.4: Schéma de principe d'un circuit électronique oscillant à la Van der Pol avec sa caractéristique courant-tension présentant une région à résistance négative (en grisé: caractéristique d'une résistance ohmique).

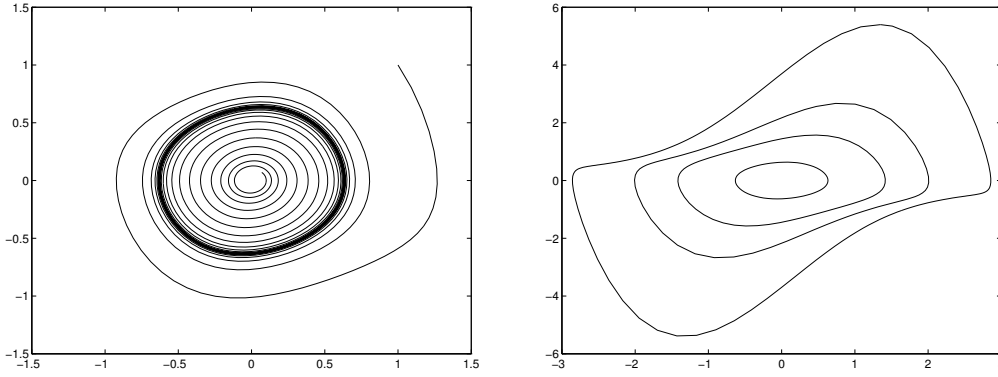


Figure 1.5: Orbites du modèle de Van der Pol (1.12) pour  $g = 1$ . A gauche: les trajectoires issues de  $X = Y = 1$  et  $X = Y = 0.07$  pour  $r = 10^{-1}$ . A droite: Cycles limites obtenus pour  $r = 10^{-1}$  (quasi-harmonique);  $r = 5.10^{-1}$ , 1 et 2 (de plus en plus fortement anharmoniques).

des effets de saturation limitent la validité de la loi d'Ohm "anormale", de sorte que nous prendrons pour modèle de caractéristique:

$$U_{\text{DRN}} = -R_0 I + bI^3, \quad \text{avec } R_0 > 0.$$

Insérant cette expression dans (1.10) nous obtenons

$$U + U_{\text{DRN}} = 0 = \left( C^{-1} \int I dt + RI + L \frac{dI}{dt} \right) + (-R_0 I + bI^3).$$

Dérivant par rapport au temps nous obtenons

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + [(R - R_0) + 3bI^2] \frac{dI}{dt} + C^{-1} I = 0. \quad (1.11)$$

Tant que  $R > R_0$  le coefficient du terme en  $\frac{dI}{dt}$  est positif: la dissipation joue dans un sens "normal" et les oscillations sont amorties. Ce n'est plus le cas si  $R < R_0$ : une petite perturbation (i.e. telle que  $3bI^2$  soit négligeable devant  $|R - R_0|$ ) est amplifiée et des oscillations peuvent se développer spontanément. Dès que l'amplitude des oscillations devient suffisamment importante, le terme de dissipation non-linéaire, jouant dans le sens "normal," prend le dessus et empêche la divergence. Diminuant  $R$ , nous pouvons donc observer une *bifurcation* vers un régime d'oscillations auto-entretenues.

Effectuant les changements  $I \mapsto X$  et  $t \mapsto \omega_0^{-1} t$  dans l'équation (1.11) nous obtenons l'une des écritures du modèle de Van der Pol

$$\frac{d^2}{dt^2} X - (r - gX^2) \frac{dX}{dt} + X = 0, \quad (1.12)$$

où  $r \propto R_0 - R$  est le paramètre de contrôle et où  $g$  mesure l'intensité des non-linéarités. Il est maintenant commode de passer au *plan de phase* en posant  $Y = \frac{d}{dt}X$  et de porter les trajectoires dans le plan  $(X, Y)$ . La Fig. 1.5 (gauche) présente le résultat de l'intégration numérique de (1.12) pour deux conditions initiales différentes en régime quasi-harmonique. On observe qu'elles tendent toutes deux, de l'extérieur ou de l'intérieur, vers une *orbite* presque circulaire. On peut déterminer de façon approchée l'amplitude du cycle près de la bifurcation. Insérant  $X \simeq X_m \cos(t)$  dans l'équation (1.12) nous obtenons

$$-X_m \cos(t) + (r - gX_m^2 \cos^2(t))X_m \sin(t) + X_m \cos(t) = 0.$$

Nous nous limiterons à l'*approximation du premier harmonique* qui consiste à satisfaire l'équation pour les termes en  $\sin(t)$  et  $\cos(t)$  sans s'occuper des harmoniques supérieurs. Observant que la compensation des termes en cosinus est automatique, occupons nous des termes en sinus. Utilisant les formules classiques  $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$  et  $\cos(2t) \sin(t) = \frac{1}{2}(\sin(3t) - \sin(t))$ , nous obtenons simplement

$$(r - \frac{1}{4}gX_m^2) \sin(t) = 0.$$

qui conduit à

$$r - \frac{1}{4}gX_m^2 = 0 \quad \text{soit} \quad X_m = 2\sqrt{r/g}, \quad (1.13)$$

relation qui fixe univoquement l'amplitude du cycle (l'amplitude du terme en  $\sin(3t)$  est donc d'ordre  $X_m^3$  soit  $\sim r^{3/2} \ll r^{1/2}$  pour  $r$  petit, justifiant ainsi l'expression "régime quasi-harmonique"). Traçant  $X_m$  fonction de  $r$ , nous obtenons un diagramme de bifurcation identique à celui de la bifurcation fourche (Fig. 1.3), mais limité à sa branche  $X_m > 0$  car le changement  $t \mapsto t + \pi$  ramène la branche  $X_m < 0$  sur la précédente.

Selon les auteurs la bifurcation est appelée *bifurcation de Hopf*, *Landau-Hopf*, *Hopf-Andronov*, *Poincaré-Andronov*. La trajectoire périodique vers laquelle tend le système est appelée *cycle limite*. La partie droite de la Fig. 1.5 illustre la déformation des cycles qui deviennent de plus en plus anharmoniques à mesure que  $r$  augmente.

Notre façon d'obtenir le résultat est ici un peu brutale. La recherche d'une solution devrait viser à satisfaire l'équation en projection harmonique par harmonique (cas particulier d'une méthode plus générale, dite *de Galerkin*). En particulier, nous avons supposé que les non-linéarités ne changeaient pas la fréquence, ce qui s'avère ici exact à l'ordre le plus bas en  $r$  mais qui est loin d'être général. Plusieurs méthodes systématiques seront proposées au chapitre 4 pour traiter le problème de façon plus rigoureuse.

### 1.3 Chaos en convection

Dans l'argument qui nous a conduit à l'équation (1.6) nous avons simplement admis que, suffisamment près du seuil, la perturbation saturait à un niveau fini. Il est naturellement possible de faire mieux et de dériver de façon systématique un meilleur modèle à partir des équations de la mécanique des fluides. Nous n'allons pas le faire mais plutôt continuer à développer une formulation heuristique (guidée par le résultat à obtenir !). Gardons  $X$  pour dénoter la perturbation de vitesse et introduisons explicitement la perturbation de température  $Y$ . Notons  $R$  (nombre de Rayleigh) le gradient de température appliqué, convenablement mis à l'échelle, et reprenons le mécanisme. L'accélération verticale est due à la poussée d'Archimède ( $\propto Y$ ), combattue par les effets de viscosité ( $\propto X$ ), de sorte qu'au stade linéaire, on attend:

$$\frac{d}{dt}X = P(Y - X). \quad (1.14)$$

Le coefficient de proportionnalité  $P$ , appelé le nombre de Prandtl, caractérise l'efficacité relative des deux processus dissipatifs, visqueux et thermique. Il s'introduit naturellement lors de l'adimensionnalisation du problème. Passons à l'équation pour la température. Toujours au stade linéaire on peut écrire:

$$\frac{d}{dt}Y = RX - Y. \quad (1.15)$$

Le premier terme au membre de droite correspond au changement de température par advection du gradient appliqué dans le champ de vitesse verticale. Rappelons en effet que, pour une particule fluide suivie dans son

mouvement, la variation d'une propriété  $u$  est due pour une part à sa variation *in situ*,  $\partial u/\partial t$ , et d'autre part à une variation due à l'advection (transport) dans le champ de vitesse,  $(\mathbf{v}\cdot\nabla)u$ . En situation de chauffage par le bas ( $R > 0$ ), une fluctuation de vitesse verticale positive, i.e.,  $X > 0$  fait monter du fluide chaud et contribue à une élévation de température, i.e.  $\frac{d}{dt}Y > 0$ , proportionnelle à l'écart de température imposé mesuré par  $R$ . Quant au second terme, il décrit la relaxation spontanée de la fluctuation de température sous l'effet de la diffusion thermique. L'évolution d'une fluctuation  $(X_0, Y_0)$  se déduit facilement de l'étude de ce système linéaire de deux équations à deux inconnues. Cherchant la solution sous la forme

$$X = X_0 \exp(st), \quad Y = Y_0 \exp(st),$$

on obtient

$$\begin{aligned} sX_0 &= P(Y_0 - X_0), \\ sY_0 &= RX_0 - Y_0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $s$  soit racine de

$$(s + P)(s + 1) - RP = 0 = s^2 + (P + 1)s + P(1 - R). \quad (1.16)$$

Cette équation a deux racines  $s^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( -(P + 1) \pm [(P - 1)^2 + 4PR]^{1/2} \right)$ . Dans le cas général, ces racines peuvent être complexes, i.e.  $s = \sigma + i\omega$  mais pour  $R > 0$  (chauffage par le bas), on vérifie qu'elles sont forcément réelles, i.e.  $s^{(\pm)} \equiv \sigma^{(\pm)}$ . La racine  $\sigma^{(-)}$  est toujours négative. La racine  $\sigma^{(+)}$ , qui correspond au mode le plus instable, est négative pour  $R < 1$  et positive sinon. De cette façon on retrouve, près du seuil, un taux de croissance variant linéairement avec le paramètre de contrôle, comme nous l'avions postulé précédemment, cf. (1.4) avec  $r = R - 1$ .

Essayons maintenant de compléter (1.14–1.15) par des termes non-linéaires issus du terme d'advection. Dans une approximation de type "premier harmonique" spatial, ne devraient contribuer que des termes en résonance avec la dépendance en  $\sin(kx)$  postulée pour les perturbations. De l'équation de continuité de la matière  $\partial_x v_x + \partial_z v_z = 0$ , supposant  $v_z \propto \sin(kx)$  on déduit  $v_x \propto \cos(kx)$  et des dépendances verticales en quadrature. Dans l'équation pour  $v_z$ , le terme d'advection  $v_x \partial_x v_z + v_z \partial_z v_z$  varie donc en  $\sin^2(kx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2kx))$ , donc rien qui soit en résonance avec  $\sin(kx)$ . En valeur moyenne sur l'épaisseur de la couche et sur une longueur d'onde on attend donc une contribution essentiellement négligeable de ces termes et, par suite, rien à ajouter à (1.14) à cet ordre. Le problème est légèrement différent pour (1.15). En effet, raisonnant de la même façon on ne trouverait rien à y ajouter non plus mais, ceci serait sans tenir compte du fait que le flux convectif, identifié à  $v_z \theta$ , modifie le profil de température linéaire et par là l'intensité du mécanisme. Cette correction moyennée sur l'épaisseur de la couche et sur une longueur d'onde, donc indépendante de  $x$ , devient ainsi une variable à part entière, notée  $Z$ , pour laquelle il va falloir écrire une équation d'évolution. Un calcul simple aboutit à

$$\frac{d}{dt}Z = XY - bZ, \quad (1.17)$$

où le premier terme du membre de droite représente le terme indépendant de  $x$  issu de  $v_z \theta = XY \sin^2(kx)$  et le second la relaxation par diffusion thermique de cette composante du champ de température. Transposant l'argument sur la contribution du taux de croissance linéaire, nous admettrons que l'on peut remplacer le paramètre qui mesure l'intensité du mécanisme, soit  $R$ , par une valeur effective  $R - Z$ . De cette façon nous arrivons à

$$\frac{d}{dt}Y = (R - Z)X - Y. \quad (1.18)$$

Les équations (1.14,1.18,1.17) écrites dans cet ordre constituent le célèbre *modèle de Lorenz*. Mathématicien et météorologue, Lorenz l'a en fait déduit en tronquant astucieusement un développement des équations hydrodynamiques sur une base de fonctions trigonométriques.

Montrons tout d'abord qu'il contient le cas simplifié abordé au début du chapitre. Près du seuil, la dynamique de la convection est très lente (taux  $\propto r = R - 1 \ll 1$ ). Or, l'équation (1.17) montre que le temps

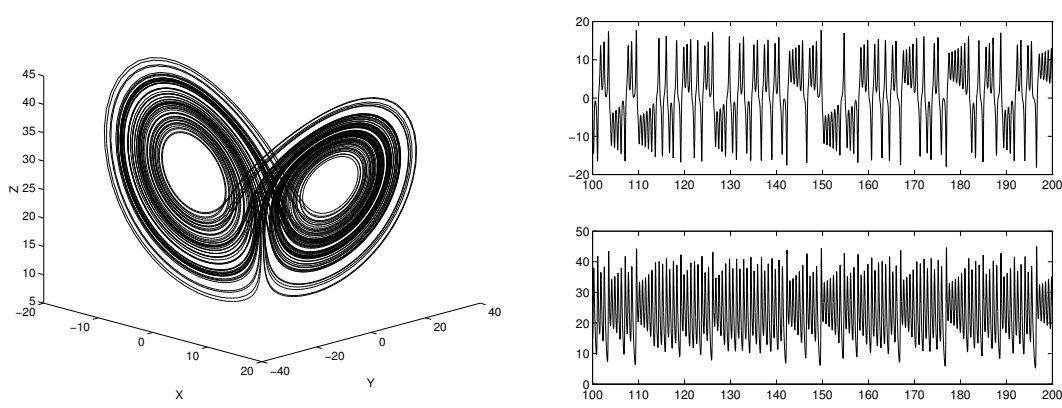


Figure 1.6: Attracteur de Lorenz pour  $R = 28$ . À gauche: Vue en perspective de l'attracteur dans son espace des phases. À droite: Séries temporelles  $X(t)$  (en haut) et  $Z(t)$  (en bas).

de relaxation de la correction  $Z$  reste fini. Nous pouvons donc admettre que  $Z$  relaxe rapidement (taux  $b$ ) vers une valeur lentement variable  $XY/b$  (taux  $\propto r$ ). Reportons cette valeur dans (1.18), et admettons qu'à tout instant  $X = Y$ , ce qui n'est vrai en toute rigueur que si  $P \rightarrow \infty$  d'après (1.14). Nous obtenons:

$$\frac{d}{dt}X = (R - X^2/b)X - X = (R - 1)X - X^3/b \quad (1.19)$$

qui est bien de la forme (1.6) avec  $r = R - 1$  et  $g = 1/b$ . Le modèle de Lorenz rend donc bien compte de la bifurcation super-critique entre régime de conduction ( $X = Y = Z = 0$ ) et convection stationnaire en  $R = 1$ . Le modèle effectif (1.19) constitue un exemple de réduction par "élimination adiabatique des variables esclaves." Ici, les variables  $Y$  et  $Z$  sont esclaves de  $X$ : à tout instant, elles sont fixées par la valeur de  $X$  selon les relations  $Y = X$  et  $Z = X^2/b$ . Nous aurons l'occasion de revenir sur cette importante étape de l'étude des systèmes non-linéaires.

Maintenant se situe un "saut épistémologique" qui consiste à utiliser le modèle hors du domaine où il est asymptotiquement valable. Lorenz a ainsi été amené à s'en servir pour des valeurs arbitraires des paramètres. Les valeurs  $b = 8/3$  et  $P = 10$  avaient été initialement retenues,  $R$  contrôlant les bifurcations du système. En fait, ce modèle est effectivement tridimensionnel dès que  $R$  est suffisamment grand,  $Z$  devenant une variable à part entière puisque son taux naturel d'évolution  $b$  devient rapidement comparable à celui des autres variables. La dynamique de ce système présente des richesses qui vont donc très au delà d'une simple bifurcation fourche !

Dans un premier temps, on peut montrer que les points fixes non-triviaux qui correspondent au régime de convection stationnaire deviennent instables en  $R = 24,74$  (toujours pour  $P = 10$  et  $b = 8/3$ ). Au delà de cette valeur le système entre dans un régime chaotique associé à un *attracteur étrange*. Celui-ci est illustré sur la Fig. 1.6 pour la valeur  $R = 28$  considérée par Lorenz, après élimination du début de la trajectoire correspondant au transitoire.

Pour comprendre ce qui se passe et avancer une explication au comportement apériodique observé sur les graphes de la partie droite de la Fig. 1.6, Lorenz eut l'idée de considérer les maxima successifs de  $Z(t)$  et de porter leur valeur en fonction de celle de leur prédécesseur immédiat, i.e.,  $Z_{k+1} = Z(t_{k+1})$  fonction de  $Z_k = Z(t_k)$ . C'est ce qui a été fait sur la Fig. 1.7. La dynamique originelle, où  $t$  est une variable continue, est ainsi remplacée par une *itération*. Cette itération rend compte d'une caractéristique fondamentale du chaos: l'instabilité des trajectoires sur un attracteur chaotique, ce qui les rend *sensibles aux conditions initiales* et aux petites perturbations, par opposition aux trajectoires régulières sur un attracteur non chaotique. En effet, après une itération, l'écart entre deux trajectoires voisines distantes de  $\delta Z$  se trouve multiplié par la pente locale de la "courbe" donnant  $Z_{k+1}$  en fonction de  $Z_k$ . Or cette "courbe," avec son allure d'accent circonflexe a partout une pente en valeur absolue plus grande que l'unité. En dépit du déterminisme inhérent à l'existence d'une relation bien définie entre  $Z_{k+1}$  et  $Z_k$ , cette amplification indéfinie des écarts interdit la *prédictibilité à long terme* car une condition initiale n'est jamais connue avec une précision infinie; de toute

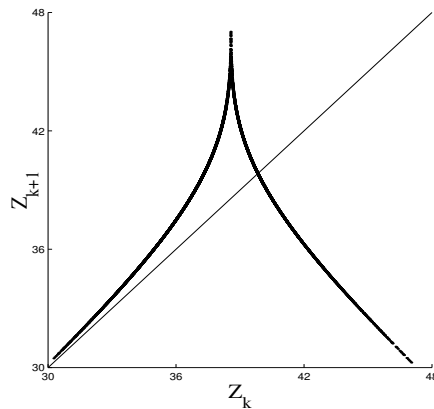


Figure 1.7: Itération donnant  $Z_{k+1}$  en fonction de  $Z_k$ , où  $Z_k$  représente la valeur du maximum atteint par  $Z$  au cours d'une révolution autour des points fixes instables du système.

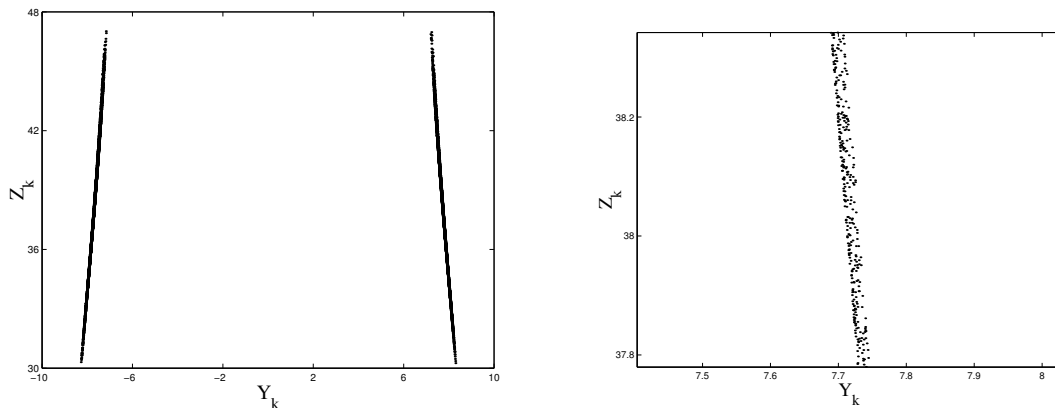


Figure 1.8: Relation empirique entre  $Y$  et  $Z$  lorsque  $Z(t)$  passe par un maximum. À droite: agrandissement montrant que les lignes ont en fait une certaine "épaisseur".

façon, du point de vue physique, ce sont plutôt des *ensembles* de trajectoires décrivant des systèmes préparés de façon similaires qui nous intéressent.

Dans le cas présent, ce remplacement par une *dynamique à temps discret* doit se traduire quelque part par une perte d'information puisque, de trajectoires dans un espace des phases tridimensionnel, on se ramène à une itération pour une seule variable. En fait, choisir d'échantillonner la trajectoire en  $t_k$  correspondant au passage par à un maximum de  $Z$ , i.e.  $\frac{d}{dt}Z = 0$ , donc à la relation  $bZ = XY$  entre les différentes coordonnées, diminue le nombre de variables libres d'une unité. Nous retrouverons plus tard cette une procédure, appelée *section de Poincaré*. Elle conduit naturellement à une itération à deux variables du type  $(Y_{k+1}, Z_{k+1}) = (F_Y(Y_k, Z_k), F_Z(Y_k, Z_k))$  appelée *application de premier retour*. C'est un reflet fidèle de la dynamique puisque, dès que deux coordonnées sont connues, la troisième est déterminée de façon biunivoque par l'équation  $bZ = XY$ , ce qui n'est pas le cas de l'application de Lorenz qui ne fait intervenir que  $Z$ .

La raison pour laquelle cette réduction permet quand même de conclure est illustrée sur la Fig. 1.8 qui relie l'information manquante, ici par exemple  $Y_k = Y(t_k)$  à la valeur du  $Z_k$  correspondant. On y voit que "du point de vue pratique" on ne perd pas beaucoup d'information en admettant  $Y_k = F(Z_k)$ <sup>1</sup> car il faut considérablement agrandir les échelles avant de découvrir que le graphe de cette supposée fonction reliant  $Y$  à  $Z$  a une certaine "épaisseur."

Après avoir examiné sommairement la complexité du système à paramètres fixés, il est naturel de

<sup>1</sup>On perd de toute façon le signe de  $Y_k$  mais c'est sans grande importance du fait de la symétrie  $X \mapsto -X, Y \mapsto -Y, Z \mapsto Z$ .

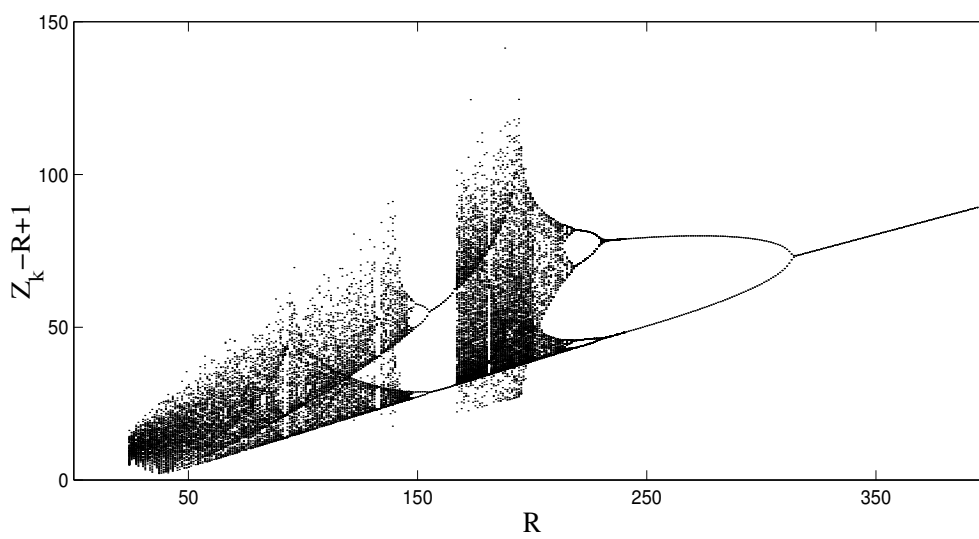


Figure 1.9: Diagramme de bifurcation du modèle de Lorenz: on porte ici en ordonnée l'ensemble des maxima successifs  $Z_k$  de  $Z$  (en fait  $Z_k - R + 1$ ) à  $R$  donné (en abscisse) après élimination d'un transitoire suffisant.

s'intéresser au diagramme de bifurcation du modèle lorsque ses paramètres varient. La Fig. 1.9 présente un tel diagramme couvrant toute la région de convection instationnaire, toujours pour  $P = 10$  et  $b = 8/3$ . L'attracteur est codé en portant une centaine de valeurs successives de  $Z_k - R + 1$  à  $R$  fixé après élimination d'un transitoire suffisant. Deux types de comportement sont faciles à identifier: soit l'attracteur est représenté par un nombre fini de points visités successivement, ce qui va correspondre à un comportement périodique, soit par tout un ensemble de points répartis sur la verticale correspondant à la valeur de  $R$  considérée, points visités de façon irrégulière, ce qui permettra de conclure à un attracteur chaotique.

Quelques-uns de ces différents régimes sont illustrés sur la Fig. 1.10. Nous les passerons en revue par valeurs décroissantes de  $R$ . Tout d'abord, pour  $R > 313$ , l'attracteur est un cycle limite symétrique. Sur la Fig. 1.9 il est représenté par une seule valeur du maximum de  $Z_m$  atteinte pour deux couples de valeurs  $(X_m, Y_m)$  et  $(-X_m, -Y_m)$  comme on le devine de sa projection dans le plan  $(X, Z)$  pour  $R = 350$ .

Une brisure spontanée de symétrie se produit vers  $R = 313$ , de sorte que pour  $R$  un peu inférieur à 313, le cycle limite est représenté par deux maxima en  $Z$  distincts. En fonction des conditions initiales, le système choisit l'un ou l'autre de deux cycles limites possibles, cf. projection  $(X, Z)$  pour  $R = 250$ . La description de cette bifurcation est très analogue à celle correspondant à (1.6), à ceci près qu'elle implique un cycle limite et non un point fixe d'un système à temps continu, de sorte que l'approche théorique repose sur une itération (en  $Z$ ) plutôt qu'une équation différentielle (cf. Ch. 5).

Continuant à diminuer  $R$ , on observe un doublement de période pour  $R \simeq 230$ . Dans l'espace des phases, le cycle apparaît dédoublé (4 maxima de  $Z$  dans le diagramme de bifurcations) et si  $T$  était sa période avant dédoublement, il faut maintenant un temps  $\simeq 2T$  pour revenir strictement au point de départ, cf. figure pour  $R = 220$ . Suit un comportement difficile à suivre dans l'espace du paramètre  $R$  avec une cascade de dédoublements (période 4, 8, ...), la fameuse *cascade de bifurcations sous-harmoniques* (cf. Ch. 6, §6.2.2) puis le chaos (ici pour  $R = 212$ ). Grossièrement parlant, le chaos persiste lorsque  $R$  diminue jusqu'en  $R \simeq 166$ , valeur à laquelle il s'effondre en un nouveau régime périodique illustré ici pour  $R = 150$ . Juste avant l'effondrement, ici pour  $R = 167$ , l'orbite ressemble temporairement au cycle qui va s'établir avant de s'en écarter puis d'y revenir, le tout de façon *intermittente* (cf. Ch. 6, §6.2.3).

Lorsqu'on diminue encore  $R$ , le cycle limite apparu en  $R = 166$  se dédouble à nouveau, subissant une seconde cascade sous-harmonique sur l'intervalle  $145 < R < 166$  se concluant encore par du chaos. Pour des valeurs de  $R$  encore plus petites, le système rejoint la branche de l'attracteur classique pour  $R = 28$  étudié auparavant.

Le modèle de Lorenz nous offre donc plusieurs exemples de bifurcations et de *scénarios* de transition

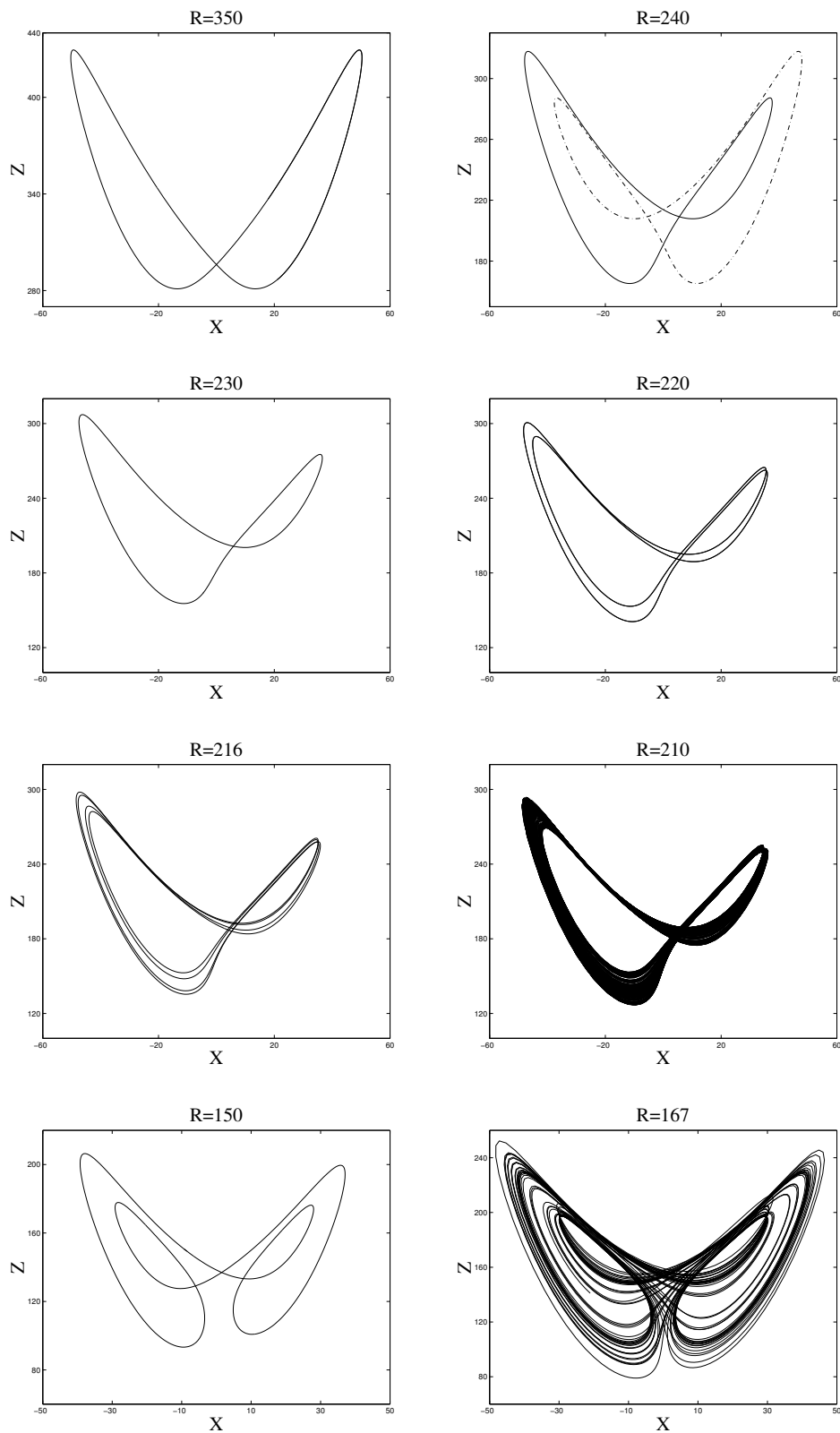


Figure 1.10: Attracteurs pour différentes valeurs de  $R$ .  $R = 350$ : cycle limite symétrique.  $R = 240$ : cycle limite asymétrique (2 possibilités).  $R = 230$ ,  $R = 220$  et  $R = 216$ : 3 étapes de la cascade sous harmonique se développant à partir l'un des deux cycles.  $R = 210$  chaos à l'issue de cette cascade.  $R = 167$  attracteur visitant de façon intermittente le voisinage du cycle limite stable pour  $R = 150$ .



vers le chaos. D'autres systèmes différentiels, tel le modèle de Rössler, auraient pu être utilisés de la même façon pour illustrer les différents processus que nous allons maintenant analyser l'un après l'autre dans les chapitres suivants.

## 1.4 Conclusion

Tout au long de ce chapitre nous avons introduit des notions que nous allons devoir expliciter: celle de système dynamique, de degrés de liberté et d'espace des phases; celle de temps continu ou discret; celle, fondamentale, de *stabilité*. L'idée de réduction par élimination de variables esclaves s'est introduite. C'est grâce à elle que l'on sera en droit de se ramener à des problèmes de basse dimension, c'est à dire où un petit nombre de *variables effectives* suffisent à rendre compte de la dynamique observée.

Pour les introduire, nous nous sommes servis de *modèles*. Ceux-ci ont été construits par des arguments simples, exprimés en termes de mécanismes faisant appel à un amortissement dû à la dissipation et à des rétroactions linéaires et non-linéaires. En général cette modélisation s'avère raisonnablement adéquate dans certains domaines de paramètres. Il est courant de l'utiliser aussi lorsque ce n'est plus strictement justifié. Qu'on puisse en tirer malgré tout des renseignements appréciables tient à ce qu'ils expriment des propriétés *universelles*. Ceci sera concrétisé par l'introduction de *formes normales* aptes à décrire en toute généralité le comportement de systèmes très différents se comportant qualitativement de la même façon. L'équation (1.9) en est un exemple typique qui rend compte de tous les systèmes effectivement unidimensionnels subissant une bifurcation super-critique contrôlée par une non-linéarité cubique.

Cherchant à caractériser les régimes asymptotiques atteints à la limite  $t \rightarrow \infty$  nous avons travaillé par ordre de complexité croissante, passant des comportements stationnaires décrits par des *points fixes* aux régimes périodiques représentés par des *cycles limites* puis aux régimes chaotiques associés à des *attracteurs étranges*. Au delà de l'analyse détaillée des propriétés de chacun, le problème des *bifurcations* de l'un à l'autre, et en particulier des *scénarios* de transition vers le chaos apparaît de prime importance. Le modèle de Lorenz nous en fournit deux exemples: à deux reprises, la transition par cascade de bifurcations sous-harmoniques dont les propriétés universelles sont particulièrement remarquables, et la transition par intermittence. C'est l'universalité des scénarios qui en autorise l'étude en abandonnant toute référence à un problème concret et en postulant des modèles *génériques* sous forme d'itérations analogues à celle introduite par Lorenz.

Un fait remarquable que nous aurons aussi à interpréter est l'augmentation, pour l'instant simplement constatée, de la complexité de la dynamique avec la dimension effective du problème qui passera de 1 à 2, puis 3. En pratique, nous n'aurons pas à dépasser 3, ce qui est heureux car la simple visualisation de la dynamique devient alors difficile. Nous discuterons tout à fait à la fin du cours les limitations de cette approche strictement temporelle, c'est à dire restreinte aux circonstances où les variables d'état du système sont en petit nombre et uniquement fonction du temps.

# Chapitre 2

## Systemes dynamiques

Nous allons introduire de façon un peu plus formelle les concepts entrevus au chapitre précédent. Tout d'abord, nous considérerons la description théorique de la dynamique d'un système donné sous l'angle d'un *modèle mathématique* exprimé en termes de variables d'état et d'équations d'évolution pour ces variables, aboutissant à la formulation d'un problème aux valeurs initiales (§2.1). Puis nous définirons quelques concepts attachés à la notion de stabilité (§2.2) avant de continuer sur la terminologie utilisée pour rendre compte des aspects qualitatifs de la dynamique (§2.3). Enfin, nous terminerons sur la description analytique, à un niveau élémentaire, des systèmes dynamiques rencontrés en mécanique classique (§2.4).

### 2.1 Définitions et propriétés de base

#### 2.1.1 Formulation en termes de systèmes dynamiques

Considérant le système qui nous intéresse sous l'angle de la représentation mathématique de son évolution, nous commençons par admettre qu'un certain ensemble de variables appelées *variables d'état*

$$\mathbf{X} \equiv \{X_j; j = 1, 2, \dots, d\} \quad (2.1)$$

permet de définir entièrement son état *instantané*. Cet ensemble de variables sert naturellement de système de coordonnées canoniques dans un espace appelé *espace des états* que nous noterons  $\mathbb{X}$ . Variables d'état et espace des états sont également fréquemment appelés *degrés de liberté* et *espace des phases*, quoique dans un sens moins spécifique qu'en mécanique analytique (cf. §2.4). Le nombre de composantes de  $\mathbf{X}$ , noté  $d$ , est appelé la *dimension du système*.

Nous nous limitons ici à une évolution strictement *déterministe* dans le sens où la donnée d'un état initial complètement spécifié et d'une règle de calcul permet de passer sans ambiguïté à un état final unique. "Initial" et "final" peuvent faire référence à des "instants" séparés par une durée finie ou au contraire infinitésimale. Dans le premier cas on a affaire à un système dynamique à *temps discret*; la règle d'évolution est alors une itération:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_k; k). \quad (2.2)$$

Dans le second cas le temps est *continu*. On a alors usuellement affaire à un *système d'équations différentielles*:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad (2.3)$$

également appelé *flot*.  $\mathbf{F}$  définit un *champ de vecteurs* sur l'espace des états (pour une illustration explicite, cf. plus loin Fig. 2.6.)

On passe facilement de (2.3) à (2.2) par intégration en écrivant:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dt. \quad (2.4)$$

On définit ainsi une application de  $\mathbb{X}$  sur  $\mathbb{X}$  appelée *application au temps*  $\tau$ , correspondant à une observation régulièrement échantillonnée des trajectoires, ce qui a un sens physique immédiat, contrairement à l’opération inverse, appelée *suspension*, qui consiste à construire un système différentiel (2.3) ayant (2.2) pour application au temps  $\tau$ .

**Remarque 1:** La dimension  $d$  des systèmes dynamiques est, ici, implicitement supposée finie. Cette hypothèse écarte donc *a priori* les milieux continus gouvernés par des équations aux dérivées partielles (e.g., fluides et équations de Navier–Stokes). Par essence, ceux-ci sont des systèmes de dimension infinie dont les “états” sont décrit par des fonctions de l’espace et du temps. Cependant, comme nous l’avons signalé antérieurement, la cohérence spatiale introduite par les différents processus physiques, e.g., diffusion et advection pour la convection, traduit *via* les dérivées partielles spatiales, des conditions de contrainte entre “états” locaux voisins ayant pour effet de diminuer leur liberté, donc d’abaisser la dimension du problème à une valeur effective finie et suffisamment basse.

**Remarque 2:** Supposer que l’état *instantané* du système suffit à en spécifier l’évolution ultérieure écarte aussi les systèmes dont la dynamique garde une *mémoire* des états passés, en particulier les *systèmes à retard*. Dans le cas des systèmes à temps discret, quand l’effet de mémoire est de portée finie, on se ramène facilement au cas considéré ici en ajoutant un nombre suffisant de variables auxiliaires correspondant aux degrés de liberté cachés dans une “mémoire tampon” qui évolue en même temps que le système. Par exemple l’itération

$$X_{k+1} = G(X_k, X_{k-m+1})$$

d’une variable  $X$ , définit un système à retard mettant en jeu  $m$  états:

$$Y_{1,k} = X_k, \quad Y_{2,k} = X_{k-1}, \quad \dots, \quad Y_{m,k} = X_{k-m+1}$$

et s’écrivant:

$$Y_{1,k+1} = G(Y_{1,k}, Y_{m,k}), \quad Y_{2,k+1} = Y_{1,k}, \quad \dots, \quad Y_{m,k+1} = Y_{m-1,k}.$$

Cette écriture met explicitement en évidence qu’il faut  $m$  données pour faire démarrer l’évolution. Ceci s’étend immédiatement aux systèmes à retard définis par des EDOs de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(X(t), X(t - t_r)),$$

dont on comprend immédiatement que ce sont des systèmes de dimension infinie pour lesquels la donnée de la condition initiale en  $t_0$  suppose la spécification d’une fonction  $X(t)$  sur l’intervalle  $[t_0, t_0 - t_r]$ . Dans ce cas, c’est l’existence de temps caractéristiques finis garantissant une certaine cohérence temporelle qui permet la réduction à un système dynamique de dimension effective finie.

**Remarque 3:** Dans le cas des systèmes différentiels, la notion de déterminisme est intimement associée au problème de l’*existence* et de l’*unicité* de la trajectoire passant par un point donné  $X_0$  à un instant donné  $t_0$  (problème de *Cauchy*). En mathématiques, on montre que cette propriété est acquise sur un intervalle de temps fini  $\Delta t$  autour de  $t_0$  moyennant des conditions assez peu restrictives. Il nous suffira en particulier que le champ de vecteurs soit de classe  $\mathcal{C}^1$ , c’est à dire différentiable avec dérivées premières continues. L’équation  $\frac{d}{dt}X = \frac{3}{2}X^{1/3}$ , où  $F(X)$  est non-dérivable en  $X = 0$ , constitue un contre-exemple simple puisque la condition  $X = 0$  en  $t = 0$  est satisfaite par la solution triviale  $X \equiv 0$  pour tout  $t$  et par la solution non triviale  $X = t^{3/2}$ .

Ceci n’est cependant qu’une propriété *locale* en temps car rien n’empêche que la trajectoire ne soit plus définie pour des temps arbitrairement grands. C’est en particulier le cas pour  $\frac{d}{dt}X = X^2$  sur  $\mathbb{R}$  dont l’intégration est élémentaire. Partant de la condition initiale  $X(t = 0) = X_0$  on trouve  $1/X - 1/X_0 = -t$ , soit  $X = X_0/(1 - X_0t)$ . Si  $X_0$  est négatif,  $X$  tend vers zéro par valeurs négatives comme  $1/t$ , mais si  $X_0$  est positif,  $X$  tend vers l’infini en un temps fini,  $t_* = 1/X_0$ , de sorte que la trajectoire n’est plus définie au delà.

Le problème vient de ce que  $\mathbb{R}$  n'est pas *compact* (i.e., équivalent en dimension finie à un ensemble fermé et borné). On montre en effet que si l'espace des phases est compact, la propriété d'existence et d'unicité de locale en temps devient *globale*. Comme exemple d'espace compact on peut citer le cercle, souvent noté  $\mathbb{S}^1$  (sphère à une dimension). Définir le système  $\frac{d}{dt}X = F(X; t)$  sur le cercle implique que  $F$  soit périodique en  $X$ , e.g.,  $F(X + 1; t) \equiv F(X; t)$ . Le tore  $\mathbb{T}^n$ , produit cartésien de  $n$  cercles plongé dans un espace de dimension  $d > n$  en est un autre exemple.

Lorsque l'existence et l'unicité des trajectoires est partout garantie sur un intervalle de temps  $\Delta t > \tau$ , il est clair que l'on ne perd pas d'information à considérer l'application au temps  $\tau$  (2.4) plutôt que le système à temps continu dont elle est issue. Dans le même esprit, quand les trajectoires sont définies en tout temps, la donnée du système (2.3) est équivalente à celle d'un *opérateur d'évolution* agissant sur l'espace des phases et généralisant à des temps arbitraires continûment variables la transformation (2.4). Sauf dans le cas linéaire (cf. chapitre 3, §3.2), cette définition est cependant formelle car l'intégration analytique du système est le plus souvent impossible.

### 2.1.2 Réduction au premier ordre

Il peut arriver que la formulation physique d'un problème aboutisse à des systèmes d'équations différentielles d'ordre élevé. C'est en particulier le cas des formulations newtonienne et lagrangienne de la mécanique (cf. §2.4). Il est alors commode de se ramener systématiquement à des systèmes du premier ordre en ajoutant des variables auxiliaires. Partons par exemple d'une seule équation différentielle d'ordre  $n$  écrite sous la forme

$$F(d^n V/dt^n, d^{n-1}V/dt^{n-1}, \dots, d^2V/dt^2, dV/dt, V; t) = 0, \quad (2.5)$$

et commençons par la résoudre en  $d^n V/dt^n$ . Écrivons donc

$$\frac{d^n}{dt^n}V = \tilde{F}(d^{n-1}V/dt^{n-1}, \dots, dV/dt, V; t) \quad (2.6)$$

et posons  $V = X_1$ ,  $dV/dt = X_2$ ,  $\dots$ ,  $d^{n-1}V/dt^{n-1} = X_n$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X_1 &= X_2, \\ \frac{d}{dt}X_2 &= X_3, \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}X_{n-1} &= X_n, \\ \frac{d}{dt}X_n &= \tilde{F}(X_{n-1}, \dots, X_2, X_1; t). \end{aligned}$$

Cette transformation *canonique* est notamment indispensable lorsqu'il s'agit d'intégrer le système numériquement.

### 2.1.3 Systèmes autonomes ou non

Lorsque l'indice  $k$  ou le temps  $t$  n'apparaissent pas explicitement dans les relations (2.2) ou (2.3), on parle de système *autonome*. On peut alors choisir arbitrairement l'origine du temps (discret ou continu). Sinon, on a affaire à un système *forcé* qui fait référence à une échelle de temps absolue. On peut cependant ramener un système forcé à un système autonome au prix d'une augmentation de sa dimension. Prenons par exemple le cas d'un système dynamique à temps continu  $t$  et considérons l'espace des phases élargi  $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \times \mathbb{R}$  ayant pour degrés de liberté  $\mathbf{Y} = \{X_1; \dots; X_d, U\}$ . Alors, le système  $\frac{d}{dt}\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$  défini par

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, U), \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt}U = 1, \quad (2.8)$$

est formellement autonome. L'intégration, triviale, de l'équation (2.8) pour  $U$ ,  $U = t + U_0$ , introduit une constante d'intégration qui joue le rôle de condition initiale supplémentaire: la "phase"  $U_0$  du système par rapport au forçage (en général périodique). Autrement dit, l'instant choisi pour fixer la condition initiale en  $\mathbf{X}$  est partie intégrante du problème aux valeurs initiales.

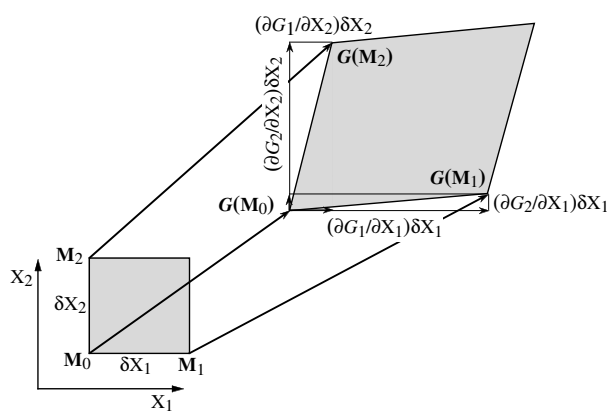


Figure 2.1 : Transformation d'un pavé infinitésimal par une application bidimensionnelle  $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_k)$ .

**Remarque:** De notre champ d'étude se trouvent donc écartés les systèmes décrits par des équations différentielles "à la Langevin" de la forme  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\xi}(t)$  où  $\boldsymbol{\xi}$  représente un "bruit" destiné à modéliser un grand nombre de variables cachées. L'exemple classique correspondant est le mouvement brownien d'une grosse particule dans un fluide visqueux où le champ  $\mathbf{F}$  modélise à la fois les forces extérieures auxquelles la particule est soumise (e.g., électrique) et l'effet macroscopique du bain dans lequel elle est plongée (frottement visqueux) tandis que  $\boldsymbol{\xi}(t)$  représente les effets individuels des molécules du fluide composant le bain. La dynamique de tels systèmes présente des aspects aléatoires considérés comme *extrinsèques*, que  $\mathbf{F}$  soit linéaire ou non. Nous serons au contraire plutôt concernés par l'origine *intrinsèque* de la stochasticité associée aux non-linéarités dans les systèmes strictement déterministes. Ceci ne veut pas dire pour autant que l'effet du bruit sur ces derniers soit sans intérêt.

### 2.1.4 Systèmes conservatifs ou non

Le caractère *conservatif* ou non de la dynamique fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace des phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles (problème aux valeurs initiales). Maintenant nous considérons des ensembles de trajectoires issues de domaines découpés dans l'espace des phases. Physiquement, cela prend son sens quand on observe que tout essai concret de détermination de l'état d'un système fait appel à des mesures qui ne sont pas infiniment précises mais au contraire entachées d'erreurs qui les rendent compatibles avec un ensemble d'états appartenant à un petit pavé de l'espace des phases. Au stade différentiel, il est légitime d'admettre qu'au voisinage d'un point  $\mathbf{X}_0(X_1, \dots, X_d)$  le nombre d'états accessibles dans un pavé infinitésimal construit sur  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_0 + \delta X_j \mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, d$ ;  $\mathbf{e}_j$  vecteur unité dans la direction  $j$ ), soit *a priori* simplement donné par le volume  $\delta\mathcal{V}$  de ce pavé (mesure de Lebesgue sur l'espace des phases), soit  $\delta\mathcal{V} = \prod_{j=1}^d \delta X_j$ .

Déterminons maintenant l'évolution de ce volume dans le cas simple d'une itération bidimensionnelle,  $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_k)$ , supposant  $\mathbf{G}$  différentiable. Les transformés des coins  $\mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  du pavé sont donc donnés respectivement par:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}'_0 = \mathbf{G}(\mathbf{X}_0) &\equiv \{G_1(X_1, X_2); G_2(X_1, X_2)\}, \\
\mathbf{X}'_1 = \mathbf{G}(\mathbf{X}_1) &\equiv \{G_1(X_1 + \delta X_1, X_2); G_2(X_1 + \delta X_1, X_2)\} \\
&= \{G_1(X_1, X_2) + \delta X_1 \partial_{X_1} G_1(X_1, X_2); G_2(X_1, X_2) + \delta X_1 \partial_{X_1} G_2(X_1, X_2)\}, \\
\mathbf{X}'_2 = \mathbf{G}(\mathbf{X}_2) &\equiv \{G_1(X_1, X_2 + \delta X_2); G_2(X_1, X_2 + \delta X_2)\} \\
&= \{G_1(X_1, X_2) + \delta X_2 \partial_{X_2} G_1(X_1, X_2); G_2(X_1, X_2) + \delta X_2 \partial_{X_2} G_2(X_1, X_2)\}.
\end{aligned}$$

A l'ordre le plus bas, la surface du transformé du pavé est déduite du produit vectoriel des vecteurs  $\mathbf{X}'_0 \mathbf{X}'_1$

et  $\mathbf{X}'_0 \mathbf{X}'_2$  (cf. Fig. 2.1) qui s'écrit algébriquement:

$$\begin{vmatrix} \delta X_1 \partial_{X_1} G_1 & \delta X_2 \partial_{X_2} G_1 \\ \delta X_1 \partial_{X_1} G_2 & \delta X_2 \partial_{X_2} G_2 \end{vmatrix} = \delta X_1 \delta X_2 \begin{vmatrix} \partial_{X_1} G_1 & \partial_{X_2} G_1 \\ \partial_{X_1} G_2 & \partial_{X_2} G_2 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Le déterminant qui apparaît au membre de droite n'est autre que le jacobien  $J$  de la transformation (déterminant de la matrice jacobienne), calculé au point de départ  $(X_1, X_2)$ . Ceci vaut pour une surface orientée car  $\mathbf{G}$  peut en effet changer le sens du repère. Faisant abstraction du signe de  $J$ , on observe donc que le caractère localement contractant, conservatif ou dilatant de l'application dépend la valeur de  $|J|$ , plus petit, égal ou plus grand que 1. On admettra sans peine la généralisation en dimension  $d$ .

On peut maintenant appliquer ce résultat à un système différentiel en considérant l'application au temps  $\tau$  pour un intervalle de temps infinitésimal  $\delta t$ . Soit  $\mathbf{G}$  le résultat de l'évolution sur l'intervalle de temps  $\delta t$  d'un système gouverné par:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_1 &= F_1(X_1, X_2), \\ \frac{d}{dt} X_2 &= F_2(X_1, X_2). \end{aligned}$$

A l'ordre le plus bas en  $\delta t$  on trouve

$$\begin{aligned} G_1(X_1, X_2) &= X_1 + F_1(X_1, X_2) \delta t, \\ G_2(X_1, X_2) &= X_2 + F_2(X_1, X_2) \delta t. \end{aligned}$$

Cette application, voisine de l'identité, ne saurait changer le sens du repère. Il vient:

$$\begin{aligned} \partial_{X_1} G_1(X_1, X_2) &= 1 + \partial_{X_1} F_1(X_1, X_2) \delta t, \\ \partial_{X_2} G_1(X_1, X_2) &= \partial_{X_2} F_1(X_1, X_2) \delta t, \end{aligned}$$

et deux expressions similaires pour  $G_2$ . En reportant dans l'expression du déterminant on obtient immédiatement

$$J = 1 + (\partial_{X_1} F_1 + \partial_{X_2} F_2) \delta t$$

Passant à la limite  $\delta t \rightarrow 0$  on récrit le résultat sous sa forme générale:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathcal{V} = (\operatorname{div} \mathbf{F}) \delta \mathcal{V}, \quad (2.10)$$

où

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^d \partial_{X_j} F_j(X_1, \dots, X_d)$$

est la divergence du champ de vecteur. Ce dernier est donc localement contractant, conservatif ou dilatant selon que  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  est négatif, nul ou positif.

Dans l'exemple de l'oscillateur linéaire généralisé,  $\frac{d^2}{dt^2} X + \gamma \frac{d}{dt} X + X = 0$ , de préférence écrit sous la forme  $\frac{d}{dt} X = Y$ ,  $\frac{d}{dt} Y = -X - \gamma Y$ , on obtient ainsi  $\operatorname{div} \mathbf{F} = -\gamma$ , ce que l'on peut immédiatement relier aux comportements illustrés sur la Fig. 2.2.

### 2.1.5 Systèmes gradients ou non

Considérons tout d'abord un système dynamique autonome à une seule variable réelle

$$\frac{d}{dt} X = F(X). \quad (2.11)$$

$F$  étant une fonction d'une variable, on peut, au moins formellement, en déterminer la primitive

$$G(X) = - \int F(X) dX$$

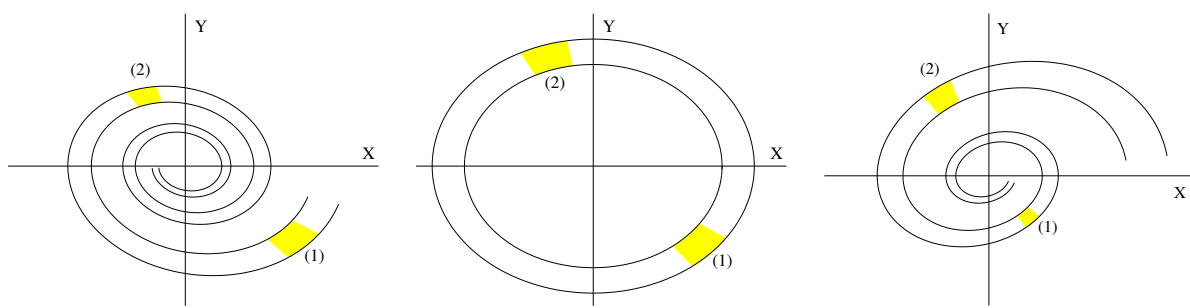


Figure 2.2: De gauche à droite: Érosion, conservation ou expansion des volumes dans l'espace des phases pour l'oscillateur linéaire  $\frac{d^2}{dt^2}X + \gamma \frac{d}{dt}X + X = 0$  avec  $\gamma$  respectivement positif, nul ou négatif.

et récrire (2.11) sous la forme

$$\frac{d}{dt}X = -\frac{dG}{dX}. \quad (2.12)$$

De cette expression on déduit immédiatement que  $G$  décroît au cours du temps. Il vient en effet:

$$\frac{d}{dt}G = \frac{dG}{dX} \frac{d}{dt}X = -\left(F(X)\right)^2 \leq 0, \quad (2.13)$$

de sorte que, pour presque toute condition initiale, l'évolution du système correspond à la recherche des minima locaux du potentiel  $G$ .

En dimension plus élevée, une large classe de problèmes d'évolution peut être définie par l'extension de (2.12) partant de la donnée d'un potentiel  $G(X_1, \dots, X_d)$ , soit

$$\frac{d}{dt}X_j = F_j(X_1, \dots, X_d) = -\frac{\partial G}{\partial X_j}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.14)$$

Par construction, le champ de vecteurs est partout *perpendiculaire* aux courbes de niveau du potentiel (cf. Fig. 2.3, gauche). L'extension de la relation (2.13) s'écrit

$$\frac{d}{dt}G = \sum_j (\partial G / \partial X_j) \frac{d}{dt}X_j = -\sum_n (F_j)^2 \leq 0. \quad (2.15)$$

et correspond encore à une évolution irréversible vers les minima locaux de  $G$ . De tels systèmes sont appelés *systèmes gradients* ou *flots de gradient*.

Réciproquement, pour pouvoir faire dériver un système  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  d'un potentiel  $G$ , il faut que les composantes de son champ de vecteurs vérifient:

$$\frac{\partial F_j}{\partial X_{j'}} = \frac{\partial F_{j'}}{\partial X_j}, \quad \forall j, j',$$

conditions qui découlent de l'identité de Schwartz  $\partial^2 G / \partial X_j \partial X_{j'} = \partial^2 G / \partial X_{j'} \partial X_j$  pour le potentiel  $G$  cherché.

Dans le cas général, les composantes du champ de vecteur ne vérifient pas ces conditions et l'on peut s'attendre à une dynamique plus riche qu'une "simple" relaxation vers un minimum local de  $G$ . Voir par exemple le cas des systèmes mécaniques pour lesquels l'évolution préserve l'énergie totale de sorte que le champ de vecteurs donné par les équations de Hamilton est partout tangent aux surfaces d'iso-énergie (cf. Fig. 2.3, droite, et §2.4).

**Remarque:** Le fait pour un système de dériver éventuellement d'un potentiel n'est pas limité au cas des degrés de liberté discrets gouvernés par des équations différentielles mais s'étend aussi aux champs continus  $V(\mathbf{x}, t)$  gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Le potentiel est alors donné comme l'intégrale sur un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace physique d'une densité de potentiel:

$$G = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathcal{G}(V, \nabla V).$$

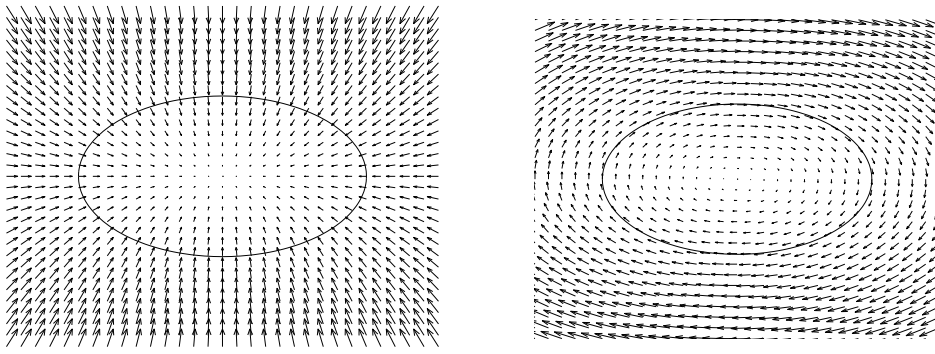


Figure 2.3: A gauche: Pour un système flot de gradient, ici,  $\frac{d}{dt}X_1 = \sigma_1 X_1$ ,  $\frac{d}{dt}X_2 = \sigma_2 X_2$  ( $\sigma_1, \sigma_2$  négatifs) le champ de vecteur est partout perpendiculaire aux courbes de niveau du potentiel  $G = \frac{1}{2}(\sigma_1 X_1^2 + \sigma_2 X_2^2)$ . A droite: Pour l'oscillateur harmonique, gouverné par  $m\frac{d}{dt}X = P$ ,  $\frac{d}{dt}P = -kX$ , l'énergie totale  $E = P^2/2m + kX^2/2$  est conservée et les trajectoires sont partout tangentes aux lignes  $E = \text{Cste}$ .

Il faut ensuite exprimer que l'évolution de  $V(\mathbf{x}, t)$  implique une diminution de  $G(t)$  entièrement consommée par la dissipation. Supposant que  $\mathcal{G}(V, \nabla V)$  ne contienne pas de dérivée partielle spatiale d'ordre supérieur à 1 on obtient la variation  $\delta G$  associée à une variation  $\delta V$  sous la forme

$$\delta G = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial V} \delta V + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla V} \delta(\nabla V) \right). \quad (2.16)$$

Mais les variations de  $\nabla V$  ne sont pas indépendantes de celles de  $V$ . Classiquement, on élimine toute référence à  $\delta(\nabla V) \equiv \nabla(\delta V)$ , en intégrant (2.16) par parties, ce qui donne:

$$\delta G = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial V} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla V} \right) \right] \delta V + \text{termes de surface}.$$

Généralement, les conditions aux limites imposées à  $V$  annulent le terme de surface automatiquement, sinon on suppose simplement la contribution de surface négligeable devant la contribution en volume représentée par l'intégrale restante. (Si  $\mathcal{G}$  contient des dérivées partielles d'ordre plus élevé, il faut procéder à plusieurs intégrations par parties.) Considérant (2.15), par analogie on est alors conduit à identifier le terme en facteur de  $\delta V$  comme l'opposé de la *force généralisée* qui gouverne l'évolution de  $V$ , soit:

$$\partial_t V \propto -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial V} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nabla V} \right). \quad (2.17)$$

En thermodynamique des transitions de phases, on part ainsi une énergie libre de Ginzburg–Landau:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}K(\nabla M)^2 + \frac{1}{2}aM^2 + \frac{1}{4}bM^4, \quad (2.18)$$

où  $M(\mathbf{x}, t)$  est le *paramètre d'ordre* de la transition (l'aimantation pour la transition para-ferro en magnétisme),  $K$  est un coefficient de couplage spatial, expression macroscopique du coefficient d'échange rendant compte des interactions entre spins voisins. Les deux coefficients  $a$  et  $b$  dérivent du développement de Taylor de l'énergie libre en puissances de  $M$ , avec  $a \propto (T_c - T)$ , où  $T$  est la température et  $T_c$  la température de transition (ou température critique). L'application de la formule (2.17) à (2.18) conduit directement à

$$(1/\Lambda)\partial_t M = -aM + bM^3 + J\nabla^2 M, \quad (2.19)$$

où le coefficient cinétique  $\Lambda$  fixe l'échelle temporelle associée à la relaxation du paramètre d'ordre. L'équation (2.19), dite de Ginzburg–Landau, ou ses généralisations, permet de décrire de nombreuses situations inhomogènes en thermodynamique au voisinage de l'équilibre.

La nature relaxationnelle de la dynamique décrite par (2.19) découle du caractère réel des coefficients de ses différents termes. Loin de l'équilibre, le problème se pose en fait souvent en sens inverse: connaissant les équations qui gouvernent la description "à grande échelle" du système, peut-on trouver un potentiel dont



elles dérivent et profiter ainsi des “bonnes” propriétés qui en découlent. En pratique, il s’avère génériquement nécessaire de passer à des champs de paramètre d’ordre complexes et, bien que la structure des équations obtenues soit d’une forme qui s’apparente à (2.17), la présence de coefficients complexes interdit de trouver un potentiel exact qui permette de les obtenir de la même façon et se traduit par une dynamique beaucoup plus riche qu’une simple relaxation.

## 2.2 Stabilité

### 2.2.1 Introduction

Comme nous l’avons déjà indiqué, la définition d’une trajectoire particulière suppose la donnée de conditions initiales avec une précision “mathématique” irréalisable du point de vue physique. Bien pire, on a rarement la possibilité de “préparer” le système étudié de façon précise. Heureusement, les trajectoires individuelles importent peu. Ce qui s’avère au contraire essentiel, c’est la nature du *régime permanent* qui s’installe dans des conditions données, après que se soit effacée (au moins partiellement) la mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière. Le régime permanent est le régime asymptotique atteint “longtemps” après l’extinction du *transitoire*. Le problème de base est donc de rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales accessibles. La distinction entre transitoire et régime permanent suppose implicitement l’existence d’une “dissipation” qui garantisse la perte de mémoire des conditions initiales, ce qui exclut donc le cas des systèmes conservatifs.

Les régimes permanents les plus simples sont cherchés sous forme de solutions particulières du système de départ. Ces solutions sont couramment appelées *états de base*. Supposés connus, ceux-ci peuvent être observables ou non. Pour être observable, un état de base doit être *stable*, c’est à dire doit pouvoir résister aux perturbations. Ceci suppose qu’il puisse, au préalable, être atteint d’un ensemble suffisamment vaste de conditions initiales. Ces deux propriétés sont liées *via* les notions d’*attracteur* et de *bassin d’attraction* qui seront précisées plus loin (§2.3.4).

Habituellement, le système considéré dépend de paramètres de contrôle que nous noterons symboliquement  $r$ . Les états de base possibles seront donc fonction de  $r$  ainsi que leurs propriétés de stabilité. Lorsque ceux-ci varient, un état de base donné peut perdre sa stabilité, provoquant la *bifurcation* du système vers un autre état. Pour alléger les notations, nous ne mentionnerons explicitement la dépendance en  $r$  du système et de ses états de base qu’en cas de besoin.

Nous nous limiterons ici au cas des systèmes dynamiques à temps continu. Le cas parallèle des systèmes à temps discret ne sera évoqué qu’incidemment, les changements de définition requis étant assez évidents (voir la fin de §2.2.3). Considérons donc un état de base particulier d’un système dynamique autonome défini par

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (2.20)$$

Cet état de base, noté  $\mathbf{X}^{(0)}$  vérifie donc:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}). \quad (2.21)$$

La solution générale  $\mathbf{X}$  peut s’écrire  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{X}'$ , où  $\mathbf{X}'$  est interprétée comme une *perturbation* à  $\mathbf{X}^{(0)}$ . Par différence nous obtenons un nouveau système dynamique pour  $\mathbf{X}'$ ,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{X}') - \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}) = \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}^{(0)}}(\mathbf{X}'). \quad (2.22)$$

Nous sommes donc ramenés à un problème aux valeurs initiales pour  $\mathbf{X}'$  admettant, par construction,  $\mathbf{X}' \equiv 0$  pour solution.

Nous nous restreignons ici au cas d’un état de base indépendant du temps,<sup>1</sup> on a alors  $\frac{d}{dt}\mathbf{X}^{(0)} \equiv 0$ . Le cas d’un état dépendant du temps (en pratique: périodique) est techniquement plus difficile mais formellement cela ne fait aucune différence une fois le problème écrit sous la forme (2.22) pour la perturbation  $\mathbf{X}'$ .

---

<sup>1</sup>On dit également *stationnaire* mais ce terme est un peu ambigu car “régime stationnaire” peut aussi signifier “régime permanent” dans le sens donné plus haut à cette expression.

On dira que l'état de base  $\mathbf{X}^{(0)}$  est *uniformément stable*<sup>2</sup> si la perturbation reste sous contrôle et qu'il est *asymptotiquement stable* si elle décroît indéfiniment à mesure que le temps s'écoule. Pour donner un sens quantitatif à ces définitions il faut définir une norme sur l'espace des phases  $\|\dots\|$ , norme qui servira à mesurer l'amplitude de la perturbation.

Donc, plus formellement

- $\mathbf{X}^{(0)}$  est dit *uniformément stable* si pour tout  $\epsilon > 0$ , et tout  $T > 0$  donnés, on sait trouver  $\delta$  tel que  $\|\mathbf{X}'(0)\| < \delta$  implique  $\|\mathbf{X}'(t)\| < \epsilon$  pour  $t > T$ ,
- $\mathbf{X}^{(0)}$  est dit *asymptotiquement stable* si, de plus,  $\|\mathbf{X}'(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Dans la suite de cette section, nous commençons par exposer les concepts *globaux*, §2.2.2, c'est à dire ceux qui ne posent pas de condition *a priori* sur la forme et l'amplitude de la perturbation. Le résultat de cette approche s'exprime sous forme de *conditions suffisantes de stabilité* donnant des bornes souvent très en retrait par rapport à réalité concrète. Au contraire, lorsqu'on pratique une analyse *locale* en se restreignant à des perturbations infinitésimales, on sait pousser l'analyse plus loin et en particulier préciser la forme des perturbations qui rendent le système instable. On aboutit alors à des *conditions suffisantes d'instabilité*, ou, ce qui revient au même des *conditions nécessaires de stabilité* souvent plus réalistes et plus utiles, §2.2.3. Le revers de la médaille en est une portée éventuellement fortement limitée par les effets non-linéaires.

## 2.2.2 Approche globale

En thermodynamique, la stabilité de l'équilibre est discutée en termes de minima d'un potentiel approprié. Les méthodes globales visent à construire des potentiels plus généraux applicables aussi dans des conditions hors d'équilibre. Ces potentiels sont des fonctionnelles définies sur l'espace des phases et portent souvent le nom de *fonctions de Lyapunov*. Nous supposons ici que l'état de base est stationnaire et que, par un changement de coordonnées, il se trouve ramené à l'origine de l'espace des phases (i.e.,  $\mathbf{X}^{(0)} \equiv 0$ ).

Soit  $G(\mathbf{X}')$  une fonctionnelle définie sur l'espace des phases, fonction de la perturbation  $\mathbf{X}'$ , continue et à dérivées partielles du premier ordre continues. Nous demandons en outre qu'elle soit *définie positive*, c'est à dire telle que  $G(\mathbf{X}' = 0) = 0$  et  $G(\mathbf{X}' \neq 0) > 0$ . Nous dirons que c'est une *fonction de Lyapunov* si, en tant que fonction de  $t$  à travers  $\mathbf{X}'$ , elle est monotone décroissante, soit  $dG/dt \leq 0$ .

On peut alors montrer (théorèmes de Lyapunov) que si un tel  $G$  existe, alors  $\mathbf{X}^{(0)}$  est uniformément stable (pour cela il faut considérer les lignes de niveau de  $G$ ). Si en outre, en tant que fonction de  $\mathbf{X}$ ,  $dG/dt$  est définie négative, alors  $\mathbf{X}^{(0)}$  est asymptotiquement stable.

La *méthode de l'énergie* fournit une recette simple pour trouver un  $G$  particulier. Partons de l'exemple de la relaxation visqueuse décrite par  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\eta \mathbf{v}$ . L'énergie cinétique  $E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$  est une quantité définie positive et  $\frac{d}{dt} E = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot (-\eta \mathbf{v}) = -\eta \mathbf{v}^2$  qui est définie négative. La solution triviale " $\mathbf{v} = 0$ " est bien évidemment asymptotiquement stable. Considérons maintenant la généralisation à un système de la forme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{X} = \{X_1; \dots; X_d\},$$

convenablement translaté pour qu'il admette  $\mathbf{X}^{(0)} \equiv 0$  comme état de base, de sorte que  $\mathbf{X} \neq 0$  représente alors directement la perturbation à cet état. Nous sommes conduits à introduire une "jauge"  $G(\mathbf{X}) = \sum_{j,j'=1}^d \alpha_{jj'} X_j X_{j'}$ , forme quadratique construite sur les composantes de  $\mathbf{X}$  de structure analogue à l'énergie conventionnelle. Le choix des coefficients  $\alpha_{jj'}$  est entièrement libre pour autant qu'il préserve le caractère défini positif de  $G$ . Le problème qui se pose consiste à chercher les paramètres  $\alpha_{jj'}$  donnant les meilleures propriétés possibles à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G &= \sum_{j,j'=1}^d \alpha_{jj'} \left( X_j \frac{d}{dt} X_{j'} + X_{j'} \frac{d}{dt} X_j \right) \\ &= \sum_{j,j'=1}^d \alpha_{jj'} (X_j F_{j'} + X_{j'} F_j), \end{aligned} \tag{2.23}$$

<sup>2</sup>Faisant plus ou moins référence à la mécanique céleste, on parle également de *stabilité orbitale*, voir plus loin §2.3.2 et §2.4.

comprise comme une fonction de  $\mathbf{X}$ . L'idéal serait bien sûr de trouver un jeu de paramètres qui rende le membre de droite de (2.23) négatif, faisant de  $G$  une fonction de Lyapunov. Supposant  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X})$  où  $\mathbf{L}$  est un opérateur linéaire et  $\mathbf{N}(\mathbf{X})$  un reste non-linéaire (donc au moins quadratique si  $\mathbf{F}$  est développable en série), on vérifie que les termes de degrés le plus bas dans (2.23) s'écrivent  $\sum_{j,j',j''} \alpha_{jj''} L_{j''j'} X_j X_{j'}$ . Si l'on peut trouver un ensemble de paramètre  $\alpha_{jj''}$  qui rende cette forme quadratique (de coefficients  $\beta_{jj'} = \sum_{j''} \alpha_{jj''} L_{j''j'}$ ) définie négative, on est assuré de la stabilité asymptotique de l'origine pour des perturbations suffisamment petites car dans (2.23), ce terme domine le résidu qui est au moins cubique (voir plus loin §2.3.4 pour une application concrète). Dans un deuxième temps, on peut s'intéresser aux propriétés "loin de l'origine" du  $G(\mathbf{X})$  ainsi construit et déterminer  $\underline{G} = \inf_{\mathbf{X}} \{G(\mathbf{X})\}$ , tel qu'il existe des conditions initiales  $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$  qui déstabilisent l'état de base, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) \neq \mathbf{X}^{(0)}$ . La connaissance de la borne  $\underline{G}$  en fonction des paramètres de contrôle présente un intérêt de principe puisque l'on est alors assuré que toute condition initiale prise dans le domaine<sup>3</sup>  $\{\mathbf{X} : G(\mathbf{X}) < \underline{G}\}$  relaxe vers l'état de base, alors que cela peut ne pas être le cas en dehors, ce qui définit un seuil de *stabilité conditionnelle*.

Plutôt que de chercher une jauge sophistiquée, on se contente souvent de l'extension triviale de l'énergie cinétique:  $E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d X_j^2$ . Observant que  $E$  ainsi défini n'est autre que le carré de la distance à l'origine, on note alors immédiatement que la condition " $\frac{d}{dt} E < 0$ " exprime le simple fait que, dans ces variables, le champ de vecteur sur une sphère de rayon  $\sqrt{2E}$  centrée à l'origine pointe partout vers l'intérieur de la sphère ( $\sum_j X_j F_j$  est en effet le produit scalaire du champ de vecteur  $\mathbf{F}$  et du rayon vecteur joignant l'origine au point de coordonnées  $\mathbf{X}$ ).

Dans le cas particulier de la mécanique des fluides, comme on le vérifie aisément sur le modèle de Lorenz qui en dérive (cf. Chap. 1, §1.3) les termes non-linéaires des équations d'évolution préservent l'énergie  $E$  de sorte que (2.23) se limite à une forme quadratique (les termes cubiques s'annulent identiquement). La condition pour que  $\frac{d}{dt} E$  soit négatif ne porte alors que sur le caractère défini négatif de cette forme et pas sur l'amplitude de la condition initiale qui peut être évacuée par une simple homothétie. Cette condition est donc en essence *globale*. Variant le paramètre de contrôle, on passe lors d'une situation où elle est satisfaite à une autre où elle est violée, définissant un seuil dit de *stabilité globale monotone*. Ce seuil, le seul qui soit relativement facilement accessible, reste malheureusement le plus souvent loin d'être optimal.

Différents concepts de stabilité découlent donc de la méthode de l'énergie convenablement optimisée en termes de fonction de jauge  $G$ , et naturellement fonction d'un paramètre de contrôle  $r$ :

- *stabilité globale monotone* (méthode de l'énergie,  $r < r_m$ ) si l'énergie  $E$  contenue dans une perturbation arbitraire ne peut que décroître,
- *stabilité globale* ( $r < r_g$ ) si l'état de base reste stable, i.e., l'énergie généralisée optimale  $G$  contenue dans une perturbation arbitraire finit par décroître même si sa variation n'est pas monotone.
- *stabilité conditionnelle* si il existe une borne  $\underline{G}(r)$  telle que le système retourne à l'état de base pour toute perturbation telle que  $G(t=0) < \underline{G}(r)$ .
- *instabilité linéaire* ( $r > r_c$ , "c" pour "critique") si l'état de base est instable vis à vis de certaines perturbations infinitésimales, ce qui interdit toute décroissance asymptotique de  $G$ .

La notion de stabilité est par essence conditionnelle (cf. pour tout  $\epsilon, T$ , il existe  $\delta \dots$ ). La condition de stabilité globale monotone reposant sur l'énergie  $E$  est une condition suffisante de stabilité *inconditionnelle*. Elle est en général très restrictive. Une condition de stabilité globale reposant sur un  $G$  optimal serait plus utile mais il n'y a pas de moyen simple de l'obtenir. On peut inférer son existence, ainsi que celle d'une limite de stabilité conditionnelle  $\underline{G}(r)$ , du simple fait que la condition de stabilité globale monotone  $r_m$  est, sauf exception, plus restrictive que la condition d'instabilité linéaire  $r_c$ , inférence qui exprime que ces conditions suffisantes de stabilité sont en général *non-nécessaires*.

Il est parfois possible de déterminer l'extrémité de la courbe de stabilité conditionnelle au voisinage de  $r_c$  par un développement en puissances de l'amplitude de la perturbation. D'autre part, puisque les fluctuations

<sup>3</sup>domaine ellipsoïdal puisque  $G(\mathbf{X})$  est une forme quadratique définie positive

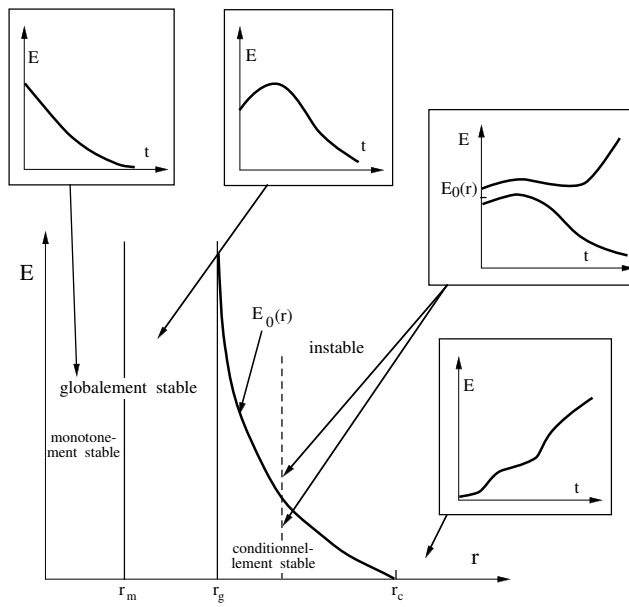


Figure 2.4: Différents critères de stabilité déduits de l'existence supposée d'une fonction de Lyapunov optimale pour le système.

infinitésimales sont inévitables dans tout système physique, instabilité linéaire est synonyme d'instabilité *inconditionnelle*. En raison de leur amplification exponentielle, le temps requis pour leur développement n'est d'ailleurs jamais très long sauf au voisinage immédiat de  $r_c$  (cf. Fig. 1.6, p. 3).

### 2.2.3 Approche locale

Nous concentrons maintenant notre attention sur l'évolution des perturbations infinitésimales. Pour déterminer leur équation d'évolution, il est courant d'introduire un paramètre  $\epsilon$  destiné à mesurer explicitement leur amplitude. Insérant  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} + \epsilon \mathbf{X}'$  dans le système de départ (2.22) et développant formellement en puissance de  $\epsilon$ :<sup>4</sup>

$$\epsilon \frac{d}{dt} \mathbf{X}' = \epsilon \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}' + \epsilon^2 \mathbf{N}_2(\mathbf{X}', \mathbf{X}') + \dots, \quad (2.24)$$

on ne garde alors que les termes d'ordre  $\epsilon$ , ce qui génère un problème linéaire où l'opérateur  $\mathbf{L}$  se présente comme la dérivée fonctionnelle de  $\mathbf{F}$  relativement à  $\mathbf{X}$  en  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)}$ ,  $\mathbf{L} = \delta \mathbf{F} / \delta \mathbf{X} |_{\mathbf{X}^{(0)}}$ . Il n'y a naturellement pas de termes en  $\epsilon^0$  car  $\mathbf{X}^{(0)}$  vérifie (2.21). Les termes notés  $\mathbf{N}_2$ , *a priori* quadratiques en  $\mathbf{X}'$  sont d'ordre  $\epsilon^2$  et de ce fait négligeables de même que les termes suivants. L'analyse linéaire, reposant sur la version tronquée de (2.24), rend compte de la dynamique *tangente* en  $\mathbf{X}^{(0)}$ . Les perturbations infinitésimales "vivent" dans l'espace tangent en ce point et l'opérateur  $\mathbf{L}$  décrit le champ de vecteurs tangent en  $\mathbf{X}^{(0)}$ .

La propriété essentielle du problème

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}' \quad (2.25)$$

est de permettre une analyse de l'évolution d'une perturbation quelconque  $\mathbf{X}'$  par *superposition* de composantes élémentaires obtenues par la décomposition sur une base propre de  $\mathbf{L}$ :  $\mathbf{X}' = \sum_m \tilde{X}_m \hat{\mathbf{X}}^{(m)}$ .  $\tilde{X}_m$  est souvent appelée l'*amplitude* du *mode propre*  $\hat{\mathbf{X}}^{(m)}$ , vecteur propre associé à la valeur propre  $s_m = \sigma_m + i\omega_m$ .

Écrivant  $\tilde{X}_m(t) = \tilde{X}_m(0) \exp(s_m t) = \tilde{X}_m(0) \exp(\sigma_m t) (\cos(\omega_m t) + i \sin(\omega_m t))$  on observe que la partie réelle  $\sigma_m$  correspond au *taux de croissance* de la perturbation. Donc:

- $\sigma_m < 0$ : la perturbation décroît, le mode  $\hat{\mathbf{X}}^{(m)}$  est *stable*,
- $\sigma_m > 0$ : la perturbation est amplifiée, le mode est *instable*,

<sup>4</sup>La référence explicite au paramètre de contrôle, inutile pour l'instant, est supprimée.

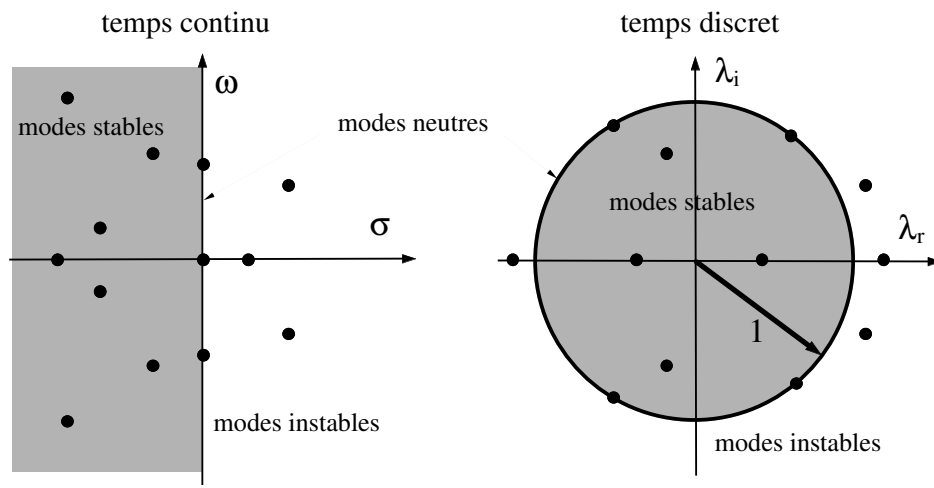


Figure 2.5: À gauche: La stabilité d’une solution stationnaire d’un système différentiel dépend du signe de la partie réelle du spectre de l’opérateur linéarisé  $\mathbf{L}$ . À droite: Pour une itération, le critère porte sur le module des valeurs propres.

- $\sigma_m = 0$ : la perturbation ne croît ni ne décroît au stade linéaire, le mode est *neutre* ou *marginal*.

Les modes propres peuvent être ordonnés par valeur décroissante de leur taux de croissance:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots$ . Une instabilité linéaire se développe dès qu’un mode (au moins) est instable (cf. Fig. 2.5, gauche).

La partie imaginaire  $\omega_m$  décrit le comportement temporel des amplitudes des modes abstraction faite de la tendance déterminée par  $\sigma_m$ :

- $\omega_m \neq 0$ : on parle de mode *oscillant*,
- $\omega_m = 0$ : on a affaire à un mode *stationnaire*.<sup>5</sup>

On notera que pour un système physique distribué, les modes  $\hat{\mathbf{X}}^{(m)}$  restent des fonctions de l’espace physique et sont solutions d’un *problème aux limites*. L’index  $j$  est alors un composite qui, en plus d’une composante discrète associée au mécanisme, comporter autant de composantes continues que de directions de l’espace dans lesquelles le système est invariant par translation (e.g., la couche fluide horizontalement illimitée en convection de Rayleigh–Bénard). Ces composantes continues, en pratique des vecteurs d’ondes découlant d’une analyse de Fourier du problème linéarisé, indexent des branches ou des nappes de modes stables, neutres ou instables selon la valeur de la partie réelle de leur taux de croissance  $\sigma$ . (Voir les chapitres 3 et 8.)

Examinons rapidement le cas d’un système à temps discret autonome

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_k),$$

soit, composante par composante:

$$X_{j,k+1} = G_j(\{X_{j',k}; j' = 1 \dots d\}) \quad j = 1, \dots, d.$$

Supposons connue une solution particulière stationnaire de toujours dénotée  $\mathbf{X}^{(0)}$ . C’est par hypothèse un *point fixe* de l’itération

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{G}(\mathbf{X}^{(0)}).$$

Considérons maintenant le problème de stabilité linéaire associé et introduisons une perturbation  $\epsilon \mathbf{X}'$ . Développant comme précédemment en puissances de  $\epsilon$  pour ne garder que le premier terme du développement, nous obtenons

$$X'_{j,k+1} = \sum_{j'} \frac{\partial G_j}{\partial X_{j'}}(\mathbf{X}^{(0)}) X'_{j',k}. \quad (2.26)$$

<sup>5</sup>Il n’y a pas ici d’ambiguïté aussi nette que pour l’expression “état stationnaire,” cf. note 1, p. 21.

Pour décider de la stabilité de  $\mathbf{X}^{(0)}$  il faut déterminer le taux de croissance des perturbations. Comme dans le cas différentiel, celui-ci est obtenu en déterminant le spectre de la matrice  $[\partial G_j / \partial X_{j'}(\mathbf{X}^{(0)})]$  mais cette fois l'évolution de la distance à la solution de base  $\mathbf{X}^{(0)}$  est donnée directement par l'itération (2.26) et ne passe plus par l'intégration d'un système différentiel linéaire, aussi noterons nous cette matrice  $\mathbf{\Lambda}$  et non plus  $\mathbf{L}$ . Cela n'empêche pas de poser puis de résoudre le problème aux valeurs propres

$$\lambda \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{X}},$$

et de décomposer les perturbations sur la base propre associée au spectre  $\{\lambda_i\}$  de  $\mathbf{\Lambda}$ :  $\mathbf{X}' = \sum_m \tilde{X}_m \hat{\mathbf{X}}_m$ . L'évolution de la perturbation dans la direction propre  $j$  est alors donnée par

$$\tilde{X}_{m,k+1} = \lambda_m \tilde{X}_{m,k}$$

et l'amplification mesurée par  $|\lambda_m|$ . Il est commode d'écrire  $|\lambda_m| = \rho_m \exp(i\phi_m)$ . Le mode  $\hat{\mathbf{X}}_m$  est donc *stable* si  $\rho_m < 1$ , *neutre* ou *marginal* si  $\rho_m = 1$  et *instable* si  $\rho_m > 1$  (cf. Fig. 2.5, droite). Si  $\phi_m \neq 0$  ou  $\pi$ ,  $|\lambda_m|$  est véritablement complexe et la dynamique de la perturbation contient une composante rotatoire. Si  $\lambda_m$  est réel et positif, la perturbation augmente ou diminue de façon monotone alors que si  $\lambda_m$  est négatif, la trajectoire perturbée s'écarte ou se rapproche de  $\mathbf{X}^{(0)}$  en oscillant de part et d'autre. Un système à temps discret est donc linéairement stable si le spectre de l'opérateur linéarisé est tout entier à l'intérieur du disque unité.

Nous ferons un usage intensif du cas "à temps discret" lors de l'étude de la stabilité des solutions périodiques de systèmes du type "oscillateur auto-entretenu." Cette étude passera par une analyse stroboscopique de la dynamique revenant à la construction d'une application au temps  $\tau$  obtenue par intégration de l'évolution sur un intervalle de temps fini  $\tau$  égal à la période  $T$  de l'oscillateur. On obtiendra alors  $\lambda_m = \exp(s_m T)$  et donc  $\rho_m = \exp(\sigma_m T)$ , de sorte que  $\rho_m > 1$  équivaudra bien à  $\sigma_m > 0$ .

## 2.3 Éléments de dynamique qualitative

Cette section vise à compléter le vocabulaire utilisé en théorie des systèmes dynamiques en introduisant les termes utiles à la description des propriétés *qualitatives* des trajectoires. Pour plus de spécificité nous prendrons le système bidimensionnel simple suivant

$$\frac{d}{dt} X_1 = F_1(X_1, X_2) = rX_1 + X_2 + X_1 X_2, \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 = F_2(X_1, X_2) = -X_2 - X_1^2. \quad (2.28)$$

Le seul paramètre variable  $r$  sert de paramètre de contrôle.

### 2.3.1 Portrait de phase

Prenons pour l'instant  $r = -3/16$ . Le champ de vecteurs correspondant est illustré sur la Fig. 2.6, où l'on observe que la longueur des flèches est proportionnelle à l'intensité du champ. Quelques trajectoires issues de diverses conditions initiales ont également été tracées. Ces courbes intégrales encore appelées *orbites* aboutissent toutes à l'un ou l'autre des deux points  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{X}^{(-)}$ . Certaines trajectoires se dirigent d'abord vers le point  $\mathbf{X}^{(+)}$  puis s'en écartent pour rejoindre  $\mathbf{O}$  ou  $\mathbf{X}^{(-)}$ . Notons enfin pour plus tard la présence au centre de la figure d'une étroite bande incurvée où les flèches sont très courtes, ce qui signifie que l'évolution  $y$  est très lente.

Les points  $\mathbf{X}^{(-)}$ ,  $\mathbf{X}^{(+)}$  et  $\mathbf{O}$  sont les *points fixes* du champ de vecteurs, donnés par la solution simultanée de  $F_1(X_1, X_2) = 0$  et  $F_2(X_1, X_2) = 0$ , soit

$$0 = rX_1 + X_2 + X_1 X_2, \quad (2.29)$$

$$0 = -X_2 - X_1^2. \quad (2.30)$$

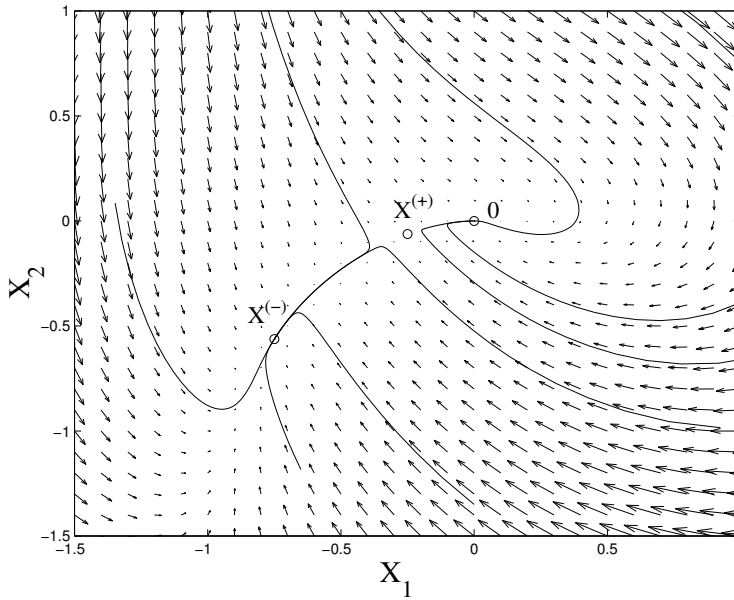


Figure 2.6: Champ de vecteur du modèle (2.27–2.28) pour  $r = -3/16$ . La position des points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$ ,  $\mathbf{X}^{(+)}$  et  $\mathbf{O}$  est indiquée par des petits cercles.

ou encore, par élimination de  $X_2$

$$X_1 (X_1^2 + X_1 - r) = 0. \quad (2.31)$$

En plus de la racine  $X_1 = 0$ , cette équation du troisième degré a zéro, une ou deux racines réelles selon la valeur de  $\Delta = 1 + 4r$ . Ici, avec  $r = -3/16$ , on a  $\Delta = 1/4$  et donc finalement trois racines, dont deux non-triviales:

$$X_1^{(+)} = -1/4, \quad X_1^{(-)} = -3/4, \quad (2.32)$$

les valeurs correspondantes de  $X_2$  se déduisant de (2.30).

Les *points fixes* solutions de  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  et sont encore appelés *points singuliers*, *points critiques*, ou encore *points d'équilibre* du champ de vecteur. Ce sont des trajectoires particulières et, par opposition à toutes les autres trajectoires initialisées en des points appelés *réguliers*, ce sont les seules à se réduire trivialement à un point.

Les états correspondant aux points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$ ,  $\mathbf{X}^{(+)}$  et  $\mathbf{O}$  sont visiblement des états de base possibles pour le système avec  $r = -3/16$ . Se référant à la présentation de la section précédente, de la simple observation des trajectoires en leur voisinage, on peut déjà conclure  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{O}$  sont stables et  $\mathbf{X}^{(+)}$  instable. Mais le calcul de stabilité linéaire explicite va apporter des informations supplémentaires essentielles. Insérant  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} + \epsilon \mathbf{X}'$  dans (2.27–2.28) où  $\mathbf{X}^{(0)}$  est l'une des trois solutions de point fixe possibles, on obtient:

$$\epsilon \frac{d}{dt} X_1' = \epsilon \left[ (r + X_2^{(0)}) X_1' + (1 + X_1^{(0)}) X_2' \right] + \epsilon^2 [X_1' X_2'], \quad (2.33)$$

$$\epsilon \frac{d}{dt} X_2' = \epsilon \left[ -2X_1^{(0)} X_1' - X_2' \right] - \epsilon^2 [X_1'^2], \quad (2.34)$$

ce qui conduit à trois problèmes linéarisés:

$$\frac{d}{dt} X_1' = (r + X_2^{(0)}) X_1' + (1 + X_1^{(0)}) X_2', \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt} X_2' = -2X_1^{(0)} X_1' - X_2', \quad (2.36)$$

un pour chaque point fixe. Nous en poursuivrons l'étude après avoir présenté le cas général.

### 2.3.2 Dynamique linéaire en dimension 2

Passons donc en revue les différents cas possibles pour le système différentiel  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$  s'écrivant explicitement

$$\frac{d}{dt}X_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2, \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt}X_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2. \quad (2.38)$$

Recherchant des solutions de la forme  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} \exp(st)$  nous obtenons

$$s\hat{X}_1 = l_{11}\hat{X}_1 + l_{12}\hat{X}_2, \quad (2.39)$$

$$s\hat{X}_2 = l_{21}\hat{X}_1 + l_{22}\hat{X}_2, \quad (2.40)$$

où  $\hat{X}_1$  et  $\hat{X}_2$  sont les deux composantes du *mode propre*  $\hat{\mathbf{X}}$ . Ce système algébrique de deux équations à deux inconnues n'a de solution non triviale que si  $s$  est valeur propre de l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}$  représenté par la matrice  $[l]$  dans la base canonique, soit:

$$0 = (l_{11} - s)\hat{X}_1 + l_{12}\hat{X}_2, \quad (2.41)$$

$$0 = l_{21}\hat{X}_1 + (l_{22} - s)\hat{X}_2. \quad (2.42)$$

La condition de compatibilité de ce système homogène de deux équations à deux inconnues s'obtient en annulant son déterminant

$$(l_{11} - s)(l_{22} - s) - l_{12}l_{21} = s^2 - (l_{11} + l_{22})s + l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21} = 0. \quad (2.43)$$

Cette équation du second degré admet donc en toute généralité deux racines  $s^{(\pm)}$ , soit réelles distinctes ou confondues, soit complexes conjuguées.

Les composantes des vecteurs propres sont données par l'une ou l'autre des équations (2.41–2.42) où l'on substitue  $s^{(\pm)}$  à  $s$ , soit par exemple

$$(l_{11} - s^{(\pm)})\hat{X}_1^{(\pm)} + l_{12}\hat{X}_2^{(\pm)} = 0 \quad (2.44)$$

Les composantes des vecteurs-colonnes de la matrice de passage de la base canonique vers la base propre, dénotée  $[t]$ , sont celles des vecteurs propres eux-mêmes, exprimées dans la base canonique déduites de (2.44).

L'inverse de  $[t]$  est obtenu, en toute généralité, de la façon suivante: Définissant par  $v_{ij}$  le mineur de l'élément  $t_{ij}$ , c'est à dire le déterminant de la matrice  $[t]$  privée de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , et construisant la matrice  $[u]$  d'éléments  $(-1)^{i+j}v_{ij}$ , appelée *matrice des cofacteurs*, on a

$$[t^{-1}] \equiv [t]^{-1} = \Delta^{-1} {}^t[u],$$

où  $\Delta$  désigne le déterminant de  $[t]$  et  ${}^t[u]$  la transposée de  $[u]$ .

La connaissance de  $[t]$  et de son inverse permet de passer facilement de la base canonique à celle des vecteurs propres. Dans cette nouvelle base, les composantes, notées  $\tilde{X}_i$ , d'un vecteur  $\mathbf{X}$  arbitraire sont déduites des composantes  $X_i$  dans l'ancienne base à l'aide de la matrice inverse  $[t^{-1}]$ , soit  $\tilde{X}_i = \sum_j t_{ij}^{-1}X_j$ . D'autre part, la matrice représentant  $\mathbf{L}$  dans la base des vecteurs propres s'obtient à partir de son expression dans la base de départ par la formule  $[\tilde{l}] = [t^{-1}][l][t]$ .

Si les valeurs propres sont réelles et distinctes, l'opérateur  $\mathbf{L}$  peut être mis sous forme diagonale en passant dans la base propre. C'est la situation que nous considérerons d'abord; ensuite nous examinerons le cas des valeurs propres réelles mais confondues, puis celui des valeurs propres complexes.

#### Racines réelles distinctes

Les composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  représentant l'état du système dans la base propre étant appelées  $\tilde{X}_i$ , par commodité nous dénotons les valeurs propres  $s_1$  et  $s_2$  au lieu de  $s^{(\pm)}$ . Dans cette base, il vient

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_1 = s_1\tilde{X}_1, \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_2 = s_2\tilde{X}_2, \quad (2.46)$$



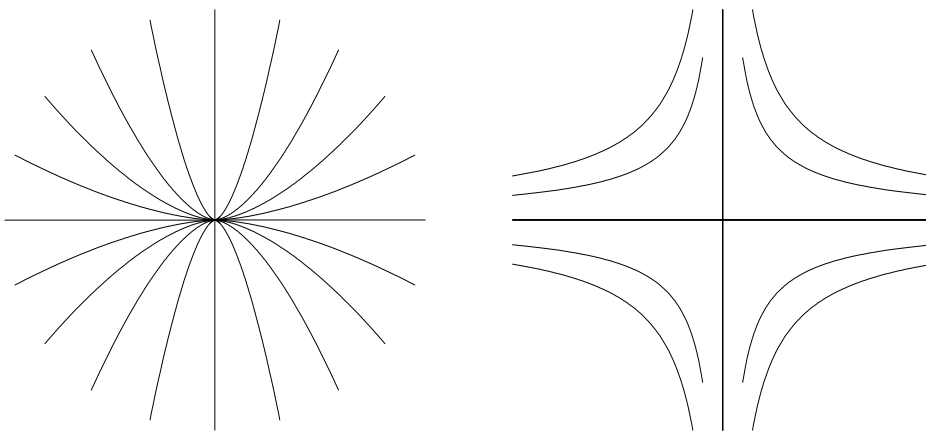


Figure 2.7: À gauche: valeurs propres de même signe, *nœud stable/instable*: les trajectoires, en forme de branche parabolique ouverte dans la direction de la v.p. de plus grand module, se dirigent vers l'origine si les v.p. sont négatives (*nœud stable*) et s'en écartent dans le cas contraire. À droite: valeurs propres de signe opposé, *col* ou *point selle*: les trajectoires, d'allure hyperbolique se rapprochent de l'origine selon la direction de la v.p. négative puis s'en écartent dans la direction de la v.p. positive.

ce que l'on intègre immédiatement pour obtenir

$$\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i(0) \exp(s_i t), \quad i = 1, 2, \quad (2.47)$$

où  $\tilde{\mathbf{X}}(0)$  est la condition initiale écrite dans la base propre. Dans la base canonique on aura donc:

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = [t] \begin{bmatrix} \exp(s_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(s_2 t) \end{bmatrix} [t^{-1}] \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Restant dans la base propre, on obtient l'expression des orbites en éliminant  $t$  entre les deux termes de (2.47), soit  $(\tilde{X}_1/\tilde{X}_1(0))^{1/s_1} = (\tilde{X}_2/\tilde{X}_2(0))^{1/s_2}$  et donc  $\tilde{X}_2 \propto \tilde{X}_1^{s_2/s_1}$ . Deux situations distinctes se présentent suivant que  $s_1$  et  $s_2$  sont de même signe ou non.

