



HAL
open science

Transition vers le chaos

Vincent Croquette

► **To cite this version:**

Vincent Croquette. Transition vers le chaos. 1 - Systèmes dynamiques et introduction au chaos² - Notion de bifurcation, analogie³ - Transition vers le chaos dans les systèmes hamiltoniens⁴ - Transition vers le chaos dans les systèmes dissipatifs⁵ - Instabilités hydrodynamiques, 2006. cel-00092949

HAL Id: cel-00092949

<https://cel.hal.science/cel-00092949>

Submitted on 12 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre I

Systèmes Dynamiques et Introduction au Chaos

Table des matières

I	Systèmes Dynamiques et Introduction au Chaos	I-1
I.1	Définitions	I-1
I.1.1	Représentation d'un système physique	I-1
I.1.2	Espace des phases, degré de liberté	I-2
I.1.3	Points fixes, sous espaces invariants	I-2
I.2	Systèmes dynamiques linéaires	I-2
I.2.1	Circuit à deux condensateurs	I-2
I.2.2	Bille au sommet d'une colline	I-3
I.2.3	Bille au fond d'une vallée	I-3
I.2.4	Les différents types de points fixes	I-4
I.3	Systèmes dissipatifs et hamiltoniens	I-4
I.3.1	Conservation des aires	I-4
I.3.2	Systèmes dissipatifs	I-5
I.4	Systèmes hamiltoniens non linéaires	I-5
I.4.1	Bille dans un potentiel à deux puits	I-5
I.4.2	Le pendule pesant	I-6
I.5	Intégrabilité des systèmes hamiltoniens	I-7
I.5.1	Système de deux oscillateurs harmoniques couplés	I-7
I.5.2	Problème à deux corps, mouvement dans un champ de force central	I-7
I.5.3	Rôle des invariants, systèmes séparables	I-8
I.6	Existence et caractérisation du chaos	I-9
I.6.1	Problème à deux corps, champ de force non-central	I-9
I.6.2	Caractérisation du Chaos : Spectre de puissance	I-9

I.6.3	Caractérisation du chaos : sensibilité aux conditions initiales	I-10
-------	---	------

Résumé

Le but de ce chapitre consiste à déterminer les conditions requises pour qu'un système physique possède un comportement chaotique. Nous verrons qu'il est nécessaire que celui-ci soit non-linéaire et qu'il ait au moins trois degrés de liberté. L'étude rigoureuse de ce type de système étant en général délicate, nous nous limiterons à une étude qualitative purement graphique. Pour cela, nous introduisons l'espace des phases, dont nous discutons les éléments remarquables.

Quelques définitions préliminaires permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. Elles sont illustrées par des exemples simples dont chacun permet de présenter un aspect de l'espace des phases.

Nous partirons de systèmes réguliers connus pour aller vers des systèmes chaotiques simples. Nous abordons les systèmes linéaires à deux degrés de liberté, les systèmes non linéaires, ceux qui possèdent quatre degrés de liberté et enfin ceux qui ont un comportement chaotique. Nous dégageons ainsi les conditions minimales nécessaires pour qu'un système présente un comportement chaotique.

Finalement, nous formulons les critères permettant de caractériser les mouvements chaotiques et les mouvements réguliers.

I.1 Définitions

I.1.1 Représentation d'un système physique

Pour décrire l'évolution dynamique d'un système physique, il est souvent commode d'en faire une représentation graphique. A chaque état du système est associé un vecteur \vec{X} . Suivre la dynamique du système correspond alors à observer l'évolution du vecteur \vec{X}

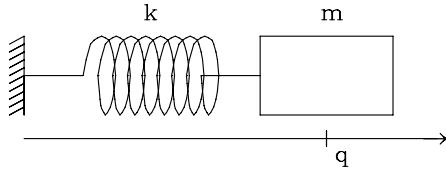


Figure I.1: L'oscillateur harmonique obtenu avec une masse m attaché à un ressort k .

dans un espace vectoriel \mathcal{E} appelé **espace des phases**. Cette évolution est décrite par un ensemble de n équations différentielles munies de conditions initiales :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}) \quad (+c. i. : \vec{X}_{(t=0)}) \quad (I.1)$$

L'application qui fait passer d'un vecteur de \mathcal{E} à un autre au cours du temps s'appelle un *flot*.

I.1.2 Espace des phases, degré de liberté

Ce type d'équation vectorielle, qui décrit l'évolution déterministe d'un processus physique, est étudié par la théorie des équations différentielles ordinaires. L'espace vectoriel \mathcal{E} est caractérisé par sa dimension n . Elle constitue aussi le nombre de *degrés de liberté* du système dynamique considéré.

Cette notion d'espace des phases fut d'abord introduite en mécanique [1], où nous trouvons notre premier exemple de système dynamique : l'oscillateur harmonique à une dimension. Sa position est déterminée par la variable q . Pour connaître complètement son état dynamique, il faut préciser son impulsion p . L'espace des phases possède ainsi deux dimensions; selon la définition que nous avons donnée, l'oscillateur harmonique possède deux degrés de liberté. Cette définition est différente de celle traditionnellement donnée en mécanique où un degré de liberté est associé à chaque couple (q, p) [1].

En général, la fonction F est différentiable un nombre suffisant de fois et peut être non linéaire. Dans le cas de l'oscillateur harmonique (une masse solidaire d'un ressort voir Fig.I.1) la fonction F prend la forme ¹:

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p / m \\ \partial p / \partial t = -kq \end{cases} \quad (I.2)$$

¹La formulation habituelle est donnée par une équation avec une dérivée seconde : $m\ddot{q} + kq = 0$. Nous lui nous préférons la forme de deux équations aux dérivées premières qui met en valeur chacune des variables de l'espace des phases

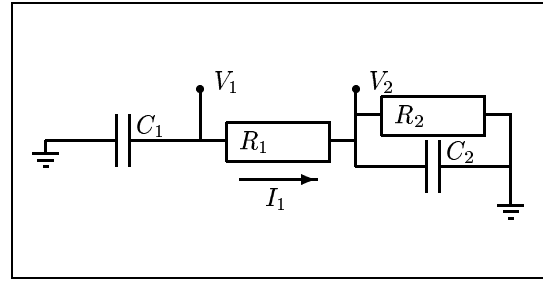


Figure I.2: Circuit électronique à deux degrés de liberté.

I.1.3 Points fixes, sous espaces invariants

Le comportement d'un système dynamique s'étudie en caractérisant ses points d'équilibre, également appelés *points fixes* :

$$\frac{d\vec{X}_0}{dt} = \vec{0} = F(\vec{X}_0) \quad (I.3)$$

Leur stabilité est étudiée en approximant F au voisinage de \vec{X}_0 par une application linéaire.

On se ramène donc à l'étude d'un système linéaire :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \mathcal{L}_{X_0}(\vec{X}) \quad (I.4)$$

où \mathcal{L} est l'application tangente à F en \vec{X}_0 . Valeurs et vecteurs propres de \mathcal{L} déterminent l'évolution du système dans le voisinage de \vec{X}_0 .

I.2 Systèmes dynamiques linéaires

La notion de système dynamique est très générale: elle peut s'appliquer à des systèmes d'origine mécanique, électronique, chimique, thermique, etc. Pour éclairer les définitions que nous venons de donner, et en particulier pour expliciter les différents types de points fixes, nous nous proposons de les illustrer à l'aide de quelques exemples simples tirés de la mécanique et de l'électronique.

I.2.1 Circuit à deux condensateurs

Considérons le circuit de la figure I.2 qui contient deux résistances et deux condensateurs. La connaissance des tensions V_1 et V_2 à un instant donné, permet de prédire complètement l'évolution du circuit.

En utilisant les relations : $V_1 = RI_1 + V_2$, $I_1 = V_2/R + CdV_2/dt = -CdV_1/dt$, il est facile de montrer que les équations régissant ce système dynamique sont :

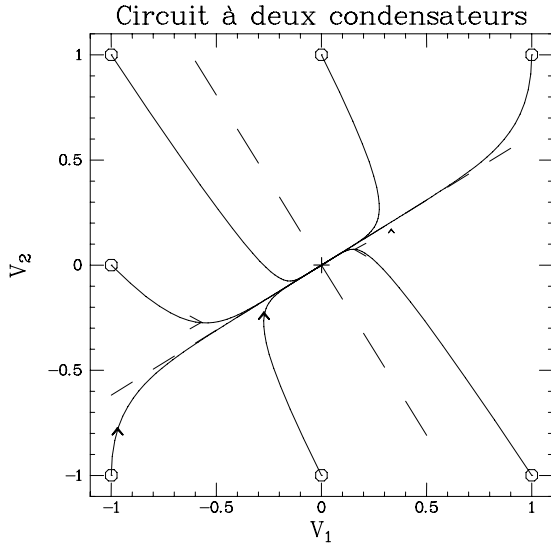


Figure I.3: Trajectoires issues de différentes conditions initiales dans l'espace des phases du circuit à deux condensateurs. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine, rapidement dans la direction de \vec{V}_b , plus lentement suivant \vec{V}_a .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{I.5})$$

La solution générale s'écrit : $\vec{V}(t) = c_a e^{(\lambda_a t/RC)} \vec{V}_a + c_b e^{(\lambda_b t/RC)} \vec{V}_b$ où λ_a (resp. λ_b) et \vec{V}_a (resp. \vec{V}_b) sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, et c_a et c_b sont obtenus à l'aide des conditions initiales $V_1(t=0)$ et $V_2(t=0)$. Le point fixe est évidemment $(V_1 = 0, V_2 = 0)$.

Calculons les vecteurs propres et les valeurs propres : $\det.(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. D'où

- $\lambda_a = (-3 + \sqrt{5})/2$, avec : $V_a = \begin{pmatrix} 1 \\ (\sqrt{5} - 1)/2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_b = (-3 - \sqrt{5})/2$, avec : $V_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 + \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}$

On peut représenter les trajectoires dans le plan (V_1, V_2) comme sur la figure I.3.

Puisque les deux valeurs propres sont négatives, les directions propres ramènent la trajectoire à l'origine. Comme la valeur propre λ_b est la plus grande en valeur absolue, partant de toute condition initiale, le point représentatif du système est rapidement ramené vers le sous espace invariant associé à \vec{V}_a pour rejoindre plus lentement l'origine parallèlement à celui-ci.

De façon générale, quand toutes les valeurs propres au voisinage d'un point fixe sont négatives, comme dans cet exemple, ce point fixe est appelé **nœud stable**.

I.2.2 Bille au sommet d'une colline

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au sommet d'une colline parabolique dans un espace à une dimension. C'est un système à deux degrés de liberté : la position q et l'impulsion p , régi par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = kq \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

Le point fixe est l'origine ($q = 0, p = 0$). Sa stabilité est obtenue en cherchant les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \pm \sqrt{k/m}$ et les vecteurs propres associés : $\vec{V}_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{k/m} \end{pmatrix}$. L'espace des phases est représenté sur la figure I.4, une trajectoire correspondant à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_+ \exp(\sqrt{k/m} t) + \vec{V}_- \exp(-\sqrt{k/m} t) \quad (\text{I.8})$$

Lorsque les valeurs propres vérifient $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, on qualifie le point fixe de **point col** ou de **point selle** (*saddle node*).

Comme on pouvait s'y attendre, le point d'équilibre est instable puisqu'il existe une valeur propre positive, c'est-à-dire une direction de l'espace des phases suivant laquelle une trajectoire s'écarte de l'origine. La trajectoire qui s'en rapproche correspond au cas où la bille est lancée loin du sommet de la colline avec une vitesse juste suffisante pour l'atteindre. Les autres trajectoires correspondent à des cas intermédiaires : soit la vitesse est trop grande et la bille passe au dessus de la colline pour redescendre de l'autre coté, soit elle est trop faible et la bille rebrousse chemin avant d'arriver au sommet.

I.2.3 Bille au fond d'une vallée

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au fond d'une vallée parabolique. Ce système possède deux degrés de liberté associés à la position q et l'impulsion p : il s'agit de l'oscillateur harmonique, régi par les équations I.2.

Le point fixe est toujours le point ($q = 0, p = 0$). Une fois de plus recherchons les valeurs propres de la matrice pour étudier la stabilité :

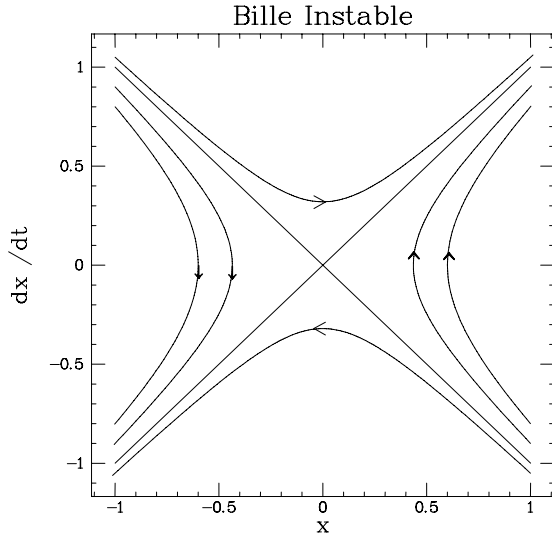


Figure I.4: Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au sommet d'une colline. Les trajectoires illustrent un point col. Elles s'échappent toutes à l'infini, sauf celles qui démarrent exactement sur la direction contractante et conduisent précisément la bille au sommet de la colline. Les hyperboles telle que $x > 0$ correspondent aux cas où la vitesse initiale de la bille est trop faible pour passer au dessus de la colline.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$ et avec les vecteurs propres : $\vec{V}_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{km} \end{pmatrix}$. Une trajectoire correspond à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_+ \exp(i\sqrt{k/m}t + \phi) + \vec{V}_- \exp(-i\sqrt{k/m}t + \phi) \quad (\text{I.10})$$

L'espace des phases est représenté sur la figure I.5. Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement de la bille est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude (le "rayon" de l'ellipse) et donnée par les valeurs propres $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, le point fixe est appelé *foyer* ou *centre*.

I.2.4 Les différents types de points fixes

Pour des valeurs propres réelles, le point fixe est un *nœud stable* si elles sont toutes négatives, un *point col* ou encore un *point selle* si certaines sont positives.

Pour des valeurs propres complexes, le point fixe est un **foyer** ou **centre**.

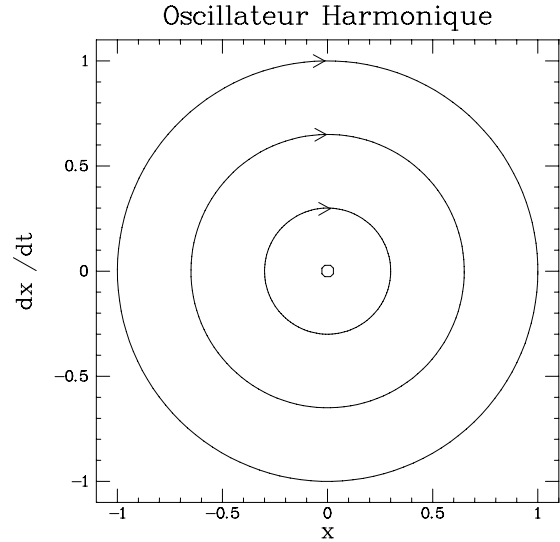


Figure I.5: Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au fond d'une vallée ou d'un oscillateur harmonique. Ces trajectoires sont décrites dans le sens des aiguilles d'une montre. Le point invariant est un centre.

I.3 Systèmes dissipatifs et hamiltoniens

Les trois exemples que ne nous venons de discuter présentent des différences importantes qui permettent de distinguer certaines classes de systèmes. Le circuit aux deux condensateurs relaxe toujours vers l'origine quelles que soient les conditions initiales choisies. L'énergie électrique accumulée dans les condensateurs est dissipée par les résistances au cours du temps. Par contre les deux exemples mécaniques conservent l'énergie du système. Au cours des mouvements de la bille, on assiste seulement à des transferts entre énergie potentielle et énergie cinétique. Evidemment, ceci n'est vrai qu'en l'absence de frottements.

On appelle *systèmes hamiltoniens* ou *systèmes conservatifs* les systèmes qui conservent l'énergie totale et *systèmes dissipatifs* les autres.

I.3.1 Conservation des aires

L'espace des phases des systèmes hamiltoniens présente des caractéristiques remarquables. D'une part, deux trajectoires distinctes n'y ont aucun point d'intersection. C'est une conséquence immédiate du caractère déterministe du système : puisque des conditions initiales identiques conduisent à des trajectoires confondues et comme tout point de l'espace des phases peut être choisi comme une condition initiale, un point commun implique l'identité des deux trajectoires. D'autre

part, les systèmes hamiltoniens conservent les aires dans l'espace des phases, ce qui constitue le théorème de LIOUVILLE. Considérons un volume Ω à l'instant t_0 , et suivons son évolution au cours du temps. Il va se déformer mais son volume va rester constant. Ceci résulte de la nullité de la divergence de $d\vec{X}/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right) dv \\ &= \int_{\Omega(t)} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dv \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

où v est le volume de l'espace des phases du domaine $\Omega(t)$ transporté par le flot et H est l'Hamiltonien du système.

Il en résulte une propriété intéressante des valeurs propres d'un point fixe d'un système hamiltonien : leur somme a toujours une partie réelle nulle. Ainsi la bille en haut de la colline tombe avec une valeur propre $+\sqrt{k/m}$ mais il existe une trajectoire ramenant la bille au sommet avec la valeur propre opposée.

I.3.2 Systèmes dissipatifs

Une façon simple d'obtenir un système dissipatif consiste à prendre un système hamiltonien et à lui ajouter des frottements. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'équation du mouvement devient :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = -kq - \gamma p \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Il est facile de voir que le terme de frottement γ induit l'apparition d'une partie réelle dans les valeurs propres λ_{\pm} qui transforme les trajectoires elliptiques du cas sans frottements, en des spirales convergeant vers l'origine. On pourra de la même façon étudier l'influence du terme γ sur un point col.

Les systèmes dissipatifs peuvent aussi correspondre à une augmentation de l'énergie totale du système ; ceci se modélise par un γ négatif.

I.4 Systèmes hamiltoniens non linéaires

Les systèmes hamiltoniens ayant fait l'objet d'études intensives [2, 3], il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. Comme nous le verrons, le caractère *non-linéaire* constitue l'une de ces conditions essentielles. Cependant tous les systèmes non-linéaires ne sont pas chaotiques, comme nous l'illustrons avec les deux exemples qui suivent.

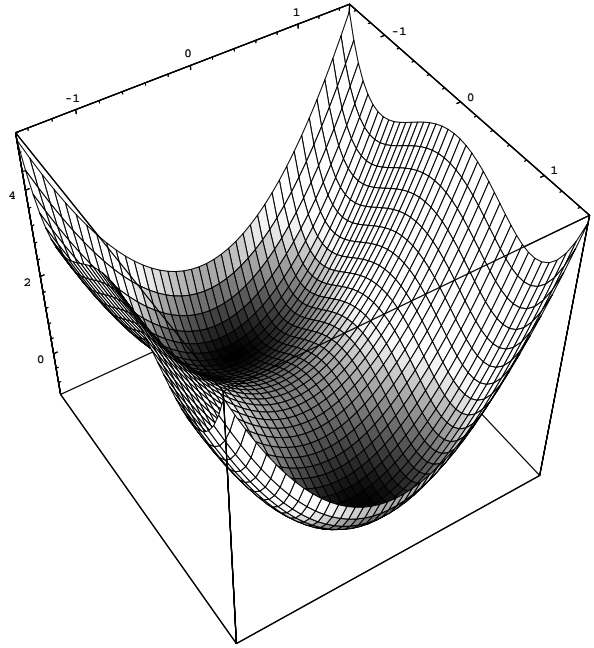


Figure I.6: Représentation de la surface d'énergie totale en fonction de la position et de la vitesse de la bille dans un potentiel à deux puits

I.4.1 Bille dans un potentiel à deux puits

Un système est *non-linéaire* dès que les équations qui le gouvernent ne sont plus des fonctions linéaires de \vec{X} .

C'est le cas, par exemple, si la force qui agit sur une bille est du type : $\partial p / \partial t = q - q^3$. Cette situation correspond à une bille placée dans un potentiel à deux puits, situés en $q = \pm 1$. Le système possède toujours deux degrés de liberté et est décrit par :

$$\begin{cases} \partial q / \partial t = p/m \\ \partial p / \partial t = q - q^3 \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Les solutions de l'équation I.13 sont beaucoup moins faciles à déterminer que celles d'un système linéaire. Nous verrons par la suite qu'il est même parfois impossible de trouver les solutions de certains systèmes non-linéaires. A ce stade, nous ferons une analyse qualitative des trajectoires dans l'espace des phases. Pour ce faire nous commençons par en déterminer les points fixes, qui sont au nombre de trois :

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Autour de chacun d'eux, nous pouvons maintenant linéariser les équations I.13. Autour de l'origine, nous retrouvons les équations I.6 et donc prédire que ce point fixe est un point col. Pour les deux points fixes restants : A_{-1} et A_1 on constate que la linéarisation conduit à un

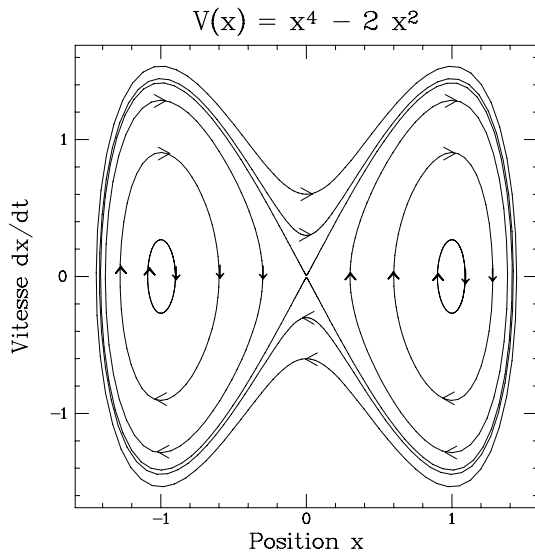


Figure I.7: Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille dans un potentiel à deux puits. Ces trajectoires correspondent aussi aux lignes de niveau de la surface décrite sur la figure I.6.

système d'équations du type I.2. Ces points fixes sont donc des centres et les trajectoires voisines sont des ellipses. Pour obtenir les trajectoires du système dans tout l'espace des phases, on est tenté de prolonger à la main le motif formé par le point col entouré de deux centres.

En fait, il existe une façon rigoureuse de procéder. Nous avons vu que les systèmes hamiltoniens conservent l'énergie au cours du temps. Construisons donc un graphique à trois dimensions dont deux sont celles de l'espace des phases et la troisième l'énergie totale du système. Ainsi nous obtenons une surface \mathcal{S} avec un point col à l'origine séparant deux bassins autour des autres points fixes. Puisque l'énergie est invariante, une trajectoire du mouvement correspond à une coupe de la surface \mathcal{S} selon une énergie constante. Les trajectoires du système sont équivalentes aux courbes de niveau de la surface \mathcal{S} , reproduites sur la figure I.7.

La méthode que nous venons de décrire est tout à fait générale : elle ne dépend pas du potentiel non-linéaire et elle peut s'appliquer à tous les systèmes hamiltoniens ayant deux degrés de liberté. Dans la mesure où la surface \mathcal{S} ne présente pas de pathologie particulière, nous obtiendrons soit des trajectoires fermées, soit des trajectoires qui partent à l'infini. Par contre, cette méthode ne nous permet pas de déterminer les dynamiques de parcours de ces trajectoires. S'il est clair que les trajectoires fermées correspondent à des mouvements périodiques, il n'est pas possible d'en déterminer la fréquence avec le seul raisonnement que nous venons de faire. Près des points fixes de type centre, la fréquence sera celle des oscilla-

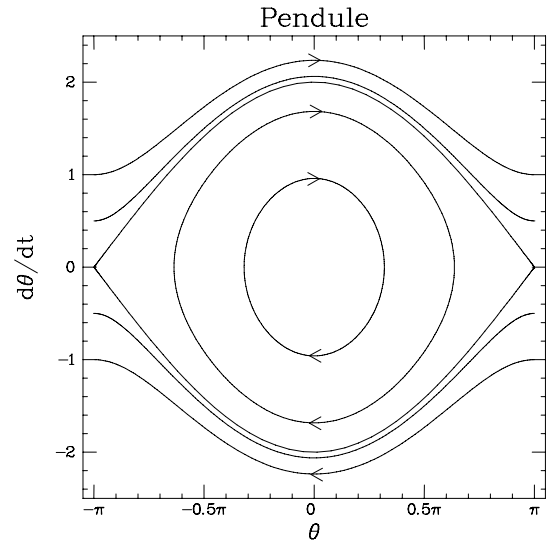


Figure I.8: Trajectoires dans l'espace des phases du pendule. L'espace des phases est périodique dans la direction θ , les trajectoires qui atteignent $(+\pi, \dot{\theta})$ reviennent ainsi en $(-\pi, \dot{\theta})$. Ces trajectoires, dites passantes, correspondent au cas où le pendule est animé d'un mouvement de rotation. Les trajectoires fermées au centre décrivent les mouvements d'oscillation du pendule. La trajectoire qui délimite les deux types de mouvements joint les points col en $(\pm\pi, 0)$; c'est la séparatrice.

tions harmoniques. Nous nous attendons à un allongement de la période en nous approchant du point col, puisque celle-ci diverge lorsque la trajectoire l'atteint.

I.4.2 Le pendule pesant

Nous allons constamment revenir sur cet exemple du pendule car il constitue un des systèmes non-linéaires les plus simples. Il possède deux degrés de liberté (au sens des systèmes dynamiques) : sa position angulaire θ et sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Elles sont régies par les équations :

$$\begin{cases} \partial\theta/\partial t = \dot{\theta} \\ \partial\dot{\theta}/\partial t = -g/l \sin \theta \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Nous pouvons répéter la même analyse que celle déjà faite en I.4.1. L'origine de l'espace des phases apparaît comme un centre : c'est le domaine des petites oscillations. Si l'on restreint θ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, nous y trouvons deux points fixes de type col en $\theta = \pm\pi$ et $\dot{\theta} = 0$. Les courbes de niveau à énergie constante conduisent à la figure I.8.

Il existe une trajectoire très particulière qui relie les points invariants entre eux : c'est la *séparatrice*. Lorsqu'il suit cette trajectoire, le pendule part de la position retournée ($\theta = -\pi$), s'en écarte doucement

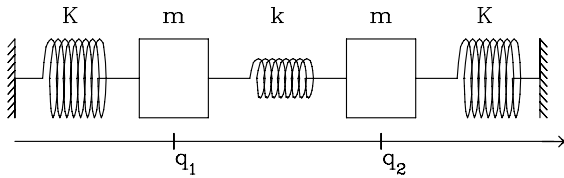


Figure I.9: *Système de deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement.*

puis bascule rapidement autour de $\theta = 0$ et finalement remonte pour atteindre asymptotiquement $\theta = \pi$. Le nom de séparatrice provient du fait que cette trajectoire est la frontière dans l'espace des phases entre les trajectoires fermées entourant le point fixe centre $\vec{\theta} = 0$, et les trajectoires passantes pour lesquelles $\vec{\theta} \neq 0$ où $\vec{\theta}$ représente la vitesse moyenne de rotation. Ces trajectoires passantes correspondent au cas où le pendule tourne continûment.

I.5 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit *intégrable*.

Nous venons de voir deux exemples de tels systèmes non-linéaires. L'invariance de l'énergie, caractéristique des systèmes hamiltoniens, permettant de déterminer les trajectoires des systèmes possédant deux degrés de liberté, il en résulte que tous ces systèmes sont intégrables. Cela ne signifie pas pour autant qu'il soit facile de trouver l'expression analytique des solutions des équations du mouvement, mais nous sommes sûrs qu'elles existent.

Quant aux systèmes ayant un plus grand nombre de degrés de liberté n , l'invariance de l'énergie nous permet de dire que leurs trajectoires appartiennent à un sous-espace de dimension $n - 1$. Mais cela ne permet plus de les caractériser.

Pourtant, dans nos cours de mécanique, nous avons déjà rencontré des exemples de systèmes ayant plus de deux degrés de liberté et dont nous pouvons déterminer analytiquement les trajectoires. Nous nous proposons de rappeler deux exemples de ce type qui vont nous permettre d'illustrer les conditions nécessaires à l'intégrabilité.

I.5.1 Système de deux oscillateurs harmoniques couplés

Considérons deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement comme ceux de la figure I.9.

Il nous faut désormais quatre équations pour décrire notre système :

$$\begin{cases} \partial q_1 / \partial t = p_1 / m \\ \partial p_1 / \partial t = -Kq_1 + k(q_1 - q_2) \\ \partial q_2 / \partial t = p_2 / m \\ \partial p_2 / \partial t = -Kq_2 + k(q_2 - q_1) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Comme le système est linéaire, nous savons qu'il est possible de trouver les solutions. Or la recherche de ces solutions consiste à déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Il existe donc un changement de base où la matrice est diagonale, c'est-à-dire où le couplage des oscillateurs disparaît (ici $u = q_1 + q_2$ et $v = q_1 - q_2$). Dans cette nouvelle base, nous pouvons séparer les oscillateurs couplés en deux nouveaux oscillateurs indépendants ayant deux fréquences différentes : $\omega_+ = \sqrt{(K + 2k)/m}$ et $\omega_- = \sqrt{K/m}$. Le mouvement est donc la composée de deux oscillations. Nous avons vu qu'à une oscillation correspondait une courbe fermée dans l'espace des phases (pour un oscillateur linéaire une ellipse) ; la composée de deux mouvements de cette nature engendre une surface torique. Nous pouvons donc dire que la dimension de la trajectoire dans l'espace des phases est ici deux. L'espace des phases étant *a priori* de dimension quatre, l'invariance de l'énergie totale nous conduit à une solution appartenant à un sous-espace de dimension trois. La symétrie particulière de ce problème conduit à une solution n'explorant que deux dimensions.

I.5.2 Problème à deux corps, mouvement dans un champ de force central

Le problème d'un système composé de deux particules matérielles en interaction a eu une très grande importance historique. C'est traditionnellement le *problème à deux corps* (la Terre et la Lune, par exemple). Comme les corps peuvent se déplacer dans les trois directions de l'espace physique, l'espace des phases de ce système est *a priori* de dimension 12 puisqu'il faut 3 coordonnées d'espace et autant de coordonnées d'impulsion pour caractériser chaque particule. Nous allons montrer comment il est possible de séparer les différents degrés de liberté et ainsi prédire le mouvement des deux corps.

Dans la mesure où les deux corps ne sont soumis à aucune force extérieure et puisque l'énergie d'interaction ne dépend que de la distance entre les deux particules, le mouvement du centre de masse est une translation à vitesse uniforme [1] et chacune des composantes de cette vitesse est invariante. Comme nous pouvons associer trois variables de position et trois d'impulsion au centre de masse, nous pouvons réduire d'autant le nombre de degrés de liberté en nous plaçant dans le référentiel du centre de masse. Nous devons maintenant déterminer le mouvement d'un corps soumis à un champ de force central, c'est à dire dont le vecteur

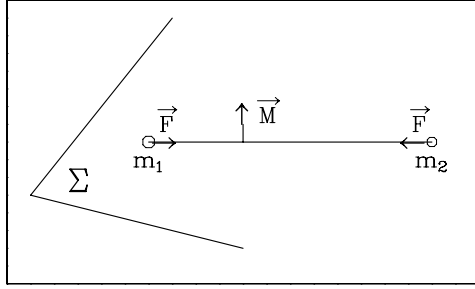


Figure I.10: Deux corps en interaction avec force centrale, le mouvement a lieu dans le plan Σ perpendiculaire au moment cinétique.

force pointe toujours vers l'origine, et dont l'amplitude ne dépend que du module de la distance à l'origine du corps r . Le moment cinétique de cette particule $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ est par définition perpendiculaire à \vec{r} , donc à la force, et par suite invariant. Cette invariance impose au mouvement d'avoir lieu dans un plan perpendiculaire à \vec{M} . Ainsi nous nous ramenons à un problème plan limité à deux coordonnées d'espace et deux d'impulsion. L'invariance du moment cinétique permet de déterminer le mouvement de la particule. Exprimée en coordonnées polaires (r, ϕ) , l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (\text{I.17})$$

où $U(r)$ est le potentiel d'interaction. Grâce à l'invariance du moment cinétique, cette énergie ne dépend pas explicitement de ϕ , et prend la forme de celle d'un oscillateur placé dans un potentiel effectif :

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (\text{I.18})$$

Ainsi avons-nous séparé le problème en couples de variables conjuguées (q_i, p_i) . Comme tous les systèmes à deux degrés de liberté sont intégrables, nous savons que celui de l'oscillateur dans le potentiel U_{eff} l'est aussi, et ceci quel que soit $U(r)$. Le mouvement final est donc la composition d'une oscillation dans le potentiel U_{eff} avec une rotation à la vitesse $\dot{\phi} = M/mr^2$. L'oscillation se fait entre deux valeurs r_{min} et r_{max} positives. La vitesse rotation présente un comportement analogue. La trajectoire dans l'espace des phases est à nouveau la composition de deux courbes fermées : elle a la topologie d'un tore. La projection d'une trajectoire dans le plan (r, ϕ) est donnée sur la figure I.11.

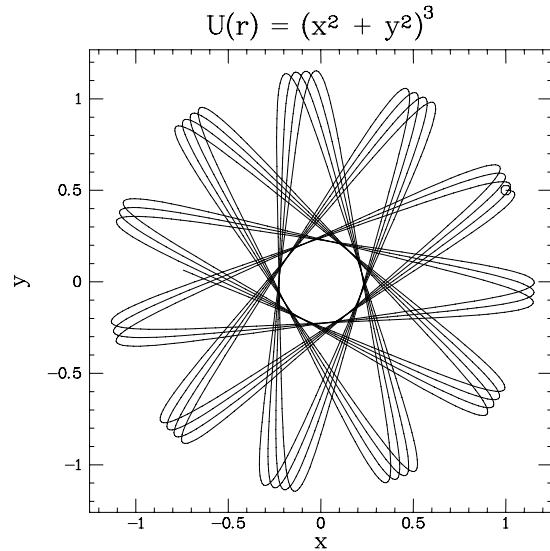


Figure I.11: Trajectoire d'une particule dans un champ de force central : c'est la composition d'une rotation et d'une oscillation.

I.5.3 Rôle des invariants, systèmes séparables

Les deux exemples que nous venons de discuter permettent de généraliser la notion d'intégrabilité. On dit qu'un système est *intégrable* s'il est possible de le séparer en couples de variables conjuguées indépendants les uns des autres, c'est-à-dire de le séparer en oscillateurs indépendants. Comme nous savons décrire les trajectoires de tout oscillateur à deux dimensions (une variable d'espace et une d'impulsion), la trajectoire d'un système séparé est obtenue en composant les mouvements de ses différents oscillateurs.

Bien qu'il existe une définition de l'intégrabilité, il n'existe pas de méthode infallible permettant de séparer les variables. Dans les deux exemples précédents, l'existence d'une symétrie particulière du problème, nous a permis de trouver le changement de variables adapté conduisant à la séparation. La présence d'un invariant (comme le moment cinétique) est un indice fondamental de l'intégrabilité d'un système.

Or l'intégrabilité d'un système dont l'espace des phases est de dimension $2n$, implique l'existence de n invariants. En effet, parmi les systèmes hamiltoniens à $2n$ degrés de liberté, les trajectoires de ceux qui sont intégrables explorent un sous-espace correspondant aux composées de n oscillations. Ce sous-espace est donc de dimension n .

