



HAL
open science

Atomes et lumière, interactions matière-rayonnement

Claude Fabre

► **To cite this version:**

| Claude Fabre. Atomes et lumière, interactions matière-rayonnement. DEA. 2006. cel-00092951

HAL Id: cel-00092951

<https://cel.hal.science/cel-00092951>

Submitted on 12 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de physique de la région parisienne (ED 107)
DEA de Physique Quantique
Année 2003

ATOMES ET LUMIÈRE

INTERACTION MATIÈRE RAYONNEMENT

Claude FABRE

Laboratoire Kastler Brossel
Université Pierre et Marie Curie, case 74
75252 Paris cedex 05, France

fabre@spectro.jussieu.fr

TABLE DES MATIÈRES

<i>I : LES OUTILS DE L'OPTIQUE QUANTIQUE</i>	7
<i>1 : Les approches phénoménologiques</i>	8
1. Le modèle de Lorentz	8
1.1 Atome de Lorentz isolé	8
1.2 Effet de l'environnement : relaxation	11
2. Le modèle d'Einstein	12
2.1 Equation d'évolution des populations	13
2.2 Énergie transférée de l'atome au champ appliqué	14
3. Récapitulatif	15
<i>2 : L'approche semi-classique</i>	16
1. Atome isolé	16
1.1 Hamiltonien d'interaction (rappels)	16
1.2 Approximation du système à 2 niveaux	18
1.3 Évolution du système	19
2. Effet de l'environnement : équations de Bloch	21
2.1 Matrice densité	21
2.2 Evolution en présence de relaxation	23
2.3 Équations de Bloch (cas d'une transition entre niveau fondamental et niveau excité)	24
2.4 Cas d'un système peu excité	25
2.5 Evolution du système à partir de l'état fondamental	27
2.6 Régime de fort amortissement du dipôle	27
2.7 Généralisation des équations de Bloch	29
3. Interaction avec un champ non monochromatique	30
3.1 Sources lumineuses stationnaires à spectre large	30
3.2 Evolution de l'atome en présence du champ aléatoire	31
4. Force d'oscillateur	33
5. Récapitulatif	35

3 : Description quantique du champ électromagnétique libre	36
1. Aspect corpusculaire du champ de rayonnement thermique	36
1.1 Lois de Planck et de Wien	36
1.2 Le raisonnement d'Einstein	37
2. Décomposition modale du champ électromagnétique classique	38
2.1 Base des ondes planes progressives	39
2.2 Décomposition modale dans le cas général	40
2.3 Énergie et impulsion du champ libre	41
3. Quantification du rayonnement	42
3.1 Opérateurs \hat{a}_ℓ - relations de commutation	42
3.2 Expression des différents opérateurs physiques	43
4. États stationnaires du rayonnement	44
4.1 États propres de \hat{H}	44
4.2 Notion de photon	46
4.3 L'état fondamental du champ	47
5. Valeur du champ électrique dans un état quantique	49
5.1 Champ en représentation de Heisenberg	49
5.2 Cas de l'état nombre ou état de Fock	51
5.3 Cas d'un état quelconque	52
5.4 Cas de l'état cohérent	53
4 : Interaction entre atome et champ quantique	57
1. Hamiltonien d'interaction	57
1.1 Hamiltonien d'interaction classique en jauge de Coulomb	57
1.2 Hamiltonien "semi-quantique"	58
1.3 Hamiltonien quantique du système atome+champ	60
1.4 Hamiltonien dipolaire électrique	60
1.5 Considérations générales	61
2. Processus d'interaction	62
2.1 Position du problème	62
2.2 Processus du premier ordre	62
2.3 Processus du deuxième ordre	64
3. Photodétection	65

II QUELQUES PHÉNOMÈNES DE L'OPTIQUE QUAN-

<i>TIQUE</i>	67
5 : <i>Émission spontanée</i>	69
1. Généralités	69
2. Approche perturbative	69
3. Approche non perturbative de Wigner-Weisskopf	71
3.1 Fonction d'onde du système	71
3.2 Caractéristiques de la fonction d'onde du système	73
3.3 Valeurs de Γ et $\delta\omega$	75
4. Relaxation de l'atome par émission spontanée	76
6 : <i>Interactions quasi-résonnantes dans les systèmes à deux niveaux</i>	78
1. Description d'un système à deux niveaux par le vecteur de Bloch	78
1.1 Vecteur de Bloch	78
1.2 Cohérence quantique, "q-bits" et "q-registres"	79
2. Cas de deux niveaux de longue durée de vie	80
2.1 La précession de Rabi du vecteur de Bloch	81
2.2 Franges de Ramsey	83
3. Cas d'un niveau excité de courte durée de vie	85
3.1 Caractéristiques du régime stationnaire	85
3.2 Absorption saturée	90
4. Interaction entre un atome à deux niveaux et un mode du champ quantique	92
4.1 Position du problème	92
4.2 Hamiltonien de Jaynes-Cummings	93
4.3 États et énergies propres du système	94
4.4 Émission spontanée de l'atome à l'intérieur de la cavité	96
4.5 Évolution sous l'effet d'un état nombre	97
4.6 Évolution sous l'effet d'un état cohérent quelconque	98
4.7 Évolution sous l'effet d'un état cohérent intense	100
5. Atome à deux niveaux interagissant avec un mode unique du champ en présence de relaxation	103
5.1 Équations pour le système atome-cavité avec pertes	103
5.2 Régimes de couplage fort et de couplage faible	104
5.3 Atome à deux niveaux interagissant avec un champ laser monomode intense en présence de relaxation	110
6. Récapitulatif	110