- Lorsque  $s_1$  et  $s_2$  de même signe, on a affaire à un point fixe de type *nœud*. Si les deux valeurs propres sont négatives le nœud est stable, sinon, il est instable. Les trajectoires ont une allure parabolique, la parabole s'ouvrant dans la direction de la valeur propre la plus grande en module. Cette situation est illustrée sur la Fig. 2.7 (gauche).
- Lorsque  $s_1$  et  $s_2$  sont de signe opposé, le point fixe est un *col*, encore appelé *point selle*. Les trajectoires, d'allure hyperbolique, s'approchent du point fixe dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative (direction stable) puis s'en écartent le long de l'autre direction propre, cf. Fig. 2.7 (droite).

Notons que les calculs qui précèdent supposent implicitement qu'aucune des deux valeurs propres n'est nulle. Il n'est pas difficile d'imaginer ce qui se passerait dans le cas particulier où l'une d'entre elles le serait. Nous verrons plus loin comment le retour à la base canonique modifie l'allure des orbites au voisinage du point fixe. En fait, il est facile de voir que sous la forme (2.45–2.46), le système dérive du potentiel

$$G(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\frac{1}{2} (s_1 \tilde{X}_1^2 + s_2 \tilde{X}_2^2),$$

quels que soient les signes de  $s_1$  et  $s_2$  (cf. Fig. 2.3a).

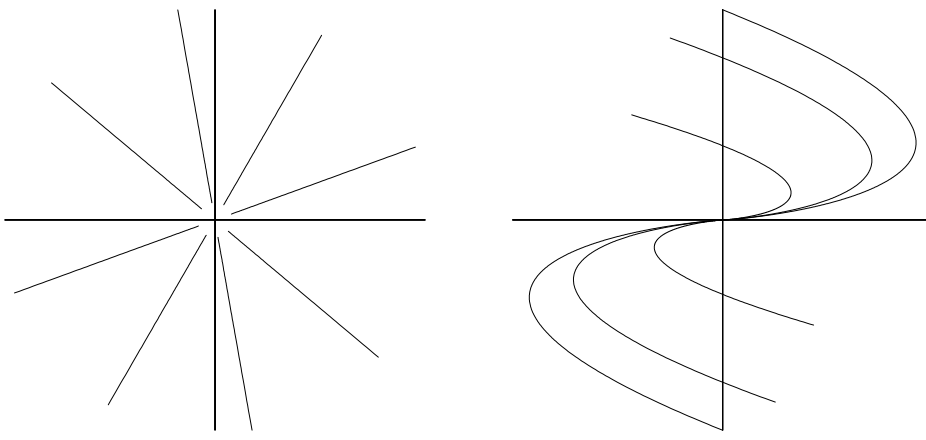


Figure 2.8: Deux valeurs propres réelles dégénérées. À gauche: étoile (cas diagonalisable): toute direction du plan est direction propre. À droite: nœud impropre (cas non diagonalisable): la direction propre en abscisse doit être complétée pour avoir une base complète de l'espace tangent. Dans les deux cas les trajectoires s'approchent ou s'éloignent de l'origine suivant le signe des valeurs propres.

### Racine réelle double

Lorsque  $(l_{11} - l_{22})^2 + 4l_{12}l_{21} = 0$  on trouve  $s^{(\pm)} = \bar{s} = \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22})$ .<sup>6</sup> L'équation (2.44) s'écrit alors

$$\frac{1}{2}(l_{11} - l_{22}) \hat{X}_1 + l_{12} \hat{X}_2 = 0. \quad (2.49)$$

Cette équation définit en général une direction propre, sauf si  $l_{11} = l_{22}$  et  $l_{12} = 0$ . Sinon, l'équation jumelle tirée de (2.41) qui s'écrit ici

$$l_{21} \hat{X}_1 - \frac{1}{2}(l_{11} - l_{22}) \hat{X}_2 = 0 \quad (2.50)$$

en fournit une, pour autant que  $l_{21} \neq 0$ . Les équations (2.49) et (2.50) ne déterminent donc aucune direction propre si  $l_{11} = l_{22}$  et  $l_{21} = l_{12} = 0$  mais, dans ce cas,  $\mathbf{L}$  est simplement proportionnel à l'opérateur identité  $\mathbf{I}$  et toute direction du plan est direction propre. Le point fixe correspondant, stable ou instable selon le signe de  $\bar{s}$ , est parfois appelé une *étoile*, cf. Fig. 2.8 (gauche).

Considérons maintenant le cas non-trivial où les équations (2.49) et (2.50) déterminent une et une seule direction propre et prenons par exemple pour vecteur de base le vecteur  $\hat{\mathbf{X}}^{(1)} = (l_{12}; \frac{1}{2}(l_{22} - l_{11}))$ . L'espace vectoriel étant de dimension 2, on peut compléter la base par un second vecteur non-colinéaire au premier. Supposant  $l_{12} \neq 0$  on peut prendre par exemple  $\hat{\mathbf{X}}^{(2)} = (0; 1)$ . Il reste à représenter l'action de  $\mathbf{L}$  sur la base  $(\hat{\mathbf{X}}^{(1)}, \hat{\mathbf{X}}^{(2)})$ . On sait déjà que  $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(1)} = \bar{s} \hat{\mathbf{X}}^{(1)}$ , il reste donc à calculer  $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(2)}$ . Il vient:

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{X}}^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$= \begin{bmatrix} l_{12} \\ \frac{1}{2}(l_{22} - l_{11}) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{X}}^{(1)} + \bar{s} \hat{\mathbf{X}}^{(2)}. \quad (2.52)$$

Dans cette base, l'opérateur  $\mathbf{L}$  est donc représenté par une matrice sous forme *normale de Jordan*  $\begin{bmatrix} \bar{s} & 1 \\ 0 & \bar{s} \end{bmatrix}$  de sorte que le système (2.37–2.38) s'écrit maintenant:

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_1 = \bar{s} \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2, \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_2 = \bar{s} \tilde{X}_2, \quad (2.54)$$

<sup>6</sup>On notera que si  $l_{12} = 0$  ou  $l_{21} = 0$ , alors  $l_{11} = l_{22}$  et réciproquement.

où les  $\tilde{X}_k$  sont à nouveau les composantes d'un vecteur  $\mathbf{X}$  quelconque dans cette base. L'approche systématique de ce problème dans le cas général sera reprise chapitre 3, §3.2.

Pour intégrer ce système d'équations, on commence par (2.54)

$$\tilde{X}_2(t) = \tilde{X}_2(0) \exp(\bar{s}t) \quad (2.55)$$

dont on reporte le résultat dans (2.53) que l'on écrit plutôt

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_1 - \bar{s} \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2(t).$$

Dans cette équation, le terme  $\tilde{X}_2(t)$  au membre de droite varie au même taux  $\bar{s}$  que  $\tilde{X}_1$ , il est donc *résonnant*. On résout classiquement la difficulté par la méthode de variation de la constante (Lagrange):

La solution du problème sans second membre s'écrit:  $\tilde{X}_1 = C \exp(\bar{s}t)$ . Considérant la constante d'intégration  $C$  comme une fonction du temps, on trouve par substitution

$$\frac{d}{dt} C = \tilde{X}_2(t) / \exp(\bar{s}t) = \tilde{X}_2(0),$$

dont la solution est

$$C(t) = C(0) + t \tilde{X}_2(0),$$

d'où finalement, reconnaissant en  $C(0)$  la valeur de  $\tilde{X}_1$  en  $t = 0$ ,

$$\tilde{X}_1(t) = \tilde{X}_1(0) \exp(\bar{s}t) + \tilde{X}_2(0) t \exp(\bar{s}t). \quad (2.56)$$

Le second terme variant en  $t \exp(\bar{s}t)$  est dit *séculaire*. Le point fixe est appelé *nœud impropre*. L'équation des orbites s'obtient comme précédemment en éliminant  $t$  entre (2.56) et (2.55), ce qui conduit à  $\tilde{X}_1 \propto \tilde{X}_2 \left( \ln(\tilde{X}_2) + \text{Cst.} \right)$  dont on peut voir l'illustration sur la Fig. 2.8 (droite).

### Racines complexes

Lorsque les valeurs propres sont complexes, i.e.,  $s^{(\pm)} = \sigma \pm i\omega$ , il n'y a pas de vecteurs propres réels et, sur  $\mathbb{R}$ , le système reste sous forme d'un bloc ( $2 \times 2$ ). Il n'est diagonalisable que dans l'espace complexifié, c'est à dire l'espace vectoriel construit avec le même ensemble de vecteurs mais avec  $\mathbb{C}$  pour corps des scalaires et non plus  $\mathbb{R}$ . Les vecteurs propres  $y$  sont donnés par:

$$0 = (l_{11} - (\sigma \pm i\omega)) \hat{X}_1^{(\pm)} + l_{12} \hat{X}_2^{(\pm)}$$

soit, par exemple  $\hat{\mathbf{X}}^{(\pm)} = (l_{12}; \sigma - l_{11} \pm i\omega)$ . Dans cette base on trouve en effet immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{X}_1 &= (\sigma + i\omega) \tilde{X}_1, \\ \frac{d}{dt} \tilde{X}_2 &= (\sigma - i\omega) \tilde{X}_2. \end{aligned}$$

Restant sur  $\mathbb{R}$  et prenant pour vecteurs de base la partie réelle et la partie imaginaire de  $\hat{\mathbf{X}}^{(+)}$ , soit  $\hat{\mathbf{X}}^{(r)} = (l_{12}; \sigma - l_{11})$  et  $\hat{\mathbf{X}}^{(i)} = (0; \omega)$ , utilisant  $\sigma = \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22})$ , on obtient:

$$[t] = \begin{bmatrix} l_{12} & 0 \\ (l_{22} - l_{11})/2 & \omega \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [t^{-1}] = \begin{bmatrix} l_{12}^{-1} & 0 \\ (l_{11} - l_{22})/2\omega l_{12} & \omega^{-1} \end{bmatrix}.$$

Calculant le produit  $[t^{-1}][l][t]$ , on vérifie sans peine que le problème différentiel se met sous la forme du bloc ( $2 \times 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{X}_1 &= \sigma \tilde{X}_1 + \omega \tilde{X}_2, \\ \frac{d}{dt} \tilde{X}_2 &= -\omega \tilde{X}_1 + \sigma \tilde{X}_2. \end{aligned}$$

La solution issue de la condition initiale  $(\tilde{X}_1(0), \tilde{X}_2(0))$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(t) &= \exp(\sigma t) (\tilde{X}_1(0) \cos(\omega t) + \tilde{X}_2(0) \sin(\omega t)), \\ \tilde{X}_2(t) &= \exp(\sigma t) (-\tilde{X}_1(0) \sin(\omega t) + \tilde{X}_2(0) \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

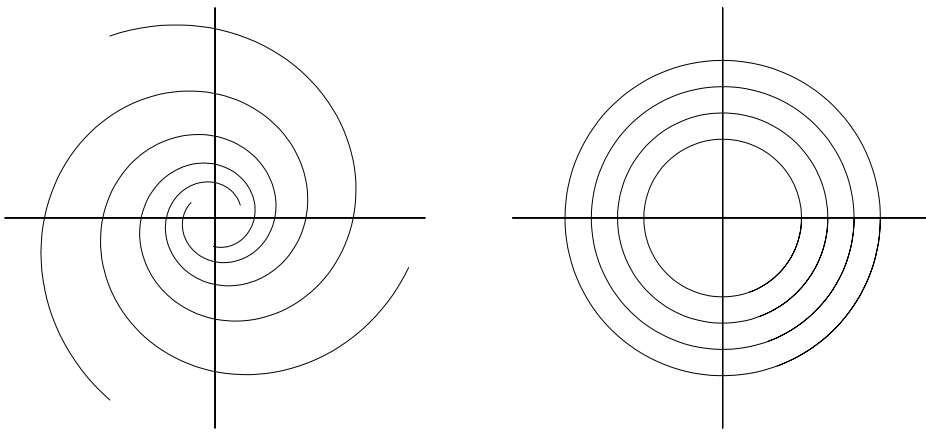


Figure 2.9: Deux valeurs propres complexes conjuguées. À gauche: foyer stable ou instable selon le signe de la partie réelle des valeurs propres. À droite: cas marginal de valeurs propres imaginaires pures: Centre. La partie imaginaire des valeurs propres est responsable de la rotation des trajectoires autour de l'origine.

Les trajectoires correspondantes, illustrées sur la Fig. 2.9 (gauche), sont associées à un *point spiral* encore appelé *foyer*. Celui-ci est stable ou instable selon le signe de  $\sigma = \frac{1}{2}(l_{11} + l_{22})$ . Dans le cas marginal où  $\sigma = 0$ , on parle de *point elliptique* ou de *centre*, cf. Fig 2.9 (droite). Ces cas ont déjà été illustrés au chapitre précédent lorsque nous avons introduit les oscillateurs.

Notons, pour en finir avec la terminologie,<sup>7</sup> que les points fixes du type *nœud* ou *foyer* sont généralement appelés *puits* s'ils sont stables et *sources* s'ils sont instables, et que les *points elliptiques* fournissent, au stade linéaire, des exemples de *stabilité orbitale* mais peuvent se révéler être des sources ou des puits quand on tient compte des non-linéarités.

### 2.3.3 Portrait de phase du modèle (2.27–2.28), suite

Revenons à notre problème et considérons la stabilité des différents points fixes gouvernée par le système (2.35–2.36). Les valeurs propres sont données par

$$\begin{vmatrix} r + X_2^{(0)} - s & 1 + X_1^{(0)} \\ -2X_1^{(0)} & -1 - s \end{vmatrix} = 0,$$

soit:

$$s^2 - s \left[ -1 + r + X_2^{(0)} \right] - \left( r + X_2^{(0)} \right) + 2X_1^{(0)} \left( 1 + X_1^{(0)} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Commençons par le point fixe à l'origine. Il vient:

$$s^2 - s(r - 1) - r = (s - r)(s + 1) = 0 \quad (2.58)$$

les valeurs propres sont  $s_1 = r = -3/16 < 0$  et  $s_2 = -1 < 0$ . L'origine est donc un *nœud stable*. Il n'est pas difficile de trouver les directions propres associées. Celle associée à  $s_1 = r$  est donnée par  $\hat{X}_2^{(1)} = 0$ , c'est donc l'axe des  $X_1$ . Pour  $s_2 = -1$ , on trouve  $\hat{X}_2^{(2)} = -(r + 1)\hat{X}_1^{(2)}$  qui définit une direction formant un angle  $\tan(\theta) = -(1 + r)$  avec l'axe des  $X_1$ .

Il n'y a pas de différence *qualitative* entre le portrait de phase linéarisé au voisinage de l'origine, représenté sur la Fig. 2.10 (gauche) et celui de la Fig. 2.7 (gauche) où les axes du repère étaient à angle droit. Cependant, il est facile de comprendre comment l'on passe au cas du nœud impropre (Fig. 2.8, droite) lorsque les deux valeurs propres sont dégénérées. Ici, en effet, l'angle est d'autant plus petit que  $r$  est proche de  $-1 \equiv s_2$ , et le secteur aigu finit par disparaître au profit du secteur obtus lorsque les valeurs propres, se confondant, ne permettent plus de déterminer qu'une seule direction propre. L'allure des trajectoires du cas impropre se déduit alors par continuité de celle où les valeurs propres sont presque confondues, cf. Fig. 2.10 (droite).

<sup>7</sup>En anglais, les termes consacrés sont *node*, *saddle*, *focus*, *center*, *source* et *sink*.

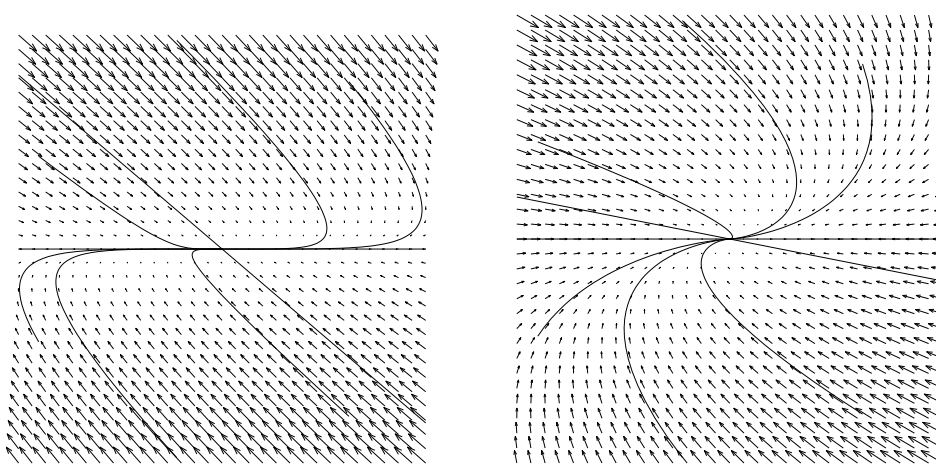


Figure 2.10: Champs de vecteurs linéarisés au voisinage de l'origine pour  $r = -3/16$  (gauche) et  $r = -13/16$ , cas presque dégénéré (droite).

Considérons maintenant les points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{X}^{(+)}$  et limitons nous aux applications numériques pour  $r = -3/16$ . Le problème linéarisé autour de  $\mathbf{X}^{(-)}$  s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X'_1 &= -\frac{3}{4}X'_1 + \frac{1}{4}X'_2, \\ \frac{d}{dt}X'_2 &= \frac{3}{2}X'_1 - X'_2.\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont racines de

$$s^2 + \frac{7}{4}s + \frac{3}{8} = 0,$$

soit

$$s_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad s_2 = -\frac{3}{2}.$$

Ces deux valeurs étant réelles négatives, le point fixe  $\mathbf{X}^{(-)}$  est lui aussi un nœud stable. Les directions propres correspondantes sont données par  $\hat{X}'_2 = m_{1,2}\hat{X}'_1$ , avec  $m_1 = 2$  et  $m_2 = -3$  respectivement. L'aspect du champ de vecteurs linéarisé au voisinage de  $\mathbf{X}^{(-)}$  est *qualitativement* le même que celui au voisinage de l'origine. Les différences quantitatives sont liées à la valeur exacte des valeurs propres et à l'orientation locale des directions propres.

Pour le problème linéarisé autour de  $\mathbf{X}^{(+)}$  on trouverait de même:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X'_1 &= -\frac{1}{4}X'_1 + \frac{3}{4}X'_2, \\ \frac{d}{dt}X'_2 &= \frac{1}{2}X'_1 - X'_2,\end{aligned}$$

et l'équation aux valeurs propres

$$s^2 + \frac{5}{4}s - \frac{1}{8} = 0,$$

qui, cette fois, a deux racines réelles de signe opposé. Les valeurs propres et directions propres sont en effet données par

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= \frac{1}{8}(-5 \pm \sqrt{33}) \quad \text{soit} \quad s_1 = 0,093 \quad \text{et} \quad s_2 = -1,343, \\ m_{1,2} &= \frac{1}{6}(-3 \pm \sqrt{33}) \quad \text{soit} \quad m_1 = 0,457 \quad \text{et} \quad m_2 = -1,457.\end{aligned}$$

Modulo la valeur exacte des valeurs propres et l'orientation des vecteurs propres, le portrait de phase au voisinage de  $\mathbf{X}^{(+)}$ , illustré sur la Fig. 2.11 est qualitativement semblable à celui de *col* de la Fig. 2.7 (droite).

Restons dans ce dernier cas de figure. Dans l'espace tangent, les trajectoires qui aboutissent au point fixe ( $t \rightarrow +\infty$ ) selon la direction propre stable et celles qui en viennent ( $t \rightarrow -\infty$ ) selon la direction instable partagent donc le plan en quatre secteurs. Ce partage est particulièrement important puis qu'il conditionne le destin à long terme des trajectoires issues de conditions initiales quelconques. L'extrapolation de ces

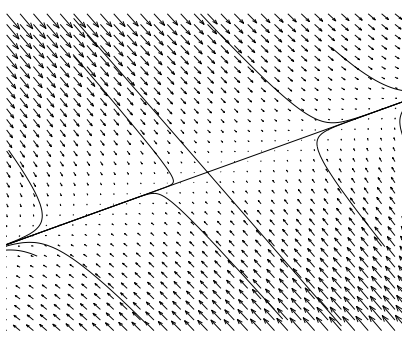


Figure 2.11: Champ de vecteurs linéarisé au voisinage de  $\mathbf{X}^{(+)}$  pour  $r = -3/16$  (col).

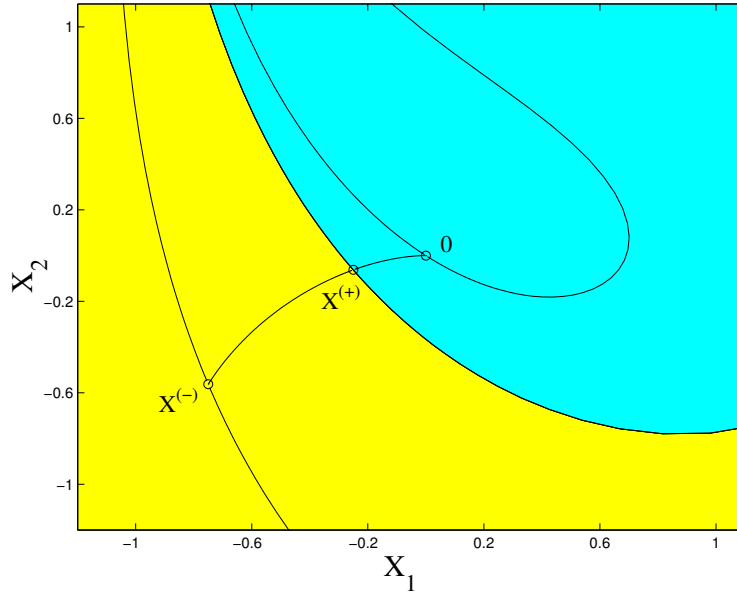


Figure 2.12: Variétés stables et instables des différents points fixes du système (2.27–2.28) pour  $r = -3/16$ . Les bassins d’attraction des nœuds stables  $\mathbf{O}$  (gris foncé) et  $\mathbf{X}^{(-)}$  (gris clair) sont délimités par la variété stable du col  $\mathbf{X}^{(+)}$ .

trajectoires en régime non-linéaire, i.e., “loin” du point fixe, conduit à la définition de *variétés stables* et *instables*. Ces variétés sont formées des ensembles de trajectoires tangentes aux sous-espaces propres stables (v.p. négatives) et instables (v.p. positives). On les obtient en déterminant les trajectoires qui aboutissent au point fixe pour  $t$  tendant respectivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$ . Pratiquement, pour obtenir des trajectoires instables appropriées lorsque le sous-espace instable est unidimensionnel (comme c’est le cas pour  $\mathbf{X}^{(+)}$ ), il suffit d’intégrer le système de départ en prenant deux conditions initiales dans la direction instable, suffisamment proches du point fixe de part et d’autre de celui-ci. La compression dans la (les) direction(s) stable(s) assure le guidage de cette variété stable loin du point fixe. La Fig. 2.12 montre qu’ici, cas particulièrement simple, la variété instable de  $\mathbf{X}^{(+)}$  rejoint les deux points fixes stables. Pour obtenir la variété stable, on fait le même travail mais après avoir effectué le remplacement  $t \mapsto -t$  dans le système de départ. Changeant le signe de toutes les valeurs propres, ce remplacement permute les propriétés de stabilité et d’instabilité attachées aux différents objets en échangeant le rôle des limites  $t \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow -\infty$ . Aux nœuds stables  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{X}^{(-)}$ , toutes les trajectoires arrivent tangentiellement à la direction la moins stable (celle dont le module de la v.p. est le plus petit), sauf celles qui arrivent le long de la direction la plus stable. On peut donc déterminer les sous-variétés stables correspondantes par le même procédé de renversement de sens du temps. C’est ce qui a été fait sur la Fig. 2.12.

En raison de l’unicité des trajectoires passant par un point régulier, deux variétés stables (resp. instables)

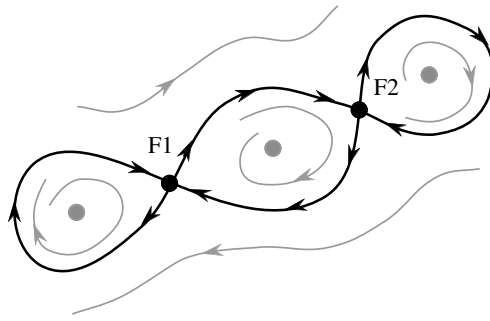


Figure 2.13: Trajectoires hétéroclines et homoclines reliant deux points fixes  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  entre eux ou à eux mêmes. (Un champ de vecteur non-singulier produisant ces variétés devrait disposer d'autres points critiques au centre des boucles qu'elles dessinent, ce que suggèrent les points et lignes en gris.)

ne sauraient se couper car le point en question aurait alors deux futurs (resp. passés) distincts. Structurant l'espace des phases, les variétés stables et instables forment une sorte de squelette du champ de vecteurs du système. Notons en passant que les trajectoires ne “traversent” pas un point singulier mais y tendent asymptotiquement, donc que les variétés stables et instables qui y aboutissent ne s’y coupent pas même si un examen superficiel de la situation donne l'impression d'un “croisement.” Par contre rien n'interdit à une trajectoire de tendre vers un point fixe le long de sa variété stable pour  $t \rightarrow \infty$  et de venir d'un point fixe ( $t \rightarrow -\infty$ ) le long d'une de sa variété instable. Si le point fixe d'où elle vient est différent de celui où elle va on parle de trajectoire *hétérocline*, sinon de trajectoire *homocline*, cf. Fig. 2.13. Les variétés instables de  $\mathbf{X}^{(+)}$  sont des exemples de trajectoires hétéroclines. L'existence de telles trajectoires peut aussi résulter de conditions particulières imposées au système, cf. le cas du pendule, §2.4.4.

### 2.3.4 Ensembles limites et attracteurs

Plus que les transitoires qui dépendent des conditions initiales, ce sont les régimes permanents qui nous intéressent au premier chef. Il est tout d'abord essentiel de pouvoir montrer que les trajectoires ne s'échappent pas vers l'infini. Pour ce faire, le plus simple est d'adapter la méthode de l'énergie. Commençons par l'énergie conventionnelle  $E = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$ . Il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E &= X_1 \frac{d}{dt}X_1 + X_2 \frac{d}{dt}X_2 = X_1(rX_1 + X_2 + X_1X_2) + X_2(-X_2 - X_1^2) \\ &= rX_1^2 + X_1X_2 - X_2^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

où l'on observe que les termes cubiques ont disparu, ce qui rend compte du fait que les non-linéarités conservent l'énergie conventionnelle. L'intérêt de  $E$  en tant que fonction de jauge découle du caractère défini négatif ou non du membre de droite de (2.59). Posant  $X_2 = \rho X_1$ , on obtient:

$$rX_1^2 + X_1X_2 - X_2^2 = X_1^2(r + \rho - \rho^2). \quad (2.60)$$

Tant que le discriminant du trinôme en  $\rho$  au membre de droite,  $\Delta = 1 + 4r$ , est négatif, celui-ci est du signe de son terme quadratique donc négatif. Il s'en suit que  $\frac{d}{dt}E < 0$  pour  $r < -1/4$ , ce qui garantit la stabilité globale monotone de l'origine. Ce n'est plus le cas pour  $r = -3/16$ , et pour cause puisque le tracé du portrait de phase nous a appris qu'il existe alors deux autres points fixes dont l'un est stable. Il existe donc un secteur de l'espace des phases où  $E$  augmente, i.e., le système s'écarte de l'origine. Ce secteur est limité par les rayons vecteurs  $X_2 = \rho^{(\pm)}X_1$  où  $\rho^{(\pm)}$  est racine de (2.60). On ne peut donc conclure directement de (2.59) que les trajectoires restent à distance finie. En fait une simple translation de l'origine permet cependant de s'en assurer. En effet, posons  $X_i = Y_i + a_i$ ,  $i = 1, 2$ , considérons  $E_Y = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)$  et calculons  $\frac{d}{dt}E_Y$ . Il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_Y &= Y_1 \frac{d}{dt}Y_1 + Y_2 \frac{d}{dt}Y_2 = (X_1 + a_1) \frac{d}{dt}X_1 + (X_2 + a_2) \frac{d}{dt}X_2 \\ &= (X_1 + a_1)(rX_1 + X_2 + X_1X_2) + (X_2 + a_2)(-X_2 - X_1^2) \\ &= (r + a_2)X_1^2 + (1 - a_1)X_1X_2 - X_2^2 + \mathcal{O}(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Pourvu que  $E_Y(t = 0)$  soit suffisamment grand au départ, les termes rassemblés sous le sigle  $\mathcal{O}(X_1, X_2)$ , linéaires en  $(X_1, X_2)$ , sont négligeables et l'on a à discuter le caractère défini négatif de la forme quadratique restante. Procédant comme précédemment, on trouve pour discriminant du nouveau trinôme en  $\rho$  l'expression  $(1 - a_1)^2 + 4(r + a_2)$  que l'on peut toujours rendre négative par un choix approprié de  $(a_1, a_2)$ . La forme quadratique sera alors définie négative si  $r + a_2$  est négatif. Avec  $r = -3/16$ ,  $a_1 = 0$  et  $a_2 < -1/16$  conviennent. Reprenant l'interprétation géométrique de  $E_Y$  et de  $\frac{d}{dt}E_Y$  introduite lors de la discussion générale de la stabilité monotone, nous voyons que le champ de vecteurs est partout dirigé vers l'intérieur d'un disque centré en  $(a_1, a_2)$  de rayon  $\sqrt{2E_Y}$ . Au cours de l'évolution chaque point du cercle limitant ce disque se retrouve à l'intérieur. Une telle région de l'espace est appelée *zone absorbante*. La même méthode a été utilisée par Lorenz pour montrer que les trajectoires ne s'évadaient pas dans son modèle.

Formellement, soit un domaine  $\mathcal{D}(0)$  de l'espace des phases à l'instant  $t = 0$ , c'est une zone absorbante si  $\mathcal{D}(t) \subset \mathcal{D}(0)$ , où  $\mathcal{D}(t)$  est l'ensemble constitué des images des points de  $\mathcal{D}(0)$  par l'application au temps  $t$  engendrée par le système dynamique considéré. L'un des objets qui nous intéresse va bien sûr être  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}(t)$ . Une telle limite est appelée *partie attractive*.

Pour le cas qui nous concerne, l'évolution au cours du temps d'un disque  $\mathcal{D}(0)$  centré en  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1/8$  de rayon 3 est illustrée sur la Fig. 2.14. On y observe que  $\mathcal{D}(t)$  finit par s'écraser sur un ensemble topologiquement fermé, constitué des trois points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$ ,  $\mathbf{X}^{(+)}$  et  $\mathbf{O}$  reliés par les variétés instables de  $\mathbf{X}^{(+)}$ . Que cet ensemble formé de lignes et de points soit de mesure nulle dans un espace des phases bidimensionnel n'est pas pour surprendre. En effet, pour un système non-conservatif, le régime asymptotique à la limite  $t \rightarrow \infty$  est conditionné par la propriété de contraction des volumes. Calculant la divergence du champ de vecteur, nous trouvons ici:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial X_1}(rX_1 + X_2 + X_1X_2) + \frac{\partial}{\partial X_2}(-X_2 - X_1^2) = r - 1 + X_2.$$

Cette contraction est donc effective pour  $X_2 < 1 - r$  et la région complémentaire, dilatante, ne joue de rôle que pendant le transitoire. Une trajectoire initialisée dans la région dilatante rejoint en effet rapidement la région contractante et y reste puisque la composante  $F_2$  du champ de vecteurs est strictement négative pour  $X_2 \geq 1 - r$ . Le volume occupé par un ensemble donné de conditions initiales tend donc nécessairement vers zéro.

Clairement, la partie attractive que nous venons de mettre en évidence contient des éléments qui ne correspondent pas au comportement du système à la limite  $t \rightarrow +\infty$ , en particulier le point fixe instable  $\mathbf{X}^{(+)}$ . Pour aller plus loin, il faut préciser la notion d'*ensemble limite*, vu comme point d'accumulation d'une trajectoire donnée.

Pour distinguer entre transitoire et régime permanent, on définit un point *errant*, correspondant au *régime transitoire*, comme un point dont le voisinage au sens topologique n'est visité qu'un nombre fini de fois par une trajectoire arbitraire initialisée dans son voisinage. Par opposition, un point est *non-errant* si toute trajectoire initialisée dans son voisinage y revient indéfiniment, ce qui correspond bien à l'idée que l'on se fait de *régime permanent* représentatif du comportement temporel asymptotique pour  $t \rightarrow \infty$ . Notons que cette notion est différente de celle de *point récurrent*, point tel qu'une trajectoire passant par lui repasse indéfiniment dans son voisinage. Ainsi, un point d'une boucle homocline n'est visiblement pas récurrent mais peut être non-errant si la boucle est attractive, cf. Fig. 2.15a. Un cycle limite instable est par contre un ensemble de points récurrents puisqu'une trajectoire initialisée sur le cycle repasse indéfiniment par tous ses points alors que les trajectoires initialisées dans le voisinage s'en écartent (Fig. 2.15b).

Nous sommes donc arrivés à la notion d'*ensemble limite*, ensemble de points non-errants à la limite  $t \rightarrow \infty$ , soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ . Dans ce contexte, la notion de stabilité est intimement liée aux propriétés des trajectoires qui mènent à ou émergent de tels ensembles. L'*entrant* (resp. *sortant*) d'un ensemble limite est ainsi défini comme l'ensemble des trajectoires dont il est le point d'accumulation pour  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ). Un ensemble est *attractif* si son entrant contient un ouvert, de sorte que toute trajectoire initialisée dans son voisinage admette ses éléments comme points d'accumulation à la limite  $t \rightarrow +\infty$ .

Nous définirons alors un *attracteur* comme un ensemble *non-errant*, *attractif*, *indécomposable* et con-



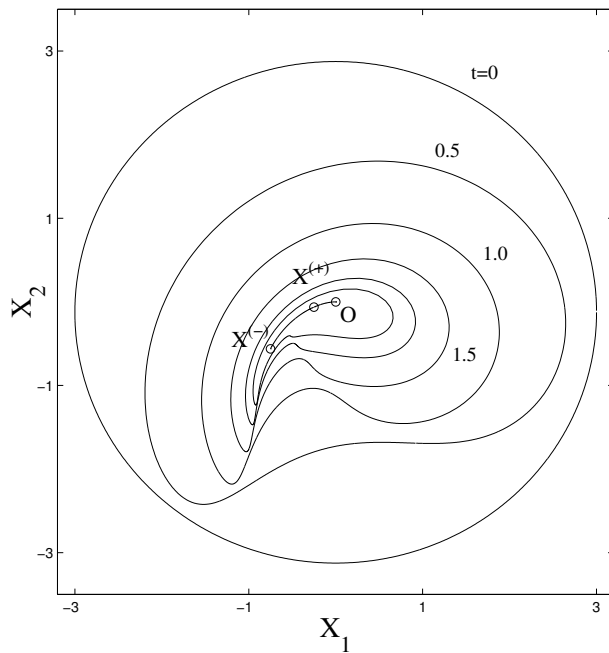


Figure 2.14: Le disque de rayon 3 initialement centré en  $(0, -1/8)$  se contracte pour  $t \rightarrow \infty$  vers une partie attractive du système formée des trois points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$ ,  $\mathbf{X}^{(+)}$  et  $\mathbf{O}$  reliés par les variétés instables de  $\mathbf{X}^{(+)}$ .

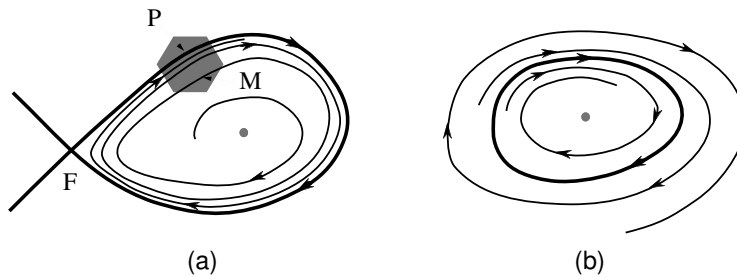


Figure 2.15: (a) Sans être récurrent, le point  $P$  de la boucle homocline fait partie d'un ensemble non-errant: la trajectoire qui passe par un point  $M$  de son voisinage y repasse indéfiniment. (b) Les points d'un cycle limite instable sont récurrents; pour les caractériser plus avant il faut introduire la notion d'ensemble limite  $\alpha$  sur lequel s'accroissent les trajectoires pour  $t \rightarrow -\infty$ .

tenant une *orbite dense*, c'est à dire visitant le voisinage de tous ses points. Un *répulsor* serait défini de la même façon mais en considérant la limite  $t \rightarrow -\infty$ . Au delà de son caractère mathématique destiné à se prémunir contre certaines pathologies, c'est le contenu intuitif de cette définition qui est important. Illustrons le sur notre exemple.

Dans le cas du système (2.27–2.28), les points fixes  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{O}$  répondent visiblement à la définition d'un attracteur (les orbites denses évoquées se réduisent d'ailleurs aux points eux-mêmes). Par contraste, le point  $\mathbf{X}^{(+)}$  est appelé *ensemble limite exceptionnel*. Son entrant se réduit à sa variété stable, ici, deux simples lignes donc des sous-ensembles *de mesure nulle* de l'espace des phases. Physiquement, l'ensemble est exceptionnel au sens où les conditions initiales qui y mènent ne peuvent être choisies "au hasard" avec une probabilité non nulle. Les *entrants* des points fixes stables  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{O}$  sont, eux, formés de portions d'espaces limitées par les variétés stables de  $\mathbf{X}^{(+)}$ .

La notion d'*attracteur* recouvre donc celle de partie attractive mais ajoute la condition d'*indécomposabilité*. Ici,  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{O}$  appartiennent tous deux à une même partie attractive parce que  $\mathcal{D}(0)$  les englobait tous les deux au départ. Il aurait suffi que  $\mathcal{D}(0)$  soit tout entier d'un seul côté de la variété

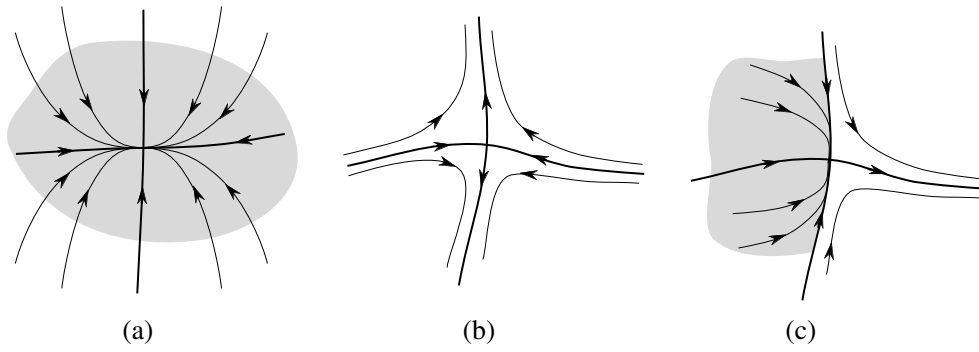


Figure 2.16: (a) Attracteur (nœud stable). (b) Ensemble limite exceptionnel (col). (c) Ensemble limite semi-stable dont l'entrant a de la mesure mais le sortant est non-vide.

stable de  $\mathbf{X}^{(+)}$  pour que l'on isole soit  $\mathbf{X}^{(-)}$  soit  $\mathbf{O}$ , réduisant la partie attractive résultante à un véritable attracteur.

Le *bassin d'attraction* d'un attracteur est la partie de l'espace des phases formée de l'ensemble des conditions initiales qui mènent à cet attracteur. La frontière des bassins d'attraction de différents attracteurs est souvent identifiable, comme ici, aux variétés stables des ensembles limites exceptionnels.<sup>8</sup>

Une autre façon d'exprimer la stabilité de l'attracteur est de dire qu'il doit être intérieur à son entrant ou encore que son sortant est vide (Fig. 2.16a), ce qui induit le fait que, par construction le bassin d'attraction est nécessairement de mesure non-nulle, soit en termes physiques, que la probabilité de trouver des conditions initiales qui y mènent est strictement positive.

Un cas intermédiaire peut se produire lorsque l'ensemble limite est sur le bord de son entrant (lui-même de mesure finie) ce qui implique que le sortant ne soit pas vide. Malgré son caractère attractif pour un grand nombre de conditions initiales, cet ensemble est donc instable au sens strict. On parle alors parfois d'*attracteur vague*. Ceci se produit pour le modèle (2.27–2.28) dans le cas marginal où les points fixes non-triviaux sont confondus, pour  $r = -1/4$ . Comparant la Fig. 2.12 où  $\mathbf{X}^{(-)}$  était un véritable attracteur et la Fig. 2.17, on observe que le point fixe non-trivial mélange les caractéristiques d'un nœud et celles d'un col d'où son nom de *nœud-col*. Il réside sur le bord même de son entrant (la zone en gris clair), de sorte que certains points de son voisinage, ceux à droite de sa variété stable, s'en écartent définitivement pour rejoindre l'origine le long de sa variété instable (son sortant).<sup>9</sup>

**Remarque:** Il est ici intéressant de poursuivre l'étude de la stabilité locale de l'origine par la méthode de l'énergie. Après détermination des directions propres, au lieu de l'énergie conventionnelle  $E$  construite sur  $(X_1, X_2)$  on peut prendre  $\bar{E}$  construit de la même façon mais sur les coordonnées  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  du système dans le repère propre, soit  $\bar{E} = \frac{1}{2} (\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2)$ . On vérifie alors que pour  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  suffisamment petits,  $\bar{E}$  décroît de façon monotone vers zéro alors que dans les mêmes circonstances  $E$  peut subir des phases de *croissance transitoire*. Ceci explique que, bien qu'il n'y ait aucune différence *qualitative* dans la topologie des trajectoires au voisinage d'un nœud (comparer les parties gauches des Figs. 2.7 et 2.10), le comportement puisse sembler *quantitativement* différent, vu sous l'angle de l'énergie conventionnelle. Déterminer l'amplitude des perturbations qui font perdre à  $\bar{E}$  son caractère monotone décroissant donne un critère de stabilité conditionnelle plus intéressant que le critère de stabilité monotone reposant sur l'étude de  $E$ . On notera que l'approche reste valable aussi dans le cas dégénéré où la croissance due aux termes séculaires peut sembler imparable. Dans notre problème où l'axe des  $X_1$  est la seule direction propre, pour prouver la stabilité locale

<sup>8</sup>Les termes anglais sont *wandering/non-wandering* (errant/non-errant), *limit set, inset/outset* (entrant/sortant), *attractor, repeller*, etc.

<sup>9</sup>Le terme *attracteur vague* est également utilisé pour désigner un ensemble limite neutre du point de vue linéaire, ce qui est le cas ici, mais asymptotiquement stable (§2.2.1) dès qu'on tient compte des termes non-linéaires, ce qui dans la présente terminologie en ferait un attracteur au sens strict.

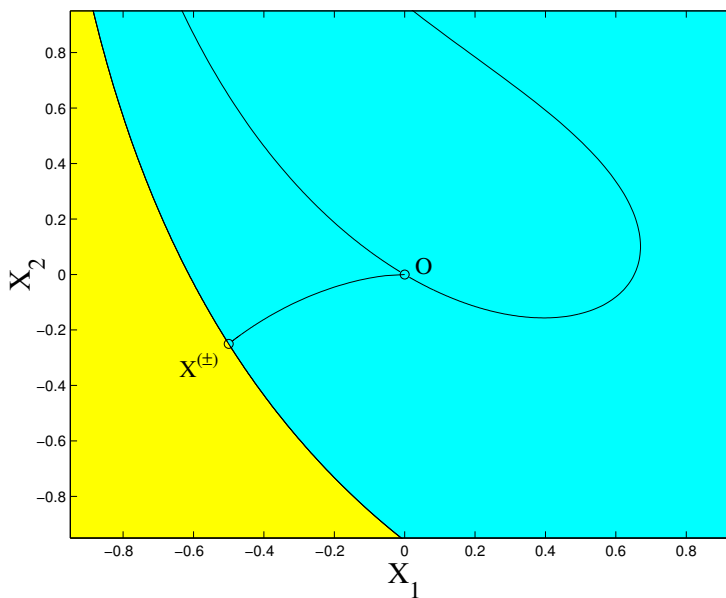


Figure 2.17: Portrait de phase du système (2.27–2.28) pour  $r = -1/4$ . En gris foncé: bassin d’attraction du nœud stable  $\mathbf{O}$ . En gris clair: entrant du nœud-col  $\mathbf{F}$ . Les lignes tracées correspondent à la variété instable reliant  $\mathbf{X}^{(\pm)}$  à  $\mathbf{O}$  et aux variétés stables de ces deux points fixes.

de l’origine il suffit en effet de prendre  $\bar{E} = \frac{1}{2} (X_1^2 + \kappa X_2^2)$  avec  $\kappa$  suffisamment grand, i.e.,  $\kappa > 1/4$  pour (2.27–2.28) avec  $r = -1$ .

### 2.3.5 Bifurcations

Les systèmes que nous considérons sont en général fonction de paramètres de contrôle. Un *point de bifurcation* est un point de l’espace de contrôle où le portrait de phase du système change de façon qualitative. Un système est *structurellement stable* ou *robuste* si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle.

Un “petit” changement *quantitatif* des paramètres peut induire un changement *qualitatif* du comportement. Celui-ci peut être *local* ou *global* selon qu’il affecte le portrait de phase dans une région localisée autour d’ensembles limites particuliers ou, au contraire, dans son ensemble. Ainsi, une *bifurcation locale* se produit lorsqu’un ensemble limite change de stabilité. Par exemple, en dimension 2, un nœud bifurque lorsque l’une de ses valeurs propre passe par zéro et change de signe, le transformant en un col, et réciproquement. Un foyer bifurque quand la partie réelle de ses valeurs propres s’annule et change de signe. Le centre, caractérisé par une paire de valeurs propres imaginaires pures conjuguées est à cet égard structurellement instable car la moindre perturbation apportée au système le transforme en un foyer, stable ou instable (Fig. 2.18).

Ceci conduit à la notion d’ensemble limite *hyperbolique*, ensemble limite dont on peut décider de la stabilité par l’analyse linéaire et donc dont aucune valeur propre n’est marginale, i.e., à partie réelle nulle. Ceci n’a que peu à voir avec l’allure du portrait de phase linéarisé puisque, selon cette définition, le nœud, le col et le foyer sont hyperboliques ( $\text{Re}(s) \neq 0$ ) alors que le centre est *non-hyperbolique* ( $\text{Re}(s) = 0$ ).

Les aspects globaux des bifurcations sont généralement associés aux propriétés “à grande distance” des variétés stables et instables des ensembles limites du système considéré. Sans nécessairement provoquer de changement de stabilité de ceux-ci, une variation de paramètre peut provoquer un déplacement de leurs variétés stables et instables conduisant à un changement qualitatif du portrait de phase. Ainsi la perturbation d’un champ de vecteurs produisant une boucle homocline provoque en général l’ouverture de la boucle qui n’existe que pour un jeu de paramètres de contrôle très particulier (cf. Fig. 2.19). Le même phénomène se produit pour les trajectoires hétéroclines, ce qui rend ce type d’objet structurellement instable.

La persistance d’éléments non-hyperboliques dans un système donné est à relier à ses caractéristiques

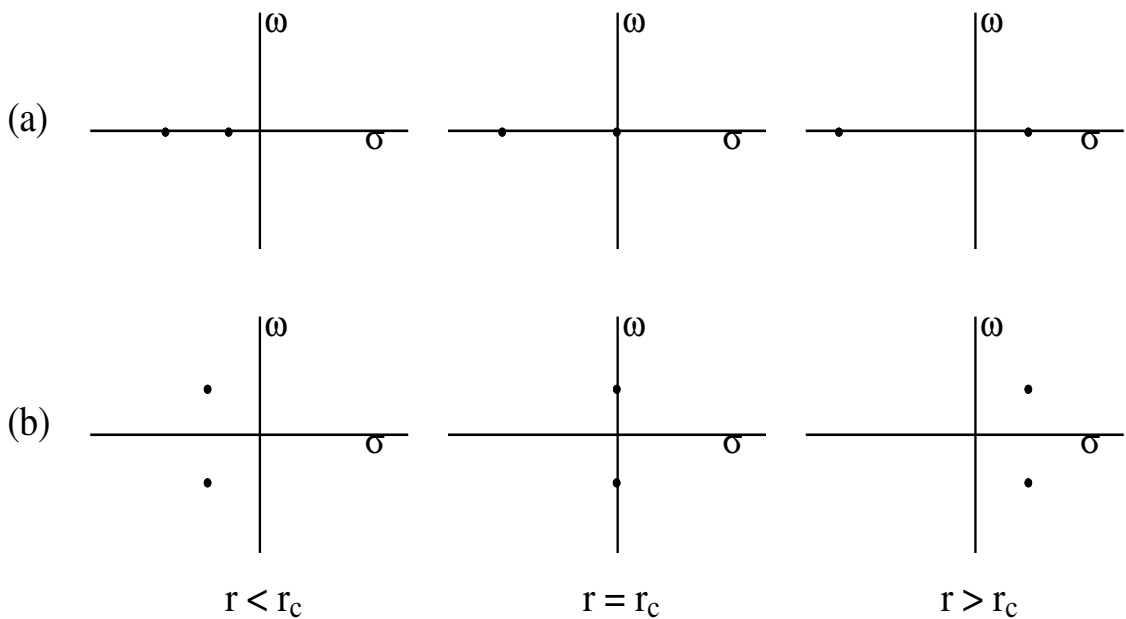


Figure 2.18: (a) Bifurcation stationnaire transformant un nœud en un col. (b) Changement de stabilité d'un point fixe spiral par une bifurcation de Hopf.

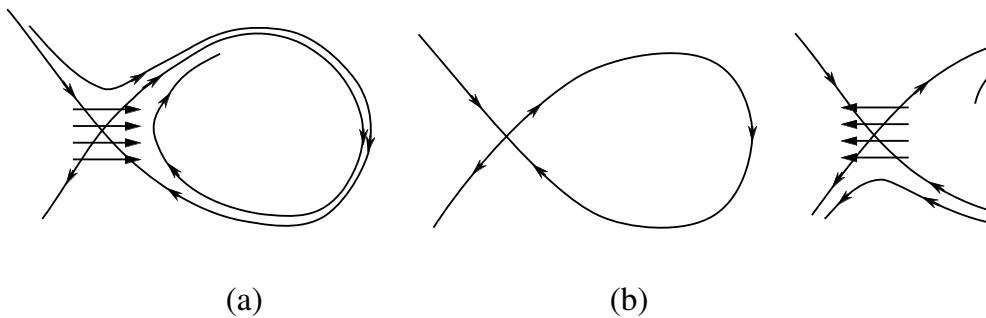


Figure 2.19: La boucle homocline en (b) s'ouvre dans un sens ou dans l'autre, (a) ou (c), dès qu'on s'écarte des conditions précises de son obtention.

spécifiques. Comme nous le verrons plus loin sur l'exemple du pendule (§2.4.4), en mécanique l'existence de centres et de trajectoires hétéroclines ou homoclines appelées *séparatrices* est à mettre au compte du caractère conservatif de la dynamique résultant de l'invariance par renversement du sens du temps. De tels éléments peuvent subsister tant que l'on s'interdit d'introduire des perturbations qui brise cette propriété. Sinon, hors conditions exceptionnelles, ils disparaissent pour laisser la place à des éléments structurellement stables. Il aurait donc fallu introduire plus haut une notion de perturbation générale *admissible*, c'est à dire préservant la propriété de symétrie considérée (e.g. perturbation conservative la plus générale), et de stabilité structurelle *relative*, perdue dès que l'on s'autorise des perturbations qui ne la respecte pas (e.g. introduction de la dissipation).

Moyennant cette restriction, un système structurellement stable se doit donc de ne posséder que des ensembles limites hyperboliques et pas de trajectoires homoclines ou hétéroclines. Les perturbations apportées au système n'entraînent aucune modification qualitative du portrait de phase: nombre et morphologie des attracteurs, position relative des variétés stables et instables. Une bifurcation, locale ou globale, se traduit alors par l'apparition d'éléments structurellement instables.

Par exemple, le portrait de phase, et par voie de conséquence le comportement asymptotique du système (2.27–2.28) dépend de la valeur de  $r$ . Le diagramme de bifurcation donnant le nombre et la nature, stable ou instable des points fixes, est présenté sur la Fig. 2.20. On y constate que l'origine  $\mathbf{O}$  caractérisée par

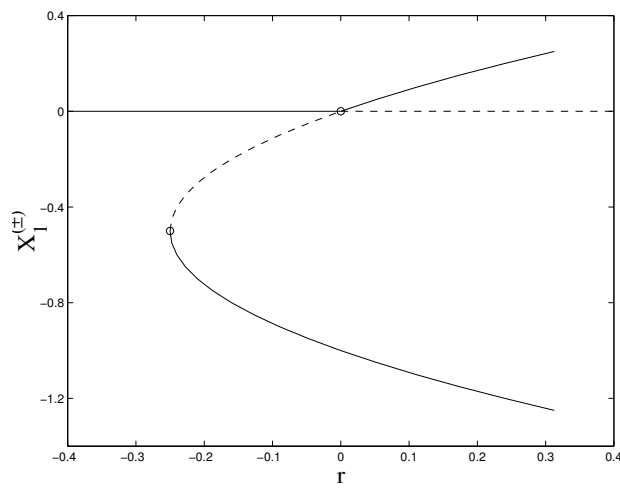


Figure 2.20: Diagramme de bifurcation du modèle (2.27–2.28): on porte ici la coordonnée  $X_1$  des points fixes en fonction de  $r$ ; la ligne continue indique un point fixe stable et la ligne discontinue un point fixe instable.

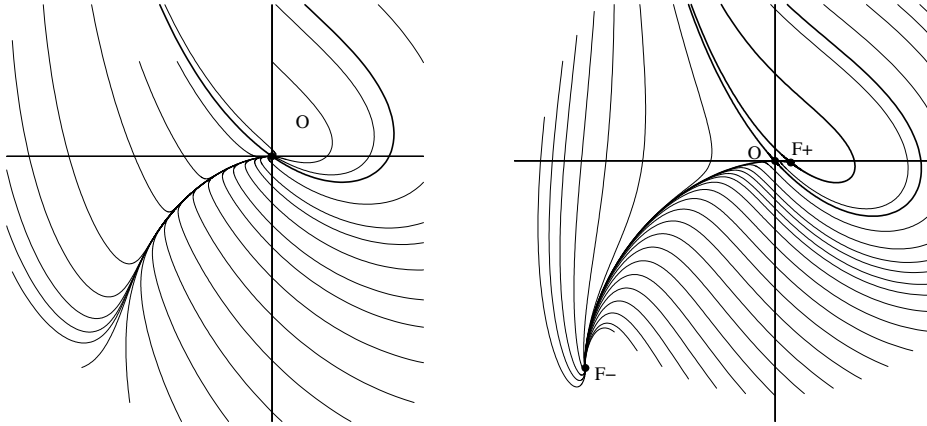


Figure 2.21: Portraits de phase du modèle (2.27–2.28) pour  $r = -0.3$  (a) et  $r = +0.1$  (b).

$X_1 = 0$  reste stable jusqu'en  $r = 0$ , valeur pour laquelle elle échange sa stabilité avec celle du point fixe  $\mathbf{X}^{(+)}$  (bifurcation locale). Cependant, les deux points fixes non-triviaux  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{X}^{(+)}$  apparaissent en  $r = -1/4$  à distance finie de l'origine *via* une bifurcation dite *nœud-col*. Cette bifurcation possède donc un caractère global, bien que la fusion de  $\mathbf{X}^{(-)}$  et  $\mathbf{X}^{(+)}$  puisse être analysée localement. Pour compléter l'étude du modèle (2.27–2.28), la Fig. 2.21 présente le portrait de phase avant toute bifurcation pour  $r = -0.3$  (origine seul point fixe) et après l'échange de stabilité entre  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{X}^{(+)}$  pour  $r = +0.1$ .

### 2.3.6 Des points fixes aux attracteurs étranges

Jusqu'à présent, nous n'avons implicitement évoqué que le cas des ensembles limites indépendants du temps (points fixes) mais il est clair que les définitions introduites s'appliquent aussi bien aux ensembles limites dépendant du temps, tels que ceux illustrés au chapitre 1. Le *cycle limite*, apparu lors de l'étude de l'oscillateur de van der Pol, est de ce point de vue général un ensemble limite périodique correspondant à une courbe fermée dans l'espace des phases.

Dans le cas plus compliqué d'un régime  $n$ -périodique, les observables sont, après extinction du transitoire, des fonctions du temps de la forme  $f(\omega_1 t + \phi_1, \omega_2 t + \phi_2, \dots)$  où les  $\omega_1, \omega_2, \dots$  sont incommensurables, c'est à dire sans relation de la forme  $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots = 0$  avec  $\{n_1; n_2; \dots; n_i \in \mathbb{N}\}$ . Un tel régime est décrit dans l'espace des phases par un tore à  $n$  dimensions interprété comme produit cartésien de  $n$  cycles. Les phases  $\phi_1, \phi_2, \dots$  introduites plus haut sont fonction des conditions initiales et il est clair que les différences de

phases entre trajectoires différentes restent constantes au cours du temps.

Dans sa théorie de la transition vers la turbulence, L.D. Landau (1944) conjecturait que le désordre caractérisant la turbulence développée s'introduisait au terme d'une cascade infinie de bifurcations apportant chacune une fréquence et une phase associée, le caractère imprédictible de la dynamique résultant de notre incapacité à déterminer les phases des différents degrés de liberté qui s'accumulaient. D. Ruelle et F. Takens ont montré qu'il n'était pas nécessaire d'en arriver là et, rapprochant turbulence et chaos, ils ont proposé de décrire l'*attracteur étrange* associé à une dynamique chaotique par des propriétés de *mélange* dues à une *sensibilité aux conditions initiales* et aux petites perturbations se traduisant par une instabilité des trajectoires sur cet attracteur. Par opposition au tore sur lequel les "différences de phase" entre trajectoires correspondant à des conditions initiales voisines sont préservées, l'attracteur étrange est le siège d'une amplification indéfinie de écarts initiaux, pour peu que la dimension de l'espace des phases soit assez grande, i.e.,  $d > 2$  comme nous le verrons.

## 2.4 Éléments de mécanique analytique

La courte présentation qui suit vise juste à rappeler les principaux résultats sans grand souci de rigueur. Elle se termine par une illustration des idées introduites plus haut sur l'exemple du pendule simple.

### 2.4.1 Formulation newtonienne

Considérons un système de  $n$  particules, de positions  $\mathbf{r}_i$ , donc caractérisé par  $3n$  coordonnées cartésiennes dans l'espace physique. Le mouvement de ces particules est gouverné par les équations de Newton:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.61)$$

Lorsque les forces dérivent d'un potentiel  $V(\{\mathbf{r}_i\}; t)$ , le membre de droite de (2.61) s'écrit  $\mathbf{F}_i = -\partial V / \partial \mathbf{r}_i$ . Les trajectoires sont les courbes intégrales de ce système différentiel du second ordre. Pour démarrer l'intégration, il faut fournir  $6n$  conditions initiales,  $3n$  positions et  $3n$  vitesses.

L'énergie cinétique est définie par  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i)^2$ . Lorsque les forces dérivent d'un potentiel, l'énergie totale  $E = T + V$  est conservée si  $V$  est indépendant du temps ( $\partial V / \partial t \equiv 0$ ), ce que l'on supposera ici dans la suite. Cette loi de conservation est associée à l'invariance par translation dans le temps pour un système autonome.

D'autres quantités sont conservées. Lorsque l'espace est homogène, le système est invariant par translation d'ensemble dans l'espace. La quantité conservée correspondante est la quantité de mouvement totale  $\varpi = \sum_i \mathbf{p}_i$ , où les  $\mathbf{p}_i$  sont les quantités de mouvement individuelles  $\mathbf{p}_i = m_i \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i$ . Si de plus l'espace est isotrope, le système est globalement invariant par rotation autour d'un axe d'orientation quelconque. C'est le moment angulaire total  $\ell = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  qui est alors conservé.

La description newtonienne résumée ci-dessus n'est pas facile à manipuler dès que certaines parties du système sont astreintes à des liaisons. Cette difficulté pratique justifie l'introduction des formalismes analytiques.

### 2.4.2 Calcul variationnel et formalisme lagrangien

Considérons maintenant un système de  $n$  particules contraints par  $3n - k$  relations entre leurs coordonnées appelées *liaisons*. Il reste alors  $k$  coordonnées indépendantes, appelées *coordonnées généralisées*

$$q_j = q_j(\{\mathbf{r}_i; i = 1, \dots, n\}), \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.62)$$

l'ensemble de ces  $q \equiv \{q_j; j = 1, \dots, k\}$  définissant l'*espace de configuration*. Par exemple, imaginons que chaque particule soit astreinte à rester sur un cercle de rayon  $R$  dans le plan  $(x, y)$ , nous aurons  $2n$  conditions de liaison, de la forme  $z_i = 0, x_i^2 + y_i^2 = R^2, i = 1, \dots, n$ . Il sera alors plus commode de décrire la configuration

du système en termes des coordonnées angulaires  $\theta_i$  de chacune des particules. Ici, nous passerons donc de l'espace de configuration  $\mathbb{R}^{3n}$  à l'espace  $\mathbb{T}^n$ , le tore en dimension  $n$  dont chaque coordonnées  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) est périodique de période  $2\pi$ .

On définit alors le lagrangien:

$$L = L\left(q, \frac{d}{dt}q\right) = T\left(\frac{d}{dt}q\right) - V(q). \quad (2.63)$$

et l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{d}{dt}q\right) dt \quad (2.64)$$

mise en jeu dans un mouvement se développant entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ . La trajectoire correspondante  $q(t)$  satisfaisant au *principe de moindre action*, on est donc amené à minimiser  $S(t_1, t_2)$  avec  $q(t_1) = q_1$  et  $q(t_2) = q_2$ . Au premier ordre, la trajectoire doit donc rendre l'intégrale (2.64) stationnaire vis à vis d'une variation infinitésimale faisant passer de  $q(t)$  à  $q(t) + \delta q(t)$  vérifiant  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  (on notera que le problème aux valeurs initiales en formulation newtonienne est ici remplacé par un problème aux limites). La variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{d}{dt}q\right) dt &= 0 = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q + \delta q, \frac{d}{dt}q + \delta \frac{d}{dt}q\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{d}{dt}q\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \delta \frac{d}{dt}q \right] dt. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, la variation  $\delta \frac{d}{dt}q$  est liée à  $\delta q$ . On l'élimine en pratiquant une intégration par parties du terme où elle apparaît:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \delta \frac{d}{dt}q dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \right) \delta q dt,$$

le terme tout intégré  $\left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}$  disparaissant en vertu des conditions de bord sur  $\delta q$ . Après mise en facteur de  $\delta q$ , on arrive à

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q} \right) \right\} \delta q dt = 0.$$

Ceci devant être vérifié pour tout  $\delta q$ , le terme entre accolades sous l'intégrale doit s'annuler identiquement. Cette condition fournit les équations de Lagrange du problème:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.65)$$

Les quantités

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt}q_j} \quad (2.66)$$

sont appelées *moments conjugués* aux coordonnées généralisées et l'on déduit immédiatement de (2.65) que si  $q_j$  n'apparaît pas dans le lagrangien, alors  $p_j$  est conservé.

### 2.4.3 Transformation de Legendre et formalisme hamiltonien

La formulation lagrangienne débouche sur un système différentiel du second ordre,  $\partial L / \partial \frac{d}{dt}q_j$  étant linéaire en  $\frac{d}{dt}q_j$  car  $L$  est une forme quadratique en  $\frac{d}{dt}q_i$  à travers  $T$ . Ses variables indépendantes naturelles sont donc les  $q_j$  et les  $\frac{d}{dt}q_j$ . Cependant, la forme des équations de Lagrange et la propriété qui en découle suggère de passer à une formulation où les variables indépendantes seraient les  $q_j$  et les  $p_j$ . Ce passage s'effectue classiquement au moyen d'une *transformation de Legendre*. Illustrons en le mécanisme dans un cas unidimensionnel (cf. Fig. 2.22).

Considérons donc une fonction  $f$  d'une variable indépendante  $X$ . Nous supposons  $f$  deux fois dérivable en  $X$  et convexe ( $d^2 f / dX^2 > 0$ ). Plutôt que représenter directement le graphe de  $f$ , on veut voir la courbe

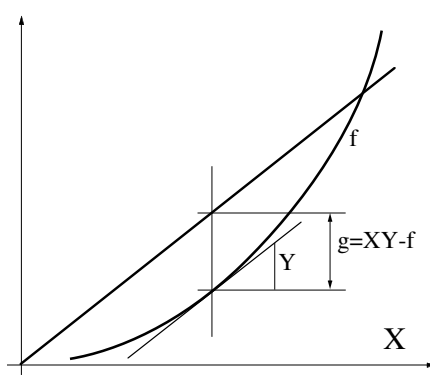


Figure 2.22: Relation graphique entre  $f(X)$  et  $g(Y)$  avec  $g = XY - f$  et  $Y = df/dX$ .

comme enveloppe d'une famille de droites de pente  $Y$ . La quantité  $g(X) = XY - f(X)$  représente la distance de  $f$  à la droite de pente  $Y$  passant par l'origine.  $Y$  étant fixé, on définit la droite de la famille qui répond à la question en observant qu'elle doit être tangente à la courbe, ce qui maximise  $g$ , soit  $dg/dX = 0 = Y - df/dX$ , et donne donc  $X$  au point de contact comme racine de  $Y = df/dX$ .  $Y$  et  $g$  étant ensuite supposés connus, on tirerait  $X$  et  $f(X)$  de la transformation inverse:  $f = XY - g$  et  $X = dg/dY$ . Dans le cas trivial où  $f = \frac{1}{2}X^2$ , il vient  $Y = df/dX = X$  et par substitution  $g = \frac{1}{2}Y^2$  (et réciproquement  $X = dg/dY = Y$ ).

Cette transformation est couramment utilisée en thermodynamique. Par exemple, soit un système magnétique d'énergie libre  $F(M)$  où l'aimantation  $M$  est la variable indépendante. Le champ magnétique est défini comme le champ conjugué de  $M$ , i.e.,  $H = dF/dM$ . Si l'on travaille à champ fixé,  $H$  est la nouvelle variable indépendante et l'on a à considérer le potentiel  $G = F - HM$ , transformé de Legendre de  $F$  (au signe près si l'on s'en tient à la présentation précédente).

Le lagrangien est une fonction convexe des  $\frac{d}{dt}q_j$  car l'énergie cinétique est construite comme une forme quadratique définie positive de ces variables. Prenant pour nouvelles variables les moments conjugués  $p_j$  aux  $q_j$  on voit que le hamiltonien défini par

$$H(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^k p_j \frac{d}{dt}q_j - L(q_j, \frac{d}{dt}q_j) \quad (2.67)$$

se présente comme la transformée de Legendre du lagrangien en vertu de (2.66). L'espace des phases est alors l'espace de dimension  $2k$  produit de l'espace de configuration des  $k$  coordonnées généralisées et de l'espace des  $k$  moments conjugués:

$$\mathbb{X} = \{q_j; p_j; j = 1, \dots, k\}. \quad (2.68)$$

Les équations de Hamilton s'écrivent alors:

$$\frac{d}{dt}q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (2.69)$$

$$\frac{d}{dt}p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (2.70)$$

pour  $j = 1 \dots k$ . Le premier groupe d'équations exprime la transformation de Legendre inverse donnant les  $\frac{d}{dt}q_j$  en fonction des  $p_j$ , le second groupe correspondant à la réécriture de (2.65) en termes de hamiltonien. Ces équations définissent un champ de vecteur à  $2k$  composantes sur l'espace des phases  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  avec

$$F_{q_j} \equiv \partial_{p_j} H \quad \text{et} \quad F_{p_j} \equiv -\partial_{q_j} H, \quad (2.71)$$

de structure particulière appelée *symplectique*. On vérifie immédiatement la conservation des volumes dans l'espace des phases (théorème de Liouville) par un calcul explicite de la divergence de ce champ de vecteur:  $\sum_j \partial_{q_j} F_{q_j} + \partial_{p_j} F_{p_j} = \sum_j (\partial_{q_j p_j} H) + (-\partial_{p_j q_j} H) \equiv 0$ .



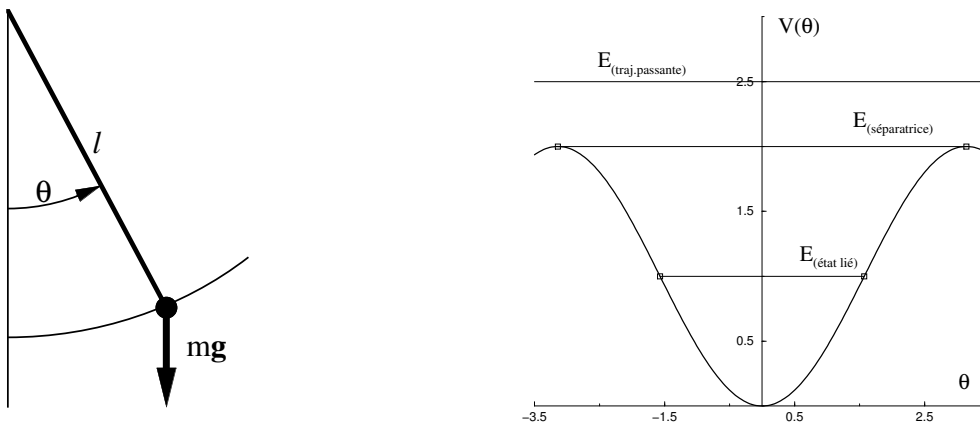


Figure 2.23: (a) Pendule simple. (b) Potentiel.

#### 2.4.4 Pendule simple

C'est le prototype de système non-linéaire d'origine mécanique, cf. Fig. 2.23. En formulation newtonienne, indiquant la position du pendule par l'angle  $\theta$ , nous obtenons

$$ml^2 \frac{d^2}{dt^2} \theta = -mgl \sin(\theta). \quad (2.72)$$

$ml^2$  est le moment d'inertie et le membre de droite traduit le couple appliqué par la force de pesanteur à la masse  $m$  du pendule. Pour simplifier l'écriture, nous supposons dans ce qui suit que les unités sont choisies de telle façon que les coefficients numériques disparaissent du problème.

Passons à la formulation lagrangienne. L'énergie cinétique est donnée par  $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \left( l \frac{d}{dt} \theta \right)^2$  et le potentiel gravitationnel par  $V = -mgl \cos(\theta)$  à une constante près (cf. Fig. 2.23, droite), soit  $T = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \theta \right)^2$  et  $V = -\cos(\theta)$  après mise à l'échelle convenable. Le lagrangien  $T - V$  s'écrit donc

$$L \left( \theta, \frac{d}{dt} \theta \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \theta \right)^2 + \cos(\theta). \quad (2.73)$$

Explicitant (2.65), on obtient simplement:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \sin(\theta) = 0, \quad (2.74)$$

qui n'est rien d'autre que (2.72) après le changement d'unité.

Le moment conjugué à  $\theta$ , ici noté  $\phi$ , est donné par (2.66), soit

$$\phi = \frac{d}{dt} \theta \quad (2.75)$$

En formulation hamiltonienne, il vient

$$H = \frac{1}{2} \phi^2 - \cos(\theta). \quad (2.76)$$

L'espace des phases est un cylindre  $\{\theta \in [0, 2\pi]\} \times \{\phi \in \mathbb{R}\}$ . Les équations de Hamilton

$$\frac{d}{dt} \theta = \phi, \quad (2.77)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = -\sin(\theta). \quad (2.78)$$

sont ici parfaitement identiques à celles que nous aurions eues en ramenant l'équation du second ordre (2.74) à un système du premier ordre par introduction d'une inconnue auxiliaire.

Le type de trajectoire dépend de l'énergie initiale. A basse énergie, le pendule oscille et l'on obtient des trajectoires périodiques souvent appelées *états liés*. Au contraire, à haute énergie, le pendule effectue des révolutions complètes autour de son axe et l'on parle de *trajectoires passantes* pour lesquelles l'angle augmente indéfiniment (cf. Fig. 2.24a). Le système (2.77–2.78) admet pour points fixes les solutions de  $\phi = 0$

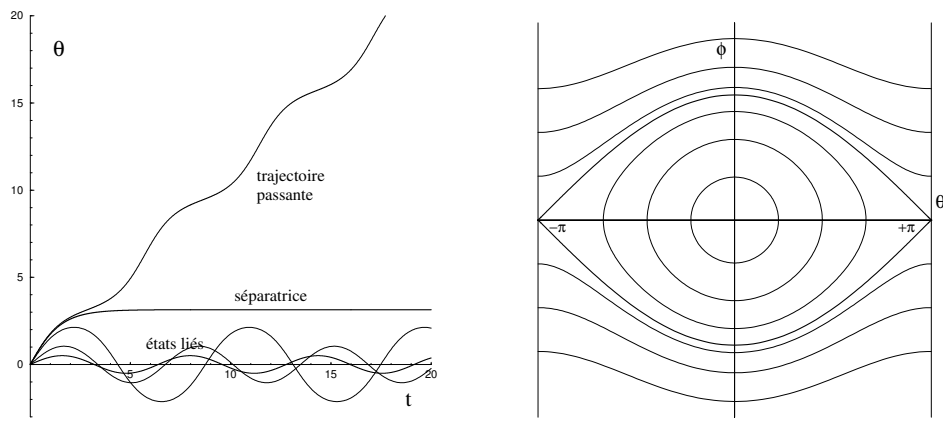


Figure 2.24 : À gauche: trajectoires “liée” pour  $\phi = 0,5, 1$  et  $1,75$ ; séparatrice pour  $\phi = 2$ ; trajectoire passante pour  $\phi = 2,05$  (noter l’allongement de la période des états liés quand leur énergie se rapproche de celle de la séparatrice). à droite: Plan de phase du pendule simple.

et  $\sin(\theta) = 0$ , soit  $\theta = k\pi$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Un calcul simple montre que les solutions avec  $k$  impair sont des cols tandis que celles avec  $k$  pair sont des centres, ce qu’illustre le portrait de phase de la Fig. 2.24b. On y observe que le domaine des états liés est limité par des trajectoires particulières reliant deux points fixes instables consécutifs ( $\phi = 0$  et  $\theta = (2k \pm 1)\pi$ ) appelées *séparatrices*. Ce sont des exemples de trajectoires hétéroclines (homoclines si on préfère identifier les points fixes modulo  $2\pi$ ). Caractéristique essentielle des oscillateurs non-linéaires, la période des états liés est fonction de l’amplitude des oscillations (ici, de l’énergie, ce qui revient au même). On obtient la pulsation des “petits mouvements” par linéarisation, ici,  $\omega_0^2 = g/l$ . Nous reviendrons plus tard sur la détermination des corrections non-linéaires par un calcul de perturbation. La période des états liés s’allonge quand l’énergie augmente et tend vers l’infini lorsque l’on s’approche de la séparatrice.

Pour terminer, considérons brièvement l’effet des frottements. Supposons que la dissipation se traduise par l’introduction d’une “résistance visqueuse” proportionnelle à la vitesse  $\frac{d}{dt}\theta$ . Il est alors préférable d’abandonner le formalisme hamiltonien car l’énergie totale n’est plus conservée. Dans le cadre du formalisme lagrangien, on peut introduire une *fonction de dissipation de Rayleigh*

$$R = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_j \left( \frac{d}{dt} q_j \right)^2,$$

où les  $\lambda_i$  sont des coefficients de friction phénoménologiques, et corriger (2.65) en écrivant

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{d}{dt} q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \frac{d}{dt} q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ici, avec  $R \equiv \frac{1}{2}\gamma \left( \frac{d}{dt}\theta \right)^2$  les équations du mouvement s’écrivent donc

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \gamma \frac{d}{dt} \theta + \sin(\theta) = 0, \quad (2.79)$$

que l’on peut remettre sous la forme d’un système du premier ordre

$$\frac{d}{dt} \theta = \phi, \quad (2.80)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = -\gamma \phi - \sin(\theta), \quad (2.81)$$

donc restant dans un espace des phases paramétré par les  $q_j$  et les  $p_j$  définis par (2.66).

Quelle que soit l’impulsion initiale, le pendule est amorti et, après un certain nombre de révolutions complètes, il finit toujours par relaxer en oscillant autour de sa position basse (Fig. 2.25a). Le portrait de phase correspondant est présenté sur la Fig. 2.25 (droite). Pour illustrer le rôle de la dissipation nous avons

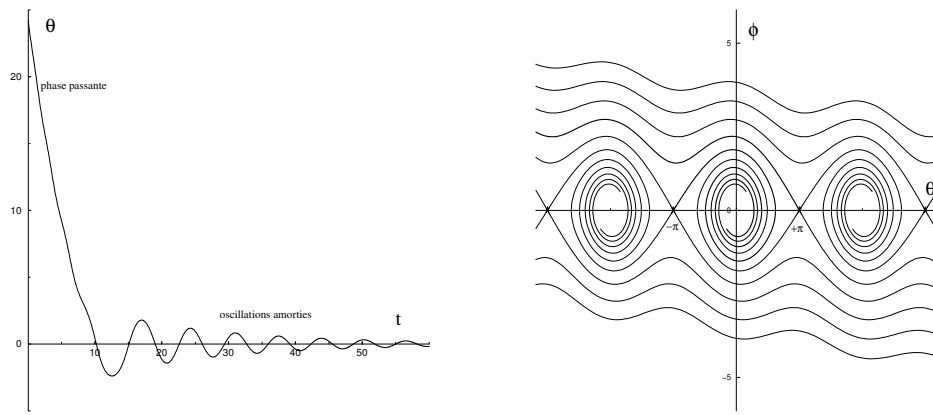


Figure 2.25: (a) Déclin des trajectoires du pendule simple en présence de frottement visqueux. (b) Plan de phase en représentation étendue.

adopté une représentation étendue qui “déroule” l’espace des phases en  $\theta$  au lieu de la limiter à l’intervalle  $[-\pi, +\pi]$  périodisé. On y observe que l’introduction du frottement transforme les points fixes elliptiques  $(2k\pi, 0)$  en foyers stables et ouvre les boucles hétéroclines: par exemple, la trajectoire qui part du point fixe  $(-\pi, 0)$  le long de sa variété instable manque le point fixe suivant  $(+\pi, 0)$  pour venir s’enrouler autour du point spiral à l’origine; de même la trajectoire qui atteint point fixe en  $(+\pi, 0)$  le long de sa variété stable doit disposer au départ d’une énergie supérieure à celle du point fixe en  $(-\pi, 0)$ . Tout ceci illustre le fait que pendule simple, système hamiltonien (conservatif) est structurellement instable vis à vis de l’introduction de la dissipation. (On remarquera que si  $\gamma \geq 2$  le pendule est sur-amorti: il atteint sa position d’équilibre sans osciller; à la valeur critique, l’origine est un nœud impropre stable.)

## 2.5 Résumé

Pour terminer ce long chapitre, rappelons en les principaux éléments, et tout d’abord le cadre de la formulation (§2.1), celui des systèmes dynamiques différentiels dissipatifs:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Des diverses notions de stabilité introduites, il faut surtout retenir celle associée à l’évolution des perturbations infinitésimales  $\mathbf{X}'$  autour d’un état de base stationnaire (§2.2.3). Cette évolution est gouvernée par un problème différentiel linéaire à coefficients constants

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}'.$$

C’est le signe de la partie réelle du spectre de l’opérateur  $\mathbf{L}$ , vérifiant  $s\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$  qui détermine la croissance ou la décroissance de ces perturbations. L’état de base est stable si  $\text{Re}(s_j) < 0$  pour tout  $j$ , instable s’il existe au moins une valeur  $j_0$  propre avec  $\text{Re}(s_{j_0}) > 0$  (Fig. 2.5a). Ces valeurs propres sont fonction des paramètres de contrôle et l’on assiste à une *bifurcation* lorsque la partie réelle d’une valeur propre de négative devient positive.

Au passage, nous avons répertorié et illustré toutes les dynamiques linéaires possibles en dimension 2, introduisant les notions de nœud et de col lorsque les valeurs propres sont réelles (Fig. 2.7) et celles de foyer et de centre lorsqu’elles sont complexes conjuguées (Fig. 2.9).

Ceci nous a été utile pour décortiquer sur un exemple simple différents éléments du portrait de phase d’un système dynamique quelconque, notamment ses *ensembles limites* et les variétés non-linéaires qui s’en détachent, extrapolant à distance finie le comportement des trajectoires issues de leur voisinage. Les *attracteurs* sont les ensembles limites qui contrôlent la dynamique asymptotique à la limite  $t \rightarrow +\infty$ ; délimiter leur bassin d’attraction est donc une tâche primordiale (Fig. 2.12).

Le portrait de phase d'un système subi des changements qualitatifs lorsqu'il est *structurellement instable* (§2.3.5), soit que l'un des ensembles limites change de stabilité provoquant une bifurcation *locale*, soit que les variétés stables et instables se déforment à grande distance, réalisant de façon temporaire des connections homo/hétéroclines (exemple de bifurcation *globale*).

Enfin, la mécanique analytique offrant l'exemple le plus naturel de système dynamique (§2.4), nous avons brièvement décrit ses formalismes. Considérant l'exemple du pendule nous avons illustré l'usage des notions introduites auparavant (Fig. 2.24), faisant apparaître au passage la spécificité du caractère conservatif de la mécanique lié à l'invariance par renversement du temps. Cette symétrie interdit l'existence d'attracteurs qui se trouve rétablie dès que les frottements (dissipation) sont pris en compte, brisant ainsi cette propriété structurellement instable (Fig. 2.25).

# Chapitre 3

## Dynamique linéaire et non-linéaire

Dans le chapitre précédent nous avons introduit les propriétés de base concernant les systèmes dynamiques et illustré sur un exemple les définitions relatives à la caractérisation mathématique de leurs régimes asymptotiques. Nous allons maintenant revenir, d’abord de façon formelle, sur l’obtention concrète de cette formulation à partir de systèmes physiques auxquels nous sommes confrontés en pratique. Puis nous tracerons les grandes lignes de la démarche à suivre pour les étudier.

### 3.1 Dynamique non-linéaire et modes normaux

Nous nous adressons donc en général à des milieux continus soumis à des contraintes extérieures. De tels systèmes sont décrits par des équations aux dérivées partielles assorties de conditions aux limites:

$$H(\partial_t, \partial_x, \mathbf{V}) = 0. \quad (3.1)$$

(Par souci de simplicité, nous supposons le problème autonome.) Suivant la procédure générale décrite au chapitre précédent, dans le cas favorable où la déstabilisation fait intervenir de “petites” perturbations autour d’un état de base stationnaire pris pour origine dans l’espace des états, nous pouvons écrire (3.1) sous la forme

$$\partial_t \mathbf{V} = \mathbf{L}(\partial_x, r) \mathbf{V} + \mathbf{N}(\mathbf{V}) \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{N}$  correspondent respectivement aux termes linéaires et non-linéaires. (Nous sommes beaucoup plus démuni si la déstabilisation intervient sous l’effet de perturbations d’amplitude finie, comme dans le cas de l’écoulement de cisaillement simple plan ou celui de l’écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique, tous deux réputés stables vis à vis de perturbations infinitésimales.)

Comme nous l’avons illustré précédemment, les diverses rétro-actions à l’œuvre introduisent une certaine cohérence dans le système considéré. Cette cohérence trouve son expression mathématique dans la structure des *modes propres*  $\{\hat{\mathbf{X}}_j; j = 1, \dots\}$  de l’opérateur linéaire  $\mathbf{L}$ . La détermination de ces modes propres constitue un travail important qu’il faut ensuite exploiter en utilisant la base ainsi trouvée pour représenter la dynamique, puis pour interpréter cette dynamique en tirant parti de la distinction qu’elle permet de faire entre modes stables et modes instables.

#### 3.1.1 Représentation du système dans sa base propre

Pour cet exposé formel, nous supposerons le spectre entièrement non-dégénéré (valeurs propres toutes simples). Les cas plus compliqués s’introduiront en temps utile. Un état quelconque du système peut donc être décomposé sur la base propre:

$$\mathbf{V}(t) = \sum_j X_j \hat{\mathbf{X}}_j, \quad (3.3)$$

où le coefficient  $X_j$  de  $\hat{\mathbf{X}}_j$  est appelé l’*amplitude* du mode  $\hat{\mathbf{X}}_j$  associé à la valeur propre  $s_j$ .

Dans un contexte dynamique, l'évolution du système se traduit par une variation des  $X_j$  qui deviennent ainsi des fonctions du temps. L'étape suivante consiste à dériver les équations d'évolution pour les amplitudes  $X_j$  de celles du système dans sa représentation de départ, par projection sur la base propre. De la forme du problème (3.2), il est clair que la difficulté se situe dans la détermination des composantes de  $\mathbf{N}(\mathbf{V})$  sur celle-ci. En pratique, cette détermination passe par l'utilisation des propriétés algébriques du problème linéarisé qui découlent de la définition d'un produit scalaire approprié que nous noterons  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Le problème adjoint se déduit alors en toute généralité de la condition

$$\langle \mathbf{W} | \mathbf{L} \cdot \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{L}^\dagger \cdot \mathbf{W} | \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V} | \mathbf{L}^\dagger \cdot \mathbf{W} \rangle^* , \quad (3.4)$$

où  $\dagger$  dénote l'adjoint et  $*$  la conjugaison complexe.

Les vecteurs propres de  $\mathbf{L}^\dagger$  sont obtenus en résolvant

$$\mathbf{L}^\dagger \cdot \tilde{\mathbf{X}} = s \tilde{\mathbf{X}} ,$$

ce qui fournit une suite bi-orthogonale de modes propres  $\{\tilde{\mathbf{X}}_j, \hat{\mathbf{X}}_j\}$  telle que

$$(s_j^* - s_{j'}) \langle \tilde{\mathbf{X}}_j | \hat{\mathbf{X}}_{j'} \rangle = 0 , \quad (3.5)$$

i.e.,  $\tilde{\mathbf{X}}_j$  et  $\hat{\mathbf{X}}_{j'}$  sont orthogonaux au sens du produit scalaire si  $s_j$  et  $s_{j'}$  ne sont pas complexes conjuguées. Si le problème est auto-adjoint pour ce produit scalaire, i.e., si  $\mathbf{L}^\dagger \equiv \mathbf{L}$ , on tire immédiatement de (3.5) que les  $s_j$  sont nécessairement toutes réelles. La réciproque (à savoir: trouver le produit scalaire qui met le problème sous forme auto-adjointe dans le cas où toutes les valeurs propres sont réelles) serait très intéressante *a priori*<sup>1</sup> si elle ne demandait en général un travail essentiellement équivalent à la recherche directe des valeurs propres. En fait, le caractère auto-adjoint est plutôt exceptionnel et il faut plutôt s'attendre à devoir travailler sur les complexes avec des bases propres bi-orthogonales vérifiant des relations du type (3.5).

Continuons donc en substituant  $\mathbf{V} = \sum_j X_j \hat{\mathbf{X}}_j$  dans le problème primitif (3.2). Effectuant le produit scalaire par  $\tilde{\mathbf{X}}_j$  pour isoler l'équation gouvernant l'amplitude  $X_j$  du mode  $\hat{\mathbf{X}}_j$ , nous obtenons

$$\frac{d}{dt} X_j = s_j X_j + \left\langle \tilde{\mathbf{X}}_j \left| \mathbf{N} \left( \sum_{j'} X_{j'} \hat{\mathbf{X}}_{j'} \right) \right. \right\rangle .$$

Considérons maintenant le cas d'un système où les non-linéarités sont formellement quadratiques, i.e., peuvent s'exprimer sous la forme d'une somme de monômes homogènes d'ordre deux<sup>2</sup> et notons  $\mathbf{N}_2(\mathbf{V}, \mathbf{V})$  un monôme particulier de cette somme pour mettre en évidence son caractère quadratique. On vérifie alors que du fait de l'homogénéité postulée, une superposition arbitraire  $\alpha_1 \mathbf{V}_1 + \alpha_2 \mathbf{V}_2$  conduit à une somme de quatre termes  $\alpha_1^2 \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1) + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{N}_2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1)) + \alpha_2^2 \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_2)$ , d'où quatre vecteurs  $\mathbf{N}_2(\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_{j'})$  à décomposer séparément. Insérant le développement (3.3) dans un tel monôme, nous voyons donc apparaître des termes de la forme  $g_{j,j'j''} = \left\langle \tilde{\mathbf{X}}_j \left| \mathbf{N}_2 \left( \hat{\mathbf{X}}_{j'}, \hat{\mathbf{X}}_{j''} \right) \right. \right\rangle$  qui traduisent les propriétés de résonance (au sens large) entre modes propres.

Appliquant la même démarche au cas d'une somme de contributions non-linéaires homogènes d'ordre croissant qui se déduirait d'un développement de  $\mathbf{N}(\mathbf{V})$  en séries de Taylor, nous arrivons à

$$\frac{d}{dt} X_j = s_j X_j + \sum_{j',j''} g_{j,j'j''} X_{j'} X_{j''} + \sum_{j',j'',j'''} g_{j,j'j''j'''} X_{j'} X_{j''} X_{j'''} + \dots \quad (3.6)$$

où les coefficients  $g_{j,j'j''}$ ,  $g_{j,j'j''j'''} \dots$  regroupent de façon ordonnée toutes les contributions élémentaires issues des différents monômes à chaque ordre. Les extensions requises pour traiter le cas des valeurs propres dégénérées seront exposées plus loin.

<sup>1</sup>Ceci permettrait en particulier la détermination du seuil par une méthode variationnelle de type Rayleigh–Ritz, cf. instabilité de Rayleigh–Bénard.

<sup>2</sup>Ceci est le cas par exemple en hydrodynamique où les non-linéarités tirent leur origine du terme d'advection  $\mathbf{v} \cdot \nabla u$ , formellement quadratique en  $(\mathbf{v}, u)$ .

### 3.1.2 Exemple simple

Considérons le modèle unidimensionnel suivant

$$\partial_t V + V \partial_x V = \left[ r - (\partial_{xx} + 1)^2 \right] V, \quad (3.7)$$

variante du modèle de Swift–Hohenberg très utilisé pour l'étude de la formation des structures dissipatives. C'est une équation aux dérivées partielles dépendant d'une seule coordonnée d'espace  $x$  et du temps  $t$  que nous assortissons de conditions aux limites

$$V(x=0) = \partial_{xx} V(0) = 0 = V(x=\ell) = \partial_{xx} V(\ell). \quad (3.8)$$

Procédant à une analyse de Fourier du membre de droite de (3.7), on vérifie que le problème linéarisé est auto-adjoint et que ses modes propres sont de la forme

$$\hat{\mathbf{X}}_j(x) = \sin(k_j x), \quad k_j = j\pi/\ell. \quad (3.9)$$

Le taux de croissance des modes correspondants est donné par

$$s_j = r - (k_j^2 - 1)^2. \quad (3.10)$$

La procédure de projection décrite plus haut se ramène ici simplement à une analyse en série de sinus de l'équation complète (3.7). La non-linéarité au membre de gauche, de type hydrodynamique, ne comporte qu'un seul terme, d'ailleurs formellement quadratique. La solution générale, développée en série de sinus:

$$V = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t) \sin(k_j x)$$

est donc insérée dans (3.7) et l'équation pour l'amplitude  $X_j$  obtenue en identifiant toutes les contributions en  $\sin(k_j x)$ . Le terme linéaire conduit trivialement à  $s_j X_j$  et il ne reste qu'à examiner les termes issus de produits de la forme

$$\begin{aligned} \sin(k_{j''} x) \partial_x \sin(k_{j'} x) &= k_{j'} \sin(k_{j''} x) \cos(k_{j'} x) \\ &= \frac{1}{2} k_{j'} (\sin[(k_{j''} + k_{j'}) x] + \sin[(k_{j''} - k_{j'}) x]). \end{aligned}$$

Les différents termes contribuant à l'équation pour le mode  $j$  sont indiqués sur la Fig. 3.1.

Considérons tout d'abord la somme

$$\sum_{j', j''} k_{j'} X_{j''} X_{j'} \sin[(k_{j''} + k_{j'}) x].$$

Les termes en  $\sin(k_j x)$  contribuant à l'équation  $j$  vérifient  $k_{j''} + k_{j'} = k_j$ , soit  $k_{j''} = k_j - k_{j'}$ . Comme par hypothèse la somme ne doit contenir que des indices strictement positifs, il ne reste que

$$\sum_{j'=1}^{j-1} \frac{1}{2} k_{j'} X_{j-j'} X_{j'}. \quad (3.11)$$

Passons à la somme

$$\sum_{j', j''} k_{j'} X_{j''} X_{j'} \sin[(k_{j''} - k_{j'}) x],$$

que nous séparons en deux, selon que  $j''$  est plus grand ou plus petit que  $j'$ . Quand  $j'' > j'$  on a  $k_{j''} - k_{j'} = k_j$ , soit  $k_{j''} = k_j + k_{j'}$  ce qui donne la contribution

$$\sum_{j'=1}^{\infty} \frac{1}{2} k_{j'} X_{j+j'} X_{j'}. \quad (3.12)$$

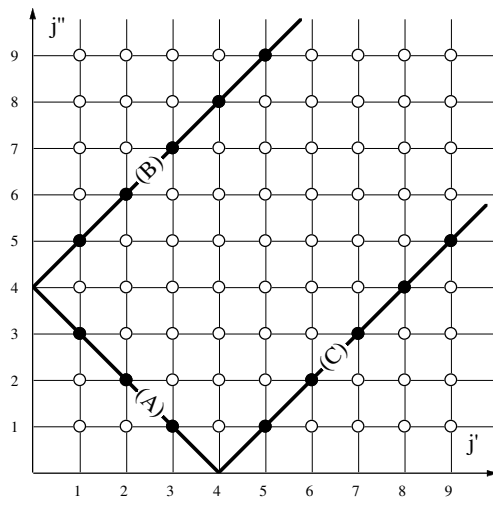


Figure 3.1: Parmi toutes les combinaisons  $(j', j'')$  possibles, seules celles satisfaisant à  $j' + j'' = j$ ,  $j' - j'' = j$ , soit  $j'' = j' - j$  et  $j'' - j' = j$ , soit  $j'' = j' + j$ , avec  $j', j'' \geq 1$  contribuent à l'équation pour le mode  $j$ . Les points noirs correspondent au cas  $j = 4$ . Les termes de type A, B et C figurent dans les sommes (3.11), (3.12) et (3.13), respectivement.

Si au contraire  $j'' < j'$ ,  $\sin[(k_{j''} - k_{j'})x] = -\sin[(k_{j'} - k_{j''})x]$  avec  $k_{j'} - k_{j''} > 0$ . De la même façon que précédemment on trouve

$$\sum_{j''=1}^{\infty} -\frac{1}{2}(k_{j''} + k_j)X_{j''}X_{j''+j}, \quad (3.13)$$

mais, les indices  $j'$  et  $j''$  étant muets, on voit immédiatement que la partie en  $k_{j''}$  de cette somme est exactement compensée par (3.12) de sorte qu'il ne reste que

$$\sum_{j'=1}^{\infty} -\frac{1}{2}k_j X_{j'} X_{j'+j}. \quad (3.14)$$

Faisant passer les termes non-linéaires (3.14) et (3.11) au membre de droite et ajoutant la contribution linéaire  $s_j X_j$  nous arrivons finalement au système

$$\frac{d}{dt} X_j = s_j X_j - \sum_{j'=1}^{j-1} \frac{1}{2} k_{j'} X_{j-j'} X_{j'} + \frac{1}{2} k_j \sum_{j'=1}^{\infty} X_{j'} X_{j'+j}. \quad (3.15)$$

Le même résultat aurait été obtenu en partant de  $\frac{1}{2}V^2$  que l'on aurait développé puis dérivé par rapport à  $x$  pour obtenir  $V\partial_x V = \partial_x(\frac{1}{2}V^2)$ . Ce système sera réutilisé à plusieurs reprises, tout d'abord ci-dessous pour illustrer les conséquences de la classification en modes stables et instables puis tout à fait à la fin du cours pour montrer sur un exemple le rôle des effets de confinement (à travers la longueur  $\ell$  de l'intervalle de définition du problème) sur la croissance du chaos, cf. Ch. 8, §8.3, p. 170 et suivantes.

### 3.1.3 Élimination adiabatique des modes stables

Passer d'une équation aux dérivées partielles à un système infini d'équations différentielles pour des amplitudes de modes peut sembler ne pas être un progrès considérable. Il est pourtant facile de voir que l'on peut séparer les équations qui le constituent en deux groupes selon que les modes associés sont stables ( $\mathcal{R}e(s_j) < 0$ ) ou instables ( $\mathcal{R}e(s_j) > 0$ ). Au stade linéaire, les amplitudes des premiers sont amorties et celles des seconds amplifiées. En général, au moins aux valeurs des paramètres de contrôle qui concernent le processus de transition vers le chaos, c'est-à-dire pas trop loin du premier seuil d'instabilité, les modes instables sont en tout petit nombre et la partie réelle de leur taux de croissance est petite en ordre de grandeur, comparée à celle des modes restés stables. Nous allons donc séparer les amplitudes en deux groupes, celles des modes



qui sont presque marginaux dont la partie réelle de la valeur propre  $\mathcal{Re}(s)$  est “petite” en valeur absolue mais positive ou négative, et celles associées aux modes fortement amortis dont la partie réelle de la valeur propre est négative et “grande” en valeur absolue. Le premier groupe sera celui des *modes centraux*, le second celui des *modes stables*; nous les indexerons par “c” et “s” respectivement. Stricto sensu cette séparation vaut pour l’espace tangent et nous définirons par  $\mathbf{L}_c$  et  $\mathbf{L}_s$  les restrictions de l’opérateur  $\mathbf{L}$  aux sous-espaces engendrés par les modes  $\mathbf{X}_c$  et  $\mathbf{X}_s$ . Nous pouvons écrire (3.6) symboliquement sous la forme

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_c = \mathbf{L}_c \cdot \mathbf{X}_c + \mathbf{N}_c(\mathbf{X}_c, \mathbf{X}_s), \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_s = \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{X}_s + \mathbf{N}_s(\mathbf{X}_c, \mathbf{X}_s), \quad (3.17)$$

où les termes non-linéaires décrivent des interactions aussi bien intra-groupe ( $\mathbf{X}_c$  avec  $\mathbf{X}_c$  et  $\mathbf{X}_s$  avec  $\mathbf{X}_s$ , chacun de leur côté) qu’inter-groupe ( $\mathbf{X}_c$  avec  $\mathbf{X}_s$ ). Ce sont naturellement ces dernières qui compliquent la situation en empêchant un découplage complet. Considérant pour simplifier le cas où  $\mathbf{N}_s$  ne serait fonction que des  $\mathbf{X}_c$ , nous pouvons écrire (3.17) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_s - \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{X}_s = \mathbf{N}_s(\mathbf{X}_c), \quad (3.18)$$

et observant que le taux naturel d’évolution des  $\mathbf{X}_s$  est grand alors que celui des  $\mathbf{X}_c$  est petit par hypothèse, nous voyons que les  $\mathbf{X}_c$  présents dans le membre de droite de (3.18) jouent le rôle de paramètres lentement variables et que le membre de droite se présente comme un forçage fonction du temps *a priori* lentement variable à travers les  $\mathbf{X}_c$ . On peut facilement intégrer cette équation par la méthode de variation des constantes. Il n’est cependant pas utile d’y procéder de façon explicite car nous sommes intéressés par les propriétés à long terme du système. Excepté durant un court transitoire, de durée au plus égale à une quantité de l’ordre de  $\max(1/|\mathcal{Re}(s_s)|)$  au cours duquel les différentes composantes de  $\mathbf{X}_s$  s’ajustent au forçage  $\mathbf{N}_s(t)$ , la réponse des  $\mathbf{X}_s$  est donnée par

$$\mathbf{X}_s(t) = \mathbf{L}_s^{-1} \cdot \mathbf{N}_s(t) = \mathbf{G}(\mathbf{X}_c(t)). \quad (3.19)$$

Cette présentation heuristique trop sommaire n’a que le mérite de suggérer l’existence d’une relation liant à tout instant les  $\mathbf{X}_s$  aux  $\mathbf{X}_c$ . En particulier, elle ne permettrait pas sans adaptation de décrire proprement le cas où les  $\mathbf{X}_c$  seraient des modes oscillants  $\sigma - i\omega$  où le taux de croissance est effectivement petit mais où la pulsation est finie. Supposant l’asservissement réalisé, nous admettons donc en toute généralité une relation

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{G}(\mathbf{X}_c), \quad (3.20)$$

où l’expression de  $\mathbf{G}$  reste à déterminer. Dérivant (3.20) par rapport au temps nous obtenons:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_s = (\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{X}_c) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{X}_c$$

que nous réintroduisons dans (3.17) pour obtenir

$$(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{X}_c) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{X}_c = \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X}_c) + \mathbf{N}_s(\mathbf{X}_c, \mathbf{G}(\mathbf{X}_c))$$

et finalement, utilisant (3.16)

$$(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{X}_c) \cdot [\mathbf{L}_c \cdot \mathbf{X}_c + \mathbf{N}_c(\mathbf{X}_c, \mathbf{G}(\mathbf{X}_c))] = \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X}_c) + \mathbf{N}_s(\mathbf{X}_c, \mathbf{G}(\mathbf{X}_c)).$$

Cette équation aux dérivées partielles définit donc  $\mathbf{G}$  de façon abstraite mais peu utilisable en l’état. Elle est le plus souvent résolue sous la forme d’un développement en série formelle des composantes de  $\mathbf{X}_c$ . Cela fait, son expression insérée dans l’équation (3.16) permet d’obtenir la dynamique effective des variables centrales

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_c = \mathbf{L}_c \cdot \mathbf{X}_c + \mathbf{N}_c(\mathbf{X}_c, \mathbf{G}(\mathbf{X}_c)) = \mathbf{L}_c \cdot \mathbf{X}_c + \tilde{\mathbf{N}}_c(\mathbf{X}_c). \quad (3.21)$$

Le système (3.21) est maintenant fermé pour les  $\mathbf{X}_c$ . Les  $\mathbf{X}_s$  ont été *adiabatiquement éliminés*. Supposons d’abord le système primitif de dimension finie  $d$  avec  $d_c$  modes centraux et  $d_s = d - d_c$  modes stables. Le système (3.19) est donc formé de  $d_s$  relations qui définissent une variété de dimension  $d - d_s = d - (d - d_c) = d_c$ ,

ce qui généralise aux systèmes non-mécaniques la notion de *liaison* entre degrés de liberté. Cette variété, appelée *variété centrale*, est paramétrée par les  $d_c$  variables  $\mathbf{X}_c$  dont la dynamique effective est gouvernée par les  $d_c$  équations du système (3.21).