Si un système n'est pas intégrable, la restriction minimale liée à l'invariance de l'énergie impose à l'espace exploré par sa trajectoire d'être de dimension $2n - 1$ au plus. Les systèmes intégrables sont donc des

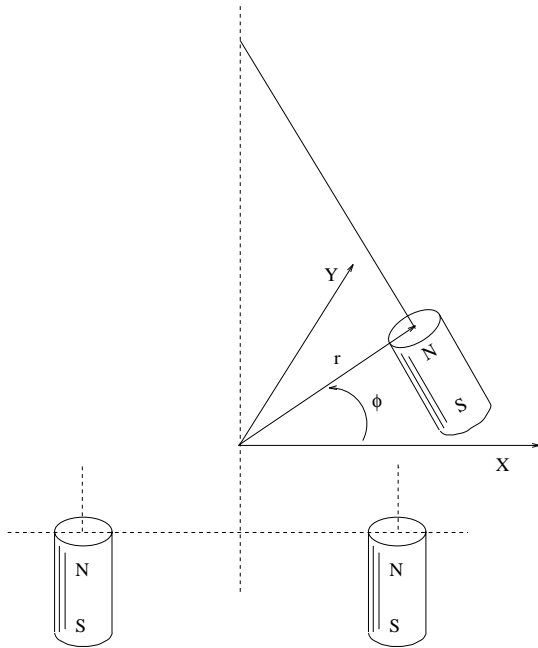


Figure I.12: Dispositif du pendule magnétique. Il permet de passer d'un système à champ de force central à un qui ne l'est pas, et d'observer ainsi une trajectoire chaotique.

systèmes très particuliers, moins généraux que ceux qui ne le sont pas.

I.6 Existence et caractérisation du chaos

Nous avons longuement discuté l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens ; nous allons ici décrire rapidement les conséquences de la non intégrabilité d'un système.

I.6.1 Problème à deux corps, champ de force non-central

Que se passe-t-il quand le champ de force agissant sur les deux corps n'est plus de symétrie centrale ?

En premier lieu, si le champ de force n'est plus central, le moment cinétique n'est plus invariant et nous ne pouvons plus découpler l'oscillation radiale de la rotation suivant ϕ . Inutile de dire qu'on ne peut pas donner d'expression analytique de la trajectoire du système.

La façon la plus simple de comprendre ce qui se passe est sûrement de réaliser une petite expérience. Constituons un pendule en accrochant un aimant à un fil et laissons lui la possibilité d'explorer les deux directions x et y accessibles avec le fil tendu. Ce système possède quatre degrés de liberté : deux variables de

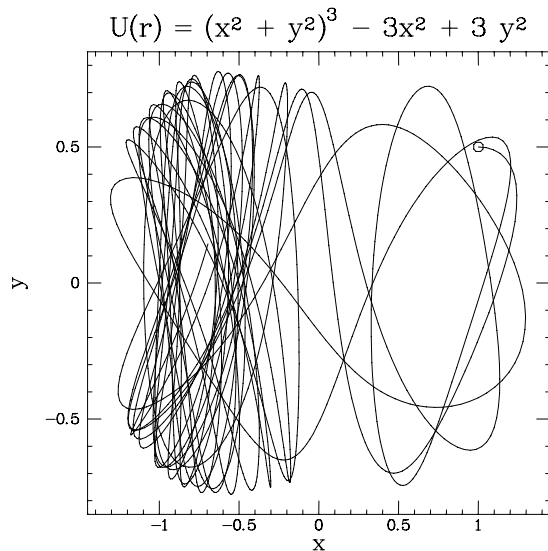


Figure I.13: Trajectoire du pendule magnétique soumis à un champ de force non central.

position x , y et deux d'impulsions \dot{x} et \dot{y} . En plaçant un autre aimant statique à l'aplomb du pendule, nous réalisons un dispositif à champ de force central qui nous permet de retrouver les trajectoires de la figure I.11. Si nous remplaçons cet aimant par deux aimants situés de part et d'autre de l'aplomb du pendule, nous créons un champ de force qui n'est plus à symétrie centrale. Écarté de sa position d'équilibre, le pendule évolue sous l'influence des deux aimants, et décrit une trajectoire bien définie, compliquée, le plus souvent *chaotique* ! Une trajectoire de ce type est présentée sur la figure I.13.

I.6.2 Caractérisation du Chaos : Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de FOURIER de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Nous avons vu que les trajectoires d'un système intégrable étaient la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation ω_i . Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations ω_i , à leurs harmoniques $m\omega_i$ avec $m \in \mathcal{N}$, et aux combinaisons linéaires de fréquences $m\omega_i + n\omega_j$ avec m et $n \in \mathcal{Z}$ (voir figure I.14). Les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapports simple sont dit *quasipériodiques*.

L'oscillation du pendule magnétique dans la configuration avec deux aimants statiques fournit un large spectre de FOURIER s'étendant sur une gamme de fréquences, proche du spectre d'un bruit, comme le montre la figure I.15.

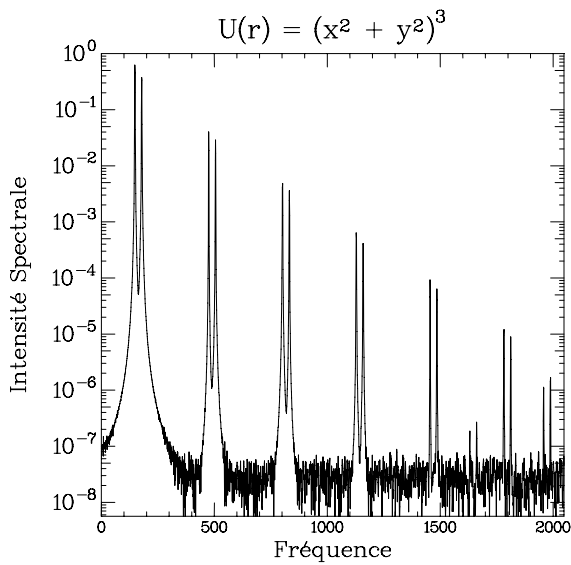


Figure I.14: Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement régulier. On remarque la présence de deux fréquences et de leurs harmoniques.

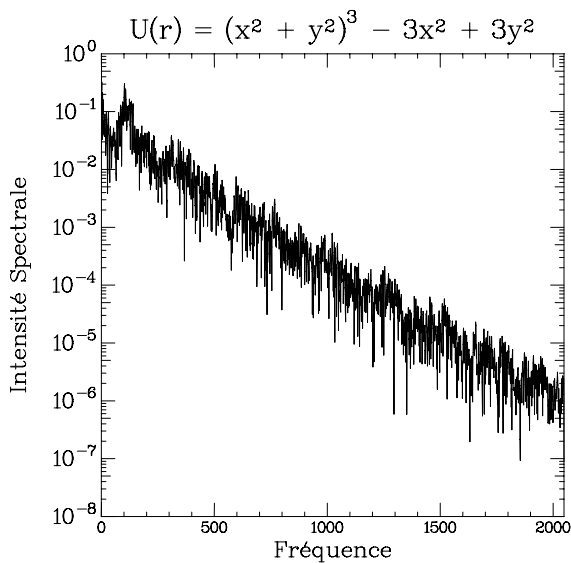


Figure I.15: Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement chaotique.

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système. Toutefois, il est possible qu'en plus des raies larges, un système chaotique présente aussi des raies étroites semblables à celles d'un système régulier.

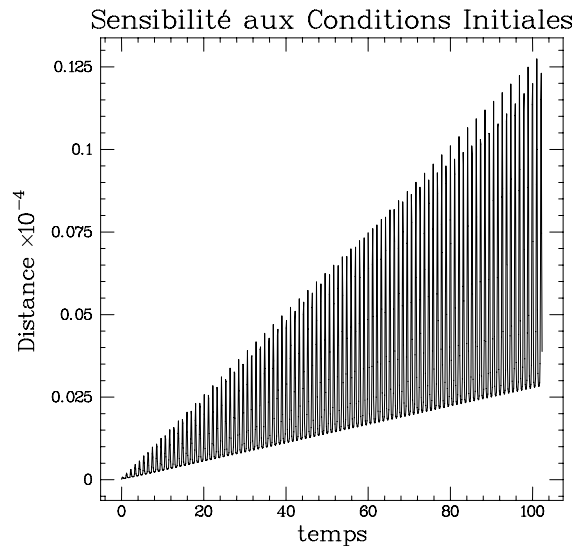


Figure I.16: Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines pour le pendule magnétique soumis à un champ de force central. Remarquer l'échelle linéaire des distances. Les oscillations rapides correspondent au va et vient de la trajectoire.

I.6.3 Caractérisation du chaos : sensibilité aux conditions initiales

Une façon plus directe de caractériser une trajectoire chaotique revient à mesurer le degré d'imprévisibilité du système. Certes, bien que non intégrable, le pendule magnétique est un système déterministe, et deux expériences partant de conditions initiales rigoureusement identiques évoluent suivant la même trajectoire. Mais si les deux conditions initiales ne sont simplement que voisines, la distance séparant les deux trajectoires dans l'espace des phases évolue très différemment selon que la trajectoire est régulière ou chaotique.

En effet pour une trajectoire régulière, comme celle du pendule magnétique soumis à un champ de force central, des amplitudes d'oscillations mais surtout des fréquences légèrement différentes vont être associées à deux conditions initiales voisines. Il en résulte que les oscillateurs associés vont se décaler linéairement avec le temps comme le font deux montres mal réglées. Pour les trajectoires régulières, la séparation dans l'espace des phases croît **linéairement** avec le temps, comme le montre la figure I.16.

Lorsque le système n'est pas intégrable et qu'il présente des solutions chaotiques, comme le pendule magnétique avec deux aimants, les oscillations issues de deux conditions initiales voisines sont fortement corrélées au début de l'évolution, mais, rapidement, la différence entre les deux trajectoires augmente et conduit à une décorrélation totale après quelques oscillations. Cette fois-ci, la distance entre les deux tra-

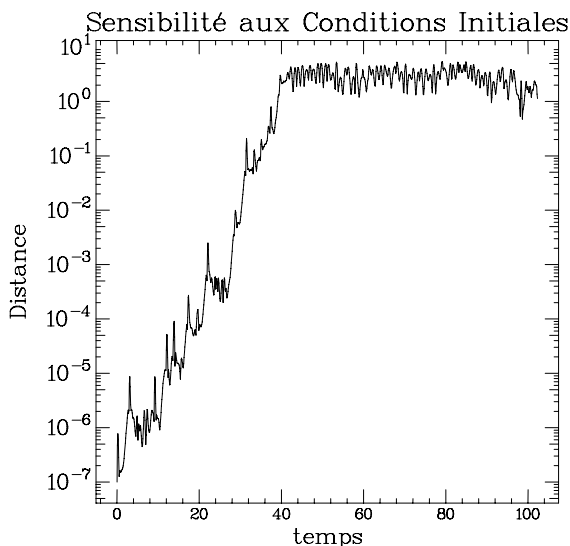


Figure I.17: Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines chaotiques. Remarquez l'échelle logarithmique. A $t = 40$, la distance sature car elle devient égale à la taille du domaine exploré par la trajectoire.

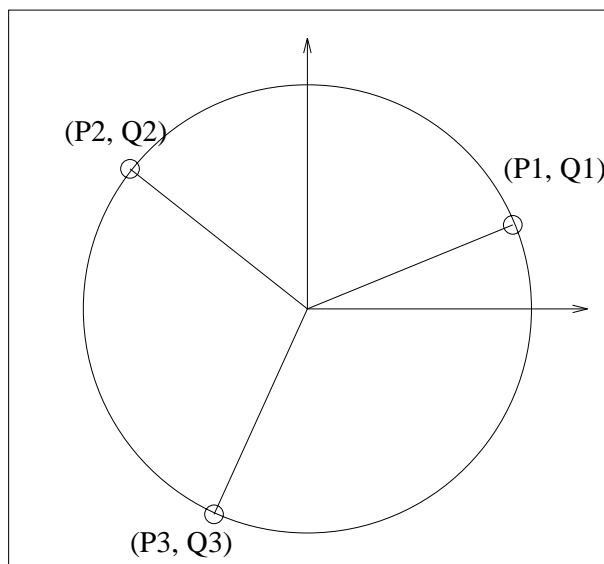


Figure I.18: La chaîne de Toda avec ses trois particules se déplaçant sur un cercle.

jectoires augmente **exponentiellement** avec le temps. Notons que cette évolution n'est pas homogène en fonction du temps mais simplement en valeur moyenne comme le montre la figure I.17.

Lecture complémentaire

Un contre-exemple : la chaîne de Toda

La chaîne de Toda[4] est un exemple classique qui montre qu'il peut être très difficile de déterminer si un

problème est intégrable ou non. Il correspond aux cas de trois particules de masses identiques se déplaçant sur un cercle et se repoussant les unes les autres avec une force qui varie exponentiellement avec la distance :

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \exp(q_3 - q_1) + \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) - 3 \quad (\text{I.19})$$

Nous avons un système ayant un espace des phases de dimension 6 : les positions des trois particules et leurs vitesses respectives. De plus l'interaction est non-linéaire (fonction exponentielle). Toutes les conditions sont requises pour que ce système soit non-intégrable. Cependant les simulation numériques ne montrent que des solutions régulières. Voyons comment il est possible de séparer ce système. L'énergie est bien sûr invariante, mais $p_1 + p_2 + p_3$ est aussi un invariant. Ceci nous permet de séparer les variables $Q = q_1 + q_2 + q_3$ et $P = p_1 + p_2 + p_3$, qui sont découplés et on ne s'intéresse plus qu'à un système possédant 4 degrés de liberté équivalent à une bille se déplaçant dans un potentiel à deux dimensions vérifiant :

$$H' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24}[\exp(2y + 2\sqrt{3}x) + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y)] - \frac{1}{8} \quad (\text{I.20})$$

Ce système est encore non-linéaire et possède suffisamment de degrés de liberté pour être chaotique. Cependant les simulations numériques conduisent encore à des solutions régulières. Le plus étonnant se produit lorsque l'on approxime les termes non-linéaires par les deux premiers termes de leur développement :

$$H'' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (\text{I.21})$$

Le modèle ainsi obtenu porte le nom de HÉNON-HEILES. Aux petites valeurs de l'énergie, on obtient bien des trajectoires voisines de celles obtenues avec l'équation exacte. Par contre pour les énergies plus grandes les trajectoires sont chaotiques !

C'est HÉNON qui a donné l'explication en trouvant un second invariant à la chaîne de TODA qui permet d'intégrer complètement les équations. Par contre il disparaît dans l'approximation qui mène au modèle de HÉNON HEILES. Ce qui explique les trajectoires chaotiques. La difficulté provient de la forme de l'invariant trouvé par HÉNON, loin d'être intuitif et ne correspondant à aucune symétrie évidente. Son expression est la suivante :

$$I = 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y) \exp(2y - 2\sqrt{3}x) - 2p_x \exp(-4y) + (p_x - \sqrt{3}p_y) \exp(2y + 2\sqrt{3}x) \quad (\text{I.22})$$

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode systématique permettant de trouver les invariants d'un système. Et ne pas en trouver ne signifie certainement pas qu'il n'en n'existe pas ! Il faut retenir que si le système étudié est non-linéaire et possède plus de deux degrés de liberté, nous avons là les conditions nécessaires pour avoir un comportement chaotique, mais ces conditions ne sont pas suffisantes.

Exercices

Le circuit RC

Considérons le circuit composé d'un condensateur avec une résistance en parallèle dont un point est à la masse. Indiquez le nombre de degré de libertés, le ou les points fixes et calculez le ou les vecteurs propres et valeurs propres associés. S'agit-t-il d'un système linéaire ?

Equilibre instable

On considère le cas de la bille au voisinage du sommet d'une colline décrit en I.2.2 et dont les trajectoires sont représentées sur la figure I.4. On cherche avec quelle vitesse sont parcourus les trajectoires hyperboliques pour lesquelles x est toujours positif. Ces trajectoires correspondent au cas où la bille n'a pas une vitesse suffisante pour franchir la colline. Déterminer comment varie le temps mis pour partir du point ($x = 1, \dot{x} < 0$) et arriver à son homologue ($x = 1, \dot{x} > 0$) en fonction de x_{min} valeur minimum de x atteinte par la trajectoire. Que se passe-t-il pour $x_{min} = 0$?

La bille qui rebondit sur le sol

On lâche une bille qui ne peut se déplacer que verticalement soumise au champ de pesanteur terrestre et qui rebondit sans dissiper d'énergie sur le sol.

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
- Sans faire de calcul, indiquez comment varie la fréquence du *toc toc* qu'elle fait en touchant le sol, en fonction de la hauteur dont elle tombe.
- Pouvez vous en déduire si le système est linéaire ou non ?
- Ecrire les équation du mouvement et tracer l'allure des trajectoire dans l'espace des phases.
- Calculer la période du mouvement en fonction de la hauteur maximale atteinte par la bille.

Le problème à deux corps : un cas très particulier

Le problème à deux corps est celui de la Terre et de la Lune, par exemple. Rappeller quelle est la nature de la trajectoire. En comparant cette solution à celle de la figure I.11, indiquez comment le mouvement d'oscillation dans le potentiel effectif I.18 est relié à la rotation ϕ de l'axe des deux astres. Cette relation dépend-t-elle de l'amplitude d'oscillation ?

Montrer ce résultat en calculant la période d'oscillation explicitement et en la comparant à $\Delta\phi$, l'angle dont ont tourné les deux corps après une oscillation.

Une approche du problème à trois corps

C'est le cas de trois particules en interaction, par exemple la Terre, la Lune et le Soleil.

- Indiquez le nombre de degrés de liberté du système.
- Si les interactions sont du type gravitationnel, s'agit-il d'un système linéaire ?
- En utilisant les invariants simples, à quel nombre de degrés de liberté peut-on se ramener ?
- Peut-on dire s'il s'agit d'un système intégrable ou non ?
- Le système Terre Lune Soleil a-t-il un comportement chaotique ?

Bibliographie

- [1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ *Mécanique* Ed. Mir
- [2] V. ARNOLD *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Ed. Mir
- [3] V. ARNOLD *Equations Différentielles Ordinaires* Ed. Mir
- [4] A.J. LICHTENBERG and M.A. LIBERMAN, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)
- [5] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Ed. Hermann (1984)
- [6] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991)
- [7] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989)

Chapitre II

Notion de Bifurcation, Analogie avec les Transitions de Phases

Table des matières

II	Notion de Bifurcation, Analogie avec les Transitions de Phases	II-1
II.1	Bifurcations locales de codimension 1 . . .	II-1
II.1.1	Bifurcation fourche (pitchfork) . . .	II-2
II.1.2	Bifurcation “nœud-col”	II-3
II.1.3	Bifurcation transcritique	II-3
II.1.4	Bifurcation imparfaite	II-4
II.1.5	Bifurcation de HOPF	II-4
II.1.6	L’oscillateur de VAN DER POL	II-5
II.2	Analogie avec les Transitions de Phases	II-5
II.2.1	Le champ moléculaire	II-6
II.2.2	Théorie à la LANDAU, cas d’un ferromagnétique	II-6
II.2.3	Comportement critique	II-7
II.2.4	Fluctuations critiques	II-7
II.2.5	Au-delà la théorie de LANDAU	II-7
II.2.6	Longueur de corrélation	II-7
II.2.7	Comportement critique des bifurcations	II-8
II.3	Exercices	II-8
II.3.1	Sélection de structures	II-8

Résumé

Le comportement des systèmes non-linéaires dépend cruciallement de leurs paramètres de contrôle. Avant de devenir chaotique, ces systèmes présentent des changements brutaux de comportement. On dit alors qu’une *bifurcation* se produit à chaque changement.

Bien que la séquence exacte de ces bifurcations soit propre à chaque système, le voisinage de toute bifurcation peut être décrit par un petit nombre de cas typiques, car dans ces régimes, un seul terme non-linéaire gouverne l’évolution.

De plus ces bifurcations présentent de nombreuses similitudes avec les transitions de phases des systèmes thermodynamiques. Nous en ferons une étude comparative.

II.1 Bifurcations locales de codimension 1

La théorie des bifurcations permet d’étudier les changements de stabilité d’un flot caractérisé par une application $F_{\mu_i}(\vec{X})$, lorsque les paramètres μ_i varient et franchissent des valeurs critiques μ_{ic} isolées (d’où le qualificatif de “locales” dans le titre). Les bifurcations sont répertoriées par leur *codimension*, qui est la plus petite dimension de l’espace de contrôle dans lequel la bifurcation peut exister.

Plaçons nous dans un espace des paramètres μ_i à trois dimensions. La stabilité du système en question peut être affectée lorsque les paramètres franchissent une certaine variété \mathcal{S} de l’espace, définie par une relation entre les μ_i . En toute généralité, cette variété est une surface dans l’espace des trois paramètres (μ_1, μ_2 et μ_3). Sa codimension est égale à 1: si nous déplaçons le système selon une droite quelconque \mathcal{D} (ou presque) de l’espace des paramètres, la bifurcation a lieu à l’intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$. Ainsi, si on fait varier un seul paramètre du système, on va rencontrer la bifurcation.

Si le changement de stabilité a lieu lorsqu’on coupe une courbe dans l’espace à trois paramètres, alors la codimension de la bifurcation est égale à 2. Pour rencontrer la bifurcation, il faut balayer une surface.

Il existe quatre types de bifurcations de codimension 1, qui correspondent toutes à des comportements génériques. La théorie des formes normales (que nous n’aborderons pas ici) montre que l’on peut toujours éliminer par changements de variables les termes non-linéaires non intéressants : ces termes sont dits non-résonnants. Ceci permet de ramener aux formes suivantes.

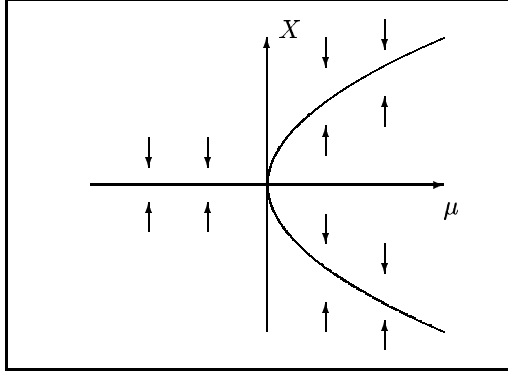


Figure II.1: Diagramme de la bifurcation fourche supercritique.

II.1.1 Bifurcation fourche (pitchfork)

Imaginons que nous plaçons verticalement une lame ressort et que nous attachons un plateau à son sommet. Cette lame est ramenée à sa position verticale ($\theta = 0$) par une force de rappel élastique proportionnelle à θ . Disposons une masse m sur le plateau et supposons de plus que l'ensemble soit placé dans un fluide très visqueux. Nous savons intuitivement que, si la masse est faible, la lame ressort va rester verticale, mais qu'elle va s'infléchir dès que la masse sur le plateau devient trop grande. Dans la limite où les frottements sont grands, on peut négliger les termes d'inertie et décrire ce phénomène par l'équation :

$$\gamma \dot{\theta} = -k\theta + mgl \sin \theta$$

Cette équation possède une solution stationnaire évidente $\theta = 0$ et deux solutions non triviales. Pour les petits angles, on peut développer $\sin \theta$ en puissance de θ , ce qui conduit à une équation du type :

$$\dot{\theta} = \mu\theta - \frac{mgl}{6\gamma}\theta^3 + \dots \text{ avec } \mu = \frac{mgl - k}{\gamma}$$

Cette équation correspond à la *bifurcation fourche supercritique*.

Supercriticalité Souvent les systèmes dynamiques respectent des symétries du type $\pm x$ (dans le cas de la lame ressort $\pm\theta$). Ceci correspond en général à une invariance particulière du système. Dans ce cas, la première linéarité à apparaître est cubique.

La forme normale de la bifurcation symétrique est :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (\text{II.1})$$

Revenons à la lame ressort. La notion de bifurcation explicite le changement de comportement observé en augmentant la masse posée sur le plateau:

pour $m < m_c$, la lame ressort reste verticale, au delà de $m > m_c$, la lame fléchit du côté $\theta > 0$ ou du côté $\theta < 0$. La notion de "fourche" traduit la possibilité de choix entre les deux types de solutions. La bifurcation fourche est réversible et continue. La courbe décrivant l'angle de déviation de la lame en fonction de m est identique selon qu'on augmente m ou qu'on le diminue: elle ne présente pas d'hystérésis. Par contre, il est possible que le système ne choisisse pas la même branche de la fourche entre deux montées consécutives de m .

Il est important d'étudier la stabilité des solutions stationnaires. Pour μ négatif, on linéarise autour de $x = 0$, on obtient ainsi $\dot{x} = \mu x$. Quelle que soit la condition initiale, elle tend vers $x = 0$, $\dot{x} = 0$ avec une relaxation exponentielle $x = x_0 \exp(\mu t)$. Pour $\mu > 0$, il existe trois points fixes ($x = 0, \dot{x} = 0$), ($x = \pm\sqrt{\mu}, \dot{x} = 0$). On obtient la stabilité en linéarisant autour de ces points fixes. Pour celui autour de $x = 0$, on a $\dot{x} = \mu x$, comme μ est positif, toutes les conditions initiales voisines ont tendance à s'écartier, c'est un point fixe instable. Pour $x = \pm\sqrt{\mu} + \epsilon$, on obtient : $\dot{x} = \mu(\sqrt{\mu} + \epsilon) - (\sqrt{\mu} + \epsilon)^3$. Dans la limite de $\epsilon \ll 1$ on a $\dot{\epsilon} = -2\mu\epsilon$. Ce sont donc des points fixes stables. Dans tous les cas le retour à l'équilibre se fait avec dynamique relaxionnelle dont le temps caractéristique est :

$$\begin{aligned} \tau &= -\mu^{-1} & \text{pour } \mu < 0 \\ \tau &= (2\mu)^{-1} & \text{pour } \mu > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

La relaxation est très lente près du point de bifurcation; nous verrons que ce phénomène est analogue au ralentissement critique dans les transitions de phases.

Sous-criticalité Quelquefois, le terme cubique du développement de la forme normale est déstabilisant. Pour obtenir la saturation des solutions, il tenir compte des termes d'ordre supérieur comme le terme d'ordre 5.

La forme normale de la bifurcation sous-critique s'écrit :

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5 \quad (\text{II.3})$$

Les bifurcations décrites par ce type d'équation sont qualifiées de *sous-critiques* ou encore d'*inverses*. Evidemment la solution triviale $x = 0$ existe toujours; elle est stable pour $\mu < 0$ et se déstabilise à $\mu \geq 0$. Les solutions non-triviales se calculent aisément et correspondent aux racines de $\mu + x^2 - x^4$. Elles sont au nombre de quatre quand $-1 < \mu < 0$ et de deux lorsque $\mu \geq 0$. En linéarisant autour de ces solutions, on peut déterminer leur stabilité. On montre ainsi que pour $\mu > 0$, les solutions non triviales sont stables. Dans la région $-1/2 < \mu < 0$, on notera que les solutions telles que $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$ sont stables; par contre, celles qui correspondent à $(x^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu})/2$ sont instables. Nous remarquons ainsi qu'il existe un domaine du paramètre $-1/2 < \mu < 0$ dans lequel il y a coexistence de la solution triviale et des solutions qui ne le sont

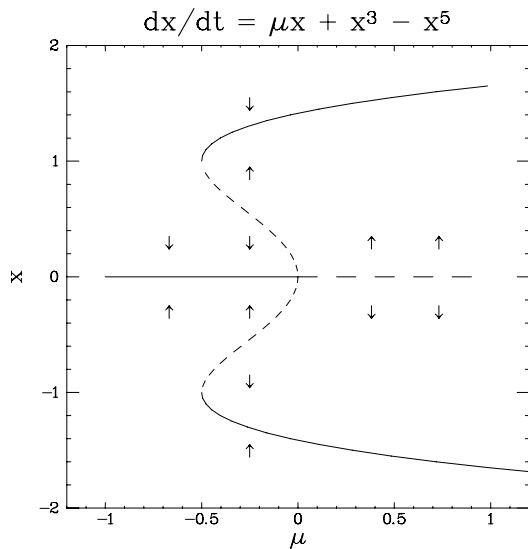


Figure II.2: Diagramme de la bifurcation fourche sous-critique.

pas. Si μ varie depuis $\mu_0 < -1$ continûment vers $\mu > 0$, le système choisit d'abord la solution triviale et ne se déstabilise que pour $\mu = 0$; là x prend brutalement une valeur finie. En reprenant la même procédure, mais en s'arrêtant à $\mu = -1/2$, nous obtenons la solution triviale qui est linéairement stable pour cette valeur du paramètre. Toutefois si notre système est soumis à une perturbation finie telle que x devienne plus grand, en valeur absolue, que la solution instable, le système se déstabilise et atteint la branche telle que $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$. En opérant une rampe descendante sur le paramètre μ , le système reste sur la branche $x^2 = (1 + \sqrt{1 + \mu})/2$ jusqu'au moment où $\mu = -1/2$; où le système effectue un saut brutal. Entre la montée et la descente, il apparaît donc un hystérésis dans le comportement du système, caractéristique des bifurcations sous-critiques.

II.1.2 Bifurcation "nœud-col"

Forme normale : $\dot{x} = \mu - x^2$ (II.4)

Les points critiques sont données par: $x = \pm\sqrt{\mu}$ pour $\mu > 0$ et aucun pour $\mu < 0$.

l'analyse de stabilité linéaire montre que:

$$\begin{cases} x_- = -\sqrt{\mu} & \text{est instable} \\ x_+ = \sqrt{\mu} & \text{est stable} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

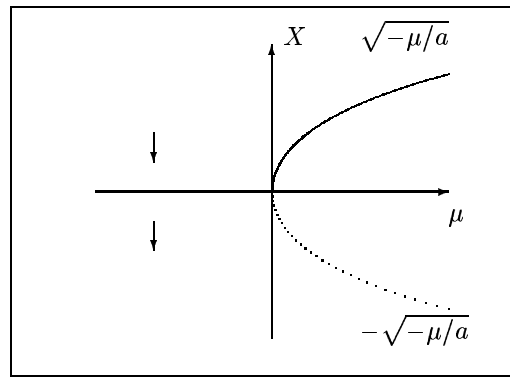


Figure II.3: Diagramme de la bifurcation nœud-col

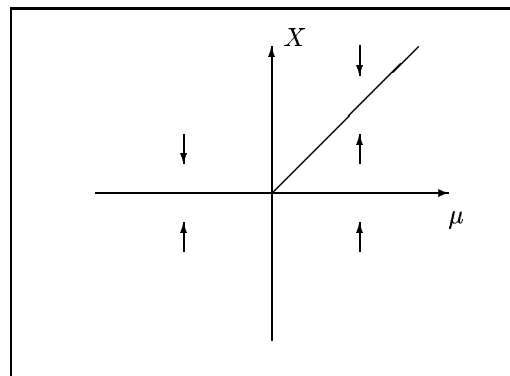


Figure II.4: Diagramme de la bifurcation transcritique

II.1.3 Bifurcation transcritique

Si le système ne possède pas la symétrie $A \rightarrow -A$, il n'y a pas de raison pour que le terme en A^2 disparaisse et l'on a alors :

Forme normale : $\dot{x} = \mu x - x^2$ (II.6)

Il apparaît deux solutions, la solution triviale $x = 0$ et celle $x = \mu$. Il est facile de voir que la première est stable pour $\mu < 0$ tandis que l'autre ne l'est pas. Cette situation s'inverse quand $\mu > 0$. On dit parfois qu'il y a eu "échange de stabilité", mais c'est une expression souvent utilisée pour d'autres concepts. Généralement un terme cubique vient s'ajouter à la forme normale: $\dot{x} = \mu x - x^2 - x^3$. Alors une bifurcation nœud-col apparaît en plus pour $\mu < 0$.

Si le système est fortement perturbé, c'est-à-dire soumis à des perturbations d'amplitudes finies, il y a possibilité d'hystérésis sur la branche du bas.

La solution qui apparaît pour $\mu < 0$, est appelée solution sous-critique car le système a perdu sa stabilité avant le seuil d'instabilité linéaire. Inversement

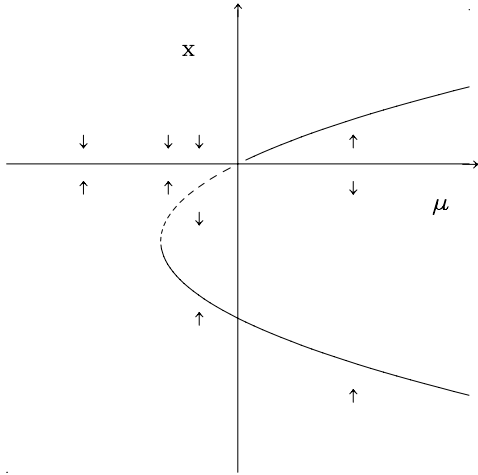


Figure II.5: Diagramme de la bifurcation de $\dot{x} = \mu x - x^2 - x^3$

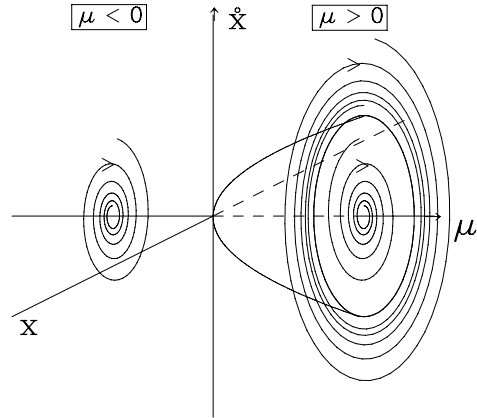


Figure II.7: Diagramme de la bifurcation de HOPF

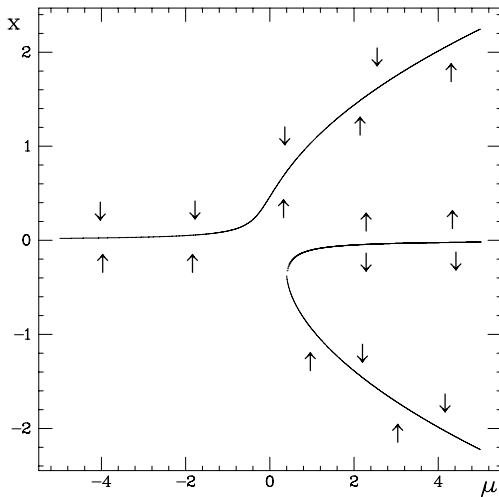


Figure II.6: Diagramme de la bifurcation fourche imparfaite

la branche $x > 0$, est atteinte par une bifurcation supercritique, après le seuil d'instabilité linéaire.

II.1.4 Bifurcation imparfaite

Bien souvent, les systèmes physiques présentent de petites imperfections qui vont différencier les solutions. La lame ressort ne sera jamais parfaitement verticale par exemple. On peut modéliser cet effet par une perturbation sur la forme normale qui devient :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + h \quad (\text{II.7})$$

La perturbation h va jouer un rôle décisif près du point de bifurcation. En effet, dans le cas de la lame ressort, au voisinage de la masse critique m_c , la raideur de la lame est compensée par la masse et le dispositif devient très sensible. Le fait de pencher légèrement d'un coté va favoriser ce coté et la dégénérescence qui existait entre les deux branches de la fourche est levée. Le diagramme de bifurcation a l'allure décrit sur la figure II.1.5.

II.1.5 Bifurcation de HOPF

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de HOPF donne naissance à des solutions oscillantes. L'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme normale s'écrit dans le plan complexe:

$$\text{Forme normale : } \boxed{\dot{z} = \mu z - |z|^2 z} \quad (\text{II.8})$$

En posant $\mu = \mu_r + i\mu_i$, et $z = x e^{i\theta}$, on obtient alors:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu_r x - x^3 \\ \dot{\theta} &= \mu_i \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse μ_i . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite.

Naturellement la bifurcation de HOPF peut être également sous-critique si le coefficient du terme $|z|^2 z$ est de signe positif, il faut alors un terme négatif en $|z|^4 z$ pour obtenir une saturation non-linéaire.