7 : Systèmes à trois niveaux	113
1. Pompage optique	113
1.1 Cas simple	113
1.2 Pompage Zeeman	116
2. Piégeage cohérent de population	117
2.1 Cas de deux niveaux dégénérés	117
2.2 Cas de deux niveaux non dégénérés	118
3. Déplacements lumineux	119
3.1 Approche quantique : doublet Autler-Townes	120
3.2 Limite perturbative pour le déplacement lumineux	121
3.3 Approche par les équations de Bloch	122
3.4 Transparence électromagnétiquement induite	124
3.5 Réduction de la vitesse de propagation d'une impulsion lumineuse	125
4. Sauts quantiques	127

Introduction

Ce cours est consacré à une présentation générale de l'interaction entre la matière et le rayonnement électromagnétique. Ce vaste domaine ne peut cependant pas être traité dans sa totalité dans un cours de cette extension. En ce qui concerne le rayonnement, nous nous restreindrons essentiellement à la lumière du spectre visible, infrarouge et micro-onde. Nous ne traiterons donc pas des effets relativistes induits par la lumière sur la matière. La matière ne sera pas traitée non plus dans tous ses détails : on supposera qu'elle constitue un système formé essentiellement de niveaux discrets bien séparés, et éventuellement d'un continuum. Nous l'engloberons par souci de simplicité sous le mot "atome". mais les phénomènes décrits s'appliqueront pour l'essentiel au cas d'une molécule, plus difficilement à un solide (bandes) ou un plasma, bien que beaucoup de phénomènes décrits ici demeurent.

On appelle aussi souvent *Optique Quantique* ce domaine de la physique, car la matière, ou la lumière, ou les deux, sont traitées au niveau des phénomènes microscopiques. Ces phénomènes sont nombreux et souvent complexes. Il faut les ramener à des phénomènes élémentaires par des approximations et des hypothèses simplificatrices. On en verra les plus importantes dans la première partie de ce cours. On décrira dans la deuxième partie un certain nombre d'applications et d'illustrations des méthodes introduites, qui nous permettront d'expliquer des phénomènes intéressants, et de décrire des expériences récentes.

L'optique quantique est un vaste domaine, qui ne sera évidemment pas traité ici dans son intégralité. En particulier, nous n'aborderons pas dans ce cours les sujets suivants, qui seront traités dans d'autres cours du DEA :

- l'effet de la lumière sur la position des atomes ;
- les aspects quantiques spécifiques qui apparaissent sur la lumière ;
- l'optique non-linéaire ;
- les lasers.

On trouvera à la fin de ce polycopié une liste d'ouvrages qui permettent d'approfondir les sujets traités dans ce cours.

Première partie

LES OUTILS DE L'OPTIQUE QUANTIQUE

1. LES APPROCHES PHÉNOMÉNOLOGIQUES

Comment la matière et la lumière interagissent-elles ? C'est une question que les physiciens se sont posés depuis très longtemps. Ils ont constaté que certains corps étaient transparents, d'autres colorés, que certains absorbaient la lumière, d'autres la réfléchissaient selon des règles bien précises, ou la diffusaient dans toutes les directions. Les mécanismes de cette interaction multiforme ont été longtemps inconnus, et comme toujours en physique, on a cherché à caractériser les phénomènes observés par des quantités accessibles à l'expérience, comme l'indice de réfraction $n(\omega)$ (ω : fréquence de la lumière), le coefficient d'absorption $\alpha(\omega)$ ou la section efficace de diffusion $\sigma(\omega)$. On a constaté que, dans les milieux simples comme les milieux dilués, ces quantités présentaient un caractère fortement *résonnant* autour de fréquences caractéristiques ω_i avec des largeurs de résonances γ_i . La recherche de ces données, ou spectroscopie, a été une étape importante dans le débroussaillage du phénomène. Les physiciens ont alors introduit des approches phénoménologiques de cette interaction pour rendre compte de ces données.