La validité du calcul *asymptotique* qui vient d'être développé repose entièrement sur l'hypothèse d'un large fossé dans le spectre de l'opérateur linéarisé entre les valeurs propres des modes centraux et celles des modes stables. Cette approche heuristique s'étend aux systèmes en dimension infinie tels que ceux qui dérivent d'équations aux dérivées partielles. Dans la suite du chapitre nous examinerons de façon mathématiquement un peu plus propre les différents aspects linéaires (§3.2) et non linéaires (§3.3) du problème.

Auparavant revenons sur l'exemple (3.15) introduit précédemment et considérons une application où  $\ell = \pi$ , de sorte que  $s_j = r - (j^2 - 1)^2$ . Supposons en outre  $r \ll 1$ . Il vient alors  $s_1 = r$  et  $s_j \simeq -(j^2 - 1)^2$  soit  $s_2 \simeq -9$ ,  $s_3 \simeq -64$ ,  $s_4 \simeq -225$ , etc. Seul le premier mode est presque neutre, avec un temps d'évolution de l'ordre de  $\tau_1 = 1/|r| \gg 1$ , les modes suivants sont stables et évoluent rapidement sur des temps de plus en plus courts. Le plus lent d'entre eux est le second mode ( $\tau_2 \simeq 1/9$ ). Nous sommes donc dans la situation d'exploiter l'approche développée plus haut pour déterminer la dynamique effective du système. Écrivons tout d'abord les premières équations:

$$\frac{d}{dt} X_1 = rX_1 + \frac{1}{2}(X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + \dots) \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 + 9X_2 = -\frac{1}{2}X_1^2 + (X_1X_3 + X_2X_4 + \dots) \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} X_3 + 64X_3 = -\frac{3}{2}X_1X_2 + \frac{3}{2}(X_1X_4 + \dots) \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} X_4 + 225X_4 = -2X_1X_3 - X_2^2 + 2(X_1X_5 + \dots). \quad (3.25)$$

Après avoir vérifié que les termes non-linéaires conservent l'énergie  $E = \sum_j \frac{1}{2}X_j^2$ , comme il se doit pour un modèle d'origine hydrodynamique (non-linéarité en  $v\partial_x v$ ), procédons à l'élimination en nous restreignant tout d'abord à un système tronqué au delà de  $X_2$ , soit simplement

$$\frac{d}{dt} X_1 = rX_1 + \frac{1}{2}X_1X_2, \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 + 9X_2 = -\frac{1}{2}X_1^2. \quad (3.27)$$

De (3.27) nous déduisons immédiatement

$$X_2 = -(1/18)X_1^2, \quad (3.28)$$

et par insertion dans (3.26)

$$\frac{d}{dt} X_1 = rX_1 - (1/36)X_1^3 \quad (3.29)$$

qui décrit la bifurcation super-critique du premier mode entre la solution triviale  $X_1 \equiv 0$  et la solution non-triviale stationnaire  $X_1^{(\pm)} = \pm 6\sqrt{r}$ . Supposant  $X_1 = \mathcal{O}(|r|^{1/2})$  nous pouvons maintenant aller un peu plus loin dans l'analyse de la solution asymptotique. Nous déduisons de (3.28)  $X_2 = \mathcal{O}(|r|)$  et par induction, nous observons que chaque terme de la première somme dans l'équation  $j$  de (3.15) est homogène à  $\mathcal{O}(|r|^{j/2})$ , ceux de la deuxième somme étant d'ordre supérieur. À l'ordre le plus bas, les équations donnant la variété centrale s'écrivent donc:

$$X_j = -\frac{1}{2|s_j|} \left( \sum_{j'=1}^{j-1} j' X_{j-j'} X_{j'} \right), \quad j > 1. \quad (3.30)$$

Passé un court transitoire, l'état du système issu d'une condition initiale donnée en  $X_1$  s'obtient en intégrant (3.29) et en reportant de façon itérative les valeurs des  $X_j$ ,  $j > 1$  déduites de (3.30). La réduction à la variété centrale et l'élimination adiabatique des modes stables sont illustrés pour ce modèle tronqué (3.26–3.27) sur la Fig. 3.2.

## 3.2 Dynamique linéaire dans le cas général

De façon générale, l'opération qui consiste à intégrer un système

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

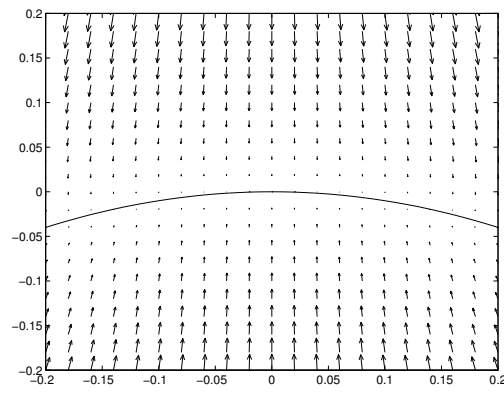


Figure 3.2: Pour le modèle (3.26–3.27), le premier mode est presque marginal ( $r$  voisin de zéro, positif ou négatif, ici en fait,  $r = 0$ ), le second est stable ( $s_1 < 0$  et  $|s_1| \sim \mathcal{O}(1)$ , ici,  $s_2 = -9$ ). La longueur des flèches du champ de vecteurs à distance de la courbe suggère la brièveté du transitoire durant lequel la trajectoire rejoint la variété centrale dont l'équation est à cet ordre donnée par (3.28), l'évolution du système est entièrement paramétrée par  $X_1$  solution de (3.29). Voir également la Fig. 2.6, 27 pour le cas du modèle (2.27–2.28), voisin de (3.26–3.27).

peut s'écrire formellement

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}_{t,t_0}(\mathbf{X}_0)$$

où  $\mathbf{U}_{t,t_0}$  définit l'opérateur d'évolution du système avec  $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}(t_0)$ . Explicitement, il vient:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \mathbf{F}(\mathbf{X}(t')). \quad (3.31)$$

Introduisant l'expression (3.31) évaluée en  $t'$  dans l'argument de l'intégrale, soit:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left[ \mathbf{F} \left( \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{F}(\mathbf{X}(t'')) \right) \right], \quad (3.32)$$

on démarre ainsi une définition récursive de  $\mathbf{U}$ , impliquant une intégrale multiple chronologique  $\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' \dots$ , qui n'est guère manipulable en l'état. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, on peut isoler dans  $\mathbf{F}$  une partie linéaire  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$  et une partie non-linéaire  $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ . Considérons donc l'évolution du système sous l'effet de la seule partie linéaire  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{F}$ .

### 3.2.1 Évolution linéaire et structure de l'opérateur

Revenons donc à (3.32) dans le cas d'un opérateur linéaire. Partant d'une condition initiale  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$  en  $t_0 = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t dt' \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}(t') \\ &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t dt' \mathbf{L} \cdot \left( \mathbf{X}_0 + \int_0^{t'} dt'' \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}(t'') \right) \\ &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t dt' \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{L}^2 \cdot \left( \mathbf{X}_0 + \int_0^{t''} dt''' \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}(t''') \right) \\ &= \mathbf{X}_0 + t \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{L}^2 \cdot \mathbf{X}_0 \\ &\quad + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_0^{t''} dt''' \mathbf{L}^3 \cdot \left( \mathbf{X}_0 + \int_0^{t'''} \dots \right), \end{aligned}$$

Continuant le processus on arrive à

$$\mathbf{X}(t) = \left( \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{L}^k \right) \cdot \mathbf{X}_0 \quad (3.33)$$

où  $\mathbf{I}$  représente l'opérateur identité. Suivant la définition générale de l'exponentielle comme limite d'une série entière  $\exp() = \sum_{k=0}^{\infty} ()^k/k!$ , la somme de cette série opératorielle détermine l'exponentielle de l'opérateur  $t\mathbf{L}$ , soit

$$\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{L}) \cdot \mathbf{X}_0,$$

avec bien entendu  $\mathbf{L}^0 \equiv \mathbf{I}$ .

Pour évaluer cette exponentielle il faut "résoudre la structure" de l'opérateur, c'est à dire décomposer l'espace en une somme directe de *sous-espaces invariants* non-triviaux, les sous-espaces invariants triviaux étant l'espace total, le sous-espace nul, le sous-espace image de  $\mathbf{L}$  et le noyau de  $\mathbf{L}$  qui ne se réduit pas au sous-espace nul si  $\mathbf{L}$  n'est pas inversible. La simplification apportée par la décomposition de l'espace apparaît lors d'un changement de base qui le rend explicite. Soit  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$  et un opérateur  $\mathbf{L}$  pour lequel  $\mathbb{E}_1$  est invariant, i.e., si  $\mathbf{X} \in \mathbb{E}_1$  alors  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{X} \in \mathbb{E}_1$  et, dans une base de  $\mathbb{E}$  formée d'une base de  $\mathbb{E}_1$  complétée de façon appropriée,  $\mathbf{L}$  adopte une structure de blocs

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}.$$

Si de plus  $\mathbb{E}_2$  est également invariant, la base peut être complétée par une base de  $\mathbb{E}_2$ , ce qui permet de représenter  $\mathbf{L}$  alors sous une forme bloc-diagonale:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}.$$

La direction propre attachée à une valeur propre  $s$  de  $\mathbf{L}$ , telle que  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{X} = s\mathbf{X}$ , donc noyau de l'opérateur  $\mathbf{M} = \mathbf{L} - s\mathbf{I}$ , est le prototype des sous-espaces invariants recherchés. Les valeurs propres sont les racines du *polynôme caractéristique* obtenu en développant le déterminant  $\det(\mathbf{L} - s\mathbf{I}) = 0$ . Le *théorème fondamental de l'algèbre* nous indique qu'en dimension  $d$ , ce polynôme de degré  $d$  possède  $d$  racines dans  $\mathbb{C}$ , éventuellement dégénérées. Nous pouvons donc écrire

$$\det(\mathbf{L} - s\mathbf{I}) = a_0 + a_1s + \dots + a_{d-1}s^{d-1} + s^d = 0 = \prod_j (s - s_j)^{d_j},$$

où  $d_j$  est la multiplicité de la valeur propre  $s_j$  avec  $\sum_j d_j = d$ .

Comme nous l'avons vu dans le cas bidimensionnel au chapitre précédent, pour traiter les valeurs propres complexes d'un opérateur sur un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  il faut recourir à son *extension complexe* (par exemple une rotation à deux dimensions est associée à deux valeurs propres simples complexes conjuguées, racines de  $s^2 + \omega^2 = 0$  et il n'y a pas de vecteurs propres réels). Dans l'extension complexe, il existe toujours au moins un vecteur propre  $\hat{\mathbf{X}}_j$  associé à une valeur propre donnée  $s_j$ . Si  $s_j$  est non-dégénérée le sous-espace invariant associé est unidimensionnel et il est engendré par  $\hat{\mathbf{X}}_j$ . Si  $s_j$  est dégénérée, ce qui correspond à une condition de résonance linéaire, le problème, plus compliqué, conduit à introduire la notion de sous-espace propre généralisé et à chercher une base particulière de ce sous-espace dans laquelle la matrice se met sous forme de Jordan.

### 3.2.2 Forme normale de Jordan

La mise sous forme de Jordan d'un opérateur utilise la théorie des polynômes opératoriels, i.e., des polynômes de la forme  $\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} a_n \mathbf{L}^n$ .

La décomposition de l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  de départ (l'espace tangent dans le contexte présent) en une somme de sous-espaces repose sur la détermination du noyau d'opérateurs de la forme  $(\mathbf{L} - s_j \mathbf{I})^{d_e}$ , où  $d_e$  est une dimension d'essai, ce qui généralise le cas de la direction propre comprise comme le noyau de l'opérateur  $\mathbf{L} - s_j \mathbf{I}$ . Ces noyaux sont des sous-espaces invariants appelés *sous-espaces propres généralisés* associés à la valeur propre  $s_j$ . Sans donner de véritable démonstration, nous allons donner quelques résultats pratiques les concernant. Tout d'abord, ceux-ci forment une suite emboîtées de sous-espaces de dimension croissante, le noyau de  $(\mathbf{L} - s\mathbf{I})^2$  contenant celui de  $\mathbf{L} - s\mathbf{I}$ , etc. Le plus grand d'entre eux, appelé *sous-espace principal*,

est de dimension  $d_j$  égale à la multiplicité de la valeur propre, c'est le noyau de  $(\mathbf{L} - s_j \mathbf{I})^{d_j}$ . Le théorème de Cayley–Hamilton, qui stipule que  $\mathbf{L}$  vérifie son propre polynôme caractéristique, soit

$$\prod_j (\mathbf{L} - s_j \mathbf{I})^{d_j} \equiv 0,$$

peut être vu comme la traduction directe de cette décomposition en somme directe de sous-espaces principaux.

Appelons  $\mathbb{E}_j$  le sous-espace principal associé à  $s_j$ ,  $\mathbf{L}_j$  la restriction de  $\mathbf{L}$  à  $\mathbb{E}_j$ . Soit également  $\mathbf{M}_j = \mathbf{L}_j - s_j \mathbf{I}_{d_j}$ , où  $\mathbf{I}_{d_j}$  est l'opérateur identité de  $\mathbb{E}_j$  de dimension  $d_j$ . L'indice d'un vecteur principal  $\mathbf{X}$  ( $\in \mathbb{E}_j$ ) est alors défini comme le plus petit entier  $m$  non-négatif tel que  $\mathbf{M}_j^m \cdot \mathbf{X} = 0$ . Cet indice vérifie  $1 \leq m \leq d_j$  car, d'une part,  $m = 1$  correspond au cas des vecteurs propres qui satisfont  $(\mathbf{L}_j - s_j \mathbf{I}_{d_j}) \cdot \mathbf{X} = 0$ , et d'autre part,  $\mathbf{M}_j^{d_j} \cdot \mathbf{X} = 0$  puisque, par hypothèse  $\mathbf{X}$  appartient au sous-espace principal. De ce fait on déduit d'ailleurs que si  $\mathbf{X}$  est un vecteur d'indice  $m$  alors  $\mathbf{M}_j^n \cdot \mathbf{X}$  pour  $n < m$  est d'indice  $m - n$ .

Explorant le sous-espace principal attaché à  $s_j$ , on peut déterminer l'indice maximal  $m_{\max}$  des vecteurs de ce sous-espace. Considérons tout d'abord le cas où  $m_{\max} = d_j$  et prenons un vecteur d'indice maximal,  $\mathbf{Y}_{d_j}$  (pour cela on calcule  $(\mathbf{L} - s_j \mathbf{I})^{d_j}$  et on résout le problème linéaire  $(\mathbf{L} - s_j \mathbf{I})^{d_j} \cdot \mathbf{X} = 0$ ). Considérons maintenant la suite des  $d_j$  vecteurs

$$\left\{ \mathbf{Y}_{d_j}, \mathbf{Y}_{d_j-1} = \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{Y}_{d_j}, \mathbf{Y}_{d_j-2} = \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{Y}_{d_j-1} = \mathbf{M}_j^2 \cdot \mathbf{Y}_{d_j}, \dots, \mathbf{Y}_1 = \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{Y}_2 = \mathbf{M}_j^{d_j-1} \cdot \mathbf{Y}_{d_j} \right\},$$

soit encore

$$\left\{ \mathbf{Y}_{d_j-n} = \mathbf{M}_j^n \cdot \mathbf{Y}_{d_j}; \quad n = 0, 1, \dots, d_j - 1 \right\}.$$

(Par hypothèse,  $\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{Y}_1 = \mathbf{M}_j^{d_j} \cdot \mathbf{Y}_{d_j} \equiv 0$ .) Cette suite peut servir de base du sous-espace principal attaché à  $s_j$  car elle est linéairement indépendante. En effet, on vérifie que la combinaison linéaire:

$$\mathbf{Z} = \sum_{n=1}^{d_j} \mu_n \mathbf{Y}_n$$

s'annule si et seulement si tous ses coefficients  $\mu_n$  sont nuls: calculant  $\mathbf{M}_j^{d_j-1} \cdot \mathbf{Z}$ , on trouve

$$\mathbf{M}_j^{d_j-1} \cdot \mathbf{Z} = \sum_{n=1}^{d_j} \mu_n \mathbf{M}_j^{d_j-1} \cdot \mathbf{Y}_n = \sum_{n=1}^{d_j} \mu_n \mathbf{M}_j^{d_j-1} \mathbf{M}_j^{d_j-n} \cdot \mathbf{Y}_{d_j} = \sum_{n=1}^{d_j} \mu_n \mathbf{M}_j^{2d_j-n-1} \cdot \mathbf{Y}_{d_j}.$$

Or,  $\mathbf{Y}_{d_j}$  étant d'indice maximal,  $\mathbf{M}_j^m \cdot \mathbf{Y}_{d_j} \equiv 0$  sauf pour  $m < d_j$ , donc tous les termes de la somme disparaissent automatiquement sauf pour  $2d_j - n - 1 < d_j$  donc pour  $n > d_j - 1$  soit seulement pour  $n = d_j$ , de sorte que

$$\mathbf{Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{d_j} = 0.$$

Il suffit ensuite de recommencer avec  $\mathbf{Y}_{d_j-1}$  en calculant  $\mathbf{M}_j^{d_j-2} \mathbf{Z}$  qui conduit à  $\mu_{d_j-1} = 0$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\mathbf{Y}_1$ . La collection de vecteurs étant bien libre, elle peut servir de base pour  $\mathbb{E}_j$

Le vecteur  $\mathbf{Y}_1$ , d'indice 1, est colinéaire au vecteur propre  $\hat{\mathbf{X}}_j$  et, par définition des  $\mathbf{Y}_n$ , on a

$$\mathbf{Y}_{n-1} = (\mathbf{L}_j - s_j \mathbf{I}_{d_j}) \cdot \mathbf{Y}_n$$

soit encore

$$\mathbf{L}_j \cdot \mathbf{Y}_n = s_j \mathbf{Y}_n + \mathbf{Y}_{n-1}.$$

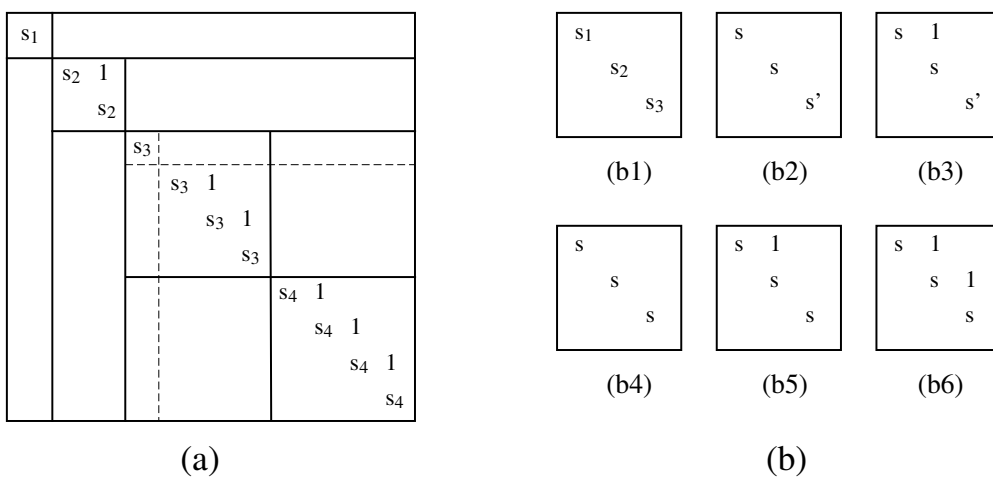


Figure 3.3: (a) Structure en blocs de Jordan en dimension  $d$  dans la base propre généralisée:  $s_1$  non dégénérée;  $s_2$  valeur propre double, non-diagonalisable;  $s_3$  de multiplicité 4, décomposable en 2 sous-espaces de dimension 1 et 3 construits sur des vecteurs d'indice 1 et 3 respectivement;  $s_4$  également quadruple. (b) Cas possibles en dimension 3: trois valeurs propres distinctes (b1) (N.B.: matrice complètement diagonale, éventuellement seulement dans l'extension complexe si deux des valeurs propres sont complexes conjuguées); deux valeurs réelles distinctes, la valeur propre double étant diagonalisable (b2) ou non-diagonalisable (b3); valeur propre triple, vecteurs d'indice maximal 1, 2 ou 3 donnant trois blocs de Jordan d'ordre 1 (b4), un bloc d'ordre 2 et un d'ordre 1 (b5) ou un bloc d'ordre 3 (b6).

La restriction  $\mathbf{L}_j$  de  $\mathbf{L}$  à  $\mathbb{E}_j$  est donc représentée dans la base  $\{\mathbf{Y}_n\}$  par un bloc élémentaire de Jordan:

$$\begin{array}{c}
 n-1 \\
 n \\
 n+1
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & n-1 & n & n+1 \\
 & 0 & \vdots & \\
 & 1 & 0 & \vdots \\
 s_j & 1 & 0 & \\
 0 & s_j & 1 & \\
 \vdots & 0 & s_j & \\
 & \vdots & 0 &
 \end{pmatrix}$$

Introduisant l'opérateur  $\mathbf{N}_{d_j}$ , nous avons donc

$$\mathbf{L}_j = s_j \mathbf{I}_{d_j} + \mathbf{N}_{d_j}$$

Si maintenant  $m_{\max} < d_j$ , on peut quand même partir d'un vecteur d'indice maximal particulier et construire le sous-espace engendré par le  $\mathbf{Y}_n$  correspondants. Cet espace est de dimension  $m_{\max}$ . Il reste alors à effectuer la même opération dans le sous-espace supplémentaire de dimension  $d_j - m_{\max}$ , i.e., déterminer l'indice maximal des vecteurs de ce supplémentaire puis, un vecteur d'indice maximal étant trouvé, construire la base associée, et ainsi de suite. Par recombinaison sur chacune de ces bases partielles, la structure de  $\mathbf{L}_j$  se résume à une somme directe de plusieurs blocs de Jordan alignés sur la diagonale, l'opérateur complet étant ensuite représenté par une somme directe de somme directe de blocs, comme le suggère la Fig. 3.3a. Dans les applications, ce travail systématique apparemment fastidieux n'est jamais très considérable car il est rare de devoir considérer des problèmes de dimension supérieure à 3, la Fig. 3.3b répertoriant les différents cas possibles. Le cas bidimensionnel a été illustré au chapitre précédent, mais sans faire explicitement référence à la notion de vecteur d'indice maximal.

### 3.2.3 Exponentielle de matrice

Le but de tout ce qui précède est de mettre l'opérateur  $\mathbf{L}$  sous la forme la plus adaptée possible au calcul de ses puissances qui interviennent dans l'expression développée de l'exponentielle exprimant l'opérateur d'évolution linéarisé:

$$\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{L}) \cdot \mathbf{X}_0.$$

Dans la base où  $\mathbf{L}$  est sous sa forme de Jordan on a:

$$\exp(t\mathbf{L}_j) = \exp\left(t(s_j\mathbf{I}_{d_j} + \mathbf{N}_{d_j})\right) = \exp\left(t s_j\mathbf{I}_{d_j}\right) \exp\left(t\mathbf{N}_{d_j}\right).$$

Ici, l'exponentielle de la somme des opérateurs est simplement le produit des exponentielles car  $\mathbf{I}_{d_j}$  commute avec n'importe quel opérateur donc en particulier  $\mathbf{N}_{d_j}^n$ . De façon évidente, on a  $\exp\left(t s_j\mathbf{I}_{d_j}\right) = \exp(t s_j)\mathbf{I}_{d_j}$ . Il reste donc à calculer la deuxième exponentielle. Or cette exponentielle ne comporte qu'un petit nombre de termes car  $\mathbf{N}_{d_j}$  est nilpotent, i.e.,  $(\mathbf{N}_{d_j})^{d_j} = 0$ . Par exemple avec  $d_j = 3$  et abandonnant tous les indices superflus on trouve

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

de sorte que

$$\exp(t\mathbf{N}) = \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\exp(t\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \exp(st) & t \exp(st) & \frac{1}{2}t^2 \exp(st) \\ 0 & \exp(st) & t \exp(st) \\ 0 & 0 & \exp(st) \end{bmatrix}$$

Les termes de la forme  $(t^j/j!) \exp(st)$  sont appelés *termes séculaires* et décrivent une dérive lente par rapport à un comportement dominant exponentiel.

### 3.2.4 Interprétation des termes séculaires

Pour comprendre l'origine des termes en  $t^n \exp(st)$  il faut revenir à la notion de dégénérescence. Dans le cas le plus simple où  $s = 0$  en dimension 2, le problème différentiel s'écrit simplement:  $\frac{d^2}{dt^2}X = 0$ , qui s'intègre immédiatement pour donner  $X = X_0 + X_1 t$ , où  $X_0$  et  $X_1$  sont des constantes d'intégration fonction des conditions initiales. Dans ce cas, la condition de stabilité marginale correspond non pas à la neutralité mais à une croissance algébrique des perturbations (i.e., plus lente qu'exponentielle). Dans le cas d'une racine double  $\bar{s} \neq 0$ , il vient

$$\left(\frac{d}{dt} - \bar{s}\right)^2 X = 0,$$

dont la solution générale s'écrit

$$X(t) = (X_0 + X_1 t) \exp(\bar{s}t),$$

ce que l'on obtient par exemple en décomposant l'intégration en deux étapes:

$$\left(\frac{d}{dt} - \bar{s}\right)\left(\frac{d}{dt} - \bar{s}\right)X = \left(\frac{d}{dt} - \bar{s}\right)Y \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt} - \bar{s}\right)X = Y.$$

Considérons tout d'abord le cas non-dégénéré:

$$\left(\frac{d}{dt} - s_1\right)\left(\frac{d}{dt} - s_2\right)X = 0,$$

que nous écrivons

$$\left(\frac{d}{dt} - s_1\right)Y = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt} - s_2\right)X = Y.$$

La solution du premier problème est donnée par  $Y = Y_0 \exp(s_1 t)$  que nous reportons dans le second. La solution de ce dernier, qui est inhomogène, s'obtient en superposant la solution générale du problème sans second membre,  $X_{\text{hom.}} = X_2 \exp(s_2 t)$ , et une solution particulière du problème complet. Cherchant celle-ci sous la forme  $X_{\text{inhom.}} = X_1 \exp(s_1 t)$ , nous trouvons:  $(s_1 - s_2)X_1 = Y_0$ , de sorte que, comme nous nous y attendions, nous n'obtenons  $X = X_1 \exp(s_1 t) + X_2 \exp(s_2 t)$  qu'en l'absence de résonance linéaire ( $s_1 \neq s_2$ ), afin de pouvoir déterminer  $X_1 = Y_0/(s_1 - s_2)$ . Si la valeur propre est dégénérée, i.e.,  $s_1 = s_2 = \bar{s}$ , la première partie du problème conduit toujours à  $Y = Y_0 \exp(\bar{s} t)$ , mais le second calcul ne tient plus. L'intégration est alors effectuée par la méthode de la variation de la constante: dans la solution générale du problème homogène,  $X = \bar{X} \exp(\bar{s} t)$ , la constante  $\bar{X}(t)$  est supposée fonction du temps puis réinsérée dans le problème avec second membre,  $(\frac{d}{dt} - \bar{s})(\bar{X} \exp(\bar{s} t)) = (\frac{d}{dt} \bar{X}) \exp(\bar{s} t) = Y_0 \exp(\bar{s} t)$ , soit  $\frac{d}{dt} \bar{X} = Y_0$ , donc  $\bar{X} = Y_0 t + X_0$ , d'où finalement  $X(t) = (X_0 + Y_0 t) \exp(\bar{s} t)$  qui contient bien la contribution séculaire annoncée:  $X = (X_0 + X_1 t) \exp(\bar{s} t)$ . Passons maintenant à la limite du cas dégénéré en supposant  $s_1 = \bar{s} + \delta s$  et  $s_2 = \bar{s} - \delta s$  et en faisant tendre  $\delta s$  vers zéro. La solution s'écrit alors  $X = (X_1 \exp(+\delta s t) + X_2 \exp(-\delta s t)) \exp(\bar{s} t)$  mais si  $\delta s \rightarrow 0$ , on peut approcher  $\exp(\pm \delta s t)$  par  $1 \pm \delta s t$  tant que  $t \ll 1/\delta s$ . Regroupant les termes on trouve alors dans cette limite  $X = [(X_1 + X_2) + (X_1 - X_2)\delta s t] \exp(\bar{s} t)$ , et par identification  $(X_1 + X_2) = X_0$  et  $(X_1 - X_2)\delta s = Y_0$ , soit  $X_{1,2} = \frac{1}{2}(X_0 \pm Y_0/\delta s)$ . La dérive séculaire découle donc d'interférences destructives entre deux termes tendant vers l'infini (par  $Y_0/\delta s$ ) et observables sur une durée d'ordre  $1/\delta s$  tendant elle-même vers l'infini à la dégénérescence.

### 3.2.5 Perturbation d'un problème linéaire

Nous venons d'interpréter les termes séculaires qui apparaissent en cas de valeur propre multiple en considérant un problème voisin où la dégénérescence était explicitement levée. Cherchons à exprimer de façon plus générale les conditions de cette levée de dégénérescence par perturbation du problème de départ.

Tout d'abord notons que la forme de Jordan à laquelle nous sommes arrivés est une *représentation* matricielle de l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}$  considéré, représentation dont on constate le caractère approprié lorsqu'il s'agit de calculer  $\exp(t\mathbf{L})$ . Elle est obtenue par passage de la base originelle à la base propre généralisée. Lors de ce passage, la matrice initiale est transformée en une matrice *semblable*. On dit en effet que deux matrices  $[m]$  et  $[p]$  sont semblables s'il existe une matrice inversible  $[t]$  telle que  $[m] = [t][p][t^{-1}]$ . Cette similitude ne change ni la structure de l'opérateur ni son spectre car le polynôme caractéristique est invariant dans l'opération:  $\det(\mathbf{T}(\mathbf{L} - s\mathbf{I})\mathbf{T}^{-1}) = \det(\mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1} - s\mathbf{I}) = \det(\mathbf{L} - s\mathbf{I})$ . Elle définit une relation d'équivalence entre matrices que l'on peut considérer comme des représentations différentes d'un même opérateur. De son côté, la matrice  $[t]$  peut être interprétée comme la matrice de changement de base sous-jacente au changement de représentation.

Partant de la perturbation la plus générale apportée à un opérateur  $\mathbf{L}$ , nous devons tout d'abord chercher à en soustraire "ce qui ne change rien" à sa structure. Une perturbation infinitésimale qui ne change rien peut donc se mettre sous la forme d'une similitude proche de l'identité définie par

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{\Gamma},$$

où les éléments de  $\mathbf{\Gamma}$  sont petits de sorte que  $\mathbf{T}$  est bien inversible ( $\det(\mathbf{T}) \simeq 1 \neq 0$ ). L'opérateur perturbé est alors donné par

$$\mathbf{L}' = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})\mathbf{L}(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}^{-1}).$$

Par identification, on vérifie que

$$(\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 - \dots + (-1)^k \mathbf{\Gamma}^k + \dots$$

et par substitution, en toute généralité

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + (\mathbf{\Gamma}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{\Gamma}) + \dots,$$

ce qui fait apparaître le commutateur  $[\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}] = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{\Gamma})$  à l'ordre le plus bas en perturbation. La question est donc de déterminer le nombre de paramètres indépendants dont dépend la "vraie" perturbation  $\delta\mathbf{L} - [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}]$ .



$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \delta\mathbf{L}$$

où  $\delta\mathbf{L}$  est représenté par une matrice

$$\delta\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \delta l_{11} & \delta l_{12} \\ \delta l_{21} & \delta l_{22} \end{bmatrix} = \delta l_{11}\mathbf{U}_1 + \delta l_{12}\mathbf{U}_2 + \delta l_{21}\mathbf{U}_3 + \delta l_{22}\mathbf{U}_4,$$

où

$$\left\{ \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

forme la base canonique de l'espace des matrices  $(2 \times 2)$ . Posons de même

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

et considérons tout d'abord le cas diagonalisable pour lequel l'opérateur  $\mathbf{L}$  s'écrit dans sa base propre

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

Le calcul du commutateur conduit à

$$[\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12}(s_2 - s_1) \\ \gamma_{21}(s_1 - s_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

et donc

$$\delta\mathbf{L} - [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \delta l_{12} & \delta l_{12} - \gamma_{12}(s_2 - s_1) \\ \delta l_{21} - \gamma_{21}(s_1 - s_2) & \delta l_{22} \end{bmatrix}.$$

Si  $s_1 = s_2$ ,  $\mathbf{L}$  est multiple de  $\mathbf{I}$  et commute avec n'importe quel  $\mathbf{\Gamma}$ . La partie de  $\delta\mathbf{L}$  qui dériverait d'une similitude est donc identiquement nulle, tout  $\delta l_{jj'} \neq 0$  modifie la dynamique, généralement en levant la dégénérescence, éventuellement en brisant seulement le caractère diagonalisable ( $\delta l_{jj'} \equiv 0$  sauf  $\delta l_{12}$  ou  $\delta l_{21}$ ). Par contre si  $s_1 \neq s_2$ , il existe une famille continue à deux paramètres des perturbations qui déterminent un opérateur semblable à l'opérateur de départ car on peut fixer  $\gamma_{jj'} = \delta l_{jj'}/(s_{j'} - s_j)$  pour  $(jj') = (12)$  ou  $(21)$ . Les vraies perturbations forment la famille complémentaire à deux paramètres  $(\delta l_{11}, \delta l_{22})$  modifiant séparément chacune des valeurs propres.

Considérons maintenant le cas non-diagonalisable

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \bar{s} & 1 \\ 0 & \bar{s} \end{bmatrix}.$$

Pour le commutateur, nous trouvons

$$[\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}] = \begin{bmatrix} -\gamma_{21} & \gamma_{11} - \gamma_{22} \\ 0 & \gamma_{21} \end{bmatrix}$$

$\gamma_{12}$  a disparu et il reste deux paramètres  $\gamma_{21}$  et  $\gamma_{11} - \gamma_{22}$  pour annuler le maximum de termes dans

$$\delta\mathbf{L} - [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \delta l_{11} + \gamma_{21} & \delta l_{12} - (\gamma_{11} - \gamma_{22}) \\ \delta l_{21} & \delta l_{22} - \gamma_{21} \end{bmatrix}.$$

Le terme  $\delta l_{12}$  peut toujours être supprimé et l'un des deux termes  $\delta l_{11}$  ou  $\delta l_{22}$ . En d'autres termes la perturbation la plus générale "déployant la singularité" de ce problème linéaire est donnée par

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \eta\mathbf{U}_3 - \eta'\mathbf{U}_4 \equiv \begin{bmatrix} \bar{s} & 1 \\ -\eta & \bar{s} - \eta' \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

où les signes "−" ont été introduits par commodité. Le polynôme caractéristique s'écrit alors:

$$(s - \bar{s})(s - \bar{s} + \eta') + \eta = s^2 - (2\bar{s} - \eta')s + \bar{s}(\bar{s} - \eta') + \eta = 0.$$

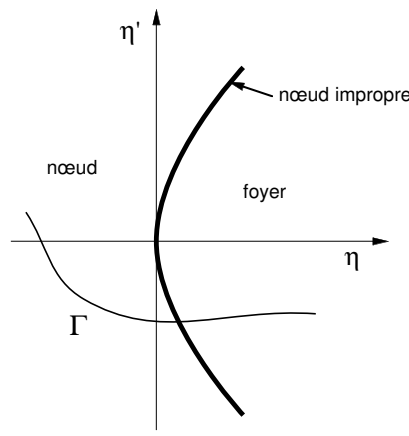


Figure 3.4: Levée de dégénérescence d'une valeur propre double non-diagonalisable. La perturbation la plus générale dépend de deux paramètres  $\eta$  et  $\eta'$ , a priori petits devant  $|s|$ . La nature stable ou instable des nœuds et foyers dépend du signe de  $s$ . Dans une expérience où l'on ne dispose que d'un seul paramètre de contrôle, le système suit un chemin  $\Gamma$  dans l'espace  $(\eta, \eta')$  qui peut ou non couper la ligne  $\eta = \frac{1}{4}\eta'^2$  marquant la frontière entre les comportements oscillants (valeurs propres complexes conjuguées) ou non (valeurs propres réelles).

Le discriminant de ce trinôme se réduit à  $\Delta = \eta'^2 - 4\eta$ . La levée de dégénérescence, illustrée sur la Fig. 3.4, peut donc conduire à des valeurs propres réelles ou complexes conjuguées suivant le chemin suivi dans l'espace des perturbations, ce qui explique que dans le cas du nœud impropre (Fig. 2.8a) les trajectoires ressemblent à celles qui se développent au voisinage d'un nœud (Fig. 2.7a) aussi bien qu'au voisinage d'un foyer (Fig. 2.9a).

La généralisation en dimension  $d$

$$\begin{bmatrix} \bar{s} & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \bar{s} & 1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\eta_1 & -\eta_2 & \dots & -\eta_{d-1} & \bar{s} - \eta_d \end{bmatrix}$$

est appelée forme normale de Jordan–Arnol'd.

### 3.3 Dynamique non-linéaire et résonances

#### 3.3.1 Introduction

Conformément à l'analyse faite précédemment, nous pouvons représenter le système décrivant la dynamique au voisinage d'un point fixe ramené à l'origine par un champ de vecteurs défini comme une série entière vectorielle:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X} + \sum_{n>1} \mathbf{A}_n(\mathbf{X}).$$

$\mathbf{L}$  étant l'opérateur décrivant la dynamique linéaire, nous supposons que  $\mathbf{X}$  est dans une base qui met  $\mathbf{L}$  sous sa forme canonique de Jordan. Les  $\mathbf{A}_n(\mathbf{X})$  se présentent comme des sommes de monômes en  $X_j$  formellement d'ordre  $n$ . Nous supposons le problème sans symétrie particulière.

L'approche suivie ici, délibérément constructiviste, vise à dégager la notion de *forme normale* étendant au domaine non-linéaire ce que nous venons de voir dans le cas linéaire, c'est à dire établir des classes d'équivalence entre problèmes non-linéaires, ce que fait la mise sous forme de Jordan pour les problèmes linéaires. D'un autre point de vue, partant de l'idée que l'on ne sait guère résoudre explicitement que les problèmes linéaires, nous allons en fait chercher des transformations qui linéarisent "le mieux possible" un problème non-linéaire donné.

Pour éclairer notre objectif, commençons par deux remarques/exemples élémentaires et tout d'abord travaillons à rebours sur un problème résolu: Considérons l'équation différentielle du second ordre  $\frac{d^2}{dt^2} Y + Y =$

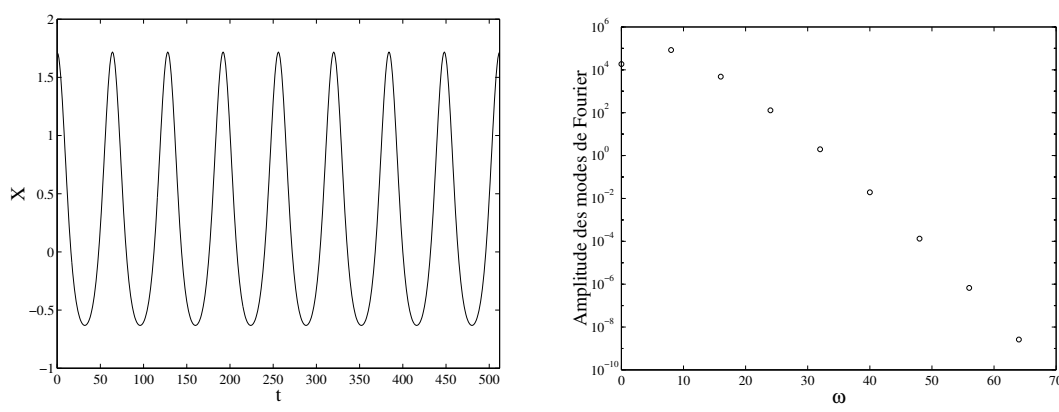


Figure 3.5:  $X(t)$  (à gauche) et l'amplitude de ses modes de Fourier (à droite) solution de l'équation de l'oscillateur linéaire après transformation non-linéaire.

0 avec pour condition initiale  $Y(0) = Y_0$  et  $\frac{d}{dt}Y(0) = 0$ , dont la solution est naturellement  $Y(t) = Y(0) \cos(t)$ . Passons maintenant à la variable transformée  $X = \exp(Y) - 1$ . La transformation inverse s'écrit  $Y = \ln(1 + X)$ . Calculons  $\frac{d}{dt}Y$  et  $\frac{d^2}{dt^2}Y$ . Il vient

$$\frac{d}{dt}Y = (1 + X)^{-1} \frac{d}{dt}X, \quad \frac{d^2}{dt^2}Y = -(1 + X)^{-2} \left(\frac{d}{dt}X\right)^2 + (1 + X)^{-1} \frac{d^2}{dt^2}X,$$

de sorte que  $X$  satisfait l'équation différentielle non-linéaire

$$(1 + X) \frac{d^2}{dt^2}X - \left(\frac{d}{dt}X\right)^2 + (1 + X)^2 \ln(1 + X) = 0.$$

La solution, illustrée sur la Fig. 3.5 en est bien évidemment  $X = \exp(Y_0 \cos(t)) - 1$ , de période  $2\pi$  mais présentant une infinité d'harmoniques, à la différence de  $Y$  qui un pur cosinus.

Le changement de représentation faisant passer de  $Y$  à  $X$  cache la simplicité du problème. Avec un peu d'intuition on peut sans doute la débusquer et déterminer directement la transformation qui ramènerait au problème linéaire. À défaut, on ne peut guère faire autre chose que de chercher cette transformation par son développement en série au voisinage de  $X = 0$ , point fixe évident du système dynamique. Ici le résultat est bien sûr connu d'avance:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n \quad \text{ou, inversement,} \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n$$

(on notera que la transformation est tangente à l'identité,  $X \sim Y$  pour  $X$  petit). Dans le cas général, il faut se résoudre à chercher, de façon itérative, les termes successifs de la transformation qui permet de changer de représentation, tout comme il avait fallu, au stade linéaire, déterminer la base propre généralisée qui permettait de calculer facilement l'opérateur d'évolution linéaire.

En second lieu, explicitons ce que nous entendons par linéaire/non-linéaire à l'aide de deux problèmes similaires, (1):  $\frac{d}{dt}X = sX + a_{n_1}X^{n_1}$ , et (2):  $\frac{d}{dt}X = sX + a_{n_2}X^{n_2}$ . Pour mesurer l'intensité respective des non-linéarités on peut comparer l'étendue du domaine de validité de l'approximation linéaire déterminée par  $|sX_1| \sim |a_{n_1}X_1^{n_1}|$  et  $|sX_2| \sim |a_{n_2}X_2^{n_2}|$ . Or nous nous intéressons avant tout au voisinage d'un cas marginal, i.e.,  $|s| \ll 1$  et  $(a_{n_1}, a_{n_2}) = \mathcal{O}(1)$ . Les lois d'échelle gouvernant l'étendue de domaine linéaire sont donc respectivement données par  $\tilde{X}_1 \sim |s|^{1/(n_1-1)}$  et  $\tilde{X}_2 \sim |s|^{1/(n_2-1)}$ , et donc  $\tilde{X}_2/\tilde{X}_1 \sim |s|^{(n_1-n_2)/(n_1-1)(n_2-1)}$ . L'intuition nous suggérerait de considérer le problème (2) comme "plus non-linéaire" que le problème (1) quand  $n_2 > n_1$ . Or, dans ce cas,  $n_1 - n_2 < 0$  implique que  $\tilde{X}_2/\tilde{X}_1 \rightarrow \infty$  quand  $s \rightarrow 0$ , ce qui signifie que l'effet des non-linéarités se manifeste plus tard, i.e. plus loin de l'origine des  $X$ . Il est donc d'une certaine façon "moins non-linéaire." On voit dès lors poindre notre but: trouver des transformations qui visent à élargir le domaine de validité de l'approximation linéaire en supprimant le maximum de monômes de degré croissant dans le développement en série du champ de vecteurs.

La suite de cette section est essentiellement la mise en œuvre d'une stratégie systématique d'attaque simultanée de ces deux problèmes. Nous travaillerons en augmentant progressivement la dimension du système différentiel considéré commençant par le cas simple mais instructif d'un système à seule variable réelle.

### 3.3.2 Le problème en dimension $d = 1$

Considérons un système à une variable  $X$  disposant d'un point fixe en  $X = 0$  et dont l'évolution est déterminée par une équation connue par son développement en série entière

$$\frac{d}{dt}X_{(0)} = F(X_{(0)}) = sX_{(0)} + \sum_{n>1} a_n^{(0)} X_{(0)}^n. \quad (3.36)$$

L'indice "(0)" est là pour rappeler les données du problème primitif, avant toute transformation. À l'ordre le plus bas, la transformation non-linéaire est cherchée sous la forme

$$X_{(0)} = X_{(1)} - \alpha_2 X_{(1)}^2 \quad (3.37)$$

L'indice "(1)" indique qu'il s'agit de la première étape, le "2" de  $\alpha_2$  faisant référence au degré du terme non-linéaire; le signe "-" est introduit par commodité. Au lieu d'exprimer l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, on aurait pu faire l'inverse car la transformation, tangente à l'identité, est construite pour être inversible.

Dérivons (3.37) par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}X_{(0)} = (1 - 2\alpha_2 X_{(1)}) \frac{d}{dt}X_{(1)}$$

et reportons dans (3.36):

$$(1 - 2\alpha_2 X_{(1)}) \frac{d}{dt}X_{(1)} = s(X_{(1)} - \alpha_2 X_{(1)}^2) + \sum_{n>1} a_n^{(0)} \left( X_{(1)} - \alpha_2 X_{(1)}^2 \right)^n.$$

Multiplions membre à membre par

$$(1 - 2\alpha_2 X_{(1)})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2\alpha_2 X_{(1)})^n$$

et rassemblons ordre par ordre. Il vient

$$\frac{d}{dt}X_{(1)} = sX_{(1)} + \sum_{n>1} a_n^{(1)} X_{(1)}^n. \quad (3.38)$$

Les coefficients  $a_n^{(1)}$  des termes en  $X_{(1)}^n$  sont fonction des  $a_n^{(0)}$  et de  $\alpha_2$ . ainsi

$$a_2^{(1)} = a_2^{(0)} + \alpha_2 s, \quad a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + 2\alpha_2^2 s, \quad \dots,$$

et nous pourrions éliminer le terme quadratique de (3.38) en prenant

$$\alpha_2 = -a_2^{(0)}/s,$$

valeur que l'on substituera dans tous les termes  $a_n^{(1)}$  pour  $n > 2$ , en particulier  $a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + 2s^{-1} \left( a_2^{(0)} \right)^2$ . Ceci n'est naturellement possible que si  $s \neq 0$ , condition d'*hyperbolicité* déjà avancée au chapitre précédent pour assurer que le système est *robuste* ou *structurellement stable*. Après une étape nous sommes arrivés à

$$\frac{d}{dt}X_{(1)} = sX_{(1)} + \sum_{n>2} a_n^{(1)} X_{(1)}^n, \quad (3.39)$$

et nous pouvons recommencer pour éliminer le terme cubique en posant

$$X_{(1)} = X_{(2)} - \alpha_3 X_{(2)}^3,$$

ce qui conduirait à

$$\alpha_3 = -a_3^{(1)}/2s,$$

et ainsi de suite jusqu'à "linéarisation" complète. Naturellement, au cours du processus il ne faut pas perdre la trace des coefficients intermédiaires, ce qui suggère l'utilisation de logiciels de calcul formel. Enfin, s'arrêtant à un ordre donné on peut reconstituer par substitutions successives le changement de variable qui réalise la linéarisation du problème à cet ordre. Ici, par exemple à l'ordre trois

$$X_{(0)} = X_{(2)} - \alpha_2 X_{(2)}^2 - \alpha_3 X_{(2)}^3 + \mathcal{O}(|X_{(2)}|^4),$$

$X_{(2)}$  étant gouverné par

$$\frac{d}{dt} X_{(2)} = sX_{(2)} + a_4^{(2)} X_{(2)}^4 + \mathcal{O}(|X_{(2)}|^5).$$

Après avoir observé qu'à la bifurcation  $s = 0$  la transformation n'est pas possible, on remarquera que le changement de variable devient *singulier* à la limite  $s \rightarrow 0$  car  $\alpha_n \sim 1/s \rightarrow \infty$ . Or si  $\alpha_2$  devient grand, le domaine de validité du développement se rétrécit dès le premier changement de variable:  $|X_{(1)}| \sim |\alpha_2 X_{(1)}^2|$  impliquant  $X_{(1)} \sim |s|$ . Cette observation, complémentaire de celle faite dans l'introduction sur la notion de non-linéarité liée à l'ordre formel des monômes formant le développement en série de  $F(X)$ , illustre le fait que les non-linéarités dominent le comportement du système près d'un point de bifurcation, même si un peu à coté, la linéarisation est théoriquement possible.

### 3.3.3 Le problème en dimension $d = 2$ : cas réel diagonalisable

Nous partons maintenant d'un système  $(2 \times 2)$  de valeurs propres propres  $s_1$  et  $s_2$ , distinctes ou confondues mais supposant  $\mathbf{L}$  diagonalisable. Les non-linéarités sont supposées quadratiques. Il vient donc

$$\frac{d}{dt} X_1 = s_1 X_1 + a_{10} X_1^2 + a_{11} X_1 X_2 + a_{12} X_2^2, \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 = s_2 X_2 + a_{20} X_1^2 + a_{21} X_1 X_2 + a_{22} X_2^2. \quad (3.41)$$

Cherchons un changement de variable qui repousse les non-linéarités à un ordre supérieur. Pour éviter de multiplier les indices nous allons changer le nom des variables. Posons:

$$X_1 = Y_1 + \alpha_{10} Y_1^2 + \alpha_{11} Y_1 Y_2 + \alpha_{12} Y_2^2, \quad (3.42)$$

$$X_2 = Y_2 + \alpha_{20} Y_1^2 + \alpha_{21} Y_1 Y_2 + \alpha_{22} Y_2^2. \quad (3.43)$$

Dérivant (3.42–3.43) par rapport à  $t$  et reportant dans (3.40–3.41) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} Y_1 (1 + 2\alpha_{10} Y_1 + \alpha_{11} Y_2) + \frac{d}{dt} Y_2 (\alpha_{11} Y_1 + 2\alpha_{12} Y_2) \\ &= s_1 Y_1 + (a_{10} + s_1 \alpha_{10}) Y_1^2 + (a_{11} + s_1 \alpha_{11}) Y_1 Y_2 + (a_{12} + s_1 \alpha_{12}) Y_2^2 + \mathcal{O}(Y_{1,2}^3), \\ & \frac{d}{dt} Y_1 (2\alpha_{20} Y_1 + \alpha_{21} Y_2) + \frac{d}{dt} Y_2 (1 + \alpha_{21} Y_1 + 2\alpha_{22} Y_2) \\ &= s_2 Y_2 + (a_{20} + s_2 \alpha_{20}) Y_1^2 + (a_{21} + s_2 \alpha_{21}) Y_1 Y_2 + (a_{22} + s_2 \alpha_{22}) Y_2^2 + \mathcal{O}(Y_{1,2}^3). \end{aligned}$$

À l'ordre le plus bas,  $\frac{d}{dt} Y_{1,2} \sim s_{1,2} Y_{1,2} + \mathcal{O}(Y_{1,2}^2)$ , donc  $Y_j \frac{d}{dt} Y_{j'} = s_{j'} Y_j Y_{j'} + \mathcal{O}(Y_{1,2}^3)$ , de sorte que nous obtenons simplement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_1 &= s_1 Y_1 + (a_{10} - s_1 \alpha_{10}) Y_1^2 + (a_{11} - s_2 \alpha_{11}) Y_1 Y_2 \\ &\quad + (a_{12} + (s_1 - 2s_2) \alpha_{12}) Y_2^2, \\ \frac{d}{dt} Y_2 &= s_2 Y_2 + (a_{20} + (s_2 - 2s_1) \alpha_{20}) Y_1^2 + (a_{21} - s_1 \alpha_{21}) Y_1 Y_2 \\ &\quad + (a_{22} - s_2 \alpha_{22}) Y_2^2. \end{aligned}$$

Il est dès lors clair que la linéarisation complète à cet ordre sera possible si:

$$s_1 \neq 0, \quad s_2 \neq 0, \quad s_1 - 2s_2 \neq 0, \quad s_2 - 2s_1 \neq 0.$$

Aux deux premières conditions d'hyperbolicité généralisant celle rencontrée pour  $d = 1$ , s'ajoutent deux nouvelles conditions, dites de *non-résonance*, s'exprimant sous forme d'une relation entre les valeurs propres.

Considérons quelques cas particuliers:

- $s_1 = s_2 = 0$ : on ne peut rien supprimer; tous les  $a_{jj'}$  de départ sont significatifs;
- $s_1 = 0, s_2 \neq 0$  (et donc  $s_1 \neq 2s_2$ ): annulant tous les coefficients qui peuvent l'être, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dY_1}{dt} &= a_{10}Y_1^2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= s_2Y_2 + a_{21}Y_1Y_2;\end{aligned}$$

il est alors possible d'intégrer la première équation et reporter le résultat dans la seconde;<sup>3</sup>

- $s_1 = 2s_2 \neq 0$ : on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{dY_1}{dt} &= s_1Y_1 + a_{12}Y_2^2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= s_2Y_2;\end{aligned}$$

résolvant la seconde équation, on obtient  $Y_2 \propto \exp(s_2t)$  que l'on reporte dans la première équation, ce qui conduit à un terme de source  $\propto \exp(2s_2t) = \exp(s_1t)$  de sorte que l'on a bien un forçage par un terme résonnant au sens que nous avons utilisé précédemment (cf. §3.2.4).

### 3.3.4 Cas non-diagonalisable en dimension $d = 2$

Nous partons donc maintenant de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_1 &= \bar{s}X_1 + X_2 + a_{10}X_1^2 + a_{11}X_1X_2 + a_{12}X_2^2, \\ \frac{d}{dt}X_2 &= \bar{s}X_2 + a_{20}X_1^2 + a_{21}X_1X_2 + a_{22}X_2^2,\end{aligned}$$

et nous cherchons comme précédemment un changement de variable qui repousse les non-linéarités à un ordre supérieur. La présence du terme hors diagonale induit quelques changements dans le calcul. En particulier, à l'ordre le plus bas  $\frac{d}{dt}Y_1$  est maintenant égal à  $\bar{s}Y_1 + Y_2$ . Il vient finalement:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1 &= \bar{s}Y_1 + Y_2 + (a_{10} - \bar{s}\alpha_{10} + \alpha_{20})Y_1^2 \\ &\quad + (a_{11} - \bar{s}\alpha_{11} + \alpha_{21} - 2\alpha_{10})Y_1Y_2 + (a_{12} - \bar{s}\alpha_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{11})Y_2^2, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= \bar{s}Y_2 + (a_{20} - \bar{s}\alpha_{20})Y_1^2 \\ &\quad + (a_{21} - \bar{s}\alpha_{21} - 2\alpha_{20})Y_1Y_2 + (a_{22} - \bar{s}\alpha_{22} - \alpha_{21}).\end{aligned}$$

Si  $\bar{s} \neq 0$ , on trouve facilement une solution unique pour les  $\alpha_{jj'}$  en fonction des  $a_{jj'}$  permettant d'annuler tous les coefficients partant de  $\alpha_{20} = a_{20}/\bar{s}$  qui détermine  $\alpha_{21}$  puis  $\alpha_{22}$  et, à leur tour les trois derniers coefficients.

Il n'en va plus de même si  $\bar{s} = 0$  (cas non-hyperbolique). Récrivons le système précédent dans ce cas particulier:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1 &= Y_2 + (a_{10} + \alpha_{20})Y_1^2 + (a_{11} + \alpha_{21} - 2\alpha_{10})Y_1Y_2 + (a_{12} + \alpha_{22} - \alpha_{11})Y_2^2, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= a_{20}Y_1^2 + (a_{21} - 2\alpha_{20})Y_1Y_2 + (a_{22} - \alpha_{21})Y_2^2.\end{aligned}$$

Nous voyons donc tout d'abord que le terme en  $Y_1^2$  de l'équation pour  $Y_2$  ne peut jamais disparaître. Pour ce qui est des autres termes la situation apparaît difficile. Dans le cas général, on ne peut en effet supprimer simultanément le terme en  $Y_1^2$  de l'équation pour  $Y_1$  et le terme en  $Y_1Y_2$  de l'équation pour  $Y_2$ , ce qui conduirait à (i)  $\alpha_{20} = -a_{10}$  et (ii)  $\alpha_{20} = \frac{1}{2}a_{12}$ . Les conditions (i) et (ii) ne sont en effet compatibles que si  $a_{12} = -2a_{10}$ , sinon il faut choisir. Partant par exemple de (i), on peut poursuivre et annuler tous les autres coefficients pour arriver à:

$$\frac{d}{dt}Y_1 = Y_2, \tag{3.44}$$

$$\frac{d}{dt}Y_2 = a_{20}Y_1^2 + a'_{21}Y_1Y_2. \tag{3.45}$$

<sup>3</sup>les solutions peuvent ne pas être définies pour tout  $t$  (cf. remarque antérieure, §2.1.1).

ramené, moyennant un petit changement de notation, à une seule équation du second ordre

$$\frac{d^2}{dt^2}Y + \varepsilon'Y \frac{d}{dt}Y + \varepsilon Y^2 = 0.$$

Partant de la condition (ii), on obtiendrait de même

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_1 &= Y_2 + a'_{10}Y_1^2, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= a_{20}Y_1^2, \end{aligned}$$

qui se ramènerait évidemment à la même équation du second ordre. Les deux formes trouvées représentent bien le même problème non-linéaire à une “transformation de jauge” près. La jauge (i) est souvent appelée “jauge d’Arnol’d.”

### 3.3.5 Cas d’une paire de valeurs propres complexes conjuguées

Complétant le problème linéaire (2.57–2.57) par des termes non-linéaires quadratiques nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X_1 &= \sigma X_1 + \omega X_2 + a_{10}X_1^2 + a_{11}X_1X_2 + a_{12}X_2^2, \\ \frac{d}{dt}X_2 &= -\omega X_1 + \sigma X_2 + a_{20}X_1^2 + a_{21}X_1X_2 + a_{22}X_2^2. \end{aligned}$$

Suivant la même stratégie nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_1 &= \sigma Y_1 + \omega Y_2 + [a_{10} - \omega(\alpha_{11} + \alpha_{20}) - \sigma\alpha_{10}]Y_1^2 \\ &\quad + [a_{11} - \omega(2\alpha_{10} - 2\alpha_{12} - \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{11}]Y_1Y_2 + [a_{12} + \omega(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \alpha_{12}\sigma]Y_2^2, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= -\omega Y_1 + \sigma Y_2 + [a_{20} - \omega(\alpha_{10} - \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{20}]Y_1^2 \\ &\quad + [a_{21} - \omega(\alpha_{11} + 2\alpha_{20} - 2\alpha_{22}) - \sigma\alpha_{21}]Y_1Y_2 + [a_{22} - \omega(\alpha_{12} + \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{22}]Y_2^2. \end{aligned}$$

Annuler les coefficients des termes non-linéaires conduit à un système linéaire de 6 équations à six inconnues en  $\alpha_{jj'}$ . Calculant le déterminant de ce système, on trouve

$$\Delta = 9\omega^6 + 19\omega^4\sigma^2 + 11\omega^2\sigma^4 + \sigma^6,$$

dont on s’assure que c’est une forme définie en  $(\sigma, \omega)$  qui ne s’annule donc que pour  $\sigma = \omega = 0$ , situation écartée par hypothèse car sinon nous serions ramené au cas étudié juste avant. Puisque le déterminant n’est pas nul, la solution du système (quelle qu’elle soit, nous ne la chercherons pas) est unique, ce qui signifie que les non-linéarités, dans la forme normale, peuvent toujours être repoussées à l’ordre 3.

### 3.3.6 Généralisation

À ce niveau, plus rien ne nous empêche d’étendre la stratégie développée jusqu’à présent aussi bien du point de vue de la dimension du système que du point de vue de l’ordre de la réduction à la forme normale. Nous repartons donc d’un problème pour lequel l’ordre  $p - 1$  est supposé résolu:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{M}^{(p-1)}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}^{(p)}(\mathbf{X}), \quad (3.46)$$

donc où les non-linéarités à l’ordre  $p - 1$ , notées  $\mathbf{M}^{(p-1)}(\mathbf{X})$ , ne contiennent que des monômes résonnants. Nous devons nous attacher à simplifier l’ordre  $p$  où se trouvent rassemblées les contributions issues des non-linéarités originales, de la forme  $M_j^{(p)} = \sum_{\{p_j\}} a_{\{p_j\}} \prod_{j'} Y_{j'}^{n_{j'}}$  avec  $\sum_{j'} n_{j'} = p$ , où les  $a_{\{p_j\}}$  incluent les contributions des ordres précédents, l’indice  $j$  indiquant qu’il s’agit de l’équation  $j$ . Le changement de variables est pris sous la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y}), \quad (3.47)$$

où  $\mathbf{A}^{(p)}$  est un polynôme homogène d’ordre  $p$  dont les monômes sont de la forme  $A_j^{(p)} = \sum_{\{p_j\}} \alpha_{\{p_j\}} \prod_{j'} Y_{j'}^{n_{j'}}$  avec également  $\sum_{j'} n_{j'} = p$ . Calculons

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \left(1 + \partial\mathbf{A}^{(p)}/\partial\mathbf{Y}\right) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{Y}, \quad (3.48)$$

où  $\partial \mathbf{A}^{(p)} / \partial \mathbf{Y} = \mathbf{D}$  représente une matrice de polynômes homogènes de degré  $p - 1$ . En effet dérivant un monôme particulier intervenant dans l'équation  $j$ , on trouve

$$\sum_{j'} \left( \prod_{j'' \neq j'} Y_{j''}^{n_{j''}} \right) n_{j'} Y_{j'}^{n_{j'} - 1} \frac{d}{dt} Y_{j'}$$

que l'on peut écrire  $\sum_{j'} D_{jj'} \frac{d}{dt} Y_{j'} = (\mathbf{D} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Y})_j$ , les  $D_{jj'}$  dénotant les éléments de  $\mathbf{D}$ . Reportant (3.48) dans (3.46), nous obtenons

$$(1 + \mathbf{D}) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot [\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y})] + \mathbf{M}^{(p-1)}(\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y})) + \mathbf{M}^{(p)}(\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y})). \quad (3.49)$$

Considérons un monôme d'ordre  $p'$  de  $\mathbf{M}^{(p-1)}(\mathbf{X})$ , donc tel que  $2 \leq p' \leq p - 1$ . Dans la transformation, il vient

$$\mathbf{X}^{p'} = [\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y})]^{p'} \sim \mathbf{Y}^{p'} + p' \mathbf{Y}^{p'-1} \mathbf{A}^{(p)}(\mathbf{Y}).$$

Par hypothèse le second terme est d'ordre  $p + p' - 1$ . Puisque  $p' \geq 2$ , il est au moins d'ordre  $p + 1$  donc, même s'il faut en garder la trace pour les calculs ultérieurs, il n'intervient pas dans le calcul à l'ordre  $p$  considéré. On vérifierait de même, dans la multiplication par  $(1 + \mathbf{D})^{-1}$  qui vise à isoler  $\frac{d}{dt} \mathbf{Y}$  au membre de gauche de (3.49), on peut se contenter de  $1 - \mathbf{D}$ , les termes d'ordre supérieurs n'introduisant après multiplication que des monômes d'ordre au moins  $p + 1$ . Comme précédemment, les paramètres libres introduits dans (3.47) permettent de supprimer tous les termes sauf ceux qui sont résonnants, et ce, d'une façon qui n'est généralement pas unique.

Pour illustrer une fois de plus la notion de résonance avant de la généraliser, considérons le cas bidimensionnel diagonalisable à l'ordre 3.

$$\frac{d}{dt} X_1 = s_1 X_1 + a_{10} X_1^3 + a_{11} X_1^2 X_2 + a_{12} X_1 X_2^2 + a_{13} X_2^3, \quad (3.50)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 = s_2 X_2 + a_{20} X_1^3 + a_{21} X_1^2 X_2 + a_{22} X_1 X_2^2 + a_{23} X_2^3. \quad (3.51)$$

Le changement de variable non-linéaire

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + \alpha_{10} Y_1^3 + \alpha_{11} Y_1^2 Y_2 + \alpha_{12} Y_1 Y_2^2 + \alpha_{13} Y_2^3 \\ X_2 &= Y_2 + \alpha_{20} Y_1^3 + \alpha_{21} Y_1^2 Y_2 + \alpha_{22} Y_1 Y_2^2 + \alpha_{23} Y_2^3 \end{aligned}$$

Conduit directement à un système de la forme (3.50–3.51) pour  $(Y_1, Y_2)$  avec un nouveau jeu de coefficients  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{10} &\mapsto a_{10} + 2s_1 \alpha_{10}, & a_{11} &\mapsto a_{11} + (s_1 + s_2) \alpha_{11}, \\ a_{12} &\mapsto a_{12} + 2s_2 \alpha_{12}, & a_{13} &\mapsto a_{13} - (s_1 - 3s_2) \alpha_{13}, \\ a_{20} &\mapsto a_{20} + (3s_1 - s_2) \alpha_{20}, & a_{21} &\mapsto a_{21} + 2s_1 \alpha_{21}, \\ a_{22} &\mapsto a_{22} + (s_1 + s_2) \alpha_{22}, & a_{23} &\mapsto a_{23} + 2s_2 \alpha_{23}. \end{aligned}$$

À côté des conditions  $s_1 \neq 0$  et  $s_2 \neq 0$ , nous voyons apparaître les conditions de non-résonance à l'ordre 3:

$$s_1 + s_2 \neq 0, \quad 3s_1 - s_2 \neq 0, \quad 3s_2 - s_1 \neq 0.$$

Examinons maintenant les cas résonnants et supposons tout d'abord  $s_2 = 3s_1$ . Il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_1 &= s_1 Y_1, \\ \frac{d}{dt} Y_2 &= s_2 Y_2 + a_{20} Y_1^3. \end{aligned}$$

La solution de la première équation  $Y_1 \propto \exp(s_1 t)$ , une fois insérée dans la seconde y introduit bien un terme  $Y_1^3 \propto \exp(3s_1 t) = \exp(s_2 t)$ , en résonance avec le terme linéaire. Dans le cas  $s_2 = -s_1 = -\bar{s}$  on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_1 &= +\bar{s} Y_1 + a_{11} Y_1^2 Y_2, \\ \frac{d}{dt} Y_2 &= -\bar{s} Y_2 + a_{22} Y_1 Y_2^2, \end{aligned}$$



de sorte que les termes non-linéaires de ces équations apparaissent bien en résonance avec leurs solutions linéaires respectives  $Y_{1,2} \propto \exp(\pm \bar{s}t)$ ,  $Y_1^2 Y_2 \propto \exp(+\bar{s}t)$  et  $Y_1 Y_2^2 \propto \exp(-\bar{s}t)$

Revenant au cas général (3.46) introduit au début de cette section et supposant le système diagonalisable pour simplifier, en ne s'occupant que des termes à l'ordre  $p$ , on trouve par un calcul identique à celui effectué pour l'ordre 3:

$$\frac{d}{dt} Y_j = s_j Y_j + \sum_{\{p_j\}} \left[ a_{\{p_j\}} + \left( s_j - \sum_k n_k s_k \right) \alpha_{\{p_j\}} \right] \prod_j Y_j^{p_j}$$

d'où la forme générale des relations de résonance entre valeurs propres de la forme

$$s_j = \sum_{j'} n_{j'} s_{j'}, \quad n_{j'} \geq 0, \quad \sum_{j'} n_{j'} = p, \quad p \geq 2. \quad (3.52)$$

Considérant le calcul du cas bidimensionnel non-diagonalisable, on voit facilement que la condition (3.52) ne dépend pas de l'hypothèse de diagonalisabilité et qu'on obtiendrait le même résultat avec un bloc de Jordan non-trivial.

La linéarisation est donc possible s'il n'existe aucune relation du type (3.52) entre les valeurs propres. Il existe alors un changement de variable non-linéaire  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \dots$  permettant de ramener  $\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X} + \dots$  à  $\frac{d}{dt} \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}$  (théorème de Poincaré). Lorsqu'une telle relation existe,  $p$  est appelé l'*ordre* de la résonance et le changement de variables ramène à une forme normale  $\frac{d}{dt} \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} + \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{Y})$  ne contenant que des monômes résonnants (théorème de Poincaré–Dulac), les premiers de ceux-ci étant formellement de degré  $p$ .

Reprenons les cas déjà mentionnés. Celui d'une seule valeur propre  $s$  fait apparaître comme condition de résonance  $s = 0$  à tous les ordres, ce que l'on a précédemment identifié comme condition de perte de stabilité structurelle. Avec deux valeurs propres,  $s_1$  et  $s_2$ , augmentant l'ordre de résonance, on obtient successivement:

- ordre 2:  $s_1 = (2 - n)s_1 + ns_2$ , soit  $(n - 1)s_1 = ns_2$ , avec  $n \leq 2$ ;  $n = 0$  (resp.  $n = 1$ ) impose  $s_1 = 0$  (resp.  $s_2 = 0$ ).  $n = 2$  conduit au seul résultat non-trivial  $s_1 = 2s_2$  (ou par permutation de  $s_1$  et  $s_2$ ,  $s_2 = 2s_1$ );
- ordre 3:  $s_1 = (3 - n)s_1 + ns_2$ , soit  $(n - 2)s_1 = ns_2$ ;  $n = 0$  et  $n = 2$  redonnent chacun des réponses triviales;  $n = 3$  conduit à  $s_1 = 3s_2$  et  $n = 1$  à  $s_1 = -s_2$ .

Le cas de valeurs propres complexes conjuguées entre dans cette dernière catégorie. En effet, avec  $s_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ , la condition de résonance  $s_2 = -s_1$  implique  $\sigma = 0$ . Dans ce cas marginal, à tous les ordres impairs à commencer par l'ordre 3 on ne pourra donc échapper aux termes résonnants ( $i\omega = (n+1)(i\omega) + n(-i\omega)$ , donc  $m = (n+1) + n = 2n+1$ ). En représentation complexe, un monôme d'ordre  $m$  est de la forme  $Y^{m-n}(Y^*)^n$  et nous devons nous attendre à pouvoir déterminer un changement de variable non-linéaire éliminant tous les termes qui ne sont pas de la forme  $Y^{n+1}(Y^*)^n = |Y|^{2n}Y$ .

## 3.4 Conclusion

Tout au long de ce chapitre nous avons mis en œuvre des moyens visant à simplifier la description de la dynamique des systèmes non-linéaires qui s'offrent à notre étude. Cette simplification prend tout d'abord la forme d'un abaissement de la dimensionnalité du problème qui s'appuie sur la distinction entre *modes maîtres* (en petit nombre) et *modes esclaves*. Aux temps longs, l'évolution de ces derniers se borne à un suivi passif d'une dynamique imposée par les premiers. Pour que cette simplification soit opérante il faut que les échelles de temps soient bien distinctes (modes maîtres presque neutres, modes esclaves linéairement amortis).

Une fois acquise cette décomposition, les modes maîtres sont gouvernés par une dynamique effective dont les ingrédients essentiels sont (i) la dimension, i.e., le nombre de valeurs propres considérées comme marginales, (ii) leur dégénérescence au stade linéaire et les relations de résonance qui les lient au stade non-linéaire. Ceci sert de base à une mise sous forme normale du problème, tant linéaire (forme de Jordan–Arnol'd) que non-linéaire (théorème de Poincaré–Dulac). Des classes d'équivalence entre systèmes différents

sont ainsi définies grâce à des changements de variables non-linéaires qui mettent ces systèmes sous la même forme normale.

Nous avons observé que lorsque qu'aucune condition de résonance n'est satisfaite, la linéarisation était possible (théorème de Poincaré). Mais rien n'a été dit du rayon de convergence des développements qui expriment le changement de variable non-linéaire assurant la linéarisation. Sauf à supposer que le système que l'on considère se situe très loin d'une condition de résonance,<sup>4</sup> le développement a peu de chances de converger (en fait, c'est en général une série asymptotique divergente). Pour éviter que le changement de variable ne devienne singulier quand on s'approche de la résonance, il suffit d'abandonner l'idée d'une linéarisation à tout prix, de partir plutôt de la forme normale qui correspond précisément à cette condition et de considérer la situation réelle comme une perturbation autour de situation de référence. Il convient donc de ne pas effectuer le changement de variable qui deviendrait singulier à la résonance exacte mais seulement le changement de variable non-singulier conduisant à la forme normale, ce qui fait apparaître l'écart à la résonance comme une perturbation. Considérons par exemple le cas bidimensionnel non-diagonalisable avec  $\bar{s} = 0$ . Le changement de variable donnant la forme normale conduit à (3.44–3.45) que l'on complète par la perturbation (3.35), ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1 &= Y_2, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= -\eta Y_1 + -\eta' Y_2 + a_{20}Y_1^2 + a'_{21}Y_1Y_2.\end{aligned}$$

ou, de façon équivalente

$$\frac{d^2}{dt^2}Y + (\eta' + g'Y)\frac{d}{dt}Y + (\eta + gY)Y = 0$$

qui étend (3.3.4).

La notion de résonance est utile pour construire des modèles phénoménologiques à partir de considérations très générales. Par exemple si nous savons qu'un système est le siège de deux processus concurrents tendant à produire des oscillations de pulsation  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans un certain domaine de paramètres et que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont incommensurables ( $\omega_1/\omega_2$  irrationnel) nous avons 4 valeurs propres  $\pm i\omega_1$  et  $\pm i\omega_2$ . Les relations de résonance sont de la forme

$$\omega_1 = n_1^{(+)}(+\omega_1) + n_1^{(-)}(-\omega_1) + n_2^{(+)}(+\omega_2) + n_2^{(-)}(-\omega_2),$$

ou encore

$$\omega_1 \left( -n_1^{(+)} + n_1^{(-)} + 1 \right) (-\omega_1) = \left( n_2^{(+)} - n_2^{(-)} \right) (-\omega_2),$$

qui n'a de solution que pour  $n_1^{(+)} = n_1^{(-)} + 1$  et  $n_2^{(+)} = n_2^{(-)}$ . Dans l'équation pour  $Y_1$ , les seuls monômes résonnants sont donc de la forme  $|Y_1|^{2n_1}|Y_2|^{2n_2}Y_1$ , avec  $n_1 \geq 0$  et  $n_2 \geq 0$ . À l'ordre le plus bas on pourra se contenter de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1 &= (i\omega_1 + g_{11}|Y_1|^2 + g_{12}|Y_2|^2) Y_1, \\ \frac{d}{dt}Y_2 &= (i\omega_2 + g_{21}|Y_1|^2 + g_{22}|Y_2|^2) Y_2,\end{aligned}$$

et de leurs complexes conjuguées. Si pour un autre jeu de paramètres on a  $\omega_2 = 2\omega_1$ , il apparaît d'autres monômes résonnants: un terme  $gY_1^*Y_2$  dans l'équation pour  $Y_1$  et un terme  $g'Y_1^2$  dans l'équation pour  $Y_2$ . Pour des valeurs voisines des paramètres, il resterait à perturber les termes linéaires, l'effet le plus notable de ces perturbations étant de lever le caractère marginal des valeurs propres par l'introduction de parties réelles suffisamment petites  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  *a priori* indépendantes l'une de l'autre. Un système particulier conduit à un jeu de constantes ( $g_{jj'}$ ,  $g$ ,  $g'$ ) donnés et il n'est pas évident que la dynamique des variables effectives  $Y_{1,2}$  reste bornée. Il peut être nécessaire de compléter le système par des termes (résonnants) d'ordre supérieur. En particulier, dans le cas résonnant le système tronqué au delà du second degré doit être complété par des termes cubiques appropriés pour que les trajectoires partant de conditions initiales arbitraires soient définies aux temps longs.

---

<sup>4</sup>Dans le cas unidimensionnel, la résonance correspond à la perte d'hyperbolicité en  $\bar{s} = 0$ ; dire que le système est loin de la résonance signifie  $\bar{s} = \mathcal{O}(1)$  et par suite un domaine linéaire également  $\mathcal{O}(1)$ , ce qui est satisfaisant mais ce n'est pas ce qui nous intéresse, bien au contraire !

Cela étant dit, nous pouvons passer à l'étude systématique des systèmes dynamiques (effectifs) de dimension croissante. C'est ce que nous faisons dans les deux chapitres suivants, d'abord pour observer en dimension 1 et 2 des dynamiques exclusivement régulières puis, en dimension 3 et plus des comportements éventuellement chaotiques.

# Chapitre 4

## Dynamique en dimension $d = 1$ et 2

### 4.1 Bifurcations en dimension $d = 1$ et catastrophes

#### 4.1.1 Introduction

Nous nous intéressons ici à la dynamique générale d'un système qui, telle la couche fluide en convection suffisamment près du seuil, voit un unique mode réel devenir marginal. Après élimination des modes esclaves nous aboutissons à un système dynamique effectif à une seule variable réelle:

$$\frac{d}{dt}X = F(X), \quad (4.1)$$

où  $F$  est une fonction non-linéaire. Le problème étant du premier ordre en temps s'intègre explicitement. Partant de  $dX/F(X) = dt$  on déduit  $\int_{X_0}^X dX'/F(X') = t - t_0$  qu'il reste à inverser pour trouver  $X$  fonction du temps  $t$ . Naturellement ceci suppose que la condition initiale  $X_0$  corresponde à un point régulier, tel que  $F(X_0) \neq 0$ . En effet, nous avons déjà vu que les racines de  $F(X) = 0$  (points singuliers du champ de vecteur dans un contexte plus général) formaient à elles seules des solutions particulières appelées *points fixes*  $\{X_f\}$ . La dynamique du système apparaît entièrement contrôlée par la nature et la position des points fixes. En effet, définissant  $G(X) = -\int F(X) dX$ , on peut mettre (4.1) sous la forme  $\frac{d}{dt}X = -\frac{\partial}{\partial X}G$  et, calculant  $\frac{d}{dt}G = \frac{\partial}{\partial X}G \frac{d}{dt}X = -(\frac{\partial}{\partial X}G)^2 \leq 0$ , vérifier que la dynamique correspond alors à une recherche des minima locaux de  $G(X)$ . C'est précisément cette propriété qui place le problème dans le cadre de la *théorie des catastrophes*. Celle-ci concerne les singularités des fonctions réelles à une ou plusieurs variables, dépendant d'un ou plusieurs paramètres de contrôle. Dans ce contexte, les valeurs qui rendent  $G(X)$  stationnaire sont les points fixes de  $F(X)$  et leur stabilité associée aux propriétés de concavité de  $G$  en ces points, cf. Fig. 4.1:

- point fixe stable (attracteur)  $\Rightarrow$  minimum local de  $G(X)$ ;
- point fixe instable (répulsor)  $\Rightarrow$  maximum local;
- point d'inflexion à tangente horizontale  $\Rightarrow$  point semi-stable (attracteur vague).
- si  $\inf G = -\infty$ , certaines trajectoires divergent.

#### 4.1.2 Bifurcations en dimension 1: formulation générale

La position et la stabilité des points fixes  $\{X_f\}$  dépendent de paramètre de contrôle  $\{r_p; p = 1, 2, \dots\}$ . Pour expliciter cette dépendance en  $r$ , nous noterons  $F(X) \equiv F_r(X)$  ou même  $F(X, r)$ , de manière à faire apparaître la recherche des points fixes comme la résolution d'une équation implicite  $F(X_f, r) = 0$ . Partant d'un point fixe  $X_0 = X_f(r_0)$  trouvé pour une valeur particulière  $r_0$  de  $r$  on s'interroge sur l'existence de la solution pour une valeur voisine  $r = r_0 + \delta r$ . Supposant  $F(X, r)$  développable en série de Taylor nous obtenons

$$\left[ F(X_0, r_0) \equiv 0 \right] + \frac{\partial F}{\partial r} \delta r + \frac{\partial F}{\partial X} \delta X_f + \dots = 0$$

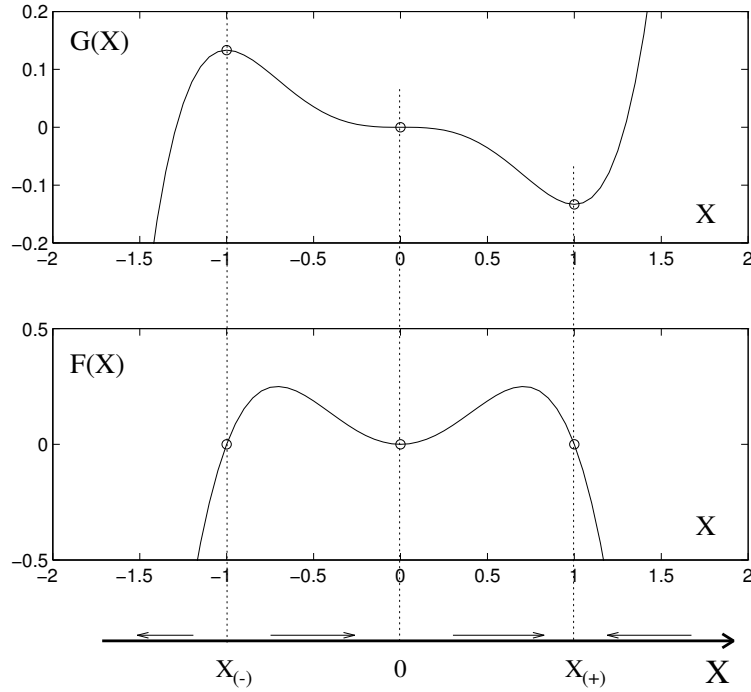


Figure 4.1: Exemple de système dynamique à une variable:  $G(X) = -\frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$  et  $F(X) = -\partial_X G(X) = X^2 - X^4$ . Le point fixe  $X_{(+)}$  (resp.  $X_{(-)}$ ) est stable (resp. instable); le point fixe à l'origine est semi-stable; les trajectoires initialisées en  $X < X_{(-)}$  tendent vers  $-\infty$ .

où toutes les dérivées partielles sont calculées en  $(r_0, X_0)$ . Plusieurs cas sont possibles selon que l'on peut ou non appliquer le *théorème des fonctions implicites*. Tout d'abord, si une (au moins) des deux dérivées premières de  $F$  ne s'annule pas, on peut résoudre en  $\delta r$  ou  $\delta X_f$ .  $(r_0, X_0)$  est alors appelée racine *régulière*: dans le plan  $(r, X_f)$ , il ne passe qu'une courbe et une seule par le point  $(r_0, X_0)$ . Si, comme c'est généralement le cas, les deux dérivées partielles sont non nulles, on a affaire à un problème de *perturbation régulière* et à l'ordre le plus bas on trouve (cf. Fig. 4.2, gauche):

$$\delta X_f = -\delta r \left. \frac{\partial F/\partial r}{\partial F/\partial X} \right|_{r_0, X_0}. \quad (4.2)$$

Dans le cas où l'une des dérivées partielles est nulle, on trouve toujours une seule solution à l'ordre le plus bas car le théorème s'applique, soit (i)  $\partial F/\partial r = 0$  impliquant  $\delta X_f = 0$  qui exprime que  $X_f$  ne dépend pas de  $r$  à cet ordre, soit (ii)  $\partial F/\partial X = 0$  qui conduit à  $\delta r = 0$ . Mais comme cela ne détermine pas la quantité qui nous intéresse,  $\delta X_f$ , nous devons pousser le développement plus loin, ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial r} \delta r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \delta X_f^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial r} \delta X_f \delta r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \delta r^2 = 0.$$

Dans cette équation, admettant  $\delta r \sim \delta X_f^2$  on observe immédiatement que les deux derniers termes sont d'ordre supérieur en  $\delta X_f$  de sorte que l'on trouve simplement

$$\delta r = -\frac{1}{2} \delta X_f^2 \left. \frac{\partial^2 F/\partial X^2}{\partial F/\partial r} \right|_{r_0, X_0} + \mathcal{O}(\delta X_f^3).$$

Comme cette solution n'apparaît que pour  $\delta r$  positif ou négatif selon le signe de la constante de proportionnalité, le point  $(r_0, X_0)$  du plan  $(r, X_f)$  est appelé *point tournant*, cf. Fig. 4.2 (droite).

Si maintenant les deux dérivées partielles premières s'annulent simultanément en  $(r_0, X_0)$ , le théorème des fonctions implicites ne s'applique plus, le point est *singulier* et plusieurs courbes de points fixes peuvent s'y croiser. Au premier ordre non-trivial, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \delta X_f^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial X} \delta r \delta X_f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \delta r^2 = 0.$$

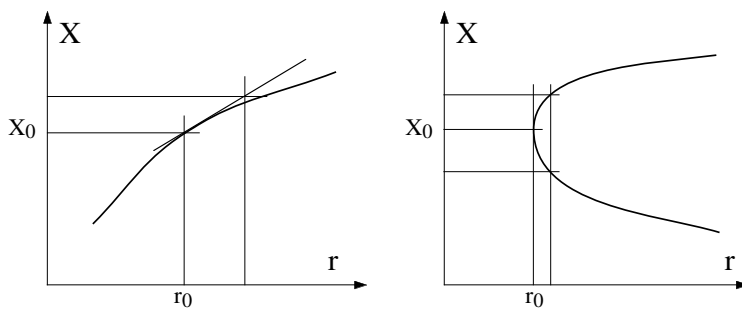


Figure 4.2: Illustration de l'application du théorème des fonctions implicites à  $F(X_f, r) = 0$  au voisinage d'un point régulier  $(r_0, X_0)$ . À gauche: les deux dérivées partielles sont non nulles, cas trivial. À droite: Point tournant:  $\partial F/\partial X = 0$ ,  $\partial F/\partial r \neq 0$ .

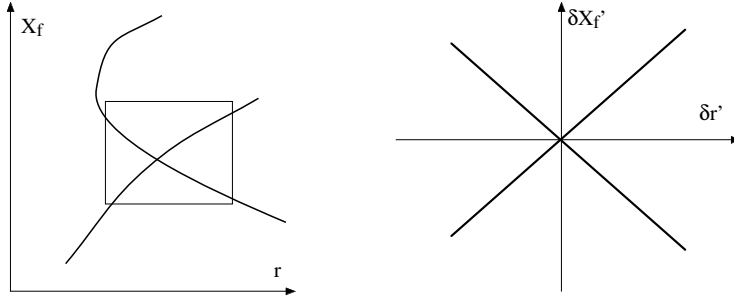


Figure 4.3: À gauche: branches de solution au voisinage d'un point singulier de  $F(X, r) = 0$ . À droite: développement à l'ordre le plus bas dans le repère propre  $(\delta r', \delta X_f')$ .

Cette forme quadratique est en général non identiquement nulle. Elle peut être mise sous forme canonique au moyen d'un changement de variable  $(\delta r, \delta X_f) \mapsto (\delta r', \delta X_f')$ . Il vient alors

$$\alpha \delta r'^2 + \beta \delta X_f'^2 = 0.$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe, la seule solution réelle est  $\delta r = \delta X_f = 0$ . Autrement dit, le point trouvé  $(r_0, X_0)$  est une solution isolée du problème aux points fixes. En fait ce n'est généralement pas le cas: la "physique" du problème nous garantit en effet le plus souvent la persistance de solutions non-triviales pour des valeurs voisines de  $r_0$  qui implique des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  de signes contraires. On a alors

$$\delta X_f' = \pm |\alpha/\beta|^{1/2} \delta r',$$

ce qui traduit l'existence de deux branches de solutions dans le repère  $(\delta r', \delta X_f')$ , donc aussi dans le repère de départ  $(\delta r, \delta X_f)$ , cf. Fig. 4.3. Mais, tout comme dans le cas précédent du point limite donné par (4.2), nous n'avons pas encore examiné la stabilité des solutions. C'est ce qui va nous occuper dans toute la suite de cette section.

### 4.1.3 Bifurcation et déploiement de singularité

Cette brève introduction a mis en évidence le caractère *singulier* du problème. Or, l'analyse développée au chapitre précédent a déjà introduit ce point de vue et nous incite à le reprendre en le systématisant. Nous allons donc considérer que nous avons affaire à une singularité placée à l'origine ( $X = 0$ ) et d'un certain degré  $n$ :

$$\frac{d}{dt} X = a_n X^n, \quad (4.3)$$

perturbée par des termes de degré inférieur. Ce sont ces termes qui vont permettre de déployer la singularité. Remarquons tout d'abord qu'un changement d'échelle sur  $X$  permet toujours de ramener le coefficient  $a_n$  à  $\pm 1$ , ce que nous ferons systématiquement.

Que ce soit par un examen direct de  $F(X)$  ou par un calcul du potentiel  $G(X)$ , il apparaît que le mouvement ne reste dans une région bornée de  $\mathbb{R}$  que si, dans (4.3), le degré  $n$  est impair et le coefficient négatif ( $-1$  après mise à l'échelle) afin que le champ de vecteurs reste dirigé vers l'origine pour  $X \rightarrow \pm\infty$ . Si nous ne sommes intéressés que par des propriétés locales, nous pouvons admettre des valeurs de  $n$  paires ou des coefficients  $a_n$  du "mauvais" signe mais, nous devons être conscients du fait que, du point de vue des applications, cela ne constituera au mieux que le déploiement partiel d'une singularité de degré plus élevé.

Ajoutant la perturbation la plus générale, nous repartons donc *a priori* de

$$\frac{d}{dt}X = r_0 + r_1X + r_2X^2 + \dots + r_{n-1}X^{n-1} \pm X^n. \quad (4.4)$$

Cependant, il est facile de voir qu'une translation  $\tilde{X}$  de l'origine des  $X$  ( $X \mapsto X - \tilde{X}$ ) permet toujours d'éliminer le terme de degré  $n-1$ , au prix d'une redéfinition des  $r_m$  qui deviennent fonctions de  $\tilde{X}$  donc de la valeur du  $r_{n-1}$  initial. La *forme normale* du déploiement s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}X = r_0 + r_1X + r_2X^2 + \dots + r_{n-2}X^{n-2} \pm X^n, \quad (4.5)$$

qui dérive du potentiel

$$G = r_0X + \frac{1}{2}r_1X^2 + \dots + \frac{1}{n-1}r_{n-2}X^{n-1} \pm X^{n+1}. \quad (4.6)$$

En fait, la translation que nous venons d'opérer peut masquer la persistance du point fixe en  $X = 0$  éventuellement imposée par la définition du problème (car elle déplace le point fixe). Pour des raisons pratiques, il est alors bien préférable de ne pas l'effectuer et de partir du développement le plus général qui garantisse la condition " $X = 0$  solution," ce qui impose  $r_0 \equiv 0$  soit

$$\frac{d}{dt}X = r_1X + r_2X^2 + \dots + r_{n-1}X^{n-1} \pm X^n. \quad (4.7)$$

Nous en verrons plusieurs exemples dans la suite.

Dans les expressions (4.5) et (4.7) nous avons noté  $r_m$  les petits paramètres de perturbation pour bien souligner qu'ils peuvent être vus comme autant de paramètres de contrôle que nous pouvons varier séparément (et, éventuellement, contraindre par des relations particulières).

Appliquons la démarche décrite en §4.1.2 au développement (4.5) afin d'examiner tout d'abord le rôle du terme constant  $r_0$ . Nous trouvons:

$$\frac{\partial F}{\partial r_0} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial X} = r_1 + 2r_2X + 3r_3X^2 + \dots,$$

Si  $r_1 \neq 0$ , nous sommes dans un cas régulier trivial et nous trouvons  $X_f = -r_0/r_1$  à l'ordre le plus bas. Le résultat sera satisfaisant si  $r_0$  et  $r_1$  sont tels que les non-linéarités puissent être négligées. Ceci rend compte du déplacement de l'équilibre sous l'effet d'un champ "conjugué" à la variable  $X$ . Le paramètre  $r_0$  est en effet comparable au champ magnétique pour un système de spins à l'équilibre thermodynamique où l'aimantation jouerait le rôle de  $X$ . Comme nous le verrons plus loin (4.1.8), cette analogie va beaucoup plus loin car le problème est "isomorphe" à la *théorie de Landau des transitions de phases avec paramètre d'ordre*.

Si  $r_1 = 0$  et si  $r_{n_k}$  est le premier coefficient non nul dans le développement (4.5), le théorème des fonctions implicites s'applique encore mais la relation entre  $r_0$  et  $X_f$  devient non-linéaire. On trouve  $X_f = (-r_0/r_k)^{1/n_k}$  qui peut ne pas avoir de solution réelle si  $n_k$  est pair. En effet, extraire la racine sur  $\mathbb{R}$  suppose  $-r_0/r_k$  positif, de sorte qu'à  $r_k$  fixé il n'y a de point fixe que pour  $r_0$  d'un signe donné, on rencontre alors un point tournant.

Il faut aussi remarquer que des considérations de symétries peuvent intervenir dans la définition d'un système particulier, ici simplement l'invariance dans le changement  $X \mapsto -X$ . Si le système satisfait à cette propriété et si  $X(t)$  est solution, alors  $-X(t)$  est également solution. de sorte que  $-X$  vérifie

$$\frac{d}{dt}(-X) = F(-X) = -\frac{d}{dt}X = -F(X),$$

prouvant que  $F$  est une fonction impaire de  $X$  et donc que les puissances paires de  $X$  doivent être absentes du développement (4.5). Mais les symétries sont faites pour être brisées par des perturbations de la forme  $r_{2k}X^{2k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Dans la suite, nous étudierons d'abord le cas symétrique quand c'est possible ( $n$  impair), puis l'effet des perturbations brisant la symétrie.

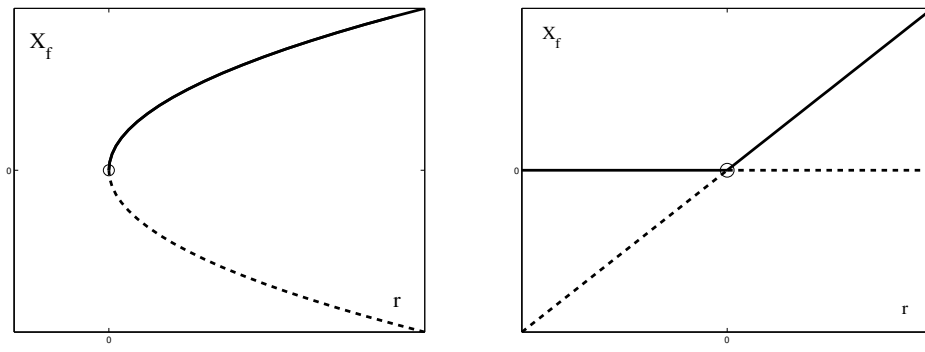


Figure 4.4: (a) Point limite associé à (4.8). (b) Échange de stabilité décrit par (4.9).

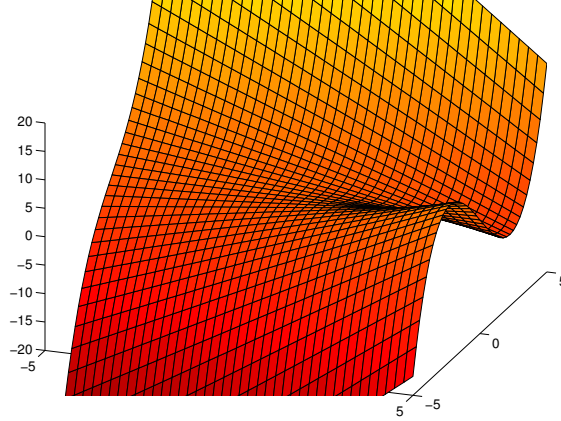


Figure 4.5: Potentiel associé à la catastrophe pli.

#### 4.1.4 Singularité quadratique ( $n = 2$ )

Nous commençons donc par le cas non symétrique que, selon l'expression générale (4.5), nous prenons sous la forme

$$\frac{d}{dt}X = r_0 - X^2. \quad (4.8)$$

Les points fixes sont donnés par  $X_f = \pm r_0^{1/2}$ . L'étude de leur stabilité est élémentaire. Posant  $X = X_f + X'$ , au terme  $\mathcal{O}(X'^2)$  près, on trouve

$$\frac{d}{dt}X' = -2X_f X' = \mp 2r_0^{1/2} X'.$$

La solution  $+r_0^{1/2}$  (resp.  $-r_0^{1/2}$ ) est donc stable (resp. instable). Cette situation, illustrée sur la Fig. 4.4a, aurait tout aussi bien pu être déduite du potentiel correspondant,  $G(X) = \frac{1}{3}X^3 - r_0X$  qui, en théorie des catastrophes décrit la catastrophe élémentaire appelée *pli* (Fig. 4.5). L'ensemble de catastrophe, lieu des points de l'espace de contrôle où le système bifurque, est ici réduit au point  $r_0 = 0$ .

Considérons maintenant le cas où la définition du système implique la persistance du point fixe en  $X = 0$ . La perturbation doit alors être prise sous la forme:

$$\frac{d}{dt}X = r_1 X - X^2, \quad (4.9)$$

Ce qui conduit aux points fixes  $X_f = 0$  et  $X_f = r_1$  échangeant leur stabilité en  $r_1 = 0$ , le premier étant stable pour  $r_1 < 0$  et instable sinon (cf. Fig. 4.4b), le second de stabilité opposée. Cette bifurcation est appelée *trans-critique*.

Pour voir comment ce cas se raccorde avec l'étude générale, procédons à la translation de l'origine qui supprime le terme en  $X$  et introduit un terme constant. Le changement  $X \mapsto X + X_0$  conduit à

$$\frac{d}{dt}X = r_1(X + X_0) - (X + X_0)^2 = \frac{r_1^2}{4} - X^2 \quad \text{pour} \quad X_0 = \frac{r_1}{2}.$$



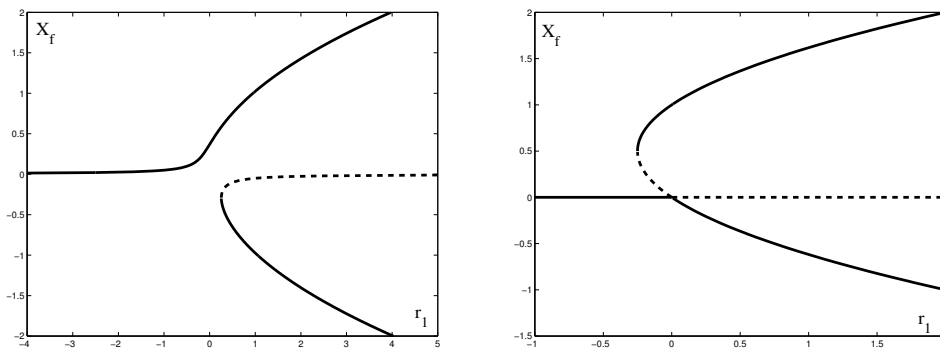


Figure 4.6: À Gauche: bifurcation imparfaite associée à (4.8) pour  $r_0 = 0.05$ . À droite: brisure de parité préservant la persistance du point fixe à l'origine (4.9) avec  $r_2 = 1$ .

Dans les nouvelles variables les solutions sont  $X = \pm \frac{1}{2}r_1$  et il est facile de voir que la solution  $-$  (resp.  $+$ ) correspond à l'ancienne  $X = 0$  (resp.  $X = r_1$ ). Le changement de variable induit un changement de paramètre  $r_1 \mapsto r_0 = \frac{1}{4}r_1^2$  qui ne permet pas d'accéder à des valeurs négatives de  $r_0$ . Le  $r_0$  ainsi obtenu n'est donc pas le plus général possible parce que la condition (non-générique) de persistance du point fixe restreint la généralité du déploiement de la singularité quadratique.

#### 4.1.5 Singularité cubique ( $n = 3$ )

La singularité quadratique ne permettant pas de maintenir  $X$  à distance finie à la limite  $t \rightarrow \infty$ , nous nous plaçons maintenant dans le cas d'une singularité cubique saturante (coefficient  $-1$ ) et nous considérons tout d'abord le cas symétrique:

$$\frac{d}{dt}X = r_1X - X^3. \quad (4.10)$$

Ce cas a déjà été entrevu à plusieurs reprises. Une étude précédente (Ch. 1, équation (1.8)) a montré que les solutions non-triviales  $X_f = \pm r_1^{1/2}$  existant pour  $r_1 > 0$  étaient stables et que la solution triviale était stable pour  $r_1 < 0$  et instable au delà (cf. Fig. 1.3, p. 4). Cette bifurcation en *fourche* est dite *super-critique* ou *normale*.