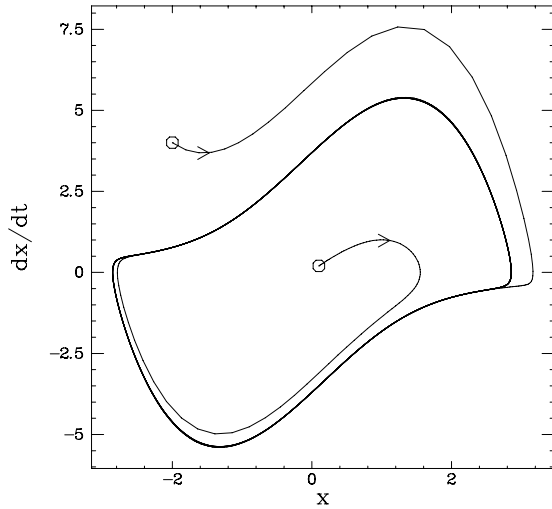


Figure II.8: Espace des phases de l'oscillateur de Van der Pol. On remarquera l'existence d'un cycle limite

II.1.6 L'oscillateur de VAN DER POL

L'oscillateur de VAN DER POL est un exemple de système donnant lieu à une bifurcation de HOPF. Il s'agit d'un oscillateur harmonique avec un terme d'amortissement non linéaire :

$$\begin{cases} du/dt = v \\ dv/dt = -u + (2\epsilon - u^2)v \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Lorsque u est petit, le terme d'amortissement est négatif ce qui conduit à une croissance d'une oscillation; mais quand l'amplitude d'oscillation croît, le terme u^2 conduit à un amortissement. Il résulte un cycle limite (une ellipse pour $\epsilon \ll 1$) pour lequel le terme d'amortissement est nul.

II.2 Analogie avec les Transitions de Phases

La glace et l'eau liquide sont deux phases bien connues d'un même corps. Le passage d'une phase à l'autre se fait à une température bien définie; cette transition est longtemps restée une énigme pour les physiciens. Sans en donner une explication complète, nous allons montrer l'analogie entre transitions de phases et bifurcations. Pour cela, introduisons un second exemple de transition de phase. A température ordinaire, un clou en fer est attiré par un aimant. Accrochons ce clou par un fil de cuivre et chauffons le au rouge : il n'est plus attiré par l'aimant tant qu'il reste suffisamment chaud; en refroidissant il le redevient assez brutalement. Cette expérience illustre le caractère

ferromagnétique du fer à basse température. A haute température, des mesures précises indiquent que le fer reste faiblement magnétique : on dit qu'il est paramagnétique. Le fer existe ainsi sous deux phases et transite de l'une à l'autre à $T_c = 1043K$.

La théorie des transitions de phases est née avec l'étude des matériaux magnétiques faite par CURIE. Il mesura l'aimantation des corps paramagnétiques (ou faiblement magnétiques) en fonction de la température et montra que la susceptibilité $\chi = M/H$ où H est le champ appliqué, varie comme $1/T$. Il fit de même pour les matériaux ferromagnétiques. Ceux-ci présentent une aimantation spontanée lorsque $T < T_c$ et se comportent comme des paramagnétiques pour $T > T_c$. CURIE montra que, dans ces conditions la susceptibilité suit une loi en $1/(T - T_c)$ où T_c est la température de transition.

LANGEVIN proposa une théorie du paramagnétisme expliquant la loi en $1/T$ par les arguments suivants : les dipôles magnétiques cherchent à s'aligner avec le champ mais cette tendance est combattue par les fluctuations thermiques qui les retournent de façon aléatoire. En utilisant la physique statistique, il put formuler l'expression de l'aimantation en fonction du champ et de la température. Cette théorie fait l'hypothèse que les dipôles sont isolés et conduit à l'expression de l'aimantation suivante :

$$M = N\mu\mathcal{L}(\mu H/k_B T) \quad (\text{II.11})$$

N est le nombre de dipôles, H le champ appliqué et k_B la constante de BOLTZMANN et \mathcal{L} est la fonction de Langevin. Cette fonction est linéaire pour x petit et sature aux grandes valeurs de x ; son développement autour de $x = 0$ est de la forme $\mathcal{L}(x) \sim x/3 - x^3/45 + \dots$. La théorie de LANGEVIN explique parfaitement le comportement des matériaux paramagnétiques connus.

II.2.1 Le champ moléculaire

WEISS fit un pas décisif pour expliquer les matériaux ferromagnétiques, en proposant de décrire leurs dipôles magnétiques comme ceux des paramagnétiques mais en tenant compte de leurs interactions réciproques à l'aide d'un *champ moléculaire*. Ainsi l'aimantation moyenne du matériau prend la forme :

$$M = N\mu\mathcal{L}\left(\frac{\mu(H + H_m)}{k_B T}\right) \text{ avec } H_m = KM \quad (\text{II.12})$$

où H_m est le champ moléculaire. Celui-ci correspond au champ moyen de tous les dipôles voisins du site considéré. Il est supposé proportionnel à l'aimantation en un site soit $H_m = KM$. Nous voyons ainsi que l'aimantation des atomes voisins vient renforcer le

champ magnétique appliqué, et par ce biais, s'amplifier elle-même. A basse température, la susceptibilité du matériau est grande, et cette auto-amplification s'emballé. Une aimantation apparaît sans qu'il soit nécessaire d'appliquer un champ : le matériau est ferromagnétique. A plus haute température, la susceptibilité décroît et l'emballement n'a plus lieu : le matériau devient paramagnétique. On peut calculer aisément cette température de transition en ne considérant que le premier terme du développement de la fonction de LANGEVIN :

$$M = N\mu \left[\frac{\mu(H + KM)}{3k_bT} \right]$$

soit : $M \left[1 - \frac{N\mu^2 K}{3k_B T} \right] = \frac{N\mu^2 H}{3k_B T}$ (II.13)

On obtient la divergence de la susceptibilité avec la température :

$$\chi = \left(\frac{N\mu^2}{3k_B} \right) \frac{1}{T - T_c} \text{ avec } T_c = \frac{KN\mu^2}{3k_B} \quad (\text{II.14})$$

Si nous écrivons l'équation qui régit l'aimantation en l'absence de champ magnétique ($H = 0$) en poussant à l'ordre trois, nous retrouvons une expression d'une forme normale classique :

$$0 = \frac{T_c - T}{T} M - \left(\frac{N\mu^4 K^3}{45k_B^3 T^3} \right) M^3 \quad (\text{II.15})$$

Près de la transition $T \rightarrow T_c$, l'aimantation prend la forme :

$$M = M_0(T_c - T)^{1/2} \quad (\text{II.16})$$

II.2.2 Théorie à la LANDAU, cas d'un ferromagnétique

LANDAU fit remarquer qu'il y avait une différence de symétrie entre la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique : dans un cas, les dipôles sont ordonnés à grande distance, dans l'autre, cet ordre disparaît. Pour caractériser cette **brisure de symétrie**, il introduisit la notion de paramètre d'ordre. Dans le cas du ferromagnétisme, il s'agit simplement de l'aimantation. En utilisant des arguments de symétrie, il proposa différentes formes type pour l'énergie libre F en fonction du paramètre d'ordre. Dans le cas du ferromagnétique :

$$F(T, M) = \frac{a}{2}(T - T_c)M^2 + \frac{b}{4}M^4 + \dots \quad (\text{II.17})$$

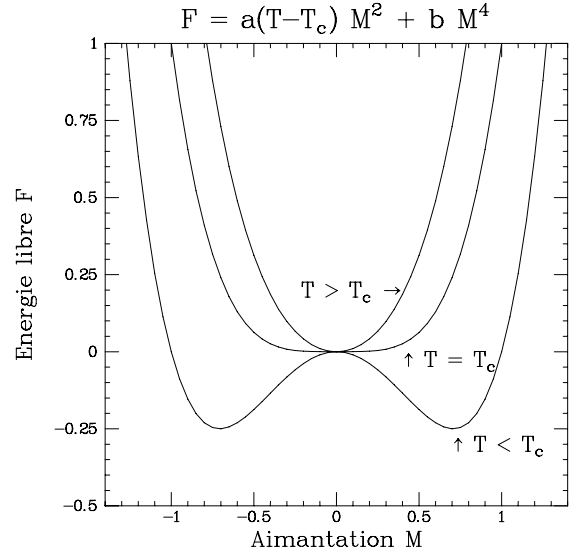


Figure II.9: Evolution de l'énergie libre d'un ferromagnétique décrit par le modèle de LANDAU dans le cas d'une transition du second ordre.

Un cristal ferromagnétique étant inchangé par la symétrie $M \rightarrow -M$, le développement de l'énergie libre ne comporte que des termes pairs. Nous avons reproduit l'allure de l'énergie libre de II.17 en fonction de la température sur la figure II.9.

L'aimantation du système évolue vers le minimum de l'énergie libre en suivant une dynamique gouvernée par l'équation phénoménologique : $\tau_0 \frac{\partial F}{\partial t} \delta M = -\frac{dF}{dM} \delta M$ soit :

$$\tau_0 \frac{dM}{dt} = -a(T - T_c)M - bM^3 \quad (\text{II.18})$$

Nous retrouvons la forme obtenue dans le modèle du champ moléculaire ainsi que la forme normale associée à la bifurcation fourche.

II.2.3 Comportement critique

Près d'un point de transition, différents systèmes physiques peuvent être décrits par l'expression de l'énergie libre proposée par LANDAU. Ils présentent ainsi des comportements analogues. Ils sont caractérisés par des **exposants critiques**. A l'équilibre, le paramètre d'ordre η —l'aimantation pour un ferromagnétique— suit une loi de puissance de la forme :

$$\eta \sim (T_c - T)^\beta \text{ soit } M = M_0 \sqrt{T_c - T} \text{ pour } T < T_c \quad (\text{II.19})$$

De la même façon, près du point de transition, la dynamique du paramètre devient de plus en plus lente. C'est le *ralentissement critique*, caractérisé lui aussi par un exposant aisément trouvé dans le cas de l'équation dynamique de l'aimantation II.18.

$$\begin{aligned} \tau &\sim (T_c - T)^{-\gamma'} & \text{soit } \tau &= \tau_0 (T_c - T)^{-1} \text{ pour } T < T_c \\ \tau &\sim (T_c - T)^{-\gamma} & \text{soit } \tau &= \tau_0 (T_c - T)^{-1} \text{ pour } T > T_c \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Finalement, on peut aussi montrer que la capacité calorifique a un comportement critique :

$$\begin{aligned} C_v &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} & \text{pour } T < T_c \\ C_v &\sim (T_c - T)^{-\alpha} & \text{pour } T > T_c \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Dans le cadre de la théorie de LANDAU, les exposants α et α' sont tous deux nuls.

II.2.4 Fluctuations critiques

Près du point critique, la susceptibilité diverge. Le système est donc très sensible et va amplifier toutes les perturbations qu'il subit. En particulier, les fluctuations d'origine thermodynamique vont subir une telle amplification qu'elles peuvent devenir visibles à l'échelle macroscopique. Ainsi près du point critique d'un gaz, on peut voir le phénomène d'opalescence critique où le fluide prend un aspect laiteux car les fluctuations de densité (et donc d'indice) sont très importantes.

II.2.5 Au-delà la théorie de LANDAU

En réalité, la plupart des transitions de phases ne suivent pas la théorie de LANDAU, encore appelée *théorie de champ moyen*. Si elle rend compte qualitativement des phénomènes observés, elle n'est pas quantitative quant à la valeur des exposants critiques. Pour le ferromagnétique par exemple, les exposants γ vaut $4/3$ et $\beta = 1/3$ tandis que la théorie donne $\beta = 1/2$ et $\gamma = 1$.

Cette différence provient du fait que la théorie de champ moyen néglige le rôle des fluctuations thermiques. Avec la technique de la renormalisation, KADANOFF et WILSON ont construit une théorie correcte des transitions de phases. Il est alors possible de définir des classes de système qui permettent de regrouper différents types de systèmes ayant le même comportement critique et les mêmes exposants.

Cependant toutes les théories prédisent une règle de somme entre les exposants critiques, expérimentalement vérifiée :

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' = 2 \quad (\text{II.22})$$

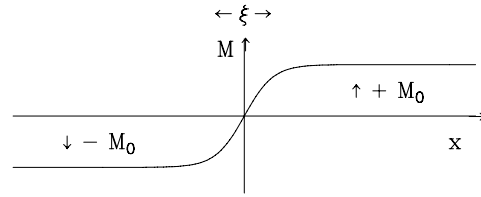


Figure II.10: Forme d'une paroi magnétique.

II.2.6 Longueur de corrélation

Bien souvent le paramètre d'ordre n'est pas homogène spatialement. C'est la raison pour laquelle un clou ferromagnétique ne présente pas d'aimantation macroscopique spontanée. Des domaines où l'aimantation prend des directions différentes apparaissent. Pour minimiser l'énergie magnétique, les différents domaines s'organisent afin de refermer les lignes de champ. L'aimantation globale est ainsi pratiquement nulle. Quand on applique un champ magnétique, la taille des différents domaines change : ceux qui sont parallèles au champ s'étendent au détriment de ceux qui lui sont antiparallèles; une aimantation importante apparaît. Pour que les domaines puissent s'étendre, il faut que les parois qui les séparent se déplacent. Ces parois sont des régions dans lesquelles l'aimantation passe continûment d'une direction à une autre. Elles sont caractérisées par une épaisseur ξ généralement assez petites (de l'ordre de quelques distances inter-atomiques). Ces parois peuvent être accrochées par des défauts de structures comme des dislocations ou des impuretés. Dans le fer *doux*, très peu de défauts sont présents et les parois se déplacent presque librement. Si le fer contient beaucoup de défauts, le déplacement des parois est plus difficile et l'aimantation peut rester bloquée à une valeur non-nulle : nous avons alors un aimant.

Les parois qui séparent deux domaines magnétiques ont une épaisseur qui dépend de la température et qui présente aussi un comportement critique. Cette épaisseur peut être calculée à partir de l'expression de l'énergie libre dans laquelle on a ajouté un terme $(\partial M / \partial x)^2$ qui rend compte des variations spatiales de l'aimantation :

$$F(T, M) = \frac{a}{2}(T - T_c)M^2 + \frac{e}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \frac{b}{4}M^4 + \dots \quad (\text{II.23})$$

Pour obtenir le profil d'une paroi, cherchons la fonction $M(x)$ qui joint $M = +M_0$, $\partial M / \partial x = 0$ quand $x \rightarrow \infty$ et $M = -M_0$, $\partial M / \partial x = 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, avec $M_0 = \sqrt{(T_c - T)a/b}$. Nous pouvons ainsi estimer F : $F = -(b/4)M_0^4$. Ce profil obéit à l'équation :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{2e}}(M_0^2 - M^2) \quad (\text{II.24})$$

En intégrant on obtient :

$$M(x) = M_0 \text{th}(x/\xi) \text{ avec } \xi = \sqrt{\frac{2e}{a(T - T_c)}} \quad (\text{II.25})$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la longueur de corrélation. Elle diverge lorsque l'on approche du point critique avec l'exposant β , égal à 1/2 dans la théorie de LANDAU.

II.2.7 Comportement critique des bifurcations

Les bifurcations présentent l'analogie du comportement critique avec des exposants correspondant au modèle de LANDAU. Ainsi près d'une bifurcation, on assiste à un ralentissement de la dynamique avec un temps caractéristique qui évolue comme μ^{-1} , et la position d'équilibre obtenue pour la bifurcation fourche se comporte comme le paramètre d'ordre en $\sqrt{\mu}$. Finalement, si la bifurcation concerne un champ spatial, la longueur de corrélation de celui-ci diverge près de la transition.

II.3 Exercices

II.3.1 Sélection de structures

Nous nous proposons d'étudier la sélection des structures convectives de Rayleigh-Bénard. Suivant les conditions expérimentales, on peut observer des structures de types rouleaux, des carrés ou des hexagones. Nous allons voir que les termes non-linéaires sont responsables de cette sélection. Dans la première partie nous discuterons de l'équation modèle d'une structure de rouleaux. Dans la deuxième nous étudierons un modèle pouvant conduire à des carrés. La troisième partie correspond aux structures d'hexagones.

Equation des rouleaux

On propose de représenter un système de rouleaux par l'équation suivante :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - A^3 \quad (\text{II.26})$$

Sans faire de calcul indiquer :

- Que représente la variable A dans le cas de la convection ?

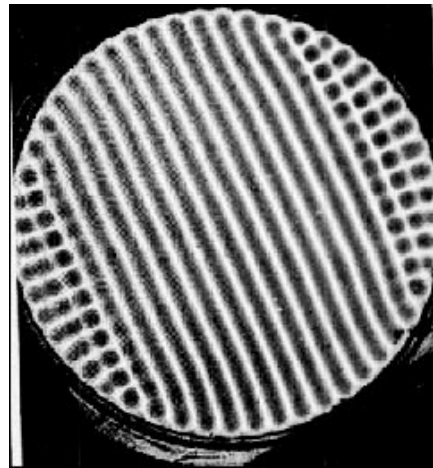


Figure II.11: Structure de rouleaux observée par ombroscopie dans la convection

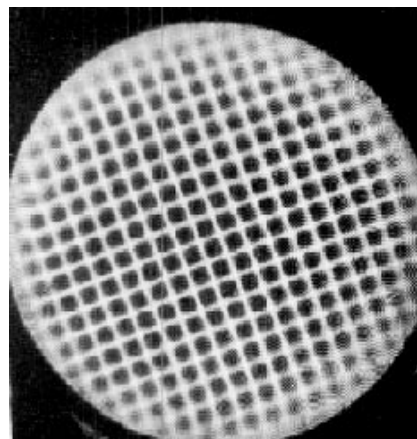


Figure II.12: Structure de carré observée par ombroscopie dans la convection

- Même question pour ϵ .
- Proposer une méthode de mesure de τ_0 . (On suppose que l'on sait mesurer A et que l'on peut imposer ϵ)

Sélection de structure carrée

Si les parois horizontales qui définissent la couche de fluide conduisent la chaleur beaucoup mieux que le fluide, les structures convectives sont de type "rouleaux". Au contraire, si le fluide conduit mieux la chaleur que les parois horizontales on observe une structure

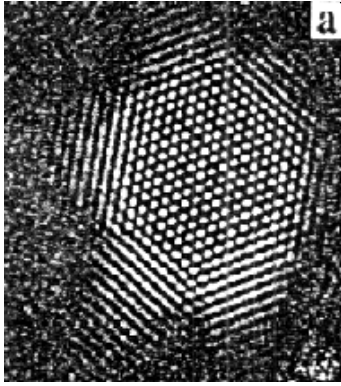


Figure II.13: Structure d'hexagones

de type "carrés" correspondant à la superposition de deux structures de rouleaux perpendiculaires. Nous proposons de modéliser ce comportement par un jeu d'équations simples, montrer comment les non-linéarités peuvent conduire aux deux types de comportements décrits.

Pour décrire une structure de carrés ou de rouleaux, on propose d'utiliser :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - (A^2 + \gamma B^2)A \\ \tau_0 \frac{\partial B}{\partial t} = \epsilon B - (B^2 + \gamma A^2)B \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

où A caractérise un système de rouleaux et B celui qui lui est perpendiculaire.

- Combien de dimensions l'espace des phases possède-t-il?
- Déterminer les points fixes de II.27, discuter en fonction de ϵ .
- Pour les différents points fixes, déterminer leur stabilité en fonction de γ .
- Dessiner qualitativement les trajectoires dans l'espace des phases dans les différents cas de figure pour $\epsilon > 0$.
- Interpréter les observations décrites au moyen de ce modèle. Discuter le paramètre qui détermine la stabilité d'un type de structure et indiquer de quoi il dépend.

Sélection de structure hexagonales

Quand la symétrie haut-bas est brisée, on peut observer des structures d'hexagones.

Pour décrire une structure d'hexagones ou de rouleaux, on propose d'utiliser :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A + \beta BC - A^3 \\ \tau_0 \frac{\partial B}{\partial t} = \epsilon B + \beta AC - B^3 \\ \tau_0 \frac{\partial C}{\partial t} = \epsilon C + \beta AB - C^3 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

où A caractérise un système de rouleaux, B un système de rouleaux à 120° et C un système à -120° .

- Quelle est la dimension de l'espace des phases ?
- Déterminer les points fixes de II.28, discuter en fonction de ϵ . On s'intéressera aux solutions (I) $A = B = C \neq 0$ et (II) $A \neq 0, B = C = 0$.
- Pour ces points fixes, déterminer leur stabilité en fonction de ϵ .
- Dessiner qualitativement les trajectoires dans l'espace des phases dans les différents cas de figure.
- Quelle est la nature de la bifurcation observée pour la solution (I).
- Discuter les changements de comportement en fonction de ϵ .

Bibliographie

- [1] V. ARNOLD *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir.
- [2] KITTEL *Introduction à la Physique des Solides*, Ed. Dunod.
- [3] N. BOCCARA *Symétries Brisées*, Ed. Herman.
- [4] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991).
- [5] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989).

Chapitre III

Transition vers le Chaos dans les Systèmes Hamiltoniens

Table des matières

	III.6.2 Disparition du dernier tore de KAM	12
III Transition vers le Chaos dans les Sys- tèmes Hamiltoniens		1
III.1 Systèmes à une fréquence		1
III.1.1 Les petites oscillations et l'exis- tence d'harmoniques		1
III.1.2 Evolution de la période d'oscilla- tion		2
III.1.3 Structure d'une résonance		3
III.2 Systèmes à deux fréquences		4
III.2.1 Boussole soumise à deux champs		4
III.2.2 Le pendule paramétrique		5
III.2.3 Le mapping standard		5
III.2.4 Critère de stochasticité		5
III.3 Section de POINCARÉ		6
III.3.1 Stroboscopie des trajectoires		6
III.3.2 Coupe de POINCARÉ		6
III.3.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole		7
III.4 Trajectoires passantes		7
III.4.1 Accrochage 1/2		8
III.4.2 Le spectre de la vitesse		9
III.4.3 Nombre de rotation rationnel		9
III.4.4 Tores de K.A.M.		9
III.5 Trajectoires appartenant à une résonance		9
III.5.1 Résonances secondaires		10
III.5.2 Hiérarchie des résonances		10
III.5.3 Disparition d'une résonance par doublement de période		11
III.6 Stochasticité à grande échelle		11
III.6.1 Allure de l'espace des phases		11

Résumé

Nous nous proposons ici de décrire l'apparition du chaos dans les *systèmes conservatifs*. Grâce aux études approfondies dont ils ont été les objets, il est possible d'en faire une approche en perturbations. C'est-à-dire, partant d'un système intégrable n'ayant que des solutions régulières, on ajoute une perturbation pondérée par un facteur ϵ et l'on étudie l'apparition des trajectoires chaotiques lorsque l'on augmente ϵ . Nous verrons que dès que la perturbation est suffisamment forte, la structure de l'espace des phases devient très riche. La justification rigoureuse de cette structure dépasse le cadre de notre exposé, mais sa description nous permettra d'introduire des concepts pratiques. Par ailleurs, l'esthétique de l'espace des phases justifie presque à elle seule sa présentation.

III.1 Systèmes à une fréquence

Revenons d'abord sur les exemples réguliers de la particule dans un potentiel à deux puits et du pendule pesant, afin de faire ressortir certains aspects fondamentaux des systèmes non-linéaires, dont les rôles sont cruciaux en présence de trajectoires chaotiques. Particulièrement, l'importance des harmoniques et la notion de résonance.

III.1.1 Les petites oscillations et l'existence d'harmoniques

La particule dans un potentiel à deux puits permet d'illustrer une méthode de perturbation des trajectoires pour les petites oscillations.

La force agissant sur la particule a la forme : $f(q) = q - q^3$; les petites oscillations ont lieu près des deux points d'équilibre stables caractérisés par $q = \pm 1$. Au voisinage du point $q_+ = 1$, en faisant le changement

de variable $u = q - 1$, l'expression de la force devient : $f(u) = -2u - 3u^2 - u^3$. Bien évidemment le terme linéaire en u conduit à une oscillation avec la fréquence $\omega_0 = \sqrt{2}$.

Examinons maintenant séparément le rôle de chacun des termes non-linéaires u^2 et u^3 en les traitant en perturbations. Pour cela nous écrivons :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - 3\epsilon u^2 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

et nous allons chercher une solution de la forme :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (\text{III.2})$$

En résolvant ordre par ordre nous obtenons :

A l'ordre 0 :

l'équation linéaire conduisant à $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = 2$.

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} du_1/dt = \dot{u}_1 \\ d\dot{u}_1/dt = -2u_1 - 3A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

En développant le terme en $\cos^2(\omega_0 t)$ sous la forme :

$$(A^2/2) [1 + \cos(2\omega_0 t)]$$

on décompose u_1 en deux parties u_{10} et u_{12} correspondant respectivement aux fréquences 0 et $2\omega_0$.

On obtient $u_{10} = -3A^2/4$, qui correspond à un déplacement de la position moyenne d'oscillation, lié à la dissymétrie du potentiel, relativement à la transformation $+u \rightarrow -u$. Plus "raide" du coté des $u > 0$, les excursions sont donc plus faciles du coté $u < 0$.¹

La contribution à la fréquence $2\omega_0$ prend la forme $u_{12} = (A^2/4) \cos(2\omega_0 t)$ et correspond à l'apparition d'un harmonique 2. Comme pour l'harmonique zéro, l'amplitude de l'harmonique deux varie comme A^2 . Ceci justifie donc le traitement en perturbations de ces harmoniques dans la limite des petites oscillations.

Procédons de la même façon pour le terme cubique :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

L'ordre 0 conduit toujours à la solution linéaire. L'ordre 1 fait apparaître un forçage en $A^3 \cos^3(\omega_0 t) = A^3/4(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$, soit une contribution à la fréquence $3\omega_0$ et une à la fréquence ω_0 . Si celle à $3\omega_0$ conduit à la formation d'un harmonique 3 attendu, la

¹Quoique cet harmonique zéro soit rarement mentionné, il joue souvent un rôle physique important. Pour ne citer qu'un exemple, c'est lui qui permet d'expliquer la dilatation des solides avec la température T où $A^2 \propto k_b T$ ce qui implique $u_0 \propto T$. [4]

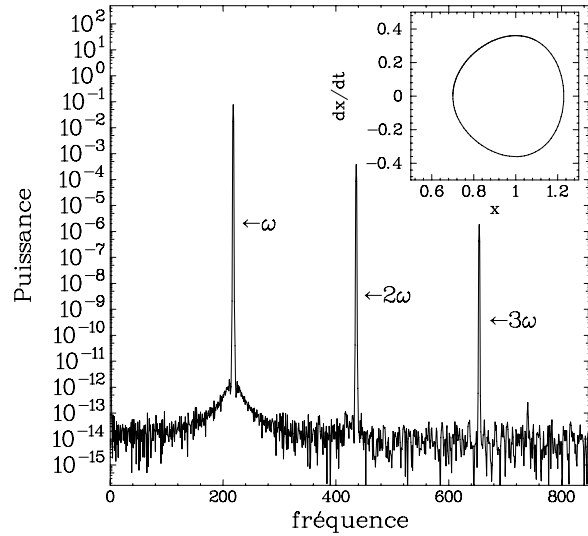


FIG. III.1: Spectre de puissance de la particule oscillant dans un puit non-linéaire. On remarque la présence d'harmoniques de la fréquence d'oscillation

contribution à ω_0 est précisément à la fréquence de résonance du système linéaire. Or elle conduit à un terme en $u_{31} \propto -(3A^3/4)t \sin \omega t$, c'est-à-dire à une contribution dont l'amplitude augmente continûment avec le temps ! Ceci est incompatible avec l'hypothèse de perturbation faite au début du calcul. L'échec de la méthode vient du fait que nous avons implicitement supposé que la fréquence du mouvement restait inchangée.

III.1.2 Evolution de la période d'oscillation

Pour obtenir une approche en perturbation correcte, nous devons supposer que u est une fonction périodique de fréquence ω telle que :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (\text{III.5})$$

En recherchant la solution sous la forme d'une fonction de la variable $y = \omega t$ et en développant jusqu'à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\begin{cases} du/dy = v \\ \omega^2 dv/dy = -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

A l'ordre 0 :

l'équation linéaire conduisant à $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = 2$

A l'ordre 1 :

On obtient $2\omega_0 \omega_1 \dot{u}_0 + \omega_0^2 \ddot{u}_1 = -2u_1 - (A^3/4)(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$ (avec $\ddot{u} = d^2/dy^2$). Le paramètre ω_1 peut

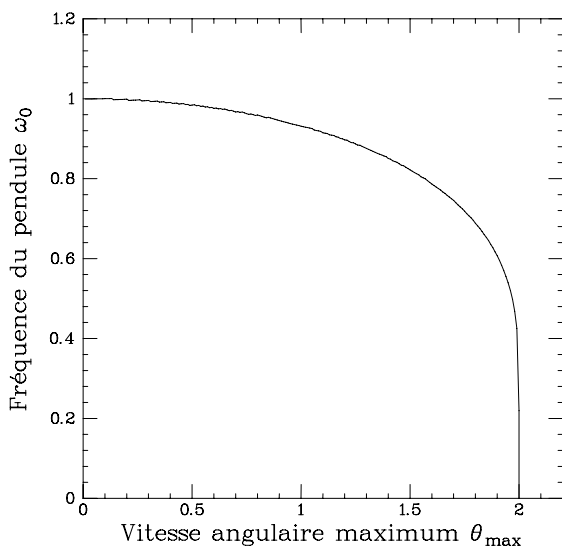


FIG. III.2: Evolution de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de la vitesse de rotation maximum θ_{max} .

être choisit de telle façon que la composante $\cos \omega_0 t$ disparaisse, ce qui évite le problème précédemment rencontré. La valeur de ω_1 est ainsi fixé à :

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} \quad (III.7)$$

Ainsi la fréquence d'oscillation de la bille dans un potentiel à deux puits va d'abord augmenter comme le carré de l'amplitude des oscillations. Dans le cas du pendule, le signe du terme en θ^3 est opposé, et l'on trouve $\omega_1 = -A^2/(8\omega_0)$: sa fréquence décroît avec l'amplitude.

Le calcul en perturbations, que nous avons esquissé, nous montre l'apparition d'harmoniques dûs aux termes non linéaires et surtout l'importance de la variation de la fréquence d'oscillation en fonction de l'amplitude.

Dans le cas particulier des systèmes hamiltoniens dont l'espace des phases est de dimension deux, on peut écrire la période des oscillations sous une forme intégrale en fonction de l'énergie totale du système :

$$\frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = E \quad (III.8)$$

qui conduit à :

$$t = \sqrt{2m} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \quad (III.9)$$

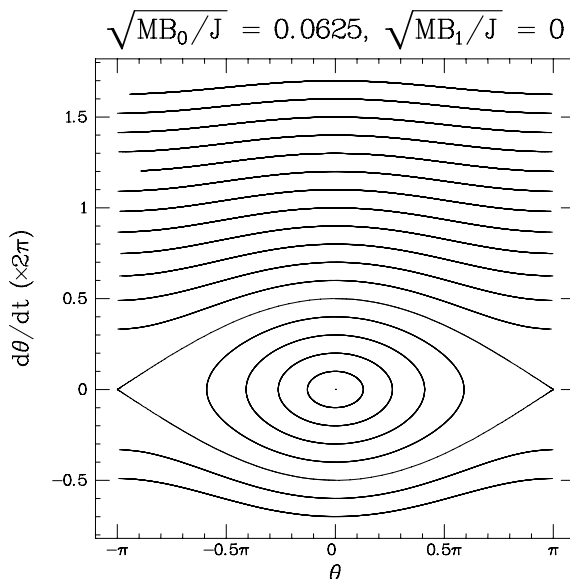


FIG. III.3: Trajectoires d'une boussole dans un champ magnétique ou d'un pendule dans l'espace des phases. Le domaine des oscillations délimité par la séparatrice définit une résonance.

où q_{min} et q_{max} correspondent aux excursions extrémales de l'oscillation. Notons que l'intégrale de l'équation III.9 est elliptique. Nous avons reproduit le comportement typique de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de sa vitesse maximum de rotation sur la figure III.2.

III.1.3 Structure d'une résonance

Une variante du pendule étudié précédemment est constituée d'une boussole dans un champ magnétique. En faisant varier continûment le champ, on modifie le potentiel agissant sur la boussole. Appelons \vec{M} l'aimantation de la boussole, J son moment d'inertie et \vec{B} le champ magnétique appliqué. Les équations régissant ce système dynamique sont :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = -(\mathcal{M}B/J) \sin \theta \end{cases} \quad (III.10)$$

Si le champ appliqué est nul, $B = 0$, les trajectoires dans l'espace des phases sont des droites parallèles à l'axe $\theta = 0$ puisque $\dot{\theta} = cte$. Le mouvement correspondant de la boussole est une rotation uniforme dans un sens ou dans l'autre. Observons maintenant l'évolution de ces trajectoires quand nous augmentons le champ magnétique jusqu'à une valeur B_0 . Comme nous l'avons reproduit sur la figure III.3, des trajectoires de type *centre* apparaissent autour de l'origine

et des points *cols* surgissent en $\theta = \pm\pi$ et $\dot{\theta} = 0$. Le domaine des oscillations est délimité par la trajectoire particulière que constitue la *séparatrice*, déjà décrite dans le cas du pendule. Les trajectoires de rotations à vitesse constante existent encore mais voient leur vitesse modulée par la présence de trajectoires d'oscillations. Tout se passe, en quelque sorte, comme si le champ magnétique B_0 avait écarté les trajectoires de rotations pour y insérer un îlot d'oscillations.

Cet îlot de trajectoires oscillantes est appelé *résonance*.

Il est facile de calculer son extension dans l'espace des phases : en effet, la demi-largeur correspond à la vitesse maximale que prend la boussole en décrivant la séparatrice soit :

$$\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{MB/J} \quad (\text{III.11})$$

Ainsi la demi-largeur de la résonance croît avec le champ magnétique B . Puisque $\dot{\theta}$ est également une pulsation, il est utile de la comparer à la fréquence propre des petites oscillations $\omega_0 = \sqrt{MB/J}$. On voit que $\dot{\theta}_{max} = 2\omega_0$.

III.2 Systèmes à deux fréquences

Nous nous proposons maintenant d'étudier qualitativement la transition vers le chaos de systèmes hamiltoniens particulièrement simples. Nous avons vu qu'il suffit que leur espace des phases soit de dimension 4 pour qu'ils ne soient pas intégrables. Nous allons introduire trois dispositifs très voisins dans leurs principes, munis d'un paramètre de contrôle qui permet de les faire évoluer depuis une situation intégrable vers une qui ne l'est pas. Par ailleurs nous allons montrer que l'une des dimensions de leurs espaces des phases correspond à un comportement trivial ; on peut donc décrire leur évolution dans un espace des phases plus commode à représenter, car ayant seulement trois dimensions.

III.2.1 Boussole soumise à deux champs

Plaçons une boussole dans un champ magnétique statique B_0 et rapprochons la suffisamment d'une seconde boussole pour qu'existe un couplage magnétique entre elles. Nous venons de construire un système évoluant dans un espace des phases de dimension 4 puisque nous devons utiliser les variables θ et $\dot{\theta}$ pour décrire la première boussole, et ϕ et $\dot{\phi}$ pour la seconde. Ce système est non linéaire et possède suffisamment de degrés de liberté pour présenter des trajectoires chaotiques.

Supposons maintenant que la seconde boussole soit beaucoup plus grosse et beaucoup plus lourde que la

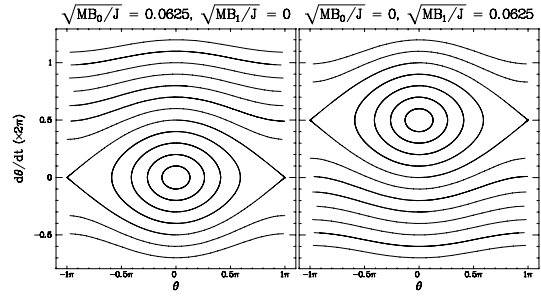


FIG. III.4: Dans les deux cas limites où l'un des champs est nul, l'espace des phases correspond à l'existence d'une résonance centrée en $\theta = 0$ quand $B_1 = 0$ (à gauche) tandis qu'elle est centrée en $\theta = 1$ dans le cas $B_0 = 0$ (à droite).

première : son moment d'inertie J_ϕ est beaucoup plus grand que celui de la première. Dès lors, les mouvements de la première boussole auront peu d'influence sur la seconde tandis que l'inverse ne sera pas vrai. Dans la limite où le rapport des moments d'inertie tend vers l'infini, les mouvements de la grosse boussole ne sont pas du tout affectés par ceux de la première et ils se réduisent par exemple, à une rotation à vitesse constante $\dot{\phi} = \Omega$. Ce nouvel invariant remplace avantageusement celui de l'énergie du système, puisqu'il permet de ne considérer qu'un espace des phases à trois dimensions : θ , $\dot{\theta}$ et ϕ .

D'un point de vue pratique, le rôle de la grande boussole se résume à imposer un champ magnétique B_1 tournant avec une pulsation Ω . Une façon de réaliser ce dispositif consiste à placer une seule boussole à la fois dans un champ magnétique B_0 fixe et dans un champ B_1 tournant. En notant \mathcal{M} le moment magnétique de la boussole et J son moment d'inertie, les équations de ce système dynamique prennent la forme :

$$\begin{cases} d\theta/dt &= \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt &= -\frac{MB_0}{J} \sin \theta - \frac{MB_1}{J} \sin(\theta - \phi) \\ d\phi/dt &= \Omega \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Il est intéressant de remarquer qu'en coupant le champ statique et en ne soumettant la boussole qu'au champ tournant (soit $B_0 = 0$ et $B_1 \neq 0$), on retrouve le problème d'une boussole dans un champ fixe (c'est-à-dire du pendule pesant) en effectuant le changement de variable $\theta_1 = \theta - \Omega t$. Dans ce nouveau référentiel, le champ tournant engendre sur l'axe $\dot{\theta}$ une résonance décalée de la quantité Ω . Quand les deux champs sont non nuls, chacun donne lieu à une résonance : le dispositif est dit à deux résonances.

Avant d'étudier plus avant le cas de la boussole, nous allons analyser le cas classique très voisin du

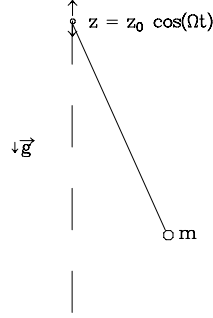


FIG. III.5: Pour réaliser un oscillateur paramétrique, il suffit de monter et descendre le point d'attache d'un pendule de façon périodique

pendule paramétrique.

III.2.2 Le pendule paramétrique

Le pendule paramétrique consiste en un pendule pesant dont le point d'attache est soumis à un mouvement alternatif vertical d'amplitude a et de pulsation Ω . Pour le modéliser, il suffit d'ajouter une composante sinusoïdale au champ de pesanteur. Ainsi la force de rappel s'écrit $(g(1 + a \cos \phi)/l) \sin \theta$ où θ est la position angulaire du pendule. En développant, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = -(g/l) \sin \theta - (ag/2l) \sin(\theta - \phi) \\ d\phi/dt = \Omega \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Sous cette forme, le pendule paramétrique est équivalent à une boussole soumise à trois champs : un champ fixe et deux champs rotatifs d'intensités égales tournant en sens opposés avec les pulsations $\pm\Omega$. Par des arguments analogues à ceux que nous avons utilisés pour la boussole, le pendule paramétrique est un problème à trois résonances, l'une centrée à $\dot{\theta} = 0$, et les deux autres autour de $\dot{\theta} = \pm\Omega$.

Nous verrons bientôt qu'une trajectoire est sensible aux résonances qui lui sont proches. C'est la raison pour laquelle le pendule paramétrique a des caractéristiques très semblables à celles de la boussole soumise à deux champs.

III.2.3 Le mapping standard

Comme troisième système, nous introduisons enfin le *mapping standard*. Il s'agit plutôt d'un modèle numé-

rique, proposé par CHIRIKOV [10], défini non par des équations différentielles mais par des itérations traduisant une forme de discrétisation du temps. Ceci permet une exploration très rapide de ses propriétés. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Revenons à la boussole et appliquons lui périodiquement un champ magnétique sous forme d'impulsions très brèves et intenses, à la fréquence $\Omega/2\pi$. Les variables θ_n et $I_n/2\pi$ représentent respectivement la position et vitesse angulaires juste avant l'application de la n -ième impulsion. Entre deux impulsions, le champ magnétique est nul et la boussole tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = I/2\pi$. L'impulsion de champ est équivalente à un choc, qui fait changer la vitesse angulaire de la boussole d'une quantité dépendant de l'angle θ de la boussole avec le champ. Dans cette situation, les équations différentielles de la boussole sont :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = 2\pi M \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n\pi) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

En écrivant que la somme des impulsions sous forme d'une somme de cosinus, nous obtenons :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = 2\pi M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\theta - nt) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Le mapping standard apparait donc comme un système ayant une infinité de résonances d'amplitudes égales, centrées en $\dot{\theta} = n$, $n \in \mathcal{Z}$.

III.2.4 Critère de stochasticité

Il peut paraître surprenant qu'un système ayant une infinité de résonances comme le mapping standard puisse se comparer à celui de la boussole soumise à deux champs seulement. Leur comportements sont pourtant similaires tant que les résonances ne sont pas trop fortes. Nous allons quantifier ce que cela signifie.

Dans le cas de la boussole, une résonance correspond à un domaine où ses mouvements sont des oscillations autour du champ magnétique associé. Une résonance correspond à un *domaine de piégeage*. De ce fait il est impossible à une trajectoire d'appartenir à la fois à la résonance associée au champ fixe et à celle du champ tournant. Comme la largeur des résonances varie avec l'amplitude du champ associé, on conçoit aisément qu'en augmentant l'amplitude des champs, un

problème apparait lorsque les deux résonances viennent en contact ou même se chevauchent. Dans cette situation la boussole ne sait plus quel champ suivre et adopte généralement une trajectoire chaotique, suivant irrégulièrement l'un puis l'autre. Inversement on s'attend à des mouvements réguliers lorsque les amplitudes des champs sont faibles.

Ce raisonnement permet d'obtenir un critère rudimentaire mais simple d'existence de trajectoires chaotiques : le recouvrement des résonances a lieu quand la somme de leurs demi-largeurs est égale à la distance qui les sépare. C'est le **critère de stochasticité** :

$$S = \frac{2\sqrt{\mathcal{M}B_0/J} + 2\sqrt{\mathcal{M}B_1/J}}{\Omega} = \frac{2(\omega_0 + \omega_1)}{\Omega} \quad (\text{III.17})$$

où ω_0 et ω_1 sont respectivement les fréquences propres de la boussole dans le champ fixe et dans le champ tournant.

Nous voyons que le recouvrement des résonances a lieu lorsque $S = 1$, ce qui peut être atteint soit en augmentant l'amplitude des champs, soit en réduisant la fréquence du champ tournant Ω .

Ce critère peut s'appliquer à chacun des trois systèmes que nous avons décrits, où il existe plusieurs résonances décalées les unes des autres suivant l'axe θ d'une quantité égale à la fréquence Ω .

III.3 Section de POINCARÉ

Jusqu'à présent, nous nous sommes bien gardés de donner une représentation de l'espace des phases (tridimensionnel !) de la boussole ou du pendule paramétrique. Nous avons aussi utilisé pour ces systèmes le concept de résonance introduit pour un espace des phases à deux dimensions, sans justifier sa validité dans le cas de trajectoires chaotiques. En fait, à l'aide d'une représentation appropriée de ces espaces des phases, nous allons voir que les résonances existent globalement dans le système de la boussole mais qu'elles peuvent être sujettes à des perturbations importantes.

III.3.1 Stroboscopie des trajectoires

La boussole et le pendule paramétrique sont tous deux perturbés par une composante périodique de fréquence Ω . Une façon naturelle de vérifier si ces dispositifs tournent rond ou oscillent avec la fréquence de la perturbation consiste à les stroboscooper, c'est-à-dire à en observer la position angulaire θ à des intervalles de temps réguliers $t_n = n2\pi/\Omega$. C'est équivalent à faire une coupe de la trajectoire de la boussole dans un plan $\phi = \text{cte}$. Au lieu d'une trajectoire continue, nous avons maintenant une série de points d'intersection

Coupe de Poincaré

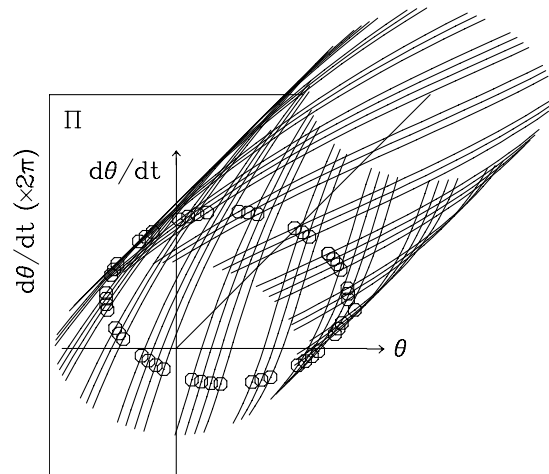


FIG. III.6: Principe de la coupe de POINCARÉ de la boussole.

dans un plan $\theta, \dot{\theta}$: c'est une *coupe de POINCARÉ* (nous avons utilisé la périodicité de ϕ pour ramener la trajectoire dans l'intervalle d'étude $[0, 2\pi]$). La coupe de POINCARÉ est un outil puissant permettant de réduire l'espace des phases d'une dimension.

Dans les cas de la boussole ou du pendule paramétrique, on se ramène donc au plan $\theta, \dot{\theta}$, semblable à celui utilisé pour représenter les trajectoires du pendule simple. Toutefois ici, une trajectoire est représentée non par une courbe continue, mais par une suite discrète de points (En principe il serait judicieux de les numéroter suivant leur ordre d'apparition, quoique cela soit rarement fait en pratique).

Comme le mapping standard correspond directement à la coupe de POINCARÉ d'une boussole soumise à un champ pulsé, ces deux types de diagrammes peuvent être directement comparés.

III.3.2 Coupe de POINCARÉ

Quoique la trajectoire d'un système dynamique quelconque ne présente pas forcément de périodicité imposée par une perturbation extérieure, il est cependant toujours possible de définir une section de POINCARÉ comme l'ensemble des points d'intersection d'une trajectoire avec un plan quelconque de l'espace des phases. On ne retient que les points correspondant à une intersection se faisant dans un sens donné. Cette fois-ci, le temps qui sépare deux intersections consécutives n'est pas forcément constant.

Une coupe de POINCARÉ réduit l'information que contient la trajectoire complète, et il est possible qu'elle

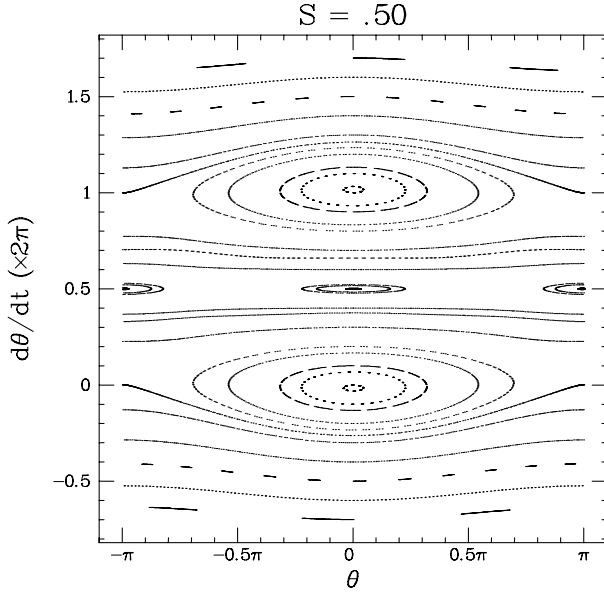


FIG. III.7: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $\mathcal{S} = 1/2$. En variant les conditions initiales, on distingue différentes régions de l'espace des phases, et notamment les résonances.

ne soit pas représentative de toute la dynamique. Pour avoir une vue réaliste de la trajectoire, il faut faire varier le plan de coupe (c'est-à-dire la phase de la stroboscopie).

III.3.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole

Pour illustrer ce concept, observons la coupe représentée sur la figure III.7, effectuée à $\phi = 0$, avec des champs magnétiques d'amplitudes égales, et à $\mathcal{S} = 1/2$.

Pour certaines conditions initiales, les séries de points s'alignent sur une courbe bien définie. On retrouve ainsi l'allure des deux résonances et des trajectoires de rotations.

III.4 Trajectoires passantes

Nous allons décrire ici l'évolution des trajectoires de rotation situées entre les deux résonances principales. Il est facile d'imaginer que les trajectoires passantes sont peu affectées par les résonances tant que $\mathcal{S} \ll 1$, mais qu'elles le deviennent dès que \mathcal{S} se rapproche de 1. Si cette image est qualitativement correcte, elle est toutefois altérée par l'existence d'accrochages de fréquences. Il en résulte une structure particulière de l'espace des phases.

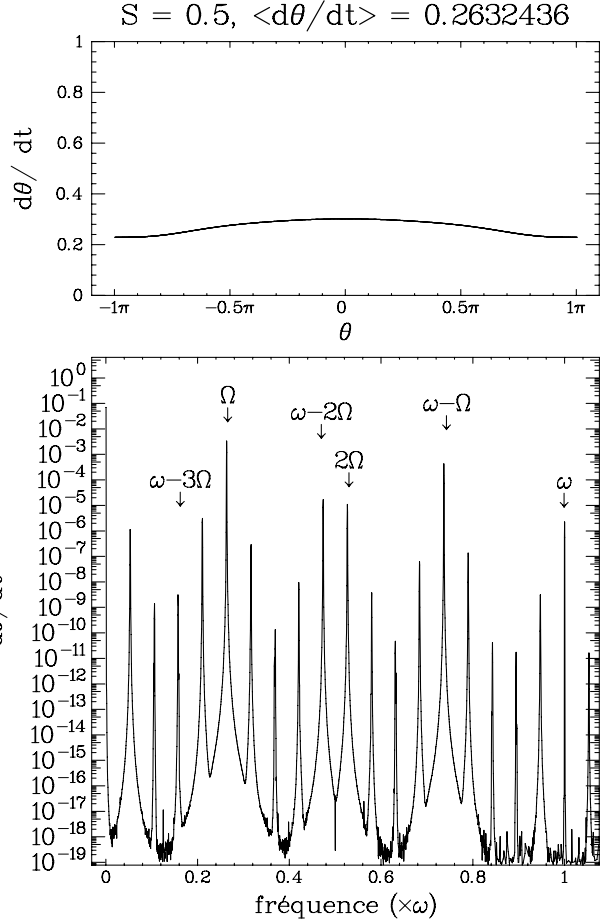


FIG. III.8: Analyse d'une trajectoire passante. En haut section de Poincaré, on remarque que la trajectoire est dense. En bas spectre de Fourier de la vitesse angulaire.

Nous allons chercher à calculer une de ces trajectoires sous la forme d'un développement en ϵ comme nous l'avons déjà fait. Nous supposons que B_0 et B_1 proportionnel à ϵ (donc petit). Nous cherchons ainsi à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin \theta - \epsilon P \sin(\theta - \Omega t) \quad (\text{III.18})$$

Où $M = \mathcal{M}B_0/J$ et $P = \mathcal{M}B_1/J$. Nous cherchons une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t) + \epsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (\text{III.19})$$

A l'ordre 0 : nous avons à résoudre : $\ddot{\theta}_0 = 0$, ce qui conduit à :

$$\theta_0(t) = \phi + \omega t + \dots$$

Il s'agit d'une trajectoire de rotation à la vitesse angulaire constante ω ; le terme de phase ϕ correspond à la multiplicité des choix possibles pour l'origine des phases.

A l'ordre 1 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta}_1 = -M \sin(\phi + \omega t) - P \sin(\phi + (\omega - \Omega)t)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\theta_1(t) = \frac{M}{\omega^2} \sin(\theta_0(t)) + \frac{P}{\omega'^2} \sin(\theta'_0(t))$$

Où $\theta'_0(t) = (\phi + (\omega - \Omega)t)$. En tournant, la boussole ressent le champ fixe comme une perturbation périodique de fréquence ω . Sa vitesse de rotation est modulée à cette fréquence. De façon analogue, le champ tournant impose une perturbation à la fréquence $\omega' = \omega - \Omega$. Nous venons de montrer que le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole est constitué d'au moins deux raies aux fréquences : ω et ω' .

A l'ordre 2 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin(\theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t)) - \epsilon P \sin(\theta'_0(t) + \epsilon \theta'_1(t))$$

En développant les sinus et en gardant les terme en ϵ^2 on a :

$$\ddot{\theta}_2 = -M \cos \theta_0 \left[\frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right] - M \cos \theta'_0 \left[\frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right]$$

Le terme $\cos \theta_0 \sin \theta_0$ conduit à une perturbation en $\sin(2\phi + 2\omega t)$ c'est à dire à un harmonique 2ω ; de même le terme en $\cos \theta'_0 \sin \theta'_0$ conduit à l'harmonique $2\omega'$. Les termes croisés $\cos \theta_0 \sin \theta'_0$ et $\cos \theta'_0 \sin \theta_0$ donnent lieu à des termes $\theta_0 \pm \theta'_0$ et $\theta'_0 \pm \theta_0$ soit à des perturbations de fréquences $\omega \pm \omega'$ et $\omega' \pm \omega$. En général nous pouvons déterminer l'expression de θ_2 et poursuivre le développement aux ordres supérieurs. Cependant dans le cas où $\omega = \Omega/2 = -\omega'$, nous avons à résoudre l'équation : $\ddot{\theta}_2 \sim -\sin(2\phi)$. Ce qui conduit à un terme qui croît en t^2 qui n'est pas petit comme nous l'avions supposé au début du calcul en III.19. Dans le cas $\omega = \Omega/2$ nous avons un accrochage de fréquences.

III.4.1 Accrochage 1/2

Quand deux oscillateurs s'accrochent, il est facile de comprendre que leur différence de phase ne peut pas être quelconque. Dans l'exemple de l'accrochage 1/2, nous venons de montrer que la boussole est soumise à une perturbation en $\sin(2\phi)$. Pour décrire correctement l'accrochage il faut reprendre le calcul en perturbation mais en laissant à la fréquence ω la liberté d'évoluer,

comme nous l'avions fait en III.1.2. Plus précisément, comme une modulation de fréquence n'est autre qu'une modulation de phase, nous allons supposer que ϕ varie dans le temps. Nous allons chercher une solution de la forme :

$$\theta = \frac{\Omega}{2}t + \phi(t) + \dots$$

Nous allons analyser le mouvement correspondant à cet accrochage dans un cas particulier. Si nous choisissons $M = P$, l'équation III.18 devient :

$$\ddot{\phi} = -2\epsilon M \sin \phi \cos(\Omega t/2)$$

Remarquons que dans cette situation, le point correspondant à $\phi = 0$ et $\dot{\theta} = \Omega/2$ est un point fixe tout comme le point correspondant à $\phi = \pi$. Pour appréhender la solution, nous allons supposer que la phase ϕ est voisine de 0 mais peut osciller lentement autour de ce point fixe :

$$\phi = \exp(\epsilon \omega_0 t) [u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots]$$

A l'ordre 0 : on obtient : $\ddot{u}_0 = 0$

A l'ordre 1 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_1 - i\omega_0 \dot{u}_1 = -2M u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (\text{III.20})$$

ce qui conduit à :

$$\dot{u}_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{8M}{\Omega^2} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

A l'ordre 2 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_2 - i\omega_0 \dot{u}_2 - \omega_0^2 u_2 = -2M u_1 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

En remplaçant u_1 par son expression III.20, on résoud séparément les termes qui ne dépendent pas explicitement du temps, ceux en $\cos(\Omega t)$ et ceux en $\cos(\Omega/2t)$. Ceci permet de trouver la forme de ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{8M^2}{\Omega^2}$$

Nous voyons ainsi que la fréquence d'oscillation de la phase est parfaitement définie puisqu'elle vaut $\epsilon \omega_0$. Près des points fixe $\theta = 0, \dot{\theta} = 1/2$ et $\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 1/2$, on assiste à une oscillation de phase qui correspond aux trajectoires elliptiques visibles sur la figure III.7.

Les équations en $\cos(\Omega t)$ et $\cos(\Omega/2t)$ permettent de décrire la forme de u_2 :

$$\begin{aligned} u_{21} &= i\omega_0 \frac{16M}{\Omega^3} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ u_{22} &= -u_0 \frac{32M^2}{\Omega^4} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

III.4.2 Le spectre de la vitesse

Nous pouvons généraliser les résultats du développement en ϵ en considérant le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole : tant que les perturbations périodiques ne sont pas de fréquence nulle, les ordres plus élevés en ϵ font apparaître des fréquences du type $p\omega \pm q\omega'$ avec p et $q \in \mathbb{Z}$. Ce spectre est compliqué mais toutes les raies peuvent s'expliquer par des combinaisons des fréquences ω et ω' qui définissent le *nombre de rotation* $\sigma = \omega/\omega'$.

III.4.3 Nombre de rotation rationnel

Chaque fois que ce nombre de rotation σ est rationnel, donc égal à p/q , le développement en ϵ est singulier : il apparaît un *accrochage de fréquences*. La trajectoire de rotation se scinde en un chapelet de q petites résonances. Les q résonances font apparaître q points centres et autant de points cols. On peut voir un exemple de ce phénomène sur la figure III.7. Lors d'un accrochage de fréquences, on pourrait penser que des deux fréquences de départ ω et ω' il n'en subsiste plus qu'une seule ; en fait, comme nous l'avons vu dans l'analyse du cas particulier de l'accrochage $1/2$, l'oscillation de phase fait apparaître une nouvelle fréquence $\epsilon\omega_0$ qui peut à nouveau présenter une relation de commensurabilité ou non avec la fréquence fondamentale. Dans le cas générale, deux fréquences subsistent dans le système.

Par ailleurs, l'amplitude des chapelets de résonances est d'autant plus grande que le rationnel est simple, c'est-à-dire que q est petit. A égale distance des deux résonances fondamentales, on observe ainsi un chapelet de deux résonances lié à l'accrochage $1/2$. Celles de l'accrochage $1/3$ sont plus faibles et ainsi de suite.

III.4.4 Tores de K.A.M.

Si le rapport $\sigma = \omega/(\Omega - \omega)$ est un nombre irrationnel, le mécanisme d'accrochage précédent n'a plus lieu et le développement en ϵ peut se construire. Cependant, il est possible que ce développement ne converge pas. La trajectoire subsiste tant que la perturbation liée aux résonances n'est pas trop forte. En introduisant le paramètre de stochasticité \mathcal{S} nous avons montré comment les résonances principales pouvaient perturber les trajectoires passantes. L'apparition de chapelets de résonances secondaires va aussi contribuer à déstabiliser les trajectoires irrationnelles voisines. En d'autres mots, certaines trajectoires vont rester régulières pour un système non intégrable. Cette proposition constitue le *théorème KAM*.

Sa preuve fut un morceau de bravoure et d'ingéniosité mathématiques de la part de KOLMOGOROV, ARNOLD et MOSER. Son importance est capitale car il nous

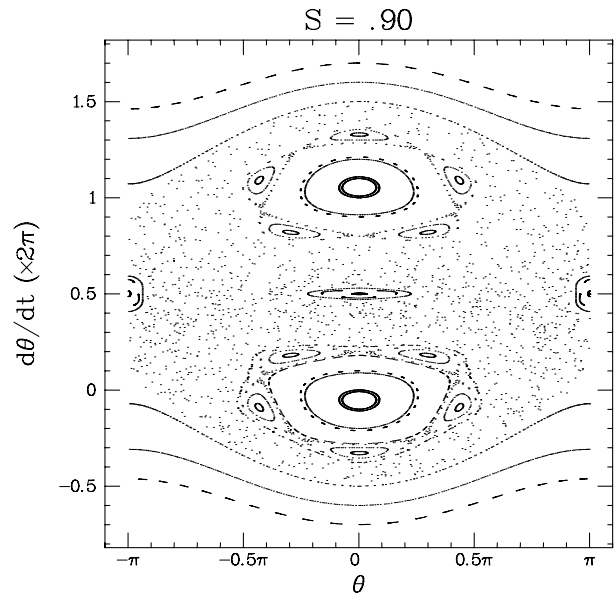


FIG. III.9: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $\mathcal{S} = .90$. On remarquera l'apparition des 5 îlots correspondant à un accrochage $1/5$.

permet d'affirmer que certaines trajectoires passantes comprises entre les deux résonances principales resteront rigoureusement régulières jusqu'à une certaine valeur seuil du paramètre de stochasticité. Ce type de trajectoire correspond à des séries de points se plaçant sur les courbes bien définies de la figure III.7. Ce théorème permet de justifier le développement en ϵ que nous avons ébauché. En principe, il permet de dire le domaine du paramètre ϵ pour lequel les trajectoires restent régulières.

III.5 Trajectoires appartenant à une résonance

Nous venons de voir que le rapport σ des deux fréquences qui caractérise une trajectoire passante, détermine la stabilité de cette dernière, au moins pour un paramètre de stochasticité faible. Comme ce rapport change de 0 à 1 quand la vitesse angulaire varie depuis 0, près de la résonance du champ fixe, jusqu'à Ω , près de celle du champ tournant, nous allons observer une alternance de rationnels et d'irrationnels qui conduit à une structure de l'espace des phases très complexe. Examinons la situation au sein d'une des résonances principales.

Sans que cela soit restrictif, considérons le cas de la résonance associée au champ fixe. Au premier ordre, la boussole oscille autour du champ fixe avec la fréquence

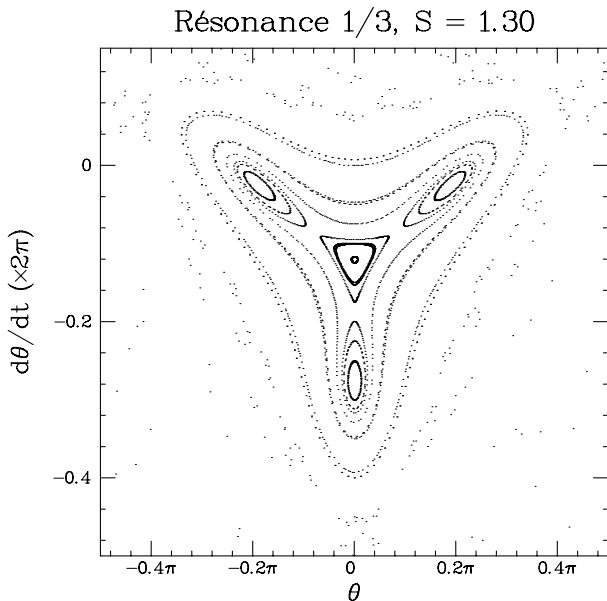


FIG. III.10: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $S = 1.30$. Accrochage $1/3$, remarquer que les points cols et les points centres ne sont pas répartis sur une ellipse.

ω . Elle est perturbée par le champ tournant qui induit une composante d'oscillation à la fréquence Ω . Nous sommes donc en présence d'un système ayant deux fréquences, comme pour les trajectoires passantes. De la même façon, la stabilité des trajectoires va dépendre du caractère rationnel ou non du rapport $\sigma = \omega/\Omega$.

III.5.1 Résonances secondaires

C'est à ce stade que le comportement non-linéaire de l'oscillation de la boussole prend toute son importance. Comme nous le montre la figure III.2, la fréquence évolue continûment depuis la fréquence des petites oscillations ω_l jusqu'à 0 pour la résonance. La situation est assez comparable à celle des trajectoires passantes où la vitesse angulaire varie continûment d'une résonance à l'autre. Toutefois, le domaine des oscillations linéaires est un peu singulier puisque la variation de la fréquence ω est du second ordre pour $\omega \approx \omega_l$.

On assiste donc à une alternance d'accrochages et de trajectoires régulières associées à des tores de KAM. Les accrochages font apparaître des chapelets périodiques d'îlots secondaires comme ceux de la figure III.9. Dans le domaine où les oscillations sont presque linéaires, l'amplitude des harmoniques est petite et les accrochages sont très peu marqués. Par contre, au fur et à mesure que l'on s'écarte du centre de la résonance, les accrochages deviennent plus forts et les

îlots secondaires plus larges.

Les différents accrochages ont un rapport de fréquence ω/Ω borné par $\omega_l/\Omega = \sqrt{\mathcal{M}B_0/J}/\Omega$. On remarque ainsi que lorsque l'on augmente le champ magnétique B_0 , les îlots d'un accrochage p/q s'écartent du centre de la résonance. Ainsi, l'augmentation de ω_l est compensée par la décroissance de la fréquence d'oscillation avec son amplitude. Comme les accrochages sont d'autant plus intenses que le rationnel qui les caractérise est petit, la perturbation qu'ils apportent est petite pour $\omega_l/\Omega \ll 1$ et devient très importante quand ω_l/Ω approche $1/3$ et $1/2$.

La séparatrice de la résonance correspond à une trajectoire très sensible à toute perturbation (celle du pendule en équilibre instable). C'est également dans son voisinage que la fréquence d'oscillation varie le plus rapidement jusqu'à s'annuler. Elle constitue donc la première région de l'espace des phases à devenir chaotique quand on augmente S , comme on peut le voir sur la figure III.7.

III.5.2 Hiérarchie des résonances

Les accrochages ne sont pas tous de la même nature et les plus forts sont particuliers. Si notre description des accrochages p/q avec $q > 3$ est bonne, alors les accrochages $1/3$ et surtout $1/2$ sont très particuliers. Avant de les détailler, précisons pour quelles valeurs de S on peut s'attendre à les observer. Choisissons une même amplitude pour le champ fixe et le champ tournant. Alors $\omega_l/\Omega = S/4$. Pour atteindre le rapport $1/3$, il faut avoir $S = 4/3$ (2 pour la résonance $1/2$), c'est-à-dire être dans un domaine où les résonances se recouvrent. Dans ce régime, le chaos affecte la plupart des trajectoires, et seule le cœur de la résonance n'est pas chaotique.

L'accrochage $1/3$ montre une première particularité : les trois petits îlots auxquels il donne naissance apparaissent à distance finie du cœur de la résonance et non pas en son centre, comme dans les cas des accrochages $1/5$ ou $1/4$, par exemple. De plus la structure de ces îlots est différente de celle observée pour les autres accrochages (voir fig. III.10).

L'accrochage $1/2$ est encore plus particulier : tandis que les autres accrochages laissent le cœur de la résonance indemne, l'accrochage $1/2$ scinde la résonance en deux. Le point centre du cœur se transforme en un point col tandis que deux nouveaux points centres apparaissent de part et d'autre comme on peut le voir sur la figure III.11.

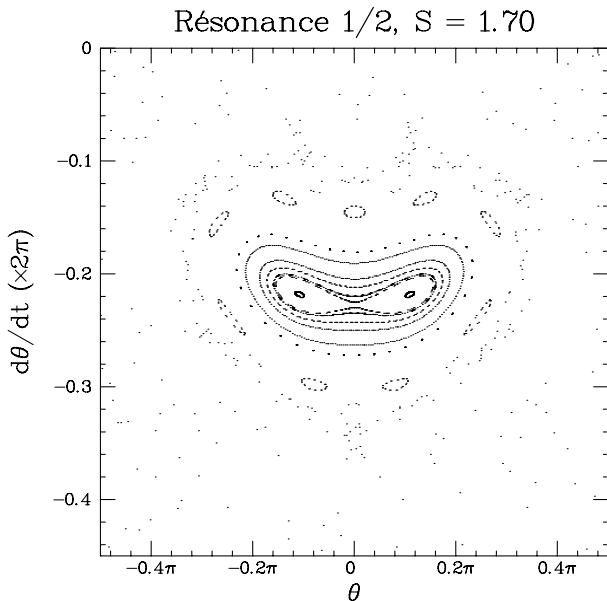


FIG. III.11: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $S = 1.70$. Accrochage $1/2$. Remarquer comment cet accrochage scinde la résonance en deux. Les neuf petits îlots qui décorent les deux résonances centrales correspondent à l'accrochage $4/9$.

III.5.3 Disparition d'une résonance par doublement de période

Le scénario que nous venons de décrire se reproduit pour ces résonances secondaires. Au cœur de la résonance, les deux fréquences sont commensurables ; il y a donc accrochage de fréquences entre les mouvements d'oscillation et ceux induits par la perturbation. L'existence d'un accrochage traduit la sensibilité de ces deux mouvements à leur phase relative. Comme celle-ci est différente de la phase au point centre de la résonance, elle va osciller autour cette valeur. Le chapelet d'îlots manifeste cette oscillation.

Quand ces îlots sont très petits, l'oscillation de la différence de phase relative est très lente et le rapport de cette fréquence à celle associée à p/q nous fournit un nouveau nombre de rotation σ_1 . Suivant les valeurs de σ_1 , nous observons de nouveaux accrochages ou des trajectoires régulières. Lorsque S augmente, σ_1 augmente aussi et la résonance secondaire se scinde en deux pour $\sigma_1 \approx 1/2$. Les nouvelles résonances issues de la résonance secondaire vont se comporter de la même façon, et l'on assiste à une cascade de division de résonance par deux.

Nous voyons ainsi que la structure des résonances est hiérarchique : une résonance engendre des résonances qui engendrent elles-mêmes des résonances et

ainsi de suite. On dit que l'espace des phases a une structure *auto-similaire*.

III.6 Stochasticité à grande échelle

Le scénario que nous venons d'explicitier est valable à toute valeur du paramètre S . Des successions de résonances secondaires apparaissent, mais la multiplication des résonances ne constitue pas directement le chaos. Pourtant nous avons dit que les trajectoires stochastiques devenaient plus nombreuses quand S augmente. Par l'accroissement des largeurs relatives des résonance conduit au chaos : l'espace disponible pour les tores de KAM décroît, leurs formes sont de plus en plus torturées et il finissent par se déchirer.

Une façon de quantifier ce résultat consiste à inspecter les résonances aux différents ordres hiérarchiques. Si nous ne considérons que les trajectoires passantes, les deux résonances principales constituent la première génération. Imaginons que nous étudions la trajectoire correspondant au nombre de rotation irrationnel σ , des résonances filles apparaissent de part et d'autre de la trajectoire associée à σ . On peut reprendre ces résonances comme une nouvelle base et répéter l'opération. Se faisant, l'ampleur des résonances filles que l'on trouve soit croît, soit décroît au fur et à mesure des itérations. Dans le deuxième cas, toutes les trajectoires apparaissent lisses aux petites échelles : elles sont régulières. Dans le premier cas les résonances poussent les trajectoires et les déforment à toutes les échelles. C'est ainsi que les trajectoires associées à des σ irrationnels sont détruites. La valeur seuil que nous avons évoquée pour la stabilité des tores de K.A.M. correspond précisément à ce changement de comportement.

III.6.1 Allure de l'espace des phases

L'étude locale de l'espace des phases que nous venons de décrire permet d'entrevoir son allure : une structure imbriquée de résonances, des trajectoires régulières près de leurs cœurs et des trajectoires chaotiques près des séparatrices. Le mécanisme d'amplification des résonances et de destruction des tores de K.A.M. conduit à l'extension des domaines chaotiques.

Notons enfin que deux trajectoires régulières sont toujours nettement séparées dans l'espace des phases, tandis que deux trajectoires chaotiques s'enchevêtrent et forment une mer stochastique, à la condition de ne pas être séparées par une trajectoire régulière qui constitue alors une barrière étanche.

III.6.2 Disparition du dernier tore de KAM

Ainsi tant qu'il reste un seul tore de K.A.M. entre les deux résonances principales de la boussole, les trajectoires chaotiques qui, très vite, sont apparues près de la séparatrice, ne sont pas reliées entre elles et restent localisées autour de leurs résonances. Quand ce dernier tore lâche, les trajectoires chaotiques explorent les voisinages de chacune des résonances : le chaos qui apparaît est dit à *grande échelle*. L'observation des mouvements de la boussole montre son comportement erratique d'un champ à l'autre. Elle oscille quelque peu autour du champ fixe, accélère puis oscille autour du champ tournant, s'arrête brutalement avant d'osciller à nouveau autour du champ fixe et ainsi de suite.