Ajoutons des perturbations qui brisent la symétrie. La forme générale ne présente en principe pas de terme de degré  $n - 1$ . Nous devons donc repartir de

$$\frac{d}{dt}X = r_0 + r_1X - X^3. \quad (4.11)$$

Le diagramme de bifurcation en  $r_1$  à  $r_0$  fixé est présenté sur la Fig. 4.6 (gauche). Il décrit une bifurcation qualifiée d'*imparfaite*. On observe en effet que la perturbation a supprimé le point critique, ce qui s'est traduit par l'apparition de deux branches déconnectées. La première branche, uniquement formée de solutions stables relie continûment la solution déplacée par  $r_0$  pour  $r_1 < 0$  à l'une des branches du problème symétrique. La seconde est formée de solutions qui changent de stabilité en un point tournant. Une mesure de l'imperfection est fournie par la valeur de  $X_f$  pour  $r_1 = 0$ , soit  $X_f = r_0^{1/3}$ . En théorie des catastrophes, le potentiel aboutissant à (4.11) s'écrit  $G(X) = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}r_1X^2 - r_0X$  et décrit la catastrophe élémentaire appelée *fronce*. L'ensemble de catastrophe correspondant se déduit facilement de la condition qui exprime le passage de 1 à 3 points fixes par coalescence de deux d'entre eux, ce qui se produit lorsque les extrema relatifs de la fonction  $Y = X^3 - r_1X - r_0$  sont solutions de  $Y = 0$ . Ces extrema sont donnés par  $dY/dX = 0 = 3X_{(\pm)}^2 - r_1$ , soit  $X_{(\pm)} = \pm(r_1/3)^{1/2}$ . Il vient donc:  $r_0 = [\pm(r_1/3)^{1/2}]^3 - r_1[\pm(r_1/3)^{1/2}]$  et donc, après simplification,  $r_0 = \pm 2r_1^{3/2}/3\sqrt{3}$ , dont le graphe présente un point de rebroussement en  $r_0 = r_1 = 0$ .

Si la définition du système impose la persistance du point fixe  $X_f = 0$ , comme dans la section précédente il est préférable de ne pas recourir à la translation qui met  $F$  sous sa forme normale mais de prendre plutôt

$$\frac{d}{dt}X = r_1X + r_2X^2 - X^3. \quad (4.12)$$

Le diagramme de bifurcation en  $r_1$  à  $r_2$  fixé associé à (4.12) est illustré sur la Fig. 4.6 (droite). On y observe (i) l'échange de stabilité en  $r_1 = 0$  (bifurcation trans-critique) et (ii) la présence d'un point tournant en  $r_1 = -\frac{1}{4}r_2^2$ ,  $X_f = \frac{1}{2}r_2$ . Ici aussi, si l'on voulait revenir à la forme normale (4.11) on le pourrait mais la persistance du point fixe se traduirait par une relation particulière entre paramètres de contrôle, les anciens  $(r_1, r_2)$  et les nouveaux  $(r_0, r_1)$ .

#### 4.1.6 Singularité quintique ( $n = 5$ )

Dans la section précédente, le cas de la bifurcation sous-critique correspondant à une singularité cubique affectée d'un "mauvais" signe n'a pas été considéré car on peut très bien le retrouver dans le déploiement de la singularité quintique. La forme normale correspondante s'écrit

$$\frac{d}{dt}X = r_0 + r_1X + r_2X^2 + r_3X^3 - X^5. \quad (4.13)$$

Elle contient *a priori* quatre paramètres, que l'on peut ramener à deux si l'on impose la symétrie dans le changement  $X \mapsto -X$ , i.e.  $r_0 = r_2 = 0$ , soit simplement

$$\frac{d}{dt}X = r_1X + r_3X^3 - X^5. \quad (4.14)$$

Les points fixes sont donnés par

$$0 = (r_1 + r_3X^2 - X^4)X$$

donc, en plus de l'origine  $X = 0$ , les racines d'un trinôme en  $U = X^2$ :

$$U_{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( r_3 \pm (r_3^2 + 4r_1)^{1/2} \right)$$

Seules les solutions réelles en  $X$  nous intéressent, ce qui implique  $r_1 \geq -\frac{1}{4}r_3^2$ . Clairement, si  $r_3$  est négatif, i.e.  $r_3 = -|r_3|$ ,  $U_{(-)}$  est négatif et ne peut convenir. Tant que  $r_1$  est négatif, le produit des racines  $U_{(+)}U_- = -r_1$  est positif, de sorte que  $U_{(+)}$  est également négatif. Le problème aux points fixes n'a pas d'autre solution réelle que la solution triviale  $X_f = 0$ . En  $r_1 = 0$  une paire de solutions réelles  $X_{(\pm)} = \pm(U_{(+)})^{1/2}$  apparaît *via* une bifurcation super-critique. Pour  $r_1 \ll |r_3|$ , il vient  $X_{(\pm)} = (r_1/|r_3|)^{1/2}$ , mais lorsque  $r_1$  augmente, ce régime est rapidement remplacé par un autre où  $r_3X^2$  est négligeable devant  $X^4$  de sorte que l'on trouve  $X_{(\pm)} = \pm r_1^{1/4}$ .

Pour obtenir des résultats nouveaux, il faut donc considérer  $r_3 > 0$ . Dans ce cas, pour  $X$  suffisamment petit, on peut négliger le terme quintique et se ramener localement après normalisation convenable à une non-linéarité cubique affectée du coefficient  $+1$ , cas que nous avons laissé de côté. Une étude parallèle au cas super-critique montre que les solutions apparaissent sur la branche bifurquée pour  $r_1$  négatif et sont instables.

Revenant à l'équation contrôlée pour  $X$  grand par le terme quintique on trouve, à  $r_3 > 0$  fixé, le diagramme de bifurcation en  $r_1$  de la Fig. 4.7 (gauche). On y observe la présence de deux points tournants en  $r_1 = -\frac{1}{4}r_3^2$ ,  $X_f^2 = \frac{1}{2}r_3$ , convertissant les branches instables issues de la bifurcation sous-critique en  $r_1 = 0$  en branches stables.

Ici, il est intéressant de considérer le potentiel dont dérive (4.14):  $G(X) = -\frac{1}{2}r_1X^2 - \frac{1}{4}r_3X^4 + \frac{1}{6}X^6$ . Celui-ci est représenté sur la Fig. 4.7 (droite). La paire de points fixes apparaissant en  $r_1 = -\frac{1}{4}r_3^2$  s'y manifeste par un point d'inflexion à tangente horizontale. A mesure que  $r_1$  augmente, le minimum relatif correspondant au point fixe stable  $X_{(+)}$  se creuse et entre en compétition avec le minimum relatif en  $X = 0$ . En  $r_1 = -\frac{3}{16}r_3^2$ , le potentiel du point fixe non-trivial égale celui du minimum local à l'origine. Cette valeur définit le plateau de Maxwell: dans le contexte des transitions de phases, chaque minimum relatif du potentiel correspond à une phase possible et les deux phases en présence peuvent coexister en équilibre dans l'espace physique pour cette valeur particulière du paramètre de contrôle  $r_1$ . En effet, dans une situation inhomogène, on s'attend à ce que le domaine occupé par la phase au potentiel le plus élevé régresse au profit de l'autre afin de minimiser le potentiel total. À cette coexistence est également attachée la possibilité de faire décrire au systèmes de cycles d'hystérésis dans l'espace des paramètres qui traduisent la stabilité conditionnelle des solutions  $X_f = X_{(+)}$  et  $X_f = 0$ . En théorie des transitions de phases on parlerait de *métastabilité*.

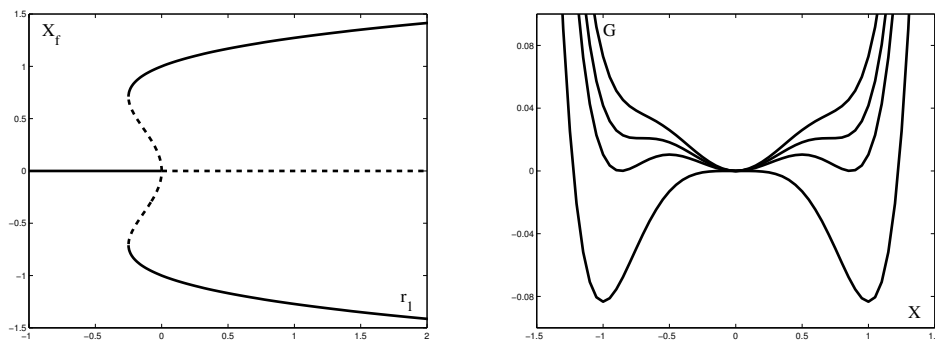


Figure 4.7: À gauche: diagramme de bifurcation en  $r_1$  associé à (4.14) pour  $r_3 = 1$ . À droite: allure du potentiel pour différentes valeurs de  $r_1$ . 1:  $r_1 = -\frac{5}{16}r_3^2 < -\frac{1}{4}r_3^2$ ; 2:  $r_1 = -\frac{1}{4}r_3^2$ ; 3:  $r_1 = -\frac{3}{16}r_3^2$  (plateau de Maxwell); 4:  $r_1 = 0$ .

### 4.1.7 Catastrophes élémentaires

Dans ce qui précède, nous n'avons cité explicitement que les catastrophes "pli" et "fronce" qui dépendent respectivement de 1 et 2 paramètres de contrôle avec trois paramètres on déploierait la singularité associée au potentiel à une variable en  $X^5$ , soit

$$G(X) = r_0X + r_1X^2 + r_2X^3 + X^5,$$

mais de notre point de vue, la dynamique qu'il gouverne (en  $-X^4$  pour  $X \rightarrow \pm\infty$ ) ne reste pas nécessairement confinée à une région bornée de  $\mathbb{R}$ , aussi est-il préférable de le considérer comme faisant partie du problème plus vaste posé par le potentiel en  $X^6$  dont nous n'avons d'ailleurs examiné que le déploiement symétrique. Toujours avec 3 paramètres de contrôle on trouve deux autres catastrophes mais maintenant pour des potentiels à deux variables:  $X_1^2X_2 \pm X_2^3$ , dont la singularité est déployée par

$$\begin{aligned} G(X_1, X_2) &= r_{01}X_1 + r_{02}X_2 + r_1X_2^2 + X_1^2X_2 - X_2^3, \\ G(X_1, X_2) &= r_{01}X_1 + r_{02}X_2 + r_1X_2^2 + X_1^2X_2 + X_2^3. \end{aligned}$$

Avec 4 paramètres de contrôle on trouve le déploiement complet de (4.13) (le "papillon") dont nous n'avons considéré que le cas particulier symétrique (4.14) et une autre catastrophe correspondant au potentiel

$$G(X_1, X_2) = r_{01}X_1 + r_{02}X_2 + r_{01}X_1^2 + r_{02}X_2^2 + X_1^2X_2 + X_2^4.$$

On arrive donc à un total de 7 catastrophes élémentaires.

Avec 5 paramètres de contrôle on trouve 4 catastrophes supplémentaires. La première est gouvernée par le potentiel

$$G(X) = r_0X + r_1X^2 + r_2X^2 + r_3X^3 + r_4X^4 + r_5X^5 + X^7,$$

qui étend de façon naturelle la série des potentiels à une variable (4.6) et 3 catastrophes correspondant à des potentiels à deux variables

$$\begin{aligned} G(X_1, X_2) &= r_{10}X_1 + r_{01}X_2 + r_{20}X_1^2 + r_{02}X_2^2 + r_{03}X_2^3 + X_1^2X_2 - X_2^5, \\ G(X_1, X_2) &= r_{10}X_1 + r_{01}X_2 + r_{20}X_1^2 + r_{02}X_2^2 + r_{03}X_2^3 + X_1^2X_2 + X_2^5, \\ G(X_1, X_2) &= r_{10}X_1 + r_{01}X_2 + r_{11}X_1X_2 + r_{02}X_2^2 + r_{12}X_1X_2^2 + X_1^4 + X_2^4, \end{aligned}$$

ce qui porte le total à 11. Au delà de 5 paramètres de contrôle la classification devient n'est plus possible car les classes d'équivalence dépendent de paramètres continus.

### 4.1.8 Transitions de phases et théorie de Landau

L'analogie formelle dont nous avons fait état entre théorie des catastrophes et théorie de Landau des transitions de phases avec paramètre d'ordre en thermodynamique repose sur le caractère "flot de gradient"

de la dynamique, aboutissant à la minimisation d'une fonction potentiel. En thermodynamique, l'*énergie libre* est ce potentiel et pour un système subissant une transition de phase celui-ci dépend de variables appelées *paramètres d'ordre* qui sont précisément les  $X$  de notre problème de dynamique non-linéaire. Il suffit alors d'admettre une relation linéaire entre "flux"  $\frac{d}{dt}X$  et "force conjuguée"  $-\partial G/\partial X$  pour aboutir à l'identification annoncée (théorie de Van Hove des phénomènes critiques dynamiques).

La réinterprétation de la bifurcation imparfaite (catastrophe *fronce*) est alors immédiate. Par exemple pour un système magnétique au voisinage d'une transition paramagnétique-ferromagnétique, le paramètre de contrôle est la température  $T$  et l'énergie libre dépend de l'aimantation  $M$ , "conjuguée" au champ magnétique  $H$ . En théorie de Landau on a :

$$G(M, H, T) = \frac{T - T_c}{2\chi_0} M^2 + \frac{g}{4} M^4 - MH,$$

où  $T_c$  est la température de transition (température "critique"), la valeur de  $M$  à l'équilibre thermodynamique devant minimiser  $G$  à  $T$  et  $H$  fixés. En régime linéaire, la susceptibilité est définie par  $M = \chi H$ , soit  $\chi = \chi_0/(T - T_c)$  pour  $T > T_c$ . Lorsque le système approche de la transition, la susceptibilité diverge donc comme  $(T - T_c)^{-\gamma}$  avec  $\gamma = 1$  au voisinage de la température critique (Langevin-Curie). La réponse non-linéaire de  $M$  à  $H$  à la transition s'écrit  $M = (H/g)^{1/3}$  soit  $M \propto H^{1/\delta}$  avec  $\delta = 3$ . Enfin, l'aimantation en champ nul est donnée par  $M = [(T_c - T)/g\chi_0]^{1/2}$  en dessous de la température critique, soit  $M \propto (T_c - T)^\beta$  avec  $\beta = 1/2$ . Les exposants  $\gamma, \beta, \delta$  font partie d'un ensemble d'*exposants critiques* caractérisant le comportement d'échelle du système au voisinage du point critique. On est ici tout naturellement conduit à identifier le paramètre d'ordre  $M$  à  $X$ ,  $H$  à  $r_0$  et  $T_c - T$  à  $r_1$ .

Le valeurs des exposants déterminés par la théorie de Landau sont dites "classiques." Dans les systèmes réels, elles ne sont satisfaisantes qu'au delà d'une certaine dimension  $d_{ph,c}$  de l'espace physique  $d_{ph}$  appelée dimension critique (pour la transition para-ferro,  $d_{ph,c} = 4$ ). Pour  $d_{ph} < d_{ph,c}$  les fluctuations thermodynamiques jouent un rôle qualitatif non-trivial induisant un désaccord quantitatif sur la valeur des exposants (e.g.,  $\beta \simeq 1/3$  pour la transition magnétique à  $d_{ph} = 3$ ).

La théorie de Landau n'est pas limitée au problème des transitions de phases avec paramètre d'ordre continue (du second ordre) que nous venons d'évoquer mais rend également compte des transition discontinues (du premier ordre) et l'identification avec la théorie des catastrophes se prolonge. A ce sujet, notons que deux procédures s'offrent à nous pour déterminer les ensembles de catastrophes, conduisant à des résultats différents en cas de métastabilité.

Selon une première méthodologie, on peut partir d'un état sélectionné dans une région de paramètres où il est l'unique solution du problème puis suivre, par continuité, dans d'une variation *adiabatique* des paramètres de contrôle, la branche de solutions à laquelle il appartient. Cette branche n'est alors "perdue" que lorsque la solution correspondante devient localement instable. Cette procédure, dite *règle du retard*, permet de faire décrire au système des boucles d'hystérésis (cf. Fig. 4.6-4.7). Ce suivi adiabatique fait fi de l'étendue des bassins d'attraction des différentes solutions, ce qui d'un point de vue thermodynamique peut ne pas sembler très "physique."

Au contraire, la seconde méthodologie consiste à déterminer pour chaque valeur des paramètres de contrôle la ou les solutions qui correspondent au minimum absolu du potentiel, généralisant en quelque sorte la *règle de Maxwell* qui fixe la coexistence de phases. Dans les applications, ce point de vue suppose que l'on a affaire à des systèmes spatialement étendus, potentiellement inhomogènes, sujets à des fluctuations thermodynamiques d'amplitude suffisante pour leur faire accéder systématiquement au bassin d'attraction de la solution la plus stable.

## 4.2 Dynamique en dimension 2

Le sort des systèmes "flots de gradients" à deux variables ayant été sommairement réglé plus haut (§4.1.7) nous considérons maintenant le cas général qui offre des comportements dynamiques plus intéressants que la "simple" relaxation vers un état indépendant du temps. Les différents types d'oscillateurs que nous avons

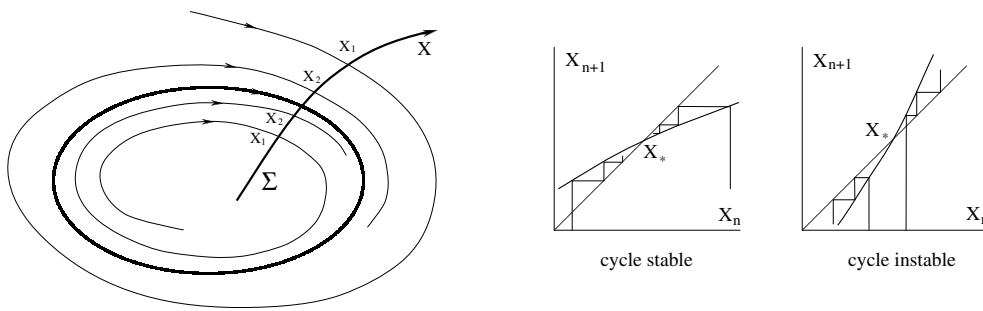


Figure 4.8: À Gauche: section de Poincaré au voisinage d'un cycle limite en dimension  $d = 2$ . À droite: application de premier retour correspondante.

déjà entrevus sont bien entendu des exemples de tels systèmes plus complexes. Avant de nous pencher vers le problème de la détermination de leur période (§4.3), nous allons examiner les caractéristiques générales de la dynamique en dimension 2 (§4.2.1), puis comment la périodicité bifurque d'un état stationnaire (§4.2.2).

### 4.2.1 Caractères généraux

Nous réutilisons ici la notion d'ensemble limite introduite au chapitre 2, §2.3.4. L'essentiel de la dynamique asymptotique d'un système dynamique non-linéaire défini sur  $\mathbb{R}^2$  est contenu dans le *théorème de Poincaré-Bendixson* selon lequel les ensembles limites ( $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ ) non vides, compacts et ne contenant pas de point fixe, sont des *cycles limites* correspondant à des orbites fermées tracées dans le plan.

Nous ne donnerons pas de démonstration rigoureuse de ce résultat important, seulement une justification heuristique. Celle-ci repose sur la considération d'une *section* locale transverse du champ de vecteurs par une portion de courbe  $\Sigma$ , "transverse" signifiant que les trajectoires coupent cette courbe en formant avec elle un angle fini. Les points le long de  $\Sigma$  peuvent être paramétrés par une abscisse curviligne  $X$ . à cette section est associée une *application de premier retour* qui relie les intersections successives des trajectoires avec  $\Sigma$ , donc une itération  $X_{k+1} = F(X_k)$ , cf. Fig. 4.8.

Le déterminisme interdisant le recouplement des trajectoires en des points réguliers du champ de vecteurs, en dimension 2 on peut voir par transport du voisinage d'une portion de la section par le champ que cela conduit à un ordonnancement monotone le long de  $\Sigma$  des intersections successives d'une trajectoire avec  $\Sigma$ . De la sorte,  $t_1 < t_2 < t_3$  implique soit  $X_1 < X_2 < X_3$  soit  $X_1 > X_2 > X_3$ .

Or, s'intéresser au comportement asymptotique revient à étudier les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , où la suite des indices est croissante. Il est donc préférable de transposer les inégalités précédentes et de traduire la condition de monotonie sur les  $X$  par une condition sur les  $t$ . Nous considérerons donc que  $X_1 < X_2 < X_3$  implique soit (i)  $t_1 < t_2 < t_3$ , soit (ii)  $t_3 < t_2 < t_1$ . Ces inégalités caractérisent le comportement des suites  $\{X_n\}$  pour  $t \rightarrow +\infty$  (i) ou  $-\infty$  (ii), référant ainsi directement aux notions de stabilité et d'instabilité précédemment introduites (Ch. 2, §2.3.4).

Considérant le voisinage de l'intersection de  $\Sigma$  par l'ensemble limite, on observe que celle-ci marque la frontière entre deux régions d'abscisse curviligne  $X_>$  et  $X_<$  et que tout point d'une suite initialisée dans la région  $X_>$  (resp.  $X_<$ ) y reste et majore (resp. minore) toute suite initialisée la région  $X_<$  (resp.  $X_>$ ). Dans les limites appropriées soit (i)  $t \rightarrow +\infty$ , soit (ii)  $t \rightarrow -\infty$ , on en déduit que les deux suites ont une limite commune  $X_*$ , point fixe de l'itération, stable à la limite (i), instable pour (ii). La trajectoire issue de  $X_*$  est un cycle limite  $\Gamma$ . écrivant l'application de retour sous la forme  $X_{k+1} = F(X_k)$ , on en déduit immédiatement que la stabilité du cycle dépend de la valeur de la dérivée  $dF/dX$  calculée en  $X_*$ : le cycle est stable si  $dF/dX(X_*) < 1$  et instable sinon.

Le théorème de Poincaré-Bendixson est relatif à des ensembles limites qui ne contiennent pas de points fixes. Si l'on considère maintenant les ensembles non-errants représentatifs de la dynamique asymptotique, comme nous l'avons vu, nous devons ajouter aussi des boucles formées de trajectoires hétéroclines reliant

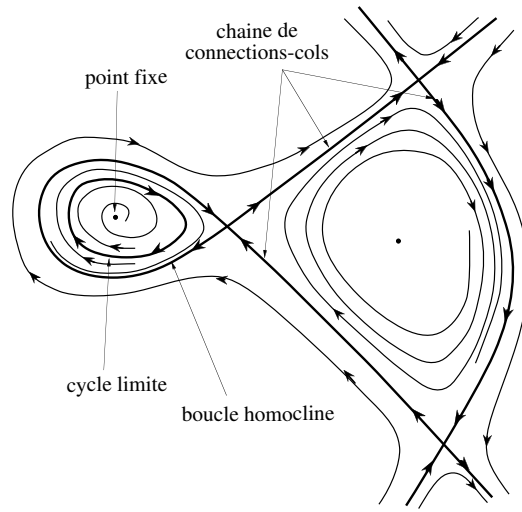


Figure 4.9: Ensembles non-errants en dimension  $d = 2$  (en gras) avec indication du champ de vecteurs associé visualisé par quelques trajectoires (traits maigres).

plusieurs points fixes ou des trajectoires homoclines (cf. Fig. 2.15). Nous arrivons donc au résultat suivant que, pour  $d = 2$ , les ensembles non-errants (stables ou instables) peuvent être:

- des *points fixes*,
- des *cycles limites*,
- des *connexions-cols* (boucles hétéroclines ou orbites homoclines).

Ces différents objets sont illustrés sur la Fig. 4.9.

La recherche de cycles limites est conditionné par le *critère de Bendixon* stipulant qu'il ne peut y avoir de cycle limite entièrement contenu dans une région simplement connexe du plan si la divergence du champ de vecteur y garde un signe constant. En effet, si c'était le cas, la surface limitée par le cycle devrait augmenter ou diminuer au cours de l'évolution ce qui est en contradiction avec le fait que le cycle est une courbe invariante.

Se pose maintenant la question de la stabilité structurelle de ces ensembles non-errants. En fait nous avons vu que, pour ce qui est des points fixes, les centres, marginalement stables, se transforment en foyers stables ou instables sous l'effet des perturbations apportées au champ de vecteurs. De même les trajectoires homoclines et les boucles hétéroclines, s'ouvrent en général (cf. Fig. 2.19), ce qui écarte de fait les connexion-cols. On arrive ainsi au *théorème de Peixoto* qui stipule que les ensembles non-errants d'un champ de vecteurs *structurellement stable* sur une variété bidimensionnelle compacte ne peuvent être que des *points fixes* ou/et des *cycles limites*, en nombre fini et tous *hyperboliques* (c'est à dire strictement stables ou instables, donc non-marginaux).

## 4.2.2 Bifurcation de Hopf

Nous considérons maintenant le problème des bifurcations locales en dimension 2 et de codimension 1, c'est à dire contrôlées par un seul paramètre. Pour répertorier les cas il suffit de se rappeler que ce cas correspond génériquement deux valeurs propres distinctes, soit réelles, soit complexes conjuguées (cf. Fig. 4.10). Si les valeurs propres sont réelles, la bifurcation est réalisée lorsqu'une seule des deux valeurs propres passe par zéro, l'autre restant éloignée. Ceci peut être vu comme l'extension à la dimension 2 des bifurcations unidimensionnelles étudiées précédemment en ajoutant la seconde dimension selon laquelle il ne se passe rien ( $\frac{d}{dt}X_2 = s_2X_2$  avec  $s_2 < 0$  et  $|s_2| \sim \mathcal{O}(1)$ ). Dans le cas d'une paire de valeurs propres complexes  $s_{(\pm)} = \sigma \pm i\omega$ , le problème est réellement bidimensionnel. On suppose alors que la fréquence  $\omega$  n'a pas de

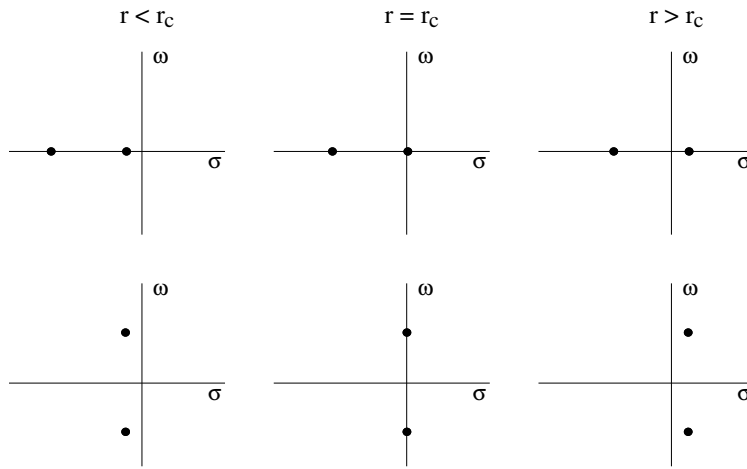


Figure 4.10: Bifurcation de codimension 1 dans le cas bidimensionnel. En haut: deux valeurs propres réelles:  $s_1 \sim 0$ ,  $s_2 \sim \mathcal{O}(1)$ ; ce cas est en fait unidimensionnel, comme on peut s'en convaincre par élimination adiabatique du mode dont le taux de croissance reste négatif. En bas: une paire de valeurs propres complexes conjuguées:  $\sigma \sim 0$ ,  $\omega \sim \mathcal{O}(1)$ .

comportement critique, i.e.  $\omega \sim \mathcal{O}(1)$ , de sorte que la bifurcation, dite *de Hopf* est effectivement contrôlée par la partie réelle  $\sigma$ .<sup>1</sup>

Ici nous considérons donc le cas d'une paire de modes complexes conjugués. L'étude des résonances au Ch. 3 nous a appris qu'à l'ordre le plus bas, le problème pouvait se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_1 &= \sigma X_1 + \omega X_2 - (g'_1 X_1 + g''_1 X_2)(X_1^2 + X_2^2) - \dots, \\ \frac{d}{dt} X_2 &= -\omega X_1 + \sigma X_2 - (-g''_1 X_1 + g'_1 X_2)(X_1^2 + X_2^2) - \dots, \end{aligned}$$

qu'il est préférable de transformer tout de suite en posant  $Z = X_1 + iX_2$ , ce qui conduit à la forme normale en complexes (avec  $g_k = g'_k + ig''_k$ )

$$\frac{d}{dt} Z = (\sigma - i\omega)Z - \sum_k g_k |Z|^{2k} Z, \quad g_k \in \mathbb{C}. \quad (4.15)$$

Considérons pour l'instant la série tronquée au delà du terme formellement cubique, abandonnons l'indice 1 et posons  $Z = |Z| \exp(i\phi)$ , nous obtenons immédiatement

$$\frac{d}{dt} |Z| + i|Z| \frac{d}{dt} \phi = (\sigma - i\omega)|Z| - (g' + ig'')|Z|^3$$

d'où, par séparation des parties réelle et imaginaire:

$$\frac{d}{dt} |Z| = (\sigma - g'|Z|^2)|Z|, \quad (4.16)$$

$$|Z| \frac{d}{dt} \phi = |Z|(-\omega - g''|Z|^2). \quad (4.17)$$

En plus de la solution triviale  $Z = 0$ , nous trouvons donc une solution non-triviale pour laquelle l'évolution de  $|Z|$  est entièrement découplée de celle de  $\phi$ . La résolution en  $|Z|$  nous ramène à un problème connu (cf. équation (4.10)). Son étude montre que la bifurcation est super-critique (resp. sous-critique) si  $g' > 0$  (resp.  $g' < 0$ ), auquel cas le point fixe non-trivial  $|Z| = \sqrt{\sigma/g'}$  est stable (resp. instable). Hors mis au point fixe trivial  $Z = 0$ , (4.17) se simplifie pour donner

$$\frac{d}{dt} \phi = -\omega - g''|Z|^2$$

qui permet de trouver  $\phi(t)$ , une fois  $Z(t)$  déterminé par intégration de (4.16) partant d'une condition initiale  $Z_0 \neq 0$ .

<sup>1</sup>Le problème au voisinage d'une racine double  $s = 0$  est de codimension 2, car il faut un second paramètre de contrôle pour forcer  $s_2$  ou  $\omega$  à s'annuler.

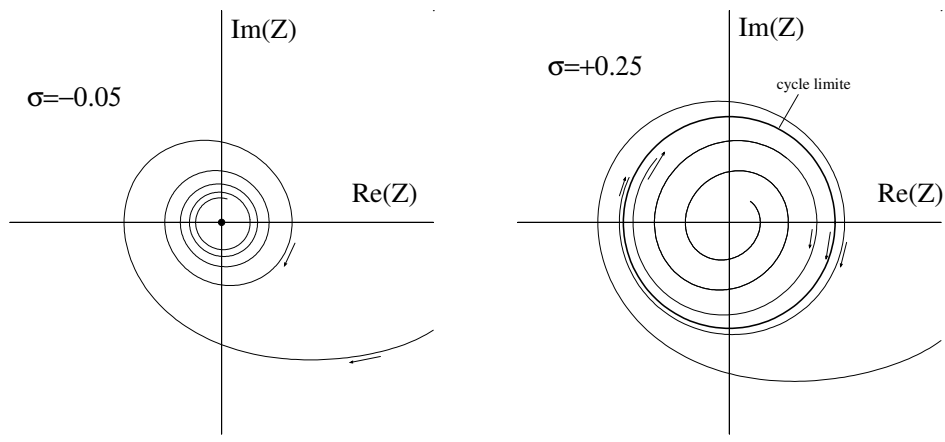


Figure 4.11 : Bifurcation de Hopf d'un point fixe (cas super-critique). À gauche: en dessous du seuil les trajectoires spiralent vers l'origine. À droite: au dessus du seuil elles rejoignent une courbe invariante appelée cycle limite.

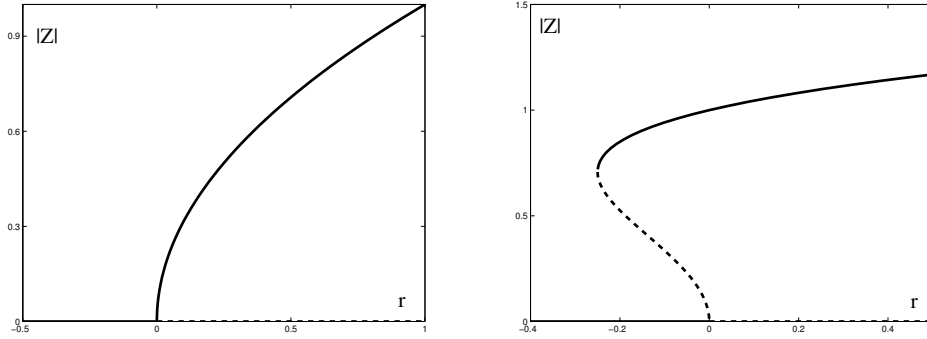


Figure 4.12 : Amplitude du cycle limite émergent d'une bifurcation de Hopf d'un point fixe. À gauche: cas super-critique  $g_1 > 0$ . À droite: cas sous-critique  $g_1' < 0$ ,  $g_2' > 0$ ; deux cycles, l'un stable l'autre instable, apparaissent à distance finie de l'origine.

Dans le cas super-critique, durant le régime transitoire, les trajectoires spiralent vers l'origine pour  $\sigma < 0$  (Fig. 4.11, gauche) et rejoignent en spirant un cycle limite de rayon  $|Z_*| = \sqrt{\sigma/g'}$  pour  $\sigma > 0$ , de l'intérieur ou de l'extérieur selon que  $|Z_0| < |Z_*|$  ou l'inverse (Fig. 4.11, droite). En régime asymptotique,  $|Z|$  ayant rejoint sa valeur finale  $|Z_*|$  on trouve

$$\frac{d}{dt}\phi = -\omega - g''|Z_*|^2 = \omega - \sigma g''/g'$$

soit

$$\phi = \phi_0 - \tilde{\omega}t \quad \text{avec} \quad \tilde{\omega} - \omega \propto |Z_*|^2 \sim \sigma.$$

Nous avons donc affaire à un régime périodique dont la pulsation est corrigée de la valeur originelle  $\omega$  par la contribution des non-linéarités (Fig. 4.12, gauche).

Dans le cas sous-critique, le terme non-linéaire ne sature pas  $|Z|$  et des termes d'ordre supérieur doivent être pris en compte dans (4.15). La dynamique de  $|Z|$  reste découplée de celle de  $\phi$  et l'on trouve

$$\frac{d}{dt}|Z| = \sigma|Z| - \sum_k g_k' |Z|^{2k+1},$$

où les indices  $k$  des  $g_k$  ont été restaurés et où  $g_1' < 0$  par hypothèse. L'évolution de  $|Z|$  est donc gouvernée strictement par (4.14) qui va rendre compte de la bifurcation: apparition pour  $\sigma = -(g_1')^2/4g_2' < 0$  d'une paire de cycles à distance finie de l'origine qui est encore stable puisque  $\sigma < 0$ ; coexistence de ces deux cycles (instable à l'intérieur, stable à l'extérieur) jusqu'en  $\sigma = 0$ , puis disparition du cycle instable pour  $\sigma > 0$  (Fig. 4.12, droite).



## 4.3 Période des oscillateurs non-linéaires

Nous considérons maintenant le problème de la détermination de la période des oscillateurs sans plus faire référence à l'origine du comportement oscillatoire. Il est alors courant de revenir à une seule équation du second ordre plutôt que de garder deux équations du premier ordre et c'est ce que nous ferons dans toute cette section.

### 4.3.1 Calcul direct dans le cas hamiltonien

La mécanique nous offre un grand nombre de systèmes présentant des solutions périodiques en temps, à commencer par l'oscillateur linéaire  $\frac{d^2}{dt^2}X + \omega^2 X = 0$ . Commençons donc par un système conservatif "à un degré de liberté" (cf. Ch. 2, §2.4) gouverné par

$$\frac{d^2}{dt^2}X = -\partial V/\partial X.$$

Pour exprimer la conservation de l'énergie, on multiplie par  $\frac{d}{dt}X$

$$\frac{d}{dt}X \frac{d^2}{dt^2}X = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt}X \right)^2 \right] = -\frac{d}{dt}X \partial V/\partial X = -\frac{d}{dt}V(X(t))$$

que l'on intègre pour obtenir

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt}X \right)^2 = E - V(X),$$

la constante d'intégration étant l'énergie  $E$  de la trajectoire. Le mouvement s'en déduit alors par intégration de  $\frac{d}{dt}X = \pm \sqrt{2(E - V(X))}$  soit

$$\int dt = \pm \int dX / \sqrt{2(E - V(X))}. \quad (4.18)$$

La demi-période est alors obtenue en intégrant cette équation entre deux points tournants racines de  $\frac{d}{dt}X = 0$ , soit

$$V(X_t) = E,$$

cf. Fig. 2.23 p. 45, de sorte que l'on doit calculer<sup>2</sup>

$$\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{2}T = \int_{X_t^{(1)}}^{X_t^{(2)}} dX / \sqrt{2(E - V(X))}. \quad (4.19)$$

Au voisinage du minimum d'un potentiel, supposé placé en  $X = 0$ , i.e.,  $\partial V/\partial X = 0$  et  $\partial^2 V/\partial X^2 = \omega_0^2 > 0$  en ce point, nous obtenons  $V(X) = \frac{1}{2}\omega_0^2 X^2$  à une constante et des termes d'ordre supérieur près (approximation harmonique). Dans toute la suite nous supposons que par un choix convenable de l'échelle des temps, la fréquence  $\omega_0$  est normalisée à l'unité. Nous repartons donc de  $V(X) = \frac{1}{2}X^2$ . Les points tournants sont donnés par:  $X_t = \pm\sqrt{2E}$  et par un changement de variable  $X = X_t \sin(\theta)$  nous obtenons

$$T = 2 \int_{-(2E)^{1/2}}^{+(2E)^{1/2}} dX / \sqrt{2(E - V(X))} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2\pi.$$

Notons tout de suite que la période est indépendante de l'amplitude mais que ce résultat a été obtenu de façon bien compliquée. Ceci se généralise cependant aisément à des potentiels plus généraux.

Considérons d'abord un cas assez extrême:

$$V(X) = V_0 + \frac{1}{4}X^4.$$

---

<sup>2</sup>Bien que le dénominateur s'annule aux points tournants, l'intégrale n'est pas singulière car  $E - V(X) \sim -\partial_X V(X_t)\delta X$  et, les  $X_t$  n'étant pas points critiques du potentiel, on a  $\partial V/\partial X(X_t) \neq 0$ . Le calcul porte alors sur  $\int d\delta X/\sqrt{\delta X} \sim \sqrt{\delta X}$  qui n'est pas singulier. L'intégrale diverge ( $T \rightarrow \infty$ ) si  $\partial V/\partial X = 0$ , ce qui se produit par exemple si l'énergie est juste égale à celle correspondant à une séparatrice du mouvement, reliant deux points fixes instables.

Il vient (avec  $U = X/(4E)^{1/4}$ )

$$T = 2 \int_{-(4E)^{1/4}}^{(4E)^{1/4}} dX / \sqrt{2(E - X^4/4)} = \frac{2}{E^{1/4}} \int_{-1}^1 dU / \sqrt{1 - U^4},$$

de sorte que, sans même calculer l'intégrale, nous pouvons conclure que la période, donnée par  $T \propto E^{-1/4}$ , diminue quand l'énergie augmente, ce que l'on peut traduire en termes d'oscillateur harmonique par une constante élastique effective qui augmenterait avec l'énergie. La période est maintenant fonction de l'énergie, ce qui est le cas générique.

Considérons maintenant un cas moins extrême où l'anharmonicité est une petite correction. Nous prenons

$$V(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}\epsilon X^4 \quad (0 < \epsilon \ll 1)$$

qui détermine le mouvement d'un oscillateur non-linéaire

$$\frac{d^2}{dt^2}X + (1 + \epsilon X^2)X = 0$$

appelé *oscillateur de Duffing*. La "constante élastique"  $k = 1 + \epsilon X^2$  est fonction de  $X$ , de sorte que l'on attend des solutions périodiques mais avec une pulsation modifiée. Pour estimer la période par (4.19), on détermine tout d'abord les points tournants:

$$E = \frac{1}{2}X_t^2 + \frac{1}{4}\epsilon X_t^4.$$

Factorisant l'argument du radical au dénominateur on obtient

$$\begin{aligned} (X_t^2 + \frac{1}{2}\epsilon X_t^4) - (X^2 - \frac{1}{2}\epsilon X^4) &= X_t^2 - X^2 + \frac{1}{2}\epsilon(X_t^4 - X^4) \\ &= (X_t^2 - X^2) \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon(X_t^2 + X^2)\right) \end{aligned}$$

Posons  $X = X_t \sin(\theta)$  comme dans le cas harmonique. Il vient

$$T = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta / \sqrt{1 + (X_t^2\epsilon/2)(1 + \sin^2(\theta))}.$$

Un développement en puissances de  $X_t^2\epsilon/2$  à l'ordre le plus bas conduit à

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} (1 - (X_t^2\epsilon/4)(1 + \sin^2(\theta))) d\theta \quad (4.20)$$

$$= 2\pi - 4(X_t^2\epsilon/4)(3\pi/4) = 2\pi(1 - \frac{3}{8}\epsilon X_t^2), \quad (4.21)$$

ou, en termes d'énergie à l'ordre en  $\epsilon$  considéré

$$T = 2\pi(1 - \frac{3}{4}\epsilon E)$$

La méthode s'étend facilement au cas d'un potentiel polynômial pair en  $X$ .

**Remarque:** Le problème considéré ici est dit "intégrable." De plus la détermination de la période dans le cas de potentiels polynômiaux d'ordre 4 peut servir de support à l'introduction des *fonctions elliptiques*. L'intégrale elliptique

$$F(X, k) = \int_0^X dX' / \sqrt{(1 - X'^2)(1 - k^2 X'^2)}$$

est appelé forme canonique de Legendre. Pour  $k = 0$ , on retrouve la définition de la fonction Arcsinus. Une forme équivalente est obtenue en posant  $X = \sin(\theta)$  qui conduit à

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta d\theta' / \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta')}.$$

Les fonctions elliptiques sont les fonctions inverses des intégrales elliptiques. Cependant on ne définit pas  $\theta = \theta(u, k)$  en inversant directement  $u = \int_0^\theta d\theta' / \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta')}$ . On définit plutôt  $\sin(\theta) = sn(u, k)$  et  $\cos(\theta) = cn(u, k)$ , appelées ondes “cnoïdales.”

Les intégrales elliptiques complètes du premier type  $K(X = 1, k) = K(\theta = \pi/2, k)$  permettent par exemple de déterminer la période du pendule pesant  $\frac{d^2}{dt^2}X + \sin(X) = 0$ . Il vient en effet,  $E = \frac{1}{2}(\frac{d}{dt}X)^2 - \cos(X)$  et  $t = \int_0^X dX' / \sqrt{2(E + \cos(\theta'))}$  soit après transformation  $t = \int_0^\phi d\phi' / \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi')}$  avec  $k = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + E)}$  et  $k \sin(\phi) = \sin(\theta/2)$ .

Les fonctions elliptiques jouissent de nombreuses propriétés, notamment de périodicité et de relations entre arguments qui généralisent les relations classiques de trigonométrie circulaire et hyperbolique.

### 4.3.2 Introduction au calcul perturbatif de la solution

Génériquement, la pulsation d’un oscillateur non-linéaire est fonction de l’amplitude du mouvement. Les états instantanés de deux oscillateurs initialisés avec des amplitudes voisines vont donc se décaler progressivement. Choisisant l’un des oscillateurs pour référence, on voit dans ce décalage l’effet de termes séculaires. Illustrons ce problème d’horloge par un analogue linéaire et considérons l’oscillateur de référence défini par  $\frac{d^2}{dt^2}X + X = 0$ , l’oscillateur voisin par  $\frac{d^2}{dt^2}X + (1 - \epsilon)X = 0$ . Écrivons la solution du second problème  $X \propto \cos(\omega t)$  avec  $\omega^2 = 1 - \epsilon$  et développons la au premier ordre significatif. Il vient  $\omega \sim 1 - \frac{1}{2}\epsilon$  et  $\cos(\omega t) = \cos(t) \cos(\frac{1}{2}\epsilon t) + \sin(t) \sin(\frac{1}{2}\epsilon t)$ . Au temps courts,  $\frac{1}{2}\epsilon t \ll 1$ , on a  $\cos(\frac{1}{2}\epsilon t) \sim 1$  et  $\sin(\frac{1}{2}\epsilon t) \sim \frac{1}{2}\epsilon t$ , on peut donc écrire  $\cos(\omega t) = \cos(t) + \frac{1}{2}\epsilon t \sin(t)$ , ce qui fait bien apparaître la solution correspondant au premier oscillateur corrigée par un terme séculaire. Il n’est pas difficile d’obtenir cette solution par un développement en perturbation directement à partir de l’équation.

Écrivons le problème pour le second oscillateur sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2}X + X = \epsilon X$$

et cherchons en la solution en termes de développement en puissance de  $\epsilon$ :

$$X = X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots$$

Ceci conduit à une suite de problèmes, ici très simples

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_0 = 0, \tag{4.22}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_1 = X_0, \tag{4.23}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_2 = X_1, \tag{4.24}$$

$$\dots = \dots \tag{4.25}$$

Il vient, immédiatement  $X_0 \propto \cos(t)$ , de sorte que le problème pour  $X_1$  contient comme inhomogénéité un terme résonnant responsable de l’apparition du terme séculaire signalé.

Tout développement obtenu de cette façon a donc une durée de validité limitée dans le temps. On dit qu’il constitue une approximation non-uniforme en  $t$ . Le but de cette section est de mettre en œuvre des méthodes aboutissant à un développement uniformément valide. Ici, l’origine du problème est évidente: il faut corriger l’horloge, donc passer de  $t$  à une nouvelle variable  $\tau$  pour laquelle il n’y aurait pas de termes séculaires. Posons donc  $\tau = \omega t$  et cherchons la relation entre  $\tau$  et  $t$  sous forme d’un développement de  $\omega$  en puissances du petit paramètre de perturbation  $\epsilon$ :

$$\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots \tag{4.26}$$

Notant  $\frac{d}{d\tau}$  la dérivation par rapport à la nouvelle variable indépendante, nous avons donc  $\frac{d}{dt}X \equiv \omega \frac{d}{d\tau}X$  et  $\frac{d^2}{dt^2}X \equiv \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}X$ , donc

$$\left[ (1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} + 1 \right] (X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots) = \epsilon (X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots)$$

Qui conduit à une nouvelle série de problèmes

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_0 = 0, \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_1 = X_0 - 2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2} X_0, \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_2 = X_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \frac{d^2}{d\tau^2} X_0 - 2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2} X_1, \quad (4.29)$$

$$\dots = \dots \quad (4.30)$$

La structure de (4.27-...) et semblable à celle de (4.22-...), à cette différence près que les inhomogénéités contiennent des paramètres libres qui vont pouvoir être fixés de manière à “tuer” les termes résonnants qui génèrent des termes séculaires à l’origine de la non-uniformité du développement. Cette opération est une application de l’*alternative de Fredholm*: Un problème tel que (4.28) est de la forme

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}.$$

Or le noyau de  $\mathbf{L}$  est non-trivial puisque le premier problème, homogène, est réputé avoir une solution. Le problème inhomogène n’a alors de solution que si le membre de droite est orthogonal au noyau de l’adjoint  $\mathbf{L}^\dagger$  de  $\mathbf{L}$ .<sup>3</sup> Pour bien spécifier le problème il faut définir l’espace dans lequel on cherche les solutions. Ici, conformément à notre objectif de recherche d’un développement uniforme, libre de termes séculaires, nous devons nous limiter à l’espace des fonctions périodiques en  $\tau$ . Le problème  $\frac{d^2}{d\tau^2}X + X$  est auto-adjoint et son noyau engendré par  $\cos(\tau)$  et  $\sin(\tau)$ .

La solution du problème (4.27),  $X_0 \propto \cos(\tau)$  reportée dans le problème (4.28) donne au membre de droite  $F_1 \propto (1 + 2\omega_1) \cos(\tau)$ . L’alternative de Fredholm nous impose ici d’annuler le coefficient de  $\cos(\tau)$ , soit:  $\omega_1 = -\frac{1}{2}$ , puis à l’ordre 2 avec  $F_2 \propto (\omega_1^2 + 2\omega_2) \cos(\tau)$ ,  $\omega_2 = -\frac{1}{2}\omega_1^2 = -\frac{1}{8}$ . Reconstituant  $\omega$  à cet ordre on trouverait  $\omega = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2$ , qui est bien le début du développement de Taylor de  $\omega = \sqrt{1 - \epsilon}$  attendu par le calcul direct.

Pour conclure cette introduction, insistons sur le fait que (i) les développements introduisent des fonctions inconnues et des paramètres libres, (ii) dès le premier ordre en perturbation et à tous les ordres suivants, on rencontre des problèmes inhomogènes où les membres de droite ne contiennent que des quantités déterminées aux ordres inférieurs et (iii) les paramètres libres introduits sont fixés par la condition d’élimination des termes résonnants. Nous allons maintenant appliquer cette procédure à plusieurs reprises, le volume du calcul variant en raison inverse de sa généralité.

### 4.3.3 Méthode de Poincaré–Lindstedt

La méthode introduite ci-dessus, qui consiste à changer l’horloge en définissant  $\tau = \omega t$  et en développant  $\omega$  en puissance de la perturbation selon (4.26), est particulièrement adaptée au cas des oscillateurs d’origine mécanique dont on est assuré du comportement périodique tant que l’on considère des états liés. Elle est connue sous le nom de *méthode de Poincaré–Lindstedt*. Pour l’appliquer, nous allons considérer le cas de l’oscillateur de Duffing dont nous avons déterminé la période de manière directe (§4.3.1).

Nous partons donc de

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X = -\epsilon X^3$$

et pour préciser complètement le problème aux valeurs initiales, nous prenons

$$X(t = 0) = A, \quad \frac{d}{dt}X(t = 0) = 0.$$

---

<sup>3</sup>Cette condition est très facile à illustrer sur l’exemple d’un système algébrique linéaire du second ordre:  $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = 0$ ;  $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0$ . Ce système n’a de solution non-triviale que si  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ . Pour le produit scalaire:  $\langle Y|X \rangle = Y_1^*X_1 + Y_2^*X_2$ , le problème adjoint s’écrit:  $a_{11}^* \tilde{X}_1 + a_{21}^* \tilde{X}_2 = 0$ ;  $a_{12}^* \tilde{X}_1 + a_{22}^* \tilde{X}_2 = 0$ . Son noyau est engendré par  $\mathbf{V} = (a_{21}^*, -a_{11}^*)$  et le problème inhomogène:  $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = f_1$ ;  $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = f_2$  n’a de solution que si  $\langle V|F \rangle = 0$  soit:  $a_{21}f_1 + a_{22}f_2 = 0$  qui, jointe à la relation entre les  $a_{ij}$ , exprime simplement la proportionnalité des deux équations, et donc l’existence d’une infinité de solutions dépendant d’un paramètre.

Les développements pour  $X$  et  $\omega$  sont pris comme précédemment. À l'ordre  $\epsilon^0$ , la solution qui satisfait les conditions initiales s'écrit

$$X_0(\tau) = A_0 \cos(\tau) + B_0 \sin(\tau),$$

les conditions initiales conduisant à prendre  $B_0 = 0$  et  $A_0 = A$ , ce qui imposera  $X_n(t = 0)$  à tous les ordres  $n \geq 1$ .

Limitons nous au premier ordre, amplement suffisant pour illustrer la mécanique du développement et tout ce que l'on peut en tirer. À cet ordre le terme non-linéaire va contribuer *via*  $\epsilon(X_0 + \epsilon X_1)^3 \simeq \epsilon X_0^3$ . Nous obtenons donc

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_1 = -2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2}X_0 - X_0^3 = 2\omega_1 X_0 - X_0^3$$

Les termes résonnant ont ici deux origines, la première directe de  $X_0$  et la seconde indirecte de  $X_0^3$  car  $X_0 = A \cos(\tau)$  et  $\cos^3(\tau) = \frac{3}{4} \cos(\tau) + \frac{1}{4} \cos(3\tau)$ . De ce développement, seul le premier terme est "dangereux" car  $\cos(3\tau)$  n'est pas résonnant. L'élimination du terme résonnant fixe  $\omega_1$ :

$$2\omega_1 A - \frac{3}{4}A^3 = 0 \quad \text{soit} \quad \omega_1 = \frac{3}{8}A^2,$$

en accord avec la détermination précédente. L'avantage de cette méthode sur le calcul direct de la période tient à ce que l'on a maintenant accès au développement de la solution elle-même. On peut en effet déterminer complètement la correction  $X_1$ . La condition d'existence étant satisfaite, le problème se réduit à

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_1 = -\frac{1}{4}A^3 \cos(3\tau).$$

Sa solution se présente comme une somme de la solution générale du problème homogène  $X_{11} = A_{11} \cos(\tau) + B_{11} \sin(\tau)$  et d'une solution particulière du problème complet  $X_{13} = A_{13} \cos(3\tau) + B_{13} \sin(3\tau)$ . Cette dernière est obtenue par identification. Il vient ainsi:  $A_{13} = \frac{1}{32}A^3$  et  $B_{13} = 0$ . La prise en compte des conditions initiales conduit à  $X_1(0) = 0$  et  $\frac{d}{d\tau}X_1(0) = 0$ , et donc  $B_{11} = 0$  et  $A_{11} = -A_{13}$ . Recomposant la solution à cet ordre, nous avons donc

$$X(t) = A \cos(\omega t) + \frac{1}{32}A^3 (\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = 1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2. \quad (4.31)$$

Naturellement, il faut avoir déterminé la solution complète à un ordre donné avant de passer à l'ordre suivant car certaines composantes de celle-ci peuvent former des combinaisons résonnantes contribuant aux termes à éliminer.

#### 4.3.4 Méthode de moyennage

Jusqu'à présent nous nous sommes limités à des systèmes d'origine hamiltonienne pour lesquels la conservation de l'énergie nous assure, dans des circonstances appropriées, de la périodicité de la solution. Des difficultés apparaissent si le système n'est plus conservatif, ce qui rend la périodicité du comportement plus problématique. Nous reviendrons sur ce problème à la section suivante. Pour l'instant nous allons nous écarter un peu de la démarche systématique suivie jusqu'à présent et présenter une méthode plus intuitive, très efficace si on se limite au premier ordre significatif.

Considérons pour commencer le cas de l'oscillateur linéaire faiblement amorti:

$$\frac{d^2}{dt^2}X + \epsilon \frac{d}{dt}X + X = 0 \quad \text{soit encore} \quad \frac{d^2}{dt^2}X + X = -\epsilon \frac{d}{dt}X. \quad (4.32)$$

La solution s'écrit

$$X(t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon t\right) \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega^2 = 1 - \frac{1}{4}\epsilon^2. \quad (4.33)$$

écrivons  $X(t) = A(t) \cos(t + \phi(t))$ . De cette façon, la quantité  $A(t) \propto \exp(-\epsilon t/2)$  fait figure de moyenne de l'amplitude sur une pseudo-période. à la différence du cas de l'oscillateur idéal, cette amplitude moyenne n'est plus constante mais au contraire lentement variable pour  $\epsilon \ll 1$ . Considérons maintenant l'argument du cosinus et identifions en les contributions:  $t + \phi(t) = \omega t = (1 + \delta\omega)t$  avec  $\delta\omega = -\frac{1}{8}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ . La correction à la pulsation étant faible, la phase  $\phi(t) = \delta\omega t$  est, elle-aussi, lentement variable.

Le problème qui se pose maintenant est de généraliser ces notions d'amplitude moyenne  $A(t)$  et de phase  $\phi(t)$  supposées *lentement variables* quand le système se présente sous la forme d'une équation différentielle du second ordre "proche" de celle gouvernant un oscillateur linéaire idéal, soit

$$\frac{d^2}{dt^2}X + X = -\epsilon f\left(X, \frac{d}{dt}X\right) \quad \epsilon \ll 1, \quad (4.34)$$

dont la solution est cherchée sous la forme

$$X(t) = A(t) \cos(t + \phi(t)). \quad (4.35)$$

Suivant cette hypothèse, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}X = -A \sin(t + \phi) + \left[\frac{d}{dt}A \cos(t + \phi) - A \sin(t + \phi) \frac{d}{dt}\phi\right]. \quad (4.36)$$

Au départ, nous avons une inconnue  $X$ , gouvernée par une équation du second ordre. Nous sommes passé à une représentation de la solution à l'aide de deux fonctions  $A$  et  $\phi$ . Nous devons donc contraindre ces deux fonctions d'une façon ou d'une autre. Il est ici naturel de leur imposer de vérifier la relation qui les lierait en l'absence de modulation, i.e.,  $\frac{d}{dt}X = -A \sin(t + \phi)$ . C'est la raison pour laquelle nous avons placé dans (4.36) les termes modulés ( $\frac{d}{dt}A \neq 0$ ,  $\frac{d}{dt}\phi \neq 0$ ) entre crochets. La première équation gouvernant  $A$  et  $\phi$  est donc:<sup>4</sup>

$$\frac{d}{dt}A \cos(t + \phi) - A \sin(t + \phi) \frac{d}{dt}\phi = 0. \quad (4.37)$$

Dérivant une seconde fois (4.35) en tenant compte de cette relation, nous trouvons:

$$\frac{d^2}{dt^2}X = -A \cos(t + \phi) - \left[\frac{d}{dt}A \sin(t + \phi) + A \frac{d}{dt}\phi \cos(t + \phi)\right]$$

que nous insérons dans (4.34) pour obtenir

$$\frac{d}{dt}A \sin(t + \phi) + A \frac{d}{dt}\phi \cos(t + \phi) = \epsilon g(A, \phi) \quad (4.38)$$

où  $g(A, \phi) \equiv f(X, \frac{d}{dt}X) = f(A \cos(t + \phi), -A \sin(t + \phi))$ . Pour isoler  $\frac{d}{dt}A$  et  $\frac{d}{dt}\phi$  il suffit de combiner (4.37) et (4.38), ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= \epsilon f(A \cos(t + \phi), -A \sin(t + \phi)) \sin(t + \phi), \\ A \frac{d}{dt}\phi &= \epsilon f(A \cos(t + \phi), -A \sin(t + \phi)) \cos(t + \phi). \end{aligned}$$

Jusqu'ici le calcul est exact. L'approximation s'introduit dès que l'on suppose  $A(t)$  et  $\phi(t)$  lentement variables à l'échelle de temps  $T \simeq 2\pi$ . Si c'est le cas, intégrant sur une période approximative en considérant  $A$  et  $\phi$  constants, on obtient

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(A \cos(t), -A \sin(t)) \sin(t), \quad (4.39)$$

$$A \frac{d}{dt}\phi = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(A \cos(t), -A \sin(t)) \cos(t). \quad (4.40)$$

Appliquons ces formules à l'oscillateur de Duffing et à l'oscillateur de Van der Pol.

**Oscillateur de Duffing:** Avec  $f(X, \frac{d}{dt}X) = X^3$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^3(t) \sin(t) dt = 0, \\ A \frac{d}{dt}\phi &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^4(t) dt = \frac{3}{8} A^4. \end{aligned}$$

L'amplitude  $A$  reste constante (sur une période) et déterminée par la condition initiale (conformément à l'aspect conservatif du système. L'intégration de l'équation pour la phase conduit de son côté à

$$\phi = \frac{3}{8} A^2 t + \phi_0$$

qui donne la correction à la pulsation déjà déterminée à deux reprises.

<sup>4</sup>La condition (4.35) et la relation (4.37) peuvent aussi être vues comme découlant d'un passage implicite à des coordonnées cylindriques:  $X = A \cos(\theta)$ ,  $Y = -A \sin(\theta)$ , passage tout à fait naturel si l'on préfère voir l'équation du second ordre  $\frac{d^2}{dt^2}X + X = 0$  comme un système de deux équations du premier ordre  $\frac{d}{dt}X = Y$ ,  $\frac{d}{dt}Y = -X$ .

**Oscillateur de Van der Pol:** Ce système est non-conservatif. Nous le prenons ici sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2}X - \epsilon(1 - X^2)\frac{d}{dt}X + X = 0.$$

Cette forme est un peu différente de celle utilisée au Ch. 1:  $\frac{d^2}{dt^2}X + (-r + gX^2)\frac{d}{dt}X + X = 0$ , plus adaptée au problème de la bifurcation. La différence entre les deux modèles s'explique par des choix d'échelle différents pour  $X$ . Le choix fait ici ne vaut que pour  $\epsilon > 0$  mais garantit que les contributions linéaires *et* non-linéaires à la dissipation sont bien des perturbations. Avec  $f = -(1 - X^2)\frac{d}{dt}X$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2(t)) A \sin^2(t) dt = \frac{1}{2}\epsilon A \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right), \\ A\frac{d}{dt}\phi &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2(t)) A \sin(t) \cos(t) dt = 0.\end{aligned}$$

La seconde équation montre qu'il n'y a donc pas de correction à la pulsation (du moins à cet ordre). Par contre la première équation gouvernant l'amplitude est parfaitement non-triviale. Elle généralise le résultat obtenu précédemment (Ch. 1) et permet d'étudier convergence vers le cycle limite stable.

### 4.3.5 Méthode des échelles multiples

Si la méthode de moyennage qui vient d'être décrite permet bien de traiter des oscillations qui ne sont pas rigoureusement périodiques au premier ordre significatif, on ne voit pas très clairement comment pousser le calcul au delà. D'un autre côté, la méthode de Poincaré-Lindstedt donnait l'approximation de la solution développement systématique en puissances d'un petit paramètre, à condition qu'elle soit périodique. Voyons tout d'abord comment étendre cette méthode et pour cela considérons encore l'oscillateur amorti. La solution (4.33)  $\propto \mathcal{R}e \{ \exp[(-\frac{1}{2}\epsilon + i\omega)t] \}$  peut bien sûr s'écrire  $\propto \mathcal{R}e \{ \exp[i(\omega + i\frac{1}{2}\epsilon)t] \}$ , où  $\omega + i\frac{1}{2}\epsilon$ , bien que complexe, s'introduit comme la pulsation (réelle) d'une oscillation non-amortie. Ceci laisse entrevoir l'extension de la méthode par un passage aux complexes. En effet, appliquant la procédure précédente à (4.32), on obtiendrait au premier ordre

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)X_1 = -2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2}X_0 - \frac{d}{d\tau}X_0,$$

au lieu de (4.28). Injectant une solution complexe  $X_0 = A \exp(it)$ , on trouverait comme condition de compatibilité  $2\omega_1 - i = 0$ , soit  $\omega = 1 + \omega_1\epsilon = 1 + \frac{1}{2}i\epsilon$  à cet ordre, ce qui décrit bien l'atténuation attendue. Poursuivant aux ordres supérieurs, on trouverait ensuite le développement de Taylor de  $(1 - \frac{1}{4}\epsilon)^{1/2}$ .

Mais examinant le changement de pulsation, on note en fait deux échelles de temps différentes: le temps caractéristique de l'atténuation est d'ordre  $1/\epsilon$ , alors que le décalage de fréquence ne se fait sentir que sur des durées d'ordre  $1/\epsilon^2$ . Ceci suggère de faire reposer la méthode la plus générale cherchée sur une hiérarchie d'échelles de temps aptes à rectifier le défaut de synchronisation entre l'oscillateur linéaire de référence et l'oscillateur non-linéaire considéré. Le but de cette manœuvre est bien de rendre l'approximation de la solution uniforme en temps, un peu comme on corrige un défaut de calendrier par l'introduction des années bissextiles suivant un algorithme d'autant plus compliqué que l'on considère de longues périodes.

Nous cherchons donc maintenant la solution du problème sous la forme

$$X(t) = X(t_0, t_1, t_2, \dots) \quad \text{avec} \quad t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \dots$$

Pour  $\epsilon$  petit, l'échelle de temps  $t_1$  est effectivement lente par rapport à l'échelle  $t_0$  puisque lorsque  $t_0$  varie d'une quantité  $\mathcal{O}(1)$ , les arguments de  $X$  en  $t_1, t_2, \dots$  varient de quantités d'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon), \mathcal{O}(\epsilon^2), \dots$

La dérivée par rapport au temps d'une fonction de ces variables est alors donnée par:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{d}{dt}t_0\partial_{t_0} + \frac{d}{dt}t_1\partial_{t_1} + \frac{d}{dt}t_2\partial_{t_2} + \dots \\ &= \partial_{t_0} + \epsilon\partial_{t_1} + \epsilon^2\partial_{t_2} + \dots\end{aligned}$$

et de même pour la dérivée seconde:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \partial_{t_0^2} + 2\epsilon\partial_{t_0}\partial_{t_1} + \epsilon^2\left(\partial_{t_1^2} + 2\partial_{t_0}\partial_{t_2}\right) + \dots$$

La solution est maintenant cherchée sous la forme

$$X(t) = X_0(t_0, t_1, t_2, \dots) + \epsilon X_1(t_0, t_1, t_2, \dots) + \dots$$

et il ne reste qu'à insérer tous ces développements dans l'équation de mouvement en séparant les ordres en  $\epsilon$ . Nous allons à nouveau traiter le cas des oscillateurs de Duffing et de Van der Pol.

**Oscillateur de Duffing:** Nous avons:

$$\frac{d^2}{dt^2} X + X = -\epsilon X^3,$$

de sorte qu'à l'ordre  $\epsilon^0$  nous trouvons

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_0 = 0.$$

La solution s'écrit maintenant

$$X_0(t_0, t_1, t_2, \dots) = A_0(t_1, t_2, \dots) \cos(t_0 + \phi_0(t_1, t_2, \dots)).$$

Il vient à l'ordre  $\epsilon$

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_1 = -X_0^3 - 2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0.$$

Par hypothèse le développement ne doit pas introduire de termes séculaires en  $t_0$ . Il faut donc éliminer tous les termes résonnants du membre de droite, soit:

$$\begin{aligned} & -X_0^3 - 2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0 \\ & = -A_0^3 \cos^3(t_0 + \phi_0) + 2(\partial_{t_1}A_0) \sin(t_0 + \phi_0) + 2A_0(\partial_{t_1}\phi_0) \cos(t_0 + \phi_0) \\ & = \left(-\frac{3}{4}A_0^3 + 2A_0(\partial_{t_1}\phi_0)\right) \cos(t_0 + \phi_0) \\ & \quad + 2(\partial_{t_1}A_0) \sin(t_0 + \phi_0) - \frac{1}{4}A_0^3 \cos(3(t_0 + \phi_0)). \end{aligned}$$

Seul le dernier terme n'est pas résonnant. Nous obtenons donc deux conditions:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}A_0^3 + 2A_0\partial_{t_1}\phi_0 & = 0, \\ \partial_{t_1}A_0 & = 0, \end{aligned}$$

qui s'intègrent l'une et l'autre. La seconde exprime que  $A_0$  ne dépend pas de  $t_1$  donc au mieux de  $t_2, t_3, \dots$ ; quant à la première elle donne la première correction de phase:

$$\begin{aligned} A_0 & = A_0(t_2, \dots) \\ \phi_0 & = \frac{3}{8}A_0^2 t_1 + \bar{\phi}_0(t_2, \dots). \end{aligned}$$

On peut déterminer la solution du problème non résonnant correspondant au troisième harmonique et reconstruire la solution en tenant compte de  $t_1 = \epsilon t$ , retrouvant ainsi (4.31) pour un jeu particulier de conditions initiales.

**Oscillateur de Van der Pol:** Le début du calcul est identique. À l'ordre  $\epsilon$  nous trouvons maintenant

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_1 = (1 - X_0^2)\partial_{t_0}X_0 - 2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0,$$

dont le membre de droite se développe en

$$\begin{aligned} & (1 - A_0^2 \cos^2(t_0 + \phi_0))(-A_0 \sin(t_0 + \phi_0)) + 2(\partial_{t_1}A_0) \sin(t_0 + \phi_0) \\ & \quad + 2A_0(\partial_{t_1}\phi_0) \cos(t_0 + \phi_0) \\ & = \left(-A_0\left(1 - \frac{1}{4}A_0^2\right) + 2(\partial_{t_1}A_0)\right) \sin(t_0 + \phi_0) \\ & \quad + 2A_0(\partial_{t_1}\phi_0) \cos(t_0 + \phi_0) + \frac{1}{4}A_0^3 \sin(3(t_0 + \phi_0)). \end{aligned}$$



Les conditions qui annihilent les termes résonnants sont donc

$$\begin{aligned} -A_0(1 - A_0^2/4) + 2\partial_{t_1}A_0 &= 0, \\ 2A_0\partial_{t_1}\phi_0 &= 0. \end{aligned}$$

La seconde condition,  $\partial_{t_1}\phi_0 = 0$ , soit  $\phi_0 = \bar{\phi}_0(t_2, \dots)$  montre comme précédemment qu'il n'y a pas de correction à la pulsation à cet ordre. L'équation qui donne l'évolution de  $A_0$  est la même que celle obtenue par la méthode de moyennage, excepté l'absence de facteur  $\epsilon$  qui se trouve incorporé dans la définition de  $t_1$  et qui réapparaîtrait si l'on revenait à la variable  $t$ .

La méthode des échelles multiples sera réutilisée au chapitre suivant pour traiter le problème des oscillateurs non-linéaires forcés en régime stationnaire.

Pour conclure, nous avons clairement montré sur des exemples que la dynamique des systèmes bidimensionnels à comportement essentiellement périodique était accessible par des méthodes de perturbation, comment la restriction initiale sur la périodicité stricte avait pu être levée, et comment la procédure pouvait être poursuivie aux ordres plus élevés, certes au prix de calculs souvent lourds. De l'éventail des méthodes offertes, qui conduisent aux mêmes évaluations à l'ordre le plus bas, il reste à choisir à bon escient la mieux adaptée au problème posé et au degré de précision requis.

# Chapitre 5

## Dynamique en dimension $d > 2$

### 5.1 Introduction

Les bifurcations en dimension 1 et 2 conduisent à un mouvement asymptotique régulier dû soit à la propriété de gradient, soit à la possibilité d'ordonner les intersections successives des trajectoires avec une courbe tracée dans l'espace des phases (cf. Ch. 4, Fig. 5.1). Pour comprendre ce qui peut se passer en dimension supérieure, conformément à une remarque antérieure (§2.1.3), il est assez naturel de penser augmenter la dimension d'un système en le forçant. En effet, un système  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  de dimension  $d$  peut ainsi être vu comme un système autonome en  $(\mathbf{X}, U)$  avec  $U = t + \text{Cst.}$  de dimension  $d+1$ . Pour passer en dimension trois, il suffit donc de forcer périodiquement un oscillateur non-linéaire à une période  $T$  contrôlée de l'extérieur. Si  $\mathbb{X}$  est l'espace des phases du système non forcé, i.e., de dimension 2, le véritable espace des phases du système forcé est donc le "cylindre" tridimensionnel  $\mathbb{X} \times \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1$  est la sphère à 1 dimension, i.e., l'intervalle  $[0, T[$  périodisé, cf. Fig. 5.1 (gauche).

On peut préférer voir le système en "représentation étendue" dans l'espace des phases  $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$  assorti de la condition de périodicité  $U \equiv U + T$ . Cependant, si l'on trace la projection des trajectoires dans l'espace  $\mathbb{X}$  on n'obtient, sauf exception, qu'une image très confuse la situation. On est en quelque sorte "obligé" de procéder à une analyse stroboscopique des trajectoires pour y comprendre quelque chose. Celle-ci consiste en un examen de l'état du système à des intervalles de temps régulièrement espacés de la période  $T$  du forçage, ce qui revient à déterminer l'intersection de la trajectoire en représentation étendue avec une copie de l'espace des phases  $\mathbb{X}$  indexée par l'instant d'observation ( $t^0 \mapsto 0, t^0 + T \mapsto 1, t^0 + 2T \mapsto 2, \dots$ ), cf. Fig. 5.1b, puis à identifier toutes ces copies modulo  $T$  tout en gardant l'indexation des états du système. Les trajectoires observées par stroboscopie dans cet espace bidimensionnel peuvent s'entrelacer de façon complexe sans se recouper dans l'espace des phases tridimensionnel.  $\mathbb{X}$  joue maintenant le rôle de la courbe de section  $\mathcal{C}$  du cas bidimensionnel non-forcé. La possibilité d'ordonner les intersections le long de  $\mathcal{C}$  qui garantissait

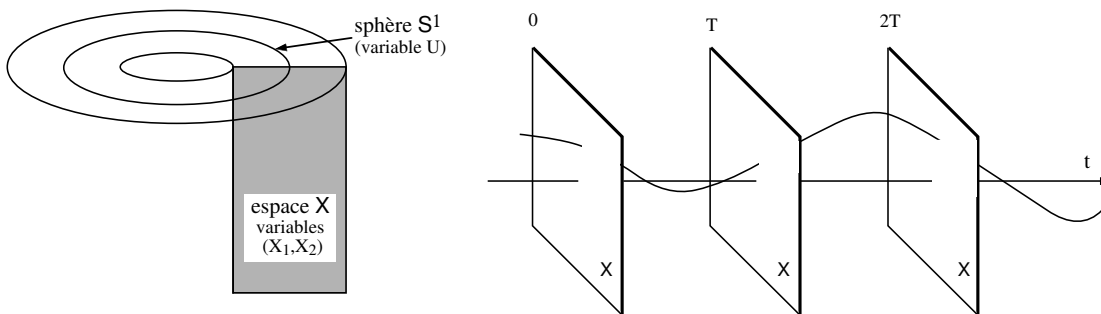


Figure 5.1: À gauche: l'espace des phases du système forcé périodiquement est un cylindre tridimensionnel  $\mathbb{X} \times \mathbb{S}^1$ . À droite: analyse stroboscopique d'un système forcé périodiquement en représentation étendue.

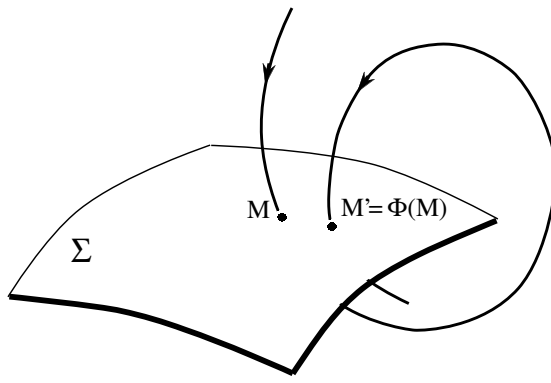


Figure 5.2: Section de Poincaré et application de premier retour.

la régularité des comportements en dimension 2 est maintenant perdue. Les comportements chaotiques deviennent possibles. Les notions de *section de Poincaré* et d'*application de premier retour* généralisent l'analyse stroboscopique que nous venons de décrire au cas de systèmes dynamiques quelconques.

Considérons donc un système dynamique autonome à temps continu défini sur  $\mathbb{R}^d$  et présentant dans une région de l'espace un comportement asymptotique intéressant à la limite  $t \rightarrow \infty$ . Définissons une hypersurface  $\Sigma$  de dimension  $d-1$ . C'est une *surface de section* acceptable si elle est *transverse* au champ de vecteurs dans toute la région concernée et si naturellement elle coupe l'ensemble limite que nous voulons étudier.<sup>1</sup> L'application de premier retour est alors comprise comme l'application qui à un point  $\mathbf{M}$  de  $\Sigma$  fait correspondre le point  $\mathbf{M}'$ , première intersection avec  $\Sigma$  de la trajectoire obtenue par intégration du système dynamique de la trajectoire initialisée en  $\mathbf{M}$ , cf. 5.2:

$$\mathbf{M}' = \Phi(\mathbf{M}).$$

De cette façon le système dynamique initial de dimension  $d$  à temps continu est converti en un système en dimension  $d-1$  à temps discret, le numéro de l'intersection figurant le temps. Si l'existence et l'unicité des trajectoires est garantie pour tout temps, cette conversion se fait sans perte d'information, un point de la section définissant une orbite et une seule et donc un unique successeur  $\mathbf{M}'$  à tout point de départ  $\mathbf{M}$ . Une orbite du système originel est alors transformée en une suite d'intersections  $\mathbf{M}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  avec  $\Sigma$ , maintenant interprétées comme les itérés par  $\Phi$  d'une condition initiale  $\mathbf{M}_0$ .

## 5.2 Régime stationnaire des oscillateurs forcés

Restons un petit moment avec les oscillateurs forcés périodiquement et limitons nous au cas faiblement non-linéaire pour lequel on trouve encore "par continuité" un régime régulier mais qui va nous faire revenir sur la notion de résonance dans un contexte éminemment pratique. Le cas où les non-linéarités, plus fortes, provoquent l'apparition du chaos, sera examiné au chapitre suivant.

### 5.2.1 Résonance primaire et résonances secondaires

Concrètement, nous allons travailler sur l'exemple de l'oscillateur de Duffing de fréquence naturelle  $\omega_0 = 1$ , amorti mais forcé:

$$\frac{d^2}{dt^2} X + 2\mu \frac{d}{dt} X + X + \epsilon X^3 = F \cos(\omega t). \quad (5.1)$$

Dans la perspective d'un calcul de perturbation, nous allons supposer que, dans cette équation, tous les termes autres que  $\frac{d^2}{dt^2} X + X$  sont petits dans un sens qu'il va falloir préciser puisqu'il y a plusieurs termes en présence.

<sup>1</sup>On remarquera que dans le cas de la stroboscopie, le champ de vecteur dans l'espace étendu possède toujours une composante dans la direction de la variable supplémentaire  $U$ , de sorte que les trajectoires sont, par construction, transverses aux sections successives.

Commençons tout d'abord par une remarque préliminaire. Pour un problème linéaire inhomogène de la forme  $\frac{d^2}{dt^2}X + X = F \cos(\omega t)$ . La solution est la superposition d'une oscillation libre et d'une oscillation forcée. L'amplitude de la solution forcée<sup>2</sup>  $X^{(\text{nh})} = \alpha \cos(\omega t)$  est obtenue par substitution:  $\alpha = F/(1 - \omega^2)$ . Donc, en général,  $\alpha \sim \mathcal{O}(F)$  sauf si  $\Omega \approx 1$ . Naturellement, ce régime de réponse linéaire sous-entend que le forçage  $F$  est "petit" mais nous découvrons des difficultés potentielles si l'écart à la résonance est lui aussi "petit," car la réponse est alors grande et les non-linéarités risquent d'intervenir, c'est ce que l'on appelle un "problème de petits dénominateurs." Un important petit paramètre est donc le désaccord de fréquence  $\sigma = \omega - 1$ . Illustrons ces difficultés d'origine non-linéaire par un développement direct sur l'oscillateur de Duffing idéal. Pour cela, introduisons  $X = X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots$  dans (5.1) avec  $\mu = 0$ . Il vient:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_0 &= F \cos(\omega t), \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_1 &= -X_0^3. \end{aligned}$$

À l'ordre  $\epsilon^0$ , la solution est la superposition de la solution générale du problème homogène  $X^{(\text{h})} = a \cos(t + \beta)$  caractérisée par son amplitude  $a$  et sa phase  $\beta$ , et de la solution particulière du problème inhomogène trouvée précédemment. Calculons  $X_0^3$ :

$$\begin{aligned} X_0^3 &= [a \cos(t + \beta) + \alpha \cos(\omega t)]^3 \\ &= a^3 \cos^3(t + \beta) + 3a^2 \alpha \cos^2(t + \beta) \cos(\omega t) \\ &\quad + 3a \alpha^2 \cos(t + \beta) \cos^2(\omega t) + \alpha^3 \cos^3(\omega t). \end{aligned}$$

Développant les différents termes trigonométriques, on trouve comme pour le système non-forcé du chapitre précédent un terme séculaire en  $\cos(t + \beta)$  issu du terme en  $\cos^3(t + \beta)$  mais aussi différents autres termes qui introduisent des petits dénominateurs dans la solution  $X_1$ :  $\cos^2(t + \beta) \cos(\omega t)$  produit un terme en  $\cos(\omega t)$  dangereux pour  $\omega \approx 1$  (résonance "primaire"), et un terme en  $\cos((2 - \omega)t + 2\beta)$  qui contribuera de façon importante pour  $2 - \omega \approx -1$  soit  $\omega \approx 3$  (résonance "super-harmonique"), le terme en  $\cos((2 + \omega)t + 2\beta)$  n'étant pas dangereux; de son côté,  $\cos(t + \beta) \cos^2(\omega t)$  produit un terme séculaire  $\cos(t + \beta)$  et deux termes  $\cos((1 \pm 2\omega)t + \beta)$  qui généreront des petits dénominateurs si  $\omega \approx 0$ ; enfin le terme  $\cos^3(\omega t)$  se décomposant en  $\cos(\omega t)$  et  $\cos(3\omega t)$  devient dangereux si  $\omega \approx 1$  et  $3\omega \approx 1$ , ce qui ajoute  $\omega \approx 1/3$  à la série (résonance "sous-harmonique," i.e., la fréquence naturelle est harmonique de celle du forçage).

En plus de la résonance primaire, présente dès l'ordre  $\epsilon^0$ , par ce rapide examen du problème au premier ordre nous avons donc mis en évidence trois possibilités de résonance secondaire, pour  $\omega \approx 0, 1/3$  et  $3$ . Le problème des ordres de grandeur respectifs des différentes perturbations au problème de départ, l'oscillateur libre et idéal, ne se pose pas de la même façon dans chacune de ces, ce qui nous impose de les étudier séparément.

### 5.2.2 Voisinage de la résonance primaire $\omega \approx 1$

Les paramètres de contrôle du problème sont (i) la pulsation  $\omega$  que nous écrirons  $\omega = 1 + \sigma$  explicitant ainsi le désaccord de fréquence, (ii) l'intensité  $F$  du forçage, (iii) le coefficient de frottement  $2\mu$  et (iv) l'intensité des non-linéarités  $\epsilon$ . Pour mettre correctement le problème à l'échelle, considérons tout d'abord le terme de friction  $2\mu \frac{d}{dt}X$  et cherchons à quelle condition il faut prendre son rôle en compte. La réponse forcée de l'oscillateur, toujours en régime linéaire, est donnée par  $X^{(\text{nh})} = \alpha \cos(\omega t + \phi)$  avec

$$\alpha = \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 4\mu^2\omega^2}}, \quad \tan(\phi) = \frac{2\mu\omega}{\omega^2 - 1},$$

ce qui montre que le dénominateur de  $\alpha$  n'est petit que si  $\sigma = \omega - 1$  et  $\mu$  sont simultanément petits, c'est à dire lorsque l'oscillateur est faiblement amorti et légèrement désaccordé par rapport au forçage. La bande de fréquences où la friction est efficace est donc donnée par  $|\sigma| = \mathcal{O}(\mu)$ , ce qui conduit à  $\alpha \sim \mathcal{O}(F/\sigma)$ .

<sup>2</sup>"nh" est mis pour "non-homogène."

Les non-linéarités entrèrent en jeu au même ordre que le forçage si  $\alpha \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  et effectuons les changements  $\sigma \mapsto \epsilon\sigma$  et  $\mu \mapsto \epsilon\mu$ , où  $\epsilon$  est un petit paramètre formel de développement et  $\sigma$ ,  $\mu$  sont maintenant des quantités d'ordre unité. Alors  $\alpha \sim \mathcal{O}(F/\epsilon)$  et les non-linéarités ne se feront sentir sur la partie de solution induite par l'inhomogénéité que si  $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$  car si  $\alpha \ll 1$  leur effet sera négligeable. À l'inverse vouloir rendre compte du régime  $\alpha \gg 1$  par un calcul de perturbation n'est pas réaliste. Ceci implique pour  $F$  une mise à l'échelle identique à celle de  $\sigma$  et  $\mu$ , soit  $F \mapsto \epsilon F$ . Dans un développement de la solution en puissances de  $\epsilon$ , les non-linéarités interviendront au premier ordre si  $\epsilon \sim \epsilon$ , de sorte qu'il n'y a maintenant plus lieu de distinguer les deux petits paramètres (i.e.,  $\epsilon \mapsto \epsilon$ ). La mise à l'échelle appropriée à la résonance primaire conduit finalement à l'équation:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X = \epsilon[-2\mu\frac{d}{dt}X - X^3 + F \cos((1 + \sigma\epsilon)t)] \quad (5.2)$$

où  $\mu$ ,  $F$  et  $\sigma$  sont tous trois d'ordre unité. Cette équation rend compte du "télescopage" entre les contributions des termes séculaires et de la solution forcée en présence de frottement, télescopage dû au fait que, génériquement, la pulsation d'un oscillateur non-linéaire est fonction de l'amplitude alors que la réponse au forçage diverge à la résonance.

Nous allons chercher la solution par une méthode d'échelles multiples, une échelle rapide  $t_0 = t$  et une échelle lente  $t_1 = \epsilon t$  capable de guérir les maux dûs aux effets combinés du décalage en fréquence imposé par le forçage et de celui qui découle de l'effet d'amplitude. Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \partial_{t_0}(\cdot)\frac{d}{dt}t_0 + \partial_{t_1}(\cdot)\frac{d}{dt}t_1 = \partial_{t_0}(\cdot) + \epsilon\partial_{t_1}(\cdot).$$

D'autre part, dans le terme de forçage, nous voyons apparaître  $\omega t = (1 + \epsilon\sigma)t_0 = t_0 + \epsilon\sigma t_0 = t_0 + \sigma t_1$ . Posant  $X = X_0 + \epsilon X_1$ , nous nous limitons ici au premier ordre significatif en  $\epsilon$ . Il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}X &= (\partial_{t_0} + \epsilon\partial_{t_1})^2(X_0 + \epsilon X_1) \\ &= (\partial_{t_0}^2 + 2\epsilon\partial_{t_0}\partial_{t_1})(X_0 + \epsilon X_1) \\ &= \partial_{t_0}^2 X_0 + \epsilon(2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0 + \partial_{t_0}^2 X_1). \end{aligned}$$

Par report dans (5.2) et séparation des ordres en  $\epsilon$  nous obtenons

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_0 = 0, \quad (5.3)$$

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_1 = -2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0 - 2\mu\partial_{t_0}X_0 - X_0^3 + F \cos(\omega t). \quad (5.4)$$

Nous prendrons la solution de (5.3) sous forme complexe:

$$X_0 = [A(t_1) \exp(it_0) + \text{c.c.}].$$

Les deux premiers termes au membre de droite de (5.4) s'évaluent facilement pour donner:

$$(-2\partial_{t_0}\partial_{t_1} - 2\mu\partial_{t_0})X_0 = [-2i(\partial_{t_1} + \mu)A_0 \exp(it_0) + \text{c.c.}].$$

Le terme cubique produit ici:

$$-X_0^3 = -[A^3 \exp(3it_0) + 3A^2 A^* \exp(it_0) + 3A(A^*)^2 \exp(-it_0) + (A^*)^3 \exp(-3it_0)].$$

Le terme de forçage se développe sous la forme

$$F \cos(\omega t) = \frac{1}{2}F [\exp(i(t_0 + \sigma t_1)) + \text{c.c.}] = \frac{1}{2}F [\exp(it_0) \exp(i\sigma t_1) + \text{c.c.}].$$

Pour que l'on puisse construire la solution par un développement uniformément valide en  $t$ , il faut donc que le membre de droite de (5.4) ne contienne pas de termes résonnants susceptibles d'engendrer des termes séculaires. Ici, il s'agit d'identifier et de rassembler tous les termes en  $\exp(it_0)$  et d'annuler leur coefficient

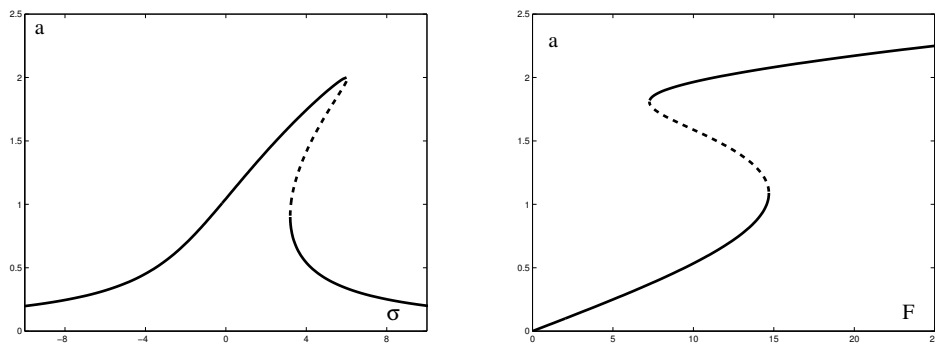


Figure 5.3: Réponse  $a$  de l'oscillateur de Duffing forcé périodiquement. À gauche: balayage en fréquence de forçage  $\sigma$  pour  $\mu = 1$  et  $F = 4$ . À droite: balayage en amplitude de forçage  $F$  pour  $\mu = 1$  et  $\sigma = 5$ . Les solutions stables (resp. instables) sont indiquées en trait continu (resp. interrompus). Un cycle de balayage approprié fait décrire au système des cycles d'hystérésis au cours desquels il saute d'une solution de grande amplitude à une solution de petite amplitude où l'inverse. Sur (a), on notera le sens du décalage des courbes vers les hautes fréquences quand l'amplitude augmente, traduction de la relation entre amplitude et pulsation pour l'oscillateur libre.

d'ensemble.<sup>3</sup> Le seul point à noter concerne la contribution du terme  $\exp(i\sigma t_1)$  que nous devons considérer comme constant à l'échelle de  $t_0$ . Il vient donc:

$$2i\partial_{t_1}A + 2\mu iA + 3A^2A^* - \frac{1}{2}F \exp(i\sigma t) = 0 \quad (5.5)$$

écrivait  $A = a \exp(i\beta)$ , avec  $\partial_{t_1}A = (\partial_{t_1}a) \exp(i\beta) + ia(\partial_{t_1}\beta) \exp(i\beta)$ , mettant  $\exp(i\beta)$  en facteur, séparant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons après simplification:

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}a + \mu a - \frac{1}{4}F \sin(\sigma t_1 - \beta) &= 0, \\ a\partial_{t_1}\beta - \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{4}F \cos(\sigma t_1 - \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Sous cette forme, l'équation (5.5) se présente donc comme un système dynamique bidimensionnel apparemment non-autonome. Mais effectuant le changement de variable  $\gamma = \sigma t_1 - \beta$  qui implique  $\partial_{t_1}\beta = \sigma - \partial_{t_1}\gamma$  nous en obtenons la version autonome:

$$a\partial_{t_1}\gamma = a\sigma - \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{4}F \cos(\gamma), \quad (5.6)$$

$$\partial_{t_1}a = -\mu a + \frac{1}{4}F \sin(\gamma). \quad (5.7)$$

Ce système décrit complètement la solution du problème non-linéaire forcé amorti au premier ordre significatif. Cette solution se présente comme une oscillation rapide,  $X_0 \sim \exp(it_0)$  lentement modulée par une enveloppe  $A(t_1)$  gouvernée par (5.6–5.7) que l'on peut même corriger par  $X_1$ , lui-même calculable puisque l'alternative de Fredholm n'a laissé que des termes non-résonnants. Le système (5.6–5.7) décrit aussi bien le régime transitoire partant d'une condition initiale donnée que comportement asymptotique qui nous intéresse plus particulièrement. Le régime stationnaire est gouverné par les points fixes de (5.6–5.7), soit

$$\mu a - \frac{1}{4}F \sin(\gamma) = 0, \quad a\sigma - \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{4}F \cos(\gamma) = 0,$$

ou, après élimination de  $\gamma$ :

$$\mu^2 a^2 + (a\sigma - \frac{3}{2}a^3)^2 = \frac{1}{16}F^2. \quad (5.8)$$

Cette équation, cubique en  $a^2$  détermine  $a$  à  $\sigma$  et  $F$  fixés. On peut fixer  $F$  et varier  $\sigma$  ou l'inverse. Dans un cas comme dans l'autre, il existe des plages de paramètres sur lesquelles l'équation (5.8) a plusieurs solutions de sorte que l'on peut faire décrire au système des cycles d'hystérésis, cf. Fig. 5.3.

<sup>3</sup>La condition afférent à  $\exp(-it_0)$  en est simplement la complexe conjuguée.

### 5.2.3 Résonances secondaires

Les résonances  $\omega \approx 0, 1/3$  et  $3$  n'induisent pas de petit dénominateur à l'ordre le plus bas.  $F$  n'a donc pas à être mis à l'échelle de  $\varepsilon$ . À cela près, la stratégie est identique. Une méthode multi-échelle est développée avec  $t_0 = t, t_1 = \varepsilon t$  et l'écart à la résonance étant mesuré par un paramètre  $\sigma$ , i.e.,  $\omega = \sigma\varepsilon, \omega = 1/3 + \sigma\varepsilon$  et  $\omega = 3 + \sigma\varepsilon$  selon le cas considéré. Commençons par le dernier cité. La fréquence naturelle  $\omega_0 = 1$  est alors le sous-harmonique d'ordre  $1/3$  de la fréquence imposée  $\omega$ . Le développement en perturbation de (5.1) conduit à un problème non-homogène dès l'ordre  $\varepsilon^0$ :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)X_0 = F \cos(\omega t_0),$$

dont la solution s'écrit

$$X_0 = \left[ A(t_1) \exp(it_0) + \Lambda \exp(i\omega t_0) + \text{c.c.} \right], \quad \text{avec } \Lambda = F/2(1 - \omega^2).$$

Travaillant comme précédemment, on développe l'équation à l'ordre  $\varepsilon^1$

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_1 = -2\partial_{t_0}\partial_{t_1}X_0 - 2\mu\partial_{t_0}X_0 - X_0^3,$$

la seule difficulté étant de bien tenir compte des termes issus de  $\Lambda \exp(i\omega t_0)$ . Considérons par exemple le terme  $3(A^*)^2\Lambda \exp(i(\omega - 2)t_0)$  où, dans l'argument de l'exponentielle on voit apparaître  $(\omega - 2)t_0 = (3 + \sigma\varepsilon - 2)t_0 = (1 + \sigma\varepsilon)t_0 = t_0 + \sigma\varepsilon t_0 = t_0 + \sigma t_1$ . Après réinsertion dans l'exponentielle, on trouve  $3(A^*)^2\Lambda \exp(it_0) \exp(i\sigma t_1)$  où  $\exp(i\sigma t_1)$ , lentement variable, doit être considéré comme constant lors de l'identification des termes résonnants. L'alternative de Fredholm conduit alors à l'équation:

$$2i\partial_{t_1}A + 2i\mu A + 3A^2A^* + 6A\Lambda^2 + 3(A^*)^2\Lambda \exp(i\sigma t_1) = 0.$$

Par un traitement identique au précédent, posant  $A = a \exp(i\beta)$ , nous trouvons

$$2(\partial_{t_1}a + ia\partial_{t_1}\beta) + 2i\mu a + 3a^3 + 6a\Lambda^2 + 3a^2\Lambda \exp(i(\sigma t_1 - 3\beta)) = 0,$$

puis avec  $\gamma = \sigma - 3\beta$ , le système dynamique bidimensionnel

$$\begin{aligned} 2\partial_{t_1}a &= -2\mu a - 3a^2\Lambda \sin(\gamma), \\ 2a\partial_{t_1}\gamma &= 2a\sigma - 9a^3 - 18a\Lambda^2 - 9a^2\Lambda \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Le régime stationnaire, associé aux points fixes de ce système, est gouverné par

$$(9a\Lambda)^2 = (6\mu)^2 + (2\sigma - 9a^2 - 18\Lambda^2)^2,$$

trinôme en  $a^2$  à résoudre fonction de  $\sigma$  et de  $\Lambda = F/2(1 - \omega^2) \approx F/2(1 - 3^2) = -F/16$ .

Le calcul pour la résonance  $\omega = 1/3$ , c'est à dire lorsque la fréquence naturelle  $\omega_0 = 1$  est l'harmonique 3 du forçage, est entièrement parallèle. On arrive à la relation amplitude-fréquence

$$4\mu^2 a^2 + (2\sigma - 6\Lambda^2 - 3a^2)^2 4a^2 = \Lambda^6,$$

très comparable à celle de la résonance primaire avec la même possibilité de racines multiples et de cycles d'hystérésis.

Il ne reste plus qu'à examiner le cas d'un forçage de très basse fréquence  $\omega \approx 0$ . Posant  $\omega = \sigma\varepsilon$  et toujours  $t_0 = t, t_1 = \varepsilon t_0$  nous avons  $\cos(\omega t) \equiv \cos(\sigma t_1)$ , et donc à l'ordre  $\varepsilon^0$

$$(\partial_{t_0}^2 + 1)X_0 = F \cos(\sigma t_1),$$

admettant pour solution

$$X_0 = \left[ A(t_1) \exp(it_0) + \text{c.c.} \right] + F \cos(\sigma t_1). \quad (5.9)$$

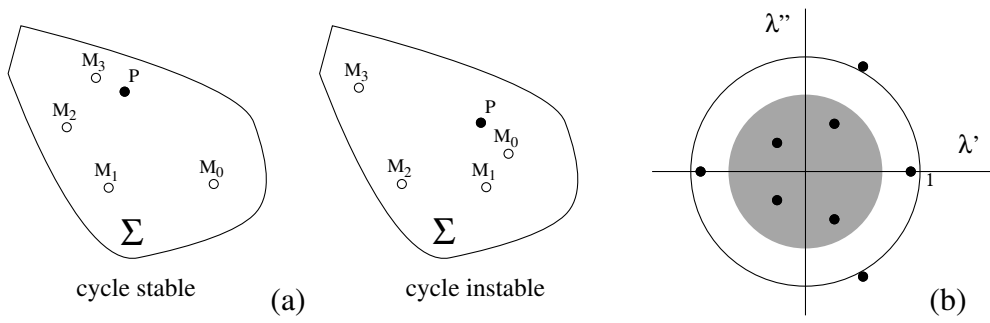


Figure 5.4: (a) évolution des itérés de  $M_0$  par  $\Lambda$  au voisinage du point fixe  $P$  trace du cycle limite sur  $\Sigma$ . (b) Spectre de l'opérateur  $\Lambda$  obtenu par linéarisation de  $\Phi$  au voisinage de  $P$ .

Les termes résonnants issus de  $X_0^3$  sont faciles à identifier puisque  $\cos(\sigma t_1)$  est considéré comme constant à cet ordre:  $-3F^2 A \cos^2(\sigma t_1) \exp(it_0)$  et  $-3A^2 A^* \exp(it_0)$ . L'alternative de Fredholm conduit donc à:

$$2i\partial_{t_1} A + 2i\mu A + 3A^2 A^* + 3F^2 A \cos^2(\sigma t_1) = 0.$$

Posant toujours  $A = a \exp(i\beta)$  nous trouvons maintenant

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} a &= -\mu a, \\ 2a\partial_{t_1} \beta &= 3a^3 + 3F^2 a \cos^2(\sigma t_1). \end{aligned}$$

La première équation est découplée de la seconde et décrit la relaxation vers 0 de l'amplitude sous l'effet du frottement. Excepté durant le transitoire, la solution (5.9) se résume donc à  $X_0 = F \cos(\sigma t_1) = F \cos(\omega t)$ , i.e., à un suivi adiabatique du forçage.

### 5.3 Stabilité d'un cycle limite

Considérons un système autonome admettant un cycle limite (dépendance temporelle intrinsèque introduite, e.g., par une bifurcation de Hopf, cf. chapitre 4). Jusqu'à présent, nous avons supposé le système réduit à 2 dimensions, de sorte que le cycle limite  $\Gamma$  était tracé sur une surface  $S$  bidimensionnelle (la variété centrale) et, restreinte à cette surface, l'analyse de stabilité conduisait à une itération pour la coordonnée curviligne prise le long d'une courbe que nous avons notée  $\Sigma$  et que nous appelons maintenant  $\mathcal{C}$ . Restaurant maintenant le contexte  $d$ -dimensionnel nous sommes amenés à considérer  $\mathcal{C}$  comme la trace sur  $S$  d'une surface  $\Sigma$  de dimension  $d-1$  transverse à  $\Gamma$ . Toute trajectoire initialisée sur  $\Gamma$  intersecte  $\Sigma$  en  $P$  périodiquement.  $P$  est donc un point fixe de  $\Phi$ . Une trajectoire initialisée près de  $\Gamma$  produit des intersections  $M_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , voisines de  $P$  qui vont être gouvernées, au moins temporairement, par la linéarisation  $\Lambda$  de  $\Phi$  autour de  $P$ .

Comme nous l'avons déjà noté au chapitre 2 (fin de §2.2.3) lors de la présentation des notions de stabilité locale pour un système dynamique à temps discret, l'évolution de la distance entre  $P$  et les itérés successifs d'une condition initiale  $M_0$  est contrôlée par le spectre du linéarisé  $\Lambda$  de  $\Phi$  en  $P$ . Les valeurs propres  $\lambda_j$ , réelles ou complexes, peuvent être ordonnées par valeurs décroissantes de leur module.<sup>4</sup> Le point fixe est alors instable si  $\sup_j |\lambda_j| > 1$  et stable si  $\sup_j |\lambda_j| < 1$  (marginal si  $\sup_j |\lambda_j| = 1$ ).

L'opérateur  $\Lambda$  est ici représenté par une matrice  $(d-1) \times (d-1)$  et possède  $d-1$  valeurs propres réelles ou complexes  $\{\lambda_j, j = 1, \dots, d-1\}$ . Le cycle limite est donc stable si toutes les valeurs propres sont à l'intérieur du disque unité (strictement) et instable si au moins une valeur propre se trouve à l'extérieur. On assiste à une bifurcation lorsqu'au moins une valeur propre traverse le cercle unité quand les paramètres de contrôle varient.

<sup>4</sup>Comme dans le cas du temps continu, on peut naturellement procéder à une étude complète du problème linéarisé, i.e., déterminer les directions propres, etc.



Le cas général le plus simple est celui d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées non dégénérée, donc telles que  $\lambda = \exp(\pm 2\pi i \alpha)$  à la bifurcation. écrire ceci suppose  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , i.e.,  $\lambda \neq \pm 1$ , deux cas particuliers importants où le problème se ramène à une itération réelle.