Bibliographie

- [1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ *Mécanique* Ed. Mir
- [2] V. ARNOLD *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Ed. Mir
- [3] V. ARNOLD *Equations Différentielles Ordinaires* Ed. Mir
- [4] KITTEL *Introduction à la Physique des Solides*, Ed. Dunod.
- [5] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Ed. Hermann (1984)
- [6] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991)
- [7] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989)
- [8] A.J. LICHTENBERG and M.A. LIBERMAN, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)
- [9] M. BERRY, *Nonlinear Dynamics* Ed. S. JORNA American Institute of Physics. New-York (1978) p. 16
- [10] B.V. CHIRIKOV *Physics Reports* **52** (1979) p. 263

Chapitre IV

Transition vers le Chaos dans les Systèmes Dissipatifs

Table des matières

IV Transition vers le Chaos dans les Systèmes Dissipatifs	1	IV.6 Le théorème de Ruelle Takens Newhouse	14
IV.1 Effets des frottements	1	IV.7 Exposants de LYAPOUNOV et dimension fractale	14
IV.1.1 L'oscillateur amorti	2	IV.7.1 Exposants de Lyapounov	15
IV.1.2 La contraction des aires	2	IV.7.2 Dimension d'un attracteur	15
IV.2 Section de POINCARÉ et Instabilité du Cycle Limite	2	IV.8 Exercices	16
IV.2.1 L'oscillateur entretenu	2	IV.8.1 Itérations	16
IV.2.2 Les cycles limites	2	IV.8.2 La bille qui rebondit	16
IV.2.3 Concepts Mathématiques	2	IV.9 La bille qui rebondit sur un haut parleur	16
IV.2.4 Les trois types d'instabilité	3		
IV.3 Intermittence de type I	3		
IV.3.1 Un modèle intuitif, mais insuffisant	4		
IV.3.2 Modèle général	4		
IV.3.3 Le mécanisme de réinjection	4		
IV.4 Traversée du cercle unité par -1	6		
IV.4.1 Dédoublément de période	6		
IV.4.2 Cascade sous-harmonique	7		
IV.4.3 Le mapping logistique	7		
IV.4.4 Intermittence de type III	8		
IV.4.5 Divergence du sous-harmonique	8		
IV.4.6 Statistique des phases laminaires	8		
IV.5 Traversée du cercle unité par un point non réel	9		
IV.5.1 L'oscillateur de VAN DER POL	9		
IV.5.2 Bipériodisme	9		
IV.5.3 Quasipériodicité	10		
IV.5.4 Perturbations à toutes les échelles	13		
IV.5.5 Observation expérimentale	13		
IV.5.6 Intermittence de type II	14		

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes dissipatifs présentant une transition vers le chaos. Puisqu'un système dissipatif est un système hamiltonien auquel on a ajouté des frottements, nous analysons les transformations de l'espace des phases décrit au chapitre précédent lorsque l'on ajoute une telle source de dissipation.

Nous considérons deux exemples : la boussole et l'oscillateur dans un potentiel à deux puits soumis à une perturbation périodique. Dans ces deux cas, les frottements simplifient l'analyse puisque un nombre restreint de conditions initiales doivent être étudiées. Dès lors, l'état de ces systèmes ne dépend plus que du paramètre de contrôle (le paramètre de stochasticité pour la boussole). En l'augmentant, nous observons une transition d'un état régulier vers un état chaotique.

Certes loin de cette transition, les régimes chaotiques des deux systèmes leur sont propres, mais pour ces deux exemples, la transition vers le chaos est identique. Cette similitude n'est pas un hasard : il existe en fait trois types de transition d'un régime régulier vers un régime chaotique. Ce sont ces scénarios que nous décrivons ici.

IV.1 Effets des frottements

Les frottements sont à l'origine de la dissipation d'énergie. De ce fait, ils ont pour effet de ramener un système

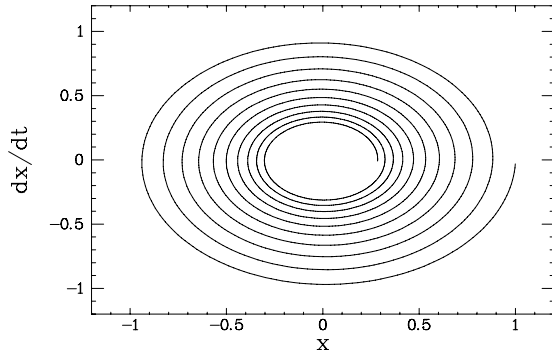


FIG. IV.1: Trajectories de l'oscillateur amorti. La contraction des aires amène toutes les conditions initiales à l'origine.

vers son (ou l'un de ses) minimum(s) d'énergie potentielle. Ils sélectionnent de cette façon une (ou un petit nombre de) trajectoire(s) pour l'évolution du système. En comparaison aux systèmes hamiltoniens, pour lesquels une trajectoire unique est déterminée par chaque condition initiale, la dissipation joue un rôle simplificateur : elle permet de ne considérer que les trajectoires correspondant à un minimum d'énergie potentielle.

IV.1.1 L'oscillateur amorti

Illustrons ce phénomène sur un système linéaire où nous pouvons tout calculer exactement : l'oscillateur harmonique amorti.

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0.$$

Les solutions sont de la forme :

$$x_0(t) = x_{t=0} \exp\left(\frac{-\gamma t}{2m}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}t + \phi\right)$$

Quand $4km > \gamma^2$, la trajectoire spirale l'origine de l'espace des phases. Si $4km < \gamma^2$, elle ne tourne plus et converge rapidement vers l'origine (l'amortissement est surcritique).

IV.1.2 La contraction des aires

De façon générale, dans tous les systèmes dissipatifs, et en l'absence d'apport d'énergie, tous les points de l'espace des phases aboutissent à l'origine. Tout élément de volume de celui-ci se contracte en un point, au cours de son évolution.

IV.2 Section de POINCARÉ et Instabilité du Cycle Limite

De même que les frottements réduisent la trajectoire de l'oscillateur harmonique, initialement de dimension un dans un espace des phases de dimension deux, à un point, ils réduisent celle de l'oscillateur entretenu à une trajectoire unidimensionnelle et non plus bidimensionnelle.

IV.2.1 L'oscillateur entretenu

D'un point de vue pratique, un oscillateur entretenu est par exemple un haut parleur alimenté par une tension sinusoïdale. Son équation s'écrit :

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = a\cos(\omega t) \quad (IV.1)$$

Si $\gamma = 0$, il n'y a pas de frottement et le système évolue dans un espace des phases de dimension trois $(x, \dot{x}, \phi = \omega t)$. Il est naturel d'en chercher une solution oscillant à la pulsation ω . Un calcul simple nous conduit à une solution de la forme :

$$x_1(t) = \frac{a}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma} \cos(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (IV.2)$$

IV.2.2 Les cycles limites

La solution générale de l'équation IV.1 est une superposition des trajectoires $x_0(t)$ et $x_1(t)$. C'est une spirale s'enroulant vers l'ellipse que représente la solution IV.2. Cette dernière correspond à la solution "stationnaire" de l'oscillateur, c'est-à-dire à celle atteinte aux temps longs. Il ne s'agit donc pas d'un point fixe mais d'un *cycle limite*. Comme le haut parleur est un système linéaire, ce cycle limite est stable et reste toujours régulier.

Pour les systèmes non linéaires, cette propriété n'est plus vraie. Une bille dans un potentiel à deux puits soumise à une excitation périodique, ou une boussole soumise à un champ fixe et un champ tournant possèdent également des solutions régulières ayant la forme de cycles limites. Mais, dans certaines conditions, ceux-ci se déstabilisent et conduisent à des comportements chaotiques.

IV.2.3 Concepts Mathématiques

Dans l'espace des phases, un cycle limite correspond à l'existence d'une solution périodique. Pour étudier la stabilité linéaire d'une telle solution, il nous faut faire appel à la théorie de FLOQUET.

Appelons $\vec{X}(t)$ cette solution de période T . Elle vérifie l'équation différentielle de départ qui définit le

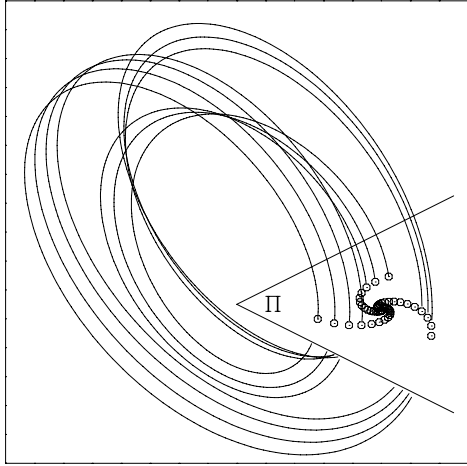


FIG. IV.2: Section de POINCARÉ d'une trajectoire correspondant à un oscillateur entretenu par une perturbation périodique.

système dynamique :

$$d\vec{X}/dt = F(\vec{X})$$

On perturbe \vec{X} par \vec{x} , qui vérifie alors l'équation linéarisée suivante :

$$d\vec{x}/dt = \mathcal{L}(\vec{x})$$

où \mathcal{L} est l'opérateur tangent en \vec{X} à F . Comme \vec{X} est périodique, on peut chercher une solution $\vec{x}(t)$ sous la forme : $\vec{x}(t) = e^{st}\vec{w}(t)$, où $\vec{w}(t)$ est une fonction périodique de période T . La théorie de Floquet revient à effectuer une stroboscopie du cycle limite à la fréquence T . On étudie donc en fait la stabilité d'un point du cycle dans un plan perpendiculaire à celui-ci. Ce plan, appelé section de POINCARÉ (ou coupe de POINCARÉ) est déterminé par le choix d'une phase.

Les intersections successives du cycle limite avec le plan de coupe définissent une suite de points \vec{X}_n , où n est l'indice du tour. On passe d'un point à son suivant par l'application g , appelée carte de premier retour : $\vec{X}_{n+1} = g(\vec{X}_n)$, et définie par :

$$\begin{cases} \vec{X}(t+T) = g(\vec{X}(t)) \\ \text{dans la section de POINCARÉ} \end{cases}$$

Les valeurs propres de g , $\lambda_k = e^{s_k T}$, sont appelées *multiplicateurs de FLOQUET*. La suite des \vec{X}_n converge ou diverge dans la section de POINCARÉ, selon les valeurs propres λ_k . Si l'une d'entre elles est supérieure à 1 en norme, la suite diverge et le cycle est instable. Au contraire, si toutes les valeurs propres sont de norme inférieure à 1, le cycle est stable.

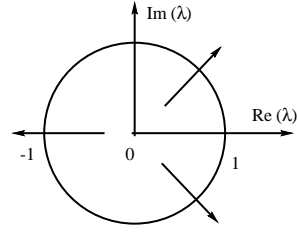


FIG. IV.3: Les différents cas possibles de traversée du cercle unité

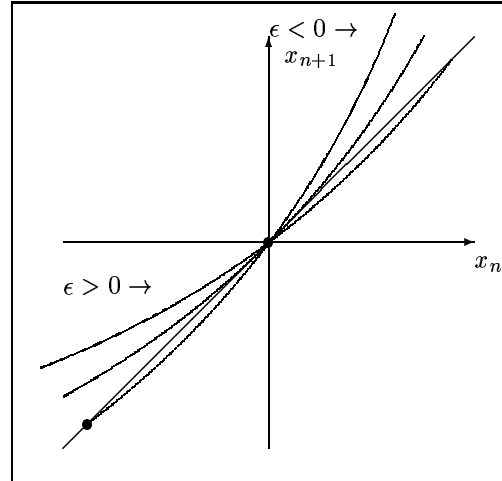


FIG. IV.4: Echange de stabilité des points fixes : lorsque ϵ varie, la parabole $f(x) = (1 + \epsilon)x - ax^2$ tourne autour de l'origine.

IV.2.4 Les trois types d'instabilité

Les façons dont les λ_k traversent le cercle unité dans le plan complexe quand un paramètre de contrôle varie caractérisent les différentes routes vers le chaos.

Trois cas se présentent (voir fig. IV.3) :

- Traversée d'un multiplicateur en +1,
- Traversée d'un multiplicateur en -1,
- Traversée d'une paire conjuguée de multiplicateurs en $e^{2\pi i\alpha}$.

Comme dans la classification des bifurcations, à chaque cas correspond une forme normale pour l'application $\vec{X}_{n+1} = g(\vec{X}_n)$. Nous ne présentons pas ici la manière d'établir ces formes normales, obtenues en supprimant les termes non-linéaires non-résonants.

IV.3 Intermittence de type I

l'intermittence de type I correspond à la traversée au point +1. Considérons un espace des phases de dimension 3; le plan de coupe de POINCARÉ est donc

de dimension 2. L'application g possède deux multiplicateurs de FLOQUET, correspondant à deux directions dans ce plan. Quand les deux multiplicateurs sont de normes inférieures à 1, le cycle est stable ; la suite de \vec{X}_n converge vers un point fixe. Quand l'un des multiplicateurs de FLOQUET passe par +1, une direction propre du plan devient dilatante, l'autre restant contractante¹. Les \vec{X}_n se regroupent tous sur une même direction propre et la forme normale peut s'exprimer en termes d'une seule variable réelle x . Cette approximation est évidemment simplificatrice mais elle s'avère donner une excellente description tant que le module de la seconde valeur propre reste inférieur à 1 et que les excursions de la trajectoire dans l'espace des phases demeurent petites.

IV.3.1 Un modèle intuitif, mais insuffisant

Dès que le multiplicateur devient plus grand que 1, le point fixe $x = 0$ perd sa stabilité et il faut inclure une non-linéarité pour décrire l'évolution de x . L'expression la plus générale pour x_n est :

$$x_{n+1} = (1 + \epsilon)x_n + ax_n^2 + \dots \quad (\text{IV.3})$$

où ϵ est le paramètre de contrôle. Lorsque ϵ varie d'une valeur négative à une valeur positive, les deux points fixes échangent leur stabilité :

Point fixe	$\epsilon < 0$	$\epsilon > 0$
$x = 0$	stable	instable
$x = a/\epsilon$	instable	stable

La figure IV.4 procure une représentation graphique de ce phénomène.

En fait, en écrivant l'équation IV.3, nous avons implicitement supposé que le cycle limite persistait pendant la bifurcation. Cette situation n'est pas la plus générale, et il existe une autre façon de déployer la singularité au point de bifurcation.

IV.3.2 Modèle général

Au lieu de faire tourner la parabole comme dans la figure IV.4, on peut la traduire. Ceci correspond à la forme normale suivante :

$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + ax_n^2 \quad (\text{IV.4})$$

Lorsque $\epsilon < 0$, il existe deux points fixes, dont la stabilité est facilement étudiée par la représentation graphique de la figure IV.5. La forme de l'équation IV.4 peut surprendre car on pourrait croire que le multiplicateur de FLOQUET reste égal à 1 indépendamment de

¹Ce passage du multiplicateur de FLOQUET par +1 peut être vu comme une résonance 1/1 particulièrement forte.

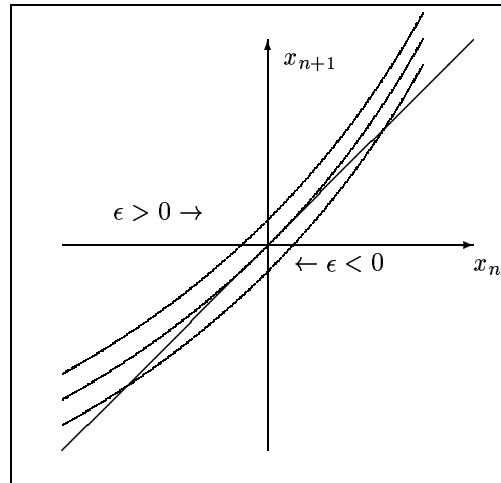


FIG. IV.5: Disparition des points fixes : lorsque ϵ varie, la parabole $f(x) = \epsilon + x - ax^2$ se translate verticalement. Pour $\epsilon < 0$, elle coupe la bissectrice en deux points. Pour $\epsilon > 0$ il n'y a plus d'intersection et donc plus de point fixe.

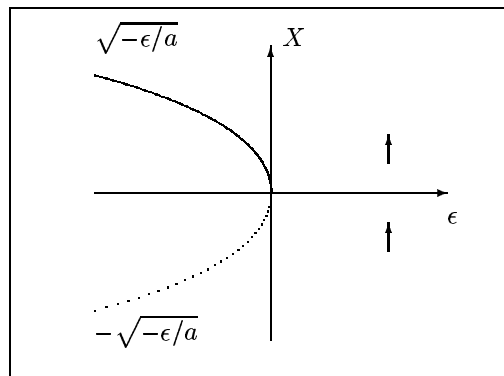


FIG. IV.6: Diagramme de bifurcation nœud col de l'intérmittence de type I.

ϵ . C'est exact au point $x = 0$, mais il n'est plus le point fixe de l'application. Ses points fixes sont $\pm\sqrt{-\epsilon/a}$, avec $-\sqrt{-\epsilon/a}$ stable et $+\sqrt{-\epsilon/a}$ instable. Le lecteur vérifiera que le multiplicateur de FLOQUET du point fixe $-\sqrt{-\epsilon/a}$ varie comme $1 - 2\sqrt{-a\epsilon}$. Lorsque $\epsilon = 0$, les deux points fixes coalescent en $x = 0$: la courbe est tangente à la première bissectrice comme le montre la figure IV.5. Le diagramme de bifurcation correspondant à la forme normale IV.4 est tracé en figure IV.6.

Enfin pour $\epsilon > 0$, il n'y a plus ni point fixe stable, ni point fixe instable, mais juste un étroit canal entre la parabole et la première bissectrice (cf. fig. IV.7).

IV.3.3 Le mécanisme de réinjection

Pour ϵ positif mais petit, le système reste longtemps dans ce canal avant d'en sortir : ses itérations succes-

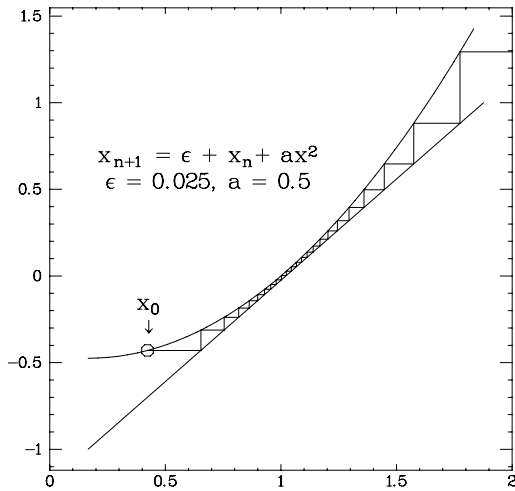


FIG. IV.7: Pour $\epsilon > 0$, les itérés successifs ont lieu entre la parabole et la bissectrice. la trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\epsilon < 0$.

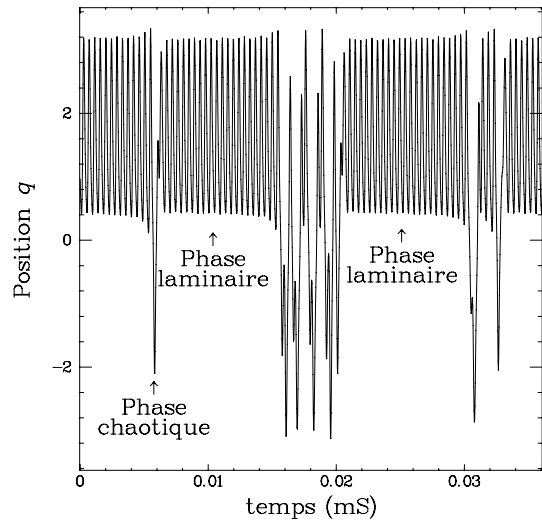


FIG. IV.8: Signal temporel de la position de l'oscillateur de Duffing excité périodiquement. Les longues bouffées régulières entrecoupées de courtes phases de chaos correspondent à l'intermittence de type I.

sives passent beaucoup de temps près des fantômes des anciens points fixes. Durant cette phase, on a l'impression que le signal est périodique ; cependant son amplitude augmente régulièrement.

Le mécanisme que nous venons de décrire est à la base de ce que l'on nomme l'*intermittence de type I*. Cependant ce mécanisme est nécessaire mais pas suffisant : il explique une instabilité du cycle limite qui conduit à une exploration de l'espace des phases par la trajectoire, c'est-à-dire à de grandes valeurs de x , pour lesquelles différents scénarios sont possibles. Soit la trajectoire est captée par un autre attracteur et l'on a simplement une transition d'un point fixe à un autre, soit la trajectoire est réinjectée dans le canal par un mécanisme qui ne peut pas être décrit par une équation comme celle IV.4, et l'on observe alors l'intermittence. Dans ce dernier cas, on observe une alternance de longues bouffées régulières entrecoupées par de courtes bouffées turbulentes. Les bouffées régulières sont décrites par le modèle IV.4 et sont aussi appelées phases laminaires. Il est ainsi possible de calculer la durée moyenne des phases laminaires. On trouve qu'elle évolue et diverge comme $1/\sqrt{\epsilon}$.

Ce type d'intermittence a été prédit théoriquement et observé numériquement par Y. POMEAU et P. MANNEVILLE [1] sur le modèle de LORENZ que nous étudions plus loin. Il fut observé expérimentalement pour la première fois par P. BERGÉ et M. DUBOIS dans une expérience de RAYLEIGH-BÉNARD [2].

Ce scénario est reconnu comme l'un des trois qui conduisent au chaos. Il est décelable par la construction de la carte du premier retour $X_{n+1} = g(X_n)$ et

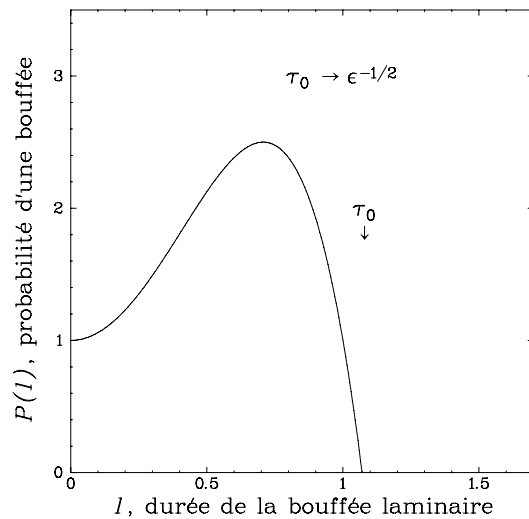


FIG. IV.9: $P(\tau)$ est la densité de probabilité d'obtenir une durée de phase laminaire de τ .

par l'étude statistique des phases laminaires. On peut montrer que la durée des phases laminaires est bornée supérieurement par un temps τ_0 de l'ordre de $\epsilon^{-1/2}$ (voir fig. IV.9).

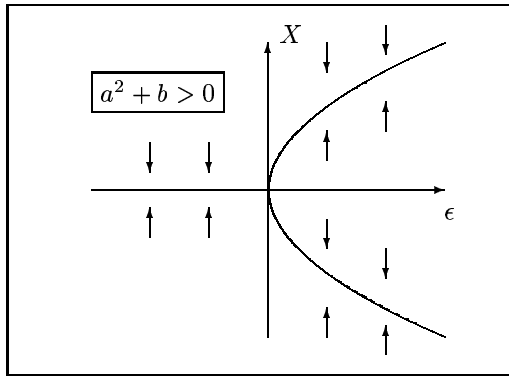


FIG. IV.10: Cas $a^2 + b > 0$. La bifurcation est de type fourche.

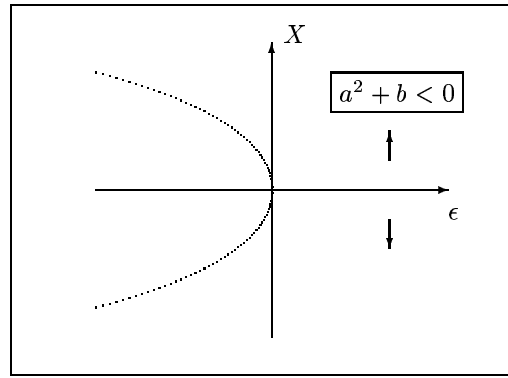


FIG. IV.11: Cas $a^2 + b < 0$. La bifurcation est sous-critique.

IV.4 Traversée du cercle unité par -1

Analogue à une bille tournant au fond d'un puits, le centre d'un cycle limite est semblable au centre d'une résonance. Or nous savons qu'une résonance est profondément modifiée par l'apparition de l'accrochage 1/2. C'est précisément ce phénomène qui conduit à l'instabilité que nous décrivons ici.

Lorsque l'un des multiplicateurs de FLOQUET traverse le cercle unité en passant par -1, la section de POINCARÉ présente comme précédemment une direction contractante et une direction dilatante. Mais cette fois-ci, les points d'intersection du flot avec le plan vont s'éloigner de leur position d'équilibre en oscillant de part et d'autre de ce point.

Dans ce cas, la forme normale s'écrit :

$$\boxed{x_{n+1} = -(1 + \epsilon)x_n + ax_n^2 + bx_n^3} \quad (\text{IV.5})$$

De même que pour l'intermittence de type I, nous étudions la stabilité du cycle limite au voisinage de $\epsilon = 0$ par l'étude de $g(x_n) = x_{n+1}$. Mais cette fois-ci, le caractère sous-critique ou supercritique de la bifurcation conditionne le type de transition vers le chaos.

Pour le voir, observons la façon dont les itérés successifs divergent. Calculons $x_{n+2} = g \circ g(x_n)$ en supposant ϵ très petit :

$$x_{n+2} = (1 + 2\epsilon)x_n - 2(a^2 + b)x_n^3$$

L'application $g \circ g$ peut présenter deux nouveaux points fixes si $(a^2 + b) > 0$. Ces points, égaux à $x_{\pm} = \pm \sqrt{\epsilon/(a^2 + b)}$, sont stables pour $\epsilon > 0$: la bifurcation est de type fourche.

Au contraire, si la bifurcation est sous-critique, c'est-à-dire $(a^2 + b < 0)$, il est nécessaire d'introduire des termes d'ordre cinq au moins pour saturer la solution. Au voisinage du point fixe zéro, il n'y a plus

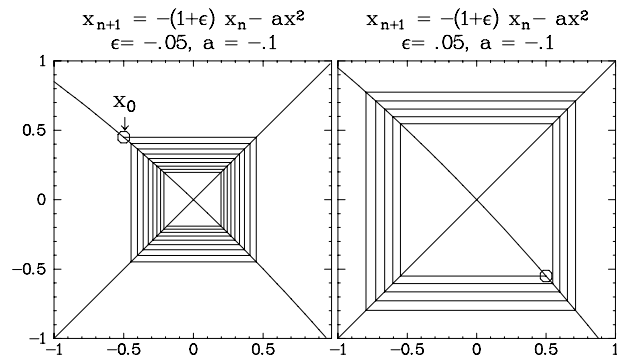


FIG. IV.12: Iterations a- dans le cas stable $\epsilon < 0$; b- dans le cas instable $\epsilon > 0$.

de point stable comme le montre la figure IV.11. Ces deux cas de bifurcations vont déterminer deux types de transitions vers le chaos :

- **Supercritique** → Cascade de bifurcation sous-harmoniques,
- **Sous-critique** → Intermittence de type III.

IV.4.1 Dédoublément de période

Après la traversée par -1 du multiplicateur de FLOQUET, la suite des x_n présente deux points d'accumulation correspondant aux solutions stables de la bifurcation fourche. La carte de premier retour a l'allure présentée en figure IV.12. Comme nous l'avons vu, l'existence de deux points fixes est conditionnée par $a^2 + b > 0$. On peut interpréter cela en traçant la carte de second retour (cf. fig. IV.13).

Nous constatons que x_+ et x_- sont bien les points fixes de $g \circ g$ avec $g \circ g(x_+) = g(x_-) = x_+$ et $g \circ g(x_-) = g(x_+) = x_-$. Le mouvement a maintenant lieu sur une boucle : l'orbite s'enroule sur un ruban de MOEBIUS. La période est devenue double de la période initiale. C'est

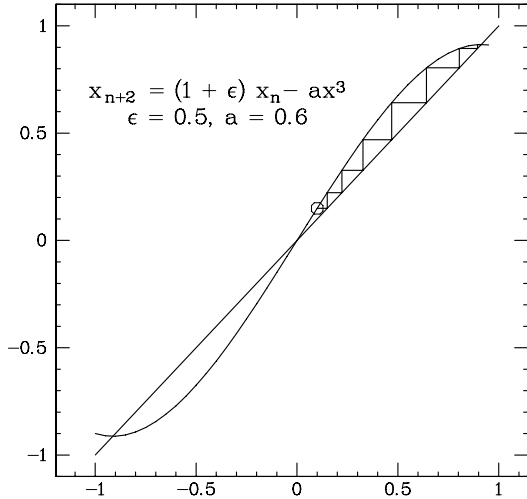


FIG. IV.13: Carte de second retour.

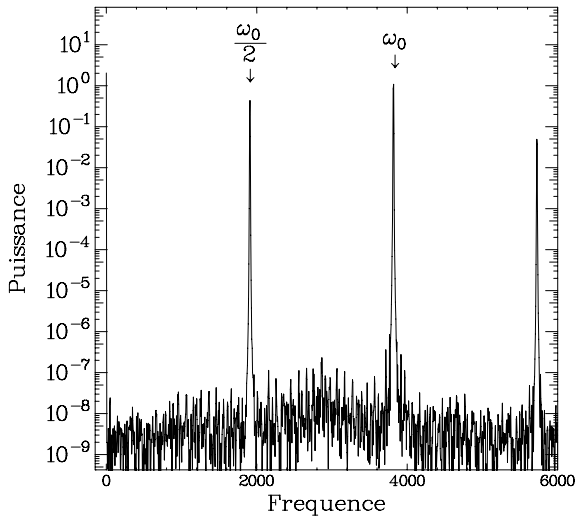


FIG. IV.14: Spectre de puissance montrant l'apparition d'un sous-harmonique.

pourquoi cette bifurcation porte le nom de *bifurcation sous-harmonique*.

Avant cette bifurcation, le spectre de puissance du signal est constitué d'une raie fine et de ses harmoniques. Juste après, le spectre s'enrichit de raies sous-harmoniques. La première apparaît à $f_0/2$, les autres à $(2n + 1)f_0/2$. Ces dernières correspondent à des combinaisons du sous-harmonique et des harmoniques.

IV.4.2 Cascade sous-harmonique

Ce phénomène va pouvoir se répéter. La pente de $g \circ g$ à l'intersection x_+ et x_- peut diminuer avec ϵ . Quand sa valeur passe par -1, ces points fixes se déstabilisent à leur tour et le processus recommence. Il introduit cette fois-ci une période quadruple de la période initiale. On peut montrer que les propriétés de $g^{(n)}$ sont analogues et donc qu'une cascade de bifurcations est possible. Les périodes s'allongent de plus en plus : 1, 2, 4, ..., 2^n .

Chaque bifurcation sous-harmonique peut être numérotée et a lieu pour une valeur ϵ_n . Il est possible d'analyser par récurrence la suite des bifurcations. Pour comparer l'étape $n - 1 \rightarrow n$ à $n \rightarrow n + 1$, on trouve qu'il faut opérer un changement d'échelle à la fois sur x et sur ϵ . Les valeurs des ϵ_n convergent ainsi vers un point d'accumulation ϵ_∞ . A cette valeur du paramètre de contrôle, la période devient infinie. Ce phénomène présente une forte ressemblance avec une transition de phase et l'on définit des exposants critiques δ et α par :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n} = \delta \simeq 4.669201 \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^+ - x_{n-1}^+}{x_{n+1}^+ - x_n^+} = \alpha \simeq 2.502907 \dots \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

IV.4.3 Le mapping logistique

Ces exposants sont universels et ne dépendent pas de g : il suffit que g présente un extrémum quadratique. En particulier, le comportement critique de la cascade de dédoublement de période a été mis en évidence sur le mapping quadratique suivant :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (\text{IV.7})$$

où r joue le rôle du paramètre de contrôle. On trouve numériquement que $r_\infty = 3.56994 \dots$. On peut montrer sur cet exemple que les cycles ont des périodes qui divergent en $(r - r_\infty)^{-\nu}$ avec $\nu = \ln 2 / \ln \delta$. Nous constatons que pour $r \geq r_\infty$, l'attracteur est chaotique. On le détermine d'une manière exacte, en montrant que l'application g possède des propriétés de mélange. Au delà, pour $r > r_\infty$, on observe une cascade inverse, où les sous-harmoniques disparaissent les uns après les autres pour être remplacés par un spectre de bruit. Par ailleurs, au sein du chaos, apparaissent des fenêtres de périodicité associées à des accrochages pour lesquels la trajectoire est régulière. On peut identifier ces fenêtres en considérant les application $g^{(p)}$ qui peuvent présenter des points stables. Ces fenêtres de périodicité alternent avec les trajectoires chaotiques.

L'analogie de cette route vers le chaos avec une transition de phase fut faite par M.J. FEIGENBAUM [3] et indépendamment par P. COULLET et C. TRESSER [4]. Cette route vers le chaos est très couramment observée pour différents types de systèmes expérimentaux.

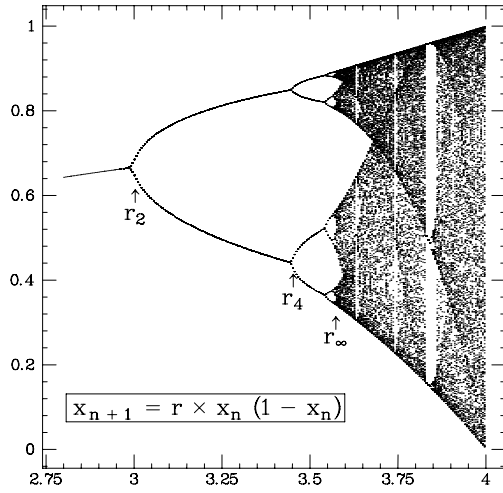


FIG. IV.15: Diagramme de bifurcation de la cascade de dédoublement de période du mapping quadratique.

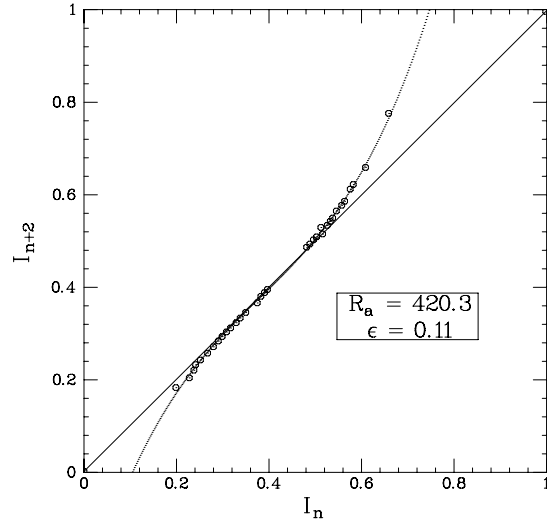


FIG. IV.17: Carte de second retour correspondant à l'intermittence de type III.

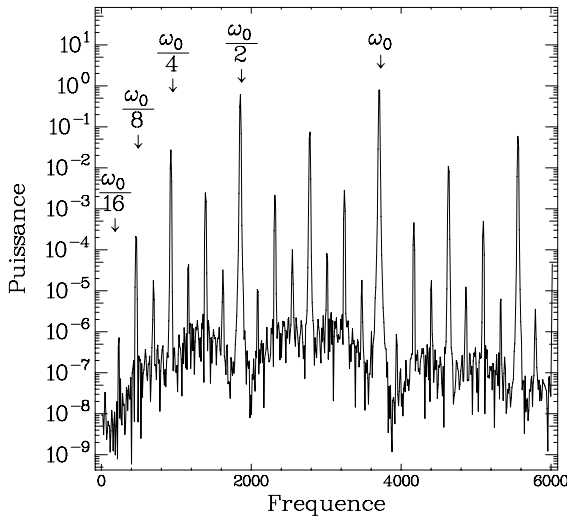


FIG. IV.16: Spectre de puissance caractéristique de la cascade de dédoublement de période, observée ici dans la boussole dissipative soumise à deux champs.

Ce sont A. LIBCHABER et J. MAURER qui l'ont vue pour la première fois dans une expérience de convection de RAYLEIGH-BÉNARD [5]. On l'observe aussi dans la transition de la boussole dissipative soumise à un champ fixe et un champ tournant [7] ainsi que dans de nombreux autres exemples. A chaque fois, le scénario est le même, et les exposants α , δ sont identiques (dans la mesure où la non-linéarité est quadratique, ce qui est le cas général). La signature de ce scénario est facilement observable dans le spectre de puissance d'une variable du système. Nous avons reproduit sur la figure IV.16 l'allure typique des spectres.

IV.4.4 Intermittence de type III

A la traversée du point -1 par le multiplicateur de FLOQUET, la bifurcation est sous-critique lorsque $a^2 + b < 0$. La carte de premier retour ne possède plus de couples (x_+, x_-) tels que $f(x_+) = x_-$ et $f(x_-) = x_+$. La carte de second retour n'a plus de points fixes et présente l'allure de la figure IV.17. Elle s'écrit :

$$x_{n+2} = (1 + 2\epsilon)x_n + cx_n^3 \text{ avec } c = -2(a^2 + b) \quad (\text{IV.8})$$

IV.4.5 Divergence du sous-harmonique

Les trajectoires divergent. La situation est comparable à celle de l'intermittence de type I : s'il n'existe pas d'attracteur stable dans l'espace des phases mais un transitoire erratique pouvant ramener la trajectoire dans le voisinage immédiat du point fixe instable, on assiste alors à l'intermittence de type III. Elle se caractérise par une croissance du sous-harmonique (au lieu de l'amplitude d'oscillation dans le cas de l'intermittence de type I).

IV.4.6 Statistique des phases laminaires

On peut aussi étudier la durée des phases laminaires, c'est-à-dire des phases durant lesquelles le sous-harmonique s'amplifie régulièrement. Elles sont d'autant plus longues que le point d'injection est voisin du point fixe instable. Contrairement au cas de l'intermittence de type I, la durée des phases laminaires n'est pas bornée.

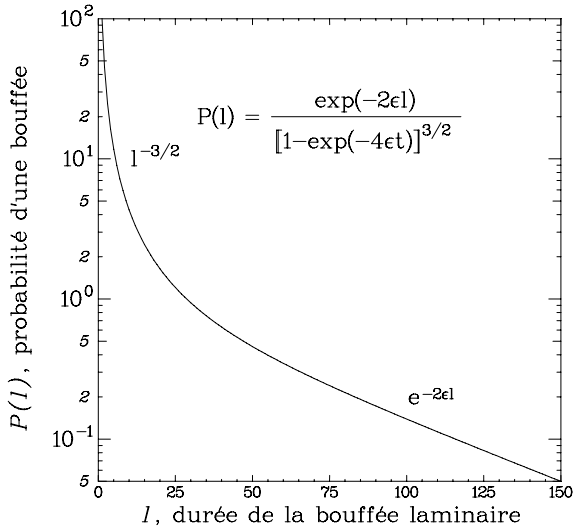


FIG. IV.18: Densité de probabilité des phases laminaires en fonction de leur durée, dans le cas de l'intermittence de type III.

En assimilant l'équation IV.8 à l'équation différentielle $dx/dt = 2\epsilon x + cx^3$, deux domaines d'amplification du sous-harmonique apparaissent : un domaine linéaire où la croissance du sous-harmonique est exponentielle et un domaine non-linéaire où l'évolution est en loi de puissance. Il résulte une distribution de probabilité représentée en figure IV.18, piquée autour de la valeur $\tau_0 \sim \epsilon^{-1}$ et qui n'est pas bornée aux grandes valeurs de τ .

- petites durées : $\tau \ll \epsilon^{-1}$ $P(\tau) \sim \tau^{-3/2}$
 - grandes durées : $\tau \gg \epsilon^{-1}$ $P(\tau) \sim e^{-2\epsilon\tau}$
- (IV.9)

Ce type d'intermittence a été prédit théoriquement et observé numériquement par Y. POMEAU et P. MANNEVILLE [1]. Il fut aussi observé expérimentalement pour la première fois par P. BERGÉ, M. DUBOIS et M. RUBIO dans une expérience de RAYLEIGH-BÉNARD [6].

IV.5 Traversée du cercle unité par un point non réel

IV.5.1 L'oscillateur de VAN DER POL

Jusqu'à présent, les termes de frottements considérés étaient linéaires. Lorsque ils présentent des non-linéarités, un cycle limite peut apparaître dans un espace des phases de dimension deux. Etudions le cas simple de l'oscillateur de VAN DER POL :

$$m\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0. \quad (\text{IV.10})$$

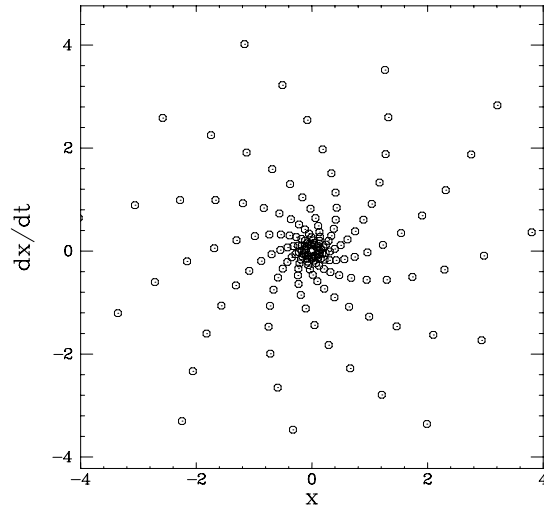


FIG. IV.19: Transitoire correspondant à l'apparition d'une seconde fréquence dans une section de POINCARÉ.

C'est l'équation d'un oscillateur dont les frottements dépendent de l'amplitude. Pour x petit, la dissipation est négative et l'oscillation s'amplifie. Pour x grand, x^2 a une valeur moyenne non nulle : la dissipation devient positive et conduit à une décroissance de l'amplitude. L'état d'équilibre correspond à une oscillation d'amplitude finie telle que $\langle x^2 \rangle = 1$, c'est-à-dire à un cycle limite. Pourtant ce système est dissipatif puisque toutes les conditions initiales aboutissent sur ce cycle limite.

C'est sur ce principe que fonctionnent les oscillateurs électroniques comme les générateurs de fréquence. Les montres et les horloges fonctionnent d'une façon analogue en utilisant le mécanisme d'échappement qui utilise l'énergie d'un ressort.

IV.5.2 Bipériodisme

Lorsqu'on ajoute une perturbation périodique à un oscillateur, un cycle limite se développe sur un système possédant déjà un cycle limite. Le système est *bipériodique*.

A la naissance du second cycle limite, l'un des multiplicateurs de FLOQUET traverse le cercle de rayon unité du plan complexe en un point complexe $e^{2i\pi\alpha}$. La forme normale conduisant à ce type de bifurcations est complexe et s'écrit :

$$z_{n+1} = e^{2i\pi\alpha_0} [(1 + \epsilon)z_n - g|z_n|^2 z_n] \quad (\text{IV.11})$$

avec $0 < \alpha_0 < 1$ et $g \in \mathcal{C}$. On reconnaît la forme normale d'une bifurcation de HOPF. Dans le cas supercritique où $\Re(g) > 0$, en séparant z en module et phase

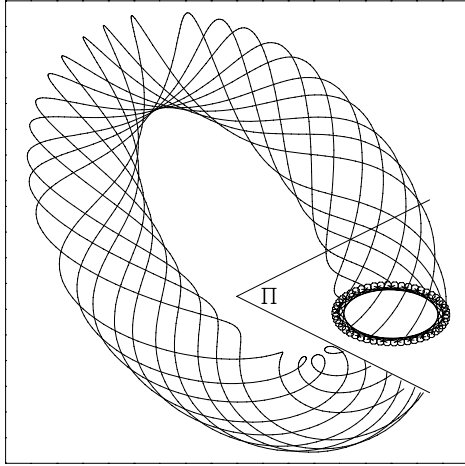


FIG. IV.20: Trajectoire s'enroulant sur un tore T^2 .

$z = \rho e^{2i\pi\phi}$, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_{n+1} &= (1 + \epsilon)\rho_n - g_r \rho^3 \\ \phi_{n+1} &= 2\pi - g_i \rho_n^2 + \phi_n \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Au seuil d'oscillation, l'évolution de la phase prend la forme $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi\alpha_0$. Les itérés successifs tournent autour de l'origine d'un angle $2\pi\alpha_0$, comme le montre la figure IV.19; cet angle correspond au rapport des deux fréquences du système. L'amplitude de la nouvelle oscillation est déterminée par $\rho = \sqrt{\epsilon/g}$. Les différents itérés s'alignent ainsi sur un cercle. Les effets non-linéaires sont de deux types. D'une part, ils induisent une variation de la fréquence du second oscillateur avec l'amplitude d'oscillation; d'autre part, ils permettent l'apparition de q bosses sur le cercle, dès que α s'approche d'une valeur rationnelle $\alpha \sim p/q$.

Dans l'espace des phases à trois dimensions, la trajectoire s'inscrit s'enroule sur un tore T^2 , surface à forme de chambre à air (cf. fig. IV.20).

IV.5.3 Quasiperiodicité

Si g_r est positif, la bifurcation est supercritique et l'amplitude de la seconde oscillation reste finie : le système dynamique est devenu *bipériodique*. Cette situation présente une grande analogie avec les systèmes hamiltoniens à deux fréquences, que nous avons discutés précédemment. En particulier, le rapport des deux fréquences, ici égal à α , joue un rôle fondamental. Des accrochages entre les deux fréquences se produisent pour les valeurs rationnelles $\alpha = p/q$: les chapelets de résonances des systèmes hamiltoniens deviennent en quelque sorte des bassins d'attraction pour la trajectoire du système dynamique dissipatif. Celle-ci s'enroule autour du tore et repasse par le même point au bout de q tours, sans donc recouvrir tout le tore.

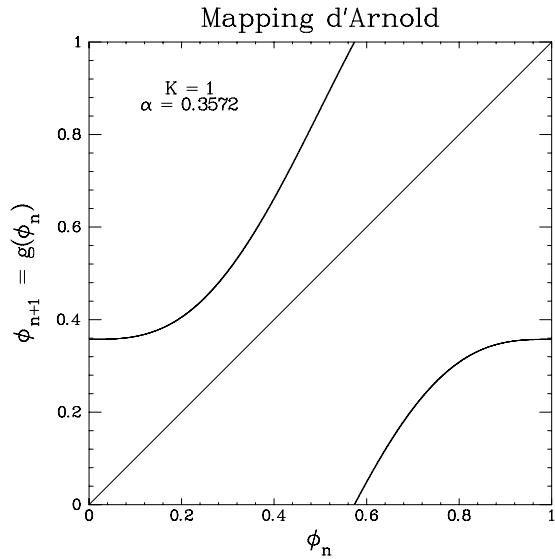


FIG. IV.21: Carte de premier retour du modèle d'Arnold.

Quand le rapport des fréquences α est irrationnel, la trajectoire ne repasse jamais par le même point et couvre uniformément le tore, qui devient l'analogue d'un tore de KAM. Ainsi une telle trajectoire persiste jusqu'à une valeur finie du niveau de perturbation.

Pour étudier le comportement quasipériodique, il est commode d'utiliser un modèle simplifié, inspiré de l'équation IV.12, appelé modèle d'ARNOLD. L'amplitude y est fixée et on ne s'intéresse qu'à la variable de phase. Il s'écrit :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \alpha - (K/2\pi) \sin(2\pi\phi_n) \quad (\text{IV.13})$$

que l'on peut noter $\phi_{n+1} = g_{\alpha,K}(\phi_n)$. La première partie de l'équation : $\phi_{n+1} = \phi_n + \alpha$ traduit la rotation dans la section de POINCARÉ liée à la seconde fréquence du système. La contribution en $\sin(2\pi\phi_n)$ peut être vue comme l'effet d'une résonance qui module la phase de la seconde oscillation.

Ce modèle dépend de deux paramètres : α , le rapport des deux fréquences et K , l'intensité de la résonance. Pour $K = 0$, la carte de premier retour est une droite quelle que soit la valeur de α : les deux fréquences s'ignorent. En augmentant K , on observe accrochages et tores irrationnels. Introduisons le nombre de rotation σ défini par :

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n - \phi_0)/n \quad (\text{IV.14})$$

Il caractérise la fréquence effective d'oscillation, tandis que α caractérise celle que l'on voudrait imposer. Pour une valeur finie de K , il est facile d'observer les accrochages en faisant varier α et en mesurant σ . Lorsqu'un

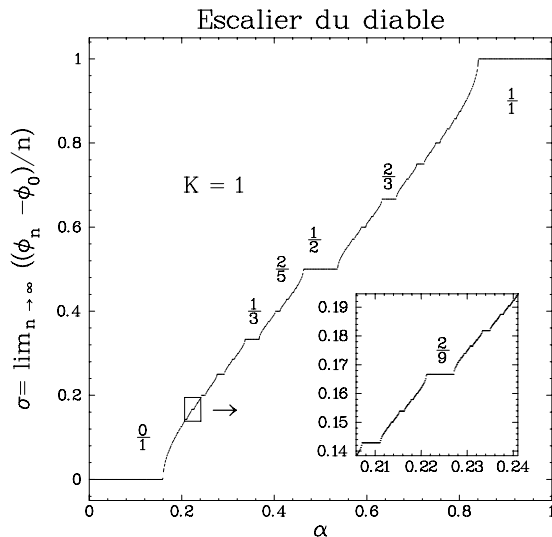


FIG. IV.24: Evolution de σ avec α . La courbe présente une succession de marches pour chaque valeur rationnelle de σ .

les systèmes hamiltoniens. Lorsque K est exactement égal à 1, les différentes langues parviennent au contact. Les accrochages prennent toute la place, et l'escalier du diable est uniquement constitué de marches associées à des rationnels; il est dit *complet*. C'est de plus un objet fractal (cf. infra pour une définition) de dimension égale à 0.87. Enfin, lorsque K devient plus grand que 1, la carte de premier retour présente une bosse de plus en plus prononcée et devient non-inversible: ϕ_{n+1} peut désormais avoir plusieurs antécédents comme on le voit sur la figure IV.25. Ainsi deux types de transition vers le chaos sont observées dans un système quasipériodique :

- A partir d'un accrochage $\alpha = p/q$,
- A partir d'un irrationnel pur.

Dans le premier cas, le système dynamique n'est plus quasipériodique, puisque les deux fréquences sont accrochées. On observe les scénarios, déjà discutés, de transition d'un cycle limite vers le chaos, par cascade de dédoublement de période et par intermittence.

Si le rapport des fréquences reste irrationnel, on observe la destruction du cycle limite par les résonances voisines. Cette route vers le chaos va dépendre de façon quantitative du nombre irrationnel choisi mais sera qualitativement la même pour tous. La représentation des nombres irrationnels pose un problème : toutes les expressions que nous en donnons sont des approximations rationnelles. Une façon commode de les représenter consiste à les écrire sous forme de fraction continue :

$$\sigma = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

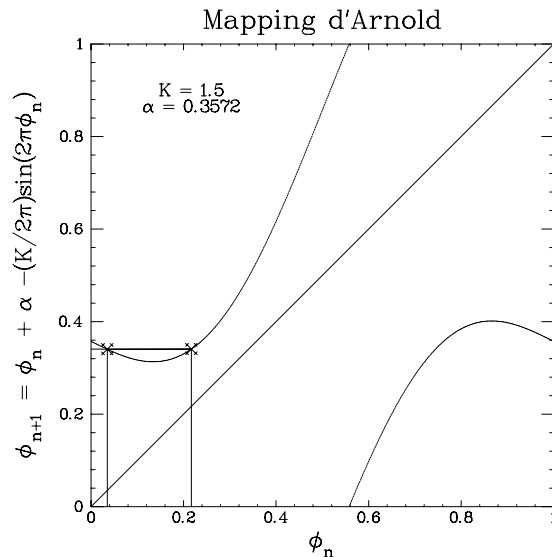


FIG. IV.25: Application d'Arnold pour $K = 1.5$, ϕ_1 possède deux antécédents.

Le nombre σ peut être représenté par la série a_1, a_2, a_3, \dots . Le développement du nombre d'or a tous ses coefficients égaux à 1 : $a_i = 1, \forall i$. Cet irrationnel, qui vaut $(\sqrt{5} - 1)/2$, est aussi le nombre le plus mal approximé par un rationnel. En effet, une telle représentation rationnelle est obtenue en interrompant la fraction continue à l'ordre n . Comme les a_i sont tous égaux à 1, la contribution négligée est maximale. Les approximations successives de Ω_g sont les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \dots, \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

où F_n est le n -ième nombre de FIBONACI, défini par la relation de récurrence :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{avec } F_0 = 1, F_1 = 2.$$

Or la suite F_{n+1}/F_n est alternée. Ainsi $(F_{n+1}/F_n) < \omega_g < (F_{n+2}/F_{n+1})$ (avec n impair) : les approximations rationnelles successives encadrent le nombre d'or. Comme il est le moins bien approximé par un rationnel, la trajectoire associée au nombre d'or est aussi la plus éloignée des accrochages simples. De ce fait, cette trajectoire sera la dernière à résister lorsque K augmente. Son seuil de disparition correspond précisément à $K = 1$. A cette valeur, la trajectoire est perturbée par les différents accrochages même s'ils ont des dénominateurs très grands.

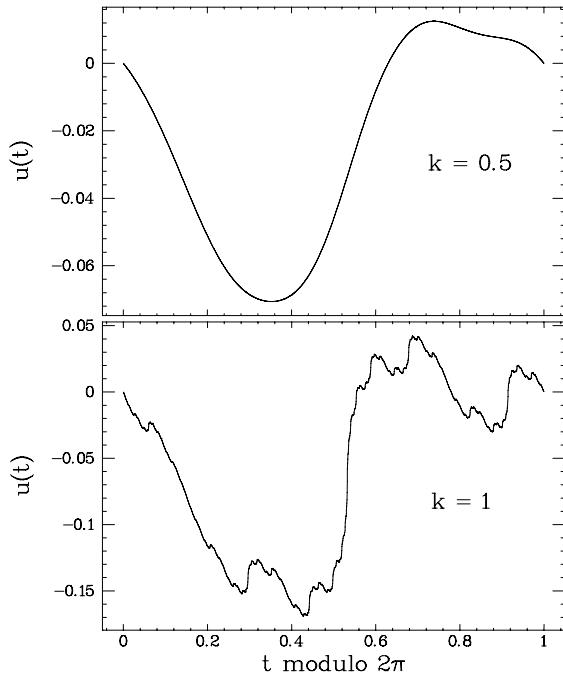


FIG. IV.26: Evolution de la fonction $u(t)$ pour a) $K = 0.5$, b) $K = 1$.

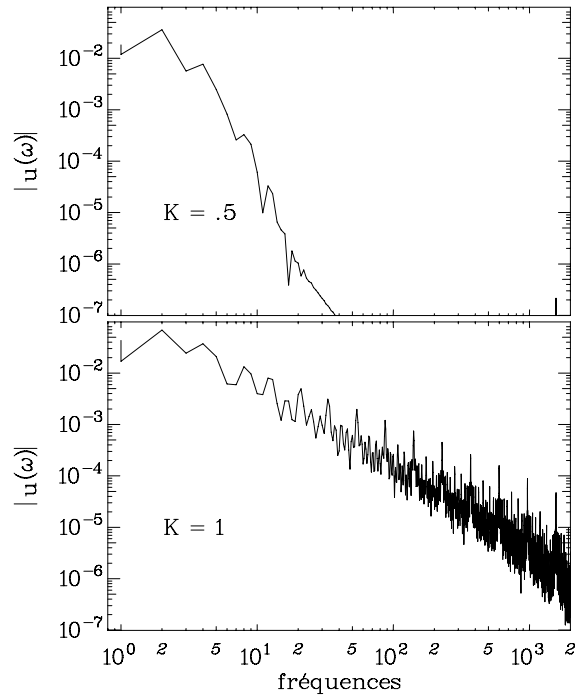


FIG. IV.27: a) Spectre de la courbe $u(t)$, pour $K = 0.5$. Seules les raies aux basses fréquences sont présentes. b) Même spectre pour $K = 1$. Il contient des raies à toutes les fréquences.

IV.5.4 Perturbations à toutes les échelles

Une façon d'analyser l'évolution de cette trajectoire, proposée par SHENKER, consiste à suivre l'évolution temporelle de $\phi_n - \alpha n$, c'est-à-dire l'écart de la phase par rapport à sa valeur lorsqu'elle est nulle ($K = 0$) [8]. Nous avons reproduit sur la figure IV.26 l'état de cette trajectoire pour $K = 0.5$ et $K = 1$. Pour $K = 0.5$, cette courbe présente des déformations sur les temps longs, mais elle est lisse aux petites échelles. En effet, le spectre de puissance ne présente des raies qu'aux basses fréquences IV.27. Lorsque l'on augmente K , des perturbations de plus petite échelle apparaissent. A $K = 1$, la courbe présente des perturbations à toutes les échelles, le spectre de FOURIER comporte des pics intenses dans tout le domaine de fréquences. Cette courbe possède des détails visibles à tous les grossissements : c'est un objet fractal. Chaque échelle de perturbation correspond à la perturbation apportée par un accrochage. Un accrochage de type p/q induit q bosses dans la courbe. Au delà de $K = 1$, le tore irrationnel se déchire, il y apparaît des trous, la répartition des points n'est plus uniforme, la dynamique devient chaotique.

IV.5.5 Observation expérimentale

L'observation expérimentale de la disparition d'un tore irrationnel est rendu difficile par la tendance naturelle de deux oscillateurs à s'accrocher en fréquences. Il faut en général disposer de deux paramètres ajustables jouant respectivement le rôle de K et α . Malheureusement, la situation est rarement aussi simple, et la fréquence de chacun des oscillateurs variant avec l'amplitude d'oscillation, on observe généralement une suite d'accrochages et de trajectoires irrationnelles —c'est à dire un morceau de l'escalier du diable. Pour maintenir le nombre de rotation irrationnel, la meilleure solution consiste encore à imposer de l'extérieur la fréquence perturbatrice et de maintenir le rapport à la fréquence de réponse aussi près que possible d'un nombre irrationnel. On observe alors des spectres de puissance d'une variable du système comparable à celui de la figure IV.28. Au fur et à mesure que l'on s'approche de la valeur critique du paramètre de contrôle, ce spectre s'enrichit de raies basses fréquences qui correspondent aux battements de la fréquence principale avec les différents accrochages rationnels qui approximent le nombre de rotation α . Dans le cas où $\alpha = \Omega_g$, on obtient une série de raies aux valeurs $\Omega_i = |\Omega_g - (F_n/F_{n+1})|$.

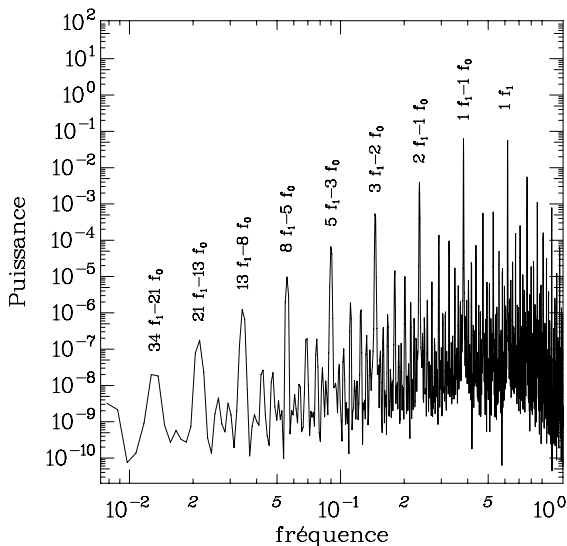


FIG. IV.28: Spectre d'un oscillateur bipériodique. Le rapport des deux fréquences est le nombre d'or Ω_g .

IV.5.6 Intermittence de type II

Lorsque le coefficient g_r de l'équation IV.12 est négatif, l'amplitude d'oscillation de la deuxième fréquence n'est plus saturée par le terme d'ordre 3 et l'on peut observer différents comportements. Les termes d'ordre plus élevé peuvent conduire à la saturation, et l'obtient une bifurcation de HOPF inverse. On peut aussi avoir un mécanisme voisin de celui de l'intermittence III : l'amplitude de la trajectoire croît et atteint un domaine chaotique qui peut la réinjecter près du point de naissance de la seconde oscillation. On observe alors des phases laminaires de signal bipériodique et des bouffées de signal chaotique. Comme la réinjection se fait près d'un point fixe instable, le comportement est semblable à celui de l'intermittence de type III ; en particulier, la distribution des phases laminaires n'est pas bornée supérieurement puisque la réinjection peut avoir lieu aussi près que l'on veut du point fixe. Cependant, celle-ci est beaucoup plus délicate car l'espace des phases est de dimension plus élevée.

A notre connaissance, il n'y a pas eu d'observation expérimentale de cette transition vers le chaos.

IV.6 Le théorème de Ruelle Takens Newhouse

En 1978, RUELLE, TAKENS et NEWHOUSE ont montré qu'un système dynamique ne pouvait pas présenter de solution stable inscrite sur un tore T^3 , c'est-à-dire ayant trois fréquences incommensurables. Plus exactement, ils ont montré qu'une telle solution ne résiste pas à des

Attracteur de Duffing

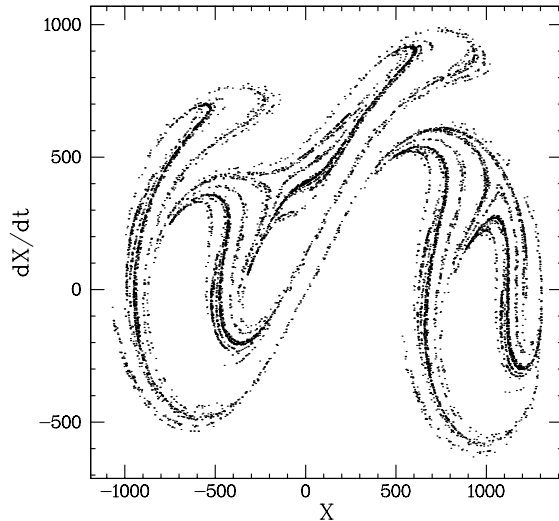


FIG. IV.29: Attracteur étrange obtenu à l'aide d'un circuit électronique représentant une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une perturbation sinusoïdale.

perturbations infinitésimales.

Cela signifie qu'il ne serait pas possible d'observer un système dont le spectre présenterait trois fréquences incommensurables sans que celui-ci ne possède une partie bruyante correspondant au chaos. En pratique, ce théorème mathématique est difficile à vérifier car le scénario correspondant est difficile à distinguer du scénario bipériodique que nous venons de décrire. Par ailleurs, il est possible d'imaginer des perturbations douces qui ne détruisent pas le tore T^3 .

IV.7 Exposants de LYAPOUNOV et dimension fractale

Comme nous l'avons vu, le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace des phases que l'on appelle un *attracteur étrange*. Un exemple d'attracteur étrange est donné par la figure IV.29. Il s'agit de la coupe de POINCARÉ d'une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une excitation périodique. Ce nom d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace des phases. En imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange...

IV.7.1 Exposants de Lyapounov

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.) que nous avons introduite au premier chapitre. C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. On peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence.

Considérons une itération à une dimension : $x_{n+1} = F(x_n)$, et deux conditions initiales différentes x_0 et $x_0 + \delta x_0$. La première itération conduit à : $x_1 + \delta x_1 = f(x_0) + (dF(x_0)/dx)\delta x_0$, soit $\delta x_1 = dF(x_0)/dx \delta x_0$. Après n itérations, on a :

$$\delta x_n = \left(\frac{dF^n(x_0)}{dx} \right) \delta x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF(x_i)}{dx} \right) \delta x_0$$

Les termes $\gamma_n = \left(\frac{dF^n(x_0)}{dx} \right)^{1/n}$ caractérisent la divergence. On définit alors l'exposant de LIAPOUNOV de l'itération par :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx} \right|$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|$$

Si cet exposant est positif, les trajectoires divergent et la trajectoire est chaotique. On peut bien sûr étendre cette définition à une dimension plus élevée d'espace des phases, et l'on a alors un spectre d'exposants de LIAPOUNOV.

IV.7.2 Dimension d'un attracteur

Le chaos se caractérise aussi en étudiant les propriétés géométriques de l'attracteur étrange lui-même. Comme on peut le voir sur la figure IV.29, l'attracteur ne remplit pas totalement l'espace, mais se constitue d'un certain nombre de feuillets : il s'agit d'un objet fractal [?], possédant une dimension non entière appelée *dimension fractale*. Cette notion généralise celle de dimension euclidienne. Il existe plusieurs types de dimension fractale, mais nous ne discutons ici que la dimension dite de HAUSDORFF.

Considérons le segment de droite $[0, 1]$. Il faut N cube de côté d pour le recouvrir. Nous obtenons trivialement $N(d) = 1/d$. Le même calcul fait pour un carré de côté unité nous conduit à $N(d) = 1/d^2$. On définit ainsi la dimension fractale comme l'exposant D qui apparaît dans la relation :

$$N = \left(\frac{1}{d} \right)^D \quad \text{soit :} \quad D = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/d)}$$

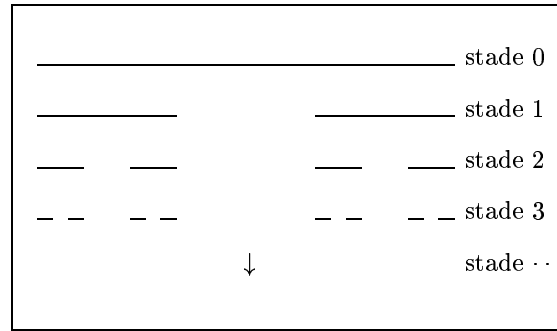


FIG. IV.30: Principe de construction l'ensemble triadique de Cantor.

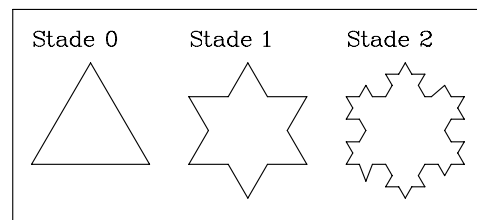


FIG. IV.31: Principe de construction de flocon de Koch.

Appliquons cette définition à un ensemble fractal construit sur le segment $[0, 1]$ appelé l'ensemble triadique de Cantor. Cet ensemble est obtenu comme la limite d'un processus de découpage explicité sur la figure IV.30.

Au stade de construction j , il faut 2^j segments de longueur $d = (1/3)^j$ pour couvrir l'objet, donc :

$$D = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log 2^j}{\log 3^j}$$

On trouve ainsi que l'ensemble triadique de CANTOR a pour dimension fractale :

$$D = (\log 2 / \log 3) = 0.63 \dots$$

Un deuxième exemple est celui du flocon de neige construit aussi sur un procédé itératif décrit dans la figure IV.31.

Après un nombre infini d'itérations, on obtient un ensemble qui s'appelle le *flocon de Koch*. Au stade de construction j , il faut $N = 3 \times 4^j$ segments de longueur $(1/3)^{j+1}$ pour fabriquer l'objet. On obtient donc :

$$D = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(3 \times 4^j)}{\log(3^{j+1})} \rightarrow D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Le calcul de la dimension fractale d'un attracteur étrange expérimental n'est pas si simple à réaliser.

Lorsque la dimension de l'attracteur est petite, la méthode de GRASSBERGER et PROCACCIA [9] donne de bons résultats.

IV.8 Exercices

IV.8.1 Itérations

On se propose d'étudier l'itération $f_r(x)$ définie entre 0 et 1 par :

$$x_{n+1} = r \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x_n \right| \right) \quad (\text{IV.16})$$

- Tracer qualitativement l'application f , pour $r = 0.4$ puis $r = 0.8$, dessiner de la même façon $f \circ f$.
- Déterminer les points fixes de f_r pour $0 < r < 1/2$, $r = 1/2$ et $1/2 < r \leq 1$. Discuter leur stabilité dans chacun des cas.
- Généraliser pour l'application f_r^n , $n \in \mathcal{N}$.
- Appliquer le critère de la sensibilité aux conditions initiales à f , qu'en concluez-vous. Peut-on quantifier ce résultat ?

IV.8.2 La bille qui rebondit

On lâche une bille qui ne peut se déplacer que verticalement suivant z , elle est soumise au champ de pesanteur terrestre g et elle rebondit sur le sol (défini par $z = 0$).

Cas sans dissipation d'énergie

On suppose, dans un premier temps, que le mouvement de la bille se fait sans dissiper d'énergie.

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
- Sans faire de calcul, indiquez comment varie la fréquence du *toc toc* qu'elle fait en touchant le sol, en fonction de la hauteur dont elle tombe.
- Pouvez vous en déduire si le système est linéaire ou non ?
- Ecrire les équations du mouvement et tracer l'allure des trajectoires dans l'espace des phases.
- Calculer la période du mouvement en fonction de la hauteur maximale atteinte par la bille et de sa vitesse au sol.

Cas avec dissipation d'énergie

On suppose maintenant qu'il y a une perte d'énergie chaque fois que la bille entre en collision avec le sol, mais par contre, on néglige tout frottement durant la

phase de chute libre du mouvement. On écrit ainsi que la vitesse au rebond $i + 1$:

$$V_{i+1} = \gamma V_i \text{ avec } 0 < \gamma < 1$$

Coupe de Poincaré

On définit la coupe de POINCARÉ en considérant les intersections de la trajectoire avec le plan de coupe défini par $z = 0$.

- Ecrire la relation qui permet de déduire les coordonnées d'un point M_{i+1} de la section de POINCARÉ en fonction du point précédent M_i .
- Si nous définissons T_i , comme le temps mis par la bille pour aller du point M_{i-1} au point M_i , écrire la relation qui relie T_{i+1} à T_i .

IV.9 La bille qui rebondit sur un haut parleur

On fait maintenant rebondir la bille du problème précédent sur un haut-parleur animé d'un mouvement de vibration à la pulsation $\omega = 2\pi$ (la position du haut-parleur est définie en $z = 0$). Nous modélisons la membrane du haut parleur par une masse M présentant un mouvement $z = a \sin(2\pi t)$. Nous supposons que la masse de cette membrane est beaucoup plus grande que celle de la bille m ; le mouvement de la membrane n'est donc pas influencé par celui de la bille. Par contre, à chaque collision, la bille reçoit une impulsion proportionnelle à la vitesse de la membrane qui modifie la vitesse de la bille.

Le calcul exact du mouvement de la bille, sans présenter de difficultés insurmontables, est un peu délicat. Nous proposons de l'analyser avec des hypothèses simplificatrices : la difficulté du problème réel vient du fait que la bille heurte la membrane du haut-parleur à une position z qui varie dans le temps. Nous allons ici supposer que cette collision a toujours lieu à $z = 0$, ceci revient à dire que l'amplitude de vibration de la membrane est petite par rapport à la hauteur du rebond.

Cas sans frottement

En l'absence de frottement et dans l'hypothèse où la quantité de mouvement communiquée à la bille à chaque collision a la forme :

$$\delta p = m \alpha \sin(2\pi t)$$

déterminer :

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?

- Quelles sont les relations qui définissent M_{i+1} en fonction de M_i et T_{i+1} en fonction de T_i comme dans IV.8.2.
- Sans faire de calcul, commenter le système d'équations que vous venez de trouver : combien de fréquences sont mises en jeu, l'existence de solutions chaotiques ou régulières, le paramètre de stochasticité.
- Y a-t-il des points fixes triviaux? si oui, à quoi correspondent-ils?

Le cas infiniment dissipatif

Nous étudions ici un cas asymptotique difficilement réalisable mais qui permet un calcul simple. Si la dissipation tend vers l'infini, la bille ne rebondit pas sur le sol, elle perd toute son énergie cinétique à chaque collision. Pour observer un mouvement de rebond, il faut supposer que la bille reçoive une impulsion toujours positive à chaque collision. Imaginons ainsi qu'après une collision, la vitesse de décollement de la bille ait la forme :

$$V_{i+1} = \frac{g}{2} + \alpha \sin(2\pi T_i) \quad (\text{IV.17})$$

Déterminer :

- Quelles sont les relations qui définissent M_{i+1} en fonction de M_i et t_{i+1} en fonction de t_i comme dans IV.8.2, comment se simplifient-elles?
- Quel est le point fixe du système?
- Pour quelle valeur du paramètre de contrôle devient-il instable? quelle est la nature de la bifurcation?
- Quel est le scénario probable de transition vers le chaos?