Dans ce qui suit, nous supposons que les tous modes stables, ceux avec  $|\lambda_i| \ll 1$ , ont été éliminés par une procédure formellement identique à celle du temps continu. De la sorte nous pouvons passer de  $\Phi$  à sa restriction sur la variété centrale associée aux valeurs propres presque marginales et c'est cette itération réduite que nous allons devoir mettre sous forme normale par élimination de tous les termes non-résonnants.

### 5.3.1 Forme normale dans le cas complexe, résonances

Lorsque  $\lambda$  est complexe, il est préférable d'écrire l'itération bidimensionnelle en complexes

$$Z_{k+1} = \mathcal{Z}(Z_k) = \lambda Z_k + G(Z_k, Z_k^*).$$

Les termes non-linéaires, rassemblés sous la notation  $G(Z, Z^*)$ , sont *a priori* donnés sous forme d'un développement en série, somme de polynômes homogènes de degré 2, 3, ... :

$$\mathcal{Z} = \lambda Z + \sum_{m \geq 2} \sum_{0 \leq j \leq m} g_{m,j} Z^{m-j} (Z^*)^j. \quad (5.10)$$

La forme normale est cherchée à l'aide d'un changement de variable tangent à l'identité, lui aussi déterminé par un développement en série

$$Z = Z' + \sum_{m \geq 2} \sum_{0 \leq j \leq m} c_{m,j} (Z')^{m-j} (Z'^*)^j. \quad (5.11)$$

Par un choix approprié des  $c_{m,j}$  on cherche à mettre (5.10) sous la forme

$$\mathcal{Z}' = \lambda Z' + \sum_{m \geq 2} \sum_{0 \leq j \leq m} g'_{m,j} (Z')^{m-j} (Z'^*)^j$$

ne contenant que les  $g'_{m,j}$  impossibles à éliminer (les termes résonnants).

Avant de travailler séquentiellement en fixant  $m = 2$ , puis  $m = 3$ , etc., considérons le cas général et supposons le problème résolu à l'ordre  $m - 1$ . Par hypothèse, la forme normale trouvée à cet ordre, notée  $F_{m-1}(Z, Z^*)$ , ne contient que les monômes résonnants de degré inférieur ou égal à  $m - 1$ .<sup>5</sup> Partant donc de

$$\mathcal{Z} = \lambda Z + F_{m-1}(Z, Z^*) + \sum_{0 \leq j \leq m} g_{m,j} Z^{m-j} (Z^*)^j,$$

nous obtenons par substitution

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}' + \sum_{0 \leq j \leq m} c_{m,j} (\mathcal{Z}')^{m-j} (\mathcal{Z}'^*)^j \\ &= \lambda \left( Z' + \sum_{0 \leq j \leq m} c_{m,j} (Z')^{m-j} (Z'^*)^j \right) + F_{m-1}(Z', Z'^*) + \sum_{0 \leq j \leq m} g_{m,j} (Z')^{m-j} (Z'^*)^j. \end{aligned}$$

Pour l'évaluation des monômes au membre de gauche, il suffit de garder  $\mathcal{Z}' \simeq \lambda Z'$  et  $\mathcal{Z}'^* \simeq \lambda^* Z'^*$ . Il vient donc

$$(\mathcal{Z}')^{m-j} (\mathcal{Z}'^*)^j = (\lambda Z')^{m-j} (\lambda^* Z'^*)^j = (\lambda)^{m-j} (\lambda^*)^j (Z')^{m-j} (Z'^*)^j.$$

Considérons ensuite un monôme particulier de  $F_{m-1}(Z, Z^*)$ , de la forme  $(Z)^{m_1} (Z^*)^{m_2}$  avec  $m_1 + m_2 \leq m - 1$ . Il vient par substitution:

$$\begin{aligned} & (Z' + \mathcal{O}(|Z'|^m))^{m_1} (Z'^* + \mathcal{O}(|Z'|^m))^{m_2} \\ &= ((Z')^{m_1} + m_1 (Z')^{m_1-1} \mathcal{O}(|Z'|^m)) ((Z'^*)^{m_2} + m_2 (Z'^*)^{m_2-1} \mathcal{O}(|Z'|^m)) \\ &= (Z')^{m_1} (Z'^*)^{m_2} + \mathcal{O}(|Z'|^{m+m_1+m_2-1}), \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Pour  $m = 2$  on a bien entendu  $F_{m-1} \equiv 0$ .

ce qui montre (i) que chaque monôme de  $F_{m-1}$  est préservé et (ii) que les termes additionnels sont  $\mathcal{O}(|Z'|^{m+m_1+m_2-1})$ , donc au moins  $\mathcal{O}(|Z'|^{m+1})$  puisque  $m_1 + m_2 \geq 2$ ,<sup>6</sup> de sorte que :

$$F_{m-1}(Z, Z^*) = F_{m-1}(Z', Z'^*) + \mathcal{O}(|Z'|^{m+1}).$$

Le coefficient du terme de degré  $m$  est donc donné par

$$g'_{m,j} = g_{m,j} + \left( \lambda - \lambda^{m-j} (\lambda^*)^j \right) c_{m,j},$$

et nous serons capables de trouver les  $c_{m,j}$  permettant d'annuler  $g'_{m,j}$  si le système ne satisfait pas la *condition de résonance* :

$$\lambda = \lambda^{m-j} (\lambda^*)^j.$$

Tenant compte de la condition de marginalité  $|\lambda| = 1$ , soit  $\lambda^* = \lambda^{-1}$ , nous obtenons

$$\lambda^{m-2j-1} = 1.$$

Un terme vérifiant  $m = 2j + 1$  est donc toujours résonnant quelle que soit la valeur propre  $\lambda$ , de sorte que l'on ne pourra jamais éliminer des termes de la forme  $|Z|^{2j}Z$ , à commencer par le terme d'ordre le plus bas, pour  $j = 1$ , soit  $|Z|^2Z$ , présent dès  $m = 3$ .

Posons  $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ . Chercher les autres monômes résonnants revient à chercher les autres solutions non-triviales de la condition de résonance (5.3.1). Si  $\lambda$  est racine  $q$ -ème de l'unité, i.e.,  $\lambda^q = 1$ , alors  $2\pi i q\alpha = 2\pi i p$  avec  $p$  entier et donc  $\alpha = p/q$  rationnel irréductible, la condition de résonance peut être satisfaite par de nombreuses combinaisons de  $m$  et  $j$ . On peut en effet réaliser  $\lambda^{m-2j-1} = 1 = \lambda^{qk}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , positif ou négatif. La combinaison  $m = 2j + 1$  identifiée plus haut correspond à  $k = 0$ . C'est évidemment la seule si  $\alpha$  est irrationnel ( $q \rightarrow \infty$ ) mais sinon on trouve

$$m = qk + 2j + 1 \tag{5.12}$$

avec  $m \geq 2$  et  $0 \leq j \leq m$  puisque les monômes considérés font partie de la forme normale à l'ordre  $m$ . Les paires  $(j, m)$  correspondant à des monômes résonnant sont indiquées sur la Fig. 5.5 pour  $q = 3$ . Elles s'alignent sur des droites parallèles de pente 2 et indexées par la valeur de  $k$ . Les valeurs interdites par les inégalités ci-dessus sont masquées. Le terme le plus "dangereux" est celui qui intervient à l'ordre le plus bas. Généralisant le cas  $q = 3$ , on observe qu'il est obtenu pour  $k = -1$ , donc qu'il correspond à  $m_{\min} = j = q - 1$  ce qui donne un terme  $\propto (Z^*)^{q-1}$ .

Passons maintenant rapidement les différents cas résonnants en revue en augmentant  $q$  progressivement. Pour  $q = 1$ , c'est à dire en fait  $\lambda = 1$  la résonance intervient dès l'ordre 2 et l'on ne peut rien éliminer. Dans ce cas, on peut se restreindre à une variable réelle (avec  $Z^{m-j}(Z^*)^j \mapsto X^m$ ) et écrire

$$X_{k+1} = X_k + g_2(X_k)^2 + g_3(X_k)^3 + \dots$$

Lorsque  $q = 2$ , on a  $\alpha = 1/2$  et  $\lambda = \exp(i\pi) = -1$ . On peut donc encore rester avec une variable réelle. La condition de résonance permet alors en principe de ne garder que les termes d'ordre impair :

$$X_{k+1} = -X_k + g_3X_k^3 + g_5X_k^5 + \dots$$

Les choses moins triviales commencent avec  $q = 3$ , cas où l'on ne peut plus éviter de travailler en complexe. Avec  $\alpha = p/3$  ( $p = 1$  ou  $2$ ) la forme normale  $\mathcal{Z}(Z)$  de l'itération  $Z_{k+1} = \mathcal{Z}(Z_k)$  s'écrit

$$\mathcal{Z}(Z) = \exp(2\pi i p/3)Z + g_2(Z^*)^2 + g_3|Z|^2Z + (g_4Z^3 + g'_4(Z^*)^3)Z + \mathcal{O}(|Z|^5).$$

De la même façon, pour  $q = 4$  avec  $\alpha = p/4$  ( $p = 1$  ou  $3$ ) les premières non-linéarités inévitables s'introduisent à l'ordre 3. On trouve en effet deux termes cubiques, le terme trivial  $|Z|^2Z$  et la contribution non-triviale  $(Z^*)^3$ , et pas de terme résonnant d'ordre 4. La forme normale s'écrit donc

$$\mathcal{Z}(Z) = \lambda Z + g_3|Z|^2Z + g'_3(Z^*)^3 + \mathcal{O}(|Z|^5).$$

---

<sup>6</sup>Il faut cependant en garder la trace pour les calculs aux ordres suivants.

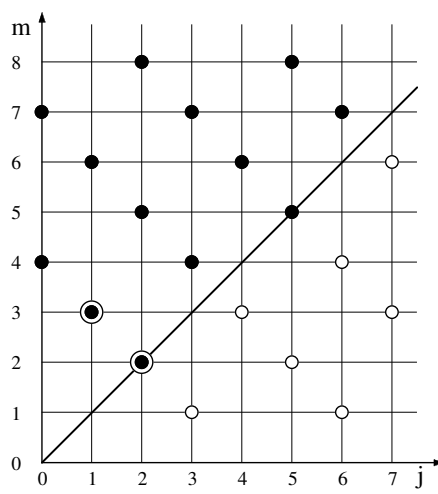


Figure 5.5: Termes résonnants issus de la condition  $m = 2j + 1 + kq$  avec  $m \geq q$  pour  $q = 3$ . Le terme le plus “dangereux” ( $j = 2$ ,  $m = 2$ ) est obtenu pour  $k = -1$ , le premier terme trivial ( $j = 1$ ,  $m = 3$ ) pour  $k = 0$ .

Enfin pour  $q = 5$  le premier terme non-trivial est d’ordre  $q - 1 = 4$ , supérieur à l’ordre du premier terme. On a

$$\mathcal{Z}(Z) = \lambda Z + g_3 |Z|^2 Z + g_4 (Z^*)^4 + \mathcal{O}(|Z|^5).$$

Cette succession d’exemples montre que plus  $q$  augmente plus les termes non-triviaux interviennent à un ordre élevé. À la limite du cas *non-résonnant* ( $\lambda^q \neq 1$  pour tout  $q$ ), on ne trouve plus dans le développement que la seule série des termes triviaux d’ordre impair.

$$\mathcal{Z}(Z) = \lambda Z + \sum_{j=1}^{\infty} g_j |Z|^{2j} Z.$$

Une classification des résonances s’établit à partir de la remarque selon laquelle le comportement non-linéaire de la forme normale correspondante est ou non contrôlé par le terme trivial. Pour  $q \geq 5$  la résonance est qualifiée de *faible*. Les premiers termes non-triviaux sont en effet toujours d’ordre supérieur au terme trivial, de sorte qu’on attend pas une dynamique qualitativement très différente de celle décrite par la forme normale tronquée

$$\mathcal{Z}(Z) = \lambda Z + g_3 |Z|^2 Z.$$

Au contraire, pour  $q \leq 4$  le terme non-trivial de la forme normale intervient au même ordre ou à un ordre plus faible que celui du terme trivial et ne peut donc être négligé. La résonance est alors dite *forte*.

## 5.4 Bifurcation d’un cycle limite

### 5.4.1 Bifurcation de Hopf

Considérons donc la bifurcation d’un cycle limite par une paire de valeurs propres complexes ( $\lambda = \exp(2\pi i \alpha_0), \lambda^*$ ). Génériquement,  $\lambda$  est non-résonnant et  $\alpha_0$  irrationnel. Nous supposons que  $\alpha_0$  est “très” irrationnel,<sup>7</sup> c’est à dire “loin” d’un rationnel de dénominateur inférieur ou égal à 4. La forme normale à considérer s’écrit donc l’ordre le plus bas près du seuil:

$$Z_{k+1} = \lambda Z_k - g |Z_k|^2 Z_k. \quad (5.13)$$

<sup>7</sup>Cette notion se concrétise à l’aide du développement en fractions continues du nombre:  $x = n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + 1/\dots))$  avec  $n_j \in \mathbb{N}$ . Un rationnel est un nombre dont le développement s’arrête au delà d’un certain ordre  $j$ . Pour un irrationnel, le développement est illimité. Dire que le développement s’arrête à l’ordre  $j$  équivaut à dire  $n_{j+1} = \infty$ . Le développement d’un irrationnel quelconque proche d’un rationnel dont le développement s’est arrêté à l’ordre  $j$  est tel que  $n_{j+1} \gg 1$ . On peut fabriquer des nombres “très” irrationnels en imposant que leur développement en fraction continue n’ait jamais de termes  $n_j$  grands. C’est le cas du nombre d’or  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \simeq 0,618$ , racine de l’équation  $1/x = 1 + x$ , pour lequel  $n_j = 1$  pour tout  $j$ .

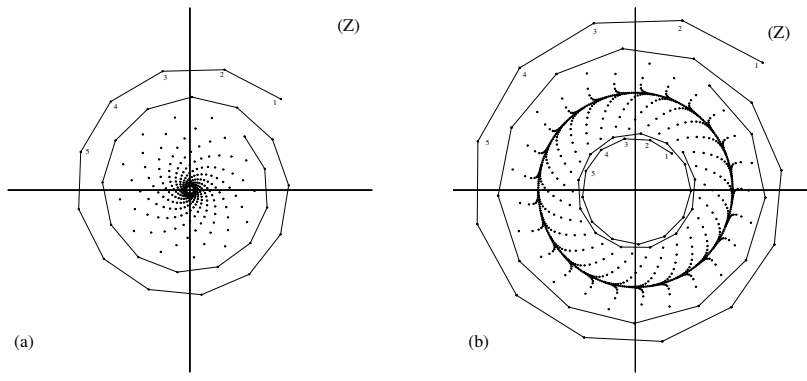


Figure 5.6 : Bifurcation de Hopf pour une application. (a) Convergence géométrique vers l'origine en dessous du seuil. (b) Apparition d'un cercle invariant stable pour  $r > 0$ . Le tore invariant issu de la bifurcation est le produit cartésien de deux cercles: le cercle azimutal correspondant au cycle limite qui s'est déstabilisé et le cercle méridien qui rend compte de la périodicité introduite par le nouveau mode d'instabilité.

Pour rendre compte du voisinage du point critique, nous supposons simplement  $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$  avec  $\alpha$  complexe proche de  $\alpha_0$ , i.e.,  $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$  avec  $\delta\alpha = \alpha' + i\alpha'' = \mathcal{O}(r)$ . La partie réelle  $\alpha'(r)$  de  $\delta\alpha$  rend compte du changement de fréquence et la partie imaginaire  $i\alpha''(r)$  de la variation du module  $|\exp(2\pi i\alpha)| = \exp(-2\pi\alpha'') \sim (1 - 2\pi\alpha'')$ . Pour exprimer le fait que les valeurs propres traversent le cercle unité nous prendrons simplement  $\alpha'' \propto r$ , soit par une mise à l'échelle convenable  $|\lambda| = 1 + r$ . De (5.13), posant  $Z = \rho \exp(2\pi i\theta)$  nous obtenons

$$\rho_{k+1}^2 = |\lambda|^2 \rho_k^2 - (\lambda g^* + \lambda^* g) \rho_k^4 + \mathcal{O}(\rho_k^6).$$

Notant  $(\lambda g^* + \lambda^* g) = 2\tilde{g}$ , et remarquant que  $|\lambda|^2 \simeq 1 + 2r$ , nous arrivons à l'équation de point fixe

$$\rho_*^2 = (1 + 2r)\rho_*^2 - 2\tilde{g}\rho_*^4 \quad (5.14)$$

qui possède en plus de la solution triviale  $\rho_* = 0$ , stable pour  $r < 0$  et instable pour  $r > 0$ , la solution non-triviale  $\rho_* = \sqrt{r/\tilde{g}}$ . Un calcul parallèle à celui que nous avons déjà fait montre que pour  $\tilde{g} > 0$  (resp.  $\tilde{g} < 0$ ) la bifurcation est *super-critique*, (resp. *sous-critique*),  $\rho_*$  existant de façon stable (resp. instable) pour  $r > 0$  (resp.  $r < 0$ ). Ce cas est illustré sur la Fig. 5.6.

En régime asymptotique, la trajectoire rejoint un cercle invariant de rayon  $\rho_*$  et tourne sur ce cercle à vitesse constante. Le taux de rotation est obtenu en considérant l'évolution de  $\theta$  après l'extinction du transitoire. La substitution de  $\rho_*$  dans (5.13) conduit à

$$\exp(2\pi i\theta_{n+1}) = C \exp(2\pi i\theta_n)$$

où  $C$  constante complexe de module 1 obtenue par identification. écrivant cette constante sous la forme  $C = \exp(2\pi i\alpha_*)$  on trouve  $\alpha_* = \alpha_0 + \tilde{\alpha}$  où  $\tilde{\alpha} \sim \mathcal{O}(r)$  incorpore une contribution du terme linéaire (changement de fréquence avec  $r$ ) et une contribution des non-linéarités ( $\tilde{g}\rho_*^2 \sim r$ ). L'évolution de  $\theta$  est alors simplement donnée par

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_*. \quad (5.15)$$

L'angle  $\alpha_0$  a été supposé irrationnel mais quand  $r$  varie,  $\alpha_*$  prend des valeurs irrationnelles ou rationnelles. Quand  $\alpha_*$  est irrationnel,  $\theta$  balaie le cercle unité uniformément. Revenant au système à temps continu dont l'itération décrit la section de Poincaré, nous comprenons que les intersections successives de l'orbite avec la surface de section parcourent régulièrement le cercle de rayon  $\rho_*$ . Autrement dit, la trajectoire s'enroule sur un tore bidimensionnel  $\mathbb{T}^2$  de section méridienne le cercle de rayon  $\rho_*$  entourant le cycle limite qui bifurque (ce tore est stable si la bifurcation est super-critique). Physiquement cela correspond à un mouvement *quasi-périodique* à deux fréquences, les observables étant des fonctions bipériodiques du temps:  $f(\omega t + \phi, \omega' t + \phi)$ ,

où  $f$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  en chacun de ses arguments,  $\omega$  est la pulsation du cycle limite et  $\omega' = \alpha_*\omega$  la seconde pulsation.

Si  $\alpha_*$  prend une valeur rationnelle mais “loin” d’un rationnel (cf. Note 7) de dénominateur plus petit que 5 la situation n’est pas fondamentalement changée car l’itération (5.14) qui gouverne le module n’est pas perturbée à l’ordre où nous nous plaçons. L’attracteur est alors une trajectoire fermée tracée sur le tore et le système fait  $q$  tours le long du cycle pendant qu’il en fait  $p$  dans la direction méridienne. Dans la limite où l’intensité des non-linéarités est infinitésimale, la rotation est effectivement donnée par  $\alpha_*$  qui varie régulièrement avec le paramètre de contrôle  $r$ . Les régimes quasi-périodiques se développent sauf sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de  $r$  pour lequel le comportement est périodique. La situation change dès que les non-linéarités acquièrent un niveau fini en raison du phénomène d’accrochage que nous examinons maintenant.

### 5.4.2 Résonance, quasi-périodicité et accrochages

Dans la perspective où l’on ne dispose que d’un paramètre de contrôle, celui-ci gouverne l’ensemble du comportement au voisinage du seuil, distance au cercle unité et angle de sortie des valeurs propres. Afin de bien comprendre ce qui se passe, il est préférable de supposer que l’on peut déployer la dynamique en contrôlant séparément les deux facettes du problème, intensité des non-linéarités et pulsation secondaire. En fait, la relation (5.15) ne rend pas compte du fait que  $\alpha_0$  peut être proche d’un rationnel. De plus, partir de (5.13) ne fait pas de différence entre un  $\alpha_0$  “très” irrationnel et un  $\alpha_0$  proche d’un rationnel de dénominateur plus grand que 4. Si cela reste légitime du point de vue du module, il n’en va pas de même pour la phase dont la dynamique doit être corrigée par des termes qui décriront la proximité de la résonance. D’un point de vue général, on peut donc supposer que le module n’est pas un degré de liberté à part entière mais au contraire reste esclave de la phase pour laquelle il faut écrire une itération généralisant (5.15):

$$\theta_{k+1} = g_{\alpha,\kappa}(\theta_k) = \theta_k + f_{\alpha,\kappa}(\theta_k) \quad (5.16)$$

où  $\alpha$  est taux de rotation nominal et  $\kappa$  mesure des non-linéarités.<sup>8</sup> La fonction  $f_{\alpha,\kappa}(\theta)$  doit clairement être périodique en  $\theta$  de période 1 car  $2\pi\theta$  est une variable circulaire. À la suite d’Arnold, nous prendrons simplement

$$\theta_{k+1} = g_A(\theta_k) = \theta_k + \alpha - \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi\theta_k). \quad (5.17)$$

Nous sommes *a priori* intéressés par le voisinage faiblement non-linéaire ( $\kappa \ll 1$ ) d’une résonance faible  $\alpha \sim p/q$  avec  $q \geq 5$ , afin de garantir la robustesse de l’évolution du module. Cependant, (5.17) reste valide *en tant que modèle* dans tout l’intervalle  $\alpha \in [0, 1]$  pourvu que  $\kappa \leq 1$ . En effet, si  $\kappa > 1$ , l’application (5.17) du cercle unité (sphère  $\mathbb{S}^1$ ) sur lui-même n’est plus inversible et il n’est plus légitime de modéliser l’application de premier retour par une itération sur l’angle seul, il faut impérativement réintroduire le module (voir le scénario de transition vers le chaos par désintégration du tore au Ch. 6).

Pour déterminer la nature du régime asymptotique, on va définir un taux de rotation moyen appelé *nombre de rotation*, moyenne temporelle des incréments d’angle  $\theta_{k+1} - \theta_k$ , soit

$$\hat{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} (\theta_{k'+1} - \theta_{k'}), \quad (5.18)$$

une valeur de  $\hat{\alpha}$  rationnelle (resp. irrationnelle) indiquant un régime périodique (resp. quasi-périodique).

Chaque valeur de  $\alpha = p/q$  est à l’origine d’une *langue d’accrochage*, région de l’espace des paramètres  $(\alpha, \kappa)$  où  $\hat{\alpha}$  reste accroché à la valeur  $p/q$ . Le mécanisme d’accrochage est lié à la persistance des points périodiques en présence de perturbations dans le plan  $(\alpha, \kappa)$ . Considérons par exemple le cas le plus facile de la langue associée à  $\alpha = 0$ . La Fig. 5.7 illustre le phénomène. Lorsqu’on varie  $\alpha$  et  $\kappa$ , on déforme le graphe de  $\theta \mapsto \theta + (\kappa/2\pi) \sin(2\pi\theta)$ . Le régime périodique (ici de période 1) correspond au point fixe stable de

<sup>8</sup>Dans toute expérience concrète fonction d’un seul paramètre de contrôle, on aurait donc  $\alpha = \alpha(r)$  et  $\kappa = \kappa(r)$ , définissant un certain chemin dans l’espace des paramètres  $(\alpha, \kappa)$ .

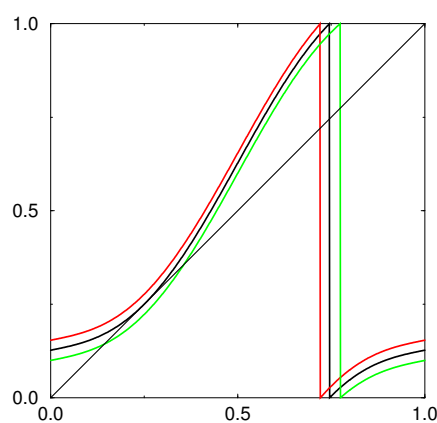


Figure 5.7: Accrochage de fréquence pour  $\alpha \sim 0$ . Illustration du mécanisme de décrochage par bifurcation tangente à  $\kappa$  constant, lorsque  $\alpha$  augmente. Le point fixe stable, qui correspond au régime périodique accroché, fusionne avec le point fixe instable puis disparaît.

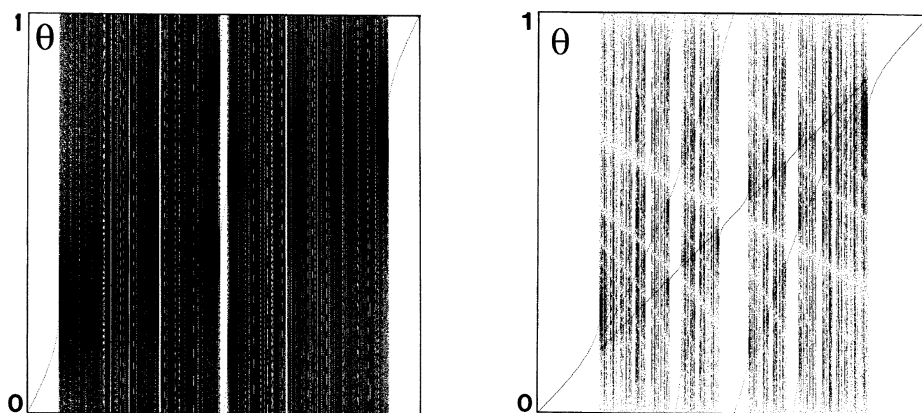


Figure 5.8: Diagramme de bifurcation de l'itération d'Arnold  $\theta_{k+1} = g_A(\theta_k)$  pour  $\kappa = 0,5$  (à gauche) et  $\kappa = 1,0$  (à droite). Les régimes quasi-périodiques, très fréquents pour  $\kappa = 0,5$  ont quasiment disparu pour  $\kappa = 1,0$ .

l'itération, à l'intersection de ce graphe avec la première bissectrice. Celui-ci persiste tant que l'intersection a lieu. Augmentant  $\alpha$  à  $\kappa$  fixé on observe le *décrochage* lorsque le graphe tangente la première bissectrice. De même façon, travaillant à  $\alpha > 0$  fixé et partant de  $\kappa = 0$ , on aurait pu observer l'*accrochage* quand la non-linéarité est suffisamment forte pour qu'une paire de points fixes apparaisse. Un calcul simple montre que la frontière du domaine d'accrochage est donnée par  $\alpha_{\text{lim}} = \kappa/2\pi$ . La même approche mais sur une résonance  $q$  déterminerait la langue d'accrochage correspondante, d'observation d'autant plus difficile que l'ordre est élevé.

La Fig. 5.8 (gauche) porte, pour  $\kappa = 0,5$ , en fonction de  $\alpha$  variant entre 0 et 1, les séries temporelles  $\theta_k$  après élimination d'un transitoire suffisant. Un régime accroché correspond à un ensemble fini de points, un régime quasi-périodique à une ligne continue couvrant tout l'intervalle en  $\theta$  à  $\alpha$  donné. La variation du nombre de rotation pour le même  $\kappa$  est tracée sur la Fig. 5.9 (gauche). On y observe que la fonction  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  est monotone croissante et même si ne sont observables que les paliers correspondant aux accrochages les plus simples ( $0/1$ ,  $1/2$ ,  $1/3$  et  $2/3$ , notamment) on déduit du raisonnement précédent qu'elle doit présenter une infinité de paliers correspondant aux accrochages sur chaque valeur de  $\alpha$  rationnelle. Le graphe correspondant est appelé un *escalier du diable*. En l'absence de non-linéarité, il n'y a pas d'accrochage. Les valeurs rationnelles de  $\hat{\alpha}$  sont donc obtenues sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de  $\alpha$  correspondant au nombre de rotation nominal, les valeurs irrationnelles sont obtenues sur le complémentaire qui est de mesure 1 (un régime quasi-périodique est obtenu avec probabilité 1 dans une expérience où  $\alpha$  est tiré au

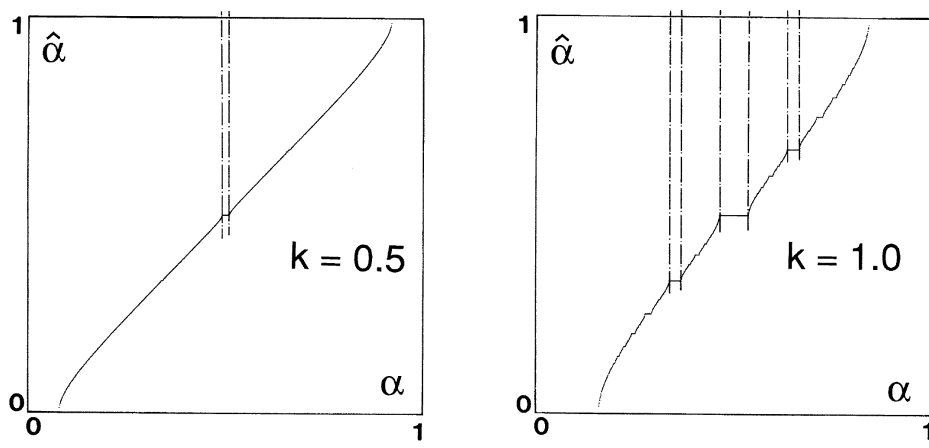


Figure 5.9: Variation du nombre de rotation pour  $\kappa = 0,5$  (à gauche) et  $\kappa = 1,0$  (à droite). Le phénomène d'accrochage se traduit par des marches apparaissent pour toutes les valeurs rationnelles de  $\hat{\alpha}$ . Pour  $\kappa = 0,5$  les régimes quasi-périodique dominant et les marches elles sont trop étroites pour remplir l'intervalle: l'escalier du diable est incomplet. Pour  $\kappa = 1,0$ , les marches remplissent tout l'intervalle: l'escalier du diable est complet.

hasard). Dès que l'on introduit des non-linéarités d'intensité finie, les paliers apparaissent.

La mesure de l'ensemble des valeurs rationnelles augmente régulièrement mais tant que les non-linéarités restent faible l'ensemble des valeurs de  $\hat{\alpha}$  irrationnelles reste de mesure finie; l'escalier est alors dit "incomplet." à la limite  $\kappa \rightarrow 1$ , la mesure des régimes quasi-périodiques tend vers 0 et l'on obtient presque sûrement, i.e., avec probabilité 1, un régime périodique. L'escalier est alors "complet," cf. Fig. 5.9 (droite). Le fait que pour  $\kappa = 1$  la fréquence des régimes quasi-périodique soit tombée à 0 est illustrée sur la Fig. 5.8 (droite) qui présente le diagramme de bifurcation correspondant et sur lequel on observe bien les régimes périodiques et la quasi-absence de régimes quasi-périodiques.

### 5.4.3 Bifurcation aux résonances fortes $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

Considérons tout d'abord le cas de la résonance forte pour  $\lambda = 1$ . La forme normale s'écrit

$$X_{n+1} = X_n - aX_n^2 + \dots$$

Lever la condition de criticalité revient à changer la pente au point fixe. Il serait tentant de changer uniquement la dérivée à l'origine et de prendre

$$X_{n+1} = (1 + r)X_n - aX_n^2 + \dots,$$

mais ceci correspond à un simple échange de stabilité similaire à la bifurcation trans-critique étudiée au Ch. 4. Comme dans ce dernier cas, l'échange suppose la persistance du point fixe. En effet, l'équation de point fixe  $X_*(r - aX_*) = 0$  a pour solutions  $X_* = 0$  et  $X_* = r/a$  (cf. Fig. 5.10, droite). Nous avons vu que, dans le cas du temps continu, la persistance du point fixe n'était pas générique et que le déploiement de la singularité quadratique conduisait plutôt à un point tournant correspondant à la coalescence d'une paire de points fixes. La transposition de cette situation est ici décrite par

$$X_{n+1} = r + X_n - aX_n^2 + \dots, \quad (5.19)$$

de sorte que l'équation de point fixe  $X_* = r + X_* - aX_*^2$  n'a plus de solution pour  $r/a < 0$ . Dans le cas contraire, on trouve deux points fixes  $X_*^{(\pm)} = \pm(r/a)^{1/2}$  dont l'un est stable et l'autre instable, comme on le montre facilement en remplaçant  $X$  par  $X_*^{(\pm)} + X'$  dans (5.19) et en étudiant l'itération pour  $X'$  après linéarisation. On trouve en effet  $X'_{n+1} = (1 \mp 2r)X'_n$ , soit  $X_*^{(+)}$  stable et  $X_*^{(-)}$  instable. Cette bifurcation est illustrée sur la Fig. 5.10 (gauche). Elle rend compte d'une fusion-disparition d'une paire de cycles limites de

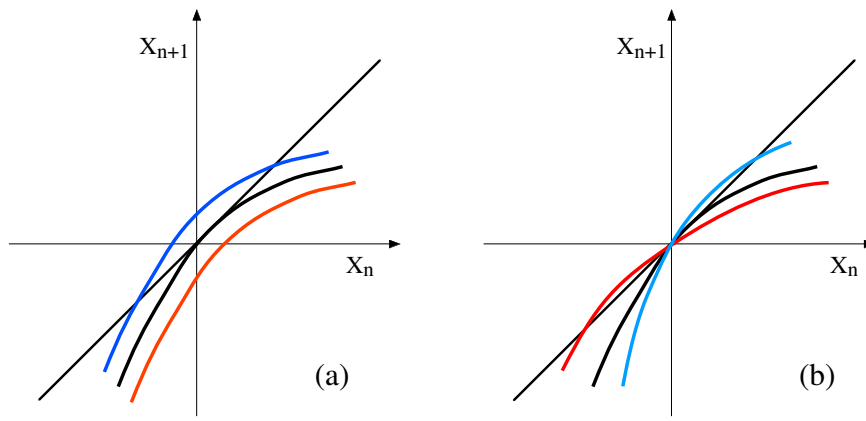


Figure 5.10: À gauche: bifurcation tangente, générique pour  $\lambda = 1$ . À droite: échange de stabilité de points fixes, non-générique pour cause de persistance du point fixe.

même période et sert de point de départ à l'un des scénarios intermittents que nous verrons dans le prochain chapitre.

Passons maintenant à la résonance 1:2 correspondant à la valeur propre  $\lambda = -1$ . À la différence du cas précédent, il est facile de voir que toute perturbation préserve l'existence du point fixe. La forme normale correspondante, obtenue au prix d'un changement de variable non-linéaire ne contient pas de terme quadratique. Elle s'écrit

$$X_{n+1} = f_r(X) = -(1+r)X_n + bX_n^3 + \dots \quad (5.20)$$

L'équation de point fixe

$$X_* = -(1+r)X_* + bX_*^3 \quad \Rightarrow \quad (2+r-bX_*^2)X_* = 0$$

a bien  $X_* = 0$  pour racine mais rien d'autre dans le voisinage (les autres solutions sont en  $\sqrt{2/b} = \mathcal{O}(1)$ ). Cependant, on remarque que les itérés convergent vers l'origine ( $r < 0$ ) ou s'en écartent ( $r > 0$ ) avec une alternance de signe qui suggère d'étudier la convergence/divergence en prenant les itérés de deux en deux. Il vient donc

$$X_{n+2} = -(1+r)X_{n+1} + bX_{n+1}^3 \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} &= -(1+r)[-(1+r)X_n + bX_n^3] + b[-(1+r)X_n + bX_n^3]^3 \\ &\simeq (1+2r)X_n - 2bX_n^3. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Les points fixes de cette nouvelle itération sont donnés par

$$X_* = (1+2r)X_* - 2bX_*^3 \quad \Rightarrow \quad X_*(r-bX_*^2) = 0,$$

c'est à dire soit (i)  $X_* = 0$ , soit (ii)  $X_*^{(\pm)} = \pm(r/b)^{1/2}$ . La solution triviale (i) est naturelle puisqu'une solution point fixe de  $X_{n+1} = f(X_n)$  est également point fixe de  $X_{n+2} = f(X_{n+1}) = f(f(X_n)) = f \circ f(X_n)$ . Les solutions (ii), points fixes de  $f \circ f$  forment une orbite périodique de  $f$  de période 2:  $f(X_{(+)}) = X_{(-)}$  et  $f(X_{(-)}) = X_{(+)}$ . Étudiant la stabilité de cette période, on montre alors que si  $b > 0$  (resp.  $b < 0$ ) la bifurcation est *super-critique* (resp. *sous-critique*) et le cycle qui apparaît est stable (resp. instable). Dans le contexte initial des systèmes dynamiques à temps continu, le 2-cycle de l'itération correspond à un cycle limite de période  $\sim 2T$  où  $T$  est la période du cycle qui bifurque. Ceci justifie le terme *bifurcation par doublement de période* ou encore *sous-harmonique*.<sup>9</sup> Repartant de l'idée d'un régime bifurqué correspondant à des trajectoires tracées sur un tore, on voit qu'en régime permanent le système revient à son point de départ après deux tours le long de la direction azimutale et un tour seulement dans la direction méridienne.

<sup>9</sup>car la fréquence de départ  $\omega = 2\pi/T$  est divisée par 2.



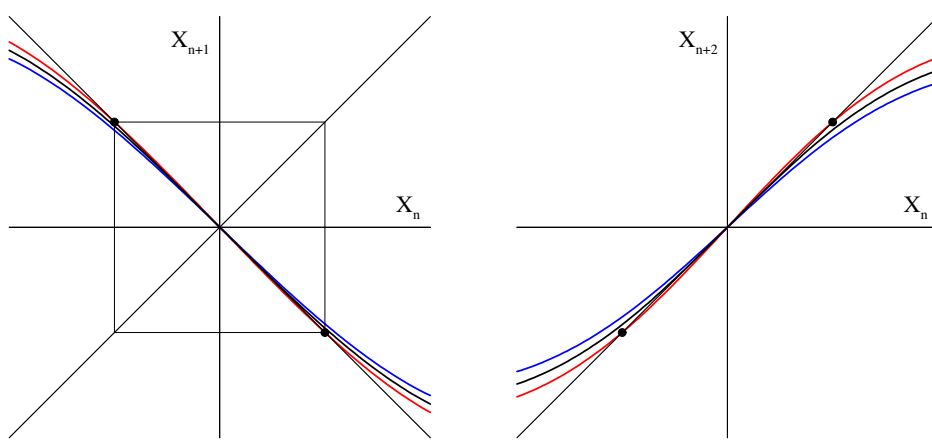


Figure 5.11 : Bifurcation sous-harmonique gouvernée par (5.20) pour  $r < 0$ ,  $r = 0$ ,  $r > 0$ . À Gauche: l'itération  $X_{n+1} = f(X_n)$  n'a pas de points fixes non-triviaux; après extinction du transitoire, les deux points symétriques par rapport à l'origine s'échangent au cours de l'itération. À droite: l'itération  $X_{n+2} = f \circ f(X_n)$  a deux points fixes non-triviaux symétriques correspondant, à la phase près, au même cycle de période 2.

En fait, décrit par une itération réelle, le système ne “sent” plus la géométrie du tore et peut se satisfaire d'une variété plate. Globalement, la mémoire de la topologie à trou du tore doit cependant préservée car, pour que les trajectoires puissent jouer à saute-mouton sans se recouper, il semble nécessaire que la surface plate en question ait la topologie du ruban de Möbius, i.e., non-orientable. L'effet de la résonance forte 1:2 serait donc d'écraser le tore sur lui même.

# Chapitre 6

## Transition vers le chaos

Jusqu'à présent nous avons étudié les bifurcations entre régime *stationnaire* et régime *périodique* puis entre régime *périodique* et régime *quasi-périodique* à deux fréquences ou *bipériodique*. Augmentant le paramètre de contrôle on s'attend à voir de nouveaux modes entrer en scène, produisant un comportement de plus en plus complexe.

Selon Landau (1944), chaque nouveau mode introduit sa fréquence  $\omega_j$  *a priori* incommensurable avec l'ensemble des fréquences déjà actives (i.e., pas de relation de la forme  $\sum_k n_k \omega_k = 0$  avec  $n_k \in \mathbb{N}$  (positifs ou négatifs mais  $\neq 0$ ). Le mouvement est alors *multi-périodique*. Les observables varient comme  $g(\omega_1 t + \phi_1, \omega_2 t + \phi_2, \dots)$  où les fonctions  $g$  sont périodiques de période  $2\pi$  en chacun de leurs arguments. La turbulence serait alors obtenue au terme d'une *cascade indéfinie* de telles bifurcations de Hopf, Fig. 6.1 (haut). Les pulsations des instabilités successives étant (en principe) accessibles à l'analyse, les *phases*  $\phi_k$  resteraient des fonctions inconnues des conditions initiales, ce qui justifierait le caractère imprévisible du comportement à long terme.

À ce scénario Ruelle et Takens (1971) objectent qu'un mouvement multi-périodique peut paraître très compliqué sans pour autant induire de mélange (pas de décroissance des fonctions de corrélation car les  $\phi_k$  sont fixés une fois pour toutes). De plus, alors que les expériences montrent que le spectre de Fourier d'un signal turbulent est continu, un signal multi-périodique serait constitué d'une forêt de raies fines. Enfin, d'un point de vue mathématique le régime quasi-périodique traduit plutôt la superposition "quasi-linéaire" de mouvements et non une véritable interaction entre modes alors que les non-linéarités ont génériquement des conséquences plus importantes (cf. l'accrochage qui fait dégénérer un régime *bipériodique* en un régime simplement *périodique*). En conséquence, ils proposent un scénario modifié selon lequel après un petit nombre de bifurcations apparaissent des régimes *chaotiques* associés à des *attracteurs étranges*, Fig. 6.1 (bas). Les orbites appartenant à un attracteur étrange ne sont ni périodiques, ni quasi-périodiques mais *apériodiques*.

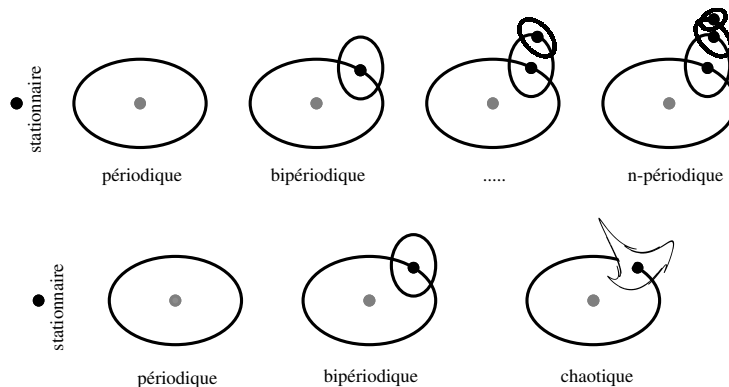


Figure 6.1: Illustration schématique des scénarios de Landau (haut) et de Ruelle–Takens (bas); la miniature d'attracteur chaotique de Curry et Yorke (cf. Fig. 6.12), suggère la désintégration du tore en section de Poincaré.

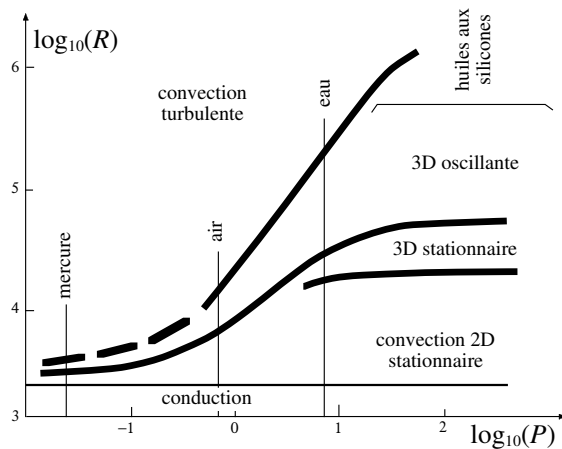


Figure 6.2: Transition vers la turbulence en convection Pour  $P \gg 1$  on observe d’abord une convection stationnaire (indépendante du temps) bidimensionnelle, puis tridimensionnelle (dépendant de deux, puis trois coordonnées d’espace) avant que la dépendance temporelle ne s’installe, régulière puis turbulente. Pour  $P \sim 1$  ou plus petit, le domaine “2D stationnaire” tend à disparaître et la dépendance temporelle turbulente s’installe très tôt. (D’après Krishnamurti, 1973.)

Ces orbites sont de plus sensibles aux conditions initiales et aux petites perturbations de sorte que le mouvement est imprédictible à long terme. Les attracteurs étranges introduits dans cette interprétation de la nature de la turbulence sont des objets robustes dans le sens où système peut être perturbé (dans certaines limites) sans que sa dynamique cesse d’être chaotique.

Qu’en est-il dans la réalité expérimentale? Nous considérerons ici le cas de la convection. La transition du régime de conduction (fluide au repos) à la turbulence a été très étudiée dans le passé. Une compilation de résultats assez anciens est présentée sur la figure 6.2. Elle suggère que, lorsqu’on augmente le nombre de Rayleigh  $R$ ,<sup>1</sup> on passe du régime de conduction pure (uniforme en espace) à la convection turbulente par un petit nombre d’étapes dépendant fortement du nombre de Prandtl  $P$ , qui caractérise le fluide.

Il semble donc y avoir, au moins à grand nombre de Prandtl un nombre bien défini (et petit) d’étapes vers la turbulence, ce qui conforte apparemment le point de vue avancé par Ruelle et Takens (1971) d’une courte cascade aboutissant à un régime temporellement chaotique, vraie “nature” de la turbulence. En pratique, ce point de vue ne résiste cependant pas à la remarque selon laquelle les seuils des différentes transitions sont assez mal déterminés (ce que n’indique pas la figure), varient d’une expérience à l’autre, mettent en jeu des structures spatialement inhomogènes et sont souvent affectés d’une lente évolution.

Plutôt que d’une interprétation à la Ruelle–Takens, cette transition vers la turbulence relève donc, en raison même du désordre spatial, d’une théorie du chaos *spatio-temporel* que nous introduirons brièvement au Ch. 8. Pour réduire l’importance du désordre il faut confiner latéralement le fluide. En effet, si les dimensions du domaine où se développe la convection sont de l’ordre de grandeur de la hauteur de la couche fluide  $h$ , le nombre de cellules est très petit puisqu’elles doivent grossièrement avoir un diamètre de l’ordre de  $h$ . Un fort confinement assure une grande cohérence spatiale et une dynamique (éventuellement chaotique) associée à un petit nombre d’amplitude de modes. Nous donnerons plusieurs exemples expérimentaux qui illustrent bien la pertinence de la théorie du *chaos temporel* pour les systèmes confinés.

Dans ce qui suit, nous passons rapidement en revue les caractères mathématiques des régimes chaotiques tels qu’ils viennent d’être introduits (§6.1) puis les grands scénarios classiques reposant sur la perte de stabilité d’un régime périodique, mettant plus particulièrement l’accent sur la cascade sous-harmonique, prototype de scénario possédant de multiples propriétés intéressantes (§6.2).

<sup>1</sup>C’est le paramètre de contrôle usuel, voir Ch. 1.

## 6.1 Mathématique du chaos

### 6.1.1 Sensibilité aux conditions initiales

La caractéristique primordiale des régimes chaotiques tient à l'instabilité des trajectoires à l'origine de la sensibilité aux conditions initiales mise en avant par Ruelle et Takens. Nous illustrerons le phénomène sur un modèle simple en termes d'itération à une variable réelle  $X \mapsto f(X)$  appelé *application dyadique* et illustrée sur la Fig 6.3a:

$$f(X) = 2X \pmod{1}.$$

Cette application, qui sur  $\mathbb{S}^1$  correspond au doublement de l'angle, n'est pas inversible et ne peut servir directement de modèle d'application de retour dans l'esprit du Ch. 5. Cependant, elle permet d'illustrer parfaitement les principales propriétés du chaos, à commencer par la divergence des trajectoires voisines. En effet, partant de deux conditions initiales voisines,  $X_0$  et  $X'_0 = X_0 + \delta X_0$ , on trouve  $X'_1 = 2X'_0 = 2(X_0 + \delta X_0) = 2X_0 + 2\delta X_0$  et donc  $\delta X_1 = 2\delta X_0$ , et plus généralement  $\delta X_k = 2^k \delta X_0$ , tant que la périodisation de l'intervalle n'a pas eu besoin de jouer son rôle. Or ceci intervient nécessairement dès que  $2^k \delta X_0 \sim 1$  donc au maximum au bout de d'un nombre d'itérations  $k_{\max}$  donné par la partie entière de  $\log(1/\delta X_0)/\log(2)$ . Ce nombre, qui dépend de la résolution numérique avec laquelle on suit les trajectoires, est en général assez petit. La divergence des trajectoires voisines est illustrée sur la Fig. 6.3b à l'aide d'une représentation en termes de marche dans le plan complexe définie par  $Z_{k+1} = Z_k + \exp(2\pi i X_k)$ , un pas d'itération correspondant, dans le plan complexe, à un pas de longueur 1 dans la direction d'argument  $2\pi X_k$ . La divergence d'abord géométrique entre les deux trajectoires prend un tour plus dramatique quand la distance entre les deux trajectoires est de l'ordre de la taille du domaine en  $X$  accessible.

La Fig. 6.3c visualise le comportement à long terme d'une trajectoire particulière. Si le déterminisme sous-jacent laisse une trace à court terme, à long terme il n'apparaît pas possible de prévoir la région du plan où le point représentant le système se trouve après un grand nombre d'itérations. On peut se faire une idée de la nature déterministe du processus en comparant l'évolution à court terme obtenue avec l'application dyadique à celle qui serait donnée par un processus stochastique construit à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires, cf. Fig. 6.3d.

### 6.1.2 Dynamique symbolique

Restons avec l'application dyadique. L'interprétation de ce qui précède passe par une écriture binaire des états successifs du système le long de sa trajectoire  $X_k = \sum_n \sigma_{n,k} 2^{-n}$  que l'on notera à l'aide d'un point décimal  $X_k = 0.\sigma_{0,k}\sigma_{1,k}\sigma_{2,k}\sigma_{3,k}\dots$ , avec  $\sigma_{n,k} \in \{0; 1\}$ . La règle d'évolution est une multiplication par 2 qui se traduit par  $\sigma_{n,k+1} = \sigma_{n+1,k}$  et correspond à un décalage du "point décimal" d'un cran vers la droite. Une mesure de précision donnée porte à notre connaissance un nombre fini  $n_{\max}$  de digits, de sorte que l'évolution du système "révèle" peu à peu les digits de poids faibles (d'indice élevé) dans la condition initiale, faisant glisser une fenêtre sur la suite de digits. Deux états initiaux  $X_0$  et  $X'_0$  voisins, dont les suites de digits diffèrent au delà d'un certain rang  $n_0$ ,  $X'_0 - X_0 = \delta X_0 = \sum_{n>n_0} (\sigma'_n - \sigma_n) 2^{-n}$ , ne révèlent l'écart qui les sépare que lorsque la différence  $\delta_k$  devient détectable soit  $k = n_0 - n_{\max}$ .

Notant que le premier digit, zéro ou un, à droite du point décimal détermine l'appartenance du nombre  $X_k$  considéré au sous-intervalle de gauche<sup>2</sup> (L)  $[0, 1/2[$  ou au sous-intervalle de droite (R)  $[1/2, 1[$ , respectivement, on en déduit sans aucune ambiguïté une description littéraire 'RLLRLRRR' de l'itinéraire du système dans son espace des phases. Une partition<sup>3</sup> de l'espace des phases en sous-ensembles qui permet une telle description est appelée *partition génératrice*.

La dynamique décrite par l'application dyadique est en fait la forme de stochasticité la plus forte que l'on puisse imaginer puisqu'elle est en correspondance directe avec le résultat d'un tirage à pile ou face, chaque

<sup>2</sup>Nous suivons ici la tradition anglo-saxonne: L pour "left" et R pour "right".

<sup>3</sup>Une partition d'un ensemble  $\mathbb{X}$  est une subdivision complète en sous-ensembles disjoints  $\mathbb{X}_j$ :  $\mathbb{X} = \bigcup_j \mathbb{X}_j$ ,  $\mathbb{X}_j \cap \mathbb{X}_{j'} = \emptyset$  for  $j \neq j'$ .

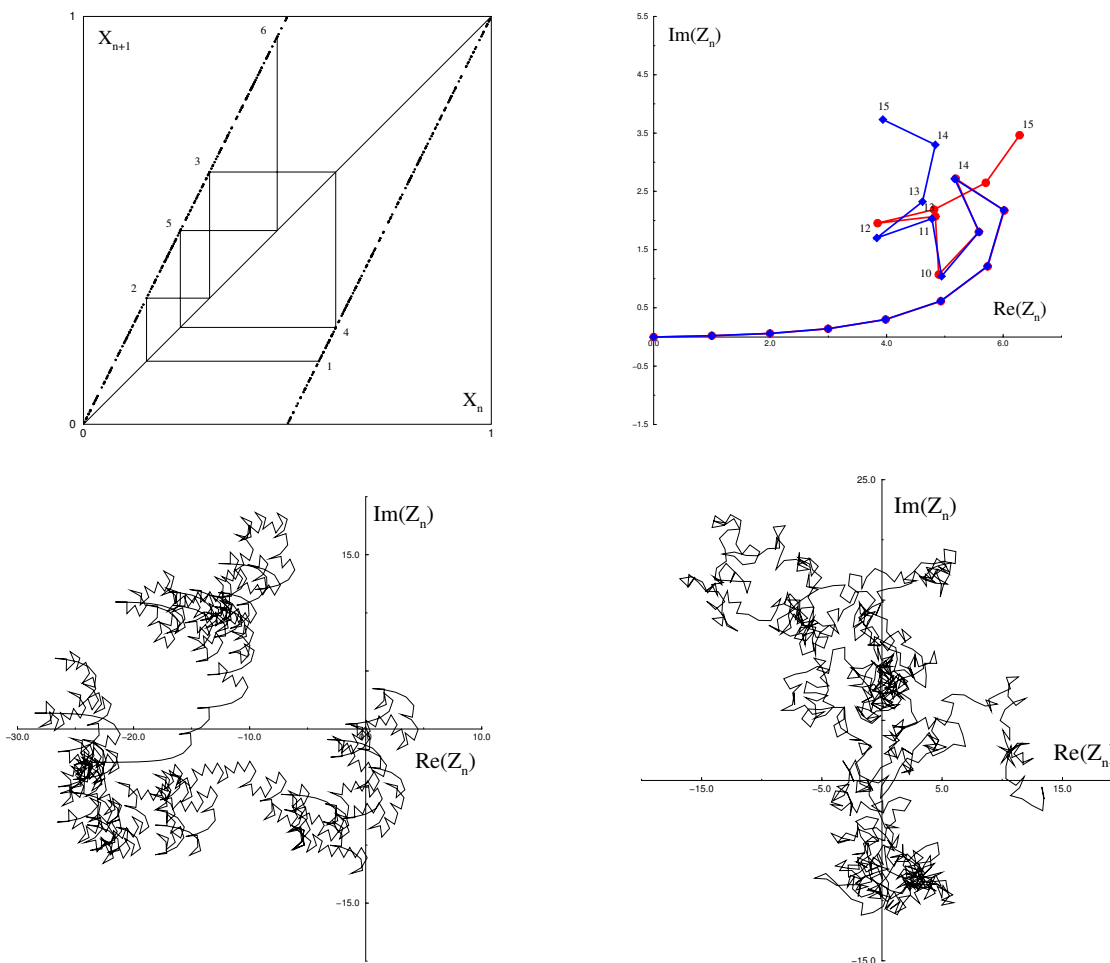


Figure 6.3: (a) Application dyadique. (b) Divergence à court terme de deux trajectoires voisines. (c) Imprédictibilité à long terme. (d) Cas d'une marche aléatoire.

condition initiale pouvant être interprétée comme une suite aléatoire de digits porté à notre connaissance par la dynamique. L'itération considérée est appelée *décalage de Bernoulli*.

On observera qu'à côté des trajectoires apériodiques formées d'une suite arbitraire de 0 et de 1 qui forment l'ensemble non-dénombrable des irrationnels sur  $[0, 1]$ , on trouve un ensemble infini dénombrable de trajectoires périodiques qui codent en binaire l'ensemble des rationnels. Ces dernières sont toutes instables puisqu'une perturbation infinitésimale, c'est à dire le changement arbitraire des digits de la condition initiale à partir d'un certain rang détruit la périodicité après un certain nombre d'itérations.

Ces propriétés sont typiques des attracteurs chaotiques. La difficulté est en général de déterminer une partition génératrice appropriée, qui permette la réduction de la dynamique à un décalage. Pour les itérations unidimensionnelles  $X_{k+1} = F(X_k)$ , on généralise la procédure utilisée avec l'application dyadique en décomposant l'intervalle de définition en sous-intervalles sur lesquels  $F$  est strictement monotone et en codant les trajectoires à l'aide d'autant de symboles distincts. Dans cette perspective, la dynamique est transformée en un *langage* assujéti à des *règles de grammaire* qui posent des contraintes sur les suites (mots) de symboles (lettres) possibles appartenant à un certain ensemble (alphabet).

### 6.1.3 Enchevêtrement homocline

Revenons maintenant à la façon donc cette sensibilité peut effectivement s'introduire dans la dynamique au point de la rendre "complexe" et notons tout d'abord qu'elle n'est possible que si le système dynamique possède au moins un élément instable quelque part dans son espace des phases. Dans un cadre bidimensionnel

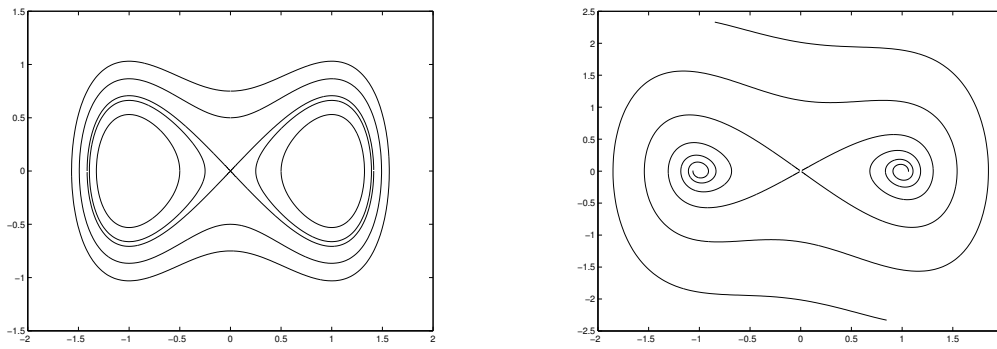


Figure 6.4: Portrait de phase du système de Duffing  $\frac{d^2}{dt^2}X + \gamma \frac{d}{dt}X - X + X^3 = 0$  pour  $\gamma = 0$  (gauche) et  $\gamma = 0,25$  (droite).

à temps continu, l'exemple le plus simple d'ensemble limite instable est le col et nous avons vu précédemment comment l'espace des phases se trouvait structuré par sa variété stable et sa variété instable. Nous avons également noté que dans certains cas, les variétés stables et instables de tels ensembles limites pouvaient se recouper pour former des trajectoires homoclines ou hétéroclines. Nous savons que la dynamique des systèmes bidimensionnels à temps continu autonomes reste simple en vertu du théorème de Poincaré–Bendixon mais allons voir que cette possibilité de recouplement est à l'origine de la complexité en dimension  $d > 2$ . Dans le cas de systèmes à temps discret bidimensionnels, résultats de la stroboscopie de systèmes bidimensionnels forcés périodiquement ou considérés comme applications de Poincaré de systèmes tridimensionnels autonomes, ces intersections de variétés stables et instables sont génériquement des points appelés *points homoclines* (Poincaré). Nous allons montrer que ces points, quand il existent, appartiennent à des orbites “chaotiques” expression d'un comportement “complexe”.

Revenons donc pour un bref moment à un système à temps continu bidimensionnel. Une trajectoire homocline relie un point-selle à lui-même en démarrant le long de la direction instable et en revenant le long de la direction stable. Toutes les autres trajectoires évitent le point fixe, ce qui traduit son instabilité. Cette situation est en général exceptionnelle, sauf pour les systèmes hamiltoniens (cf. Ch. 2, §2.4.4). Dans un cadre non-linéaire, l'oscillateur de Duffing conventionnel utilisé à plusieurs reprises  $\frac{d^2}{dt^2}X + X + X^3 = 0$  n'est pas un bon point de départ car il ne présente qu'un seul point fixe de type “centre” sur lequel les non-linéarités n'ont qu'un effet plutôt trivial. Ceci n'est plus le cas pour sa version modifiée

$$\frac{d^2}{dt^2}X - X + X^3 = 0, \quad (6.1)$$

ici mise sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre:

$$\frac{d}{dt}X_1 = X_2, \quad \frac{d}{dt}X_2 = X_1 - X_1^3. \quad (6.2)$$

Ce système présente un col à l'origine et deux centres en  $X = \pm 1$ . La boucle homocline  $\Gamma_0$  issue de l'origine est ici connue analytiquement. On vérifie en effet que

$$X_1(t) = \sqrt{2}/\cosh(t), \quad X_2 = -\sqrt{2}\sinh(t)/\cosh^2(t) \quad (6.3)$$

est solution et représente l'orbite cherchée sous forme paramétrique. Le portrait de phase du système (6.2) est présenté sur la Fig. 6.4 (gauche).

Lorsqu'on ajoute une faible dissipation, i.e.,  $\frac{d^2}{dt^2}X + \gamma \frac{d}{dt}X - X + X^3 = 0$ , les boucles homoclines s'ouvrent et l'on obtient le portrait de phase de la Fig. 6.4 (droite) avec trois points fixes hyperboliques, un col et deux foyers stables.

Pour passer à la dimension supérieure il suffit de considérer le même système soumis à un forçage périodique de pulsation  $\omega$  (toujours en présence de dissipation). Notre nouveau point de départ est donc

$$\frac{d^2}{dt^2}X + \gamma \frac{d}{dt}X - X + X^3 = \delta \cos(\omega t),$$

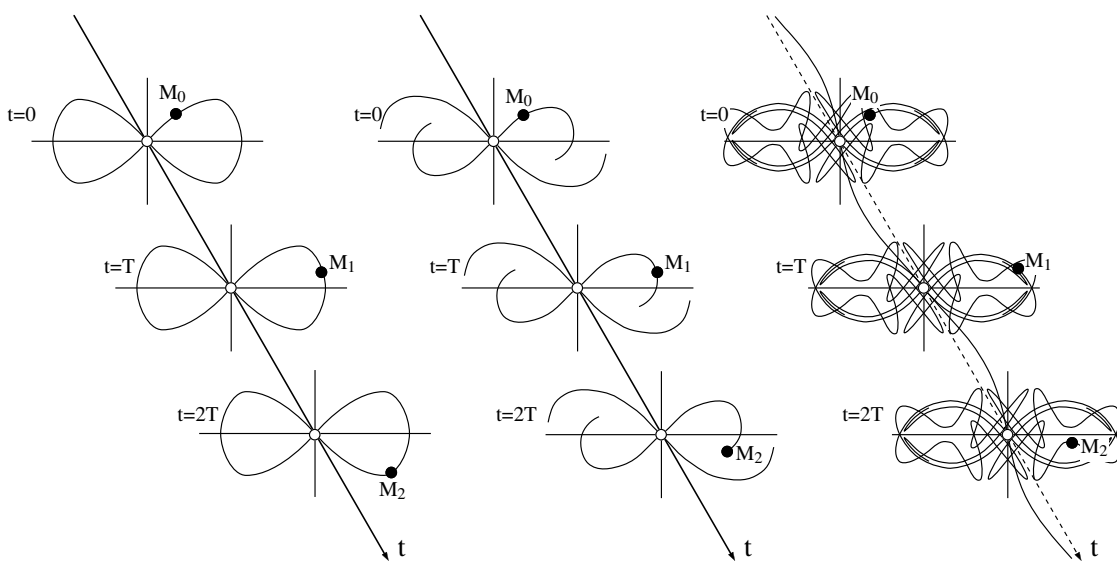


Figure 6.5: Allure du portrait de phase étendu pour d'un système de type "Duffing forcé". À gauche: Cas conservatif et forçage périodique d'intensité nulle → boucles homoclines. Au milieu: Cas dissipatif et forçage périodique d'intensité nulle → les boucles se sont ouvertes. À droite: forçage périodique d'intensité finie → le point fixe instable est déplacé périodiquement, ses variétés stables et instables sont déformées et se recourent, produisant un enchevêtrement homocline (voir Figs. suivantes).

$\gamma$  et  $\delta$  restant "petits", ou encore

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_1 &= X_2, \\ \frac{d}{dt} X_2 &= -\gamma X_2 + X_1 - X_1^3 + \delta \cos(\omega t). \end{aligned}$$

En fait la discussion sera menée ici à un stade qualitatif car une présentation quantitative, tant analytique que numérique serait trop lourde.

Dans la suite, nous examinerons systématiquement les trajectoires par stroboscopie à la période  $T = 2\pi/\omega$  du forçage. Commençons par supposer son intensité nulle. Dans l'espace des phases étendu  $(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}$ , on a les images de la Fig. 6.5 où les gros points noirs figurent les états du système lors des différentes sections successives pour une trajectoire initialisée en un point de la variété instable du point fixe. Les courbes invariantes (variétés stables et instables des points fixes) du système non forcé sont les projections selon l'axe des temps des nappes invariantes<sup>4</sup> de l'espace des phases étendu sur lesquelles sont tracées ces trajectoires particulières.

Lorsque le forçage a une intensité finie mais petite, les trois points fixes du portrait de phase du système non forcé persistent, légèrement déplacés, en tant que points fixes de l'application de Poincaré sans changer de nature bien que leurs variétés stables et instables soient maintenant périodiquement "gondolées." En présence de dissipation mais sans forçage, ces variétés s'emboîtaient sans se recouper. Tant que la perturbation est suffisamment faible, elles continuent à ne pas se recouper mais lorsque la perturbation croît le risque d'intersection augmente et l'on peut montrer par un calcul perturbatif difficile dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$  où la boucle homocline de la Fig. 6.4a s'ouvre juste (méthode de Melnikov) que les variétés stables et instables du col entrent en contact pour une valeur critique du rapport  $\delta/\gamma$ . Au delà de ce seuil, les variétés s'intersectent transversalement selon des trajectoires homoclines dont la trace sur la section de Poincaré forme un ensemble de *points homoclines transverses*.

La suite de cette section vise à montrer les conséquences dramatiques de la présence d'un point homocline transverse. La situation est illustrée sur la Fig. 6.6. Suivant les variétés stables  $\mathbf{S}$  et instables  $\mathbf{U}$  du point fixe

<sup>4</sup>Il est difficile de donner graphiquement une bonne idée de ces nappes (surtout lorsque l'enchevêtrement homocline s'est développé, de sorte que, sur la Fig. 6.5, nous nous contenterons de leurs traces sur les surfaces de section successives.

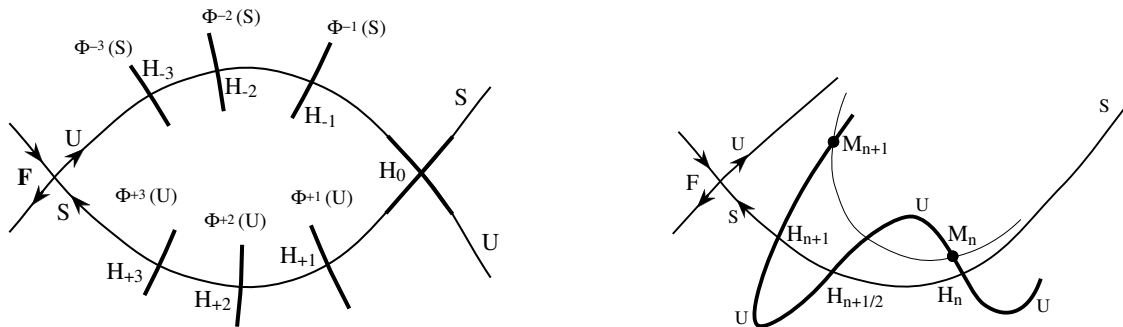


Figure 6.6: À gauche: Un point homocline  $\mathbf{H}_0$  engendre une double famille  $\mathbf{H}_{\pm k}$ . À droite: Les variétés stables et instables dessinent des boucles qui imposent des recouvrements en des points intermédiaires  $\mathbf{H}_{\pm 1/2}$  engendrant de nouvelles familles de points homoclines.

$\mathbf{F}$ , nous supposons donc qu'elles se coupent en un point  $\mathbf{H}_0$  et appelons  $\mathbf{S}_0$  et  $\mathbf{U}_0$  les portions d'arcs de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}$  voisines de cette intersection. Nous pouvons dès lors affirmer que les itérés de  $\mathbf{H}_0$  par l'application de retour, notée  $\Phi$ , sont eux aussi des points homoclines. En effet,  $\Phi$  transforme le voisinage de  $\mathbf{H}_0$  en le voisinage de  $\mathbf{H}_{+1} = \Phi(\mathbf{H}_0)$ , et en particulier l'arc  $\mathbf{U}_0$  en un arc  $\mathbf{U}_{+1}$  intersectant  $\mathbf{S}$  transversalement. Cet arc  $\mathbf{U}_{+1}$  composé de points transformés de points de  $\mathbf{U}$  fait également partie de  $\mathbf{U}$  qui est invariant par  $\Phi$ ,  $\mathbf{H}_{+1}$  est donc aussi un point homocline, ainsi que tous les itérés postérieurs  $\mathbf{H}_{+k}$ . Raisonnant sur l'application inverse  $\Phi^{-1}$  et l'arc  $\mathbf{S}_0$  transformé en  $\mathbf{S}_{-1}$  au voisinage  $\mathbf{H}_{-1}$ , et les autres itérés antérieurs, on voit ainsi apparaître une double infinité de points homoclines  $\mathbf{H}_{\pm k}$  (Fig. 6.6, gauche). Mais cela n'est que le début de l'histoire. En effet, en tout point régulier, et les points  $\mathbf{H}_{\pm k}$  ne sont pas singuliers, le flot préserve l'orientation, de sorte que  $\Phi$  obtenu par intégration sur un intervalle de temps  $T$ , la préserve aussi. Tenant compte du sens de parcours le long de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}$ , on est donc obligé d'admettre que, par continuité,  $\mathbf{U}$  (resp.  $\mathbf{S}$ ) forme une boucle qui recoupe  $\mathbf{S}$  (resp.  $\mathbf{U}$ ) en un point  $\mathbf{H}_{+1/2}$  (resp.  $\mathbf{H}_{-1/2}$ ) entre  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_{+1}$  (resp.  $\mathbf{H}_{-1}$ ). Les points  $\mathbf{H}_{\pm 1/2}$  également homoclines par construction sont à l'origine d'une nouvelle série infinie de points (Fig. 6.6, droite).

Les choses se compliquent encore si l'on cherche à savoir comment se comportent les lacets dessinés par  $\mathbf{U}$  lorsqu'on se rapproche du point fixe  $\mathbf{F}$  le long de  $\mathbf{S}$ . En effet, l'instabilité de  $\mathbf{F}$  implique une contraction dans la direction de  $\mathbf{S}$  et un étirement dans la direction de  $\mathbf{U}$ . À mesure que le système évolue, seuls les points de  $\mathbf{S}$  tendent vers  $\mathbf{F}$ , les autres points, notamment ceux qui appartiennent à un arc  $\mathbf{U}_{+k}$  avec  $k$  suffisamment grand se trouvent chassés en progression géométrique dans la direction de  $\mathbf{U}$  (Fig. 6.7, gauche). Autrement dit, l'amplitude des lacets ne peut qu'augmenter, et comme ceux-ci ne peuvent faire autre chose que de longer  $\mathbf{U}$ , il arrive forcément un  $k$  pour lequel le lacet se trouve étiré au point de venir recouper  $\mathbf{S}$  au voisinage de  $\mathbf{H}_0$ , ce qui entraîne l'apparition de deux nouveaux points homoclines. Un raisonnement identique peut être conduit pour les lacets de  $\mathbf{S}$  recoupant  $\mathbf{U}$  transversalement au voisinage de  $\mathbf{F}$ . A bout du compte, nous nous trouvons à la tête d'un réseau infini de points sur lesquels la dynamique est très complexe, cet *enchevêtrement homocline* (en anglais *homoclinic tangle*) défiant l'imagination dont les premières étapes sont grossièrement schématisées sur la Fig. 6.7 (droite). Les considérations développées ici à propos d'un point homocline auraient pu l'être dans le cas hétérocline presque sans modification. Elles ne supposent pas non plus que le système soit conservatif; partir d'un système hamiltonien facilite le problème car la présence de trajectoires homoclines ou hétéroclines est relativement commune pour le système sans forçage de sorte que leur désagrégation sous l'effet de la perturbation conduisant à l'enchevêtrement homocline est plus aisément compréhensible.

Pour résumer, la dynamique autour de  $\mathbf{F}$  reste simple tant que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}$  ne se recoupent pas mais devient forcément compliquée au delà d'une condition de tangence homocline, prélude au développement de l'enchevêtrement engendré par la présence de points homoclines transverses. Un système initialisé sur l'ensemble des points homoclines reste sur cet ensemble qui est donc invariant pour la dynamique. Naturelle-



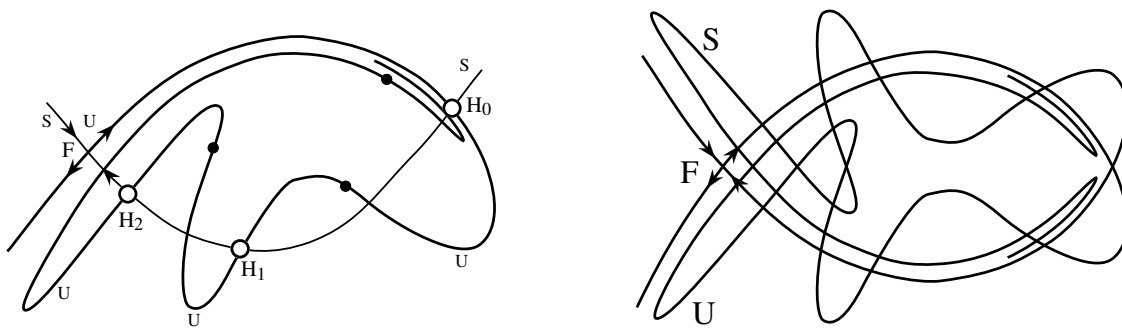


Figure 6.7: À gauche: L'instabilité au voisinage de  $F$  implique l'amplification des lacets formés par  $U$  transversalement à  $S$  jusqu'à ce que la variété instable vienne recouper la variété stable au voisinage de  $H_0$  donnant naissance à de nouvelles familles d'intersections. À droite: enchevêtrement homocline obtenu en raisonnant de la même façon sur les variétés stables et instable.

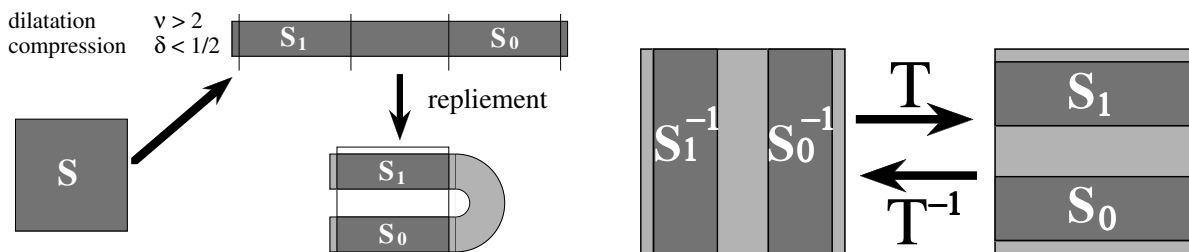


Figure 6.8: À gauche: Construction de l'application en fer à cheval. À droite: Transformation inverse.

ment, si le système est initialisé de façon quelconque près du point fixe, sa dynamique n'en est influencée que tant qu'il reste dans son voisinage. En effet, l'ensemble homocline, de mesure nulle, n'est pas un attracteur et le système peut quitter le voisinage de cet ensemble auquel cas la complexité observée n'est que transitoire.

La dynamique sur l'ensemble de points homoclines peut être modélisée à l'aide de l'*application en fer à cheval*, approprié pour représenter ce qui se passe pour  $k$  suffisamment grand.

#### 6.1.4 Transformation "en fer à cheval," application du boulanger et attracteurs étranges

Introduite par Smale et illustrée sur la Fig. 6.8 l'*application en fer à cheval* est définie de la façon suivante:

- (1) Un carré de départ, noté ici  $S$ , est étiré d'un facteur  $\nu > 2$  parallèlement à l'un de ses côtés et comprimé d'un facteur  $\delta < 1/2$  parallèlement à l'autre côté, ce qui produit un rectangle allongé.
- (2) Ce rectangle est replié et placé sur le carré  $S$ ; tout ce qui déborde est abandonné, la transformation n'est définie que pour les points qui restent dans le carré. Ces points appartiennent à deux bandes que nous noterons  $S_0$  et  $S_1$  (Fig. 6.8, gauche).

Pour définir l'application inverse il suffit de considérer les points de  $S$  qui après une itération sont encore dans  $S$ . Ce sont donc les images inverses des rectangles  $S_0$  et  $S_1$  (Fig. 6.8, droite).

Itérant la transformation et on passe alors à la limite  $k \rightarrow +\infty$ , ce qui définit un certain ensemble limite  $\Omega^+$ , de mesure nulle, produit d'un ensemble de Cantor dyadique le long de  $X_2$  et de  $[0, 1]$  selon  $X_1$ . Travaillant sur les itérés arrières en utilisant la transformation inverse, on définit de la même façon l'ensemble limite  $\Omega^-$  produit d'un Cantor dyadique selon  $X_1$  et de  $[0, 1]$  selon  $X_2$ .

L'ensemble  $\Omega \equiv \Omega^+ \cap \Omega^-$  est invariant sous l'action de la transformation en fer à cheval. Pour montrer que la dynamique induite est complexe au point d'être équivalente à un décalage de Bernoulli, adoptons un codage

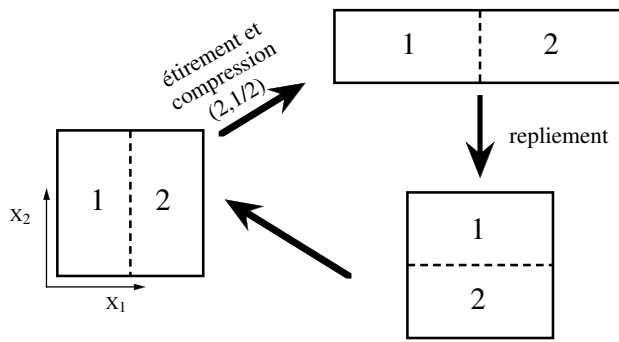


Figure 6.9: Transformation du boulanger.

symbolique<sup>5</sup> des points de  $\Omega$ : une trajectoire engendrée par la transformation, notée  $T$ , est alors définie par une suite de digits 0 ou 1,  $(\dots n_{-2}n_{-1}n_0n_{+1}n_{+2}\dots)$  avec  $n_j = 0$  si  $T^j(n_0) \in S_0$  et  $n_j = 1$  si  $T^j(n_0) \in S_1$ .  $T$  définit donc un décalage des symboles:  $T(\dots n_{-2}n_{-1}n_0n_{+1}n_{+2}\dots) = (\dots n_{-1}n_0n_{+1}n_{+2}n_{+3}\dots)$  et  $T^{-1}(\dots n_{-2}n_{-1}n_0n_{+1}n_{+2}\dots) = (\dots n_{-3}n_{-2}n_{-1}n_0n_{+1}n_{+2}\dots)$ .  $\Omega$ , produit cartésien de deux ensembles de Cantor, est un ensemble non dénombrable puisque ses points sont mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres réels à l'aide du codage symbolique.

Comme précédemment pour l'application dyadique, cette dynamique est équivalente à un tirage à pile ou face, effectué implicitement lors du choix de la condition initiale interprétée comme une suite aléatoire de digits. La différence avec l'application dyadique considérée plus tôt tient au caractère inversible de  $T$  qui autorise maintenant un décalage bidirectionnel. L'objet est structurellement stable car il résiste, dans certaines limites, au changement des facteurs d'étirement et de compression ou aux déformations continues du processus de repliement. Ce n'est cependant pas un attracteur car tout point n'appartenant pas à l'ensemble est expulsé de  $S$  à plus ou moins longue échéance. Le qualificatif "complexe" associé à la dynamique ainsi induite tire son origine du fait qu'il n'y a pas de moyen plus simple de caractériser la trajectoire que d'en spécifier tous les points les un après les autres, ce qui ne serait pas le cas d'une dynamique "simple" qui les détermine complètement avec une information plus limitée, e.g., initialisation de quelques phases pour un régime quasi-périodique.

L'itération du domaine  $\mathbb{U} \equiv [0, 1] \times [0, 1]$  sur lui même, appelée *transformation du boulanger* induit la même dynamique que l'application en fer à cheval sur  $\Omega$ . Elle est définie par

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 2X_k & \text{et} & & Y_{k+1} &= Y_k/2 & \text{pour} & & X < 1/2 \\ X_{k+1} &= 2X_k - 1 & \text{et} & & Y_{k+1} &= Y_k/2 + 1/2 & \text{pour} & & X \geq 1/2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

et correspond en effet à une dilatation d'un facteur 2 selon  $X$  associée à une contraction d'un facteur 1/2 dans la direction  $Y$ , puis à un découpage et un report dans  $\mathbb{U}$  de la partie qui déborde (cf. Fig. 6.9). Cette application est inversible et conserve visiblement l'aire du carré. Codant un de ses points par deux demi-suites infinies de digits séparées par le point décimal, celle à droite pour l'abscisse  $X$  et celle à gauche pour l'ordonnée  $Y$ , on observe qu'une itération directe revient à un décalage du point décimal vers la droite comme pour l'itération dyadique (multiplication par 2), mais maintenant sans abandonner le digit qui passe de l'autre côté et sert maintenant au codage de l'ordonnée. De même, l'itération inverse correspond à un décalage vers la gauche du point décimal, de sorte que l'on se retrouve avec un décalage bidirectionnel exactement comme pour l'application en fer à cheval.

Pour voir apparaître le caractère fractal associé aux attracteurs chaotiques il faut combiner l'idée de divergence des trajectoires gouvernée par une itération de type "dyadique" dans les directions instables de l'attracteur et d'une "contraction des aires" appropriée pour rendre compte de la réduction du nombre des états accessibles due à la dissipation. Ceci s'obtient facilement à partir de (6.4) en remplaçant le coefficient de contraction 1/2 par un facteur  $r/2$ , " $r = 1$ " correspondant au cas conservatif et " $r < 1$ " au cas dissipatif (voir

<sup>5</sup>Ici, le soulignement remplace le point décimal utilisé lors de l'étude des trajectoires de l'itération dyadique.

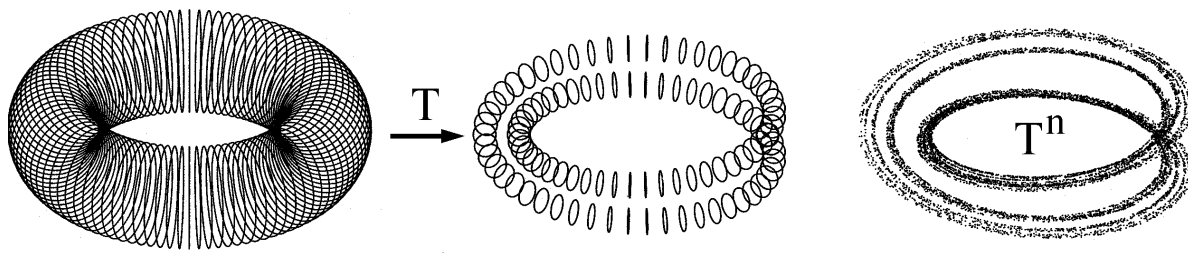


Figure 6.10: Attracteur solénoïdal de Smale. À gauche: définition de la transformation. À droite: résultat d'un grand nombre d'itérations (après élimination du transitoire) met en évidence la structure fractale de l'attracteur.

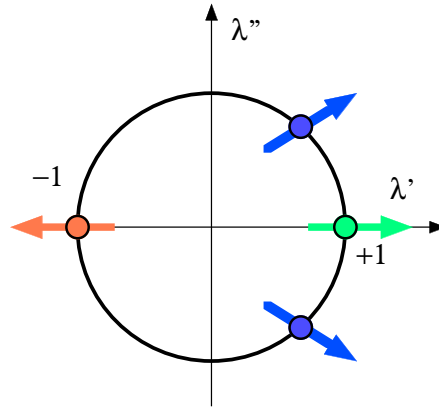


Figure 6.11: Bifurcations de codimension 1 d'un cycle limite: sortie du disque unité d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées, où d'une valeur propre réelle en  $\pm 1$ .

plus loin Fig. 7.4, p. 142). L'itération de cette transformation du boulanger *dissipative* produit effectivement une structuration cantorienne transverse dans la direction  $Y$  (contraction) de feuilletés organisés parallèlement à la direction  $X$  (étirement).

Un résultat analogue serait obtenu par une transformation qui produit l'attracteur solénoïdal de Smale: Partant d'un tore plein, on l'étire d'un facteur 2 dans la direction azimutale (au moyen d'une itération dyadique sur l'angle correspondant) tout en le comprimant sa section méridienne d'un facteur suffisant pour pouvoir replacer le tout convenablement torsadé en 8 et replié dans le tore de départ, de sorte que tout point de l'ensemble limite n'a qu'un précurseur et un seul, cf. Fig. 6.10.<sup>6</sup>

## 6.2 Routes classiques vers le chaos

Nous allons passer en revue quelques scénarios de transition vers le chaos. Par *scénario*, il faut essentiellement comprendre une conjecture sur le comportement d'un système donnant une "explication" simplifiée et plausible de la cascade de bifurcations qu'il subit lorsque les paramètres de contrôle varient. Cette conjecture repose sur une hypothèse de base et en déroule les conséquences génériques. L'hypothèse de base que nous privilégierons est celle d'un système bifurquant d'un cycle limite, dans l'esprit de Ruelle et Takens (cf. Fig. 6.11). La différenciation des scénarios découlera d'une hypothèse supplémentaire de résonance ou de non-résonance, de super-criticalité ou de sous-criticalité. Nous commencerons par le scénario original de Ruelle–Takens qui part d'une bifurcation super-critique pour une seconde pulsation non-résonnante puis nous examinerons en détail le cas de la cascade sous-harmonique qui se développe dans le cas super-critique à une résonance 1:2. Nous passerons ensuite aux différents scénarios intermittents qui interviennent dans le cas sous-critique et nous terminerons brièvement par les scénarios de crise.

<sup>6</sup>On notera cependant qu'il existe des exemples d'attracteurs chaotiques non-fractals, ainsi d'ailleurs que des attracteurs fractals non chaotiques.

## 6.2.1 Scénario de Ruelle–Takens

Le scénario original s’appuie sur plusieurs théorèmes dus à Ruelle, Takens (1971) et, plus tard Newhouse. Ceux-ci stipulent qu’un attracteur quasi-périodique à trois (resp. quatre) fréquences est structurellement instable vis à vis de perturbations de classe  $\mathcal{C}^2$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ) produisant des *attracteurs étranges*. Selon ce scénario, il faut donc s’attendre à voir un régime chaotique dès qu’un troisième mode devient dangereux. D’une certaine façon, ce résultat enrichit les possibilités offertes par les interactions non-linéaires qui, pour un système à deux fréquences, limitent leurs effets à la dégradation des régimes quasi-périodiques en régimes périodiques par le phénomène de l’accrochage (Ch. 5, §5.4.2).

### Dynamique sur un tore en dimension $n$

Le problème a été abordé concrètement par Grebogi, Ott et Yorke (1985) qui ont généralisé le modèle d’Arnold en dimension plus élevée, construisant des itérations à plusieurs variables cycliques de la forme

$$\theta_{i,k+1} = \theta_{i,k} + \alpha_i + \epsilon F_i(\{\theta_{j,k}\}), \quad \theta_i \in \mathbb{S}^1, \quad i = 1, \dots, d,$$

pour décrire l’évolution d’un système dynamique en section de Poincaré sur un tore de dimension élevée. Les  $\alpha_i$  représentent le rapport des différentes pulsations en présence à la pulsation du signal périodique servant d’horloge pour la section de Poincaré. Les  $F_i$  rendent compte des interactions, l’intensité des non-linéarités étant mesurée par un seul petit paramètre  $\epsilon$ . Lorsque le couplage est nul, le système est quasi-périodique à 100% si, comme on le suppose, les  $\alpha_i$  sont irrationnels et sans rapports rationnels entre eux. Le but du jeu est alors de déterminer les fractions respectives des différents régimes possibles en fonction de l’intensité des non-linéarités. Par exemple, un système à trois fréquences est décrit en section de Poincaré par deux variables cycliques  $(\theta_1, \theta_2)$ , de sorte que l’on peut définir deux nombres de rotation  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  selon (5.18) p. 105. Le régime complètement décroché (QP3) correspond alors à  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  irrationnels incommensurables. Différents types de régimes partiellement accrochés (QP2), e.g.,  $\hat{\theta}_1$  irrationnel et  $\hat{\theta}_2$  rationnel ou  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  irrationnels mais dans un rapport rationnel, peuvent exister à côté des régimes complètement accrochés, donc périodiques (P), et chaotiques (C).

La détermination de la fréquence relative des différents attracteurs possibles en fonction de  $\epsilon$  pour des  $F_i$  arbitraires donnés par leurs séries de Fourier a montré, sans grande surprise que les régimes QP dominaient à faible couplage pour être remplacé par des régimes totalement accrochés (P) ou chaotiques (C) à fort couplage. L’équivalent des langues d’accrochage du modèle d’Arnold peut être mis en évidence en variant les  $\alpha_i$  et  $\epsilon$  à  $F_i$  fixé.

Le principal mérite de la théorie de Ruelle–Takens est d’apporter un éclairage nouveau sur la “nature de la turbulence” en réconciliant déterminisme à court terme et stochasticité à long terme, ouvrant la voie à la découverte d’autres scénarios.

### Modèle concret de désagrégation du tore

Le modèle de Curry et Yorke est une itération à deux variables  $(X, Y)$  représentant une application de premier retour sur la section de Poincaré. Cette itération est définie en deux temps:

a) une transformation sur l’angle  $\phi$  argument du nombre complexe  $Z = X + iY$ :

$$\phi_{k+1/2} = \phi_k + \bar{\phi} \pmod{2\pi}$$

accompagnée d’un étirement du module  $\rho = |Z|$ :

$$\rho_{k+1/2} = (1 + \eta) \log(1 + \rho_k),$$

où  $\eta$  est un paramètre de contrôle mesurant l’instabilité du point fixe à l’origine  $\rho = 0$ .

b) un couplage entre module et phase correspondant à une transformation du non-linéaire du plan complexe sur lui même:

$$X_{k+1} = X_{k+1/2}, \quad Y_{k+1} = Y_{k+1/2} + X_{k+1/2}^2.$$

Le développement progressif du chaos est illustré sur la figure 6.12.

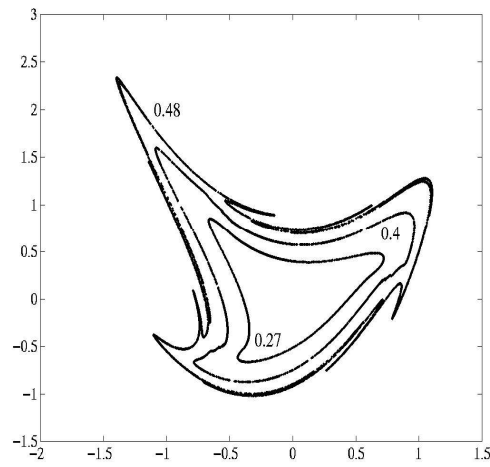


Figure 6.12: Modèle de Curry–Yorke, ici pour  $\bar{\phi} = 2$  (induisant une rotation d’un angle  $\sim 120^\circ$ ): après une bifurcation vers un régime quasi-périodique décrit par une courbe invariante  $\mathcal{C}$  topologiquement équivalente à un cercle ( $\eta = 0,27$ ), lorsque l’instabilité du point fixe à l’origine augmente ( $\eta = 0,4$  et  $0,48$ ), les itérés s’en écartent et les non-linéarités se font sentir plus fortement, le système devient chaotique en développant des corrugations fractales le long de  $\mathcal{C}$  selon un processus d’étirement-repliement caractéristique.

### Transition par quasi-périodicité en convection

La route vers le chaos observée par Bergé et Dubois (Saclay), en convection confinée avec une huile à nombre de Prandtl élevé ( $P \simeq 130$ ) semble un bon représentant du scénario conçu par Ruelle et Takens. La visualisation de l’écoulement a permis l’identification de deux modes d’oscillation: une pulsation périodique de la couche limite thermique, et l’apparition d’une “plume” oscillante dans un coin de la cellule (cf. Fig.6.13).

Les mesures de vitesse en un point par anémométrie LASER ont été pratiquées, permettant de caractériser quantitativement les différents régimes observés. Voici schématiquement la séquence simplifiée suivie: 1) convection stationnaire de  $R_c$  à  $R \simeq 215R_c$ , puis bifurcation vers un régime mono-périodique ( $\omega_1$ ); 2) apparition d’un second mode ( $\omega_2$ ) pour  $R \simeq 250R_c$  correspondant à un régime bipériodique<sup>7</sup> (Fig. 6.14, haut); 3) pour  $R > 305R_c$ , le chaos temporel se manifeste par une modulation chaotique du comportement quasi-périodique se traduisant par la montée d’un bruit de basse fréquence (Fig. 6.14, bas).

## 6.2.2 Scénario sous-harmonique

### Modélisation du problème

En présence d’une résonance 1:2, on peut se limiter à une variable réelle  $X$  gouvernée par une itération de la forme

$$X_{k+1} = F_r(X_k) = -(1+r)X_k - X_k^2, \quad (6.5)$$

qui rend compte de la bifurcation vers une période 2 en  $r = 0$ . La conjecture qui fait accéder cette itération au rang de prototype pour le scénario consiste simplement à l’utiliser en dehors du régime asymptotique  $r \rightarrow 0$  pour lequel elle est valide, et dans lequel on peut mettre (6.5) sous forme normale en repoussant la non-linéarité à l’ordre 3 par un changement de variable non-linéaire. Ici nous étudions (6.5) après le changement de variable qui la met sous la forme

$$X_{k+1} = F_r(X_k) = 4rX_k(1 - X_k). \quad (6.6)$$

<sup>7</sup>La simplification vient de ce que nous négligeons ici l’alternance du régime bipériodique pour lequel le rapport de fréquence  $\omega_2/\omega_1$  est irrationnel et de régimes périodiques accrochés sur une valeur rationnelle de  $\omega_2/\omega_1$  dans certaines plages de paramètre de contrôle.

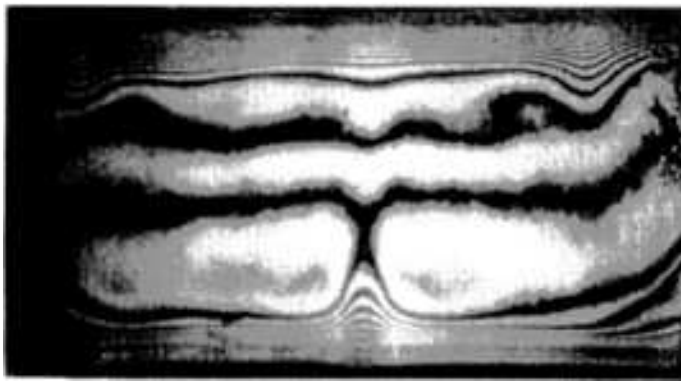


Figure 6.13: Visualisation des isothermes dans l’huile par interférométrie différentielle: les variations d’indice induites par les gradients de température sont à l’origine des franges d’interférence observées. La localisation des “oscillateurs” dans des régions physiquement bien distinctes explique la faiblesse de leur couplage mutuel et, par suite, l’observabilité de régimes quasi-périodiques puis du chaos à la Ruelle–Takens. (D’après Bergé et Dubois, 1981.)

Dans les applications, on peut rencontrer (6.6) sous d’autres formes équivalentes:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 1 - aX_k^2, \\ X_{k_1} &= a - X^2, \end{aligned} \tag{6.7}$$

où  $a$  est alors le paramètre de contrôle.

L’itération (6.5) utilisée hors du voisinage de la bifurcation, e.g. sous l’une des formes (6.6) ou (6.7), n’est pas inversible. Ceci la discrédite en tant qu’application de premier retour. On peut néanmoins l’utiliser de la même façon que l’application de Lorenz (cf. Ch. 1, Fig. 1.7, p. 10) en n’y voyant qu’une représentation de la partie intéressante de la dynamique, justifiée par le fait que le système réel —plongé dans un espace de dimension plus élevée— est suffisamment dissipatif pour que la dynamique dans les directions transverses soit écrasée au point qu’une seule variable soit suffisante pour en rendre compte. L’addition d’une dimension supplémentaire qui explicite ce processus est illustrée ici à l’aide du *modèle de Hénon* défini par

$$X_{k+1} = 1 - aX_k^2 + Y_k, \quad Y_{k+1} = bX_k. \tag{6.8}$$

Il est immédiat de constater que ce modèle déploie la dynamique décrite par (6.7): le second paramètre  $b$  contrôle en effet l’“épaississement” de la parabole  $X \mapsto 1 - aX^2$  comme le montre l’illustration pour  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  présentée sur la Fig. 6.15, la limite  $b \rightarrow 0$  correspondant à une dissipation infinie.

### La cascade sous-harmonique

Revenons à (6.7) et passons à l’étude détaillée de son diagramme de bifurcation présenté sur la Fig. 6.16. Tout d’abord, il n’est pas difficile de vérifier que pour  $r \in [0, 1]$  aucun point  $X \in [0, 1]$  ne quitte l’intervalle puisque le transformé du point  $X_c = 1/2$  correspondant au maximum de  $F_r$ , appelé *point critique* de l’application, est simplement donné par  $F_r(X_c) = r < 1$ . Étudiant ensuite les points fixes de  $F_r$  on trouve  $X_* = 4rX_*(1 - X_*)$  soit  $X_u = 0$  et  $X_{(0)} = 1 - 1/4r$ . Le point  $X_u = 0$  échange sa stabilité avec  $X_{(0)}$  lorsque ce dernier rentre dans l’intervalle  $[0, 1]$ , c’est à dire pour  $r_{(0)} = 1/4$ .<sup>8</sup>

Suivant le point fixe non-trivial  $X_{(0)}$ , on observe que  $F'_r(X_{(0)}) = 2 - 4r$  varie continûment de  $+1$  à  $-1$  lorsque  $r$  augmente de  $1/4$  à  $3/4$ . Elle passe par 0 en  $r = r_{(0)}^{ss} = 1/2$ , valeur dite *super-stable* car la convergence des itérés vers le point fixe stable, juste situé en  $X_c$ , est alors plus rapide que la convergence géométrique observée lorsque  $0 < |F'_r| < 1$ .

<sup>8</sup>Les indices de la forme  $(n)$  pour  $r$  et  $(n, k)$  pour  $X$  sont relatifs à la période du cycle observé de la forme  $2^n$ . Pour  $n = 0$ , le cycle de période 1 de comporte qu’un seul point et l’on peut simplement noter  $X_{(0)}$  mais pour  $n > 0$ ,  $k$  prend  $2^n$  valeurs permettant d’indexer les  $2^n$  points du cycle.

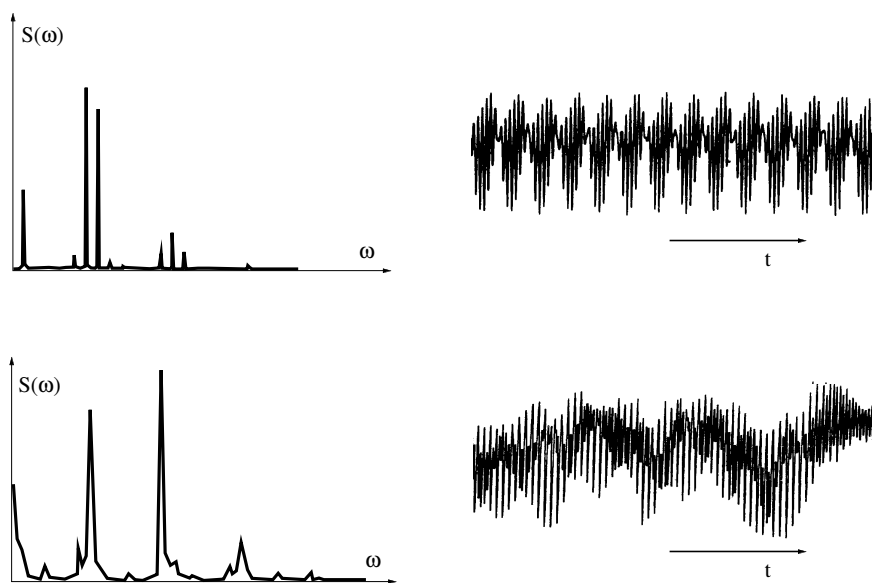


Figure 6.14: Spectres du signal de vitesse mesuré en un point de la cellule. En régime bipériodique (en haut), le spectre est composé de deux raies principales et de leurs combinaisons simples. Le régime chaotique est caractérisé par des raies au pied élargi et par la présence de bruit de basse fréquence ( $\omega \approx 0$ ) dans le spectre (d'après Bergé et Dubois, 1981).

En  $r = r_{(1)} = 3/4$ , le point  $X_{(0)}$  est instable et subit une bifurcation sous-harmonique. Cette première étape est illustrée sur la partie gauche de la Fig. 6.17. La transition s'effectue vers un cycle de période 2,  $\{X_{(1,1)}, X_{(1,2)}\}$ , tel que  $X_{(1,2)} = F_r(X_{(1,1)})$  et  $X_{(1,1)} = F_r(X_{(1,2)})$ . Pour en étudier la stabilité on doit calculer la dérivée de la fonction composée ( $F_r \circ F_r$ ). Celle-ci part de 1 en  $r = r_{(1)} = 3/4$  passe par 0 en  $r_{(1)}^{ss} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$  et atteint  $-1$  en  $r_{(2)} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{6})$ , indiquant la bifurcation vers un cycle de période 4 (cf Fig. 6.17, gauche)

Le processus se répète alors en une cascade infinie de bifurcations sous-harmoniques (doublements de période) appelée *cascade directe*. Les points de bifurcation  $r_{(n)}$  convergent vers  $r_{(\infty)} = 0,89248\dots$  comme le suggèrent les résultats consignés dans le tableau 6.1.

La figure 6.18 (gauche), portant en abscisse le logarithme de la distance à  $r_{(\infty)}$ , illustre le fait que la

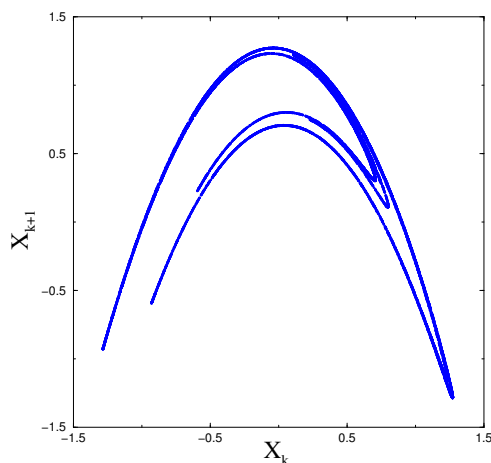


Figure 6.15: Modèle de Hénon standard.

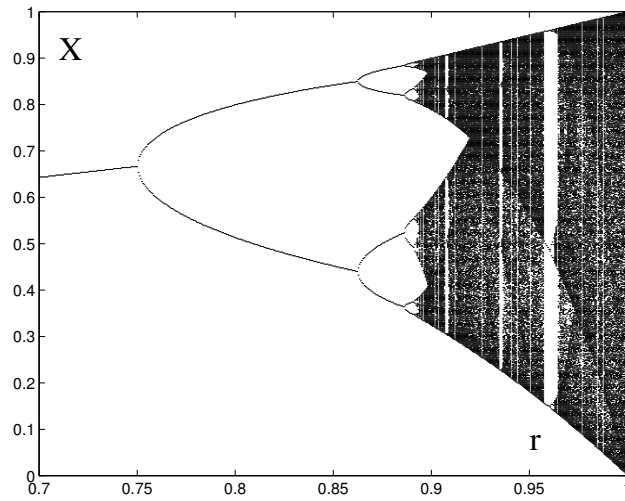


Figure 6.16: Diagramme de bifurcation du modèle logistique.

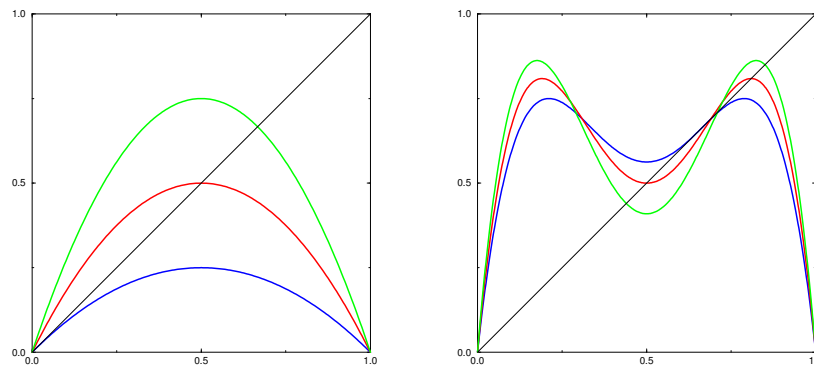


Figure 6.17: Bifurcation vers la période 2. à gauche  $F_r(X)$  pour  $r = 1/4, 1/2$  et  $3/4$  de l'apparition du point de période 1 non-trivial à sa déstabilisation en passant par le cas super stable. à droite: même chose mais pour  $f \circ f$  et le cycle de période 2 avec  $r = 3/4, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$  et  $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{6})$ .

Table 6.1: Cascade sous-harmonique: valeurs critiques et valeurs super-stables.

$n$	$T_{(n)}$	$r_{(n)}$	$r_{(n)}^{ss}$
0	1	1/4	1/2
1	2	3/4	0,80901 ...
2	4	0,86237 ...	0,87464 ...
3	8	0,88602 ...	0,88866 ...
4	16	0,89218 ...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	$\infty$	0,89248 ...	0,89248 ...



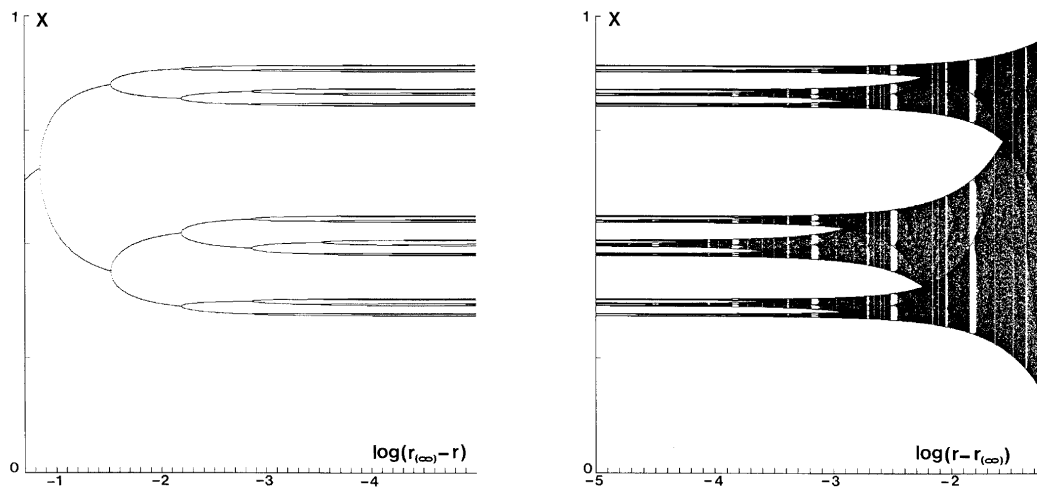


Figure 6.18 : À Gauche: cascade directe en coordonnées semi-logarithmiques, l'intervalle entre deux bifurcations successives est sensiblement constant. À droite: cascade inverse suivant une progression géométrique de même décrement que la cascade directe.

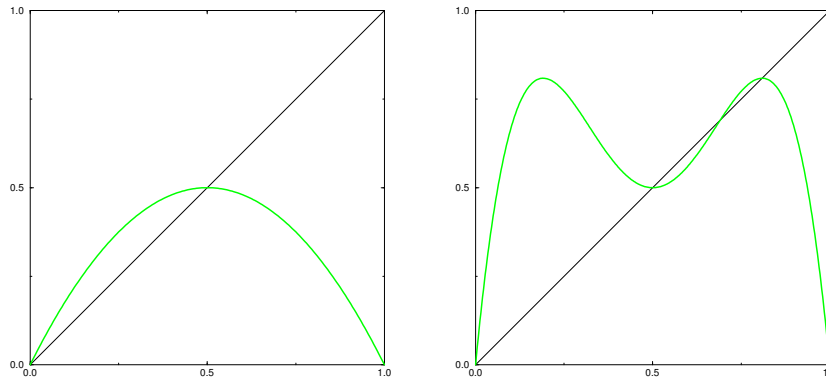


Figure 6.19 : La méthode de renormalisation traduit quantitativement la ressemblance entre les itérations pour les deux valeurs super-stables consécutives, ici  $r_{(0)}^{ss}$  (a) et  $r_{(1)}^{ss}$  (b). Schématiquement, elle consiste à déterminer la transformation qui fait passer de (a) à la partie centrale de (b).

convergence vers cette valeur est géométrique. On peut donc la caractériser par son décrement

$$\delta_{(n)} = \frac{r_{(n)} - r_{(n-1)}}{r_{(n+1)} - r_{(n)}},$$

mesurant ainsi  $\delta_{(1)} \simeq 4,449; \delta_{(2)} \simeq 4,751; \dots$ , et constatant que

$$\delta_{(n)} \rightarrow \delta = 4,6692 \dots$$

Cette quantité est une constante universelle (Feigenbaum, 1978) qui ne dépend que de l'ordre  $m$  de l'application à son point critique  $X_c$ , i.e.,  $F_r(X) \sim |X - X_c|^m$ . Ici, nous avons  $m = 2$  qui représente le cas habituel du développement d'une fonction au voisinage d'un maximum générique.

Une valeur approchée du décrement peut être obtenue par une méthode de *renormalisation* qui réalise une transformation simultanée de l'espace des phases  $X$  et l'espace du paramètre  $r$  appliquant la bifurcation “ $(n) \rightarrow (n+1)$ ” sur la bifurcation “ $(n-1) \rightarrow (n)$ ” comme l'illustre la Fig. 6.19.

### Chaos et périodicité au delà de $r_{(\infty)}$

En  $r_{(\infty)}$  la dynamique est de période infinie mais pas encore chaotique car elle reste trop ordonnée par le processus de la cascade, l'attracteur correspondant n'en a pas moins une structure fractale. Au delà de  $r_{(\infty)}$ ,

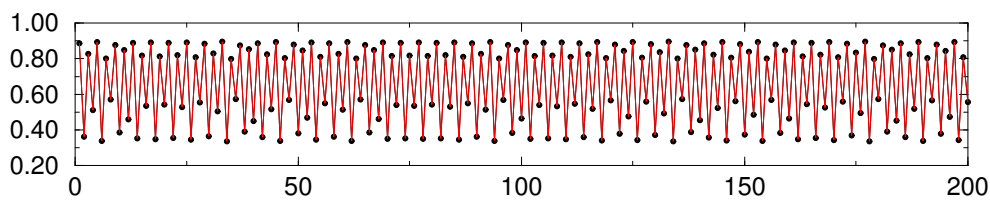


Figure 6.20 : Série temporelle faiblement chaotique dans le régime à 4 bandes.

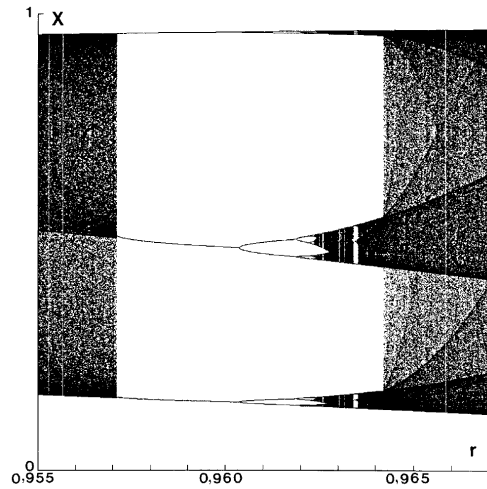


Figure 6.21 : Fenêtre de période 3.

la situation est très complexe dans l'espace du paramètre  $r$ , avec une alternance de régimes périodiques et chaotiques. Pour  $r$  voisin de  $r_{(\infty)}$ , le chaos reste encore très faible. On peut s'en convaincre en considérant la Fig. 6.20 qui illustre la série temporelle correspondant à une trajectoire chaotique pour  $r = 0,89500$ , dans un régime de bande de période 4. La trajectoire échantillonne apparemment aléatoirement 4 bandes mais prises dans le même ordre régulier que pour la période 4 correspondante dans la cascade directe. Un processus de regroupement de bandes, appelé *cascade inverse*, miroir du processus de dédoublement de la cascade directe, prend alors place. Il est illustré sur la Fig. 6.18 (droite).

La complexité du comportement fonction du système dans l'espace du paramètre  $r$  découle de l'existence de fenêtres de périodicité. La Fig. 6.21 illustre le cas de la fenêtre de période 3, la plus large et la dernière à apparaître des fenêtres de période impaire.

Balayant cette fenêtre par valeurs croissantes de  $r$ , on observe qu'elle s'installe brutalement par effondrement du régime chaotique présent immédiatement avant. Ce régime chaotique particulier est dit *intermittent* car il est formé de longues séquences d'évolution régulière ("laminaires") quasiment périodique de période 3 interrompues par des bouffées chaotiques de durée variable durant lesquelles le système explore la totalité de son espace invariant. Ce comportement est illustré sur la Fig. 6.22 (haut). Nous y reviendrons dans la section suivante car cette transition "régime périodique  $\leftrightarrow$  chaos" est un scénario à part entière. Continuant à augmenter  $r$ , on observe ensuite que la période 3 se stabilise, Fig. 6.22 (bas).

Puis la période 3 se dédouble en une période 6 puis 12, 24, etc. suivant exactement le même scénario sous-harmonique que précédemment, excepté que la période de base est 3 au lieu de 1. Enfin, il arrive un moment où l'attracteur semble exploser pour donner un comportement chaotique explorant un domaine notablement plus vaste. Ce phénomène est appelé *crise*. Le comportement correspondant est illustré sur la figure Fig. 6.23. On y observe qu'avant la crise (en haut) les itérés pris de 3 en 3 ne changent pas de bande alors qu'après (en bas) ils sautent d'une bande à l'autre de façon intermittente. Cette *intermittence de crise* est, pour l'essentiel, semblable à l'intermittence observée précédemment, la différence tenant seulement au caractère chaotique à petite échelle des séquences "régulières" entre les bouffées.

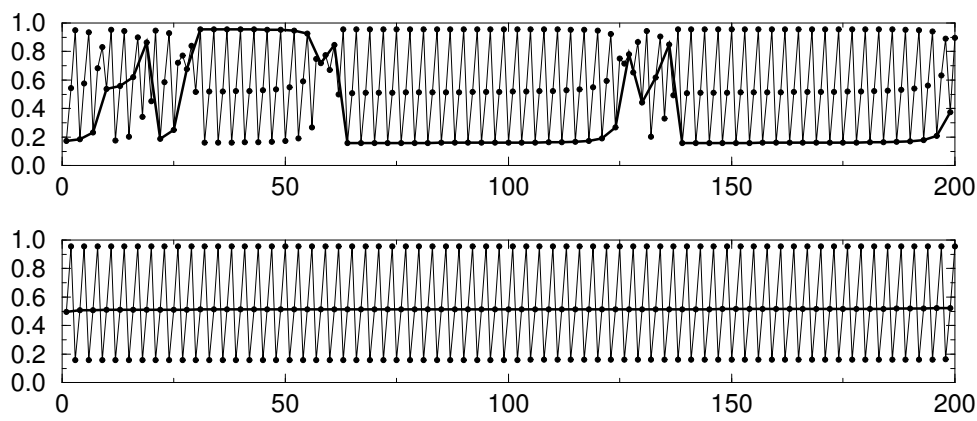


Figure 6.22: En haut: Comportement intermittent observé pour  $r = 0,95705$ . En bas: Comportement strictement périodique de période 3 pour  $r = 0,95710$ . (Les lignes continues épaisses relient les itérés pris de 3 en 3.)

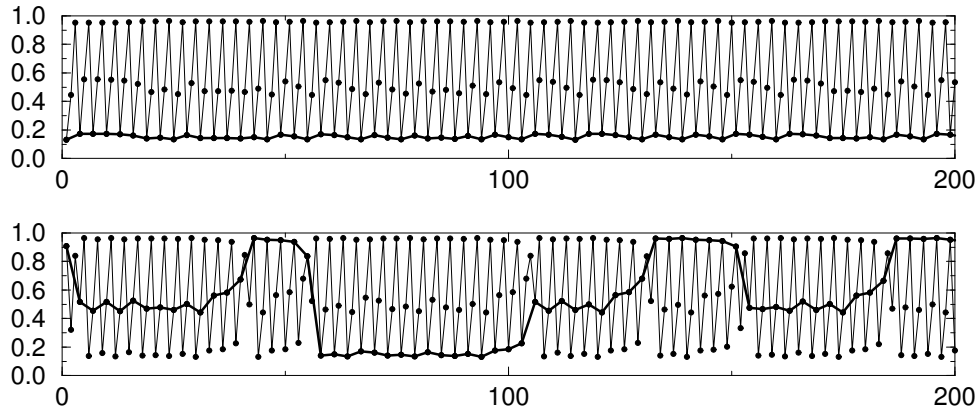


Figure 6.23: En haut: Comportement chaotique par bande (de période 3) observé pour  $r = 0,9642$ . En bas: Intermittence de crise sur fond de période 3 pour  $r = 0,9645$ . (Les lignes continues épaisses relient les itérés pris de 3 en 3.)

La cascade associée à la période 1 se termine lorsque l'intervalle  $[0, 1]$  cesse d'être invariant, c'est à dire pour  $r = 1$ , de sorte que, sauf pour un ensemble de conditions initiales de mesure nulle appartenant à un ensemble de Cantor (voir plus loin) les itérés divergent rapidement vers  $-\infty$ , le système subissant une crise autrement plus dramatique mais de même nature. Le chaos est maximal pour  $r = 1$  (Fig. 6.24) car on peut, par une transformation non-linéaire mettre en correspondance l'itération et un décalage de Bernoulli.

L'origine de la complexité dans l'espace du paramètre  $r$  est alors évidente car, si la fenêtre de période 3 représente une miniature de la cascade originale, dans la cascade inverse de cette période on va retrouver une fenêtre de période 3 greffée sur la période 3 donc de période 9, qui elle-même va présenter une fenêtre périodique, etc. Rappelant que (i) la période 3 n'est que la dernière à apparaître, que (ii) les périodes impaires, 5, 7, etc. sont apparues avant par ordre décroissant, chacune s'installant par une transition intermittente,

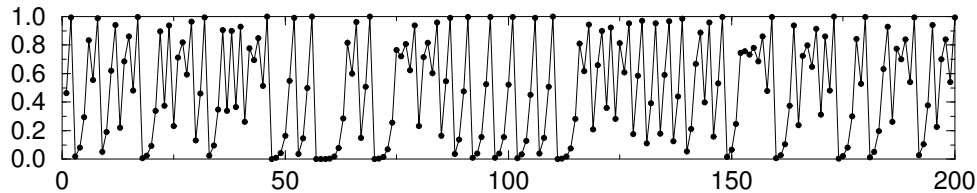


Figure 6.24: Série temporelle chaotique pour  $r = 1$ .

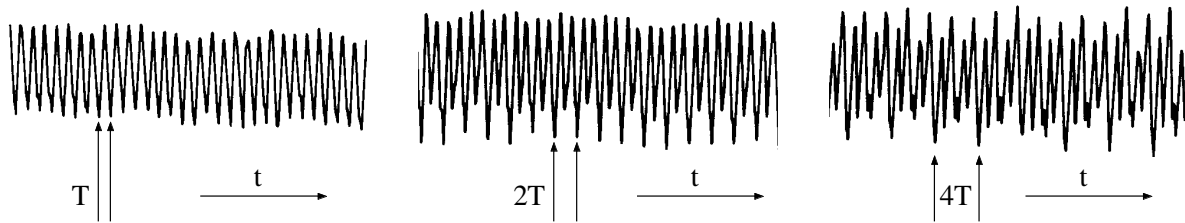


Figure 6.25: Premières étapes de la cascade de bifurcations sous-harmoniques illustrée par la série temporelle du signal de température mesuré en un point (d’après Libchaber et Maurer, 1980).

développant sa cascade directe puis sa cascade inverse jusqu’à sa crise finale, avec toute ses fenêtres dans la cascade inverse, et que (iii) des périodes paires différentes de celles issues d’une cascade sous-harmoniques ont également présentes, on déduit que l’ensemble des valeurs de  $r$  pour lequel le système admet des trajectoires chaotiques doit présenter une structure d’ensemble de Cantor. Cet ensemble n’est cependant pas “maigre,” i.e. de mesure nulle, comme celui qui découle du processus de construction classique mais “gras”: la probabilité de choisir une valeur de  $r$  produisant un régime chaotique reste finie car les fenêtres de périodicité ne soustraient pas des domaines en  $r$  suffisants, tout comme l’escalier du diable produit par l’accrochage de fréquence reste incomplet lorsque les non-linéarités sont faibles. On peut se faire une idée de cette complexité dans l’espace du paramètre  $r$  en retournant à la figure 6.18 (droite) qui présente une version logarithmiquement dilatée du diagramme de bifurcation sur l’intervalle  $[r_{(\infty)}, 1]$ .

Le modèle (6.6) ou l’une quelconque de ses formes équivalentes est intéressant car, en plus de nous offrir le détail d’un scénario particulier, il nous introduit à l’intermittence et aux crises. Le scénario lui-même, universel, est relativement fréquent: on peut par exemple l’observer à deux reprises sur le modèle Lorenz (cf. Ch. 1) et dans de nombreuses expériences.

### Cascade sous-harmonique en convection

La première observation de cascade sous-harmonique en convection est due à Libchaber et Maurer (ENS Ulm). L’expérience était réalisée dans l’hélium liquide ( $P \simeq 1$ ), en géométrie confinée parallélépipédique. Le scénario commence par l’installation d’une convection stationnaire de  $R = R_c$  jusque  $\simeq 30R_c$ , valeur à laquelle se produit une bifurcation de Hopf super-critique vers un régime périodique qui persiste jusqu’en  $R \simeq 39,5R_c$ . Une seconde période s’introduit; cette quasi-périodicité à deux fréquences (régime bipériodique) existe jusqu’en  $R \simeq 40,5R_c$  où la seconde période d’oscillation s’accroche à une valeur double de la première. Un doublement de période ( $4T$ ) se produit ensuite pour  $R \simeq 42.7R_c$  (Fig. 6.25).

Après quelques autres dédoublements de période, le système apparaît chaotique pour  $R > 43R_c$ . Les raies présentes dans le spectre,<sup>9</sup> restées fines tant que le système n’était pas chaotique, s’élargissent alors à leur base.

### 6.2.3 Autres scénarios

#### Intermittence

Jusqu’à présent nous avons considéré un processus essentiellement “continu” dans l’espace des phases: après la bifurcation, l’attracteur reste en effet dans le voisinage immédiat de l’ensemble limite qui s’est déstabilisé. Il existe cependant des circonstances où des discontinuités s’introduisent spontanément. C’est particulièrement le cas de la bifurcation nœud-col qui voit la fusion puis la disparition d’une paire de points fixes, l’un stable, l’autre instable. En section de Poincaré, ceci se produit génériquement à la bifurcation d’une paire de cycle limites résonnants de même pulsation (résonance 1:1). S’il existe un attracteur (régulier ou chaotique) à distance finie de l’ensemble limite qui se déstabilise, on observe transition “discontinue” vers cet attracteur.

<sup>9</sup>Le spectre  $S(\omega)$  est donné par le carré du module de la transformée de Fourier de la série temporelle du signal fonction de  $\omega$ .

Sinon, l'ensemble non-errant recoupe le voisinage de l'ancien attracteur. Une fois retombé dans ce voisinage, le système s'en écarte lentement. Puis lorsqu'il est assez loin, il se met à "vagabonder" dans l'espace des phases avant d'y revenir, d'où une alternance qualifiée d'*intermittente* entre des *phases laminaires* (également appelées "intermissions") réminiscentes du comportement observé avant la bifurcation et *bouffées turbulentes* qui témoignent de la structure de l'espace des phases à grande distance.

Les deux intermittences observées de chaque côté de la fenêtre de période 3 sont de ce type. Ici nous nous intéresserons plus particulièrement à l'intermittence qui voit la déstabilisation d'un régime périodique. La modélisation générique de cette bifurcation suppose donc une conjecture additionnelle sur la structure globale de l'espace des phases qui permette le "recyclage" des trajectoires dans un voisinage approprié de l'attracteur qui se déstabilise. Par souci de simplicité on peut supposer que l'on a affaire à une dynamique définie sur une variété périodique (tore) et admettre que la décorrélation au cours des bouffées turbulentes est assurée par une application partout dilatante telle que  $X \mapsto 2X \pmod{1}$ .

La perte de stabilité d'un cycle limite (point fixe de l'application de Poincaré) peut se faire essentiellement de plusieurs façon différentes selon la valeur de la pulsation qui entre en compétition avec celle du cycle qui bifurque (cf. Fig. 6.11, p. 119). Écartant les résonances fortes 1:3 (ou 2:3) et 1:4 (ou 3:4) qu'il conviendrait d'étudier pour elles-mêmes dans les cas particuliers peu fréquents où elles interviennent, nous nous limiterons aux résonances fortes 1:1 et 1:2 ainsi qu'au cas non-résonnant (ou faiblement résonnant). Dans chacune de ces situations, on peut envisager soit une bifurcation super-critique et continue, soit une bifurcation sous-critique et discontinue. Le cas non-résonnant super-critique est à la base du scénario de Ruelle–Takens. Le scénario sous-harmonique, globalement continu, se développe lorsque la première bifurcation par doublement de période (résonance 1:2) est super-critique. Pour une résonance 1:1, le cas continu est décrit soit par  $X_{k+1} = (1+r)X_k - X_k^3$  en présence de symétrie  $X \mapsto -X$  (bifurcation fourche), soit par  $X_{k+1} = (1+r)X_k - X_k^2$  en l'absence de cette symétrie. Ce dernier correspond à un simple échange trans-critique de stabilité. Ces deux cas sont non-génériques car il suppose la persistance du point fixe, ce qui n'est pas le cas de la bifurcation tangente qui marque la coalescence d'une paire de points fixes de stabilité opposée. Les trois types d'intermittence que nous allons passer en revue sont donc associés d'une part aux versions sous-critiques complémentaires du scénario de Ruelle–Takens et du scénario sous-harmonique et d'autre part à la bifurcation tangente (valeur propre 1, générique, sans symétrie).<sup>10</sup>

### Intermittence de Type I

La bifurcation se produit à la résonance 1:1 correspondant à  $\lambda = +1$  et se traduit génériquement par une bifurcation tangente entraînant la disparition d'une paire de points fixes. Le comportement du système décrit par une itération de la forme

$$X_{k+1} = r + X_k + X_k^2 \tag{6.9}$$

est illustré sur la Fig. 6.26. Lorsque  $r < 0$  on a deux points fixes  $X_{(\pm)} = \pm\sqrt{-r}$ ,  $X_{(-)}$  est stable et  $X_{(+)}$  instable.  $X_{(-)}$  attire toutes les trajectoires telles que  $X_0 < X_{(+)}$ . En  $r = 0$ , on assiste à la fusion des deux points fixes: " $X = 0$ " est alors semi-stable. Enfin pour  $r > 0$  les points fixes ont disparu et un "tunnel" s'est ouvert entre le graphe de  $F_r$  et la première bissectrice. Dans ce tunnel les itérés cheminent lentement, s'approchent de l'origine ("fantôme" de point fixe) puis s'éloignent.

Si la structure globale de l'espace des phases le permet, le recyclage au voisinage de l'origine induit le comportement intermittent illustré sur la Fig. 6.27 tiré d'une simulation du modèle de Lorenz pour  $R = 166,35$  (cf. Ch. 1). Ce type d'intermittence explique également le comportement observé lors de la naissance de la période 3 pour l'application logistique.

<sup>10</sup>On notera que la quasi-périodicité qui se développe lors du décrochage dans le modèle d'Arnold, équation (5.17) p. 5.17, présente un comportement intermittent non-chaotique, parfois appelé "intermittence de phase", cf. Fig. 75.7, p. 106.

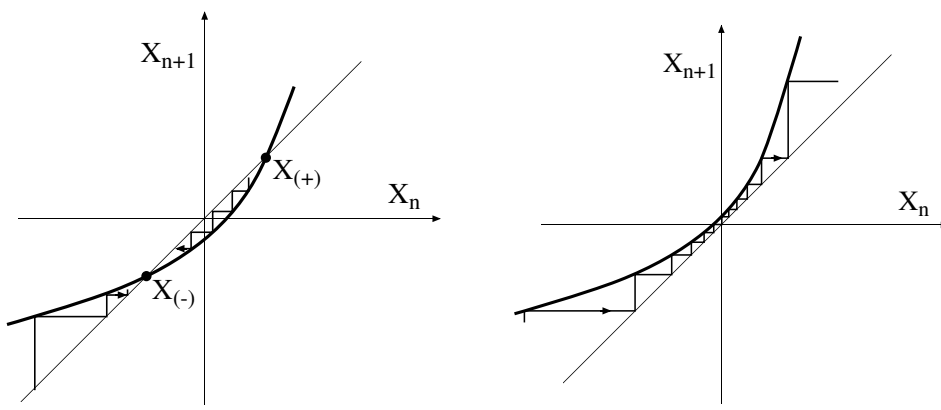


Figure 6.26 : Mécanisme de l'intermittence de Type I. à gauche: paire de points fixes de stabilité opposée en dessous du seuil. à droite: les itérés cheminent lentement dans une région de l'espace des phases correspondant au voisinage de la paire de points fixes disparue au dessus du seuil.

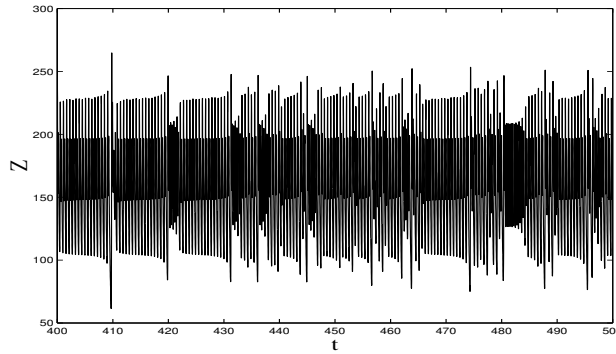


Figure 6.27 : Série temporelle typique de l'intermittence de Type I. L'approche puis l'écartement du fantôme du cycle limite, relativement symétriques, sont typiques de ce type d'intermittence (modèle de Lorenz pour  $r = 166,35$ ).

### Intermittence de type II et III

La différence principale entre ces deux cas et le précédent tient à la persistance du point fixe, directement responsable du fait que l'on peut avoir des durées de phase laminaire arbitrairement longues lorsque qu'une telle phase démarre infiniment près de celui-ci. Considérons l'itération (6.5) complétée par des termes cubiques, soit

$$X_{k+1} = -(1+r)X_k - X_k^2 + \eta X_k^3,$$

de sorte que

$$X_{k+2} \simeq (1+2r)X_k - 2(1+\eta)X_k^3, \quad (6.10)$$

qui n'est autre que l'itération décrivant la déstabilisation par une valeur propre  $+1$  en présence de symétrie  $X \mapsto -X$ . Le caractère de la bifurcation dépend maintenant du signe de  $1+\eta$ . Tant que  $1+\eta > 0$  (donc en particulier pour  $\eta = 0$ ), la bifurcation est super-critique mais si  $\eta < -1$ , elle devient sous-critique et les points fixes près de  $X = 0$  apparaissent pour  $r < 0$  et sont instables. Pour  $r > 0$  il n'y a pas de point fixe non-triviaux dans le voisinage de l'origine. L'intermittence de type II est obtenue lorsque la bifurcation décrite par le modèle

$$Z_{k+1} = \lambda Z_k - g|Z|^2 Z \quad (6.11)$$

dans le cas non-résonnant est sous-critique, c'est à dire lorsque  $\mathcal{R}e(\lambda g^*) < 0$ . Négligeant le rôle de la rotation on se ramènerait à une itération de la forme

$$X_{k+1} = (1+r)X_k + X_k^2$$

pour  $X = |Z|^2$  qui donne presque le bon comportement statistique de (6.11) mais pas tout à fait, indiquant des effets bidimensionnels non-triviaux. Différents régimes intermittents comparables à (6.10) et (6.2.3) ont été étudiés sur la base d'un modèle plus général

$$X_{k+1} = (1+r)X_k + |X_k|^\alpha, \quad (6.12)$$

$\alpha$  prenant des valeurs variées.

### Distribution des durées de phases laminaires

Le calcul repose sur une approximation continue de l'évolution décrite par l'itération au voisinage du point fixe. En effet, d'un pas de temps au pas de temps suivant, le système a peu varié et on peut passer de l'équation aux différences  $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$  pour  $\Delta k = 1$  à une équation différentielle en  $k$  rendu continu soit  $dk$  pour un incrément infinitésimal  $dX$ . Considérons par exemple (6.9), nous avons:

$$\Delta X_k = X_{k+1} - X_k = r + X_k^2$$

dont la version continue

$$\frac{dX}{dk} = r + X^2 \quad (6.13)$$

est valide pour  $r \ll 1$  et  $X \ll 1$ . Cette équation s'intègre pour donner

$$k\sqrt{r} = \text{Arctg} (X/\sqrt{r}),$$

prenant pour origine des temps l'instant où  $X$  passe par 0. L'équation différentielle (6.13) ne décrit que la séquence centrale d'une phase laminaire mais donne une indication de nature dimensionnelle sur sa durée. En effet, d'un point de vue concret, le début (resp. la fin) d'une phase laminaire correspondent à des valeurs de  $X$  "loin" de l'origine, ce que l'on traduit par  $X \rightarrow -\infty$  (resp.  $+\infty$ ) dans le contexte différentiel. Dans ce cas, puisque  $\text{Arctg}(u \rightarrow \pm\infty) = \pm\pi/2$  la durée des phases laminaires se trouve bornée supérieurement par

$$k_{\max} \sim \pi/\sqrt{r}.$$

Cette *loi d'échelle* liant  $k_{\max}$  à la distance au point de bifurcation est bien vérifiée expérimentalement. Pour aller plus loin, il faut remarquer que la statistique détaillée des durées de phase laminaire dépend du processus de réinjection. Si la probabilité de réinjection est uniforme au voisinage de l'origine, on trouve  $\langle N \rangle \sim 1/\sqrt{r}$ : l'intensité du chaos augmente donc très progressivement avec la fréquence des bouffées turbulente qui varie comme  $\sqrt{r}$ .

La technique de conversion d'une itération en une équation différentielle s'étend immédiatement aux autres intermittences, notamment celle décrite par (6.12), ce qui permet de déterminer leurs signatures statistiques.

**Intermittence de Type I en convection:** Ce scénario classique est illustré ici par une autre expérience de Bergé et Dubois avec le même fluide et la même cellule que pour la transition par quasi-périodicité mais partant d'un mode de convection et un mécanisme d'instabilité secondaire légèrement différent. Ici, une "goutte chaude" est advectée par la circulation générale, induisant une modulation périodique de température sur son passage. Le scénario est en deux étapes (cf. Fig. 6.28): 1) convection stationnaire, puis régime périodique pour  $R \simeq 250R_c$ , accessoirement suivie de peu par une seule bifurcation sous-harmonique; 2) pour  $R = 290R_c$ , apparition de bouffées chaotiques intermittentes perturbant de plus en plus fréquemment le régime périodique antérieur à mesure que l'on augmente  $R$ ; la montée du chaos reste donc également progressive, mais de façon différente.

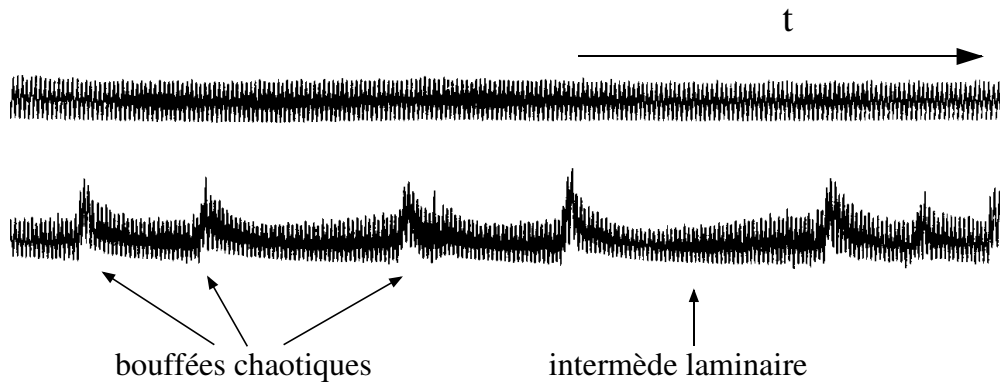


Figure 6.28: Transition par intermittence: le régime périodique (intermèdes “laminaires”) est interrompu irrégulièrement par des bouffées chaotiques, de plus en plus souvent à mesure que l’on s’éloigne du seuil d’intermittence (d’après Bergé et coll., 1979).

### Crises et autres scénarios

En étudiant la cascade sous-harmonique nous avons assisté en fin de cascade inverse de la fenêtre de période 3 à l’extension brutale de l’attracteur d’un sous-intervalle invariant à un intervalle plus vaste. Ceci se produit lorsque le support de l’attracteur entre en collision avec un élément instable comme on le voit pour le modèle (6.6) en  $r = 1$ . Dans ce cas, c’est la borne inférieure de l’intervalle invariant qui rencontre le point fixe trivial à l’origine. Ce type de transition est appelé une *crise*. De tels phénomènes permettent d’expliquer le brusque élargissement d’un attracteur (cf. le cas de l’application logistique) ou la restauration statistique de la symétrie d’un attracteur par basculement intermittent entre deux composantes qui se répondent dans une opération de symétrie.

Une première approche des propriétés statistiques au voisinage d’une crise peut être développée sur le modèle de l’itération en accent circonflexe (“tent map” en anglais, cf. Fig. 6.29):

$$X_{k+1} = 2rX_k \quad \text{pour } X_k < 1/2, \quad X_{k+1} = 2r(1 - X_k) \quad \text{pour } X_k > 1/2, \quad (6.14)$$

que l’on peut voir comme une version rectifiée de l’itération logistique. Lorsque  $r < 1$ , une condition initiale prise dans l’intervalle  $[0, 1]$  y reste indéfiniment (intervalle invariant). Pour  $r = 1$ , l’attracteur entre en collision avec le point fixe instable à l’origine. Enfin pour  $r > 1$ , presque toute condition initiale  $X_0 \in [0, 1]$  finit par être éjectée de l’intervalle  $[0, 1]$  car l’un des itérés finit par tomber dans l’image inverse du domaine  $F_r(X) > 1$ , intervalle de largeur  $\mathcal{O}(r - 1)$  autour de  $X = 1/2$ . On obtient ainsi un transitoire turbulent. Remontant le temps on peut chercher le domaine des points qui ne sont éjectés qu’après 2, 3, ...  $k$  itérations et l’on constate que les points qui restent indéfiniment dans l’intervalle  $[0, 1]$  appartiennent à un ensemble de Cantor de mesure nulle.

Dans tout ce qui précède, nous avons privilégié les scénarios les plus simples, postulant une non-dégénérescence des valeurs propres, une absence de symétrie, le déploiement par un seul paramètre de contrôle, etc. Ces scénarios de codimension 1 peuvent être vus comme les briques élémentaires de la théorie de la transition vers le chaos temporel dont les étapes sont observées au niveau le plus “microscopique” dans l’espace des paramètres. Nous avons aussi vu que les cas qui nécessitaient le moins de conjecture additionnelle étaient ceux pour lesquels la bifurcation restait locale (scénario sous-harmonique principalement). En effet les choses se compliquent notablement lorsque des aspects globaux interviennent, par exemple hypothèse de réinjection pour conclure sur le comportement statistique de l’intermittence, hypothèse d’existence d’une trajectoire homocline pour le scénario de Shilnikov, etc.

Pour conclure ce chapitre, notons que la démarche réductive qui consiste à passer d’un système donné par ses équations primitives à un scénario comporte de nombreuses étapes conjecturales car on est le plus souvent incapable de déduire rigoureusement le modèle qui rend compte du problème examiné. Par contre, il faut insister sur l’universalité sous-jacente à l’expression de ces modèles; ceux-ci ne reposent en général que sur la



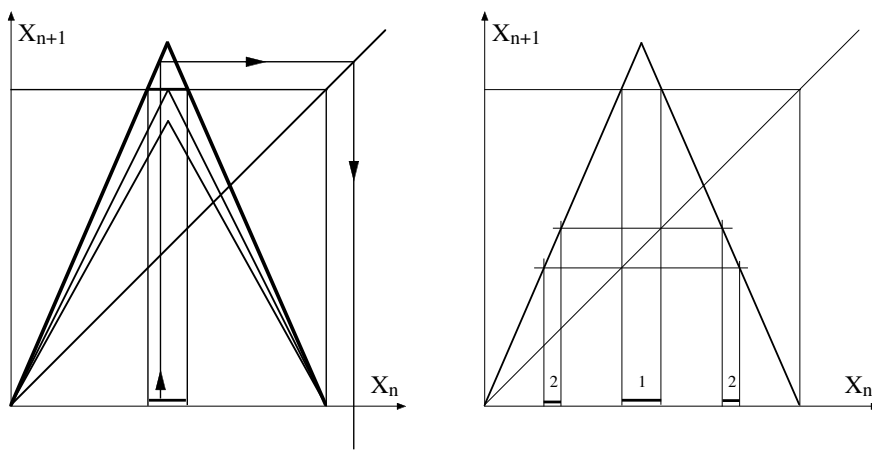


Figure 6.29: À gauche: application en accent circonflexe, pour  $r < 2$ ,  $r = 2$  et  $r > 2$ , avec dans ce dernier cas indication de la fenêtre d'échappement de l'intervalle  $[0, 1]$ . À droite: détermination des sous-intervalles contenant les points qui sont éjectés après 1 et 2 itérations dans le cas  $r > 2$ . L'ensemble de Cantor portant les points qui ne sont pas éjectés de l'intervalle  $[0, 1]$  est obtenu en prenant le complémentaire de l'ensemble des points éjectés après  $k$  itérations,  $k \rightarrow \infty$ .

forme normale adaptée à une bifurcation dont seuls importent le caractère réel ou complexe et la nature super-critique ou sous-critique, le tout ne se traduisant que par de simples inégalités sur la valeur des coefficients à introduire. Le comportement développé par un système donné dans des circonstances particulières est alors entièrement fixé dès que l'on a déterminé la nature du scénario, non seulement qualitativement mais aussi quantitativement, e.g., valeur asymptotique du décrément dans une cascade sous-harmonique, distribution des durées de phase laminaire pour l'intermittence. Caractériser quantitativement de façon approfondie les régimes chaotiques issus de ces scénarios est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Caractérisation du chaos temporel

Ce chapitre est consacré à quelques outils servant à rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques. Nous avons vu dans le chapitre précédent que, dans l'espace des phases, le chaos présentait deux facettes complémentaires: (i) instabilité des trajectoires sur l'attracteur témoignant de la sensibilité aux conditions initiales et (ii) structure transverse fractale conciliant dissipation et étirement par un processus apparenté à la transformation du boulanger. L'extension au cas chaotique des notions d'instabilité et de taux de divergence conduit à la définition du spectre d'exposants de Lyapunov (§7.1). La description déterministe des systèmes chaotiques perdant une bonne partie de son intérêt du fait de l'absence de prédictibilité à long terme, nous en profiterons pour introduire quelques éléments de description statistique des attracteurs étranges. Ensuite nous traiterons de la caractérisation géométrique des attracteurs, ce qui nécessitera l'introduction de dimensions fractionnaires ou *fractales* (§7.2). Enfin nous mettrons en œuvre les principaux outils utilisés pour étudier de façon empirique les systèmes rencontrés dans les applications (§7.3), notamment en chimie.

### 7.1 Exposants de Lyapunov

Avant de passer à l'approche analytique, illustrons la divergence des trajectoires voisines sur l'exemple du modèle de Hénon (6.8) introduit au chapitre précédent. Ce modèle avait alors été pris sous la forme d'une récurrence du second ordre:  $X_{k+1} = F(X_k, X_{k-1})$ . Il peut s'écrire comme un système bidimensionnel:  $\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}_k)$  en posant  $Y_{1,k} = X_k$  et  $Y_{2,k} = X_{k-1}$ . L'évolution de la distance euclidienne  $\Delta$  en  $\mathbf{Y}$  entre deux trajectoires issues de conditions initiales telles que  $\Delta_0 = 2 \times 10^{-8}$  est portée en fonction de  $k$  sur la figure 7.1. La représentation en échelle logarithmique de  $\Delta$  montre que les trajectoires s'écartent d'abord géométriquement, la raison de cette progression se déduisant immédiatement de la pente initiale de la courbe. Bien vite, cette distance sature à une valeur qui correspond au "diamètre" de l'attracteur représenté sur la figure 6.15. Les trajectoires sont alors décorréées. Une série plus longue montrerait que les trajectoires peuvent soudainement se rapprocher accidentellement puis re-diverger comme au départ.

Déterminer le taux de divergence moyen constitue donc le but premier de cette section. Pour le mesurer nous procéderons par étapes, commençant par le cas le plus simple des itérations d'une variable qui nous ont servi pour illustrer la sensibilité aux conditions initiales (§7.1.1) puis nous passerons au cas des itérations et des systèmes différentiels à plusieurs variables (§7.1.2) pour déboucher sur une classification empirique des systèmes dynamiques sur la base de leur spectre d'exposants de Lyapunov.

#### 7.1.1 Exposants de Lyapunov pour les itérations à une variable

Partant d'une itération

$$X_{k+1} = F(X_k).$$

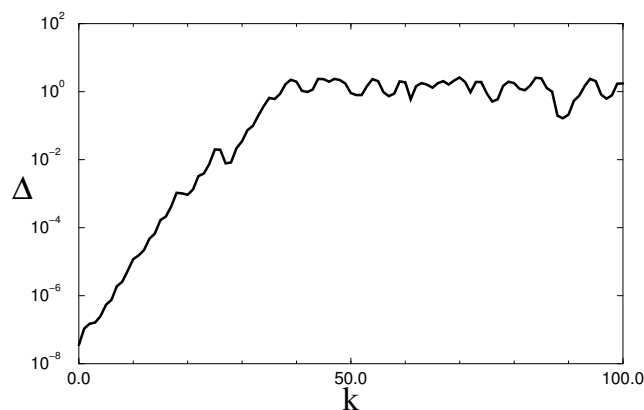


Figure 7.1: Évolution de la distance entre trajectoires voisines pour le modèle de Hénon standard.

nous considérons une trajectoire particulière de référence  $\{X_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  issue d'une condition initiale  $X_0$ . Pour étudier la stabilité autour d'un point fixe  $X_*$ , nous avons introduit une perturbation  $\delta X_0$  dont nous avons étudié l'évolution. Ici, c'est essentiellement la même chose, excepté que la trajectoire de référence est quelconque: nous devons déterminer comment varie l'écart entre deux trajectoires initialement voisines  $X_0$  et  $\tilde{X}_0 = X_0 + \delta X_0$ ,  $\delta X_0$  étant supposé infinitésimal. Il vient

$$\tilde{X}_1 = X_1 + \delta X_1 = F(X_0 + \delta X_0) = F(X_0) + F'(X_0) \delta X_0,$$

où  $F' \equiv dF/dX$  désigne la dérivée de  $F$  par rapport à la variable  $X$ . La distance entre les deux trajectoires après une itération est donnée par

$$|\delta X_1| = |F'(X_0) \delta X_0| = |F'(X_0)| \cdot |\delta X_0|$$

et après une seconde itération par

$$|\delta X_2| = |F'(X_1)| \cdot |\delta X_1| = |F'(X_1)| \cdot |F'(X_0)| \cdot |\delta X_0|.$$

En utilisant itérativement la règle des dérivations en chaîne, après  $k$  itérations nous obtenons

$$|\delta X_k| = \left( \prod_{k'=0}^{k-1} |F'(X_{k'})| \right) |\delta X_0|.$$

Au voisinage d'un point fixe  $X_*$ , nous aurions obtenu  $|\delta X_k| = \gamma^k |\delta X_0|$ , où  $\gamma = |F'(X_*)|$ , la stabilité se décidant en comparant  $\gamma$  à l'unité. Pour une trajectoire arbitraire, nous pouvons définir un *coefficient multiplicateur effectif* par pas d'itération sur le même modèle,  $\gamma^k = |\delta X_k|/|\delta X_0|$ , prendre la limite  $k \rightarrow \infty$ , soit

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \prod_{k'=0}^{k-1} |F'(X_{k'})| \right)^{1/k},$$

et enfin prendre le logarithme pour définir un taux

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} \log(|F'(X_{k'})|). \quad (7.1)$$

Cette quantité, appelée *exposant de Lyapunov*, se présente donc comme la *moyenne temporelle* du taux local de divergence  $\log(|F'(X)|)$  prise le long de la trajectoire de référence. Cette définition est analogue à celle du nombre de rotation qui mesure le taux de rotation effectif dans le cas d'une application du cercle sur lui-même, cf. chapitre 5 §5.4.2.

Nous admettons que la limite existe et qu'elle est indépendante de la trajectoire choisie pour illustrer le régime chaotique étudié. Dans le cas de l'application dyadique nous obtenons ainsi directement

$$X \mapsto 2X \pmod{1} \quad \longrightarrow \quad \lambda = \log(2).$$

Pour l'application en accent circonflexe,  $X \mapsto 2rX$  pour  $0 < X < 1/2$ ,  $X \mapsto 2r(1 - X)$  pour  $1/2 < X < 1$ , introduite p. 132, puisque seule la valeur absolue de la dérivée est prise en compte dans la définition de l'exposant de Lyapunov on trouve immédiatement  $\lambda = \log(2r)$  et donc  $\log(2)$  pour  $r = 1$ .

Soient deux applications  $F$  et  $\tilde{F}$  qui se correspondent dans un difféomorphisme  $H$  d'inverse  $H^{-1}$  noté ici  $\tilde{H}$  par commodité, i.e.  $\tilde{F} = \tilde{H} \circ F \circ H$ , soit  $X = H(\tilde{X})$ ,  $\tilde{X} = \tilde{H}(X)$  et  $\tilde{F}(\tilde{X}) = \tilde{H}(F(H(\tilde{X})))$ . On montre facilement que deux trajectoires homologues  $\{X_{k+1} = F(X_k)\}$  et  $\{\tilde{X}_{k+1} = \tilde{F}(\tilde{X}_k)\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) ont même exposant de Lyapunov. En effet, de

$$X_k = H(\tilde{X}_k) = H(\tilde{F}(\tilde{X}_{k-1})) = H(\tilde{F}(\tilde{H}(X_{k-1}))),$$

notant  $H' \equiv dH/d\tilde{X}$  et  $\tilde{H}' = d\tilde{H}/dX$  les dérivées de  $H$  et  $\tilde{H}$ , on tire

$$\delta X_k = H'(\tilde{X}_k)\delta\tilde{X}_k = H'(\tilde{X}_k)\tilde{F}'(\tilde{X}_{k-1})\delta\tilde{X}_{k-1} = H'(\tilde{X}_k)\tilde{F}'(\tilde{X}_{k-1})\tilde{H}'(X_{k-1})\delta X_{k-1},$$

et, utilisant de façon répétée la relation  $\tilde{H}'(X) = 1/H'(\tilde{X})$  valide en toute paire de points homologues, on obtient à l'étape  $k$

$$\delta X_k = \prod_{k'=0}^{k-1} F'(X_{k'}) \delta X_0 = H'(\tilde{X}_k) \left[ \prod_{k'=0}^{k-1} \tilde{F}'(\tilde{X}_{k'}) \right] \tilde{H}'(X_0) \delta X_0.$$

Aux "termes de bord"  $H'(\tilde{X}_{k+1})$  et  $\tilde{H}'(X_0)$  près, le coefficient d'expansion des trajectoires en  $X$  et en  $\tilde{X}$  est le même et, à la limite  $k \rightarrow \infty$ , le poids de ces termes de bords (qui restent bornés si l'application est effectivement inversible) devient négligeable dans la moyenne. Ceci permet de montrer immédiatement que l'exposant de Lyapunov de l'application logistique  $X_{k+1} = 4rX_k(1 - X_k)$  avec  $r = 1$  vaut également  $\ln(2)$ . En effet, on passe de cette itération à l'application circonflexe avec  $r = 1$  par le changement de variable  $\tilde{X} = (2/\pi)\text{Arcsin}(X^{1/2})$  ou, réciproquement,  $X = \sin^2(\pi\tilde{X}/2)$ .

### 7.1.2 Itérations $d$ -dimensionnelles et spectre de Lyapunov

Considérons maintenant l'application  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , i.e.  $X_j \mapsto F_j(\{X_{j'}, j' = 1, \dots, d\})$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Après une itération, l'écart entre deux trajectoires voisines s'écrit, composante par composante,

$$\delta X_{j,1} = \sum_{j'=1}^d \partial_{X_{j'}} F_j(\mathbf{X}_k) \delta X_{j',0},$$

soit encore  $\delta \mathbf{X}_1 = [J]_0(\mathbf{X}_0)\delta \mathbf{X}_0$  où  $[J]_0$  désigne la matrice Jacobienne de  $\mathbf{F}$ , évaluée en  $\mathbf{X}_0$ . Après  $k$  itérations, nous aurons donc:

$$\delta \mathbf{X}_k = \left( \prod_{k'=0}^{k-1} [J]_{k'} \right) \delta \mathbf{X}_0.$$

Nous voyons se former le produit *chronologique* des matrices jacobiennes  $\dots [J]_2 [J]_1 [J]_0$ . En fait, excepté dans le cas unidimensionnel, la transformation des  $\delta \mathbf{X}$  comprend généralement une part d'étirement-contraction et une part de rotation qui ne contribue pas à l'évolution de la distance entre les trajectoires. Pour obtenir l'équivalent de (7.1.1) et définir un taux d'évolution effectif nous devons prendre la limite de la racine carrée du carré scalaire de  $\delta \mathbf{X}_k$ . Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{X}_n|^2 &= \delta \mathbf{X}_n^t \cdot \delta \mathbf{X}_n \\ &= \left[ \left( \prod_{m=0}^{n-1} [J]_m \right) \delta \mathbf{X}_0 \right]^t \cdot \left[ \left( \prod_{m=0}^{n-1} [J]_m \right) \delta \mathbf{X}_0 \right] \\ &= \delta \mathbf{X}_0^t \left[ [J]_0^t \dots [J]_{n-1}^t [J]_{n-1} \dots [J]_0 \right] \delta \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

Le taux d'évolution effectif est alors donné par  $|\delta \mathbf{X}_n|^2 = (\gamma)^{2n} |\delta \mathbf{X}_0|^2$ , soit

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{\delta \mathbf{X}_0^t \left( [J]_0^t \dots [J]_{n-1}^t [J]_{n-1} \dots [J]_0 \right) \delta \mathbf{X}_0}{\delta \mathbf{X}_0^t \delta \mathbf{X}_0}}$$

La prise du logarithme, i.e.  $\lambda = \log(\gamma) = \lambda_{\max}$ , définit le *plus grand exposant de Lyapunov*. On peut en effet obtenir tout un spectre d'exposants  $\{\lambda_m, m = 1, \dots, d\}$ . Pour ce faire, le plus simple est de considérer le taux de croissance  $\mu_m, m = 1, \dots, d$ , d'éléments de volume de dimension  $m$  croissante dans l'espace de phases, le cas étudié jusqu'à présent correspondant à un élément de ligne ( $m = 1$ ). On obtient alors  $\lambda_m = \mu_m - \mu_{m-1}$ , avec  $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_{\max}$ . Le fait d'avoir plusieurs exposants positifs traduit le fait qu'une trajectoire peut être instable dans plusieurs directions de son espace tangent, ce qui généralise le concept de direction propre défini pour une matrice constante, comme nous l'aurions obtenu par linéarisation de la dynamique autour d'une trajectoire spéciale se réduisant à un point fixe. Le problème sera réexaminé dans la section consacrée à la caractérisation des systèmes chaotiques du point de vue expérimental.

Pour terminer cette présentation sommaire, notons que l'on peut passer d'un système dynamique à temps continu à un système à temps discret par l'intermédiaire de l'application au temps  $\tau$ , application qui intègre le système différentiel sur une durée  $\tau$  (sans abaissement de la dimension).

La particularité du cas continu réside dans le fait que pour tout attracteur borné qui ne se résume pas à un point fixe, le spectre de Lyapunov possède au moins un exposant nul. Cet exposant particulier est associé au fait que la distance entre deux points d'une même orbite séparés d'un intervalle de temps fixe ne peut ni croître indéfiniment (pas de divergence des trajectoires à l'infini), ni tendre vers zéro (l'attracteur n'est pas un point fixe). Le cycle limite en est une illustration simple: après un tour, la distance est redevenue la même. Nous pouvons donc conclure en notant que le comportement reste régulier si le plus grand exposant de Lyapunov est  $\leq 0$  et que nous avons affaire à un *régime chaotique* s'il existe *au moins un exposant de Lyapunov positif*. Ce que nous résumerons dans le tableau suivant où nous distinguons temps discret et temps continu avec l'arrière pensée que les systèmes à temps discret sont issus des systèmes à temps continus de dimension  $d$  par section de Poincaré, donc cette fois avec réduction de la dimension de  $d$  à  $d - 1$ . Nous dirons qu'un système est *chaotique* si son spectre de Lyapunov comporte au moins un exposant positif.

Table 7.1: Signature de Lyapunov

régime	temps continu ( $d$ )	temps discret ( $d - 1$ )
stationnaire	---...	--...
périodique	0-----...	-----...
bipériodique	00-----...	0-----...
$n$ - périodique	0...0---... ( $n$ zéros)	0...0---... ( $n - 1$ zéros)
chaotique	au moins 1 + e.g., +0---... ou ++ 00---...	au moins 1 + e.g., +---... ou ++ 0---...

Remarquons cependant que l'information moyenne contenue dans le spectre de Lyapunov est d'un intérêt essentiellement théorique. Dans la pratique, on est souvent plutôt concerné par la limite de *prédictibilité* des trajectoires d'un système dans une situation donnée. Pour aborder ce problème, on peut définir des exposants de Lyapunov à temps fini, c'est à dire ne pas prendre la limite  $n \rightarrow \infty$  dans les expressions précédentes mais se restreindre à des intervalles de temps finis, i.e. dans le cas le plus simple des itérations d'une variable  $\lambda_k = (1/k) \sum_{k'=0}^{k-1} \log(|F'(X_{k'})|)$  au lieu de (7.1). Tout au long d'une trajectoire, cette quantité peut fluctuer avec des périodes de plus ou moins forte dilatation ( $\lambda_j > 0$ , décorrélacion rapide) et même des périodes de contraction ( $\lambda_j < 0$ , quasi-prédictibilité). On est alors amené à s'intéresser à la statistique de ces exposants à temps fini. Outre qu'il faille connaître explicitement la transformation  $F$ , ceci ne reste cependant valable que pour des perturbations infinitésimales, comme l'indique la présence de  $F'$ , ou plus généralement du jacobien, dans les formules. Dans la pratique, il est alors préférable de se tourner vers une approche en termes d'*ensemble statistique*, c'est à dire (i) considérer tout un jeu de conditions initiales centrées autour

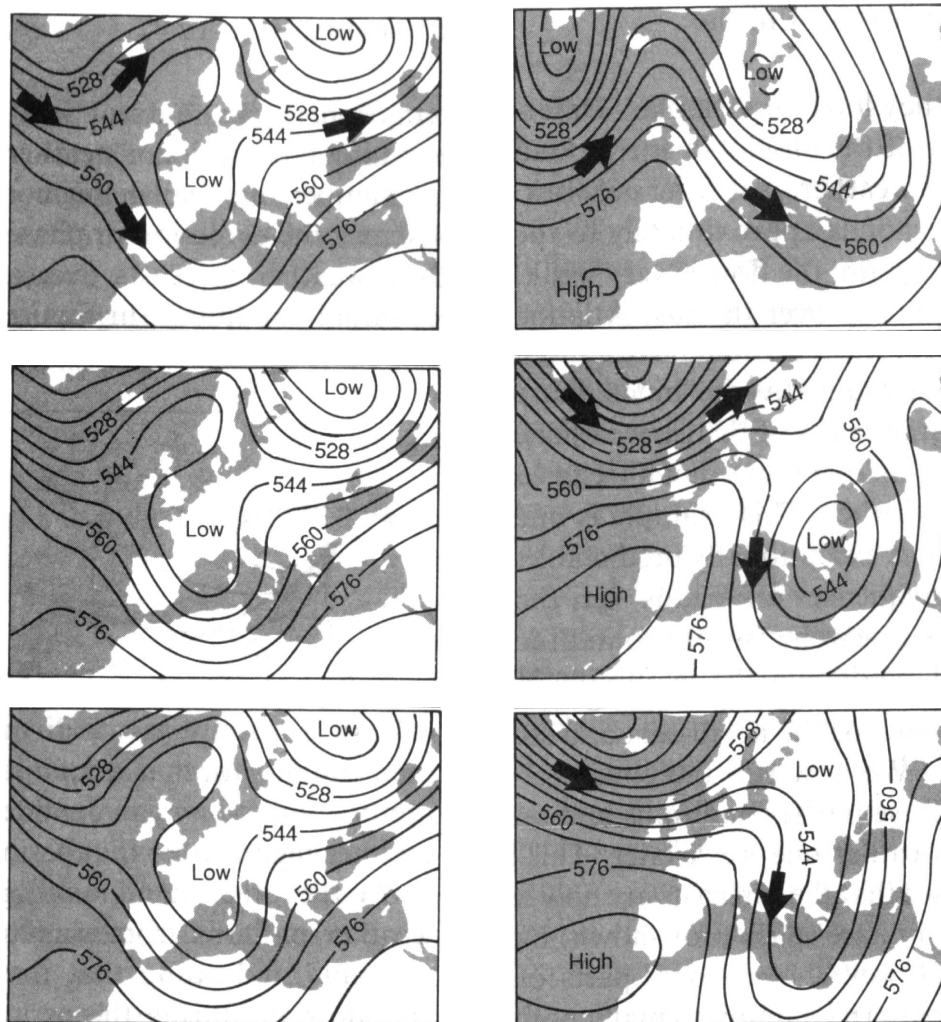


Figure 7.2: États finaux 7 jours plus tard (colonne de droite) de 3 simulations dont les conditions initiales (colonne de gauche) appartiennent à un ensemble de conditions initiales toutes compatibles avec le même jeu d'observations (d'après Palmer, chapitre 6 de [15]).

de la situation de référence à l'instant considéré, aussi serré que possible autour de cet état compte tenu des incertitudes observationnelles, (ii) faire évoluer les trajectoires en parallèle sans que l'on sache à l'avance si les fluctuations initiales sont petites ou grandes, (iii) étudier la dispersion de cet ensemble à mesure que le temps s'écoule.

Cette approche, qui nous introduit directement à la section suivante où la dynamique du système est décrite en termes de probabilités, est illustrée sur la figure 7.2 qui présente des résultats de simulation numérique du temps qu'il va faire. Bien que relative à une dynamique manifestement spatio-temporelle dont nous n'aborderons la problématique qu'au chapitre 8, cette illustration va dans le sens de la présente discussion: partant d'une situation donnée, on s'intéresse à un état futur à moyen terme; cependant, ces conditions initiales ne sont pas connues avec une précision mathématique mais résultent de l'assimilation d'un ensemble incomplet de données de sorte que tout un ensemble de conditions initiales reste compatible avec les observations. L'expérience présentée sur la figure 7.2 consiste en plusieurs<sup>1</sup> simulations parallèles sur sept jours d'un modèle de prévision initialisé avec des données légèrement différentes mais toutes compatibles avec une même situation générale de référence. La divergence des trajectoires voisines conduit à des situations radicalement différentes au bout d'un temps assez court, ce qui suggère une sensibilité aux conditions initiales typique des systèmes chaotiques, que ce soit pour le modèle ou pour le système atmosphérique qu'il est sensé

<sup>1</sup>Ici, trois seulement sur un ensemble plus vaste.

représenter, de sorte que le moyen terme est mieux décrit par l'approche "climatologique" en termes de moyennes statistiques sur un ensemble.

### 7.1.3 Approche probabiliste

Le point de vue qui va être développé vise à remplacer la description du système à l'aide de moyennes temporelles effectuées sur des trajectoires effectivement suivies dans leur évolution par des moyennes d'ensemble calculées à l'aide d'une distribution de probabilité répartie sur l'espace des phases, étant entendu que si l'on observe le système sans rien savoir de son initialisation, on a une probabilité d'autant plus importante de le trouver dans une région donnée qu'une trajectoire typique y passe une plus grande fraction de temps. Cette approche statistique est ce que l'on appelle la *théorie ergodique des attracteurs étranges*. Importante conceptuellement, elle reste difficile à développer concrètement.

Empiriquement, le système n'est le plus souvent connu que par l'intermédiaire d'un certain nombre de quantités qui ne sont pas les variables dynamiques primitives mais plutôt des observables, c'est à dire des fonctionnelles définies sur l'espace des phases dont la valeur est échantillonnée par la trajectoire. Appelons  $\mathcal{W}$  une telle observable. Dans le cas d'un système à temps discret, le résultat d'une expérience se présentera donc sous la forme d'une suite de valeurs  $\{W_k = \mathcal{W}(\mathbf{X}_k)\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , les  $\{\mathbf{X}_k\}$  figurant la trajectoire particulière suivie.

La moyenne temporelle est définie par

$$\langle \mathcal{W} \rangle_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} W_m.$$

À cette description *a posteriori* on cherche à en substituer une reposant sur la définition d'une mesure de probabilité sur l'espace des phases qui permettrait de déterminer la valeur de l'observable par le calcul *a priori* d'une moyenne statistique

$$\langle W \rangle_e = \int \mathcal{W}(\mathbf{X}) dm(\mathbf{X})$$

où  $dm(\mathbf{X})$  représente la mesure de probabilité caractérisant un *ensemble statistique* de systèmes tous préparés de façon équivalente et ayant rejoint l'attracteur. Cette mesure est *invariante* au sens où, après élimination d'un transitoire suffisant, le comportement statistique du système est stationnaire. Le poids statistique  $dm(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X})d\mathbf{X}$  où  $\rho$  représente la densité de probabilité autour de  $\mathbf{X}$ , prise proportionnelle à la fraction de systèmes de l'ensemble se trouvant dans un élément de volume  $d\mathbf{X}$  situé "au" point  $\mathbf{X}$ . Exprimons l'*hypothèse ergodique* qui stipule que la moyenne d'ensemble est identique à la moyenne temporelle:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W} \rangle_e &= \int \mathcal{W}(\mathbf{X}) dm(\mathbf{X}) \\ &= \langle \mathcal{W} \rangle_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} W_{k'} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} \int \mathcal{W}(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{k'}) d\mathbf{X} \\ &= \int \mathcal{W}(\mathbf{X}) \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{k'}) \right) d\mathbf{X}. \end{aligned}$$

Par identification nous trouvons

$$\rho(\mathbf{X}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{k-1} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{k'})$$

$\{\mathbf{X}_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  représentant une trajectoire typique sur l'attracteur. Cette densité de probabilité définit la mesure de Bowen–Ruelle. Le *problème ergodique* consiste alors à démontrer l'hypothèse, ce qui est un problème mathématique difficile. Rien n'empêche cependant de déterminer empiriquement cette mesure en partitionnant l'espace des phases et en comptant les passages du système dans chaque cellule de la partition. Ceci est très facile à réaliser dans le cas unidimensionnel, qui est aussi celui que l'on peut aborder le plus facilement du point théorique. Si l'on a su trouver la densité de probabilité invariante  $\rho(\mathbf{X})$ , on peut ensuite

calculer par exemple l'exposant de Lyapunov à l'aide de  $\int \ln(|F'(X)|)\rho(X)dX$  au lieu de (7.1). Dans certains cas, la détermination de  $\rho(X)$  est facile. Par exemple, pour l'application dyadique on trouve  $\rho \equiv 1$  (et bien évidemment  $\lambda = \log 2$ ). Le comptage de boîte est encore possible dans le cas bidimensionnel mais peu praticable au delà.

Considérons maintenant une observable particulière du système appelée *entropie*. Également introduit en thermodynamique, ce concept est considéré ici dans le sens qu'il prend en *théorie de l'information*, c'est à dire comme une mesure du gain d'information sur le système à mesure que le temps s'écoule: comme nous l'avons vu sur l'exemple de l'application dyadique, l'évolution du système porte en effet à notre connaissance les digits cachés dans les conditions initiales (ou les petites perturbations apportées au système). Cette "information" est une bonne mesure globale de la *complexité* de la dynamique. Voyons donc comment elle s'introduit.

En théorie de l'information, on considère des *messages* formés de lettres appartenant à un certain *alphabet* dans une perspective probabiliste. Avec un alphabet à  $M$  lettres, la probabilité d'un message aléatoire à une lettre est  $p_i = 1/M$  et l'on a  $M$  messages différents équiprobables. L'entropie élémentaire est définie par

$$K_1 = \sum_i p_i \log(1/p_i) = M \times (1/M) \times \log(M) = \log(M).$$

Passons à un message aléatoire de  $k$  lettres. Nous avons  $p_i = (1/M)^k$  et  $M^k$  messages différents possibles ce qui donne l'entropie élémentaire

$$K_k = \sum_i p_i \log(1/p_i) = M^k \times (1/M)^k \log(M^k) = k \log(M)$$

Le gain d'entropie lors du passage de  $k$  à  $k+1$  vaut alors

$$K = K_{k+1} - K_k = \log(M).$$

Considérons la limite opposée d'un message complètement prédictible, c'est à dire entièrement connu dès qu'on connaît sa première lettre. Il n'y a alors que  $M$  messages différents possibles de probabilité  $1/M$ , de sorte que  $K_{n+1} = K_n = \log(M)$  et donc  $K = 0$ . En pratique un message chaotique n'est ni prédictible ni complètement aléatoire de sorte que l'on attend  $0 < K < \log(M)$ . Il convient donc de définir le gain *moyen* d'information, moyenne temporelle des gains instantanés

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k'=1}^k (K_{k'+1} - K_{k'}) \quad (7.2)$$

Cette quantité est appelée *entropie de Kolmogorov-Sinai* ou *K-entropie*.

Pour passer des messages aux trajectoires d'un système dynamique il faut reprendre l'idée de partition de l'espace des phases introduite antérieurement et associer ses cellules aux lettres de l'alphabet. Prenons par exemple le cas de l'application dyadique,  $X_{n+1} = 2X_n \pmod{1}$  et considérons une partition de l'intervalle  $[0, 1]$  en  $M$  sous-intervalles de longueur  $1/M$ . Il s'en suit que pour un message à une lettre (une condition initiale aléatoirement choisie)  $K_1 = \log(M)$ . Passons d'un "message à une lettre" aux "messages à deux lettres." On en trouve deux équiprobables car l'intervalle de longueur  $1/M$  auquel appartenait la condition initiale s'est trouvé *étiré* d'un facteur 2: les points qui sont dans l'un ou l'autre de ces deux intervalles ne pouvaient être distingués à l'étape précédente. L'entropie élémentaire d'un tel message à deux lettres est donc

$$K_2 = \sum_i p_i \log(1/p_i) = M \times 2 \times \{[1/(2M)] \log(2M)\} = \log(2M) = \log(2) + \log(M),$$

et ainsi de suite pour des trajectoires suivies sur  $k$  itérations, interprétées comme des messages à  $k$  lettres. On en trouve  $2^k$  équiprobables. L'entropie élémentaire associée vaut alors

$$K_k = \sum_i p_i \log(1/p_i) = M \times 2^k \times \{[1/(2^k M)] \log(2^k M)\} = \log(M) + k \log(2).$$

La définition (7.2) conduit donc trivialement à

$$K = \log(2).$$

On devine ici une relation entre entropie et exposants de Lyapunov. On montre en effet sous certaines conditions (théorème de Piesin) que l'entropie du système est égale à la somme de tous les exposants de Lyapunov non-négatifs.



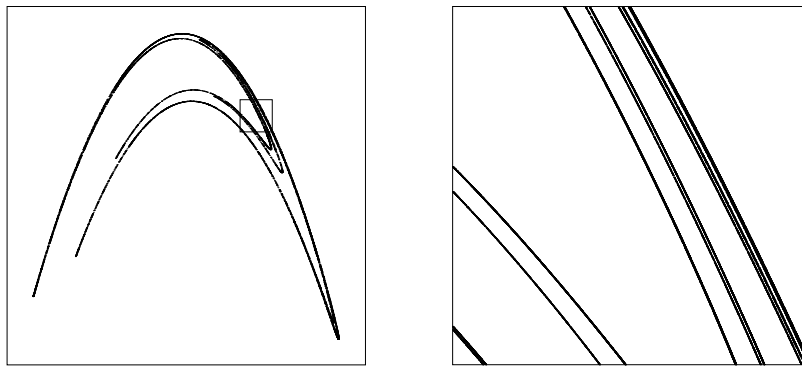


Figure 7.3: L'attracteur de Hénon et son agrandissement.

## 7.2 Chaos et dimensions

### 7.2.1 Dimensions

L'objectif général de cette section est de caractériser la structure géométrique des attracteurs au moyen de généralisations de la notion de dimension regroupées sous le nom de *dimensions fractales*. Auparavant commençons par rappeler que le terme de *dimension* est souvent implicitement associé à celui de coordonnée, c'est à dire de variable nécessaire pour décrire la position d'un élément d'un ensemble. Ainsi, dans un espace de dimension  $d$ , une variété de *dimension topologique*  $d_t$  est génériquement définie par  $d - d_t$  relations.<sup>2</sup> La quantité  $d - d_t$ , complémentaire de  $d_t$  est appelée la *codimension*.

Dans cette perspective, les points appartenant à une *hypersurface* de dimension  $d_t = d - 1$ , donc de codimension 1, sont définis par une seule relation. De même une surface ordinaire, de dimension topologique 2 est définie par  $d - 2$  relations, une ligne ( $d_t = 1$ ) par  $d - 1$  relation et un ensemble de points ( $d_t = 0$ ) par  $d$  relations, en accord avec l'idée qu'un système de  $d$  équations à  $d$  inconnues n'a, en général, pour solution que des points isolés et pas des familles continues de solutions.

L'attracteur associé à un régime non chaotique est *a priori* une variété régulière de  $d_t$  bien définie, par exemple pour un régime périodique, un cycle limite de dimension 1 et pour un régime quasi-périodique à  $n$  fréquences, un tore  $\mathbb{T}^n$ , de dimension topologique  $d_t = n$ .

Le problème est plus délicat pour un attracteur étrange associé à un régime chaotique. Nous avons présenté le cas de l'attracteur de Lorenz au premier chapitre (cf. Fig. 1.8, p. 10). Revenons ici un instant sur celui de l'attracteur de Hénon. À côté d'une image d'ensemble, la figure 7.3 en présente un agrandissement qui montre clairement que la structure locale de l'attracteur est le produit d'une variété continue par un ensemble discontinu dont on devine l'auto-similarité approchée en direction des petites échelles (groupes de lignes organisées hiérarchiquement).

La *transformation du boulanger dissipative* est obtenue à partir de (6.4) en étirant selon  $X$  de la même façon mais en contractant plus selon  $Y$ . La figure 7.4 présente l'ensemble limite qui résulte de l'itération

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 2X_n & \text{et} & & Y_{n+1} &= rY_n/2 & \text{pour} & & X < 1/2 \\ X_{n+1} &= 2X_n - 1 & \text{et} & & Y_{n+1} &= rY_n/2 + 1/2 & \text{pour} & & X \geq 1/2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec  $r < 1$ ,  $r = 1$  conservant les aires.

Reprenant la construction de la figure 6.9, p. 118, on comprend aisément d'où viennent les bandes vides et comment se construit la structure transverse alors que l'attracteur reste manifestement continu dans la direction étirée. On admettra donc sans trop de peine que la dimension topologique locale de la variété

<sup>2</sup>Court-circuitant cette approche "en cartésienne," pour définir la dimension topologique Poincaré passe par la notion de partage d'un ensemble et de bord de l'ensemble. Si l'ensemble est de dimension  $d$  son bord est de dimension  $d - 1$ . Ainsi un point ( $d_t = 0$ ) borne l'extrémité d'une ligne ( $d_t = 1$ ), une ligne borne une surface ( $d_t = 2$ ), et ainsi de suite (on commence en fait par l'ensemble vide de dimension  $-1$ ).



Figure 7.4: Transformation du boulangier dissipative (7.3) avec  $r = 0.8 < 1$ .

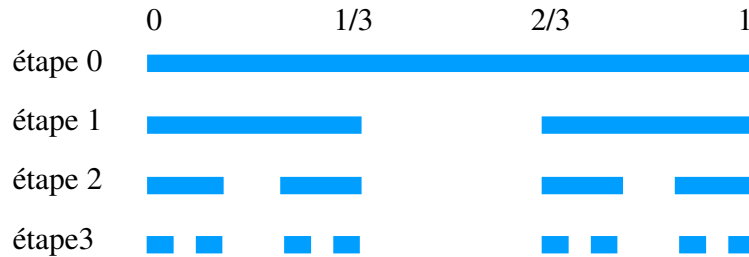


Figure 7.5: Construction de l'ensemble de Cantor classique. Cet ensemble est non-dénombrable car, dans l'esprit de la dynamique symbolique (cf. §6.1.2) en codant ses points sur  $\{0; 1; 2\}$  on ne voit jamais apparaître le digit 1, de sorte qu'on peut le mettre en correspondance biunivoque avec le continuum  $[0, 1]$  codés sur  $\{0; 1\}$ . D'autre part il est de mesure nulle puisque sa longueur décroît vers 0 comme  $(2/3)^n$  à chaque étape de construction.

portant les trajectoires sur l'attracteur soit donnée par le nombre d'exposants de Lyapunov non-négatifs. Il est en effet naturel d'ajouter au nombre des exposants positifs celui des directions neutres, et en particulier dans le cas d'un système à temps continu, de tenir compte de la direction du flot tangent. Ainsi, l'attracteur de Lorenz standard (cf. chapitre 1) apparaît, en section de Poincaré, localement sous formes de feuillettes dont les lignes sont les traces de surfaces. Il faut donc ajouter 1 pour revenir au système à temps continu dans l'espace de départ.

Mais la présence d'une structure "transverse" induite par les repliements traduit "occupation" de l'espace plus grande que ne l'indique la dimension topologique de la composante "longitudinale" régulière de l'attracteur. C'est pour quantifier la composante transverse que nous allons présenter quelques outils de géométrie fractale.

### 7.2.2 Géométrie fractale

Commençons par illustrer le concept de plus simple de dimension de *similarité* sur l'exemple l'ensemble triadique de Cantor (cf. Fig. 7.5). Cette dimension rend compte quantitativement du processus d'*homothétie interne* qui préside à la construction de l'ensemble:

À l'étape 0 on part intervalle unité fermé  $[0, 1]$ ; à l'étape 1 on enlève le tiers médian ouvert  $]1/3, 2/3[$ , laissant deux segments  $[0, 1/3]$  et  $[2/3, 1]$  qui chacun jouent pour l'étape 2 le rôle joué par  $[0, 1]$  à l'étape 1. En direction des petites échelles, il ne reste plus qu'à itérer le processus à l'étape  $n$  sur le résultat de l'étape  $n - 1$ . En direction des grandes échelles, il suffit de coller deux copies de l'ensemble précédent de part et d'autre d'un intervalle central unité vide et de répéter le processus. En pratique, toute réalisation concrète est limitée par la présence d'une échelle minimale dite *interne* et d'une échelle maximale ou *externe*.

L'homothétie interne s'exprime en disant qu'à chaque étape, le motif est reproduit  $N = 2$  fois et la taille augmentée d'un facteur  $r = 3$ . Observant que dans les mêmes conditions pour une variété ordinaire

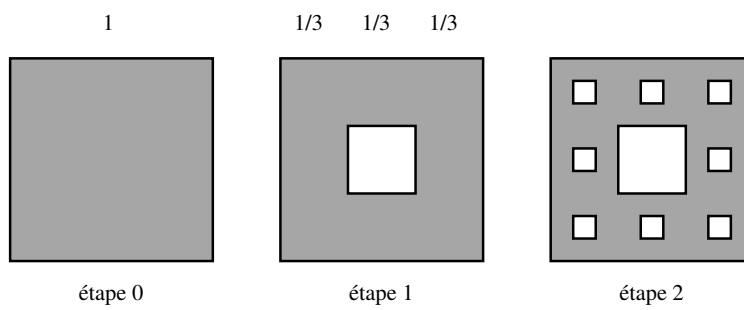


Figure 7.6: Règle de construction d'un tapis de Sierpinsky.

de dimension topologique  $d_t$ , à  $r$  fixé nous aurions  $N = r^{d_t}$  et demandant que  $d_t$  soit aussi sa dimension de similarité, nous sommes conduits à prendre comme définition

$$d_s = \frac{\log(N)}{\log(r)}.$$

Pour l'ensemble de Cantor classique on trouve immédiatement  $d_s = \log(2)/\log(3) \simeq 0,631$  et l'on voit qu'il est facile de construire des ensembles de Cantor de dimension  $d_s$  arbitraire comprise entre 0 et 1 en changeant  $N$  et  $r$ . Parmi d'autres objets fractals classiques, citons le *tapis* (Fig. 7.6) et l'*éponge de Sierpinsky*, ou encore le flocon de von Koch [37].

Lorsque, comme c'est le cas pour les attracteurs étranges, la règle de construction n'est pas connue, il faut déterminer empiriquement  $N$  et  $r$ , c'est à dire (i) paver l'espace de boules de boules de diamètre  $\epsilon$ , (ii) compter le nombre  $\mathcal{N}(\epsilon)$  de boules nécessaires au recouvrement de l'ensemble puis (iii) définir la dimension fractale  $d_f$  par la limite

$$d_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\mathcal{N}(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)}$$

qui existe si l'ensemble est asymptotiquement auto-similaire. Naturellement  $d_f = d_t$  pour un ensemble non-fractal. Pour l'ensemble de Cantor triadique, il suffit de prendre  $\epsilon = (1/3)^n$  à l'étape  $n$ , ce qui donne  $\mathcal{N}(\epsilon) = 2^n$  et donc  $d_f = \log(2^n)/\log(3^n) = \log(2)/\log(3) = d_s$ , l'ensemble étant auto-similaire à toutes les échelles.

La dimension de similarité  $d_s$  n'est qu'un intermédiaire commode. La dimension fractale  $d_f$ , plus générale, est également appelée *capacité* (Kolmogorov). Elle est plus facile à déterminer que la *dimension de Hausdorff* préférée des mathématiciens mais que nous considérerons pas ici car elle n'est pas facile à mettre en œuvre ailleurs que dans son contexte mathématique, en particulier dans les expériences.

### 7.2.3 Géométrie multifractale

La dimension fractale  $d_f$  telle qu'elle a été introduite ne caractérise que la géométrie de l'attracteur. Or les expériences font apparaître le besoin de rendre compte également de la dynamique sur l'attracteur, en particulier sous ses aspects statistiques introduits plus haut. Nous devons donc nous attacher à caractériser la distribution de probabilité sur l'espace des phases induite par l'évolution et rendre compte du fait que toutes les régions visitées ne contribuent pas avec des poids égaux à  $\mathcal{N}(\epsilon)$ .

Partant d'une partition de l'espace des phases en cellules  $i$ , chacune affectée de sa probabilité  $p_i$ , on définit la "dimension" généralisée (Reyni) par

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log(\epsilon)}. \quad (7.4)$$

La puissance  $q$  intervenant dans cette définition est un réel pouvant varier de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Pour  $q = 0$ , puisque  $(p_i)^0 \equiv 1$ , cela correspond à un simple décompte des cellules occupées quelque soit le degré d'occupation et l'on a

$$\log\left(\sum_i p_i^0\right) = \log\left(\sum_i 1\right) = \log(\mathcal{N}(\epsilon)) \Rightarrow D_0 = d_f.$$

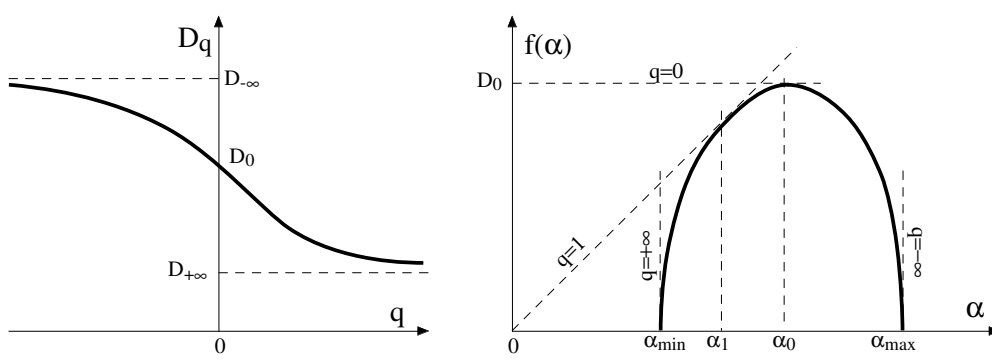


Figure 7.7: Courbes  $D_q = D_q(q)$  et  $f = f(\alpha)$ .

En général, la distribution de probabilité n'est pas uniforme sur l'attracteur. On peut alors montrer que  $D_q$  est une fonction décroissante de  $q$ , i.e.,  $D_q \leq D_{q-1}$ . Ceci résulte de l'inégalité  $p_i < 1$  qui implique  $(p_i)^{q+1} < (p_i)^q < p_i$  pour  $q > 0$  (resp.  $(p_i)^{q-1} > (p_i)^q > p_i$  pour  $q < 0$ ), et donc que les cellules contribuant à la somme sont celles de probabilité maximale (resp. minimale). Les  $D_q$  mesurent donc la dimension fractale de sous-ensembles de probabilité variable sur l'attracteur (voir plus loin). Tout un spectre de valeurs de  $D_q$  peut ainsi être déterminé variant de  $D_{\min}$  à  $D_{\max}$ , cf. Fig. 7.7 (gauche). La largeur de cette distribution est un indice de la non-uniformité de la distribution. Pour un mono-fractal auto-similaire, pour tout  $q$  on a  $D_q = D_0 = d_f$ . Mais on a affaire en général à des attracteurs *multifractals* pour lesquels  $D_{\min} < D_{\max}$ . Deux de ces dimensions sont souvent considérées pour elles-mêmes, celles correspondant à  $q = 1$  et  $q = 2$ .

La définition (7.4) semble singulière pour  $q = 1$ . En réalité, par un développement limité au voisinage de  $q = 1$  on montre facilement que

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_i p_i \log(p_i)}{\log(1/\epsilon)}.$$

Rappelant que l'entropie  $-\sum_i p_i \log(p_i)$  correspond à l'information statistique  $I(\epsilon)$ ,  $D_1$  est plutôt notée  $d_1$  et appelée *dimension d'information*. Si la distribution est uniforme, on trouve naturellement que  $p_i \equiv p = 1/\mathcal{N}(\epsilon)$  de sorte que  $I(\epsilon) = \log(\mathcal{N}(\epsilon))$  et donc que  $d_1 = d_f$ .

Pour  $q = 2$ , on doit calculer  $D_q$  à l'aide de  $p_i^2$  qui représente essentiellement la probabilité de trouver deux points de l'attracteur dans la cellule  $i$  de poids  $p_i$ , ce que l'on interprète en termes de corrélations sur l'attracteur. Ces corrélations sont définies à partir de la distribution des distances entre paires de points  $(X_{k'}, X_{k''})$  sur l'attracteur (Grassberger–Procaccia). La fonction  $C(R)$  compte le nombre de paires de points séparés d'une distance  $d(X_{k'}, X_{k''}) < R$ , soit formellement

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\{X_{k'}, X_{k''}\}} Y(R - \text{dist}(X_{k'}, X_{k''})),$$

où le facteur  $1/N^2$  sert à la normalisation,  $Y$  étant la fonction de Heaviside,  $Y(u) = 0$  pour  $u < 0$  et  $Y(u) = 1$  pour  $u > 0$ . La *dimension de corrélation* est alors définie par

$$\nu = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}.$$

à la résolution  $\epsilon$ ,  $C(R = \epsilon)$  est la probabilité d'avoir une paire de points dans une cellule de taille  $\epsilon$ , de sorte que  $D_2 = \nu$ . La distribution des distances sur l'attracteur étant relativement facile à estimer, l'aspect fractal des attracteurs est souvent caractérisé simplement par cette dimension de corrélation (cf. 7.3.5).

La *dimension ponctuelle* en un point  $\mathbf{X}$  de l'attracteur est définie par

$$d_p(\mathbf{X}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\rho(B(\mathbf{X}, \epsilon)))}{\log(\epsilon)},$$

où  $\rho(B(\mathbf{X}, \epsilon))$  est la masse de l'attracteur contenue dans une boule  $B$  de rayon  $\epsilon$  centrée en ce point. En raison de l'ergodicité, la moyenne d'ensemble de  $d_p(\mathbf{X})$  sur l'attracteur est aussi la dimension ponctuelle

en tout point de n'importe quelle orbite apériodique. Cependant un attracteur chaotique porte aussi un ensemble dense, de mesure nulle, de trajectoires périodiques de toutes périodes, instables, imbriquées les unes dans les autres et noyées au sein de l'attracteur (cf. §6.1.2). La présence de ces trajectoires affecte la mesure de probabilité de façon irrégulière car le long de ces trajectoires particulières  $d_p$  prend typiquement des valeurs différentes de la moyenne.

Le *formalisme multifractal* relie le spectre de dimensions  $D_q$  au “spectre de singularité”  $f(\alpha)$  défini comme la dimension fractale  $d_f$  des sous-ensembles de trajectoires dont la dimension ponctuelle  $d_p$  est précisément égale à  $\alpha$  (i.e.,  $\mathcal{N}_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)}$ ), cf. Fig. 7.7. On définit alors une quantité  $Z(q, \epsilon)$ , appelée “fonction de partition,” par  $Z(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_i p_i^q(\epsilon)$  et l'on exprime le comportement en loi d'échelle de  $Z(q, \epsilon)$  à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  par  $Z(q, \epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)}$ , ce qui définit l'exposant  $\tau(q)$ . On montre alors que les quantités  $\tau(q)$  [ $\equiv (q-1)D_q$  par construction] et  $f(\alpha)$  sont reliées l'une à l'autre par une transformée de Legendre (cf. chapitre 2, §2.4.3).

$$\tau(q) = \min_{\alpha} [q\alpha - f(\alpha)], \quad f(\alpha) = \min_q [\alpha q - \tau(q)].$$

Admettant  $f$  dérivable, on déduit de la première relation que  $q$  et  $\alpha$  sont reliés par  $q = df/d\alpha$  ( $q$  est égal à la pente de la courbe  $f = f(\alpha)$ ), on obtient immédiatement que le maximum de  $f$ , atteint pour  $q = 0$ , n'est autre que  $D_0 = d_f$ , la dimension fractale du support de la mesure. La limite  $q \rightarrow +\infty$  sélectionne les singularités qui maximisent  $p_i$ , la dimension ponctuelle de cet ensemble tendant vers  $\alpha_{\min}$ . À l'inverse  $\alpha_{\max}$  est obtenu à la limite  $q \rightarrow -\infty$ . Finalement pour  $q = 1$  on a  $\tau(1) = 0$  (de  $\tau = (q-1)D_q$ ) de sorte que le graphe de  $f$  est tangent à la droite  $\alpha = f(\alpha)$  (de  $\tau = \min_{\alpha} q\alpha - f(\alpha)$ , distance du graphe de  $f$  à la droite  $f = q\alpha$  avec  $q = 1$ ), cf. [14, 38].

On peut enfin déterminer une dimension à partir du spectre des exposants de Lyapunov cumulés  $\mu_m = \sum_{m'=1}^m \lambda_{m'}$  qui mesurent le taux de croissance d'éléments de volumes infinitésimaux  $m$ -dimensionnels. La *dimension de Lyapunov* est définie par la formule de Kaplan et Yorke:

$$d_L = \nu + \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu - \mu_{\nu+1}} = \nu + \frac{1}{|\lambda_{\nu+1}|} \sum_{m=1}^{\nu} \lambda_m$$

où  $\nu$  est tel que  $\mu_\nu \geq 0$  and  $\mu_{\nu+1} < 0$ . Obtenue par interpolation linéaire entre les dimensions  $\nu$  et  $\nu + 1$  des éléments de volumes qui sont respectivement dilatés et contractés, cette “dimension” fractionnaire caractérise donc une certaine invariance en mesure sur l'espace des phases. La conjecture  $d_L = d_I$  est supportée par la démonstration d'un théorème valide pour les itérations différentiables bidimensionnelles.

### 7.3 Caractérisation empirique des régimes chaotiques

Le système dynamique effectif qui produit un régime donné est rarement connu explicitement. C'est déjà le cas lorsque le système originel, bien que parfaitement défini mathématiquement, doit être étudié numériquement dès que les choses deviennent un tant soit peu complexes. Ça l'est plus encore s'il s'agit de résultats analogiques obtenus au cours d'une expérience de laboratoire. Le problème est donc de construire un système équivalent à partir des données “expérimentales” tirées de l'*échantillonnage* de quelques *observables*, c'est à dire de tracer des orbites dans un *pseudo-espace des phases* pour les utiliser ensuite dans le calcul de quantités telles qu'exposants de Lyapunov, entropie, dimensions. Un but plus ambitieux mais bien plus difficilement accessible serait d'en tirer un *modèle* suffisamment fiable pour rendre compte des bifurcations du système réel.

Considérons donc le problème de la détermination effective des quantités que nous avons introduites sous un angle théorique pour mesurer le degré de chaos présent dans un régime dynamique complexe observé expérimentalement. D'un point de vue général, il s'agit d'un problème de *traitement du signal* car les informations acquises se présentent le plus souvent sous la forme de séries chronologiques de mesures effectuées sur le système.

Dans un premier temps, il est indispensable d'utiliser tous les outils classiques à notre disposition et reposant principalement sur l'analyse des corrélations linéaires, soit directement soit par l'intermédiaire de

transformée de Fourier, et éventuellement de façon plus fine par transformation en ondelettes (cf. [38]). On peut cependant espérer faire des progrès supplémentaires en essayant de reconstruire le système dynamique à l'origine du comportement observé. C'est cette approche plus spécifiquement non-linéaire que nous allons développer.

### 7.3.1 La méthode des délais

Les données se présentent donc assez systématiquement sous forme de *série chronologique* d'une observable, c'est à dire d'une fonction  $W = \mathcal{W}(\mathbf{X})$  des états  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  du système dans son espace des phases  $\mathbb{X}$  de dimension  $d$ . La série sera supposée régulièrement échantillonnée en temps soit  $\{W_k, k = 0, 1, \dots\}$ , avec  $W_k = \mathcal{W}(\mathbf{X}(t_k))$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $\tau$  étant l'inverse de la fréquence d'acquisition. Les problèmes empiriques qui se posent découlent du fait que la structure même du système dynamique  $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , donc en particulier la dimension  $d$  et la nature de la variété sur laquelle il évolue, ainsi que et l'expression de la relation qui définit l'observable  $\mathcal{W}$ , ne sont généralement pas connues *a priori*.

Les techniques issues de la théorie des systèmes dynamiques pour traiter ce type de signal et obtenir des informations sur le système dérivent toutes de la méthode dite *des délais* [40, 41].

Pour illustrer le problème de la reconstruction partons du cas plus simple d'un système à temps discret  $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ , dont la dimension  $d$  et la forme analytique de  $\mathbf{F}$  sont inconnues. Nous supposons simplement qu'il existe, qu'il est déterministe, et que ses trajectoires ne sont connues que par l'intermédiaire d'une observable scalaire  $W = \mathcal{W}(\mathbf{X})$  dont une série chronologique  $\{W_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  a été déterminée. Le problème est donc de tirer les  $d$  composantes de  $\mathbf{X}_k$  de la connaissance des  $W_k$ . Une seule mesure  $W_0 = \mathcal{W}(\mathbf{X}_0)$  est certainement insuffisante car on a besoin d'au moins  $d$  relations indépendantes pour définir un point d'un espace de dimension  $d$ . Avec une deuxième mesure,  $W_1 = \mathcal{W}(\mathbf{X}_1) = \mathcal{W}(\mathbf{F}(\mathbf{X}_0))$  on obtient une seconde relation entre les  $d$  composantes de  $\mathbf{X}_0$ , et ainsi de suite. Une  $d$ -ième mesure  $W_{d-1}$  est interprétée comme une nouvelle information  $W(\mathbf{X}_{d-1}) = \mathcal{W}(\mathbf{F}^{(d-1)}(\mathbf{X}_0))$  sur les composantes de  $\mathbf{X}_0$ . Disposant de  $d$  relations pour  $d$  inconnues on peut en principe déterminer  $\mathbf{X}_0$  complètement. De la même façon on déterminerait  $\mathbf{X}_1$  de la sous-suite  $\{W_1, \dots, W_d\}$ , etc. Plus généralement,  $\mathbf{Y}_k = \{W_k, \dots, W_{k+d-1}\}$  représenterait un état dans un pseudo-espace des phases en correspondance avec le véritable espace des phases.

Pour un système à temps continu, en particulier lorsqu'il est donné sous forme canonique, c'est à dire fonction d'une seule variable scalaire  $X$  et de ses dérivées successives, l'approche qui peut sembler la plus naturelle consiste à partir la série chronologique de l'observable  $\mathcal{W}(\mathbf{X}) \equiv X$  pour obtenir une estimation des dérivées en termes de leurs approximations aux différences finies [43, (a)], soit  $(\frac{d}{dt}X)_k \propto X_k - X_{k-1}$ ,  $(\frac{d^2}{dt^2}X)_k \propto X_k - 2X_{k-1} + X_{k-2}, \dots$ . Cependant le calcul des différences amplifie le bruit de sorte qu'il apparaît préférable de garder la série chronologique  $\{X_k\}$  sans la transformer et de la traiter comme dans le cas discret pour construire la suite  $\{\mathbf{Y}_k\}$ . (Le fait d'utiliser  $k, k+1, \dots$  plutôt que  $k, k-1, \dots$  est affaire de convention lors de l'indexation.)

En pratique, les choses ne sont pas si simples, tout d'abord parce que  $d$  n'est pas connu à l'avance. Le plus souvent, il s'agit d'ailleurs d'un système à temps continu décrivant un milieu continu, donc à nombre de degrés de liberté formellement infini, ce qui oblige à supposer que la dynamique *effective* est de dimension suffisamment basse. Deux problèmes d'optimisation vont se poser. Le premier est lié à l'intervalle de temps entre les mesures  $\tau_{\text{eff}}$  servant à la construction des  $\mathbf{Y}_k$ : nous avons supposé jusqu'ici que nous prenions toutes les mesures échantillonnées à la fréquence d'acquisition  $1/\tau$  mais, compte tenu du bruit expérimental et des fréquences caractéristiques de la dynamique il y a peut-être matière à optimisation pour limiter les volumes de stockage et de calcul au cours du post-traitement. Le second problème est lié à la largeur de la fenêtre temporelle glissée sur les données, intervalle de temps  $\Delta t$  séparant la première de la dernière mesure participant à un  $\mathbf{Y}_k$  donné. Cette largeur qui détermine le nombre de composante des  $\mathbf{Y}_k$  doit également être optimisée pour réaliser une reconstruction fiable. Si elle est trop grande, l'information est redondante et son traitement inutilement coûteux. Si elle est trop petite, l'information est insuffisante et la dynamique incorrectement restituée.

En toute généralité, que le système original soit à temps discret ou continu, de la suite d'observations  $\{W_k\}$  on construit donc une représentation des états du système dans un pseudo-espace des phases  $\mathbb{Y}$  dont les points  $\mathbf{Y}_k$  correspondant à la trajectoire suivie ont pour coordonnées des sous-suites de  $d_e$  mesures<sup>3</sup>

$$\mathbf{Y}_k \mapsto [W_k; W_{k+\kappa_1}; \dots; W_{k+\kappa_{d_e-1}}], \quad (7.5)$$

i.e.  $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{R}^{d_e}$ . Les données sont donc prises dans une fenêtre de durée  $\kappa_{d_e-1}\tau$  glissant sur la série chronologique échantillonnée à la fréquence nominale. Le paramètre de reconstruction  $d_e$  est appelé la dimension de plongement (l'indice "e" vient de "embedding" en anglais). Bien que, mathématiquement parlant, rien n'interdise que les intervalles  $\kappa_1, \dots, \kappa_{d_e-1}$ , soient différents, ils sont la plupart du temps pris multiples du premier intervalle  $\kappa_1$ , i.e.  $\kappa_2 = 2\kappa_1, \dots, \kappa_{d_e-1} = (d_e - 1)\kappa_1$ . La première optimisation dont nous avons parlé porte sur la détermination de  $\kappa_1$ . Plus proche des problèmes classiques de traitement du signal, elle sera examinée en premier. Après rééchantillonnage à la fréquence  $1/(\kappa_1\tau)$  (7.5) s'écrira donc plus simplement

$$\mathbf{Y}_k \mapsto [W_k; W_{k+1}; \dots; W_{k+d_e-1}]. \quad (7.6)$$

Le problème d'optimisation portant sur la dimension de plongement  $d_e$  sera examiné en second.

### 7.3.2 Fréquence d'acquisition

Il faut naturellement supposer qu'au départ l'observable est échantillonnée à une fréquence suffisamment élevée, de sorte que l'information recueillie sur le système soit assez complète pour contenir toutes les caractéristiques à mettre en évidence. Une analyse spectrale préliminaire (par transformation de Fourier) doit permettre de se faire une idée du contenu fréquentiel du signal et en particulier de déterminer une fréquence de coupure au delà de laquelle le signal est dominé par un bruit statistique que l'on suspecte être d'origine extrinsèque. C'est *a priori* les fluctuations, supposées intrinsèques, en deçà de cette fréquence de coupure que l'on cherche à représenter.