Bibliographie

- [1] P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Communications in Mathematical Physics **74**, p. 189 (1980). P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittency and the Lorenz model*, Physics ID-SET Paris (1981)
- [2] P. BERGÉ, M. DUBOIS, P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittency in Rayleigh-Bénard Convection*, J. Physique-Lettres **41**, p. L341 (1980)
- [3] M.J. FEIGENBAUM *Quantitative universality for a class of non-linear transformation*, Journal of Statistical Physics, **19**, p. 25 (1978).
- [4] C. TRESSER et P. COULLET, *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **A 287**, p. 577 (1978)

- [5] A. LIBCHABER et J. MAURER, *Une Expérience de Rayleigh Bénard de Géométrie réduite; Multiplication, Accrochage et Démultiplication de Fréquences*, J. de Physique (Paris) Coll. **41**, C 3-51 (1980)
- [6] M. DUBOIS, A. RUBIO et P. BERGÉ *Experimental evidence s associated with a subharmonic bifurcation*, Physical Review Letters, **51**, p. 1446 (1981)
- [7] V. CROQUETTE, *Déterminisme et Chaos*, Pour la Science, décembre (1982)
- [8] S.J. SHENKER, *Scaling behavior in a map of a circle onto itself : empirical results*, Physica **5D**, p. 405, (1982)
- [9] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Characterization of strange attractors*, Physical Review Letters, **50**, p. 346 (1983). P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica **9D**, p. 189 (1983).

Chapitre V

Instabilités Hydrodynamiques

Table des matières

V	Instabilités Hydrodynamiques	V-1
V.1	L'instabilité Frederiks : Système potentiel	V-1
V.1.1	La phase cristal liquide	V-1
V.1.2	Conditions aux limites pour le directeur	V-1
V.1.3	Energie élastique	V-2
V.1.4	Energie magnétique	V-2
V.1.5	L'instabilité Frederiks	V-2
V.1.6	Paramètre d'ordre et champ critique	V-3
V.1.7	Dynamique	V-4
V.1.8	Cas d'une déformation inhomogène	V-4
V.1.9	Equation d'évolution inhomogène	V-5
V.2	L'instabilité de Rayleigh Bénard : Structures dissipatives	V-5
V.2.1	Mécanisme de l'instabilité	V-5
V.2.2	Equations BOUSSINESQ	V-6
V.2.3	le problème linéaire	V-7
V.3	Le modèle de Lorenz	V-8
V.3.1	Les hypothèses du modèle	V-8
V.3.2	Contribution dû à $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$	V-8
V.3.3	Contribution dû à $\vec{v}\cdot\nabla\theta$	V-9
V.4	Equations d'amplitude	V-11
V.4.1	Un modèle simplifié pour la convection	V-11
V.4.2	Développement multi-échelles	V-11
V.4.3	Amplitude en fonction de q	V-12
V.4.4	Instabilité d'ECKHAUS	V-12
V.4.5	Diagramme de stabilité	V-13
V.4.6	L'instabilité d'ECKHAUS est une instabilité de phase	V-14
V.4.7	Autres instabilités	V-14

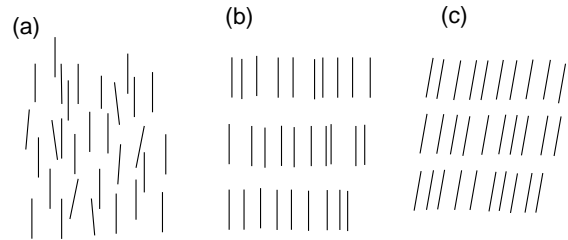


FIG. V.1: Configuration moléculaire des phases a) nématique, b) smectic-A et c) smectic-C

V.1 L'instabilité Frederiks : Système potentiel

Nous allons décrire ici une instabilité des cristaux liquides, l'instabilité FREDERIKS, qui va nous permettre d'introduire les principaux concepts des instabilités hydrodynamiques. Cependant celle-ci présente une différence fondamentale avec les instabilités hydrodynamiques habituelles car il existe un potentiel, ici l'énergie, dont le minimum définit la solution stationnaire du système, elle est dite variationnelle. Les systèmes variationnels ne peuvent ainsi présenter que des solutions stationnaires et jamais de solution périodique et encore moins chaotique. Mais comme dans le cas des systèmes hamiltoniens intégrables, ils constituent un point de départ pour l'étude des systèmes dissipatifs.

Les instabilités sont toujours le résultats d'une compétition entre deux mécanismes antagonistes, pour l'instabilité FREDERIKS, cette compétition a lieu entre l'énergie élastique du cristal liquide et son énergie magnétique. Nous décrivons ici brièvement les origines de ces deux contributions, nous commençons par rappeler la nature de la phase nématique.

V.1.1 La phase cristal liquide

Les cristaux liquides sont des molécules qui présentent une (ou plusieurs phases) thermodynamique intermédiaire entre la phase liquide et la phase solide.

Ce sont souvent des molécules allongées que l'on peut assimiler à des batonnets. Dans la phase nématique, les molécules n'ont pas d'ordre positionnel (comme dans un liquide) mais présente par contre un ordre orientationnel. C'est-à-dire que les molécules sont (en moyenne) alignées dans une direction. Le cristal liquide dans sa phase nématique présente ainsi une importante anisotropie de ses propriétés : indice de réfraction, conductivité thermique, susceptibilité magnétique, etc... L'ordre des molécules est représenté par un vecteur unitaire qui pointe suivant l'axe des molécules, son sens n'ayant pas de signification physique. On trouve des cristaux liquides dans les afficheurs des montres digitales, l'instabilité que nous allons décrire est assez voisine du mécanisme utilisé dans ces afficheurs pour obtenir une variation de contraste.

V.1.2 Conditions aux limites pour le directeur

Lorsque l'on refroidit un cristal liquide depuis la phase nématique vers la phase isotrope, la direction vers laquelle s'alignent les molécules, est *a priori* indéterminée. En pratique, elle est imposée par les parois du récipient le contenant ou par le champ magnétique ou électrique présent. Si ces parois n'ont subi aucun traitement, différentes orientations vont apparaître résultant en une structure complexe. Il est possible de préparer les surfaces du récipient afin d'aligner les molécules parallèlement aux parois, en recouvrant celles-ci de molécules organiques et en les frottant dans une direction donnée, on réalise ainsi un ancrage du directeur. Ce type d'ancrage est dit *planaire*. On peut aussi obtenir un ancrage des molécules perpendiculaire à la paroi en plaçant une couche de polymère sur la surface de verre, c'est l'ancrage homéotrope.

Dans les afficheurs, les molécules sont enfermées entre deux plaques de verres distantes de $\approx 50\mu m$, qui ont été traitées pour obtenir un ancrage planaire.

V.1.3 Energie élastique

Les molécules de cristal liquide ont tendance à avoir la même orientation, si par exemple, nous prenons deux plaques de verre parallèles traitées pour aligner les molécules dans la même direction et plaçons entre elles une goutte de cristal liquide tenue par capillarité, l'énergie mécanique sera minimale lorsque toutes les molécules pointeront dans la direction d'alignement. Si maintenant, nous faisons tourner l'une des plaques par rapport à l'autre d'un angle θ , nous imposons une contrainte aux molécules qui vont adopter une configuration où le directeur évolue continûment de puis 0 jusqu'à θ sur l'épaisseur de la couche, comme nous l'avons représenté sur la figure V.2. Les molécules vont exercer un couple de rappel sur les plaques, dont

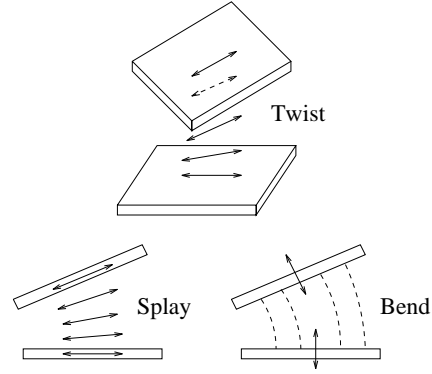


FIG. V.2: Déformation élastique de type twist dans une couche de cristal liquide

l'amplitude est petite mais finie, est qui correspond au fait que cette situation n'est pas un minimum d'énergie élastique. Dans un afficheur les deux plaques de verres sont tournées de 90° l'une par rapport à l'autre.

En fait, il existe trois déformations typiques que l'on peut imposer à un nématique : la déformation de type éventail (splay), celle de type torsion (twist) et la déformation de type courbure (bend). Nous avons reproduit la géométrie du champ des molécules correspondant sur la figure V.2.

A chacune de ces déformations est associée un coefficient d'élasticité : K_1 correspond à l'éventail, K_2 à la torsion et K_3 à la courbure. L'énergie élastique par unité de volume d'une configuration quelconque du champ du directeur peut être mise sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} \left[K_1 (\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_2 (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{n})^2 + K_3 (\vec{n} \times \text{rot} \vec{n})^2 \right] \quad (\text{V.1})$$

V.1.4 Energie magnétique

L'anisotropie de la susceptibilité magnétique des molécules se mesure par la différence entre la susceptibilité longitudinale χ_{\parallel} et celle transverse χ_{\perp} . Si l'on applique un champ magnétique sur un cristal liquide, les molécules ont tendance à s'aligner avec le champ car χ_{\parallel} est supérieur à χ_{\perp} . Le champ magnétique exerce ainsi un couple sur les molécules $\Gamma_m = \vec{M} \times \vec{H} = \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H}) \cdot (\vec{n} \times \vec{H})$ (où $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$). Le couple est nul quand \vec{n} est parallèle ou perpendiculaire à \vec{H} , mais si nous considérons l'énergie magnétique :

$$E_m = -\frac{1}{2} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2 \quad (\text{V.2})$$

on constate que la situation où \vec{n} est perpendiculaire à \vec{H} est instable.

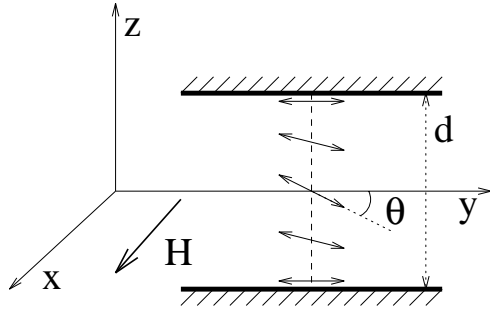


FIG. V.3: Disposition de la transition Frederiks

V.1.5 L'instabilité Frederiks

Si on place une couche de nématique d'épaisseur d entre deux plaques de verre préparées de telle façon que \vec{n} soit ancré parallèlement aux plaques dans la direction Oy , les molécules vont toutes s'aligner suivant cette direction sur l'épaisseur de la couche comme nous l'avons représenté sur la figure V.3. Si maintenant nous ajoutons un champ magnétique suivant Ox , soit parallèle aux plaques mais perpendiculaire à la direction d'alignement, nous plaçons les molécules devant un choix : rester alignés suivant Oy et ne pas minimiser l'énergie magnétique, ou s'aligner avec le champ mais augmenter l'énergie élastique puisque les molécules au contact des plaques de verre doivent rester parallèles à Oy . Le nématique adopte alors une configuration où son directeur varie angulairement avec la position dans la couche. Supposons dans un premier temps que la direction du directeur est indépendante de x et de y , nous pouvons écrire celui-ci en fonction de l'angle θ fonction de z uniquement. On en déduit aisément $\nabla\vec{n}$, $\vec{rot}\vec{n}$ ainsi que $\vec{rot}\vec{n} \times \vec{n}$:

$$\vec{\nabla}\vec{n} = \vec{0} \quad (V.3)$$

$$\vec{rot}\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta.\theta_z \\ \cos\theta.\theta_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (V.4)$$

$$\vec{n} \times \vec{rot}\vec{n} = \vec{0} \quad (V.5)$$

Avec $\theta_z = \partial\theta/\partial z$, on obtient ainsi l'expression de l'énergie suivante :

$$dF = \frac{1}{2}K_2 \left[\theta_z^2 - \frac{\sin^2\theta}{\xi^2} \right] \quad (V.6)$$

avec $\xi = \sqrt{K_2/\chi_a H^2}$. ξ est homogène à une longueur qui correspond à la longueur d'influence. Si nous appliquons un champ magnétique très fort, les molécules au milieu de la couche, vont s'aligner suivant Ox , mais lorsque nous approchons près des parois, les molécules

restent alignés suivant Oy . La longueur ξ mesure la distance caractéristique sur laquelle l'orientation des molécules reste dominée par l'ancrage des parois. Plus le champ magnétique est intense, plus cette longueur ξ est faible. Quand $\xi \approx d$, les domaines d'influence des deux parois se recouvrent et l'orientation des molécules ne suivra pas l'influence du champ. Nous sentons ainsi qu'il existe deux régimes, un à champ faible où le directeur est homogène $\theta(x, y, z) = 0$, et un régime à champ plus intense où le directeur va présenter une distorsion. Pour estimer la valeur précise du champ où se produit la bifurcation, nous devons modéliser la forme de cette distorsion du directeur. Pour respecter les conditions aux limites, nous choisissons :

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (V.7)$$

Il est facile de vérifier que le mode qui conduit au seuil le plus bas correspond à $n = 1$, on obtient ainsi l'expression suivante :

$$dF = \frac{1}{2}K_2 \left[\theta_0^2 \frac{\pi^2}{d^2} \sin^2 \frac{\pi z}{d} - \frac{1}{\xi^2} \left(\theta_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{d} - \frac{\theta_0^4}{3} \cos^4 \frac{\pi z}{d} \right) \right] \quad (V.8)$$

En intégrant suivant z , nous obtenons :

$$F = F_0 + \frac{K_2 d}{4} \left(\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) \theta_0^2 + \frac{K_2 d}{24} \frac{1}{\xi^2} \theta_0^4 \dots \quad (V.9)$$

Soit :

$$F = F_0 + a\theta_0^2 + c\theta_0^4 \quad (V.10)$$

Nous retrouvons une expression de l'énergie écrite par LANDAU pour décrire une transition du second ordre. Comme a peut changer de signe lorsque l'on augmente H , nous pouvons avoir les trois types de situations décrites sur la figure V.4.

V.1.6 Paramètre d'ordre et champ critique

Le système cherchant toujours à minimiser son énergie libre, nous remarquons que deux comportements sont possibles suivant que $a > 0$ ou $a < 0$. Dans le premier cas, F ne possède qu'un minimum correspondant à $\theta_0 = 0$ le directeur ne présente alors pas de distorsion. Pour $a < 0$, l'énergie libre a deux minimums non nuls et symétriques. Le champ magnétique qui conduit à $a = 0$ est appelé le champ critique H_c , c'est le point de bifurcation du système, il correspond à $\xi = \xi_c = d/\pi$ soit :

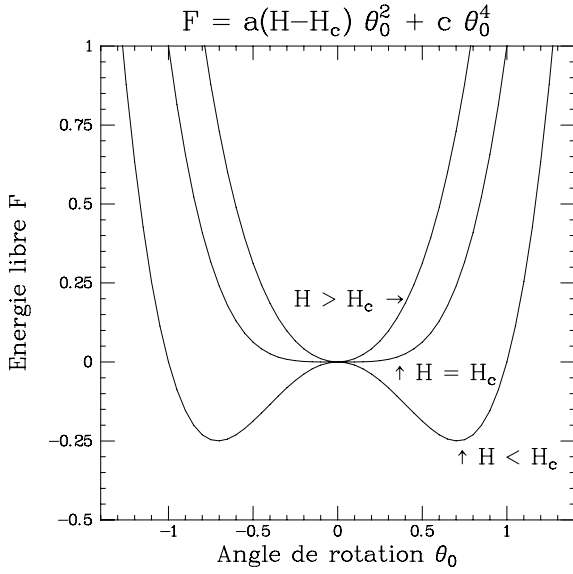


FIG. V.4: Evolution de l'énergie libre de la couche de nématique pour trois type de champ a) $H < H_c$ b) $H = H_c$ et $H > H_c$.

$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\chi_a}}$$

Au delà du champ critique, le directeur présente une déformation spontanée avec un angle $\pm\theta_0$ tel que :

$$\theta_0 = \pm\sqrt{12}\epsilon^{1/2} \text{ avec } \epsilon = \frac{H - H_c}{H_c}$$

V.1.7 Dynamique

Les cristaux liquides coulent comme des liquides visqueux. Le vecteur directeur ne tourne pas instantanément sous l'effet du champ magnétique, il est freiné par des effets de viscosité. En fait la viscosité des cristaux liquides est aussi anisotrope et il faut 5 coefficients pour rendre compte des différentes situations. Pour ne pas compliquer les calculs nous supposons qu'il n'y a qu'une seule viscosité. Lorsque la couche de nématique est mise hors d'équilibre, elle revient vers le minimum de l'énergie libre avec une dynamique variationnelle qui s'écrit :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta = - \frac{dF}{d\theta} \delta \theta \quad (\text{V.11})$$

où γ est le coefficient de viscosité. L'équation d'évolution de θ_0 correspond ainsi à celle que nous avons utilisée pour décrire une bifurcation fourche :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = -2a\theta - 4c\theta^3 \quad (\text{V.12})$$

Sauf pour $H = H_c$, la dynamique est de type exponentielle :

$$\begin{aligned} H < H_c \quad \theta = \theta_i e^{\gamma t} &= \theta_i e^{-\frac{\pi^2 K_3}{\gamma d} (-\epsilon)t} \\ H > H_c \quad \theta = \theta_i e^{-\gamma t} &= \theta_i e^{-\frac{2\pi^2 K_3}{\gamma d} \epsilon t} \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

V.1.8 Cas d'une déformation inhomogène

Si nous augmentons brutalement le champ magnétique depuis 0 jusqu'à une valeur $H > H_c$, le directeur va basculer vers l'une des valeurs $\pm\theta_0$. Si l'échantillon est assez grand, il se peut que des régions distantes choisissent chacune des deux valeurs possibles. Il apparaît ainsi des domaines dans l'échantillon, ces domaines sont séparés par des parois où le directeur passe continûment de $+\theta_0$ et $-\theta_0$. Nous nous proposons ici de déterminer l'équation du profil de la paroi. Pour cela, il nous faut reprendre le calcul de l'énergie élastique en supposant maintenant que θ est une fonction de x , y et de z . Nous obtenons les expressions suivantes pour la divergence de \vec{n} et son rotationnel.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \cos \theta \cdot \theta_x \quad (\text{V.14})$$

$$rot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \theta_z \\ \cos \theta \cdot \theta_z \\ -\sin \theta \cdot \theta_x \end{pmatrix} \quad (\text{V.15})$$

$$\vec{n} \times rot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cdot \theta_x \\ \sin^2 \theta \cdot \theta_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.16})$$

Où $\theta_x = \partial\theta/\partial x$, $\theta_y = 0$ et $\theta_z = \partial\theta/\partial z$. Nous obtenons ainsi l'énergie :

$$dF = \frac{K_1}{2} \theta_x^2 \cos^2 \theta + \frac{K_2}{2} (\theta_z^2 + \sin^2 \theta \theta_x^2) - \frac{K_3}{2} \sin^2 \theta \theta_x^2$$

Nous considérons ici, le cas où la paroi est perpendiculaire au champ H , nous avons $\theta_y = 0$:

$$dF = \frac{K_2}{2} \left[\theta_z^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon^2} + \theta_x^2 \left(1 + \frac{K_3}{K_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{K_1}{K_2} \cos^2 \theta \right] \quad (\text{V.17})$$

Nous retrouvons là une expression voisine du cas isotrope de V.9 avec juste un terme supplémentaire en θ_x^2 . En prenant un profil en z comme précédemment V.7, en intégrant sur les variables d'espace, et en ne gardant que les premiers termes du développement nous obtenons une expression de l'énergie totale :

$$F = F_0 + \frac{K_2 d}{4} \left[\frac{\xi^2 - \xi_c^2}{\xi^2 \xi_c^2} \theta_0^2 + \frac{K_1}{K_2} \theta_x^2 + \frac{1}{24 \xi^2} \theta_0^4 \right] \quad (\text{V.18})$$

Nous devons maintenant chercher une fonction $\theta(x)$ qui minimise l'énergie totale F . Ce problème est analogue à la recherche de la trajectoire minimisant le Lagrangien en mécanique. En effet, si nous transposons la variable d'espace x en une variable temporelle t' , nous remarquons que F contient des termes d'énergie potentiel θ^2 et θ^4 et un terme d'énergie cinétique θ_x^2 . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = 2a\theta + 4c\theta^3 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_x} = 2b\theta_x \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \theta_x} = 2b\theta_{xx} \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

Le formalisme Lagrangien nous permet d'écrire : $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_x} \right)$, ce qui nous conduit à :

$$a\theta + b\theta_{xx} - 2c\theta^3 = 0 \quad (\text{V.20})$$

C'est cette équation qui nous permet de déterminer le profil de la paroi à l'équilibre. En effet en multipliant chacun des termes de V.20 par θ_x et en intégrant nous obtenons l'équation :

$$\text{Cte.} = a\theta^2 + b\theta_x^2 - c\theta^4$$

Nous devons maintenant chercher une fonction $\theta(x)$ telle qui joigne une solution $+\theta_0$ à $x \rightarrow +\infty$ et $-\theta_0$ à $x \rightarrow -\infty$ avec $\theta_0^2 = -a/(2c)$. Loin de la paroi, nous pouvons supposer que le directeur est homogène avec x et que le terme en θ_x^2 est négligeable. Ceci nous permet de calculer Cte. $= -c\theta_0^4$, l'équation différentielle qui régit le profil de la paroi prend la forme : $b\theta_x^2 = -c(\theta^4 - 2\theta^2\theta_0^2 + \theta_0^4)$. Si nous supposons que $K \ll 1$, nous obtenons :

$$\frac{d\theta}{\theta_0^2 - \theta} = \frac{dx}{2\sqrt{K_1/K_2}\xi}$$

ce qui conduit à un profil de la forme :

$$\boxed{\theta(x) = \theta_0 \text{th} \left(\frac{x}{\xi_{\parallel} \epsilon^{-1/2}} \right)} \quad \text{avec} \quad \xi_{\parallel} = \frac{\sqrt{K_1}}{K_2} \xi \quad (\text{V.21})$$

Le profil de la paroi est donc une tangente hyperbolique dont la longueur caractéristique est $\xi_{\parallel} \epsilon^{-1/2}$. Cette longueur est en fait la largeur de la paroi, elle diverge lorsque nous approchons du champ critique, comme le fait la longueur de corrélation dans une transition de phase du second ordre.

V.1.9 Equation d'évolution inhomogène

Il est intéressant d'écrire l'équation d'évolution temporelle de la fonction $\theta(x, z)$ comme nous l'avons fait en V.12. Il nous faut calculer la contribution du terme en θ_x^2 , $:\frac{\partial}{\partial \theta} \theta_x^2 = 2\theta_x \theta_{xx} \partial x / \partial \theta$ soit $2\theta_{xx}$. L'équation d'évolution prend donc la forme :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu \theta + \xi_{\parallel} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - g \theta^3 \quad (\text{V.22})$$

C'est l'équation de LANDAU-GINSBURG que l'on trouve pour un très grand nombre d'instabilité. Dans le cas sans paroi, nous avons montré son analogie avec une transition de phase du second ordre. Nous avons mis en évidence que le paramètre d'ordre, ici θ , varie comme $\sqrt{\mu}$, qu'il y a un ralentissement critique avec un temps caractéristique qui varie comme μ^{-1} . Qu'il apparait une longueur de corrélation ξ_0 qui varie comme $\mu^{-1/2}$.

V.2 L'instabilité de Rayleigh Bénard : Structures dissipatives

Nous abordons ici une instabilité hydrodynamique qui n'est plus de type variationnelle, et peut conduire à un comportement dynamique beaucoup plus riche puisqu'elle développe des solutions chaotiques dès que le paramètre de contrôle est suffisamment grand.

V.2.1 Mécanisme de l'instabilité

Nous considérons une couche de fluide placée horizontalement dans le champ de pesanteur. La couche est supposée d'extension infinie dans ce plan et son épaisseur est notée d . Le fluide peut être un gaz ou un liquide, il est caractérisé par sa viscosité $\nu = \eta/\rho$ et sa diffusivité thermique $\kappa = \lambda/\rho C_p$. Nous verrons que seul le rapport $\sigma = \nu/\kappa$, appelé le nombre de PRANDTL, suffit à caractériser le fluide utilisé. Pour les liquides ordinaires eau, alcool... $\sigma \approx 7$, pour les liquides visqueux, huiles, miel ... σ est grand, il atteint 10^{10} pour le manteau terrestre ; les gaz ont des coefficients de diffusion à peu près tous identiques donnant $\sigma = 0,7$, le mercure qui conduit bien la chaleur, quant à lui a $\sigma = 0,025$. L'intérieur du soleil possède un nombre de PRANDTL très petit.

La couche de fluide est placée entre deux plaques solides dont la température est homogène est fixée à T_0 pour la plaque du haut et $T_0 + \Delta T$ pour celle du bas. Par ailleurs les conditions aux limites sont, pour une expérience, $\vec{V} = 0$ au contact de chacune des plaques habituellement et $\partial V_z / \partial z = 0$ mais nous choisirons ici la condition irréalisable expérimentale $\partial^2 V_z / \partial z^2 = 0$,

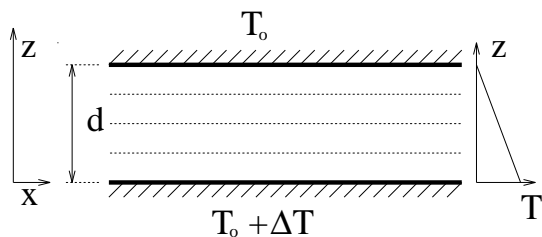


FIG. V.5: Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

qui permet des calculs plus facile et correspond à une contrainte nulle aux parois. Nous supposons, par ailleurs, que la température est uniforme à l'interface paroi-fluide, et égale à celle du solide

Comme le fluide est chauffé par le bas, les couches les plus basses sont moins denses que celles situées au dessus (dans la mesure où le coefficient de dilatation du fluide α est positif) et on imagine facilement que cette situation va conduire à une instabilité. Nous venons de décrire les mécanismes déstabilisants de la convection, mais il existe aussi des facteurs stabilisants qui vont s'opposer à l'apparition de mouvements au sein du fluide. La viscosité du fluide est évidemment l'un d'entre eux, mais nous allons voir que la diffusivité de la chaleur en est un autre. Nous proposons de faire un bilan estimatif des mécanismes mis en jeu pour montrer qu'il existe un seuil fini à l'instabilité.

Supposons que le fluide soit au repos mais qu'un gradient de température soit présent, imaginons que nous puissions faire tourner d'un petit angle un cylindre horizontal de fluide de diamètre d , il est soumis à la force d'ARCHIMÈDE qui conduit à l'apparition d'un couple qui va mettre en mouvement le cylindre. Comme celui-ci possède une certaine inertie, nous pouvons lui associer un temps caractéristique τ_A qui n'est autre que le couple divisé par la masse, soit :

$$\tau_A = \left(\frac{g \Delta \rho}{\rho d} \right)^{-1/2}$$

Les effets stabilisants peuvent être aussi quantifiés par un temps caractéristique, ainsi si nous imaginons qu'il n'y a plus de gradient de température et si nous lançons le cylindre de fluide avec une vitesse de rotation non nulle, la viscosité va faire décroître cette vitesse avec un temps caractéristique τ_v . Le fait que la chaleur puisse diffuser dans le fluide est aussi un effet stabilisant, le cylindre de fluide tourné d'un certain angle est instable car il est le siège d'un gradient de température (donc de densité), la diffusion de la chaleur va effacer ce gradient thermique avec un temps caractéristique τ_T . Les expressions de chacun de ces temps caractéristiques

sont données par :

$$\tau_v = \frac{d^2}{\nu} \quad \tau_T = \frac{d^2}{\kappa}$$

Le rapport $\tau_v \cdot \tau_T / \tau_A^2$ compare donc les effets stabilisants et déstabilisants. Ce nombre sans dimension s'appelle le nombre de RAYLEIGH, en exprimant que $\delta \rho / \rho = \alpha \Delta T$, il s'écrit :

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa} \quad (\text{V.23})$$

Un grand nombre de Rayleigh signifie que les temps caractéristiques d'amortissement τ_T et τ_v sont grand devant celui de la poussée d'Archimède, les effets stabilisants agissent moins vite que les facteurs déstabilisants et donc la convection peut s'établir. Dans l'autre cas, les effets stabilisants tuent la perturbation avant qu'elle ait pu se développer et l'état convectif reste stable. Le nombre de Rayleigh est proportionnel à la différence de température appliquée à la couche de fluide, c'est une mesure adimensionnée de la contrainte qui lui est appliquée.

V.2.2 Equations BOUSSINESQ

Pour obtenir les équations qui permettent de décrire les mouvements de convection, nous devons partir des équations qui régissent un fluide. Nous allons montrer comment on peut les réduire pour obtenir une expression plus simple appelé les équations BOUSSINESQ. Comme nous allons introduire des coordonnées réduites, nous utiliserons x_1 , y_1 et z_1 comme coordonnées du laboratoire. Les équations que nous allons utiliser sont :

– **l'équation de continuité** s'écrit $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_1) = 0$ qui dans la limite des fluides incompressible conduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (\text{V.24})$$

– **l'équation de Navier-Stokes**, qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_1 = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_1 + \nu \Delta \vec{V}_1 \quad (\text{V.25})$$

– **l'équation de la chaleur** qui décrit la conservation de l'entropie dans laquelle ϕ correspond à la production de chaleur par frottement visqueux :

$$\rho C_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 = \lambda \Delta T_1 + \phi \quad (\text{V.26})$$

- **l'équation d'état du fluide** qui décrit l'évolution de la température :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T_1 - T_0)] \quad (\text{V.27})$$

L'approximation BOUSSINESQ consiste à :

- Supposer le fluide incompressible : $\partial\rho/\partial t = 0$
- Négliger l'échauffement par effets visqueux : $\phi = 0$
- Supposer que toutes les propriétés du fluide ν , κ sont indépendantes de la température sauf la densité qui est le moteur de l'instabilité.

En absence de convection, le champ de vitesse est nul, par contre il existe un gradient de température ainsi qu'un gradient de pression qui se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{0} \\ T_1^0 = T_0 + \Delta T(d - z_1)/d \\ P_1^0 = P_0 + \rho_0 g(d - z_1) - \alpha g \rho_0 (\Delta T/2d)(d - z_1)^2 \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

Quand la convection apparaît, il faut ajouter une contribution convective à ces champs conductifs. Le champ de vitesse \vec{v}_1 cesse d'être nul, les modulations de température θ_1 et de pression Π_1 , s'ajoutent respectivement à chacune des équations de V.28. Établissons maintenant les équations qui régissent ces variables :

En séparant les deux contributions du gradient de température, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \theta_1 = \frac{\Delta T}{d} \vec{v}_1 \cdot \vec{k} + \kappa \Delta \theta_1 \quad (\text{V.29})$$

Où \vec{k} est un vecteur unitaire suivant l'axe Oz . Pour l'équation de NAVIER-STOKES nous devons expliciter la force \vec{F} agissant sur un élément de fluide, en fonction de la poussée d'ARCHIMÈDE : $\vec{F} = -g(\rho/\rho_0) \cdot \vec{k}$ où g est l'accélération de la pesanteur. En développant l'expression de la densité $\vec{F} = -g(1 - \alpha(\Delta T/d)(d - z_1) - \alpha\theta_1) \cdot \vec{k}$ et en calculant l'expression de la pression liée à la stratification de densité $\vec{\nabla} P/\rho = g(\alpha\Delta T(d - z_1)/d - 1) \cdot \vec{k} + \vec{\nabla} \Pi_1/\rho_0$, nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_1 = g\alpha\theta_1 \vec{k} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \Pi_1 + \nu \Delta \vec{v}_1 \quad (\text{V.30})$$

Nous pouvons maintenant adimensionner ces équations en opérant les changement de variables suivants :

- **espace** : $x = x_1/d$, $y = y_1/d$, $z = z_1/d$
- **temporelle** : $t = t_1 \cdot \kappa/d^2$
- **température** : $\theta = \theta_1 \cdot R_\alpha/\Delta T$

- **pression** : $\Pi = \Pi_1 \cdot d^2/(\rho\kappa\nu)$

Où le R_α n'est autre que le nombre de Rayleigh. Les équations adimensionnées prennent ainsi la forme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta + \partial\theta/\partial t = R_\alpha \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta\theta \\ \sigma^{-1} [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \partial\vec{v}/\partial t] = \theta \cdot \vec{k} - \vec{\nabla} \Pi + \Delta\vec{v} \end{cases} \quad (\text{V.31})$$

Ces équations constituent le système modèle qui permet de décrire la convection, elles ont deux termes non-linéaires : $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta$ de nature différente dont l'influence respective est déterminée par le nombre de PRANDTL σ .

V.2.3 le problème linéaire

Nous allons ici aborder l'étape qui permet de déterminer le seuil de l'instabilité ainsi que l'allure du mode instable. Cette étape est équivalente à ce que nous avons fait pour obtenir V.7 mais elle est rendue plus complexe par le fait qu'il existe ici trois champs en présence : la température θ , la vitesse \vec{v} et la pression Π . Il nous faut en effet déterminer ces trois champs pour qu'ils soient solutions des équations BOUSSINESQ linéarisées :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{0} \\ (\partial\theta/\partial t) = R_\alpha \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta\theta \\ \sigma^{-1} (\partial\vec{v}/\partial t) = \theta \cdot \vec{k} - \vec{\nabla} \Pi + \Delta\vec{v} \end{cases} \quad (\text{V.32})$$

En prenant le rotationnel de la dernière équation de V.32, nous pouvons éliminer le champ de pression Π (le rotationnel d'un gradient est nul). Nous obtenons alors une équation d'évolution pour $\text{rot} \vec{v} = \vec{\Omega}$ qui est la vorticité. Il est alors plus aisé de reprendre une deuxième fois le rotationnel en notant que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

en utilisant le fait que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, l'équation de la vitesse devient :

$$-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \vec{v}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \theta \cdot \vec{k}) - \nabla^2 (\nabla^2 \vec{v})$$

où nous avons :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\theta \cdot \vec{k}) = \begin{pmatrix} \theta_{xz} \\ \theta_{yz} \\ -\theta_{xx} - \theta_{yy} \end{pmatrix}$$

Où nous écrivons la composante suivant z : $-\Delta_h \theta$ qui représente le laplacien horizontal. Nous allons rechercher des solutions sous forme de rouleaux ayant leur

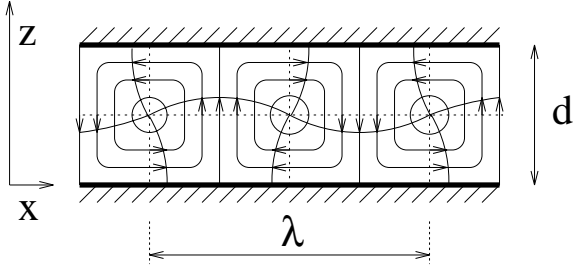


FIG. V.6: Description des champs de vitesse de rouleaux convectifs dans le cas de conditions aux limites libre-libre.

axe suivant y , ce qui nous permet de dire que toutes les dérivées partielles suivant y sont nulles, et d'écrire la vitesse sous la forme :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

Nous devons donc trouver les solutions du système :

$$\begin{cases} \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \nabla^4 u - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} \\ \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \nabla^4 w + \Delta_h \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = R_a w + \nabla^2 \theta \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

Guidés par les expériences, nous allons chercher une solution sous forme de rouleaux que nous modéliserons par des fonctions trigonométriques. Nous utilisons ici les conditions aux limites irréalistes dites **libre-libre** vérifiant :

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1$$

Nous utilisons les expressions ci-dessous dont nous donnons une représentation sur la figure V.6 :

$$\begin{cases} w = w_0 \sin(n\pi z) \cos(kx) e^{\beta t} \\ u = u_0 \cos(n\pi z) \sin(kx) e^{\beta t} \\ \theta = \theta_0 \sin(n\pi z) \cos(kx) e^{\beta t} \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

β est donc la valeur propre d'un opérateur linéaire \mathcal{L} . On peut montrer que cet opérateur qui agit sur le triplet (u, w, θ) est, lorsque l'on définit un produit scalaire correspondant à notre situation (généralement : $\langle f, g \rangle = \int_{z=0}^1 f(z)g(z)dz$), hermitique (autoadjoint) :

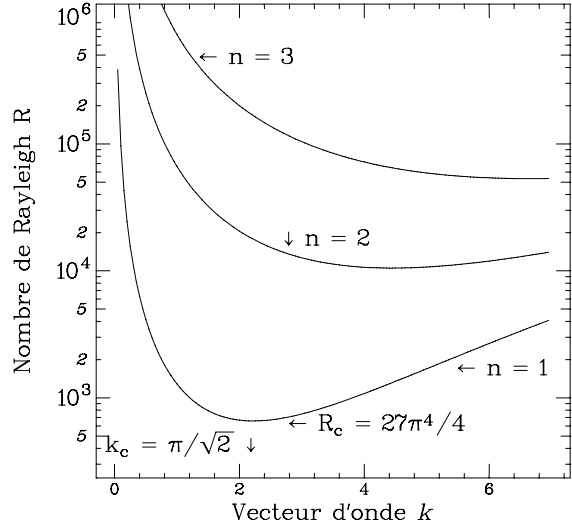


FIG. V.7: Courbe de stabilité marginale pour les modes $n = 1, n = 2$ et $n = 3$, dans le cas des conditions aux limites libre-libre.

ses valeurs propres sont réelles, le signe de β donne la stabilité vers un état stationnaire. (Nous n'avons pas de bifurcation de HOPF).