Si l'échantillonnage nominal est effectivement redondant on peut ultérieurement filtrer les données pour ne considérer que celles qui sont pertinentes. Sinon, ou bien le bruit est trop fort, ou bien le nombre de degrés de liberté actifs est trop élevé relativement à l'information recueillie. Toute les méthodes que l'on peut mettre en œuvre sont alors vouées à l'échec.

Pour déterminer l'intervalle  $\kappa$  on peut tout d'abord faire appel à des techniques classiques en traitement du signal, reposant sur l'étude de la fonction d'auto-corrélation définie pour un processus à temps continu par

$$C_W(\varsigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T W(t)W(t+\varsigma)dt \quad (7.7)$$

où, pour simplifier, nous supposons implicitement les observations centrées, i.e.  $W(t) \mapsto W(t) - \langle W(t) \rangle$ , où  $\langle W(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T W(t)dt$  n'est autre que la moyenne temporelle de  $W(t)$ . Concrètement  $C_W(\varsigma)$  est généralement déterminée en calculant la transformée de Fourier du spectre de puissance du signal  $P(\omega) \propto |\hat{W}(\omega)|^2$ , lui même déduit de la transformée de Fourier  $\hat{W}(\omega)$  du signal  $W(t)$ . Transposée au cas des séries échantillonnées de longueur  $n_t$ ,  $\kappa$  mesurant l'intervalle de temps  $\varsigma$  en nombre d'enregistrements, i.e.  $\varsigma = \kappa\tau$ , on obtient:

$$C_W(\kappa) = \langle W(k)W(k+\kappa) \rangle = \frac{1}{n_v - \kappa} \sum_{k=0}^{n_t - \kappa} W(k)W(k+\kappa). \quad (7.8)$$

Le choix de  $\kappa$  repose sur l'analyse des distributions de  $W(k)$  et de paires  $(W(k), W(k+\kappa))$ .

Considérons un signal périodique de pulsation  $\omega$  entaché de bruit représenté dans son espace des phases sur la partie la plus à gauche de la figure 7.8. Les autres vignettes illustrent des reconstructions bidimensionnelles dans le plan  $(W_k, W_{k+1})$  à partir d'une observable  $W$  (ici, l'une des coordonnées) pour des valeurs de décalage  $\delta t \sim 0$ ,  $\delta t \sim \pi/\omega$  et  $\delta t \sim \pi/2\omega$ . Seule cette dernière restitue une dynamique conforme à l'attente. Un calcul simple conduit du signal  $W(t) = A \sin(\omega t + t_0)$  à sa fonction d'auto-corrélation  $C_W(\varsigma) = \frac{1}{2}A^2 \cos(\omega\varsigma)$ . On

<sup>3</sup>Notations MATLAB: le ';' désigne un saut de ligne.  $\mathbf{Y}_k$  est donc défini comme un vecteur colonne.

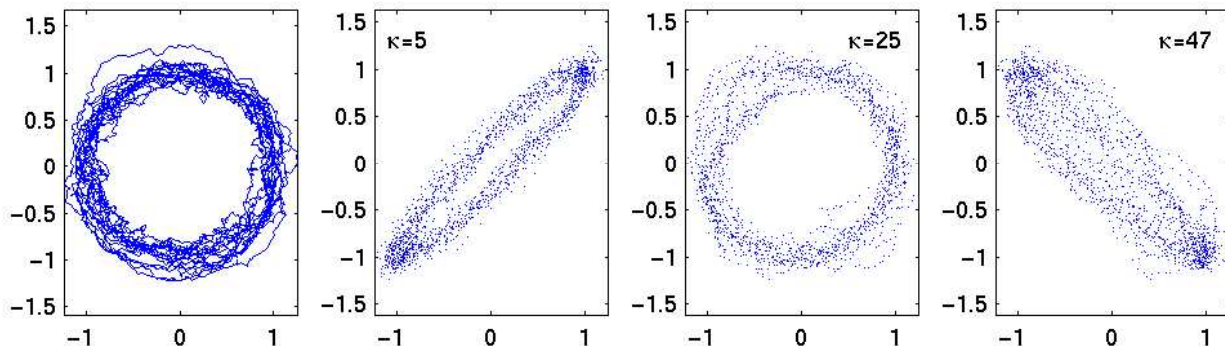


Figure 7.8: De gauche à droite. À gauche: Signal périodique bruité issu de la simulation de  $\frac{d}{dt}Z = (1 + i)Z - (1 - i)|Z|^2Z + \zeta(t)$  (schéma de Runge–Kutta du 2nd ordre avec un pas de temps  $\delta t = 0.01$  et un bruit gaussien d’amplitude 0.02). La pulsation du signal supposé déterministe ( $\zeta(t) \equiv 0$ ) est  $\omega = 2$ , soit une période  $T = \pi$ . À droite: Reconstruction avec un intervalle d’échantillonnage  $\tau = 0.03$  et  $\kappa = 5, 25$  et  $47$  de l’observable  $X(t) = \text{Re}(Z(t))$ . On observe bien un optimum de reconstruction pour  $\kappa = 25$ , soit  $\Delta t = 0.75 \simeq \pi/4$ .

observe alors que le décalage de  $\pi/2\omega$  (1/4 de période) correspond précisément à celui qui donne le premier zéro de la fonction d’auto-corrélation. Ceci peut s’interpréter en remarquant que ce choix rend l’information apportée par la nouvelle mesure moins sensible bruit que lorsque l’intervalle de temps correspond à des mesures presque simultanées ou en opposition de phase. Ce point de vue heuristique est conforté par une analyse statistique du signal dans le cas général: adoptant une représentation bidimensionnelle du type de celles illustrées dans la partie droite de la figure 7.8, on obtient une distribution de points  $(W_k, W_{k+\kappa})$  se répartissant dans une ellipse dont les demi-axes sont donnés par les valeurs propres de la matrice de covariance:

$$R(\kappa) = \begin{bmatrix} \langle W_k^2 \rangle & \langle W_k W_{k+\kappa} \rangle \\ \langle W_k W_{k+\kappa} \rangle & \langle W_{k+\kappa}^2 \rangle \end{bmatrix}$$

L’occupation de l’espace est maximale lorsque lorsque l’ellipse est un cercle, c’est à dire lorsque  $\kappa$  est tel que les deux valeurs propres soient égales, donc pour  $\langle W_k W_{k+\kappa} \rangle = 0$ . En pratique on peut choisir la plus petite valeur de  $\kappa$  telle que  $\langle W_k W_{k+\kappa} \rangle / \langle W_k^2 \rangle \sim 1/3$  par exemple.

Ce critère est cependant d’essence linéaire. Un meilleur critère prolongeant l’argument porte sur l’*information mutuelle* contenue dans le signal. Définissant l’histogramme  $\mathcal{P}(W)$  des valeurs de  $W_k = W$  puis celui,  $\mathcal{P}_\kappa(W', W'')$ , des couples  $(W_k = W'; W_{k+\kappa} = W'')$ , avec  $\kappa = 1, 2, \dots$ . L’information mutuelle définie par

$$I_{\text{mut}}(\kappa) = \sum_{W', W''} \mathcal{P}_\kappa(W', W'') \ln \left( \frac{\mathcal{P}_\kappa(W', W'')}{\mathcal{P}(W')\mathcal{P}(W'')} \right)$$

est la quantité pertinente à considérer. En effet, soient  $\mathcal{P}_A(a)$ ,  $\mathcal{P}_B(b)$ ,  $\mathcal{P}_{A,B}(a, b)$ , les probabilités d’avoir les évènements  $A = a$ ,  $B = b$  et, simultanément,  $A = a$  et  $B = b$ , si  $A$  et  $B$  sont indépendants, on a  $\mathcal{P}_{A,B}(a, b) = \mathcal{P}_A(a)\mathcal{P}_B(b)$ , tandis que s’il y a un lien quelconque entre  $A$  et  $B$ , la probabilité d’avoir les valeurs particulières  $a$  et  $b$  simultanément seront différentes, plus grande ou plus petite. Le produit  $\mathcal{P}_A(a)\mathcal{P}_B(b)$  est donc la référence (“hypothèse zéro”) à laquelle comparer  $\mathcal{P}_{A,B}(a, b)$ . Il reste à prendre le logarithme pour définir une “information” et à moyenner sur l’espace des épreuves. Ici, les évènements à mettre en relation sont les valeurs de l’observable à  $\kappa$  pas de temps de distance. Supposons le signal sur-échantillonné. Lorsque  $\kappa \sim \mathcal{O}(1)$ , l’information mutuelle est élevée car les points de l’espace des phases sont très corrélés (connaître  $W_k$  renseigne sur  $W_{k+\kappa}$ ). Au contraire, quand  $\kappa \gg 1$ , les points se décorrèlent et  $\mathcal{P}_\kappa(W_k, W_{k+\kappa})$  se rapproche de  $\mathcal{P}(W_k)\mathcal{P}(W_{k+\kappa})$ , de sorte que l’information mutuelle tend vers zéro. Généralement, celle-ci ne décroît pas de façon monotone mais présente des minima pour des valeurs intermédiaires de  $\kappa$ . En remarquant que, dans l’argument précédent, c’est le carré de la fonction d’auto-corrélation qui mesure l’information mutuelle et qu’à son premier zéro correspond un premier minimum de ce carré, on peut généraliser le critère en choisissant de prendre le décalage qui correspond au premier minimum de l’information mutuelle [40], cf.



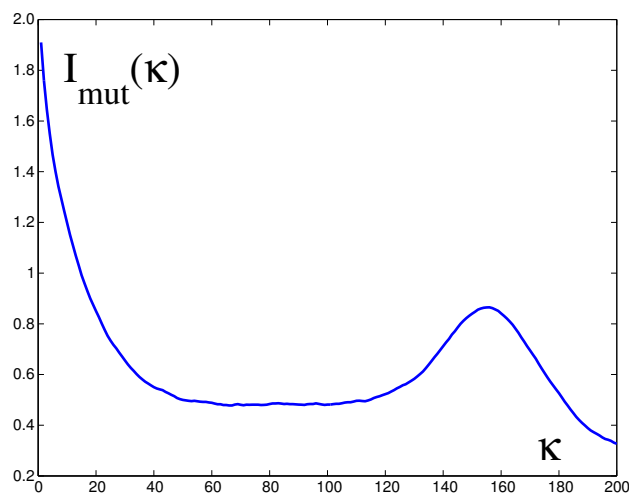


Figure 7.9: Information mutuelle calculée à partir de la série chronologique utilisée pour la Fig. 7.8, montrant un minimum assez peu marqué pour  $\kappa$  de l'ordre de 75 avec un échantillonnage de pas de calcul en pas de calcul, soit  $\tau = 0.01$ , ce qui correspond bien à l'optimum de reconstruction pour  $\kappa = 25$  obtenu avec le  $\delta t = 0.03$  pris précédemment.

Fig. 7.9. Si l'information mutuelle décroît de façon monotone, il est à craindre que l'observable ait été sous-échantillonnée au départ, et que des degrés de liberté effectifs trop rapides n'aient pas été correctement pris en compte dans les mesures.

### 7.3.3 Dimension de plongement

On aimerait pouvoir inférer univoquement les états  $\mathbf{X}$  du système de leur reconstruction dans  $\mathbb{Y}$ , et une dynamique “équivalente” à celle décrite par le système dans son propre espace des phases  $\mathbb{X}$ . Pour déplier convenablement la dynamique il faut plonger le système dans un espace de dimension suffisamment vaste. Mathématiquement, on montre que pour résoudre la structure d'une variété régulière (non-fractale) de dimension topologique  $d_t$  il suffit de la plonger dans un espace de dimension  $d_e = 2d_t + 1$  (théorème de Whitney: variété différentiable  $\mathbb{M}$  compacte de dimension  $m \mapsto$  espace euclidien  $\mathbb{R}^{2m+1}$  de dimension  $2m + 1$ ). On peut s'en convaincre en notant qu'une boucle continue tracée sur une surface gauche (représentant un cycle limite dans l'espace des phases) peut, par pur effet de perspective, présenter des points doubles qui disparaissent dès qu'on peut la voir sous un angle différent, ce qui nécessite de se placer dans un espace tridimensionnel (cf. Fig.7.10).

Le théorème de Takens [43, (b)] nous dit alors que les  $\mathbf{Y}_k$  définis par (7.5) où  $\mathcal{W}$  est une fonction différentiable réalisent un plongement procurant une reconstruction fiable de la dynamique pourvu que le nombre  $d_e$  de données à prendre en considération soit suffisant, i.e. une *dimension de plongement*  $d_e \geq 2d + 1$  (cf. figure 7.11). Pour un ensemble fractal, il faut prendre en compte la dimension topologique de la composante continue et le “flou” dû à la structure cantorienne transverse, ce qui conduit à  $d_e = 2d_f + 1$  (Mañé). En fait, sauf peut-être en des régions très particulières de l'espace des phases ces valeurs sont des bornes supérieures qui surestiment assez largement les besoins. De toute façon on ne saurait descendre en dessous de la dimension effective  $d_{\text{eff}}$  du système.

Ce point de vue mathématique apparemment solide doit cependant être tempéré et céder la place à un point de vue empirique beaucoup moins assuré. D'une part, il n'est pas clair que les systèmes physiques qui nous intéressent satisfassent les conditions théoriques à remplir pour appliquer les théorèmes: du fait de la dissipation, la dynamique ne se développe que sur une partie compacte (de dimension effective basse et souvent fractale) de l'espace des phases du système (fréquemment de dimension infinie, en tout cas pour les milieux continus gouvernés par des équations aux dérivées partielles). D'autre part, ces systèmes sont toujours affectés par du “bruit,” ce qui limite la précision des observations et gêne la reconstruction. En effet,

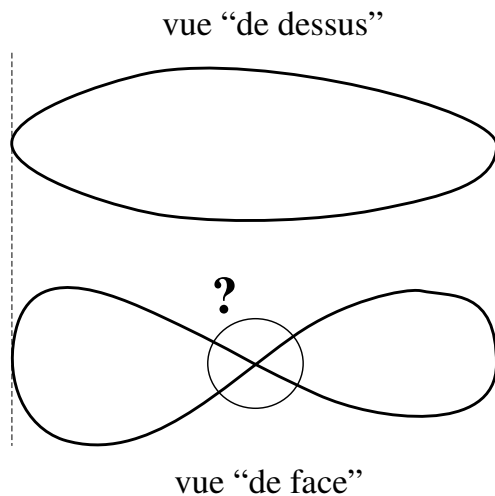


Figure 7.10: Pour distinguer si un objet qui se présente en dimension 2 sous l'aspect d'un chiffre 8 est en fait une boucle sans point double, il faut se placer dans un espace au moins tridimensionnel pour pouvoir changer d'angle de perspective.

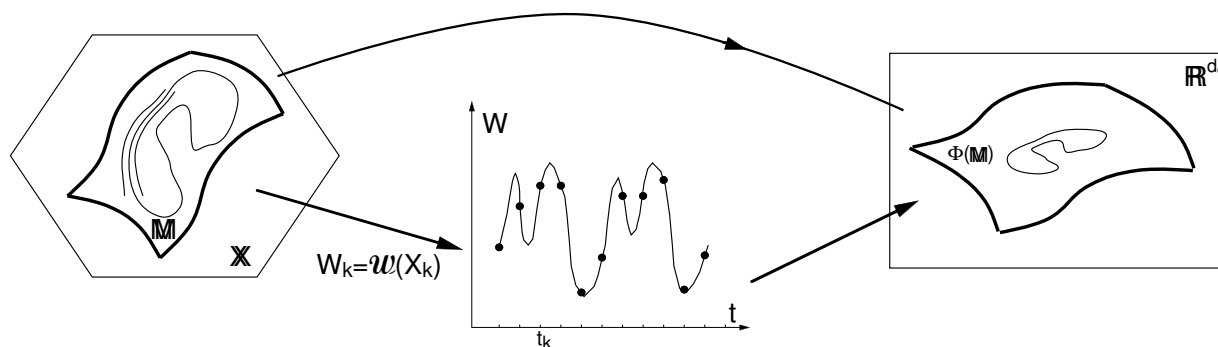


Figure 7.11: Illustration du théorème de Takens.

si les délais invoqués plus haut sont *a priori* arbitraires, en tout cas rien dans l'énoncé précis du théorème ne vient les limiter, il doit être clair qu'une détermination sans ambiguïté de l'origine intrinsèque (chaos déterministe) ou extrinsèque (bruit) de l'éventuelle stochasticité observée va dépendre de la valeur des délais introduits.

**Optimisation de la dimension de plongement** L'optimisation sur l'intervalle d'échantillonnage ayant été effectuée, on repart donc directement de (7.6). Dans sa représentation en  $Y$ , le "diamètre" de l'attracteur est typiquement de l'ordre de  $\Delta Y = W_{\max} - W_{\min}$ , ce qui représente un volume  $\Delta Y^{d_e}$  pour une dimension de plongement  $d_e$ . Admettant que les mesures échantillonnent uniformément ce volume, et que l'on a  $n_{\text{mes}}$  à sa disposition on détermine la résolution nominale de l'expérience en négligeant toute structure et en pavant le volume de l'attracteur par des boules de diamètre  $\delta Y_{\text{nom}}$ , donc de volume  $\delta Y_{\text{nom}}^{d_e}$ . On obtient  $\delta Y_{\text{nom}}$  de la relation  $n_{\text{mes}} \delta Y_{\text{nom}}^{d_e} \sim \Delta Y^{d_e}$  soit  $\delta Y_{\text{nom}} / \Delta Y \sim (n_{\text{mes}})^{-1/d_e}$ . Naturellement, l'occupation de l'espace n'est pas uniforme et cette estimation ne constitue qu'une borne pessimiste mais elle a le mérite de montrer la dégradation de la résolution lorsqu'il est nécessaire d'augmenter  $d_e$  augmente à  $n_{\text{mes}}$  fixé. Dans le même ordre d'idée, la fiabilité des calculs de dimension fractale par exemple suppose que le nombre de données satisfasse l'inégalité  $d_f \leq 2 \log_{10}(n_{\text{mes}})$  (Ruelle, 1990). Il est donc clair que  $d_e$  doit être gardé aussi petit que possible. Dans ces estimations, il est naturellement plus lucide de faire figurer le nombre de données qui résulte du rééchantillonnage que de faire état du nombre initial!

Quoi qu'il en soit, il reste à déterminer la dimension de plongement  $d_e$  la plus appropriée. Une stratégie

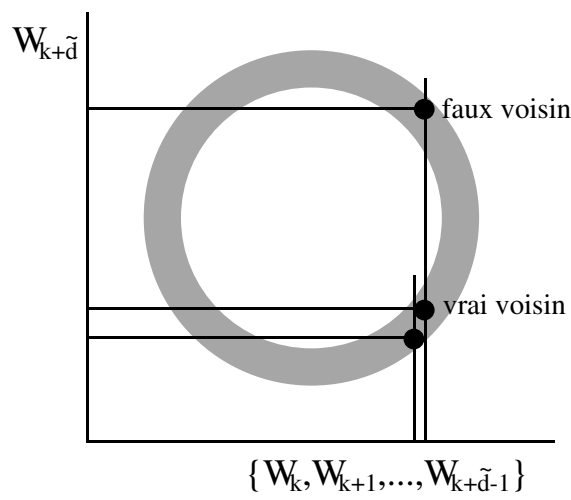


Figure 7.12: Comparaison de la reconstruction dans une espace de dimension  $\tilde{d}$  de coordonnées  $\mathbf{V}_k = [W_k; \dots; W_{k+\tilde{d}-1}]$ , figuré ici par l'axe horizontal, et une reconstruction dans l'espace de dimension  $\tilde{d} + 1$  obtenue en ajoutant la coordonnée  $W_{k+\tilde{d}}$ .

efficace pour la choisir est de considérer la reconstruction de la dynamique avec une dimension d'essai  $\tilde{d}$ , i.e.  $[W_k; W_{k+1}, \dots, W_{k+\tilde{d}-1}]$  et la reconstruction de dimension  $(\tilde{d} + 1)$  obtenue en ajoutant une composante  $W_{k+\tilde{d}}$ , puis de déterminer le nombre de faux voisins, c'est à dire le nombre de paires de points qui sont voisins en dimension  $\tilde{d}$  mais qui ne le sont plus en dimension  $\tilde{d} + 1$ , et d'augmenter  $\tilde{d}$  jusqu'à ce que la fraction de faux voisins devienne négligeable. De façon plus précise, choisissant pour distance,  $\Delta(\mathbf{Y}_{k'}, \mathbf{Y}_{k''}) = \sup_{j=0}^{\tilde{d}-1} |W_{k'+j} - W_{k''+j}|$  et définissant le voisinage d'un point par une condition  $\Delta(\mathbf{Y}_{k'}, \mathbf{Y}_{k''}) < \Delta_0$ , on peut déterminer le nombre de voisins dans la série temporelle reconstruite. Considérant la reconstruction dans l'espace de dimension immédiatement supérieure obtenu en ajoutant la coordonnée  $Y_{k+\tilde{d}}$  à la suite  $[Y_k; \dots; Y_{k+\tilde{d}-1}]$ , on réexamine les paires voisines en dimension  $\tilde{d}$  en écartant celles pour lesquelles l'ajout de la dimension supplémentaire viole la condition d'appartenance à au voisinage. Il est facile de voir que le choix de la distance précédente conduit à ne tester que la différence supplémentaire  $|W_{k'+\tilde{d}} - W_{k''+\tilde{d}}|$ , cf. Fig. 7.12. Usuellement la proportion de faux voisins chute brutalement lorsque la dimension de plongement devient suffisante. Naturellement la distance minimale définissant la notion de voisinage dépend du nombre total de points disponibles et de l'intensité du bruit extrinsèque.

### 7.3.4 Filtrage adaptatif des séries chronologiques

En pratique, la base canonique de l'espace  $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{R}^{d_e}$  dans lequel on effectue la reconstruction n'est pas optimale en ce sens que, bien échantillonnée ou non, elle présente une évidente symétrie particulière: au prix d'un décalage temporel  $\delta k$  de la série chronologique, toute projection dans un sous-espace engendré par quelques vecteurs de cette base est identique à la projection dans le sous-espace engendré par des vecteurs d'indices décalés de cette même quantité  $\delta k$ . Il est cependant possible d'améliorer la représentation des orbites par un changement de base qui soit corrélé aux données au sens des moindres carrés [44]. C'est ce que nous considérons maintenant.

Soit une suite de  $n_t$  valeurs consécutives de l'observable échantillonnée. Lors d'une reconstruction de dimension  $d_e$ , on peut former  $n_v = n_t - d_e + 1$  vecteurs  $\mathbf{Y}_k$  qui représentent autant de motifs dynamiques du système, de durée déterminée  $d_e$ . Un motif arbitraire  $\mathbf{V}$  sera représentatif de la statistique s'il est fortement corrélé à l'ensemble des motifs enregistrés. Une mesure de cette corrélation entre un vecteur particulier  $\mathbf{Y}_k$  et le vecteur d'épreuve  $\mathbf{V}$  est donnée par  $(\mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{V})^2$ , carré du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{Y}$ . Les vecteurs d'épreuve statistiquement les plus représentatifs sont ceux qui, à longueur donnée, maximisent la corrélation

calculée sur l'ensemble des vecteurs disponibles, soit

$$\Lambda(\mathbf{V}) = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} (\mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{V})^2 \quad (7.9)$$

que l'on peut récrire en développant et en échangeant l'ordre des sommations

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{V}) &= (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} \left( \sum_{m=1}^{d_e} W_{k+m-1} V_m \right)^2 \\ &= (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} \left( \sum_{m=1}^{d_e} W_{k+m-1} V_m \right) \left( \sum_{m'=1}^{d_e} W_{k+m'-1} V_{m'} \right) \\ &= (1/n_v) \sum \sum_{m,m'=1}^{d_e} \sum_{k=1}^{n_v} W_{k+m-1} V_m W_{k+m'-1} V_{m'} \\ &= \sum \sum_{m,m'=1}^{d_e} V_m \left[ (1/n_v) \left( \sum_{k=1}^{n_v} W_{k+m-1} W_{k+m'-1} \right) \right] V_{m'}, \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître la *matrice de covariance*  $\mathcal{R}$  du signal échantillonné  $\{W_k, k = 1, \dots, n_t\}$ , dont les coefficients sont donnés par

$$R_{mm'} = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} W_{k+m-1} W_{k+m'-1},$$

e.g.  $R_{11} = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} W_k^2$ ,  $R_{12} = R_{21} = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} W_k W_{k+1}$ , etc. La maximisation de  $\Lambda(\mathbf{V})$ , forme quadratique construite sur  $\mathcal{R}$ , est un problème de Rayleigh classique résolu par une méthode variationnelle introduisant un paramètre de Lagrange pour assurer la condition de normalisation  $\mathbf{V}^2 = 1$ . On arrive ainsi à un problème aux valeurs propres pour  $\mathcal{R}$ . Cette matrice est définie positive car la forme  $\Lambda$  est issue d'une somme de carrés. Ses valeurs propres ne pouvant être négatives, nous écrivons:

$$\sum_{m'=1}^{d_e} R_{mm'} V_{m'} = \sigma^2 V_m,$$

La matrice  $\mathcal{R}$  est réelle symétrique, diagonalisable et ses vecteurs propres  $\mathbf{V}_m$ ,  $m = 1, \dots, d_e$ , forment une base orthogonale complète de l'espace  $\mathbb{R}^{d_e}$  sur laquelle on peut projeter les vecteurs successifs de la reconstruction. À ce stade il ne semble pas que l'on ait beaucoup avancé car la description complète de la dynamique est maintenant contenue dans  $d_e$  séries chronologiques donnant les composantes dites *principales* des  $\mathbf{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, n_v$ , sur ces nouveaux vecteurs de base, i.e.

$$\tilde{W}_{km} = \mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{V}_m, \quad m = 1, \dots, d_e, \quad k = 1, \dots, n_v. \quad (7.10)$$

Cependant, les valeurs propres de la matrice de covariance  $\sigma_m^2$ , qui mesurent la "puissance spectrale" contenue dans le motif  $\mathbf{V}_m$ , peuvent être ordonnées par valeurs décroissantes,  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_{d_e}^2$ . On peut donc envisager une reconstruction sélective de la dynamique, concentrée sur la contribution particulière d'un ensemble de  $d_m$  modes  $\{m_1, \dots, m_{d_m}\}$ , la fraction de puissance spectrale contenue dans cette reconstruction partielle étant donnée par  $f = [\sum_{m \in \{m_1, \dots, m_{d_m}\}} \sigma_m^2] / [\sum_{m=1}^{d_e} \sigma_m^2]$ . Cette technique de reconstruction permet de filtrer certaines composantes jugées indésirables, notamment les tendances, des fréquences parasites (e.g. 50 Hz), et le bruit d'origine extrinsèque (on dit que le signal conservé rend compte de  $f$  % de la variance totale).<sup>4</sup> Il s'agit d'un filtrage adaptatif car la projection utilise des motifs issus de l'analyse de la covariance du signal et non de fonctions fixées *a priori* comme en analyse de Fourier mais les traitements sont très voisins, ce que reflète la terminologie. Cette procédure rend service même sur des séries chronologiques courtes et/ou fortement bruitées.

On peut naturellement travailler avec un signal vectoriel à  $d_m$  composantes et, dans le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres que l'on désire conserver, utiliser le repère formé par ces vecteurs pour pratiquer différentes opérations telles que sections de Poincaré ou détermination d'exposants de Lyapunov. Il est cependant souvent intéressant de retourner à une représentation dans laquelle

<sup>4</sup>On définit parfois la *dimension statistique* de l'attracteur comme étant le nombre de valeurs propres qui "sortent du bruit." Le signal reconstruit sur les vecteurs propres correspondants est ainsi filtré d'une partie jugée dynamiquement non-significative de la variance.

le signal étudié se présente comme la série chronologique d'un signal scalaire effectif. Dans ce but, revenons au point de départ et définissons la matrice "trajectoire"  $\mathcal{T}$  de dimension  $n_v \times d_e$  ( $n_v \gg d_e$ ):

$$\mathcal{T} \mapsto \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & \dots & W_{d_e} \\ W_2 & W_3 & W_4 & \dots & W_{d_e+1} \\ W_3 & W_4 & W_5 & \dots & W_{d_e+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{n_v} & W_{n_v+1} & W_{n_v+2} & \dots & W_{n_t} \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Ses lignes sont constituées des  $\mathbf{Y}_k$  successifs en représentation ligne, de sorte que l'on peut lire sur ses colonnes la série chronologique de départ, chaque fois décalée d'un pas d'échantillonnage lorsqu'on passe d'une colonne à la colonne suivante. Par construction elle vérifie donc

$$T_{k m} = T_{k-1 m+1} \quad (7.12)$$

Or à un instant  $k$  donné, le signal filtré est représenté dans la base de départ par

$$\sum_{m \in \{m_1, \dots, m_{d_m}\}} \tilde{W}'_{k m} \mathbf{V}_m \mapsto [\tilde{W}''_{k 1}, \tilde{W}''_{k 2}, \dots, \tilde{W}''_{k d_e}]$$

avec  $\tilde{W}''_{k m'} = \sum_{m \in \{m_1, \dots, m_{d_m}\}} \tilde{W}'_{k m} V_{m' m}$ ,  $m' = 1, \dots, d_e$ ,  $k = 1, \dots, n_v$  issus de (7.10), utilisant  $\mathbf{V}_m = [V_{1 m}; V_{2 m}; \dots; V_{d_e m}]$ . Deux états successifs n'ont pas de raison particulière de vérifier  $\tilde{W}''_{k m} = \tilde{W}''_{k-1 m+1}$  ce qui serait le cas pour une matrice trajectoire qui se respecte. Remarquant que si l'on fait la somme sur toutes les composantes on retrouve exactement  $\mathcal{T}$  qui possède bien la propriété (7.12) et qu'en n'utilisant qu'une fraction d'entre elles on ne doit pas en être très loin, on peut chercher la série chronologique qui ne vérifie cette propriété que statistiquement au sens des moindres carrés. Appelant cette série  $\{W_k^f\}$ ,  $k = 1, \dots, n_t$  on doit donc chercher à minimiser

$$\tilde{\Lambda}(\{W_k^f\}) = \sum_{k=1}^{n_v} (\tilde{W}''_{k m} - W_{k+m-1}^f)^2.$$

La variation par rapport à  $W_k^f$  conduit à

$$\begin{aligned} W_k^f &= (1/k) \sum_{m=1}^k \tilde{W}''_{k-m+1 m}, & k = 1, \dots, d_e - 1 \\ W_k^f &= (1/d_e) \sum_{m=1}^{d_e} \tilde{W}''_{k-m+1 m}, & k = d_e, \dots, n_v \\ W_k^f &= (1/(n_t - k + 1)) \sum_{m=k+1-n_v}^{d_e} \tilde{W}''_{k-m+1 m}, & k = n_v + 1, \dots, n_t \end{aligned}$$

Une illustration de cette approche<sup>5</sup> est présentée sur les figures 7.13 à 7.15. Il s'agit d'une série chronologique de la longueur du jour obtenue sur le site de l'IERS (International Earth Rotation Service) de l'Observatoire de Paris.<sup>6</sup> Sur la figure 7.13 sont présentées successivement les données brutes après soustraction des effets de marée et élimination des très basses fréquences, la composante saisonnière reconstruite sur le sous-espace propre (1-4) de la décomposition singulière et représentant 80.2 % de la variance du signal, une composante non triviale reconstruite sur les vecteurs 5 à 8 correspondant à 10.1 % de la variance et un "bruit" résiduel. Le spectre singulier (élevé au carré), déterminé pour une dimension de plongement  $d_e = 36$ , est présenté sur la figure 7.14 qui indique les regroupements de valeurs propres. Les vecteurs singuliers associés aux 8 premières valeurs sont illustrés sur la figure 7.15, correspondant à la modulation saisonnière (vecteurs 1 à 4, en haut) et à la composante non triviale (vecteurs 5 à 8, en bas). On notera que les valeurs singulières arrivant par paires sont associées à des motifs singuliers sensiblement périodiques et en quadrature de phase. Cette propriété est fréquemment observée.

<sup>5</sup>Extrait d'un travail initialisé au cours d'un stage de Licence de Mathématique par Peggy Cenac.

<sup>6</sup>Série C04, <http://hpiers.obspm.fr/iers/eop/opc04/>.

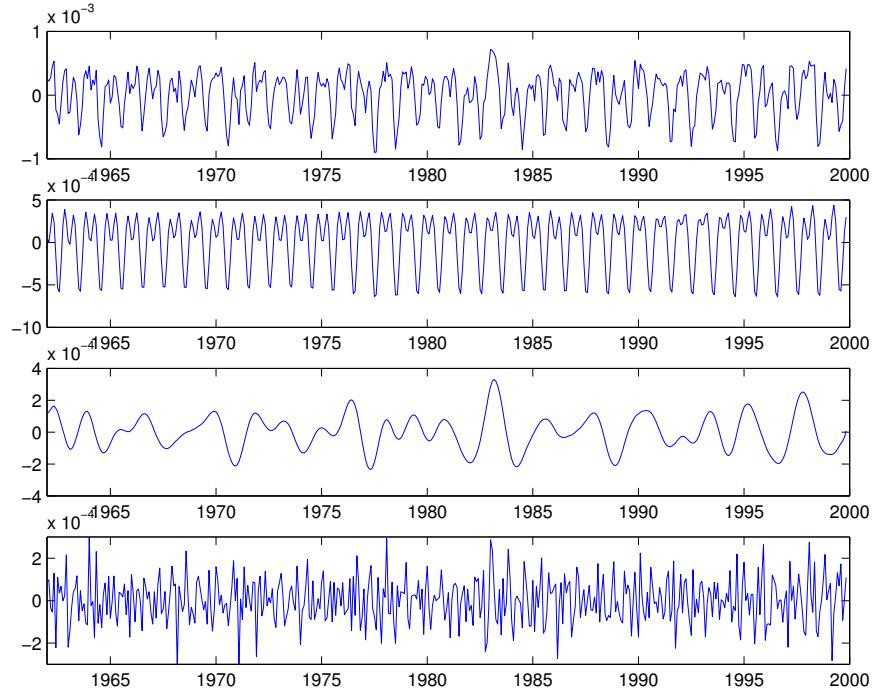


Figure 7.13: De haut en bas: (a) données brutes; (b) composante saisonnière (c) composante non triviale; (d) résidu.

**Remarque 1.** La matrice de covariance  $\mathcal{R}$  possède une structure proche de celle d’une matrice de Toeplitz, matrice dont les éléments sont constants le long d’une diagonale. En effet on passe de  $R_{m,m+m'} = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} W_{k+m-1} W_{k+m+m'-1}$  à  $R_{m+1,m+m'+1} = (1/n_v) \sum_{k=1}^{n_v} W_{k+m} W_{k+m+m'}$  en enlevant  $(1/n_v) W_m W_{m+m'}$  et en ajoutant  $(1/n_v) W_{n_v+m} W_{n_v+m+m'}$ . Ceci conduit à certaines études [45] où  $\mathcal{R}$  est remplacée par son estimation statistique utilisant les  $n_t$  données et définissant une matrice de Toeplitz véritable par ses coefficients  $R'_{mm'} = C(|m' - m|)$  avec  $C(m) = [1/(n_t - m)] \sum_{m'=1}^{n_t-m} W_{m'} W_{m'+m}$ , et non seulement à l’aide de la partie “engagée” du signal ne comportant que  $n_v = n_t - d_e - 1$  données, cf. [45].

**Remarque 2.** Le calcul qui vient d’être développé n’a été présenté sous cette forme que pour mieux motiver son utilisation. C’est en fait une méthode de *décomposition en valeurs singulières* classique en analyse linéaire et implémentée en série dans des logiciels tels que MATLAB. En toute généralité, on montre en effet qu’étant

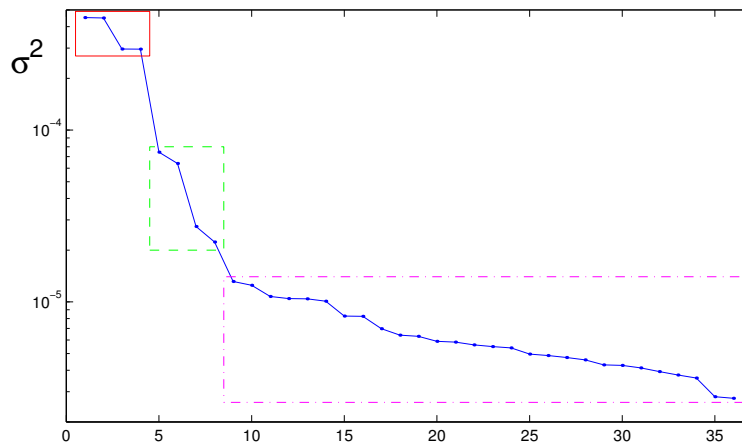


Figure 7.14: Spectre singulier de la série (a) de la figure 7.13.

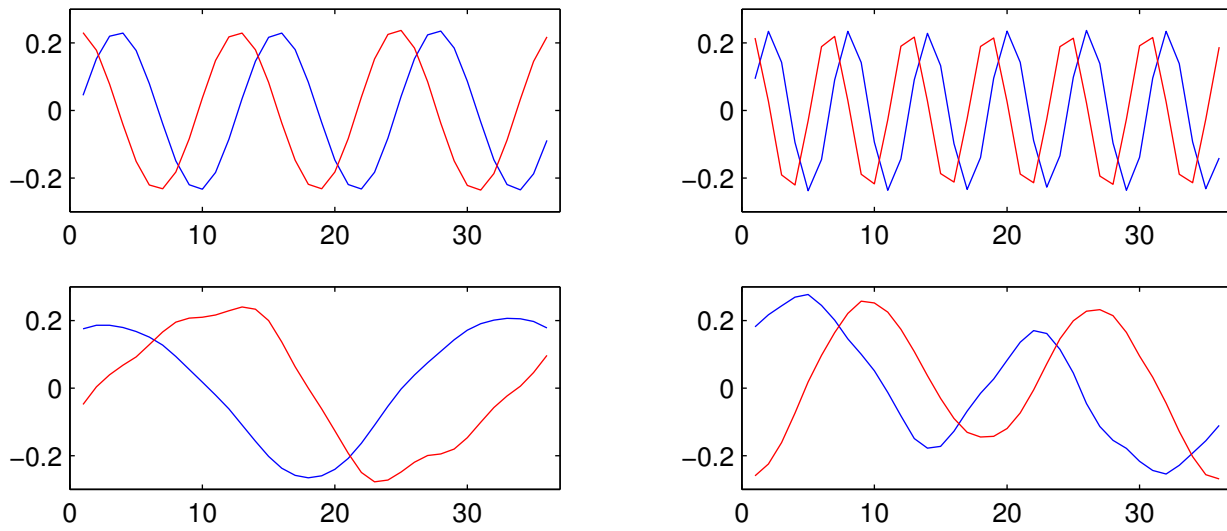


Figure 7.15: Vecteurs associés aux valeurs singulières 1 à 4 (en haut) et 5 à 8 (en bas).

donnée une matrice réelle quelconque  $\mathcal{A}$  de dimension  $(m \times n)$ , il existe des matrices orthogonales<sup>7</sup>  $\mathbf{U}$  de dimension  $(m \times m)$ ,  $\mathbf{V}$  de dimension  $(n \times n)$ , et  $\mathcal{S}$  de dimension  $(n \times n)$  avec

$$\mathcal{S}_{kk'} = \sigma_k \delta_{kk'}, \quad k = 1, \dots, m, \quad k' = 1, \dots, n,$$

où les  $\sigma_k$  sont appelées *valeurs singulières*, telles que

$$\mathcal{A} = \mathbf{U}\mathcal{S}\mathbf{V}^t$$

Les vecteurs colonnes  $\mathbf{V}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  de  $\mathbf{V}$  forment une base orthogonale de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et on vérifie aisément par substitution que:

$$\mathcal{A}\mathbf{V}_j = \sigma_j \mathbf{U}_j \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^t \mathbf{U}_j = \sigma_j \mathbf{V}_j,$$

et donc que

$$(\mathcal{A}^t \mathcal{A})\mathbf{V}_j = \sigma_j^2 \mathbf{V}_j,$$

autrement dit les  $\sigma_j^2$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}^t \mathcal{A}$  de dimension  $(n \times n)$ . On vérifie immédiatement que, la matrice  $\mathcal{A}$  de la théorie générale rappelée plus haut étant la matrice trajectoire  $\mathcal{T}$  donnée par (7.11), la matrice  $\mathcal{R}$  n'est autre que  $\mathcal{T}\mathcal{T}^t$  de dimension  $(d_e \times d_e)$ , dont les valeurs propres sont les carrés des valeurs singulières  $\sigma_m$  (d'où l'anticipation de notation).

**Remarque 3.** Si plusieurs observables sont disponibles on peut développer une version *multi-canaux* de la méthode: disposant de  $M$  séries chronologiques  $Y_{m,k} = Y_m(t_k)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , on définit les vecteurs par

$$\mathbf{V}_k = \{Y_{1,k}, \dots, Y_{1,k+d_e}, \dots, Y_{m,k}, \dots, Y_{m,k+d_e}, \dots, Y_{M,k}, \dots, Y_{M,k+d_e}\}$$

où  $d_e$  représente la largeur de la fenêtre temporelle glissée sur les données. Ce type d'approche donne une information *spatio-temporelle* si les observables sont prises en différents points  $\{x_k\}$  de l'espace physique  $Y_k = Y(x_k)$ , ce qui peut s'avérer intéressant pour identifier des composantes de basse dimension dans des champs complexes tels que ceux que l'on a à traiter en météorologie (cf. Fig. 7.2).

**Aparté: démodulation d'un signal.** Il arrive que l'on ait à "démoduler" un signal qui comporte une composante oscillante bien marquée mais dont l'amplitude et la période instantanées sont lentement variables. Une façon élégante de caractériser une telle oscillation, supposée de valeur moyenne nulle, consiste à construire

<sup>7</sup>Une matrice orthogonale vérifie  $\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^t$ .

un signal complexe  $Z(t)$  dont la partie réelle est le signal de départ  $X(t)$  et la partie imaginaire  $Y(t)$  un signal en quadrature avec cette dernière (pour une introduction, voir par exemple [46]). L'amplitude instantanée de la solution est alors donnée par le module de  $Z$  et la période instantanée déduite de la dérivée par rapport au temps de son argument (pour un signal strictement périodique  $X(t) = A \cos(\omega t)$ , on a en effet  $Y = A \cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$ ,  $Z(t) = A \exp(i\phi(t))$ , de sorte que  $A = |Z|$  est bien l'amplitude et  $d\phi/dt = \omega$ ).

La détermination de la partie imaginaire cherchée s'effectue en utilisant la transformation de Fourier, fréquence par fréquence. Partant de

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (7.13)$$

avec

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega) + iB(\omega)] = \tilde{X}(-\omega)^*, \quad (7.14)$$

l'astérisque désignant la conjugaison complexe. Il s'en déduit que  $A(\omega)$  est une fonction paire et  $B(\omega)$  une fonction impaire, donc que  $B(0) = 0$  en toute généralité. Si le signal  $X(t)$  est de valeur moyenne nulle on a en outre  $A(0) = 0$ , ce que nous supposons dans la suite. On peut donc récrire (7.13) sous la forme

$$X(t) = \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) - B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega,$$

ce qui permet de construire  $Y(\omega)$  par

$$Y(t) = \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos(\omega t - \pi/2) - B(\omega) \sin(\omega t - \pi/2)] d\omega,$$

soit

$$Y(t) = \int_0^{+\infty} [B(\omega) \cos(\omega t) + A(\omega) \sin(\omega t)] d\omega.$$

Il vient alors

$$Z(t) = \int_0^{+\infty} \exp(i\omega t) [A(\omega) + iB(\omega)] d\omega, \quad (7.15)$$

qui ne met en jeu que des fréquences positives (signal "analytique"). Comparant (7.15) et (7.13) tenant compte de la notation introduite par (7.14), on obtient donc la transformée de Fourier  $\tilde{Z}(\omega)$  de  $Z(t)$  en annulant les coefficients de celle de  $X$  correspondant à  $\omega < 0$ , et en doublant tous les coefficients correspondant à  $\omega > 0$ . Pour trouver  $Z(t)$  il ne reste plus qu'à effectuer la transformation inverse. Mathématiquement,  $X$  et  $Y$  sont transformées de Hilbert l'une de l'autre,<sup>8</sup> d'où l'expression "démodulation par transformation de Hilbert" (sous MATLAB, la procédure décrite ci-dessus est réalisée par la macro `hilbert.m`).

### 7.3.5 Utilisation de la reconstruction

Les outils théoriques introduits dans la première partie du chapitre peuvent maintenant être utilisés. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des applications très élémentaires. Il est naturellement possible d'aller au delà et, notamment, d'étudier la prédictibilité à moyen terme grâce à la reconstruction ou de développer des stratégies de contrôle du chaos en appliquant au système des rétroactions appropriées corrigeant les écarts au comportement que l'on désire voir suivre par le système.

#### Caractérisation empirique du chaos

Prenons l'exemple de la détermination expérimentale du plus grand exposant de Lyapunov. Celle-ci suit au plus près la définition. Par hypothèse il faut disposer d'une trajectoire échantillonnée pendant suffisamment longtemps afin que celle-ci ait effectué un grand nombre de révolutions sur l'attracteur et en ait visité chacune de ses parties d'une façon que l'on espère statistiquement significative. Prenant pour référence une partie de

<sup>8</sup>On a  $\hat{Y}(\omega) = -(1/\pi)\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{X}(\omega')/(\omega - \omega')$ , où  $\hat{F}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $F(t)$  et où  $\mathcal{P}$  dénote la partie principale de Cauchy de l'intégrale.



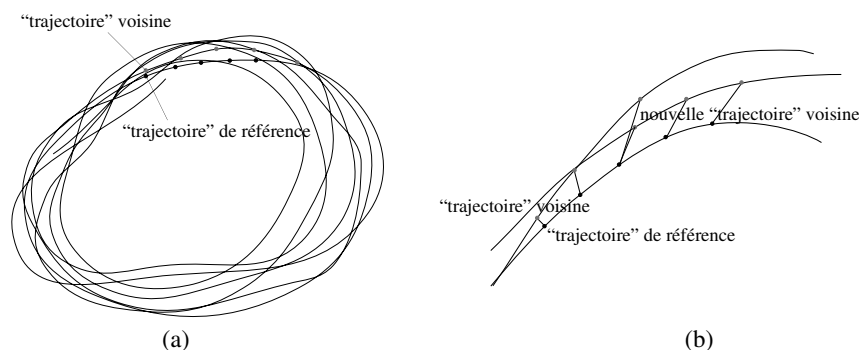


Figure 7.16: Détermination empirique du plus grand exposant de Lyapunov de l'attracteur d'un système dans son espace des phases reconstruit. Partant d'une seule série d'observations très longue (a) on se sert d'une portion de trajectoire comme référence et on cherche dans son voisinage d'autres fragments qui servent de trajectoires voisines. Le processus de remise à l'échelle des écarts illustré en (b) doit être effectué à de multiples reprises.

cette trajectoire passant en un point, on cherche dans le voisinage un autre fragment de trajectoire. Suivant les deux portions de trajectoire pendant un intervalle  $\delta t$  donné on peut calculer le taux local de divergence en déterminant la façon dont elles s'écartent. Cependant, les exposants de Lyapunov sont associés à des écarts "infinitésimaux" alors qu'en régime chaotique les trajectoires s'écartent rapidement de quantités finies. Pour rester dans la limite appropriée, lorsque l'écart est jugé trop important il faut remettre celui-ci à l'échelle, c'est à dire trouver un autre fragment de trajectoire plus proche de la portion de référence mais dans une direction aussi voisine que possible de la direction d'écartement. Puis recommencer la procédure aussi souvent que nécessaire jusqu'à avoir exploré l'attracteur de façon statistiquement satisfaisante (cf. Fig. 7.16). Une des difficultés à résoudre tient à la nécessité de trier rapidement des distances entre points pour choisir les meilleurs candidats au rôle de trajectoire voisine.

Une autre procédure consisterait à déterminer le flot tangent en un point de l'espace reconstruit en déterminant par une méthode de moindres carrés le meilleur champ de vecteurs faisant passer d'un ensemble de points pris sur la trajectoire au voisinage du point considéré à l'ensemble des points transformés par l'évolution sur un intervalle de temps donné. En recollant les différents champs locaux déterminés de cette façon on rebâtit un système dynamique effectif qui permet, non seulement de déterminer le spectre de Lyapunov plus complètement mais aussi de faire de la prédiction à court terme.

### Détermination de dimensions

En ce qui concerne la détermination de la dimension de corrélation, les choses sont plus simples puisqu'il suffit de déterminer la répartition des distances entre paires de points. En général, on ne calcule d'ailleurs pas les distances entre toutes les paires possibles mais seulement sur une fraction prise au hasard. La figure 7.17 montre le résultat obtenu par Malraison et coll. sur l'exemple d'un régime chaotique apparaissant en convection. La pente de la partie sensiblement rectiligne de l'histogramme des distances en coordonnées logarithmiques, Fig. 7.17 (haut, gauche), donne directement une estimation de la dimension. Plusieurs dimensions de plongement ont été essayées produisant chacune une courbe décalée de la précédente. On observe clairement une saturation correspondant au fait que la distance entre deux points est bornée supérieurement par le diamètre de l'attracteur. Dans cette expérience, la dimension de plongement était progressivement augmentée, cf. Fig. 7.17 (haut, droite). La dimension de corrélation obtenue plafonne rapidement vers une valeur de l'ordre de 3, indiquant clairement l'équivalence avec un système dynamique de basse dimension. La ligne de pente 1 indique le résultat attendu pour un processus aléatoire qui remplirait l'espace de façon homogène, i.e.  $d_f = d_e$ .

Les courbes  $C(R)$  ont rarement un aspect aussi simple. Elles présentent souvent des accidents que l'on peut éventuellement relier à l'inhomogénéité de l'attracteur. Les défauts qui apparaissent lorsque la distance est petite, cf. Fig. 7.17 (bas), sont relativement faciles à interpréter. Ainsi deux types de coudes peuvent

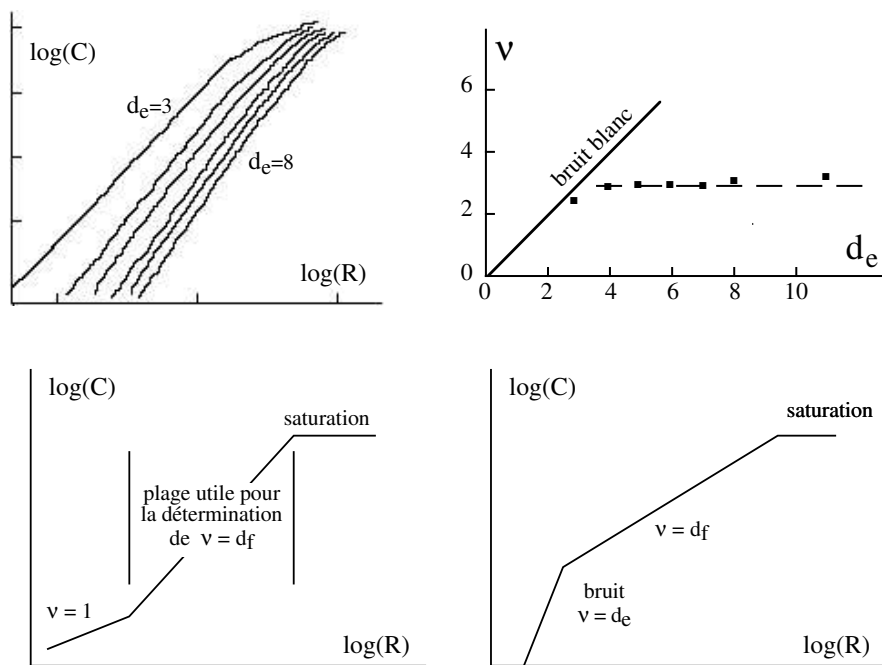


Figure 7.17: En haut, à gauche: Distribution des distances sur l'attracteur correspondant à un régime de convection chaotique. En haut, à droite: Dimension de corrélation fonction de la dimension de plongement déduite de (a). En bas: Allure générale et “défauts” caractéristiques des courbes  $\log C(\log R)$  lorsque  $R \rightarrow 0$ ; à gauche: la distance est dominée par les points très voisins en temps; à droite: l'échantillonnage est insuffisant et le bruit domine.

apparaître: (i) une diminution de la pente qui se rapproche nettement de 1, ce qui signifie que les points les plus proches pris en compte sont également proches dans le temps sur la même portion de trajectoire; pour guérir ce défaut, il suffit d'imposer que les points qui contribuent au calcul d'une distance donnée soient temporellement écartés d'au moins une fraction de tour sur l'attracteur; (ii) une augmentation de la pente qui se rapproche alors de  $d_e$ , ce qui correspond à un processus aléatoire remplissant l'espace de façon homogène, ce qui se produit dans deux circonstances, soit en présence d'un fort bruit extrinsèque, soit si le nombre de mesures est insuffisant de sorte que les structures les plus fines de l'attracteur ne sont pas correctement échantillonnées.

### Reconstruction de la dynamique

Toutes les caractérisations quantitatives du chaos sont très gourmandes de données si l'on veut des résultats significatifs (cf. estimation de la résolution nominale). Certains aspects qualitatifs, déduits de portraits de phase dans l'espace reconstruit, peuvent cependant être obtenus à moindre frais. Comme exemple particulier, considérons le chaos qui se développe sur la réaction de Belousov–Zhabotinsky en chimie.

Le principe de l'expérience est schématisé sur la figure 7.18. Le réacteur est un récipient de volume  $V$  traversé par un flux  $J$  de matière, réactifs à l'entrée, produits de réaction à la sortie. La concentration des différents réactifs est  $\mathbf{C}^{(0)}$ . La température  $T$  est maintenue constante par des bains thermostatés. Le paramètre de contrôle est le débit  $J$  qui détermine le temps de résidence dans le réacteur. Les concentrations  $\mathbf{C}$  sont usuellement déterminées par de mesures de propriétés optiques (coloration) ou électriques de la solution. L'uniformité des concentrations dans le réacteur est assurée par une agitation vigoureuse et permanente, ce qui en fait un bon candidat pour étudier le chaos temporel, au même titre que la convection en géométrie confinée.

Différents scénarios génériques de transition vers le chaos ont été observés en variant les conditions expérimentales. La figure 7.19 (colonne de gauche) présente une suite de régimes “périodique”  $\rightarrow$  “chaotique”  $\rightarrow$  “périodique” observée en variant continûment le temps de résidence dans le réacteur. La na-

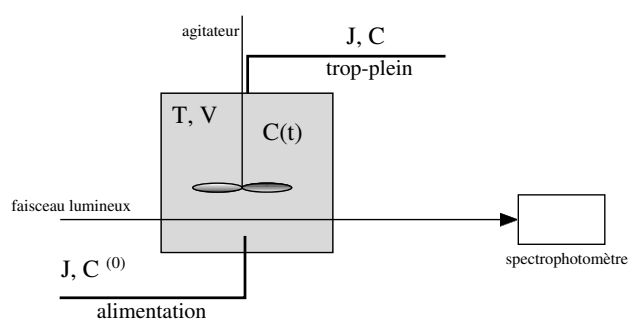


Figure 7.18: Schéma de principe d'une expérience de chimie chaotique.

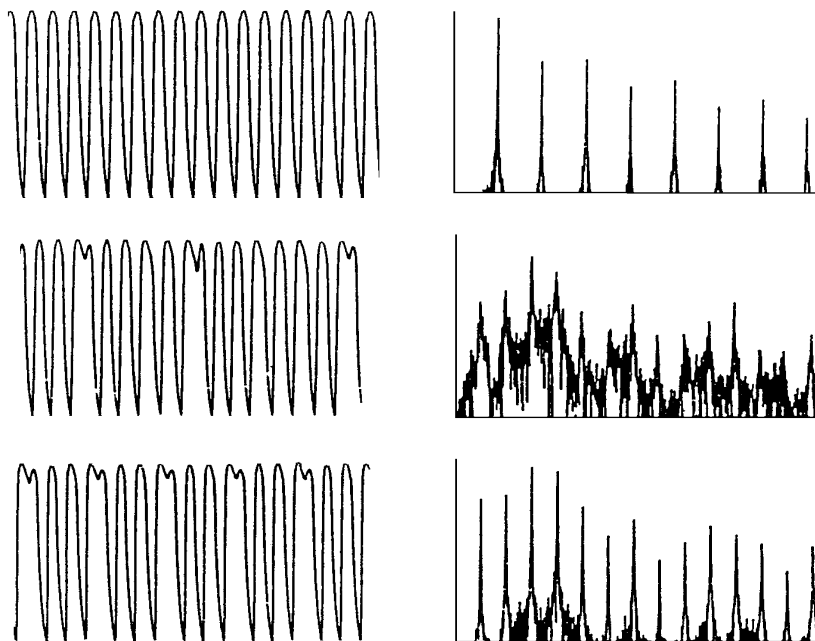


Figure 7.19: Variation de la concentration en  $\text{Ce}^{4+}$  dans une expérience au cours de laquelle le débit de réactifs est modifié de façon monotone. à gauche: enregistrements temporels. à droite: spectres de Fourier correspondants (d'après Vidal et al., 1982).

ture des différents régimes est mieux perçue en examinant les spectres de Fourier correspondants. On y distingue bien les régimes périodiques avec des spectres aux raies bien définies et le régime chaotique pour lequel le spectre est quasi-continu. Les enregistrements montrent que le chaos découle d'une insertion aperiodique d'oscillations anormales, ces dernières s'intercalant de façon régulière pour former le second régime périodique.

Au delà de cette illustration classique, la qualité du signal permet de développer un traitement dans la ligne de ce que nous venons de décrire. Le chaos a ainsi pu être analysé assez complètement par reconstruction et section de Poincaré. La figure 7.20 illustre le cas d'un régime quasi-périodique partant d'un enregistrement temporel (en haut). L'allure de la section de Poincaré (en bas, à droite) confirme le caractère quasi-périodique que l'on pouvait deviner sur la projection bidimensionnelle (en bas, à gauche) qui suggère l'existence d'un tore obtenu par reconstruction dans un espace  $(X(t), X(t + \tau_1), X(t + \tau_2))$ .

La figure 7.21 illustre une situation où, dans une reconstruction tridimensionnelle à partir de l'enregistrement temporel (en haut), l'attracteur s'inscrit sur une quasi-surface: dans un plan perpendiculaire au plan  $(X(t), X(t + \tau))$  la section de l'attracteur est une quasi-ligne, de sorte qu'une application de premier retour en termes d'abscisse curviligne le long de cette quasi-ligne peut être définie (en bas à droite), ce qui permet d'interpréter la nature du scénario de transition et de le comparer à celui qui dérive du schéma réactionnel théorique (cf. ci-dessous, §7.4).

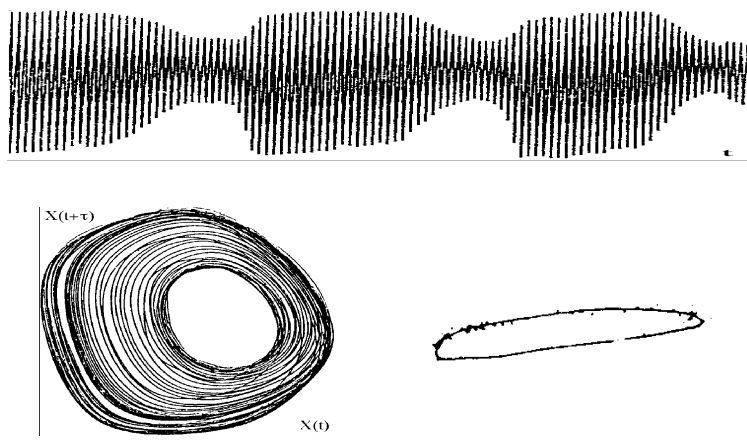


Figure 7.20 : Régime quasi-périodique de la réaction BZ. En haut: fragment typique de série chronologique. En bas: résultat de la reconstruction; à gauche: évidence d'un tore invariant dans un pseudo-espace des phases tridimensionnel; à droite: section de Poincaré correspondante (d'après Argoul et Roux, 1985).

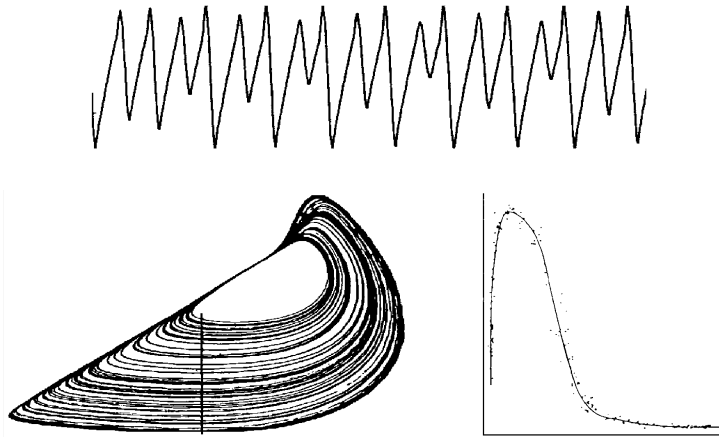


Figure 7.21 : Régime chaotique de la réaction BZ. En haut: enregistrement temporel. En bas, à gauche: projection de l'attracteur dans le plan  $(X(t), X(t + \tau))$ . En bas, à droite: application de premier retour effective correspondant à une section de Poincaré se projetant selon la ligne indiquée sur la figure à gauche (d'après Roux et al., 1982).

### 7.3.6 Contrôle du chaos par la méthode OGY

Contrôler un système non chaotique requiert généralement une entrée d'intensité élevée pour obtenir un résultat important. Au contraire, on peut obtenir une réponse à moindre frais en utilisant un système non-linéaire fonctionnant en régime potentiellement chaotique. Le prototype des algorithmes de contrôle est celui de Ott, Grebogi et Yorke, OGY dans la suite [47]. En toute généralité, l'instabilité de l'état d'un système se traduit par divergence des trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question, stationnaire, périodique ou chaotique. Pour contrer cette instabilité, il suffit, toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré de lui appliquer une pichenette qui le ramène là où on l'attend. L'idée sous-jacente à la méthode est de déterminer cette perturbation de la trajectoire comme si elle résultait d'une variation du paramètre de contrôle.

**Illustration du principe.** À titre d'exemple simple, considérons le maintien des trajectoires d'un système à temps discret unidimensionnel,  $X_{k+1} = \mathcal{F}(X_k; r)$ , au voisinage d'un point fixe instable  $X_*$  correspondant à une valeur nominale  $r_*$  du paramètre de contrôle, i.e.  $X_* = \mathcal{F}(X_*; r_*)$ . Considérons une trajectoire qui s'est approchée très de près de  $X_*$  à un certain l'instant  $k$ , soit  $X_k \simeq X_*(r_*)$ . À l'itération suivante  $X_{k+1}$  s'en est un peu écarté mais lui reste assez proche. Le contrôle de la trajectoire consiste alors à pousser  $X_{k+1}$

sur  $X_*$ , i.e.  $X_{k+1} - X_* = 0$ , au moyen d'une petite variation du paramètre de contrôle. Les écarts au point fixe et la correction étant supposés petits on va pouvoir linéariser le problème. L'itération qui fait passer de  $k$  à  $k+1$  est exécutée pour une valeur  $r_* + \delta r$  du paramètre de contrôle, elle déplace donc légèrement le point fixe:  $X_* \rightarrow X_* + \delta X_*$ . Ce décalage est facile à expliciter par un calcul au premier ordre. Il vient  $X_* + \delta X_* = \mathcal{F}(X_* + \delta X_*; r_* + \delta r) = \mathcal{F}(X_*; r_*) + \delta X_* \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*) + \delta r \partial_r \mathcal{F}(X_*; r_*)$ . Utilisant le fait que par hypothèse  $X_* = \mathcal{F}(X_*; r_*)$ , on obtient donc  $\delta X_* = \partial_r \mathcal{F}(X_*; r_*) / (1 - \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*))$ , ce que nous récrivons de façon un peu plus compacte  $\delta X_* = \partial_r X_* \delta r$ . L'itération conduit à:

$$X_{k+1} = X_* + \delta X_* + \partial_X \mathcal{F}(X_* + \delta X_*; r_* + \delta r)(X_k - (X_* + \delta X_*))$$

que l'on désire rendre égal à  $X_*$ . Effectuant les développements limités appropriés, nous trouvons à l'ordre le plus bas:

$$X_{k+1} = X_* + \partial_r X_* \delta r + \partial_X \mathcal{F}_* [X_k - X_* - \partial_r X_* \delta r], \quad (7.16)$$

où  $\partial_X \mathcal{F}_* \equiv \partial_X \mathcal{F}(X_*; r_*)$  et  $\partial_r X_* \equiv \partial_r X_*(r_*)$  sont les deux paramètres décrivant l'effet des perturbations respectivement dans l'espace des phases et dans l'espace du paramètre de contrôle au voisinage du point fixe considéré  $X_*$ .

Imposer  $X_{k+1} - X_* = 0$  conduit immédiatement à la règle donnant la correction

$$\delta r = \frac{(X_k - X_*) \partial_X \mathcal{F}_*}{[\partial_X \mathcal{F}_* - 1] \partial_r X_*}, \quad (7.17)$$

Des termes d'ordre supérieurs ayant été négligés, l'itération qui fait passer de  $X_k$  avec  $X_{k+1}$  avec  $r = r_* + \delta r$  ne ramène pas exactement  $X_{k+1}$  sur  $X_*$  de sorte que l'on doit recommencer pour le pas suivant. La correction  $\delta r$  devient fonction de  $k$ , i.e.  $\delta r_k$ , et l'on continue le contrôle jusqu'à la convergence. En pratique si le problème de l'instabilité du point fixe se pose, c'est parce que les trajectoires physiques sont sensibles au bruit, car en l'absence de bruit, une fois que la trajectoire a été guidée vers le point fixe l'équation qui donne la correction de paramètre de contrôle nous dit simplement de le laisser à sa valeur nominale. Au contraire, en présence de bruit il s'introduit à chaque itération une petite "erreur" d'origine extrinsèque ( $X_k \mapsto X_k + \xi_k$ ) amplifiée par l'instabilité. C'est la répétition de ces erreurs qui empêche la convergence du schéma de correction et nécessite son maintien, entraînant une réponse non triviale à chaque pas. Dans le cas d'une itération chaotique, la stratégie décrite peut s'appliquer à la stabilisation d'une période instable quelconque et pas seulement la période période 1 considérée jusqu'ici. La transposition en est immédiate. En raison de l'ergodicité, le voisinage de cette période finit toujours par être visité. On applique alors le contrôle quand la trajectoire entre dans ce voisinage. En présence de bruit, si une fluctuation aléatoire l'en fait sortir on arrête le contrôle pour le reprendre quand elle y revient.

Le temps pris par le système pour approcher la période instable de suffisamment près peut être assez long si le voisinage choisi est très étroit. D'un autre côté, il ne peut pas être pris trop large car les termes d'ordre supérieur négligés lors du calcul de la correction peuvent ne pas avoir l'effet escompté de rapprocher la trajectoire de son objectif.

**Contrôle en dimension 2.** L'application concrète de la stratégie générale s'avère moins triviale dès la dimension 2. Considérons donc une application

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{X}_k; r)$$

où  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$  et  $r \in \mathbb{R}$  et cherchons tout d'abord à stabiliser un point fixe instable  $\mathbf{X}_*$  pour une valeur nominale  $r_*$  du paramètre de contrôle. L'équation qui correspond à (7.16) s'écrit maintenant

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_* + \partial_r \mathbf{X}_* \delta r + \partial_X \mathcal{F}_* \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_* - \partial_r \mathbf{X}_* \delta r), \quad (7.18)$$

où  $\partial_X \mathcal{F}_* \equiv \partial_X \mathcal{F}(\mathbf{X}_*; r_*)$  est la matrice jacobienne de  $\mathcal{F}$  au point fixe nominal et où  $\partial_r \mathbf{X}_* \equiv \partial_r \mathbf{X}_*(r_*)$  est un vecteur calculé pour  $r = r_*$  qui rend compte du déplacement du point fixe  $\mathbf{X}_*$  sous l'effet d'un petit changement de paramètre.

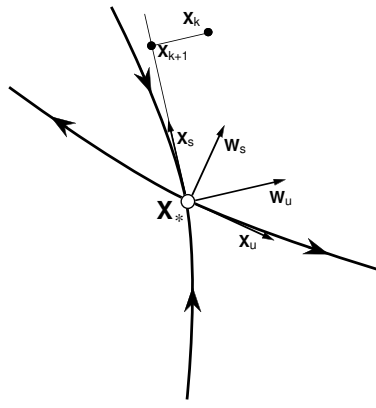


Figure 7.22: Voisinage d'un point fixe instable et principe de la méthode OGY.

Vouloir annuler  $\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*$  avec un seul paramètre libre  $\delta r_k$  n'est pas possible puisque nous avons deux conditions à satisfaire, une pour chaque composante en  $\mathbf{X}$ . Or, en dimension 2, le jacobien d'un système localement dissipatif au voisinage d'un point fixe est en module  $< 1$ . Si ce dernier est instable, le jacobien étant égal au produit des valeurs propres, ce ne peut être qu'un col avec deux valeurs propres réelles,  $\lambda_s$  et  $\lambda_u$ , respectivement stable ( $|\lambda_s| < 1$ ) et instable ( $|\lambda_u| > 1$ ), et donc deux variétés, stable et instable, unidimensionnelles, cf. figure 7.22. L'idée mise en œuvre par Ott, Grebogi et Yorke, est de demander que l'itéré soit projeté sur la variété stable du point fixe, et de l'y maintenir à l'aide de corrections ultérieures de sorte que les itérés successifs convergent vers lui (s'il n'en sont pas écartés par le bruit, ce à quoi le contrôle doit aussi remédier).

En fait, on en demande pas que le transformé de  $\mathbf{X}_k$  par l'itération (évaluée avec  $r + \delta r$ ) soit sur la variété stable (non linéaire) de  $\mathbf{X}_*$  mais seulement sur le sous-espace linéaire engendré par  $\mathbf{X}_s$ , vecteur propre associé à la valeur propre stable  $\lambda_s$ ,  $\mathbf{X}_u$  étant le vecteur propre associé  $\lambda_u$ , valeur propre instable de la matrice jacobienne  $\partial_{\mathbf{X}}\mathcal{F}_*$ . Il faut donc écrire que la projection du vecteur  $\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*$  sur le vecteur  $\mathbf{W}_u$  perpendiculaire à  $\mathbf{X}_s$  est nulle, ce qui conduit à:

$$0 = \mathbf{W}_u \cdot [\partial_r \mathbf{X}_* \delta r + \partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_* \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_* - \partial_r \mathbf{X}_* \delta r)]$$

soit

$$\delta r = \frac{\mathbf{W}_u \cdot (\partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_* [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*])}{\mathbf{W}_u \cdot ([\partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_* - \mathcal{I}] \partial_r \mathbf{X}_*)} \quad (7.19)$$

où  $\mathcal{I}$  est l'opérateur identité. Lorsqu'on diagonalise un opérateur qui n'est pas auto-adjoint pour le produit scalaire canonique, la base de vecteurs propres associée n'est pas orthogonale. On peut construire une base biorthogonale  $(\mathbf{X}_\lambda, \mathbf{W}_\lambda)$  dont les vecteurs, convenablement normalisés, vérifient  $\mathbf{X}_{\lambda_1} \cdot \mathbf{W}_{\lambda_2} = \delta(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\delta(\lambda_1, \lambda_2) = 1$  si  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $= 0$  autrement. Les  $\mathbf{X}_\lambda$  sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres initial et les  $\mathbf{W}_\lambda$  ceux du problème adjoint. Sur  $\mathbb{R}$  l'opérateur adjoint est représenté par la matrice transposée de celle qui représente le problème direct. Le  $\mathbf{W}_u$  solution du problème adjoint (en  $\partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_*^t$ ) est précisément le vecteur dont nous avons besoin dans l'algorithme de contrôle. Pour retrouver la forme sous laquelle la relation (7.19) est généralement présentée dans la littérature, il faut raisonner en termes de vecteurs "lignes" et de vecteurs "colonnes" et donc dans le cas présent en termes de vecteurs propres "à gauche" (dont les transposés sont les  $\mathbf{W}$ )<sup>9</sup> et de vecteurs propres "à droite" (les  $\mathbf{X}_\lambda$ ). La matrice jacobienne peut alors s'écrire<sup>10</sup>  $\partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}(\mathbf{X}_*; r_*) = \lambda_u \mathbf{X}_u \otimes \mathbf{W}_u + \lambda_s \mathbf{X}_s \otimes \mathbf{W}_s$ . Utilisant les propriétés d'orthogonalité des  $\mathbf{X}_{s,u}$  et  $\mathbf{W}_{s,u}$  pour calculer les produits scalaires on trouve en particulier  $\mathbf{W}_u \cdot (\lambda_u \mathbf{X}_u \otimes \mathbf{W}_u + \lambda_s \mathbf{X}_s \otimes \mathbf{W}_s) = \lambda_u \mathbf{W}_u$ , ce qui

<sup>9</sup>Les vecteurs  $\mathbf{W}$  sont souvent qualifiés de *contravariants*. Ceci est à relier au fait qu'ils sont définis plutôt comme des vecteurs de l'espace dual à travers  $\mathbf{W}^t \mathcal{L} = \lambda \mathbf{W}^t$ , transposée de  $\mathcal{L}^t \mathbf{W} = \lambda \mathbf{W}$ . Dans le cas complexe l'adjoint est obtenu par transposition + conjugaison complexe.

<sup>10</sup>Le symbole  $\otimes$  dénote le produit tensoriel: soient deux vecteurs  $\mathbf{U} = [U_1; \dots; U_{d_1}]$  et  $\mathbf{V} = [V_1; \dots; V_{d_2}]$  le tenseur d'ordre 2  $\mathbf{W} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$  de l'espace de dimension  $(d_1 \times d_2)$  est représenté par la matrice d'éléments  $W_{jk} = U_j V_k$ ,  $j = 1, \dots, d_1$ ,  $k = 1, \dots, d_2$ .

permet de récrire (7.19) sous la forme

$$\delta r = \frac{\lambda_u \mathbf{W}_u \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)}{(\lambda_u - 1) \mathbf{W}_u \cdot \partial_r \mathbf{X}_*} \quad (7.20)$$

Ce calcul place  $\mathbf{X}_{k+1}$  au voisinage du bon rail qui doit le conduire jusqu'au point fixe. Il faut continuer jusqu'à la convergence, ce qui définit une suite de signaux de contrôle  $\delta r_k$  comme dans le cas unidimensionnel. Ici encore on n'applique la correction que lorsque la trajectoire s'approche suffisamment près du point fixe et on la supprime si, sous l'effet du bruit, elle s'en est trop écartée. Puisque la variété stable guide la trajectoire vers le point fixe, on voit qu'il est possible de définir ce voisinage principalement en termes de distance à cette variété, en première approximation simplement déduite de la valeur du produit scalaire  $\mathbf{W}_u \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$ . Naturellement le temps nécessaire à la trajectoire sera d'autant plus long en moyenne que le voisinage sera choisi petit. Pour stabiliser une trajectoire vers une solution périodique de plus longue durée, la méthode consiste à rappeler la trajectoire vers la variété stable du point suivant dans la période. La mise en œuvre devient assez lourde car il faut déterminer les variétés stables en tous les points de la période nominale.

**Contrôle en dimension  $> 2$ .** En dimension  $d > 2$ , si la variété instable du point fixe considéré est unidimensionnelle, l'algorithme est inchangé car la condition d'orthogonalité à  $\mathbf{W}_u$  définit un sous-espace tangent de dimension  $d - 1$  et les corrections introduites *via* le calcul du produit scalaire  $\mathbf{W}_u \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$  conduisent encore le système vers le point fixe nominal. En fait, la solution proposée jusqu'à présent au problème du contrôle peut être vue comme un cas particulier d'une méthode générale de contrôle linéaire où la règle particulière (7.20) remplacée par une règle plus générale

$$\delta r_k = -\mathbf{K} \cdot [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*]$$

Écrivant en toute généralité la dynamique linéarisée au voisinage du point fixe sous la forme classique en contrôle linéaire

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_* = \mathcal{A}[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*] + \mathbf{B}\delta r_k,$$

où  $\mathcal{A} = \partial_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_*$  et  $\mathbf{B} = \partial_r \mathcal{F}_*$ , on sait que le système est stabilisable, c'est à dire que l'on peut trouver un bouclage statique qui fasse s'amortir toutes les (petites perturbations) s'il est commandable, c'est à dire si la matrice  $[\mathbf{B}, \mathcal{A}\mathbf{B}, \dots, \mathcal{A}^{d-1}\mathbf{B}]$  est de rang  $d$ . Il faut alors choisir  $\mathbf{K}$  de sorte que

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_* = (\mathcal{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{K})[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*]$$

définisse une itération convergente (valeurs propres de l'application tangente toutes inférieures à 1 en module), ce qui peut être réalisé par des méthodes classiques en contrôle linéaire.

Les orbites instables peuvent également être stabilisées en appliquant un *feed-back retardé*, c'est à dire en remplaçant le système original  $\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  par un système modifié  $\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, \delta \mathbf{X})$  où  $\delta \mathbf{X}(t, \tau) = u[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - \tau)]$ ,  $u$  mesurant l'amplitude de la correction appliquée et  $\tau$  le retard que l'on prend égal à la période de l'orbite à stabiliser. Le nouveau champ de vecteur est le plus souvent pris identique à l'ancien en l'absence d'écart, soit  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, 0) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X})$ . Un choix de correction commode porte alors sur la composante du champ associée au degré de liberté qui sert d'observable de contrôle, donc,  $i$  étant l'indice de ce degré de liberté:  $\tilde{F}_i(\mathbf{X}) = F_i(\mathbf{X}) + u[X_i(t) - X_i(t - \tau)]$  et  $\tilde{F}_{i'}(\mathbf{X}) \equiv F_{i'}(\mathbf{X})$  pour  $i' \neq i$ . La méthode de Pyragas ainsi sommairement décrite présente sur la méthode OGY l'avantage pratique de ne pas nécessiter de pré-traitement important, son inconvénient théorique majeur tient à la difficulté de justifier son succès reconnu au coup par coup.

## 7.4 Appendice: Réactions chimiques

Lorsqu'une réaction  $\sum n_i \mathbf{A}_i \rightarrow \sum n'_i \mathbf{A}_i$  se développe,<sup>11</sup> le nombre de molécules de l'espèce  $\mathbf{A}_i$  varie de  $n'_i - n_i$ . On définit le taux d'avancement qui mesure le nombre de collisions réactionnelles effectuées par

<sup>11</sup>Voir par exemple: chapitre Vidal et H. Lemarchand: *La réaction créatrice* (Hermann, 1988).

unité de volume et la vitesse de réaction  $r$  qui mesure la variation instantanée de l'avancement.  $A_i$  étant la concentration de l'espèce  $A_i$ , à volume constant on a simplement

$$\frac{d}{dt}A_i = (n'_i - n_i)r \quad (7.21)$$

Les collisions étant définies par la probabilité de présence en un même point des seuls réactifs, soit  $A_i$  pour l'espèce  $A_i$  et, les corrélations entre espèces étant négligées,  $\prod_i A_i^{n_i}$  pour une collision, on s'attend à trouver une vitesse de réaction de la forme:

$$r = k \prod_i A_i^{n_i} \quad (7.22)$$

où  $k$  est la constante de vitesse de la réaction. Ceci qui conduit à

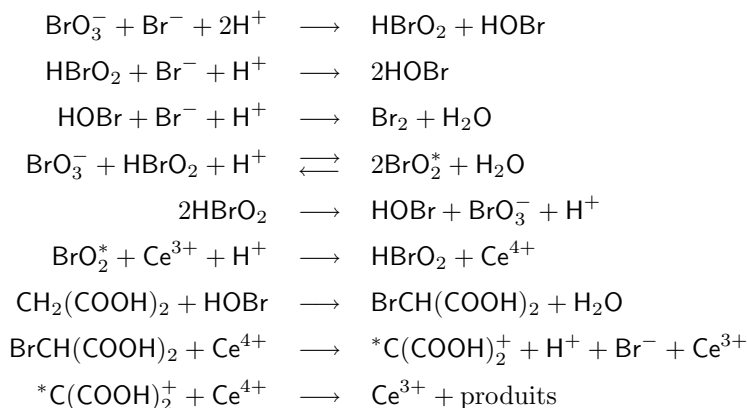
$$\frac{d}{dt}A_i = (n'_i - n_i)k \prod_i A_i^{n_i}. \quad (7.23)$$

Par exemple, pour  $A_1 + 2 A_2 \rightarrow 2 A_1$ , on a  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n'_1 = 2$  et  $n'_2 = 0$  et donc:

$$\frac{d}{dt}A_1 = kA_1A_2^2 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}A_2 = -2kA_1A_2^2 \quad (7.24)$$

En présence d'une réaction à étapes, on écrit que la variation totale de la concentration d'une espèce  $A_i$  est la somme des variations correspondant à chacune des étapes.

La réaction de Belousov-Zhabotinsky (BZ) correspond à l'oxydation en milieu acide d'un réducteur organique (acide malonique) par les ions  $\text{BrO}_3^-$  catalysée par un couple redox (e.g.  $\text{Ce}^{3+}/\text{Ce}^{4+}$ ); elle met en jeu une quinzaine d'espèces chimiques couplées par un nombre équivalent de réactions intermédiaires. Un schéma satisfaisant est fourni par



où les quantités supposées constantes sont:  $[\text{BrO}_3^-]$ ,  $[\text{H}^+]$ ,  $[\text{Ce}^{3+}]$ ,  $[\text{CH}_2(\text{COOH})_2]$ ,  $[\text{H}_2\text{O}]$  et les variables:  $[\text{Br}^-]$ ,  $[\text{HBrO}_2]$ ,  $[\text{HOBr}]$ ,  $[\text{BrO}_2^*]$ ,  $[\text{Ce}^{4+}]$ ,  $[\text{BrCH}(\text{COOH})_2]$ ,  $[\text{*C}(\text{COOH})_2^+]$ .

Pris à la lettre, le schéma réactionnel pour BZ est très compliqué et contient beaucoup de coefficients ajustables qui le rendent difficilement exploitable sur un plan quantitatif. Un modèle simplifié ne comportant que 5 étapes et 3 espèces libres intermédiaires a été proposé ("Oregonator" de Field et Noyes, 1974). Ce modèle produit des oscillations de relaxation analogues à celles de BZ mais pas le chaos observé expérimentalement ou par simulation de schémas réactionnels un peu plus complexes.



# Chapitre 8

## Du chaos temporel au chaos spatio-temporel

### 8.1 Introduction

On peut envisager l'étude du développement de la complexité dans les systèmes physiques de façon déductive à partir des premiers principes. Par exemple, dans le cas déjà évoqué de la convection, cela revient à partir des équations de la mécanique des fluides, à développer une analyse de stabilité linéaire puis faiblement non-linéaire pour arriver, en étant optimiste, à un compte rendu quantitatif de l'émergence du chaos. Si cette démarche est envisageable dans le cas où le nombre de degrés de liberté effectifs est réellement très petit, c'est à dire si l'on parvient à isoler un tout petit nombre de modes et à raisonner en termes de dynamique temporelle sur les "amplitudes" de ces modes, dans la plupart des cas concrets elle est tout bonnement impossible dès que le confinement ne rigidifie pas suffisamment la structure. Il devient alors indispensable d'adopter une autre démarche, plus inductive, mettant l'accent sur les aspects qualitatifs et fonctionnant par analogie, *via* la construction de modèles. Ici, nous n'irons pas très loin sur cette voie et nous nous contenterons d'en fixer la perspective. Nous commencerons par poser le problème des instabilités dans les milieux étendus en relation avec les effets de confinement (§8.2) puis nous illustrerons sur un petit modèle l'émergence de la complexité en fonction de la taille du système (§8.3) avant de passer à la modélisation de la transition vers le chaos spatio-temporel (§8.4 et 8.5). Opérant par étapes, nous donnerons à l'approche temporelle suivie jusqu'à présent une dimension spatio-temporelle au moyen d'équations d'enveloppe qui décriront les modulations autour d'une situation de référence correspondant à un état bifurqué uniforme dans l'espace (§8.4.1). La transition vers le chaos pourra alors suivre la voie d'une cascade d'instabilités affectant ces enveloppes (§8.4.2), voie que nous qualifierons de *super-critique au sens large*. Cependant les situations super-critiques où l'état bifurqué reste voisin de l'état de base ne recouvrent qu'une partie des cas. La partie complémentaire correspond à des situations où plusieurs solutions non-linéaires sont en compétition et bifurquent de façon sous-critique ou par "crise." Dans un contexte spatio-temporel, ces situations ne sont abordables que par un effort de modélisation supplémentaire qui débouche sur la définition de systèmes simplifiés qui décomposent l'espace en cellules, chacune porteuse d'un système dynamique local présentant les caractéristiques qualitatives souhaitées, et couplée à ses voisines (§8.5). L'étude de tels réseaux a permis de grandes avancées dans notre compréhension de la transition vers le chaos lorsque les degrés de liberté actifs prolifèrent en raison d'un affaiblissement de la cohérence spatio-temporelle imposée par les effets de confinement.

## 8.2 Instabilités et confinement

Les instabilités qui conduisent à la formation de structures dissipatives sont l'expression d'une coopération cohérente dans le temps et dans l'espace entre différentes quantités physiques. Dans un milieu continu, ces grandeurs, ici désignées collectivement par  $\mathbf{V}$ , sont des fonctions du point et du temps, i.e.  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ . Dans le cas le plus simple, on s'intéresse à une situation de référence  $\mathbf{V}_0$  stationnaire en temps et uniforme en espace dans une configuration géométrique idéalisée (pour la convection il s'agit d'une couche fluide illimitée latéralement, soumise à un gradient thermique vertical) et aux fluctuations  $\delta\mathbf{V}$  qui peuvent affecter ces grandeurs, i.e.  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}$ . Les perturbations *infinitésimales*  $\delta\mathbf{V} = \epsilon\mathbf{V}'$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , autour de  $\mathbf{V}_0$  sont gouvernées par un opérateur différentiel linéaire  $\mathbf{L}(\partial_t, \partial_{\mathbf{x}}; R) \cdot \mathbf{V}' = 0$ ,  $R$  désignant l'ensemble des paramètres de contrôle. Cet opérateur est obtenu par développement des équations d'évolution en puissance des perturbations tronqué au delà du premier ordre. Le système étant implicitement supposé autonome et invariant par translation dans l'espace, et l'étude de la stabilité se présentant comme un problème aux valeurs initiales, il est légitime de chercher les solutions du problème linéarisé par superposition de modes issus d'une transformation de Fourier–Laplace, soit

$$\mathbf{V}' = \exp(st + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}))\hat{\mathbf{V}}, \quad (8.1)$$

ce qui introduit le taux de croissance  $s$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Exprimer le fait que  $\hat{\mathbf{V}}$  est solution du problème linéarisé conduit alors à une relation entre  $s$  et  $\mathbf{k}$  fonction de  $R$ , appelée *relation de dispersion*:  $\mathcal{L}(s, i\mathbf{k}; R) = 0$ , où  $s$  et  $\mathbf{k}$  sont *a priori* complexes. Dans pratiquement tout ce qui suit nous nous limiterons à une situation où l'on peut se ramener à un vecteur d'onde à une composante  $k$  réelle (système quasi-unidimensionnel, voir plus loin la discussion relative à la Fig. 8.3) et il sera commode de poser  $s = \sigma - i\omega$ .

Dans le cadre d'une analyse dite *temporelle* on cherche à résoudre cette relation de dispersion en  $s$ , soit  $s = \sigma(k; R) - i\omega(k; R)$ . La stabilité du système vis à vis de perturbations infinitésimales en ondes planes délocalisées  $\exp(ikx)$ ,<sup>1</sup> est garantie dès lors qu'à  $R$  fixé, la partie réelle  $\sigma$  de leur taux de croissance complexe  $s$  est négative pour tout  $k$ , i.e.  $\max_k \sigma(k; R) < 0$ . Les modes  $k$  qui rendent le système marginal se déduisent de la condition  $\sigma(k; R) = 0$ . Résolvant cette équation en  $R$  fonction de  $k$  on obtient les surfaces de *stabilité marginale* correspondant aux différents modes neutres du système. Plaçons nous dans le cas le plus simple où l'on peut ramener ce problème à l'étude d'une simple relation de la forme  $R = R_m(k)$ . Le graphe de  $R_m$  partage le plan  $(k, R)$  en un domaine stable ( $\sigma(k; R) < 0$ ) et un domaine instable ( $\sigma(k; R) > 0$ ). Lorsque l'instabilité se déclenche par valeurs croissantes de  $R$ , il présente généralement l'allure dessinée sur la figure 8.1 avec un minimum quadratique pour une valeur  $R_c$  du paramètre de contrôle  $R$  appelée le *seuil d'instabilité*, valeur atteinte pour  $k = k_c$ , le *vecteur d'onde critique*. De son côté, la *pulsation critique* du mode est définie par  $\omega_c = \omega(k_c; R_c)$ .

À ce stade, il est facile de classer les différents cas possibles selon les valeurs de  $k_c$  et  $\omega_c$  (cf. tableau 8.1). En toute généralité on s'attend à trouver  $\omega_c \neq 0$  et  $k_c \neq 0$ ; on parle alors d'*onde dissipative*. C'est le cas par exemple de la convection dans un mélange. Des conditions particulières liées au mécanisme d'instabilité peuvent forcer  $\omega_c$  ou  $k_c$  à s'annuler. On appelle *stationnaire* une instabilité telle que  $\omega_c = 0$ . Lorsque  $k_c = 0$  elle est dite *homogène*. Enfin, si  $\omega_c = 0$  mais  $k_c \neq 0$ , on parle d'instabilité *cellulaire*. La réaction chimique de Belousov–Zhabotinsky offre un exemple d'instabilité homogène oscillante. La convection de Rayleigh–Bénard est cellulaire entre parois bonnes conductrices, stationnaire et homogène entre parois mauvaises conductrices.

Dans un milieu continu, le mode critique n'est pas isolé de ses voisins mais appartient à une branche. Tout en restant à un stade linéaire, pour décrire plus complètement le système au voisinage de son point

<sup>1</sup>L'approche complémentaire consiste à étudier l'évolution d'une perturbation localisée en un point  $x_0$ . Si la perturbation décroît, le système est stable. Mais, dans le cas instable, elle peut soit envahir tout le système (instabilité *absolue*) soit, tout en croissant, être évacuée loin de  $x_0$  (instabilité *convective*). Cette distinction est particulièrement pertinente dans le cas des écoulements ouverts développant des ondes et où le courant est susceptible d'advecier les perturbations vers l'aval. Il est alors commode de développer une analyse dite *spatiale*. Pour ce faire, on pose  $s = -i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$ , de sorte que (8.1) s'écrit alors  $\mathbf{V}' = \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))\hat{\mathbf{V}}$ . On étudie ensuite la réponse à un forçage périodique localisé en postulant un taux de croissance imaginaire pur  $s = -i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  et résout le problème en  $k$ ,  $k \in \mathbb{C}$ .

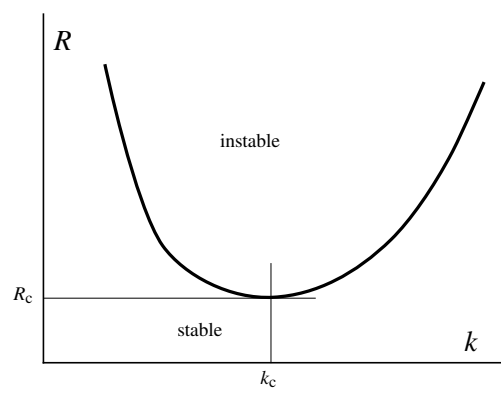


Figure 8.1: Allure typique d'une courbe de stabilité marginale délimitant un domaine stable et un domaine instable dans le plan  $(k, R)$ .

Table 8.1: Différentes instabilités possibles.

	$k_c = 0$	$k_c \neq 0$
$\omega_c = 0$	inst. stationnaire homogène	inst. cellulaire
$\omega_c \neq 0$	inst. oscillante homogène	onde dissipative

critique, il faut développer la relation de dispersion en puissances des écarts à  $k_c$ ,  $\omega_c$  et  $R_c$ . Considérons tout d'abord la partie réelle de la relation de dispersion  $s = \sigma(k; R) - i\omega(k; R)$ . À l'ordre le plus bas, il vient:

$$\sigma = (R - R_c)\partial_k\sigma_c + \frac{1}{2}(k - k_c)^2\partial_{kk}\sigma_c, \quad (8.2)$$

l'indice "c" pour  $\partial_k\sigma$  et  $\partial_{kk}\sigma$  indiquant que ces dérivées sont évaluées en  $(k_c, R_c)$ . Il n'y a ni terme constant, ni terme linéaire en  $(k - k_c)$  car le seuil correspond à un extremum en  $k$  précisément pour  $\sigma = 0$ . Il sera utile pour la suite de récrire (8.2) sous forme adimensionnée:

$$\tau_0\sigma = \epsilon - \xi_0^2\delta k^2, \quad \epsilon = (R - R_c)/R_c, \quad (8.3)$$

ce qui définit implicitement un temps caractéristique d'évolution  $\tau_0$  et une longueur caractéristique  $\xi_0$ . Reliée à la courbure de la courbe de stabilité marginale au seuil, cette dernière est généralement appelée *longueur de cohérence*. Pour des raisons dimensionnelles on doit s'attendre à la trouver<sup>2</sup> d'ordre  $1/k_c$ , la longueur d'onde critique  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  étant la seule longueur résultant du mécanisme d'instabilité. Dans ces notations, la condition  $\sigma = 0$  s'écrit donc simplement:

$$\frac{R - R_c}{R_c} = \xi_0^2\delta k^2. \quad (8.4)$$

Considérons maintenant le développement de la partie imaginaire de la relation de dispersion. Au voisinage du seuil, la pulsation du mode est donnée par:

$$\omega - \omega_c = (R - R_c)\partial_R\omega_c + (k - k_c)\partial_k\omega_c + \frac{1}{2}(k - k_c)^2\partial_{kk}\omega_c + \dots \quad (8.5)$$

On remarquera que la correction en  $R$ , premier terme au membre de droite, ne change rien qualitativement parlant dès lors que  $\omega_c \equiv \omega(k_c; R_c)$  n'est pas accidentellement nul. Par contre les corrections en  $k$  sont physiquement importantes. La quantité  $V_g = \partial_k\omega_c$  représente la vitesse de groupe des ondes au seuil.<sup>3</sup> Quant au terme  $\frac{1}{2}\partial_{kk}\omega_c$ , il rend compte de la dispersion linéaire des ondes.

<sup>2</sup>Sauf naturellement dans le cas d'une instabilité homogène avec  $k_c = 0$  qui met en défaut l'argument et nécessite un calcul direct, cas que nous écartons dans ce qui suit.

<sup>3</sup>La vitesse de phase serait donnée par  $V_\phi = \omega/k$ .

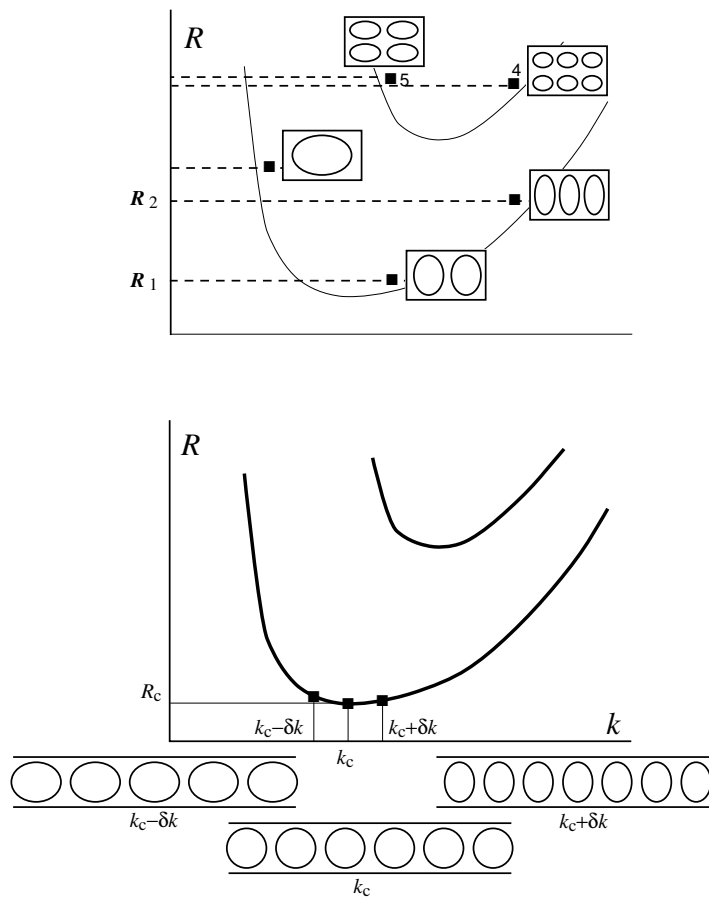


Figure 8.2: En haut: système confiné pour lequel les modes ont des structures bien distinctes les unes des autres et un spectre discret de valeurs propres isolées. La référence aux courbes de stabilité marginale du milieu infini n'a, a priori, plus de sens; elle peut cependant servir à comprendre l'étagement des seuils des différents modes en fonction de leur structure spatiale. En bas: système étendu où, le long de la courbe de stabilité marginale, la structure des modes ne se distingue que par la longueur d'onde, des modes voisins ayant des seuils quasi-dégénérés.

Jusqu'à présent nous avons implicitement considéré la situation idéale d'un système latéralement illimité. Si ce n'est pas le cas, il faut rendre compte des effets de bord à distance finie. Ceci se traduit par une discrétisation des modes admissibles. Le cas le plus simple correspond à un système soumis à des conditions aux limites périodiques à une distance  $\ell$ . La dépendance spatiale des modes propres doit alors effectivement être prise sous la forme  $\exp(ik_n x)$  avec  $k_n = 2n\pi/\ell$ . L'écart entre modes voisins, donné par  $k_{n+1} - k_n = \Delta k = 2\pi/\ell$ , est à comparer au vecteur d'onde critique (s'il ne s'agit pas d'une instabilité homogène pour laquelle  $k_c = 0$ ). Il vient  $\Delta k/k_c = 2\pi/\ell k_c = \lambda_c/\ell$ . Lorsque  $\ell \gg \lambda_c$ , on a affaire à des modes voisins quasi-dégénérés appartenant à une branche continue. En effet, près du seuil, le long de la courbe de stabilité marginale ceci correspond à un écart  $\Delta R/R_c \sim (\lambda_c/\ell)^2 \ll 1$ . Au contraire si  $\ell \simeq \lambda_c$ , les modes sont très distants les uns des autres, le spectre est discret et dépend complètement des propriétés de résonance géométrique entre la taille du système et la taille des structures engendrées par le mécanisme d'instabilité (cf. Fig. 8.2). Typiquement, si (1) est le mode le plus instable et (2) le mode suivant, on a alors  $(R_2 - R_1)/R_1 \simeq \mathcal{O}(1)$ .

Il est d'usage de définir la géométrie adimensionnée du système à l'aide de facteurs de forme:

$$\Gamma = \ell/(\lambda_c/2) = \ell k_c/\pi.$$

Revenons un instant au cas concret d'un système défini dans l'espace physique à 3 dimensions. Le plus souvent le mécanisme d'instabilité singularise une direction de l'espace, la taille  $h$  du système dans cette direction servant alors la longueur de référence. (En convection il s'agit respectivement de la verticale et de

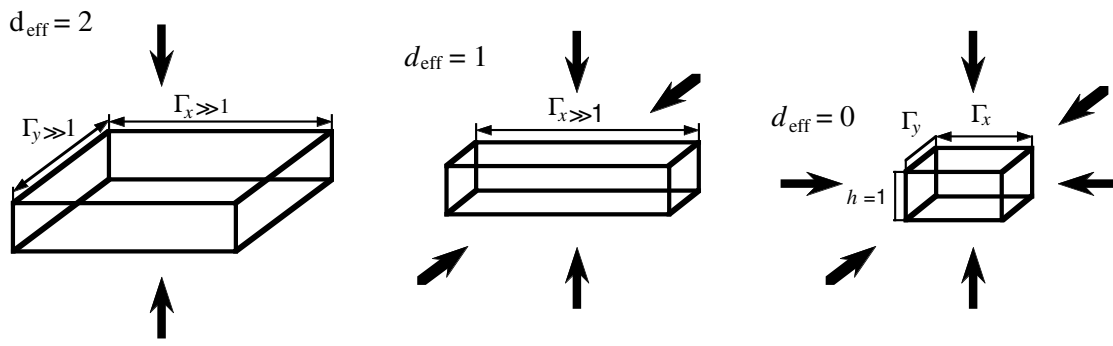


Figure 8.3: Facteurs de forme  $\Gamma_{x,y}$  pour une boîte parallélépipédique.  $d_{\text{eff}}$  est la dimension spatiale effective du système, pour autant que l'instabilité développe des structures dissipatives dont la taille caractéristique est de l'ordre de la hauteur  $h$  de la cellule et que le mécanisme soit isotrope dans le plan  $(x-y)$ . À gauche: système étendu quasi-bidimensionnel,  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_y \gg 1$ . Au centre: système quasi-unidimensionnel selon  $x$ ,  $\Gamma_x \gg \Gamma_y \sim 1$ . À droite: système confiné,  $\Gamma_x \sim \Gamma_y \sim 1$ .

l'épaisseur de la couche fluide.) Ce même mécanisme détermine la longueur d'onde critique qui, pour des raisons dimensionnelles est de l'ordre de  $h$ . (En convection  $k_c = 3,117/h$  et donc  $\lambda_c = 2,015h$ .) Si le système n'est pas confiné dans les deux directions complémentaires, le vecteur d'onde est à deux composantes  $[\mathbf{k} = (k_x, k_y)]$  et la condition de stabilité marginale définit une nappe bidimensionnelle. La discrétisation introduite par les effets de bord opérant comme dans le cas simplifié précédent on obtient un spectre quasi-continu fortement dégénéré; le système est alors quasi-bidimensionnel. Laissons s'approcher les parois latérales dans l'une des deux directions, par exemple  $y$ , i.e.  $\Gamma_x \gg 1$  et  $\Gamma_y \simeq 1$ . Le raisonnement fait précédemment implique une forte levée de dégénérescence des modes neutres indexés par  $k_y$  ( $k_y = 2\pi n_y/\ell_y$ ), ce qui décompose la nappe marginale en une série de branches quasi-continues distinctes, seulement indexées par  $k_x$ . Si l'on s'intéresse à un voisinage du seuil suffisamment étroit pour ne pas inclure de modes transverses (en  $y$ ) autres que le fondamental, le système doit alors être considéré comme quasi-unidimensionnel. Poursuivant la démarche et approchant des parois dans la direction  $x$ , i.e.  $\Gamma_x \simeq 1$  et  $\Gamma_y \simeq 1$ , on arrive à un spectre de valeurs propres bien isolées, la structure spatiale de chaque mode lui étant spécifique. Le système effectif est alors zéro-dimensionnel. Ces différentes situations sont illustrées sur la figure 8.3.