En injectant V.34 dans V.33, nous obtenons un système de quatre équations avec trois inconnues (u_0, w_0, θ_0) qui dépendent d'un paramètre β :

$$\begin{cases} -\sigma^{-1} \beta (n^2 \pi^2 + k^2) u_0 = (n^2 \pi^2 + k^2)^2 u_0 + n \pi k \theta_0 \\ -\sigma^{-1} \beta (n^2 \pi^2 + k^2) w_0 = (n^2 \pi^2 + k^2)^2 w_0 - k^2 \theta_0 \\ \beta \theta_0 = R_a w_0 - (n^2 \pi^2 + k^2) \theta_0 \\ 0 = k u_0 + n \pi w_0 \end{cases} \quad (\text{V.35})$$

En combinant la quatrième équation et la première, nous retrouvons la seconde, ceci signifie que nous pouvons considérer uniquement le système contenant la seconde et la troisième qui nous donne :

$$\begin{cases} (\beta/\sigma + (n^2 \pi^2 + k^2))(n^2 \pi^2 + k^2) w_0 - k^2 \theta_0 = 0 \\ R_a w_0 - (\beta + (n^2 \pi^2 + k^2)) \theta_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{V.36})$$

Pour que ce système possède des solutions, il faut que son déterminant soit nul. Ceci va nous donner une relation entre β et R_a . En fixant $\beta = 0$, nous définissons la condition pour laquelle le taux de croissance d'une solution est nulle c'est-à-dire que le mode est marginal :

$$R_a = \frac{(n^2 \pi^2 + k^2)^3}{k^2} \quad (\text{V.37})$$

V.3 Le modèle de Lorenz

L'analyse du modèle linéaire nous a permis de déterminer l'existence et la forme de l'écoulement qui va apparaître quand la différence de température ΔT devient suffisamment grand, mais il ne nous dit rien sur son amplitude. Le modèle de LORENZ est un système minimal où les non-linéarités ne sont plus négligées, il permet ainsi de déterminer l'amplitude des mouvements convectifs. Par ailleurs le modèle de LORENZ a joué un rôle historique car son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique et il constitua le premier système dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange.

V.3.1 Les hypothèses du modèle

Le modèle de LORENZ s'intéresse au premier mode linéairement instable ayant le vecteur d'onde $k = k_c$ c'est-à-dire à $n = 1$, de plus il suppose que le système de rouleaux est parallèle à Oy ce qui implique que toutes les dérivées suivant y sont nulles. L'idée est de considérer que le système de rouleaux possède une amplitude constante suivant Ox mais pouvant évoluer dans le temps ce qui nous permet de nous intéresser qu'aux fonctions $w_0(t)$, $u_0(t)$ et $\theta_0(t)$.

Toutefois ce modèle prend en compte les termes non-linéaires de l'équation BOUSSINESQ, nous devons considérer les termes $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$ et $\vec{v}\vec{\nabla}\theta$. En particulier nous devons calculer leur action sur le système de rouleaux droits défini par V.34.

V.3.2 Contribution dû à $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$

Pour faire disparaître le terme de pression nous avons pris le double rotationnel de l'équation de vitesse; il faut reprendre ce calcul sur le terme non-linéaire :

$$(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{v})$$

en prenant le rotationnel de cette expression le terme en gradient disparaît, il vient :

$$\vec{\nabla} \times [(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{v}] = \vec{\nabla} \times [(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}] = \vec{\nabla} \times [\vec{\Omega} \times \vec{v}]$$

où $\vec{\Omega}$ est la vorticité. Comme $\partial/\partial y = 0$ elle s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z u - \partial_x w \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en appliquant le double rotationnel nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v})] = \begin{pmatrix} -[(\Omega u)_{xz} + (\Omega w)_{z^2}] \\ 0 \\ [(\Omega w)_{xz} + (\Omega u)_{x^2}] \end{pmatrix} \quad (V.38)$$

en utilisant la forme des rouleaux défini par V.34 nous obtenons : $\Omega = (w_0 k - \pi u_0) \sin \pi z \sin kx$. La composante suivant x de V.38 devient :

$$(\Omega u)_{xz} + (\Omega w)_{z^2} = \Omega_0 \pi (w_0 \pi + k u_0) \cos 2\pi z \sin 2kx$$

ce terme est nul car $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$ implique que $w_0 \pi + k u_0 = 0$. On vérifie aisément que la contribution en z de V.38 est également nulle.

Dans le modèle de LORENZ nous venons de montrer que la non-linéarité $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$ ne joue aucun rôle. Il faut se rendre compte que le modèle de LORENZ est très particulier et il ne faudrait pas conclure que $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$ n'intervient pas dans la convection, bien au contraire dès que les rouleaux présentent de la courbure ou une forme un peu plus complexe que celle de V.34, le terme $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$ joue un rôle déterminant.

Les équations régissant les composantes du vecteur vitesse sont les même dans le modèle de LORENZ que dans le cas linéaire, soit :

$$\begin{cases} -\sigma^{-1}(\pi^2 + k^2) \frac{\partial u_0}{\partial t} = (\pi^2 + k^2)^2 u_0 + \pi k \theta_0 \\ -\sigma^{-1}(\pi^2 + k^2) \frac{\partial w_0}{\partial t} = (\pi^2 + k^2)^2 w_0 - k^2 \theta_0 \end{cases} \quad (V.39)$$

Ces deux équations sont équivalentes puisque $w_0 \pi + k u_0 = 0$, il nous suffit d'en conserver une seule, celle de w_0 par exemple.

V.3.3 Contribution dû à $\vec{v}.\vec{\nabla}\theta$

Le terme $\vec{v}.\vec{\nabla}\theta$ vaut $u\partial_x\theta + w\partial_z\theta$ en utilisant la forme des rouleaux définie par V.34 nous obtenons :

$$\vec{v}.\vec{\nabla}\theta = -k\theta_0 u_0 \sin^2(kx) \cos \pi z \sin \pi z + w_0 \pi w_0 \cos^2(kx) \cos \pi z \sin \pi z$$

soit

$$\vec{v}.\vec{\nabla}\theta = \frac{\pi \theta_0 \omega_0}{2} \sin(2\pi z)$$

Ce terme non-linéaire fait apparaître un harmonique 2 en z sans dépendance en x , c'est-à-dire un harmonique 0 en x . Cette composante supplémentaire va jouer un rôle essentiel, nous devons donc modifier la

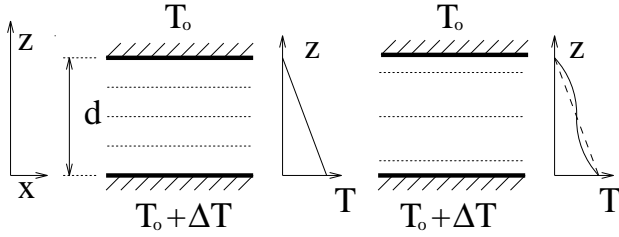


FIG. V.8: Effet de l'harmonique 2 sur le gradient vertical de température.

forme de la solution choisie en V.34 et modifier la forme de la modulation de température par :

$$\theta = \theta_0 \sin(\pi z) \cos(kx) + \theta_2 \sin(2\pi z) \quad (\text{V.40})$$

Il faut remarquer que la forme de cet harmonique est ici très simple et correspond, comme on peut le voir sur la figure V.8, à une modification du gradient linéaire de température imposé à la couche de fluide qui est le moteur de l'instabilité. L'harmonique 2 diminue le gradient au centre de la couche et le renforce près des parois horizontales. Cette situation traduit le fait que les mouvements de convection transportent la chaleur efficacement au centre de la couche tandis qu'il sont freinés près des parois. Le flux de chaleur est constant sur l'épaisseur, il se décompose en deux contributions : le flux conductif (proportionnel au gradient vertical de température) et le flux convectif. Lorsque le flux convectif est important (au centre de la couche), le flux conductif est plus faible, par contre près des parois le flux convectif est faible et le flux conductif est plus fort.

Nous devons maintenant déterminer l'équation régissant cet harmonique. A partir de l'équation de la perturbation dans l'équation BOUSSINESQ V.31 nous isolons les contributions liées au mode fondamental en $\sin(\pi z) \cos(kx)$ de celles en $\sin(2\pi z)$. Pour cette dernière nous obtenons :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\pi}{2} \theta_0 w_0 = -4\pi^2 \theta_2$$

Afin d'évaluer la composante en $\sin(\pi z) \cos(kx)$, nous devons déterminer la composante de ce type obtenue par les termes non-linéaires en $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta$ où la composante de vitesse correspond au mode linéaire tandis que celui de température correspond à l'harmonique 2, soit :

$$w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2\pi \theta_2 w_0 \sin(\pi z) \cos(kx) \cos(2\pi z)$$

L'équation de la composante en $\sin(\pi z) \cos(kx)$ est donc :

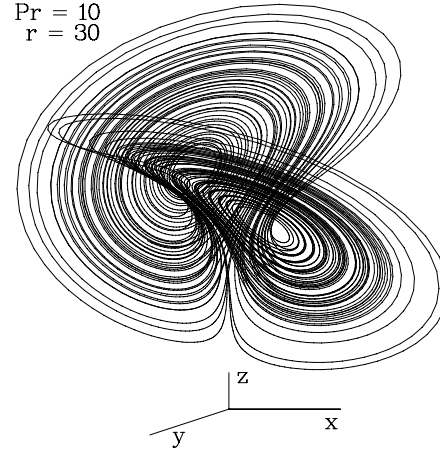


FIG. V.9: Vue en perspective de l'attracteur de LORENZ

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \pi \theta_2 w_0 = R_a w_0 - (\pi^2 + k^2) \theta_0$$

Evidemment des harmoniques supérieures sont apparus mais ils ne se couplent au fondamental qu'à des ordres plus élevé, nous les négligeons. Nous pouvons écrire les équations qui régissent les trois modes du modèle de LORENZ, c'est-à-dire la composante verticale de vitesse w_0 , la composante fondamentale de modulation température θ_0 et son harmonique 2 θ_2 . Nous utilisons par ailleurs le fait que le vecteur d'onde du mode fondamental est le vecteur d'onde critique $k_c = \pi/\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t} = \sigma \left[\frac{\theta_0}{3} - 3\pi^2 \frac{w_0}{2} \right] \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = R_a w_0 + \pi \theta_2 w_0 - 3\pi^2 \frac{\theta_0}{2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{\pi}{2} \theta_0 w_0 - 4\pi^2 \theta_2 \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

En effectuant le changement de variable :

$$\begin{cases} T = \frac{3\pi^2}{2} t & X = \frac{9\pi^2}{2} w_0 \\ Y = \theta_0 & Z = -\frac{4}{27\pi^3} \theta_2 \end{cases} \quad (\text{V.42})$$

nous obtenons le modèle de LORENZ :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{dT} = rX - XZ - Y \\ \frac{dZ}{dT} = XY - bZ \end{cases} \quad (\text{V.43})$$

Avec $r = 4R_\alpha/27\pi^4$ est le nombre de Rayleigh réduit et $b = 8/3$.

Evidemment le point $X = Y = Z = 0$ est un point fixe trivial, il est facile d'en étudier la stabilité en linéarisant autour de ce point fixe, il faut chercher les valeurs propres de :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (\text{V.44})$$

qui correspondent aux racines de :

$$(b - r)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0 \quad (\text{V.45})$$

comme r ne peut être que positif, une instabilité apparaît lorsque le produit des racines $(1 - r)$ devient négatif ce qui conduit à une racine positive. Dans le régime $r > 1$ la convection prend la place de la conduction. tant que r reste petit, on montre facilement que $X = Y$ et $Z = X^2/b$. Ce cas est celui d'une solution stationnaire où le mode Z (l'harmonique 2 en z) est esclave des modes fondamentaux et on peut simplifier le modèle en une seule équation qui prend la forme :

$$\frac{dY}{dT} = (r - 1)Y - \frac{1}{b}Y^3$$

Nous reconnaissons l'équation d'une bifurcation fourche qui régit ici l'amplitude du mode de température.

On obtient des solutions chaotique pour $\sigma = 10$, $r = 28$, comme on peut le voir sur les figures V.9, V.10. Le modèle de LORENZ a joué un rôle important dans la découverte du chaos car c'est ce type de solutions chaotiques qui ont permis de visualiser les premiers attracteurs étranges. Cependant ce régime de grand nombre de Rayleigh est incompatible avec les hypothèses faites lors du calcul. (l'harmonique 2 en z est beaucoup plus grand que le gradient de température qui est censé lui donné naissance.)

V.4 Equations d'amplitude

Comme nous venons de le voir, établir les équations linéaires pour décrire l'apparition de la convection est déjà

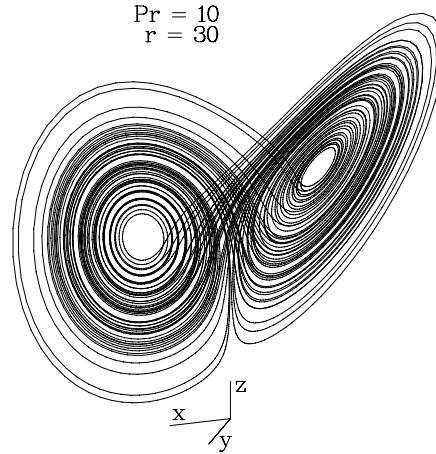


FIG. V.10: Autre vue en perspective de l'attracteur de LORENZ

une opération fastidieuse, le calcul des non-linéarités est encore plus délicat. Toutefois il existe un formalisme bien utile dans le domaine de paramètre voisin du seuil de convection. Nous présentons ici la méthode dite de "développement en ϵ " mais nous ne l'appliquerons pas à la convection de Rayleigh-Bénard, nous utiliserons un modèle de SWIFT HOHENBERG qui a le mérite de conduire à des calculs plus simples.

V.4.1 Un modèle simplifié pour la convection

SWIFT et HOHENBERG ont introduit une équation différentielle à une dimension dont les solutions sont périodiques avec un vecteur d'onde q_0 . Cette équation a la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\epsilon - \square^2)u - u^3 \quad \text{avec} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + q_0^2 \quad (\text{V.46})$$

Cette équation veut décrire les modulations de température dans la convection par exemple, on constate que l'opérateur \square^2 est nul si la solution est de la forme $\sin qx_1$ avec $q = q_0$; sinon il prend une valeur positive et a un rôle stabilisant dans l'équation V.46. Dès que ϵ est positif, une solution périodique va apparaître, nous allons voir que les non-linéarités en u^3 vont stabiliser son amplitude.

V.4.2 Développement multi-échelles

Nous allons chercher une solution u de l'équation V.46 sous forme d'un développement en ϵ :

A l'ordre $\epsilon^{3/2}$

$$u = u_{1/2}\epsilon^{1/2} + u_1\epsilon + u_{3/2}\epsilon^{3/2} + \dots \quad (\text{V.47})$$

Où $u_{1/2}$, u_1 et $u_{3/2}$ sont des fonctions à déterminer. La forme de son développement est directement inspiré des résultats que nous avons mis en évidence dans l'instabilité Frederiks, c'est-à-dire que l'amplitude du mode varie comme $\epsilon^{1/2}$. Par ailleurs, nous avons aussi remarqué que l'épaisseur d'une paroi avait un comportement critique en $\epsilon^{-1/2}$. L'échelle spatiale des modulations d'amplitude dépend donc elle aussi de ϵ . Toutefois la fréquence spatiale de la solution $\sin q_0 x$ elle est indépendante de ϵ . Nous devons donc introduire deux échelles de longueurs, l'une indépendante de ϵ dite l'échelle rapide, que nous décrirons avec la variable x , l'autre l'échelle lentement variable que nous décrirons par X avec $X = \epsilon^{1/2}x_1$. De la même façon, nous devons tenir compte du ralentissement critique près de la bifurcation, et introduire un temps lentement variable $T = \epsilon t$. Nous devons maintenant introduire ces changements dans l'équation V.46 que nous écrivons avec les transformations :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X}\epsilon^{1/2} \quad (\text{V.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}\epsilon \quad (\text{V.49})$$

L'équation V.46 devient :

$$\begin{aligned} & \square^2 u + 4\epsilon^{1/2} \left(\square \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \right) u \\ & \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial T} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \square + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 1 \right) \\ & + 4\epsilon^{3/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial X^3} \right) u + \epsilon^2 \frac{\partial^4}{\partial X^4} u = u^3 \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

En remplaçant u par son développement on peut résoudre ordre par ordre, on obtient ainsi :

A l'ordre $\epsilon^{1/2}$

$$\square^2 u_{1/2} = 0$$

ce qui conduit à : $u_{1/2} = A_{1/2}(X)e^{iq_0 x} + c.c.$

$u_{1/2}$ est donc périodique de vecteur d'onde q_0 mais nous ne pouvons prédire l'amplitude de cette solution à ce stade du développement. **A l'ordre ϵ**

$$\square^2 u_1 + 4 \left[\frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} \square \right] u_{1/2} = 0$$

puisque $\square u_{1/2} = 0$ nous avons $\square^2 u_{1/2} = 0$

ce qui conduit à : $u_1 = A_1(X)e^{iq_0 x} + c.c.$

$$\begin{aligned} u_{1/2}^3 &= \square^2 u_{3/2} + 4 \left[\frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} \square \right] u_1 \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial T} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \square + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] u_{1/2} \end{aligned} \quad (\text{V.51})$$

puisque $\square u_{1/2} = 0$ et $\square u_1 = 0$, nous obtenons :

$$\square^2 u_{3/2} + \left[\frac{\partial}{\partial T} + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] u_{1/2} = u_{1/2}^3$$

le membre de gauche est le terme non-linéaire qui correspond à deux contributions, un terme en $e^{3iq_0 x}$ qui va donner lieu à un harmonique trois, et un terme en $e^{iq_0 x}$ qui est un terme résonnant.

- en résolvant en $e^{3iq_0 x}$

nous obtenons : $\square^2 u_{3/2} = A_{1/2}^3 e^{3iq_0 x} + c.c.$, soit $u_{3/2} = {}_3A_{3/2} e^{3iq_0 x} + c.c.$ avec l'amplitude de l'harmonique trois donnée par :

$$\boxed{{}_3A_{3/2} = -\frac{A_{1/2}^3}{64q_0^2}}$$

- en résolvant en $e^{iq_0 x}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] u_{1/2} = u_{1/2}^3$$

qui conduit à l'équation d'amplitude :

$$\boxed{\frac{\partial A_{1/2}}{\partial T} = A_{1/2} + 4q_0^2 \frac{\partial^2 A_{1/2}}{\partial X^2} - 3A_{1/2} A_{1/2}^* A_{1/2}} \quad (\text{V.52})$$

V.4.3 Amplitude en fonction de q

L'équation d'amplitude va nous permettre de comprendre la forme de la solution dans le domaine où ϵ est positif mais petit. Nous pouvons déjà estimer l'amplitude de la solution stationnaire en fonction du vecteur d'onde q . Il ne faut pas oublier que nous avons fait des changements de variables pour obtenir l'équation d'amplitude. En particulier, celle-ci ne contient plus de dépendance en ϵ , c'est parcequ'elle est écrite dans les variables X et T . En revenant aux variables du laboratoire, les dépendances en ϵ vont apparaître à nouveau.

Les solutions stationnaires correspondent à $\partial A_{1/2} / \partial T = 0$, les solutions de l'équation d'amplitude sont alors de la forme :

$$A_{1/2} = A_Q e^{iQX}$$

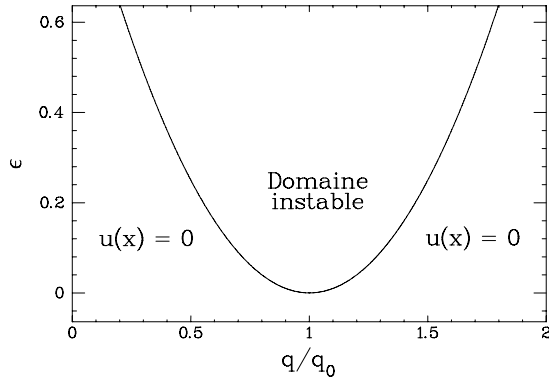


FIG. V.11: Courbe de stabilité marginale.

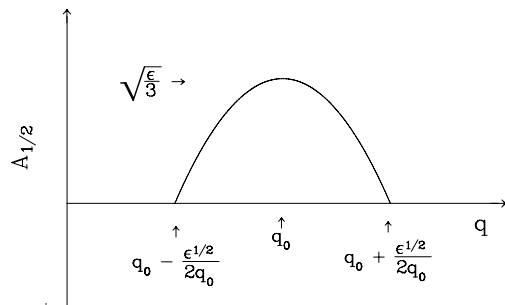


FIG. V.12: Amplitude d'un mode de vecteur d'onde q .

qui conduit à : $A_Q - 4q_0^2 Q^2 A_Q - 3A_Q A_Q^* A_Q e^{iQX} = 0$
soit à la solution :

$$|A_Q| = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - 4q_0^2 Q^2)^{1/2}$$

En revenant dans les coordonnées du laboratoire, nous obtenons :

$$u(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - 4q_0^2 \frac{\Delta q^2}{\epsilon}\right)^{1/2} \epsilon^{1/2} e^{i(q_0 + \Delta q)x} + c.c.$$

Avec $\Delta q = q - q_0$. L'amplitude est maximum à $q = q_0$, elle s'annule lorsque $\Delta q = \epsilon^{1/2}/2q_0$ c'est-à-dire sur la courbe de stabilité marginale définie par le problème linéaire.

V.4.4 Instabilité d' ECKHAUS

Reprenons l'équation d' amplitude V.52 et faisons les changements de variables suivant :

$$A = \sqrt[3]{3} A_{1/2} \text{ et } U = \frac{X}{2q_0}$$

on obtient :

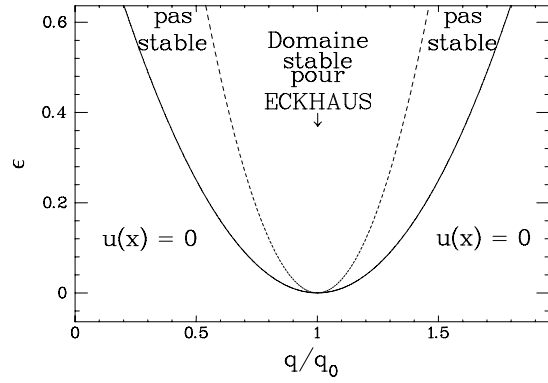


FIG. V.13: Courbes de stabilité marginales pour la convection en trait plein, pour l'instabilité d'ECKHAUS en pointillés. Les régions comprises entre les deux paraboles correspondent à des solution de convection instable.

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T} = \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial U^2} - \mathcal{A} \mathcal{A}^* \mathcal{A} \quad (\text{V.53})$$

étudions la stabilité de la solution $\mathcal{A} = (1 - Q^2)^{1/2} e^{iQU}$, ajoutons lui une perturbation "w" et cherchons l'évolution linéaire de w. Il vient :

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial^2 w}{\partial U^2} + w - 2(1 - Q^2)w - (1 - Q^2)e^{2iQU} w^*$$

Choix de la perturbation en w

Les perturbations que l'on cherche sont celles qui sont voisines du mode \mathcal{A} . Choisissons en une du type : $e^{i(Q+M)U}$ où $M \rightarrow 0$. Si l'on injecte cette perturbation dans V.53 elle fait apparaître le mode : $e^{i(Q-M)U}$ du au terme en e^{2iQU} dans V.53.

Adoptons une perturbation du type :

$$w = w_1 e^{i(Q+M)U} + w_2 e^{i(Q-M)U}$$

on en déduit le système d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (Q+M)^2 - 2(1-Q^2) & Q^2 - 1 \\ Q^2 - 1 & 1 - (Q-M)^2 - 2(1-Q^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (\text{V.54})$$

Il nous faut rechercher les valeurs propres λ de cette matrice :

$$\lambda^2 + 2\lambda(M^2 + 1 - Q^2) + M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2) = 0$$

On remarque que la somme des racines est négative, si leur produit $\lambda_1 \lambda_2 = M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2)$ est

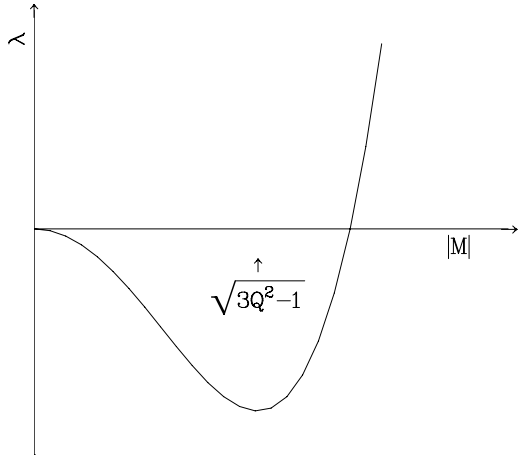


FIG. V.14: Evolution de la valeur propre définissant le taux de croissance de la modulation dans l'instabilité d'ECKHAUS.

positif les deux valeurs propres sont négatives et la perturbation relaxe; le système est stable. Par contre dès que le produit des racines devient négatif une instabilité apparaît, c'est l'instabilité d'ECKHAUS.

Le critère d'instabilité correspond à $Q \geq \pm 1/3$

Le mode le plus instable est celui pour lequel λ est le plus grand en module c'est-à-dire le minimum de $M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2)$, soit $|M| = \sqrt{2(3Q^2 - 1)}$. L'évolution de la valeur propre instable prend la forme de la figure V.14 que l'on retrouve très souvent dans les instabilités hydrodynamiques. C'est une instabilité de grand vecteur d'onde, c'est-à-dire que $|M|$ tend vers zéro lorsque lon approche le seuil de l'instabilité. Si $Q > 1/3$, un vecteur d'onde M non nul présente un taux de croissance maximale.

V.4.5 Diagramme de stabilité

Nous devons revenir à des vecteurs d'onde physique, en effet $Q \sim \sqrt{\epsilon}$ nous avons donc un diagramme de stabilité décrit par la figure V.13. Le critère d'instabilité d'ECKHAUS correspond à une parabole "trois fois plus courbée" que la parabole de stabilité marginale. L'instabilité d'ECKHAUS restreint la bande de modes instable, plus précisément elle en limite les vecteurs d'onde. Comme l'amplitude des modes dépend fortement de leur vecteur d'onde (voir figure V.12) et décroît fortement dans les régions où l'instabilité d'ECKHAUS apparaît, celle-ci peut se comprendre comme compétition entre modes : si un mode établi est perturbé par un autre, il résistera si son amplitude est grande. Si par contre, son amplitude ne correspond pas au maximum, il se peut que la perturbation fasse naître un mode dont le vecteur d'onde possède une plus forte amplitude qui va finalement détronner le mode initial.

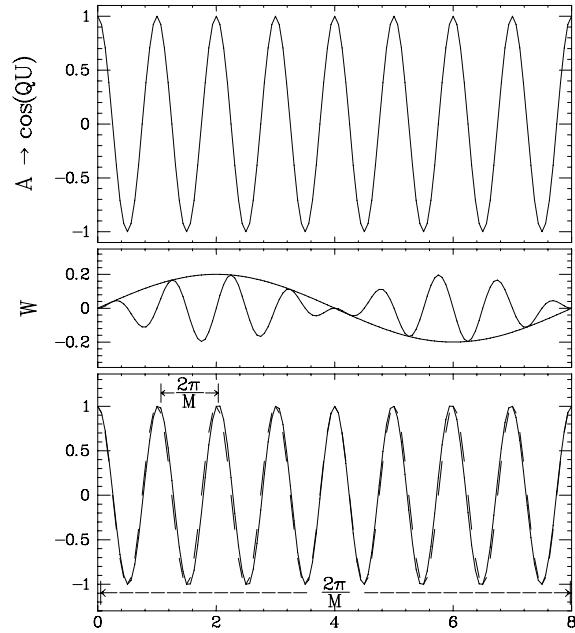


FIG. V.15: En haut la structure sans modulation, au milieu forme de la perturbation. En bas, forme des cellule convective réelle, la modulation change la longueur d'onde locale (à comparer à la structure non perturbée en pointillé).

V.4.6 L'instabilité d'ECKHAUS est une instabilité de phase

Pour déterminer la nature de l'instabilité, étudions la perturbation ω dans le cas où l'instabilité d'ECKHAUS vient juste d'apparaître : c'est-à-dire lorsque $3Q^2 - 1$ est tout juste positif, on peut alors simplifier la matrice déterminant ω et calculer les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres w_i . l'équation V.54 devient :

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 - 1 & Q^2 - 1 \\ Q^2 - 1 & Q^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{V.55})$$

La valeur propre instable correspond au vecteur propre tel que $w_1 = w_2$ c qui implique que $w = -\frac{1}{4}w_1 \sin(MU) \sin(QU)$ tandis que A est en $\cos(QU)$. Comme on peut le voir sur la figure V.15, cette perturbation correspond à une modulation de phase ou de fréquence. L'instabilité d'ECKHAUS correspond donc à une modulation de la longueur d'onde du motif convectif. Localement, les cellule qui ont une longueur d'onde qui se rapproche de l'optimum voient leur amplitude augmenter.

V.4.7 Autres instabilités

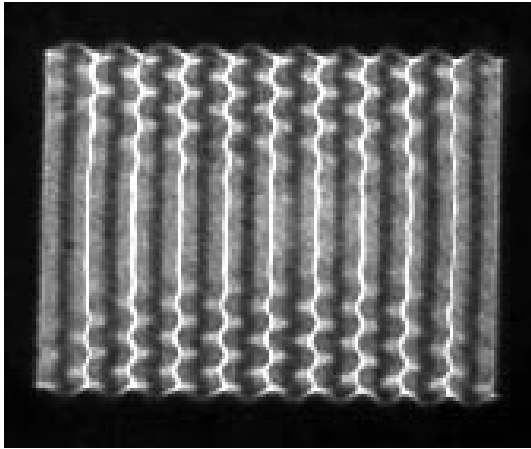


FIG. V.16: Intabilité oscillatoire : Structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire. Cette structure présente des ondes se propagent le long des rouleaux.

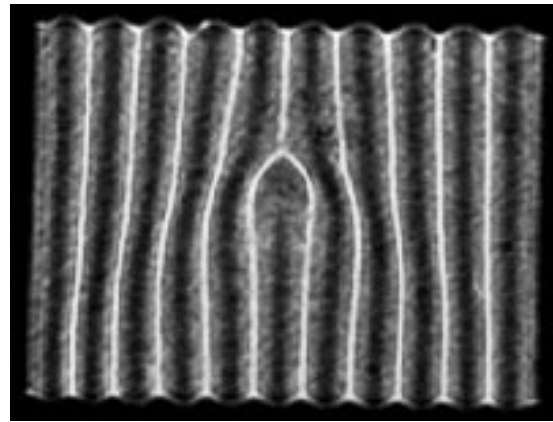


FIG. V.18: Dislocation : dans une structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire, une paire de rouleaux supplémentaire est apparue dans la partie basse conduisant à la formation d'une dislocations.

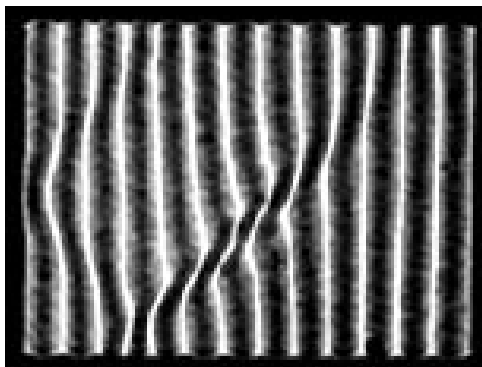


FIG. V.17: Intabilité Skewed-varicose : A partir d'une structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire, une instabilité de pincement oblique se développe et conduit à l'apparition de dislocations.

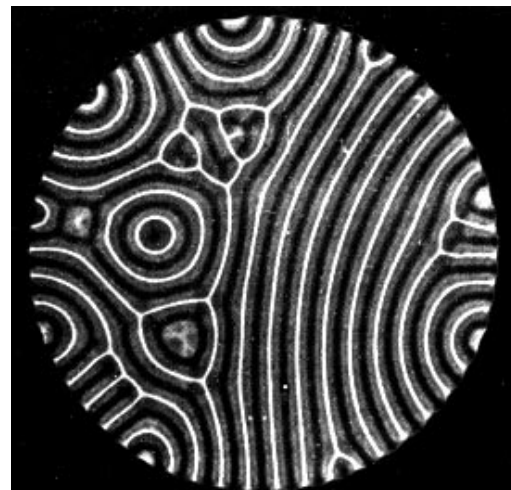


FIG. V.19: Structure convective de Rayleigh Bénard dans une boîte cylindrique. Cette structure présente de nombreux défauts.

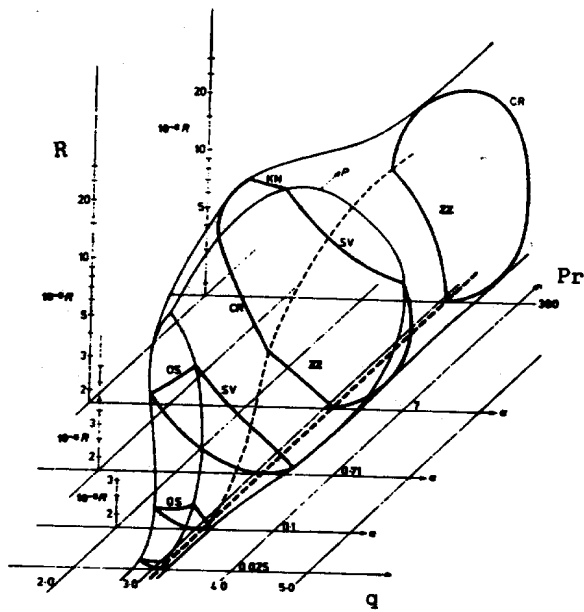


FIG. V.20: Ballon de Busse : ce diagramme à trois dimensions définit le domaine stable des rouleaux droits en fonction de leur vecteur d'onde k (suivant x), du nombre de Rayleigh R (suivant y) et du nombre de Prandtl Pr (suivant z). Le nombre de Prandtl est caractéristique du fluide utilisé.