Qualitativement, quand la taille du système est de l'ordre de la longueur de cohérence dans une direction donnée, le mécanisme d'instabilité fige la structure spatiale des modes instables dans cette direction, ce qui abaisse la dimensionnalité effective du système. Une certaine perte de cohérence reste possible dans les directions de confinement faible, ce qui ajoute des degrés de liberté au système. Les modulations ainsi permises seront décrites par des champs fonction du temps et d'une ou deux coordonnées d'espace gouvernés par des équations aux dérivées partielles qui étendent au domaine spatio-temporel les formes normales introduites dans le domaine strictement temporel. Ce dernier correspond naturellement au cas complètement confiné descriptible par des modes dont les amplitudes sont des fonctions du temps gouvernées par des équations différentielles ordinaires.

Ici, les équations d'enveloppe seront introduites d'un point de vue purement phénoménologique (§8.4.1), étant entendu qu'il existe une stratégie bien définie, la *méthode des échelles multiples*, pour les obtenir. Auparavant nous allons considérer l'effet du confinement sur un modèle particulier pour bien voir les difficultés qui se présentent lorsque les effets de confinement se font plus faibles et que les modes se mettent à proliférer.

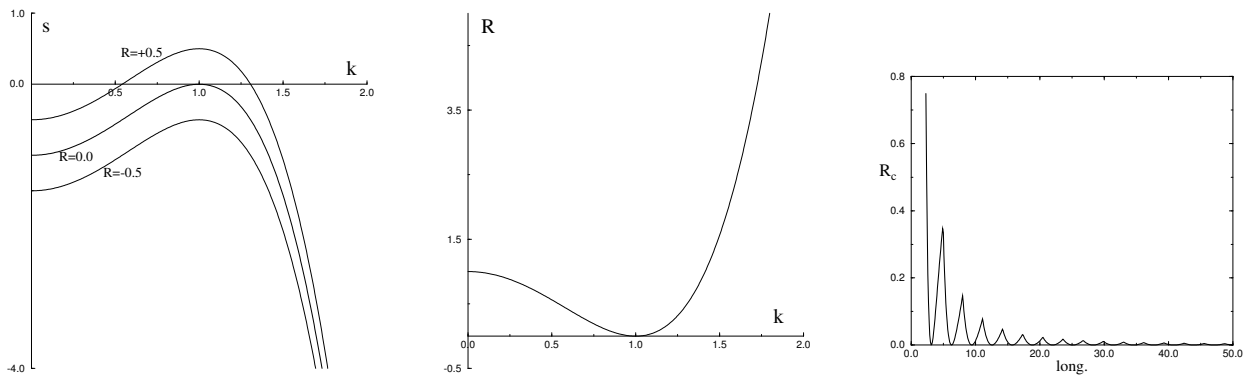


Figure 8.4: À gauche: Taux de croissance des perturbations infinitésimales avec  $R = -0.5, 0,$  and  $+0.5$ . Au centre: courbe de stabilité marginale en milieu infini. À droite: la courbe seuil (8.9) fonction de  $\ell$  pour le modèle SH avec des conditions aux limites “libres” est un assemblage de différents arcs correspondant à des valeurs croissantes de  $j$ .

### 8.3 Limites du concept de chaos temporel, exemple

Pour les besoins de cette illustration, nous réutiliserons le modèle de Swift–Hohenberg modifié unidimensionnel introduit au Ch. 3, p. 51, dont nous rappelons la définition:

$$\partial_t V + V \partial_x V = \left[ R - (\partial_{xx} + 1)^2 \right] V. \quad (8.6)$$

Avant d’imposer des conditions aux limites, considérons le système en milieu infini. Pour linéariser le système autour de la solution de base “ $V \equiv 0$ ” il suffit d’abandonner le terme  $V \partial_x V$ . Le taux de croissance des perturbations de la forme  $V \propto \exp(st + ikx)$  est donné par

$$s(k) = R - (k^2 - 1)^2. \quad (8.7)$$

Il présente un maximum pour  $|k| = 1$ , positif quand  $R$  est positif (figure 8.4, gauche). La courbe de stabilité marginale, déduite de la condition  $s = 0$ , est illustrée sur la figure 8.4 (centre).

Prenant à nouveau les conditions aux limites (3.8), soit  $V$  et  $\partial_{xx}V$  nuls aux deux extrémités d’un intervalle de longueur  $\ell$ , et cherchant la solution sous la forme d’une série de sinus,  $V = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t) \sin(k_j x)$ , avec  $k_j = j\pi/\ell$ , on arrive à (3.15), soit:

$$\frac{d}{dt} X_j = s_j X_j - \sum_{j'=1}^{j-1} \frac{1}{2} k_{j'} X_{j-j'} X_{j'} + \frac{1}{2} k_j \sum_{j'=1}^{\infty} X_{j'} X_{j'+j}. \quad (8.8)$$

Le taux de croissance  $s_j$  de l’amplitude  $X_j$  du mode  $\sin(k_j x)$  reste donné par (8.7) avec  $k = k_j$  de sorte que celui-ci se déstabilise en

$$R_j = (1 - (j\pi/\ell)^2)^2 \quad (8.9)$$

La variation en fonction de  $\ell$  du seuil d’instabilité linéaire, enveloppe inférieure de tous ces seuils, est présentée sur la figure 8.4 (droite). On y observe une résonance spatiale ( $R_j = 0$ ) toutes les fois que  $\ell$  est un multiple de  $\pi$ .<sup>4</sup>

On s’intéresse ici surtout au changement de comportement qui s’opère quand  $\ell$  augmente de valeurs de l’ordre de  $\pi$  à des valeurs plus grandes pour lesquelles le spectre se resserre notablement. La figure 8.5 illustre les régimes obtenus pour  $\ell = 4,5\pi$  (pas trop grand) et plusieurs valeurs de  $R$  à l’aide de projections de l’attracteur sur le plan des modes 4 et 5. Se limitant à la gamme de  $R$  qui correspond à la transition vers le chaos, on obtient pour  $R = 0,80$  un cycle limite qui subit ultérieurement une cascade de bifurcations sous-harmoniques (période 2 pour  $R = 0,85$ , 4 pour 0,86) avant de devenir faiblement chaotique (ici pour  $R = 0,90$ ).

<sup>4</sup>Nous ne considérerons pas ici le cas dit “rigide” satisfaisant à  $V(0) = \partial_x V(0) = 0 = V(\ell) = \partial_x V(\ell)$ . Plus générique, il est aussi plus difficile à traiter.

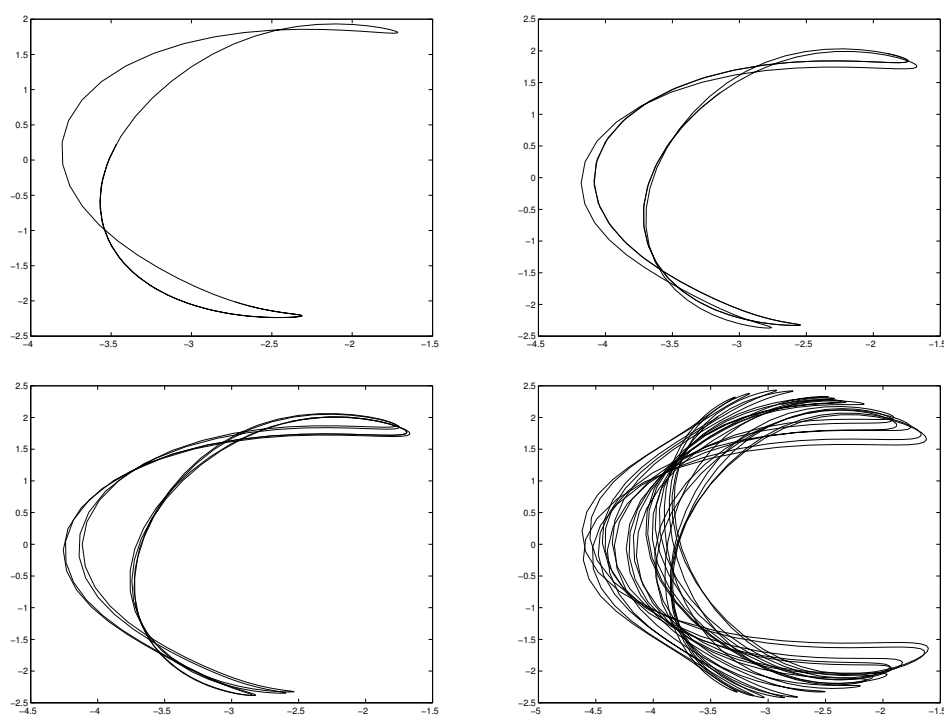


Figure 8.5: Transition au chaos temporel pour le modèle SH avec  $\ell = 4,5\pi$ : projection de portraits de phase dans le plan des deux modes les plus dangereux (modes 4 and 5): De gauche à droite et de haut en bas:  $R = 0,80; 0,85; 0,86; 0,90$ .

La cascade de bifurcations aurait pu être étudiée de façon fine mais notre objectif ici est plutôt d'examiner ce qui se passe quand  $\ell$  augmente. De ce point de vue, il s'avère intéressant de quitter l'espace des modes pour visualiser les régimes observés dans l'espace physique, plus immédiatement accessible dans les expériences. La figure 8.6 présente donc un diagramme spatio-temporel de la solution  $V(x, t)$  pour  $\ell = 4,5\pi$  et  $R = 0,9$  montrant que le système, bien que chaotique, reste très cohérent du point de vue spatial (en fait le chaos est peu visible dans cette représentation alors qu'il était évident sur le portrait de phase de la Fig. 8.5 en bas à droite.).

La situation change lorsque  $\ell$  augmente. Les figures 8.7 à 8.9 illustrent le cas  $\ell = 12,5\pi$ . En  $R \simeq 0$  s'installe une solution cellulaire stationnaire correspondant au mode 12. Suivant cette solution en augmentant le paramètre de contrôle de façon adiabatique, on préserve son caractère stationnaire jusque vers  $R = 0,70$ . En  $R = 0,75$  un régime oscillant s'est installé, faisant principalement participer les modes 12, 17, 18 et 24. Lorsqu'on augmente  $R$ , cette solution se déstabilise ensuite pour évoluer vers un autre régime périodique à l'issue d'un long transitoire. En  $R = 0,77$ , le régime oscillant qui s'est établi présente un nœud d'amplitude

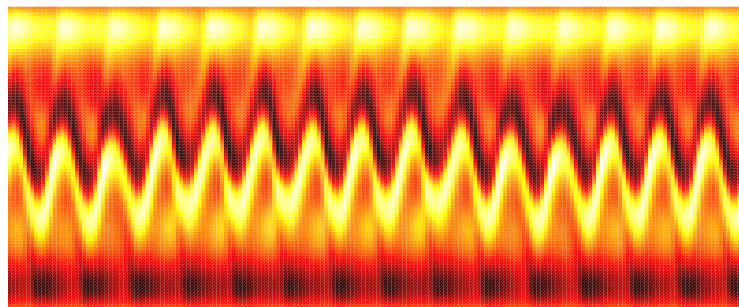


Figure 8.6: Solution  $V(x, t)$  faiblement chaotique pour  $\ell = 4,5\pi$  et  $R = 0,90$  ( $t$  en abscisse,  $x$  en ordonnée, durée totale  $\Delta t = 100$ ).

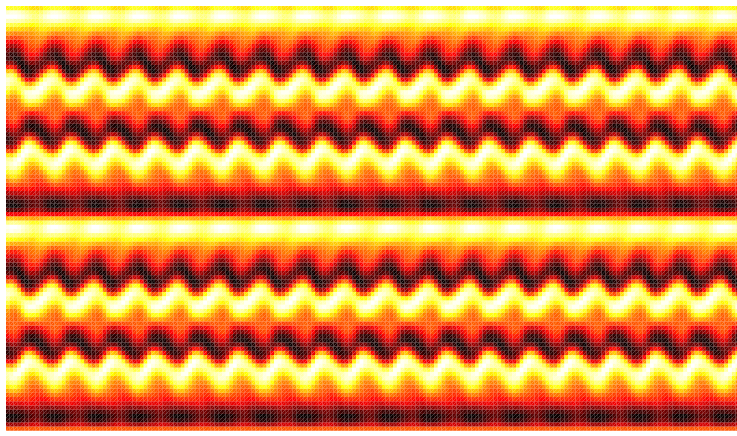


Figure 8.7: Solution périodique pour  $\ell = 12,5\pi$  et  $r = 0,79$  ( $t$  en abscisse,  $x$  en ordonnée, durée totale  $\Delta t = 100$ ).

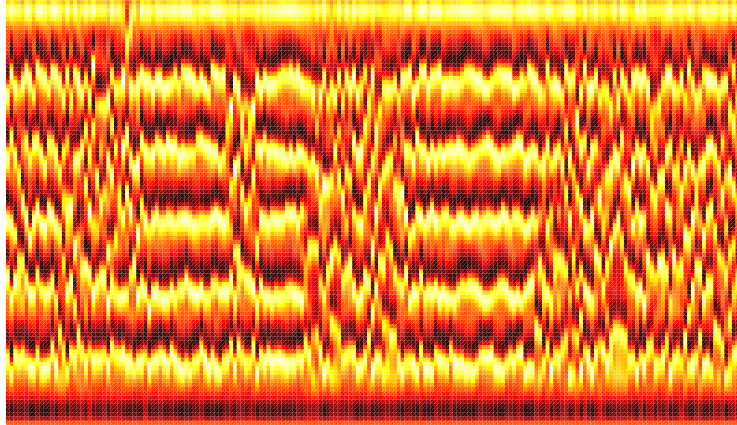


Figure 8.8: Solution spatio-temporellement chaotique pour  $\ell = 12,5\pi$  et  $R = 0,79$ . Vue générale d'une longue séquence de durée  $\Delta t = 1000$ .

en  $x = \ell/2$  (Fig. 8.7).<sup>5</sup>

Cette solution persiste jusqu'en  $R = 0,80$  où l'on observe un régime marqué par des excursions vers des solutions difficiles à caractériser et des retours vers un régime approximativement périodique (Fig. 8.8 et ses agrandissements Fig. 8.9).

Il devient en fait très difficile d'analyser le comportement du système dans l'espace des modes. Si la projection dans le plan des modes 8 et 12 permet bien de conclure à l'existence d'un régime périodique pour  $R = 0,79$  (Fig. 8.10), une telle représentation ne conduit plus à rien d'identifiable pour  $R = 0,80$ . On peut comprendre pourquoi en comparant l'évolution de la distribution des modes en régime périodique pour  $R = 0,79$  et en régime de turbulence faible pendant une phase laminaire et pendant une bouffée turbulente (Fig. 8.11). En régime périodique, seuls le mode 12, ses sous-harmoniques 4, 8 et leurs harmoniques 16, 20, 24... sont excités, caractéristique que l'on retrouve plus ou moins durant une phase laminaire, tandis que durant la bouffée turbulente le spectre de modes excités s'élargit pour les inclure tous.

Pour conclure, remarquons que:

(1) La représentation de la dynamique dans l'espace des modes, si elle reste légitime pour décrire la transition vers la turbulence dans le cas  $\ell = 4,5\pi$  avec une cascade de bifurcations clairement identifiable et pouvant être étudiée avec suffisamment de détail, devient inopérante lorsque  $\ell$  augmente. De plus, la gamme de paramètre de contrôle sur laquelle se produit la transition se rétrécit considérablement, ce qui rend concrètement

<sup>5</sup>N.B.: l'échelle en  $x$  (ordonnée) est différente sur la Fig. 8.6 et sur les Figs. 8.7–8.9. La période spatiale est approximativement la même dans les deux cas.



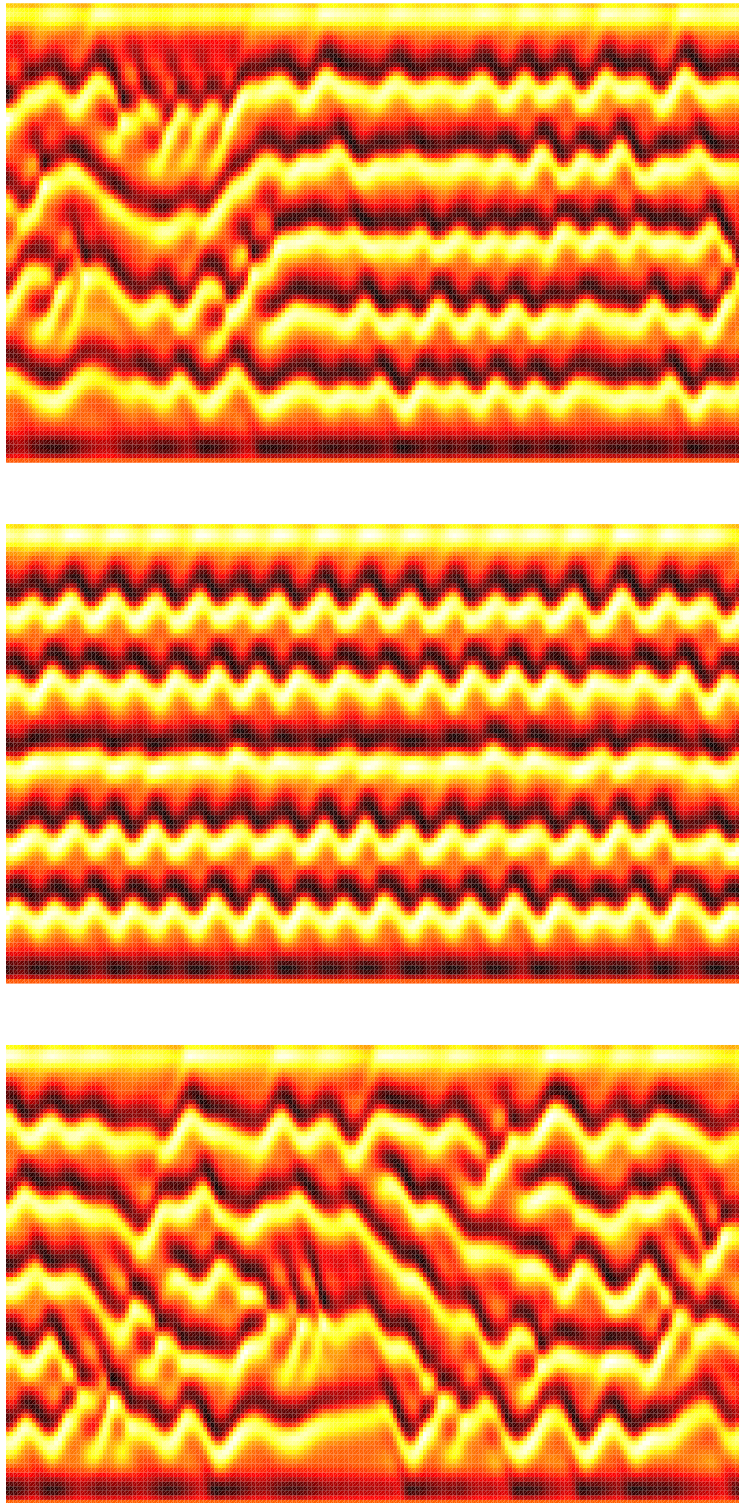


Figure 8.9: Agrandissements de la Fig. 8.8 sur des intervalles de durée 100 autour de  $t = 350$  (en haut, plusieurs courtes bouffées chaotiques)  $t = 650$  (au milieu, pendant une séquence laminaire) et  $t = 750$  (en bas, pendant une longue bouffée chaotique).

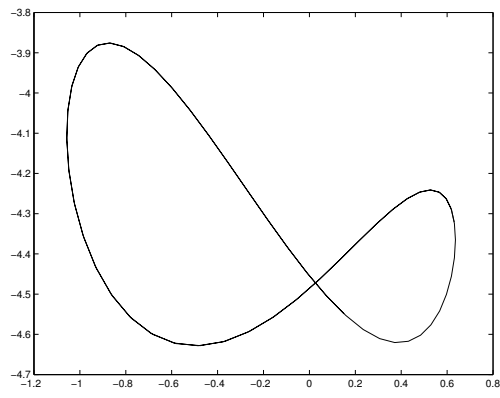


Figure 8.10: Attracteur correspondant au régime périodique pour  $\ell = 12,5\pi$  et  $R = 0,79$  de la Fig. 8.7 en projection dans le plan des modes 8 et 12.

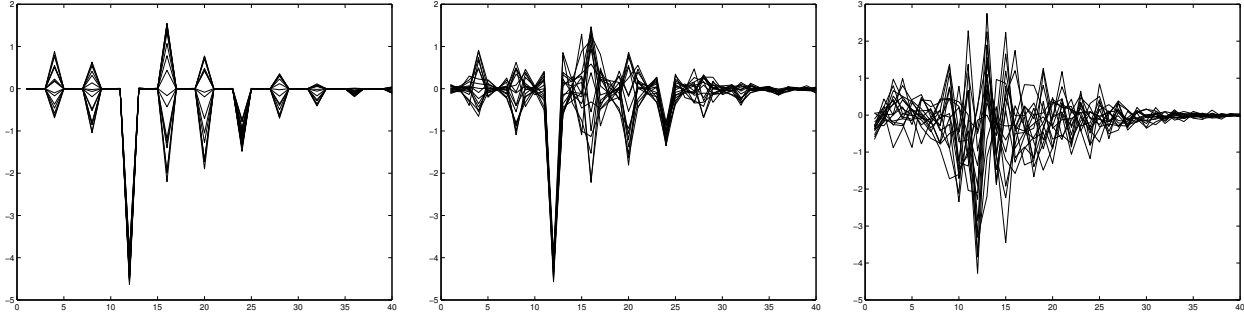


Figure 8.11: Amplitudes des modes en  $\sin(k_j x)$  en régime périodique pour  $R = 0,79$  (à gauche) et en régime turbulent pour  $R = 0,80$  durant une phase laminaire (au centre) et une bouffée turbulente (à droite).

impraticable une étude fine du scénario détaillé en termes de systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté. La raison de cet échec tient à l'augmentation rapide du nombre de modes impliqués dans le processus, ce qu'illustre la Fig. 8.12.

(2) Même si le chaos qui s'installe peut faire penser à de l'intermittence (au sens temporel), il devient difficile de l'interpréter aussi simplement. En particulier il semble impératif de passer à une représentation des phénomènes dans l'espace physique et non plus dans l'espace spectral. Dans cette perspective, nous avons observé que la solution à un instant donné avait une allure localement périodique, mais affectée de

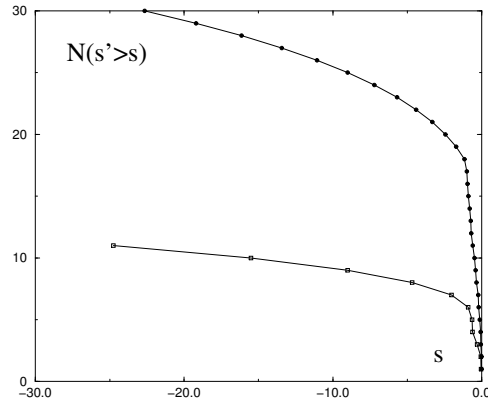


Figure 8.12: Nombre de modes de l'opérateur linéarisé de taux de croissance supérieur à  $s$  pour le modèle de Swift–Hohenberg pour  $\ell = 4,5\pi$  et  $\ell = 12,5\pi$ .

modulations à plus ou moins courte portée. Les régions périodiques relèvent manifestement de solutions particulières uniformes du problème non-linéaire en milieu infini, et le nombre de celles-ci augmente rapidement avec l'écart au seuil. Quant aux modulations, elles tirent leur origine d'une frustration du système qui ne peut accommoder les conditions de bord à distance finie (bien que grande) à l'aide d'une seule de ces solutions particulières, et qui peut se voir obligé de "raccorder" des fragments de telles solutions au moyen de "défauts" localisés. Le comportement temporel résultant peut dès lors être très complexe.

## 8.4 Transition vers le chaos spatio-temporel

Nous venons d'illustrer la transition vers la turbulence quand celle-ci doit être comprise dans le sens d'un chaos spatio-temporel. Cet exemple a montré le rôle, au moins local, des solutions non-linéaires "idéales" du milieu infini et de leurs modulations. Dans une première partie de cette section nous développerons de façon purement phénoménologique une approche qui s'appuie sur cette observation. Celle-ci nous permettra d'introduire la notion d'*équation d'enveloppe* et les concepts qui s'y rattachent. Cette approche reste déductive dans la mesure où la *méthode des échelles multiples* permet la dérivation de ces équations à partir des équations primitives du problème. Elle perd ce statut rigoureux lorsque les équations d'enveloppe sont utilisées dans des régimes de paramètres qui les font sortir de leur domaine de validité asymptotique, ce qui les fait accéder au rang de "modèles". La réussite de cette approche tient au fait que des systèmes très différents présentent de profondes analogies de comportement dues à ce qu'ils partagent des caractéristiques très générales liées à la nature des modes instables telles qu'elle a été présentée au début du chapitre (ondes, structures cellulaires, modes homogènes oscillants), à la nature super/sous-critique de la bifurcation et aux symétries d'ensemble.

Pour aller encore plus loin, il faudra adopter une démarche moins universelle et beaucoup plus inductive, introduisant un plus grand nombre d'éléments spécifiques au système étudié. Ceci passe par la définition de modèles où l'espace, le temps, mais aussi les variables décrivant l'état local du système peuvent être discrétisés. Nous nous contenterons de présenter quelques stratégies de modélisation qui permettent d'aborder le problème de la transition vers le chaos dans des systèmes très étendus dans la section suivante (§8.5).

### 8.4.1 Formes normales et équations d'enveloppe

Le point de départ général est l'identification d'une bifurcation particulière supposée gouverner la dynamique d'un milieu infini uniforme. Cette bifurcation est le fait d'un système dynamique de la forme

$$\frac{d}{dt}A = F(A; R) = L(R)A + N(A; R), \quad (8.10)$$

où  $A$  représente ici collectivement les amplitudes des modes pertinents supposés en petit nombre.<sup>6</sup> Seuls les cas les plus simples sont envisagés en pratique, bifurcation fourche ou bifurcation de Hopf, mais il ne coûte rien d'être plus général à ce stade.

Nous avons observé précédemment qu'en milieu suffisamment étendu, les modes propres du système linéarisé formaient un quasi-continuum organisé en branches, la plus instable correspondant au mode "fondamental" qui gouverne l'instabilité primaire près de son seuil (cf. Fig. 8.2). Au stade linéaire les différents vecteurs d'onde  $k$  sont découplés les uns des autres et on peut comprendre (8.10) comme le résultat de la réduction à la variété centrale pour un système dont la structure spatiale resterait figée à celle correspondant à un vecteur d'onde de référence  $k_0$ . En pratique il s'agit le plus souvent  $k_c$ , ce que nous supposons au moment de l'application concrète. Récrivons donc

$$\frac{d}{dt}A = L(k_0, R)A + N(A; k_0; R), \quad (8.11)$$

---

<sup>6</sup>Tant pour nous conformer à la tradition que pour mieux signifier leur prochain changement de leur statut (de celui de variable temporelle à celui de champ spatio-temporel), pour désigner l'amplitude des modes nous abandonnons donc la lettre  $X$  qui nous a servi jusqu'à présent.

l'expression de  $N$  traduisant explicitement le résultat de l'élimination des modes esclaves (couplage inter-branches).

Relaxons la contrainte d'une structure spatiale uniformément figée (restriction à  $k_0$ ). Les modulations qui apparaissent peuvent s'interpréter comme le résultat d'interférences entre modes  $k$  voisins. Au stade linéaire ces interférences sont bien décrites par la relation de dispersion. La longueur d'onde des modulations associées à deux modes voisins de  $k_0$  et  $k_0 + \delta k$  est donnée par  $2\pi/\delta k \gg \lambda_c$ . Pour décrire ces modulations dans l'espace réel, on introduit une variable lente  $\tilde{x}$  et on effectue une transformation de Fourier inverse, remplaçant formellement  $\delta k$  par  $-i\partial_{\tilde{x}}$  dans la relation de dispersion.

De même, du point de vue temporel la dérivation par rapport au temps dans (8.11) fait référence à la dynamique sur la variété lente que l'on caractérise explicitement au moyen d'un temps lent  $\tilde{t}$ . En cas de comportement oscillant, cette dynamique comporte également une composante rapide à la pulsation  $\omega_c$ , dans ce cas  $\tilde{t}$  décrit les modulations temporelles lentes apportées au comportement périodique rapide. En tout état de cause, la correspondance avec la relation de dispersion s'établit sur la base du remplacement  $\sigma \mapsto \partial_{\tilde{t}}$ . Recollant les morceaux, la relation de dispersion (8.2,8.5) rendant compte du couplage intra-branche et (8.11) du couplage inter-branche au voisinage du point critique  $(k_c, R_c)$ , on arrive à la forme générale

$$\tau_0 \partial_{\tilde{t}} A = A + \xi^2 \partial_{\tilde{x}\tilde{x}} A + N_c(A), \quad (8.12)$$

les coefficients  $\tau_0$  et  $\xi^2$  étant tirés de la relation de dispersion par identification; par exemple la partie réelle du coefficient de diffusion  $\xi^2$  est directement donnée par  $\xi_0^2$  issu de (8.3), la partie imaginaire venant du terme de dispersion dans (8.5). Quant à  $N_c(A)$ , ce terme décrit les termes non-linéaires associés à la bifurcation considérée à l'ordre le plus bas, i.e. estimés au point critique  $(k_c, R_c)$ .

Tous les termes de la relation de dispersion (8.2) participent effectivement à condition que  $\sigma \sim \delta k^2 \sim \epsilon$ . Appliquée à (8.12), ceci se traduit par  $\partial_{\tilde{t}} \sim \partial_{\tilde{x}\tilde{x}} \sim \epsilon$ , ce qui permet de revenir à l'équation d'amplitude écrite dans les variables d'origine:

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + D \partial_{xx} A + N_c(A), \quad (8.13)$$

L'équation d'enveloppe (8.13) adopte la forme d'une équation générale de réaction-diffusion  $\partial_t A = D \nabla^2 A + F(A)$ , décrivant la "diffusion" des modulations d'amplitude, le terme de "réaction"  $F$  rendant compte de la bifurcation.

Considérons maintenant les trois situations les plus importantes ( $k_c \neq 0, \omega_c = 0$ ), ( $k_c = 0, \omega_c \neq 0$ ) et ( $k_c \neq 0, \omega_c \neq 0$ ) en nous limitant au cas super-critique.

### Instabilité stationnaire cellulaire

La solution bifurquée uniforme s'écrit en toute généralité  $V(x, t) = A(t) \cos(k_c x + \phi)$ , où  $\phi$  correspond à une phase fixe rendant compte de l'invariance par translation en milieu infini. Dans cette formulation, l'amplitude  $A \in \mathbb{R}$  est gouvernée par une bifurcation fourche:

$$\tau_0 \frac{d}{dt} A = \epsilon A - g A^3, \quad (8.14)$$

où  $\tau_0$  est le temps caractéristique issu de l'analyse linéaire et  $g \in \mathbb{R}$  le coefficient d'interaction non-linéaire ( $g > 0$  pour une bifurcation super-critique). Il est à noter que cette équation dérive d'une fonction de Lyapunov:

$$\mathcal{G}(A) = -\frac{1}{2}\epsilon A^2 + \frac{1}{4}g A^4.$$

Il est en fait alors préférable de passer à une représentation complexe de la solution, soit  $V(x, t) = \frac{1}{2}[A(t) \exp(ik_c x) + A(t)^* \exp(-ik_c x)]$  avec  $A \mapsto |A| \exp(i\phi)$ , ce qui conduit à récrire l'équation (8.14) sous la forme

$$\tau_0 \frac{d}{dt} A = \epsilon A - g |A|^2 A. \quad (8.15)$$

L'invariance par translation est alors associée à une invariance de jauge du paramètre d'ordre  $A$  maintenant complexe. En effet, une translation d'origine  $x \mapsto x + x_0$  se traduit par une rotation de  $A$  dans le plan

complexe  $A \mapsto A \exp(i\phi_0)$  avec  $\phi_0 = k_c x_0$ . La symétrie de parité  $x \mapsto -x$  implique, quant elle, l'échange  $A \mapsto A^*$  en relation avec le caractère réel du coefficient  $g$ . L'équation (8.15) dérive encore d'un potentiel. On a en effet

$$\tau_0 \frac{d}{dt} A = \partial \mathcal{G} / \partial A^* \quad (8.16)$$

avec maintenant

$$\mathcal{G}(A, A^*) = -\epsilon |A|^2 + \frac{1}{2} g |A|^4. \quad (8.17)$$

Le déploiement de la dépendance spatiale introduit une longueur de cohérence  $\xi_0$  liée à la courbure de la relation de dispersion au seuil, génériquement

$$\tau_0 s = \epsilon - \xi_0^2 (k - k_c)^2,$$

ce qui conduit à

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + \xi_0 \partial_{xx} A - g |A|^2 A. \quad (8.18)$$

Cette équation est souvent appelée *équation de Newell–Whitehead–Segel*.

Dans toute la suite, il sera commode de mesurer systématiquement  $t$ ,  $x$  et  $A$  en unités de  $\tau_0$ ,  $\xi_0$ , et  $1/\sqrt{g}$  (plus loin,  $1/g_r^{1/2}$  dans le cas oscillant). Ici, cela conduit immédiatement à:

$$\partial_t A = \epsilon A + \partial_{xx} A - |A|^2 A. \quad (8.19)$$

Il est facile de vérifier que (8.19) dérive d'un potentiel fonctionnel  $\mathcal{G}(A, A^*)$ :

$$\frac{d}{dt} A = -\delta \mathcal{G}(A, A^*) / \delta A^*, \quad (8.20)$$

où  $\delta()/\delta()$  dénote la dérivation fonctionnelle qui généralise la dérivation des fonctions de variables aux fonctionnelles de champs. La fonctionnelle "densité de potentiel" qui conduit à (8.19) selon (8.20) s'écrit

$$\mathcal{G}(A, A^*) = -\epsilon |A|^2 + |\partial_x A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4. \quad (8.21)$$

Le potentiel associé à un domaine de longueur  $\ell$  est donné par

$$G = \int_{\ell} \mathcal{G} dx$$

et l'on peut vérifier que  $G$  est une fonction décroissante du temps ( $dG/dt \leq 0$ ) qui atteint asymptotiquement l'un de ses minima relatifs. Cette dynamique relaxationnelle n'est pas très riche, temporellement parlant. Le résultat s'étend en dimension spatiale plus élevée mais la pauvreté de la dynamique n'exclut pas la possibilité de textures spatiales stationnaires complexes. Lorsque l'on pousse le développement des équations d'enveloppe il s'introduit généralement des termes non-relaxationnels qui peuvent induire une dynamique résiduelle mais celle-ci reste "lente".

Revenons à (8.19) et considérons le cas d'un milieu sans échelle de longueur extrinsèque, i.e. infini ou semi-infini. Posant  $x = \tilde{x}/\epsilon^{1/2}$ , et  $t = \tilde{t}/\epsilon$  on obtient

$$\partial_{\tilde{t}} A = A + \partial_{\tilde{x}\tilde{x}} A - |A|^2 A$$

et l'on peut, par exemple, résoudre en toute universalité le problème d'un milieu semi-infini borné par une paroi en  $\tilde{x} = 0$  imposant  $A = 0$ . La solution stationnaire s'écrit

$$A(\tilde{x}) = \tanh(\tilde{x}/\sqrt{2})$$

et montre en particulier la divergence de la cohérence au voisinage du seuil puisque si l'on revient aux variables originelles une distance  $\tilde{x}$  d'ordre unité correspond à une distance  $x$  d'ordre  $\epsilon^{-1/2}$  qui diverge quand  $\epsilon$  tend vers zéro. Si par contre il existe une longueur extrinsèque, la taille du système, il faut la comparer à la longueur de cohérence  $\xi(\epsilon) = \epsilon^{-1/2}$ . L'illustration sur (8.18) de ce que nous avons dit au début du chapitre sur les effets de confinement est ici immédiate. En milieu infini, le système bifurque en  $\epsilon = 0$ .

Supposons maintenant des conditions aux limites  $A(0) = A(\ell) = 0$  et prenons des modes en  $\exp(\sigma t) \sin(ik_j x)$  avec  $k_j = j\pi/\ell$ ,  $j \geq 1$  entier, nous obtenons  $\sigma = \epsilon - j^2\pi^2/\ell^2$ . Les seuils correspondants sont donc donnés par  $\epsilon_j = j^2\pi^2/\ell^2$ . Le décalage du fondamental est donc d'ordre 1 pour  $\ell \sim 1$  et décroît rapidement en  $1/\ell^2$  quand  $\ell$  augmente. Ceci rend compte très simplement de la discrétisation du spectre due aux effets de taille finie et se transpose immédiatement à la séparation des branches dans la réduction quasi-bidimensionnel  $\rightarrow$  quasi-unidimensionnel quand on considère l'effet de la cohérence transverse (en  $y$ ).

La distance au seuil en milieu infini  $\epsilon$  étant fixée, on détermine facilement le nombre de modes d'enveloppe linéairement excités en fonction de la longueur du système. On constate tout d'abord que la solution triviale bifurque quand le mode  $j = 1$  se déstabilise, soit  $\ell = \ell(\epsilon) = \epsilon^{-1/2} = \xi(\epsilon)$ , longueur de cohérence à la valeur de  $\epsilon$  considérée. Au voisinage du point  $(\epsilon, \ell(\epsilon))$  de l'espace des paramètres, on peut utiliser les techniques classiques de théorie de la bifurcation appliquées à l'équation d'enveloppe. Réciproquement,  $\ell$  étant fixé et suppose très grand devant  $\lambda_c$  pour que l'utilisation du formalisme d'enveloppe soit légitime, l'extension du domaine de validité de cette approche "facile" où le nombre de degrés de liberté effectifs reste petit diminue rapidement:  $j = \mathcal{O}(1)$  implique  $\epsilon \sim \pi^2/\ell^2$ . Hors de ce domaine, i.e.  $\ell \gg \xi(\epsilon)$ , le point de départ approprié n'est plus le système confiné mais le milieu infini pour lequel on peut, comme plus haut éliminer tous les paramètres. La condition  $\ell \gg \xi(\epsilon)$  se traduit alors par  $\tilde{\ell} = \ell/\xi \gg 1$ , de sorte que les effets de bord se trouvent confiné à des couches limites d'épaisseur  $\mathcal{O}(1)$  dans les nouvelles unités.

Passons maintenant, sans autant de détail, au cas des systèmes pour lesquels la bifurcation introduit une dépendance périodique "dure" dès le départ.

### Instabilité oscillante homogène

Pour une instabilité oscillante homogène ( $k_c = 0$ ,  $\omega_c \neq 0$ ) super-critique, le point de départ est maintenant une bifurcation de Hopf sous forme normale

$$\frac{d}{dt}A = (\sigma - i\omega_c)A - (g_r + ig_i)|A|^2A$$

pour un mode  $A$  complexe. Nous supposons la bifurcation super-critique ( $g_r > 0$ ) et nous nous plaçons dans une jauge en rotation à la pulsation  $\omega_c$  grâce au changement  $A \mapsto A \exp(-i\omega_c t)$ . Dans cette jauge la dépendance temporelle rapide a disparu et il ne reste que la dépendance lente (taux de croissance  $\sigma$  petit). Il vient donc

$$\frac{d}{dt}A = \sigma A - (g_r + ig_i)|A|^2A. \quad (8.22)$$

Selon la stratégie générale développée plus haut, le déploiement spatial quasi-unidimensionnel conduit à:<sup>7</sup>

$$\partial_t A = \epsilon A + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A - (1 + i\gamma)|A|^2A. \quad (8.23)$$

où, comme précédemment, les coefficients sont tirés de la relation de dispersion.<sup>8</sup> L'équation (8.23) est généralement appelée *équation de Ginzburg-Landau complexe*.<sup>9</sup>

Comme pour l'instabilité cellulaire stationnaire, on doit discuter la taille du système en fonction de la longueur de cohérence  $\xi(\epsilon)$ . Si  $\ell \sim \xi$ , après spécification des conditions aux limites, on est ramené à un système à petit nombre de degrés de liberté dont on étudie les bifurcations fonction de  $\epsilon$  et  $\ell$ . Dans la limite opposée  $\ell \gg \xi$ , il est loisible de faire disparaître  $\epsilon$  de (8.23) par les mêmes changements d'échelle que précédemment pour aboutir à

$$\partial_{\tilde{t}}A = A + (1 + i\alpha)\partial_{\tilde{x}\tilde{x}}A - (1 + i\gamma)|A|^2A. \quad (8.24)$$

L'espace des paramètres  $(\alpha, \gamma)$  a été très étudié. Les résultats de cette étude seront illustrés plus loin.

<sup>7</sup>Ici, c'est  $1/(g_r)^{1/2}$ ,  $g_r > 0$ , qui sert d'unité pour  $A$ ; on aura donc posé  $\gamma = g_i/g_r$ .

<sup>8</sup>Rappelons que le coefficient de dispersion a été mis à l'échelle à l'aide de  $\xi_0$  qui sert d'unité de longueur; ce terme était issu du développement  $\omega - \omega_c = \frac{1}{2}k^2\partial_{kk}\omega(k=0; R_c)$ ; notons que dans cette relation il n'y a pas de terme en  $k$  car le milieu est supposé invariant dans la transformation de parité  $x \mapsto -x$ .

<sup>9</sup>On peut préciser "cubique" car son extension gouvernant une bifurcation sous-critique, et contenant de ce fait un terme supplémentaire en  $|A|^4A$  destiné à garantir la saturation à amplitude finie, est appelée équation de Ginzburg-Landau quintique.

Par rapport au cas précédent, le cas ( $\omega_c \neq 0, k_c \neq 0$ ) présente quelques difficultés supplémentaires. La dérivation microscopique des équations d'enveloppe demande du soin du fait de la présence de l'échelle de temps rapide liée à  $\omega_c$  et il faut introduire deux temps lents, un temps advectif sur lequel évoluent les modulations liées à l'existence d'une vitesse de groupe et un temps plus lent attaché au phénomène de dispersion.

Dans un milieu qui distingue la droite de la gauche, il n'y a *a priori* qu'une onde critique. L'équation correspondante s'écrit

$$(\partial_t + V_g \partial_x)A = \epsilon A + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A - (1 + i\gamma)|A|^2 A. \quad (8.25)$$

Au niveau phénoménologique où nous situons, les difficultés mentionnées plus haut se traduisent par le fait que la mise à l'échelle des termes liés à la vitesse de groupe d'une part, et à la diffusion-dispersion de l'autre, introduit des puissances de  $\epsilon$  différentes. Sous cette forme, l'équation (8.25) n'est donc acceptable qu'assez loin du seuil ( $\epsilon \sim \epsilon^2$ ). Quoiqu'il en soit, dans un milieu infini invariant par translation, on peut effectuer un changement de repère galiléen et se placer dans un repère qui se déplace à la vitesse de groupe des ondes ( $t \mapsto t, x \mapsto x - V_g t$ ), ce qui fait disparaître le terme  $V_g \partial_x$  et ramène à (8.23). Si le milieu n'est pas invariant par translation, e.g. en milieu semi-infini, cette transformation n'est pas possible.

Lorsque le milieu est invariant par parité, il se développe *a priori* deux ondes, l'une se propageant vers la droite (enveloppe  $A_D$ ) et l'autre vers la gauche (enveloppe  $A_G$ ). On obtient alors un système de deux équations couplées:

$$\begin{aligned} (\partial_t + V_g \partial_x)A_D &= \epsilon A_D + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A_D \\ &\quad - (1 + i\gamma)|A_D|^2 A_D - (\zeta_r + i\zeta_i)|A_G|^2 A_D, \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - V_g \partial_x)A_G &= \epsilon A_G + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A_G \\ &\quad - (1 + i\gamma)|A_G|^2 A_G - (\zeta_r + i\zeta_i)|A_D|^2 A_G. \end{aligned} \quad (8.27)$$

La présence simultanée des deux ondes dépend de la valeur du coefficient de couplage<sup>10</sup> (*a priori* complexe)  $\zeta$ . Si  $|\zeta_r| \ll 1$ , la présence de l'une des deux ondes corrige à peine le module de l'autre. Dans ce régime, elles peuvent donc coexister, ce qui tend à produire des systèmes d'ondes stationnaires. Dans la situation opposée,  $|\zeta_r| \gg 1$ , on s'attend plutôt à ce que le développement local de l'une "tue" l'autre au même endroit et, par contagion, à obtenir des systèmes d'ondes propagatives dans une seule direction, sans qu'on sache dire laquelle à l'avance.

Déjà plus complexe dans le cas de l'instabilité homogène oscillante que dans le cas de l'instabilité cellulaire stationnaire, le comportement spatio-temporel atteint, pour des systèmes d'ondes, un degré supplémentaire. En effet, il est par exemple facile de concevoir l'existence de défauts spatio-temporels tels que "puits," lieux de rencontre d'une onde droite et d'une onde gauche cherchant à s'interpénétrer, ou de "sources" où les ondes se propagent en s'écartant.

## 8.4.2 Des modulations au chaos spatio-temporel

Écartant le cas des petits systèmes (à l'échelle de  $\xi(\epsilon)$ ) qui sont plutôt redevables d'une analyse en termes de systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté, nous considérons désormais à la limite du "milieu infini". Les modulations décrites par les enveloppes peuvent avoir une origine *extrinsèque*, essentiellement dues aux effets de bords (couches limites déjà décrites pour  $\tilde{x} \sim \ell/\xi \gg 1$  et autres effets plus fins de sélection de la longueur d'onde) mais surtout *intrinsèque*, c'est à dire se développant spontanément du fait d'instabilités secondaires<sup>11</sup> qui peuvent affecter l'enveloppe ou de l'existence de "défauts topologiques", lieux où l'enveloppe considérée comme champ fonction de  $x$  et  $t$  présente une singularité. Instabilités secondaires et défauts revêtent le même caractère universel que celui inscrit dans la description en termes d'enveloppe,

<sup>10</sup>lui aussi mis à l'échelle par  $g_r$ :  $g' = g'_r + ig'_i$  étant le coefficient de couplage brut, on aura posé  $\zeta_r = g'_r/g_r$ ,  $\zeta_i = g'_i/g_r$ .

<sup>11</sup>"secondaires", car l'instabilité "primaire" est celle qui a fait apparaître la structure dissipative dont on étudie la stabilité.

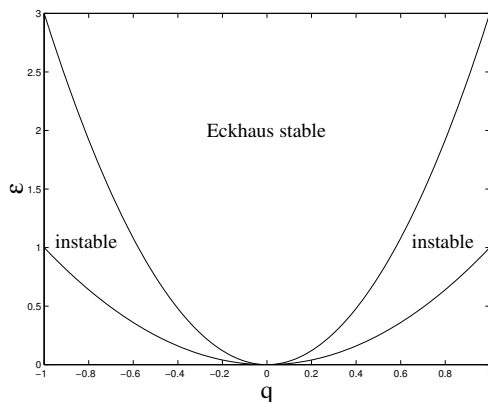


Figure 8.13: Le domaine des structures cellulaires de vecteur d'onde  $k_0 = k_c + q$  instables vis à vis de l'instabilité d'Eckhaus est situé dans les deux bandes latérales comprises entre les paraboles d'équation  $\epsilon = q^2$  et  $\epsilon = 3q^2$ .

ne dépendant que de la nature du degré de liberté effectif qui rend compte de l'instabilité primaire et non des mécanismes physiques spécifiques à l'œuvre dans le système considéré.

### Instabilités de phase

En milieu infini au dessus du seuil, une large bande de vecteurs d'onde est linéairement instable. De chacun de ces modes émerge une solution non-linéaire périodique uniforme. Considérons pour plus de spécificité le cas d'une instabilité cellulaire stationnaire de vecteur d'onde  $k_0 = k_c + q$ . Partant de  $V = \frac{1}{2}(A \exp(ik_0x) + cc)$ , posant  $A = A_q \exp(iqx)$ , par report dans (8.18) on obtient  $(\epsilon - q^2)A_q - |A_q|^2 A_q = 0$  d'où  $A_q = (\epsilon - q^2)^{1/2}$ . De telles solutions existent pourvu que  $q^2 \leq \epsilon$ , condition qui définit l'intérieur du domaine délimité par la courbe de stabilité marginale. Ces solutions particulières dont la phase  $\phi = iqx$  croît linéairement avec  $x$  sont dites à *enroulement de phase*. L'étude de stabilité de ces solutions suit la démarche classique à ceci près que l'on préfère mettre en évidence explicitement les perturbations du module et de phase de l'enveloppe. Nous ne rentrerons pas dans le détail du calcul qui montre que les perturbations du module relaxent pour tout  $q$  pris dans la bande d'existence des solutions alors que les perturbations de phases sont gouvernées par une équation de diffusion

$$\partial_t \delta\phi = D \partial_{xx} \delta\phi. \quad (8.28)$$

L'origine de ce comportement est à mettre sur le compte de l'invariance par translation: En effet, si  $V(x)$  est solution, alors  $V(x + x_0)$  est également solution. Un mode neutre est associé à cette invariance en milieu infini. Une modulation de phase  $\phi(x, t) = qx_0(x, t)$  lentement variable dans l'espace brise cette invariance mais relaxe d'autant plus lentement que son gradient est faible. Les fluctuations de phase s'amortissent en diffusant "normalement" tant que le coefficient  $D$  est positif. L'instabilité apparaît quand il devient négatif. Pour les structures cellulaires stationnaires avec  $k_0 = k_c + q$  un calcul détaillé conduit à:

$$D(q) = \frac{\epsilon - 3q^2}{\epsilon - q^2}. \quad (8.29)$$

L'instabilité, qui porte le nom d'*Eckhaus*, se manifeste donc pour  $|q| > (\frac{1}{3}\epsilon)^{1/2}$ , soit  $k_0 \in [-\epsilon^{1/2}; -(\frac{1}{3}\epsilon)^{1/2}]$  et  $k_0 \in [(\frac{1}{3}\epsilon)^{1/2}; \epsilon^{1/2}]$ . C'est une instabilité "de bande latérale", cf. Fig. 8.13.

Dans le cas d'un mode homogène oscillant, une instabilité de même nature se manifeste pour les solutions à enroulement de phase de l'équation de Ginzburg-Landau (8.23) de la forme  $A = A_q \exp[i(qx - \omega_q t)]$ . On trouve par substitution  $A_q = (\epsilon - q^2)^{1/2}$  et  $\omega_q = \alpha q^2 + \gamma A_q^2$ . L'étude détaillée en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  montre qu'il subsiste une bande de solutions stables tant que  $1 + \alpha\gamma > 0$  mais que si cette condition, appelée *critère de Newell*, n'est pas remplie, toutes les solutions sont instables de phase, c'est l'*instabilité de Benjamin-Feir*. Nous y reviendrons après avoir examiné la seconde source intrinsèque de modulation, la présence de défauts.



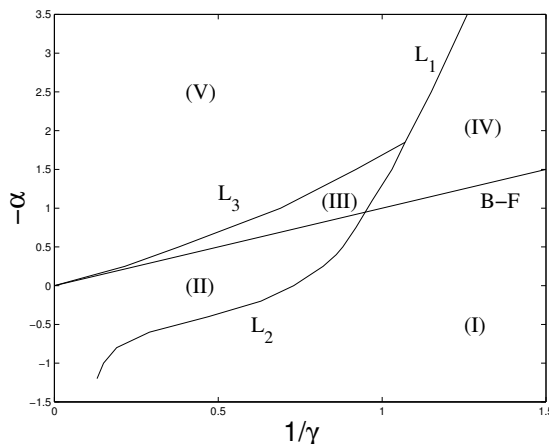


Figure 8.14: Diagramme de phase de l'équation de Ginzburg-Landau complexe en dimension 1 (d'après H. Chaté).

### Défauts topologiques

Les symétries du problème autorisent généralement l'existence de plusieurs solutions équivalentes qui se correspondent dans une transformation du "paramètre d'ordre"  $A$ . Retournant pour un instant à la bifurcation fourche gouvernée par  $\frac{d}{dt}A = \epsilon A - A^3$  avec  $A$  réel, on voit que l'on a deux solutions possibles  $\pm\epsilon^{1/2}$ . La transformation du paramètre d'ordre est ici l'inversion  $A \mapsto -A$ . C'est une symétrie discrète. Le déploiement spatial de cette bifurcation admettrait par exemple des solutions en milieu infini telles que  $A \rightarrow +\epsilon^{1/2}$  pour  $x \rightarrow +\infty$  et  $A \rightarrow -\epsilon^{1/2}$  pour  $x \rightarrow -\infty$ , ce qui correspond à une *paroi* séparant un domaine  $+$  d'un domaine  $-$ . Ce type de défaut est stable à condition que  $A$  soit effectivement condamné à rester réel, donc seulement pour une instabilité stationnaire et homogène, cas que nous avons écarté du fait de son caractère peu fréquent. Si  $A$  est complexe, la singularité  $A = 0$  se traduit par une indétermination de la phase. La persistance du défaut  $A = 0$  se traduit par deux équations dans l'espace-temps. En dimension 1, il vient:  $\text{Re}\{A(x, t)\} = 0$  et  $\text{Im}\{A(x, t)\} = 0$ . Ce système de deux équations à deux inconnues a génériquement des solutions isolées  $(x_i, t_i)$ : le défaut est donc topologiquement instable<sup>12</sup> et n'existe qu'en des instants particuliers  $t_i$ . Dans le cas d'une instabilité cellulaire stationnaire, une solution présentant un défaut mais dont la partie imaginaire serait identiquement nulle ne saurait préserver cette propriété: la solution s'échappe dans la direction des imaginaires et le défaut disparaît. Au contraire, en dimension 2, le défaut peut persister car la résolution simultanée de  $\text{Re}\{A(x, y, t)\} = 0$  et  $\text{Im}\{A(x, y, t)\} = 0$  en un point ordinaire de l'espace-temps conduit génériquement une ligne du plan  $(x, y)$ . Notons aussi que le nœud qui apparaît dans la solution de la Fig. 8.7 aurait pu, par anticipation, être interprété comme un défaut des enveloppes d'un système d'ondes stationnaires.

### Chaos spatio-temporel de l'équation de Ginzburg-Landau complexe

À titre d'exemple considérons les différents régimes réguliers et chaotiques que présentent les solutions de l'équation de Ginzburg-Landau complexe à 1 dimension d'espace. Les résultats des nombreuses simulations numériques qui ont été effectuées sont rassemblés en un "diagramme de phase" sur la figure 8.14 où le plan de paramètre  $(1/\gamma, -\alpha)$  se trouve découpé en différents domaines.

La compréhension de son allure générale repose sur un rappel du critère de Newell qui contrôle la stabilité des solutions à enroulement de phase. Ces ondes planes sont instables quand  $1 + \alpha\gamma < 0$ , soit  $-\alpha > 1/\gamma$ . Lorsque  $-\alpha \ll 1/\gamma$  la stabilité de ces dernières est au contraire très forte. On s'attend donc à ce qu'elles attirent l'essentiel des conditions initiales. C'est ce qui se passe effectivement dans le domaine (I). Dans le domaine (IV) la condition de stabilité n'est pas remplie mais près de la ligne " $-\alpha = 1/\gamma$ " l'instabilité est suffisamment faible pour qu'elle se limite à des perturbations de la phase, le module restant voisin de 1.

<sup>12</sup>Voir cependant le cas particulier des solutions de Nozaki-Bekki pour l'équation de Ginzburg-Landau cubique.

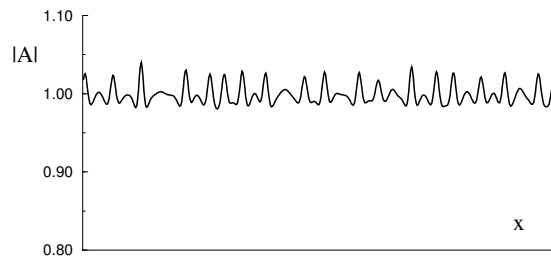


Figure 8.15 : Turbulence de phase près du seuil de l’instabilité de Benjamin–Feir illustrée par les fluctuations du module de  $A$ . Dans ce régime  $|A|$  reste esclave des gradients de la phase, varie peu, et surtout reste borné inférieurement loin de zéro.

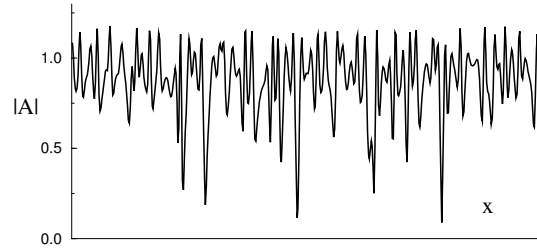


Figure 8.16 : Turbulence de défauts; le module de  $A$  fluctue énormément et atteint zéro de temps en temps.

C’est le régime de *turbulence de phase*, cf. Fig. 8.15.

Restant dans le domaine instable de phase et s’écartant assez largement de la ligne de Benjamin–Feir, on voit les perturbations de phase s’intensifier et exciter les modes associés au module suffisamment pour que des défauts de phase apparaissent, signalés par des zéros du module. Le système est rentré dans un régime de *turbulence de défauts*, domaine (V), cf. Fig. 8.16. La densité des zéros est sensiblement constante dans le temps. La ligne  $L_1$  qui sépare la turbulence de défauts de la turbulence de phase marque un changement de comportement rapide de la densité de zéros, sa position exacte dépend un peu de la taille du système.<sup>13</sup>

Dans le prolongement de  $L_1$ , la ligne  $L_2$  sépare le domaine (I) —où l’on ne trouve que des ondes planes— du domaine (II) où des défauts de phase peuvent coexister avec les ondes planes. Certains de ces défauts sont proches de solutions particulières, localisées et exactes, de l’équation de Ginzburg–Landau complexe appelées *trous de Nozaki–Bekki* (cf. Fig. 8.17). Dans le domaine (II) le système les solutions issues de conditions initiales aléatoires présentent de l’intermittence spatio-temporelle, avec des défauts de phase se déplaçant de façon complexe dans une “mer” d’ondes planes par morceaux, les solutions en ondes planes sans défauts n’étant obtenues que pour des conditions initiales appropriées suffisamment régulières.

La région (III), appelée bichaotique, est de nature intermédiaire, avec des domaines d’intermittence spatio-temporelle analogue à celle de la région (II) en compétition avec des domaines de turbulence de phase similaire à celle de la région (I).

### Turbulence de phase et équation de Kuramoto–Sivashinsky

Au voisinage immédiat du seuil de l’instabilité de Benjamin–Feir, bien que cela ne soit pas prouvé rigoureusement (cf. note 13), la présentation précédente suggère que l’on puisse se ramener à une dynamique effective pour la phase de l’enveloppe. Considérant le cas le plus simple d’une oscillation uniforme (onde d’enroulement de phase nul), posant  $A = |A| \exp(i\phi)$  et effectuant une élimination adiabatique du module on arrive pour

<sup>13</sup>À cet égard, il n’est cependant pas encore établi qu’en régime de turbulence de phase, l’amplification des perturbations de phase ne conduit jamais à l’apparition d’un zéro de l’amplitude si considère des système très grand et si l’on attend un temps astronomique (limite “thermodynamique”); le défaut correspondant serait malgré tout très instable et le régime de phase se restaurerait alors rapidement. La différence entre turbulence de phase et turbulence de défauts serait alors plutôt quantitative que qualitative et la ligne  $L_1$  ne serait pas une “ligne de transition” mais une ligne de “cross-over”.

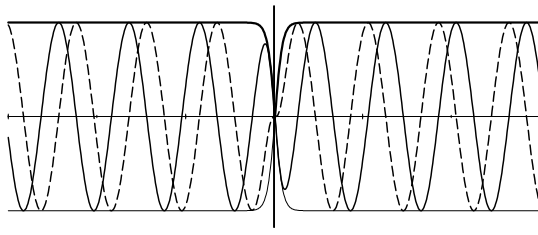


Figure 8.17: Instantané d'un trou de Nozaki–Bekki de vitesse nulle. Tandis que le profil du module de  $A$  reste invariable, la partie réelle et la partie imaginaire de  $A$  dessinent des sinusoides qui défilent à vitesse (de phase) constante.

$\phi$  à une équation de diffusion de la forme (8.28). Un développement en gradients de  $\phi$  conservant tous les termes formellement d'ordre  $(\partial_x)^4$  conduit à ainsi à

$$\partial_t \phi = D \partial_{xx} \phi - K \partial_{xxxx} \phi + g_0 (\partial_x \phi)^2 + g_1 \partial_x \phi \partial_{xxx} \phi + g_2 (\partial_{xx} \phi)^2 + g_3 \partial_{xx} \phi (\partial_x \phi)^2, \quad (8.30)$$

où le coefficient  $D = 1 + \alpha \gamma$  peut effectivement changer de signe et devenir négatif. Les autres coefficients sont:  $K = \alpha^2(1 + \gamma^2)/2\epsilon$ ,  $g_0 = \gamma - \alpha$ ,  $g_1 = 2g_2 = \alpha g_3 = -2\alpha(1 + \gamma^2)/\epsilon$ . Pour  $\epsilon$  fini, au voisinage du seuil de l'instabilité de Benjamin–Feir,  $D$  reste petit. La comparaison des différents termes linéaires de (8.30) montre que  $\partial_x \sim |D|^{1/2}$  et  $\partial_t \sim D^2$ . Admettant que  $\phi$  sature grâce au terme en  $g_0$  on trouve  $\phi \sim D$  de sorte que le membre de gauche et les 3 premiers termes au membre de droite sont d'ordre  $D^3$ , les termes suivants étant d'ordre supérieur (4, 4, et 5). On peut donc tronquer de façon cohérente l'équation de phase au delà du premier terme non-linéaire, obtenant l'équation dite de Kuramoto–Sivashinsky:

$$\partial_t \phi = D \partial_{xx} \phi - K \partial_{xxxx} \phi + g_0 (\partial_x \phi)^2. \quad (8.31)$$

On déduit facilement de l'expression du taux de croissance linéaire  $s(k) = -Dk^2 - Kk^4$  que, pour  $D < 0$ , les modes instables appartiennent à l'intervalle  $[0, k_{\text{coup}}]$ , où  $k_{\text{coup}} = (|D|/K)^{1/2}$  est le vecteur d'onde de coupure, et que  $s(k)$  atteint son maximum  $D^2/2K$  en  $k_{\text{max}} = k_{\text{coup}}/\sqrt{2}$ , confirmant que l'instabilité est de grande longueur d'onde et très lente à se développer.

En milieu fini, il faut comparer la taille du système à la longueur d'onde la plus instable  $\lambda_{\text{max}} = 2\pi/k_{\text{max}}$  et construire le facteur de forme associé. Or quand  $D \rightarrow 0$  par valeurs négatives, l'échelle intrinsèque du problème  $\lambda_{\text{max}}$  diverge de sorte que, près du seuil les effets de confinement ramènent toujours à un problème à petit nombre de degrés de liberté pour la phase. On peut donc étudier ce problème dans le plan de paramètre  $(D, \ell)$  soit à  $\ell$  fixé dans les variables d'origine où  $D$  sert de paramètre de contrôle, soit à  $D < 0$  fixé, la taille du domaine en  $x$  contrôlant la bifurcation. Quelle que soit l'approche choisie, on observe alors le passage de solutions cellulaires stationnaires à des régimes oscillants puis chaotiques par une approche de type “systèmes dynamiques” classique. Augmentant la longueur on entre alors de plein pied en régime de *turbulence de phase*.

En milieu infini, il est loisible d'éliminer tous les coefficients de (8.31) par des changements d'échelle convenables. On arrive alors à

$$\partial_t \phi + \partial_{xx} \phi + \partial_{xxxx} \phi + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 = 0. \quad (8.32)$$

La turbulence de phase en milieu très étendu décrite par cette équation est illustrée sur la Fig. 8.18. On y observe que la phase avance avec une vitesse moyenne non nulle, ce que l'on aurait pu deviner de la forme de (8.32). En effet, l'équation d'évolution pour la moyenne de  $\phi$ ,  $\langle \phi \rangle = (1/\ell) \int_0^\ell \phi(x, t) dx$ , sur un intervalle de longueur  $\ell$  avec conditions aux limites périodiques aux extrémités de l'intervalle, s'écrit simplement  $\frac{d}{dt} \langle \phi \rangle = -(1/\ell) \int_0^\ell \frac{1}{2} (\partial_x \phi(x, t))^2 dx$ . Le taux d'enroulement de la phase moyenne est donc proportionnel à la moyenne quadratique du gradient de la phase instantanée.

L'importance de l'équation de Kuramoto–Sivashinsky déborde largement du cadre présent. De fait, si elle a bien été introduite par Kuramoto à partir de l'équation de Ginzburg–Landau complexe, elle apparaît

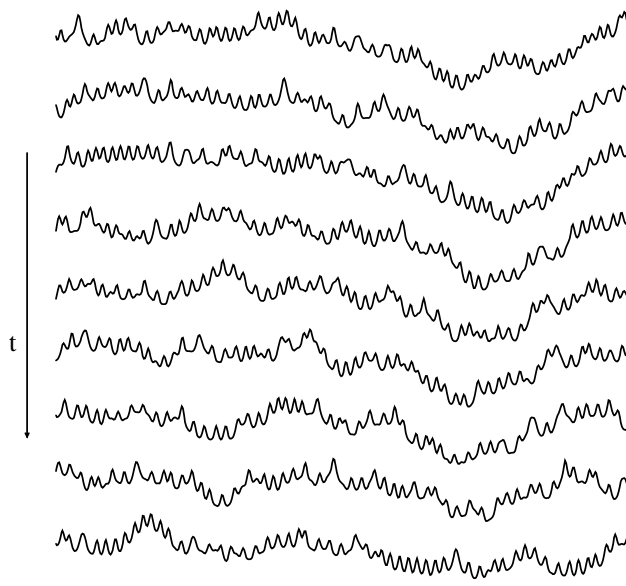


Figure 8.18: Solution turbulente de l'équation KS prise sous la forme (8.32) sur un intervalle de longueur  $\ell = 1024$  avec conditions aux limites périodiques. Seule une partie de longueur 512 est affichée. Le temps  $t$  s'écoule vers le bas, le décalage temporel entre courbes valant  $\Delta t = 12.5$ .

également très naturellement dans la description de la propagation des fronts dans les systèmes de type réaction-diffusion. Ainsi, c'est dans le contexte de la propagation des fronts de flamme que Sivashinsky est parvenu à (8.32). Son expression universelle, qui ne fait intervenir que des propriétés très générales (instabilité à grande longueur d'onde et symétrie dans le changement  $x \mapsto -x$ ), en fait un modèle "microscopique" de choix pour l'étude de ce type de problème. Un nouveau lien s'est ainsi formé entre la théorie de la turbulence de phase et la théorie statistique des phénomènes hors d'équilibre *via* le problème de la propagation des interfaces stochastiques. Ceux-ci sont génériquement gouvernés par l'équation de Kardar–Parisi–Zhang qui s'écrit

$$\partial_t \zeta = \nu \partial_{xx} \zeta - \frac{1}{2} (\partial_x \zeta)^2 + \xi(x, t),$$

autrement dit, une équation de diffusion "normale" ( $\nu > 0$ ) mais de type "Langevin," c'est à dire forcée par un bruit gaussien  $\delta$ -corrélé  $\xi(x, t)$ . Le lien s'établit lorsque l'on concentre son attention sur les propriétés à longue distance ( $k \rightarrow 0$ ) en remarquant que dans l'équation de Kuramoto–Sivashinsky le chaos à "petite" échelle créé par l'instabilité des "grands" vecteurs d'onde d'ordre  $k_{\max}$  peut jouer le rôle du bruit forçant les (très) grandes échelles.

N.B.: On trouve souvent l'équation (8.32) écrite pour le gradient de la phase  $\psi = \partial_x \phi$ , soit

$$\partial_t \psi + \psi \partial_x \psi + \partial_{xx} \psi + \partial_{xxxx} \psi = 0.$$

Pour conclure cette section, notons que la problématique de la turbulence de phase suppose que le module de la solution de l'équation de Ginzburg–Landau est effectivement esclave de la phase. La possibilité d'une "révolte" du module lorsqu'on s'éloigne du seuil de l'instabilité de Benjamin–Feir limite l'intérêt de la poursuite du développement en gradient de la phase au delà du premier ordre non-trivial qui conduit à l'équation de Kuramoto–Sivashinsky. De fait le problème ne semble bien posé qu'à ce niveau car si ses solutions restent régulières pour tout temps, les équations de phase aux ordres supérieurs développent des singularités en temps fini (cf. note 13).

## 8.5 Modélisations spécifiques

La démarche que nous avons suivie jusqu'à présent repose essentiellement sur le déploiement spatial de bifurcations supposées se développer uniformément en milieu infini. Elle fait intervenir de façon cruciale les instabilités secondaires à caractère universel liées aux invariances sous-jacentes à ce déploiement, puis aux éventuelles instabilités tertiaires et au chaos qui peuvent affecter les variables de phase correspondantes. La croissance du chaos spatio-temporel prend alors un tour relativement continu, comme l'indique la divergence des échelles caractéristiques (longueurs de cohérence) au voisinage des seuils d'instabilité successifs. De ce point de vue on peut considérer que l'on a affaire à un scénario de transition *super-critique au sens large*, les bifurcations individuelles étant soit super-critiques au sens strict, soit faiblement sous-critique de sorte que les amplitudes des modes bifurqués restent accessibles par un développement en puissances de l'écart au seuil supposé relativement petit (caractère "local" dans l'espace des phases).

Cette circonstance ne recouvre cependant pas la totalité des situations: l'occurrence de bifurcations à caractère plus "global" est relativement fréquente dans les systèmes à petit nombre de degrés de liberté. Ceci se traduit génériquement par la coexistence d'attracteurs à distance finie les uns des autres dans l'espace des phases et apparaissant ou disparaissant par bifurcation nœud-col ou par crise. Lorsque l'on cherche à étendre au domaine spatio-temporel de type de scénario, on constate que la coexistence dans l'espace des phases peut se traduire par une coexistence dans l'espace physique des régions où le système se trouve localement dans des états correspondant à chacun des attracteurs possibles, domaines séparés par des *parois*. Le fait que cette situation puisse perdurer, avec des parois qui restent très localisées dans l'espace physique, tient à ce que chacun des états possibles est localement stable par hypothèse, et que, loin d'un seuil d'instabilité linéaire, les échelles spatiales et temporelles gardent leur valeur primitive, sans divergence "critique". Si ceci rend la description analytique du problème difficile, voire impraticable, elle légitime par contre le développement de modèles formés de sous-systèmes décrivant la dynamique locale, disposés sur un réseau figurant l'espace physique et couplés les uns aux autres. Pour aller plus loin, il faut donc adopter une démarche beaucoup plus inductive qui introduit certains éléments spécifiques au système étudié, et dont la justification tient finalement surtout aux éclaircissements qu'elle permet d'obtenir sur sa dynamique.

La hiérarchie de modèles que l'on peut concevoir pour des milieux continus, *a priori* bien décrits par des équations aux dérivées partielles, fait ainsi passer des réseaux d'équations différentielles ordinaires aux réseaux d'itérations couplées et aux automates cellulaires, en discrétisant successivement l'espace physique, le temps, puis les variables d'état elles-mêmes.

### 8.5.1 Systèmes sur réseaux

Il est assez fréquent en pratique de rencontrer des systèmes pour lesquels une modélisation en termes de sous-systèmes couplés définis sur des réseaux réguliers apparaît naturelle. Ainsi, le sillage d'un barreau dans un écoulement suffisamment rapide se comporte comme un oscillateur auto-entretenu gouverné par (8.22) dont on peut déterminer les coefficients par un ajustement empirique. Pour une rangée de  $N$  barreaux (cf. figure 8.19), il est dès lors facile de concevoir un modèle "semi-microscopique" en termes d'oscillateurs couplés  $A_j$ , l'indice  $j$  variant de 1 à  $N$ , et, dans un souci de simplicité, de considérer un couplage réduit aux premiers voisins, e.g.  $\propto A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}$ , i.e. une diffusion-dispersion effective de l'état des oscillateurs individuels. La solution uniforme  $A_j \equiv A$ , pour tout  $j$  correspond alors à un régime synchronisé et l'on peut étudier la désynchronisation du système (la limite continue faiblement désynchronisée redonnant l'équation de Ginzburg-Landau complexe étudiée plus haut). Naturellement le choix de la forme du couplage n'est qu'une conjecture que l'on ne sait, en général, pas démontrer et qui n'a de valeur que par les conséquences qu'on en tire.

La modélisation "phénoménologique" peut également porter sur la forme du système dynamique local. Il s'avère par exemple qu'un oscillateur à retard (de la forme  $\frac{d}{dt}A(t) = F(A(t - \tau))$ ) rend compte assez convenablement de l'effet des écoulements de retour qui s'installent entre deux jets rapprochés (figure 8.20a). Pour une rangée de jets en interaction (figure 8.20b), un modèle couplant de tels oscillateurs de façon diffusive

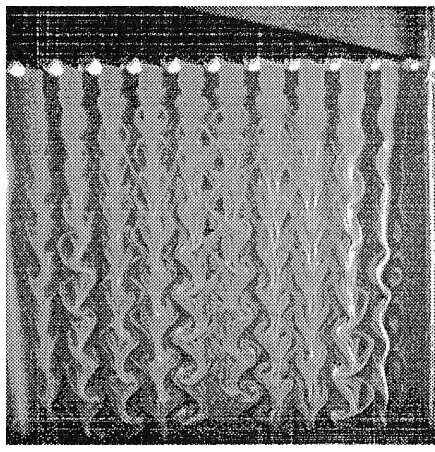


Figure 8.19: Dynamique de l'écoulement derrière une rangée de barreaux (d'après Le Gal et al., 1996).

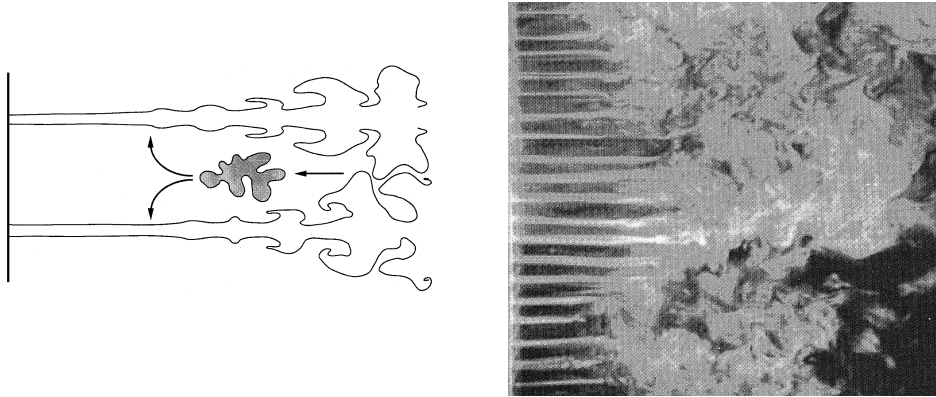


Figure 8.20: À gauche: La recirculation entre deux jets voisins se traduit par un feed-back à retard sur leur état instantané. À droite: Régime d'oscillation à grande échelle d'une rangée de jets pouvant être approché par un modèle couplant des systèmes dynamiques locaux à retard (d'après Villermaux et Hopfinger, 1994).

pourra décrire la dynamique du système sur une plage de paramètres de contrôle assez vaste.

Lorsque la décomposition en sous-unités physiquement bien identifiées n'est pas aussi évidente et que l'on ne connaît pas *a priori* le modèle local le plus approprié, il devient nécessaire de développer des *modèles heuristiques* sans lien "microscopique" avec le système considéré mais présentant, par construction, des propriétés locales analogues. Les réseaux d'itérations couplées (RIC) forment de ce point de vue une classe privilégiée car leur définition reste généralement simple tout en étant très versatile, tandis que leur implémentation numérique requiert peu de moyens, comparativement aux réseaux de systèmes différentiels et, *a fortiori*, aux équations aux dérivées partielles. De forme générale

$$X_{j,k+1} = G_j(X_{j',k}; j' \in \mathcal{V}_j),$$

le réseau détermine la valeur de l'état du système au site  $j$  et au temps  $k+1$  en fonction des états au temps  $k$  des sites appartenant à un voisinage  $\mathcal{V}_j$  du site considéré. Usuellement les définitions des fonctions  $G_j$  et des voisinages  $\mathcal{V}_j$  sont indépendantes de  $j$  mais il est facile de généraliser pour traiter des systèmes particuliers, e.g. spatialement inhomogènes. De façon plus précise, On prend souvent

$$X_{j,k+1} = \sum_{j' \in \mathcal{V}_j} W_{jj'} F(X_{j',k}),$$

et l'on particularise les poids  $W_{jj'}$  pour rendre compte du couplage, par exemple un lissage diffusif.

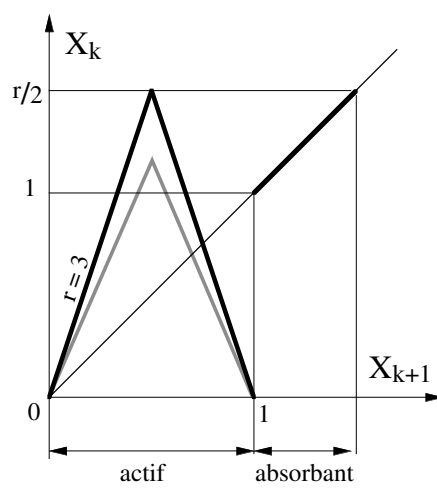


Figure 8.21 : Itération locale du modèle minimal d'IST selon Chaté (1988).

### 8.5.2 Intermittence spatio-temporelle et réseaux d'itérations couplées

Nous illustrerons l'usage des RICs sur l'exemple de l'intermittence spatio-temporelle (IST). Ce scénario fait coexister des domaines fluctuants au sein desquels la dynamique est soit chaotique, soit régulière. La transition s'opère principalement par contamination en frontière de domaine et conduit à la régression ou à l'expansion des domaines chaotiques en fonction de la valeur du paramètre de contrôle. Ce processus a été mis en correspondance avec la percolation dirigée par Pomeau (1987). Cette dernière est un processus stochastique qui rend compte de la contagion dans le contexte des phénomènes critiques cher à la physique statistique et Pomeau a conjecturé l'appartenance de l'IST à sa classe d'universalité (même jeu d'exposants critiques). Le contenu heuristique de la modélisation se retrouve tout entier dans la définition d'un *modèle minimal* (Chaté, 1988). Un choix pour  $F(X)$  permettant une discrimination facile entre dynamique locale régulière (état absorbant) et chaotique (état actif) est illustré sur la figure 8.21. Il décrit un chaos transitoire dont la durée moyenne dépend de la pente  $r$ , cf. la discussion attenante à (6.14), p. 132.

L'IST est alors comprise comme un chaos spatio-temporel persistant fruit du couplage spatial entre systèmes transitoirement chaotiques. La modélisation est complète lorsque l'on a précisé la forme du couplage et la dimension  $d$  de l'espace physique soit, pour  $d = 1$

$$X_{j,k+1} = (1 - g)F(X_{j,k}) + \frac{1}{2}g[F(X_{j-1,k}) + F(X_{j+1,k})],$$

qui dépend de deux paramètres, l'intensité  $g$  du couplage et la pente  $r$  qui rend compte de la dynamique locale. L'effet de celle-ci est illustré sur la figure 8.22. Bien que le problème de l'universalité puisse sembler relativement secondaire dans le cas présent, le type de modélisation adopté a permis d'étudier en détail et de mettre en évidence les limites de la conjecture de Pomeau.

Le comportement observé notamment sur la partie droite de la figure 8.22 fait penser à celui que l'on rencontre avec certains automates cellulaires et on peut chercher à réduire encore plus la modélisation en de tels termes. Ces systèmes, également définis sur un réseau régulier, font intervenir des variables locales et des règles d'évolution discrètes (e.g. booléennes). Le pas à franchir est encore plus grand pour faire le lien avec les milieux continus mais ces systèmes se prêtent bien à des problèmes où des états locaux sont facilement identifiables, par exemple des systèmes activés à plusieurs états (e.g. sain, malade et convalescent). Une application importante où les états locaux sont des "vitesses de particules" et l'évolution gouvernée par des "règles de collision" conduit directement aux gaz sur réseaux dont la dynamique moléculaire permet de modéliser les écoulements à l'échelle *microscopique*, redonnant par moyennage sur une échelle *mésoscopique* les équations de l'hydrodynamique *macroscopique*, concluant la démarche par une sorte de retour à la case "départ"!

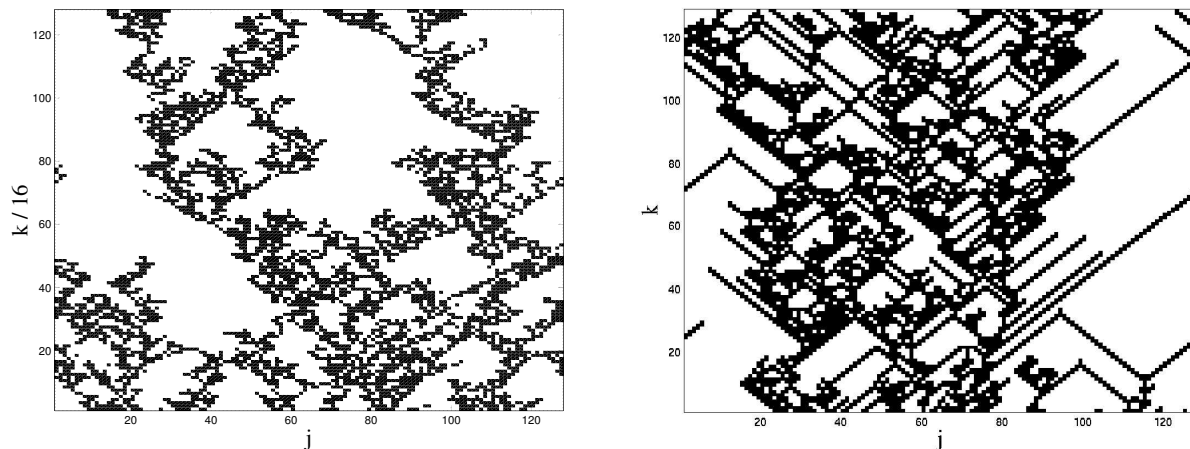


Figure 8.22: Régime d'IST au voisinage du seuil. À gauche: pour  $-r = 2,1$  (transitoire local long), l'aspect est très analogue à celui de la percolation dirigée. À droite: Pour  $r = 3,0$  (transitoire court) les structures localisées propagatives font penser à celles que l'on observe avec certains automates cellulaires à dynamique complexe.

## 8.6 Conclusion

Dans ce bref tour d'horizon, nous avons essayé de montrer la distinction qui s'établit entre chaos temporel et spatio-temporel sur la base des effets de confinement. Il est apparu que le chaos développe une composante spatio-temporelle quand l'échelle "interne" correspondant aux structures de base qui coopèrent (e.g., les cellules de convection) est suffisamment petite devant l'échelle "externe" fixée par la géométrie. On pourrait ainsi faire un parallèle avec la turbulence que l'on considère comme "développée" quand l'échelle d'injection est grande devant l'échelle de dissipation. Ici, l'injection d'énergie peut en particulier se faire par l'intermédiaire d'instabilités secondaires "de phase" à grande échelle, liées aux invariances macroscopiques du système à la limite du milieu infini.

Nous avons également vu qu'à différents stades les moyens d'étude bien maîtrisés en théorie du chaos temporel peuvent encore s'utiliser après réduction aux équations d'enveloppe (e.g. Ginzburg–Landau complexe) puis à la dynamique de phase (typiquement l'équation de Kuramoto–Sivashinsky), ce qui permet parfois d'interpréter le chaos spatio-temporel comme un chaos temporel affectant une variable de phase spatiale. Des éléments originaux liés à l'étude directe de la limite du milieu infini se sont cependant introduits, notamment l'intervention des *défauts* dont la dynamique est un ingrédient important du chaos spatio-temporel, et l'analogie avec la physique statistique des transitions de phases.

Enfin, l'émergence de comportements spatio-temporels complexes peut être abordée par un effort de modélisation à différents niveaux, du plus près de la physique (dérivation de modèles semi-microscopiques) au plus heuristique (construction de modèles sur réseaux ne préservant que les aspects qualitatifs jugés les plus significatifs), effort auquel une bonne connaissance de la dynamique à petit nombre de degrés de liberté contribue encore de façon assez essentielle.



# Bibliographie

## Présentations générales

### Introductions assez élémentaires

- [1] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence* (Hermann, Paris, 1984). [monographie, 353 p.]
- [2] G.L. Baker, J.P. Gollub, *Chaotic Dynamics, an Introduction*, 2nd Edition (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).
- [3] J. Frøyland, *Introduction to Chaos and Coherence*, (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1992).
- [4] W.-H. Steeb, J.A. Louw, *Chaos and Quantum Chaos* (World Scientific, Singapore, 1986) [cours succinct]

### Monographies plus techniques

- [5] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993). [monographie, 485 p.]
- [6] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos, an Introduction* 2ème édition (VCH, Weinheim, 1988). [270 p.]
- [7] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to Physics, Chemistry and Engineering* (Addison-Wesley, Reading, 1994).
- [8] P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, Boston, 1990). Version française (épuisé): *Structures Dissipatives, Chaos et Turbulence* (Aléa Saclay, 1991)
- [9] W.-H. Steeb, *A Handbook of Terms used in Chaos and Quantum Chaos* (BI, Mannheim, 1991). [dictionnaire, 181 p.]

### Collections d'articles et monographies collectives

- [10] P. Cvitanović, Ed. *Universality in Chaos* 2ème édition (Adam Hilger, Bristol, 1989). [recueil de tirés à parts, 631 p.]
- [11] Hao Bai-Lin, Ed. *Chaos II* (World Scientific, Singapour, 1990). [recueil de tirés à parts, 737 p.]
- [12] P. Bergé, Ed. *Le Chaos, Théorie et expériences* (Eyrolles, Paris, 1988). [articles par Bergé & Dubois (convection); P. Coulet (cascade sous-harmonique); J.M. Gambodo & Ch. Tresser (applications du cercle); A. Arnéodo & O. Thual (formes normales, théorie et expériences); Ch. Vidal (chimie); B. Atten & B. Malraison (caractérisation expérimentale du chaos); P. Manneville (systèmes étendus)].
- [13] W. Szemplinska-Stupnicka, H. Troger, eds. *Engineering applications of dynamics of chaos* (Springer-Verlag, Wien, 1991) [entre cours et monographie].
- [14] Hao Bai-lin, ed., *Directions in Chaos* (World Scientific, Singapore) [plusieurs volumes].

## Livres “de vulgarisation”

- [15] N. Hall, Ed. *The NewScientist guide to Chaos* (Penguin Books, 1992) [nombreuses illustrations, parfois assez technique].
- [16] A. Dahan Dalmenico, J.-L. Chabert, K. Chemla, éd.s., *Chaos et Déterminisme*, Collection Points Sciences (Seuil, Paris, 1992) [orientation épistémologique].
- [17] I. Ekeland, *Le Calcul, l’Imprévu* Collection Points Sciences (Seuil, Paris, 1984) [orientation mathématique].
- [18] D. Ruelle, *Hasard et Chaos* Collection Points (Ed. Odile Jacob, Paris, 1991).
- [19] R. Thom, *Prédire n’est pas expliquer* Collection Champs (Fammarion, Paris, 1993) [appendice-lexique mathématique par A. Chenciner].
- [20] P. Bergé, Y. Pomeau, M. Dubois-Gance, *Des rythmes au chaos* (Editions Odile Jacob, Paris, 1994).

## Systèmes dynamiques et bifurcations

- [21] R.H. Abraham, C.D. Shaw, *Dynamics: the geometry of behavior* (Aerial Press, Santa Cruz, 1984). [plusieurs tomes, mise en image des résultats, des plus simples aux plus complexes]
- [22] P.G. Drazin, *Nonlinear Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992). [livre de cours, mathématiques, 317 p.]
- [23] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1996). [cours, maîtrise et +, 603 p.]
- [24] J.D. Crawford, “Introduction to bifurcation theory” *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 991–1037.
- [25] J. Guckenheimer, Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1983). [monographie mathématique plutôt avancée, 459 p.]
- [26] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, 1989).
- [27] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications* (Pitman, London, 1978).
- [28] F.C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics, an Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York, 1992) [réédition complétée de *Chaotic Vibrations, an Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York, 1987).]

## Chaos et scénarios de transition, Ch. 6 et 7

- [29] M. J. Feigenbaum, “Universal behavior in nonlinear systems,” dans [10] p. 49.
- [30] J.-P. Eckmann, “Roads to turbulence in dissipative dynamical systems,” dans [10], p. 94.
- [31] E.N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” dans [10] p.367.
- [32] L.D. Landau, “On the problem of turbulence,” dans [11] p. 115.
- [33] D. Ruelle, F. Takens, “On the nature of turbulence,” dans [11] p. 120.
- [34] M. Hénon, “A two-dimensional mapping with a strange attractor,” dans [11], p. 235.

- [35] P. Bak, T. Bohr, M.H. Jensen, “Circle maps, mode-locking, and chaos,” dans [14] Vol. 2 (1988).
- [36] J.P. Eckmann, D. Ruelle, “Ergodic theory of chaos and strange attractors” Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 617–656.

## Fractals et multifractals

- [37] B.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, (Freeman, San Francisco, 1982).
- [38] A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J.-F. Muzy, *Ondelettes, multifractals et turbulences* (Diderot Edit. Paris, 1995).
- [39] T. Bohr, T. Tél, “The thermodynamics of fractals,” dans [14] Vol. 2 (1988).

## Caractérisation du chaos et applications

- [40] H.D.I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1996).
- [41] H. Kantz, Th. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cammbridge Nonlinear Science Series 7 (Cambridge University Press, 1997)
- [42] A.S. Weigend, N.A. Gershenfeld, eds., *Time series prediction: forecasting the future and understanding the past* (Addison-Wesley, 1993) [comptes rendus d’une “compétition” de prédiction].
- [43] (a) N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw, “Geometry from a time series,” Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 712–716. (b) F. Takens, “Detecting strange attractors in turbulence,” Lect. Notes Math. **898** (1981) 366.
- [44] D.S. Broomhead, G.P. King, “Extracting qualitative dynamics from experimental data,” Physica D **20** (1986) 217–236.
- [45] R. Vautard, P. Yiou, M. Ghil, “Singular spectrum analysis: a toolkit for short, noisy chaotic signals,” Physica D **58** (1992) 95–126.
- [46] E. Roubine, *Introduction à la théorie de la communication. Tome I: Signaux non aléatoires* (Masson, 1979).
- [47] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, “Using small perturbations to control chaos,” Nature **363** (1993) 411–417.
- [48] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, “Communicating with chaos,” Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3031. S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, A. Mark, “Experimental control of chaos for communication,” Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 1781–1784.
- [49] K. Pyragas, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” Phys. Lett. A **170** 421–428. W. Just *et al.*, “Mechanism of time-delayed feedback control,” Phys. Rev. Lett. **78** 203–206.

## Systèmes spatialement étendus, Ch. 8

- [50] M.C. Cross, P.C. Hohenberg, “Pattern formation outside equilibrium”, Rev. Mod. Phys. **65** (1993) 851–1112.
- [51] J.P. Crutchfield, K.Kaneko, “Phenomenology of spatio-temporal chaos,” in [14] Vol. 1 (1987).

- [52] K. Kaneko, ed., *Theory and application of coupled map lattices* (Wiley, Chichester, 1993).
- [53] S. Wolfram, ed. *Theory and application of cellular automata* (World Scientific, 1986).
- [54] P.E. Cladis, P. Palfy-Muhoray, eds. *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems* (Addison-Wesley, Reading, 1995); a) W. van Saarloos, “The complex Ginzburg–Landau equation for beginners,” p. 19; b) H. Chaté, “Disordered regimes of the one-dimensional complex Ginzburg–Landau equation,” p. 33.

## Applications diverses

- [55] H.L. Swinney, J.P. Gollub, eds., *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, 2nd edition (Springer-Verlag, 1985).
- [56] P.W. Anderson, K.J. Arrow, D. Pines, *The economy as an evolving complex system*, SFI Studies in the Sciences of Complexity (Addison-Wesley, Reading, 1988).
- [57] A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

# Index

- accrochage de fréquence, 121, 128
- application
  - de Lorenz, 9, 10
- application au temps  $\tau$ , 15, 26, 137
- attracteur, 36, 47
  - étrange, 9, 13, 42, 110, 113, 117–119
  - de Curry–Yorke, 111
  - de Lorenz, 9
  - de Smale, 119
- automate cellulaire, 185
- Bendixon (critère), 82
- Benjamin–Feir (instabilité), 180, 182–184
- bifurcation, 13, 21, 39, 47
  - de Hopf, 7, 83, 84, 175, 178
  - fourche, 4, 9, 77, 175, 176, 181
  - globale, 39, 48
  - imparfaite, 77
  - locale, 39, 48
  - nœud-col, 41
  - sous-critique (inverse), 5, 78, 83
  - sous-harmonique, 11
  - super-critique (normale), 5, 9, 77, 83
  - trans-critique, 76, 78
- calcul variationnel, 20, 43, 50, 152
- capacité (cf. dimension fractale), 143
- catastrophe, 72, 79
  - élémentaire, 77, 79
  - fronce, 77, 80
  - pli, 76
  - potentiel, 77
- champ de vecteurs, 3
- chaos, 42
- chaos spatio-temporel, 165, 174, 175, 179, 181, 185, 187, 188
- chaos temporel, 137, 165, 170, 171, 188
- codimension, 82, 83, 119, 132, 141
- confiné/étendu (système), 168, 169, 178
- confinement, 111, 165, 166, 177, 183, 188
- connexion–col, 82
- coordonnée généralisée, 42
- cycle limite, 7, 13, 41, 81, 82, 84
- décomposition singulière, 153, 154
- déterminisme, 9, 14, 15, 81, 112, 120
- ddémodulation, 156
- degré de liberté, 3, 14
  - effectif, 3
- demodulation, 155
- diagramme de bifurcation, 4, 11, 40
- dimension
  - d’information, 144
  - d’un système, 9, 13, 14, 16, 42, 64
  - de corrélation, 144, 157, 158
  - de Hausdorff, 143
  - de l’espace physique, 166, 168
  - de Lyapunov, 145
  - de plongement, 147, 149, 150
  - de similarité, 142
  - effective, 13, 146, 149, 169
  - finie/infinie, 15, 54, 149
  - fractale, 141, 143, 145
  - fractale généralisée (Reyni), 144
  - ponctuelle, 144
  - topologique, 141–143, 149
- doublement de période, 11
- dynamique qualitative, 26
- dynamique tangente, 24
- élimination adiabatique, 52–54, 83, 182
- élimination des modes esclaves, 9, 13, 72, 176
- élimination des termes non-résonnants, 63, 65, 69, 70
- élimination des termes résonnants, 87–89, 92, 93, 97, 98, 100
- enchevêtrement homocline, 113, 115–117
- ensemble limite, 36, 47
  - exceptionnel, 37
  - hyperbolique, 39
- entrant/sortant, 36, 37
- espace de configuration, 42
- espace des phases, 3, 14, 44
- état de base, 1, 21, 47
- état lié/trajectoire passante, 45
- existence et unicité, 15

exposant critique, 80  
 exposant de Lyapunov, 134–137, 140, 142, 145, 152, 156, 157  
 faux voisins, 151  
 flot de gradient, 19, 79  
 fonction de Lyapunov, 22–24, 176  
 fonctions implicites (théorème des), 73–75  
 forme normale, 75  
     de Jordan, 30, 56, 58–60, 62, 69  
     de Jordan–Arnol'd, 62, 69  
     non-linéaire, 13, 62, 67, 69, 70  
 Ginzburg–Landau (équation de), 178, 180–185, 188  
 hamiltonien, 44  
 hyperbolique/non-hyperbolique, 82  
 imprédictibilité, 110  
 information mutuelle, 148  
 intermittence  
     temporelle, 11, 12  
 intermittence spatio-temporelle, 182, 187  
 Kardar–Parisi–Zang (équation de), 184  
 Kuramoto–Sivashinsky (équation de), 182–184, 188  
 lagrangien, 43, 44  
 liaison, 42  
 longueur de cohérence, 167, 169, 177, 178, 185  
 Lorenz  
     application de, 9, 10  
     attracteur de, 9  
     modèle de, 8, 9, 11, 13  
 méthode de l'énergie, 22, 23  
 mode  
     instable, 24, 26  
     marginal (neutre), 25, 26, 32, 53–55, 69, 72, 82, 100–102  
     oscillant, 25  
     stable, 24, 26  
     stationnaire, 25  
 mode esclave, 182, 184  
 mode maître/esclave, 9, 69, 105  
 mode propre, 24, 26, 28, 49–51, 168, 175  
 moment conjugué, 43–45  
 Nozaki–Bekki (défaut de phase), 182, 183  
 oscillateur  
     auto-entretenu, 5, 6  
     de Duffing, 90, 92  
     de Van der Pol, 6, 91, 92  
     oscillateur de Duffing, 86  
     paramètre d'ordre, 20, 75, 80  
     paramètre de contrôle, 2, 4, 39  
     partie attractive, 36  
     pendule simple, 45  
     percolation dirigée, 187, 188  
     perturbation  
         régulière, 73  
     plan de phase, 7  
     Poincaré  
         application de, 81  
     Poincaré–Bendixon (théorème), 81, 114  
     Poincaré–Lindstedt (méthode), 88, 91  
     point errant/non-errant, 36  
     point fixe, 4, 13, 25, 26, 72  
         centre (elliptique), 32, 39, 47  
         col, 39  
         col (selle), 29, 33  
         foyer, 39  
         foyer (spiral), 32, 47  
         nœud, 29, 32, 33, 39  
         nœud impropre, 31, 47  
     point homocline, 115–117  
     point récurrent, 36  
     point régulier/singulier, 73  
     point tournant, 73–75, 77, 78  
     points homoclines, 114  
     prédictibilité, 9  
     premier harmonique (approximation), 7  
     premier retour, 10, 81  
     principe de moindre action, 43  
     problème de Cauchy, 15  
     puits/source, 32  
     quasi-périodicité, 121, 128  
     régime transitoire/permanent, 21, 36  
     répulseur, 37  
     réseau d'itérations couplées, 185–187  
     résonance  
         linéaire, 56, 60  
         non-linéaire, 65–70  
         ordre, 69  
     règle (plateau) de Maxwell, 78–80  
     séparatrice, 40, 46  
     scénario, 11, 13

- de Landau, 110
- de Ruelle–Takens, 110, 111, 121
- intermittent, 11, 12, 131
- sous-harmonique, 11, 128
- section de Poincaré, 10, 81, 95, 105, 111, 115, 120, 128, 137, 142, 152, 159, 160
- sensibilité aux conditions initiales, 9, 42
- stabilité
  - asymptotique, 22
  - conditionnelle, 23
  - globale, 22, 23
  - linéaire, 23, 47
  - locale, 22
  - monotone, 23
  - structurelle, 39, 47, 48, 64, 69, 82
  - uniforme, 22
- sysstème
  - à temps discret, 137
- système
  - à retard, 15, 163
  - à temps continu, 11, 13, 14, 21
  - à temps discret, 10, 13, 14, 25, 26, 95, 100, 114, 137
  - autonome/forcé, 16, 42, 94, 95, 114, 115
  - conservatif, 17, 47
- système potentiel, 5, 19, 20, 22, 29, 177
- système quasi-bi/unidimensionnel, 169
- système sur réseau, 165, 185–187
  
- taux de croissance, 25, 51
- terme séculaire, 31, 59, 60, 87, 88
- théorie de Landau, 75, 79
- trajectoire homo/hétérocline, 35, 39, 46, 82, 114–116
- transformation de Hilbert, 156
- transformation de Legendre, 43, 44, 145
- transition de phase, 75, 78, 79, 188
- turbulence
  - développée, 188
  - de défauts, 182
  - de phase, 182–184
  - faible, 172
  
- variété
  - centrale, 54
  - instable, 34
  - stable, 34, 37
  
- zone absorbante, 36