1. Le modèle de Lorentz

A la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, la nature électromagnétique de la lumière et la structure corpusculaire de la charge électrique sont connues. L'existence de fréquences de résonances ω_i pour les atomes, analogues à ceux d'un oscillateur harmonique, conduit alors Lorentz à introduire le modèle dit de "l'électron élastiquement lié", basé sur un comportement évidemment classique de l'électron dans le champ de l'onde électromagnétique.

1.1 Atome de Lorentz isolé

Le champ électrique agissant sur l'atome est pris de la forme :

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon} E \cos(\omega t - \varphi)$$

où $\vec{\varepsilon}$ est le vecteur polarisation de l'onde. L'équation du mouvement de l'électron, de masse m , de charge (négative) q , assimilé à un oscillateur harmonique de fréquence propre ω_0 , s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} + qE \vec{\varepsilon} \cos(\omega t - \varphi)$$

L'atome de Lorentz est essentiellement un *dipôle classique*, de moment dipolaire $\vec{D} = q\vec{r}$, dont l'équation d'évolution s'écrit donc :

$$\frac{d^2 \vec{D}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{D} + \frac{q^2 E}{m} \vec{\varepsilon} \cos(\omega t - \varphi)$$

On cherche essentiellement le *mouvement forcé* du dipôle sous l'effet du champ incident oscillant de pulsation ω , et le régime transitoire vers ce régime forcé. On écrit donc \vec{D} sous la forme

$$\vec{D}(t) = \text{Re} \left[\tilde{D}(t) e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon} \right]$$

$\tilde{D}(t)$ est l'*enveloppe lentement variable* du dipôle oscillant, qui sera constante dans le cas du mouvement forcé. On a choisi d'utiliser une notation complexe où $e^{-i\omega t}$ (et non $e^{i\omega t}$) représente l'oscillation de fréquence ω . On a donc aussi la notation complexe suivante pour le champ appliqué :

$$\tilde{E} = E e^{i\varphi}$$

L'équation d'évolution de \tilde{D} s'écrit alors :

$$-\omega^2 \tilde{D} - 2i\omega \frac{d\tilde{D}}{dt} + \frac{d^2 \tilde{D}}{dt^2} = -\omega_0^2 \tilde{D} + \frac{q^2 \tilde{E}}{m}$$

On va supposer que l'enveloppe $\tilde{D}(t)$ évolue avec une constante de temps longue devant la période $2\pi/\omega_0$ du champ appliqué. $\frac{d^2 \tilde{D}}{dt^2}$ peut donc être négligé devant $\omega \frac{d\tilde{D}}{dt}$. Il reste :

$$\frac{d}{dt} \tilde{D} = i \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \right) \tilde{D} + i \frac{q^2 \tilde{E}}{2m\omega}$$

Si on est proche de résonance, $\omega \cong \omega_0$, donc

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} = (\omega - \omega_0) \frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \approx \omega - \omega_0$$

L'équation d'évolution du dipôle de Lorentz s'écrit donc finalement, dans le cas quasi-résonnant :

$$\frac{d}{dt} \tilde{D} = i(\omega - \omega_0) \tilde{D} + i \frac{q^2}{2m\omega} \tilde{E}$$

La solution "stationnaire", c'est-à-dire forcée, de cette équation s'écrit :

$$\tilde{D} = \frac{q^2 \tilde{E}}{2m\omega(\omega_0 - \omega)}$$

Considérons maintenant l'aspect énergétique de l'interaction atome de Lorentz-champ. La puissance moyenne transférée de l'atome au champ a pour expression :

$$P = -\overline{\vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt}}$$

où la barre supérieure indique une moyenne temporelle. On a donc :

$$\begin{aligned} P &= -\overline{\left[\text{Re} \tilde{E} \cos \omega t + \text{Im} \tilde{E} \sin \omega t \right] \left[-\omega \text{Re} \tilde{D} \sin \omega t + \omega \text{Im} \tilde{D} \cos \omega t \right]} \\ &= -\frac{\omega}{2} \left(\text{Re} \tilde{E} \text{Im} \tilde{D} - \text{Im} \tilde{E} \text{Re} \tilde{D} \right) \\ &= -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left(\tilde{D} \tilde{E}^* \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{D} = \varepsilon \tilde{\alpha} \tilde{E}$$

où

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\omega) = \alpha' + i\alpha$$

est la polarisabilité dynamique complexe de l'atome. On a alors :

$$P = -\frac{\omega}{2} \alpha' |\tilde{E}|^2$$

Les échanges d'énergie se font par l'intermédiaire de α' , c'est-à-dire de la partie de \tilde{D} qui oscille en quadrature avec \vec{E} . Dans le cas présent, le coefficient reliant \tilde{D} à \tilde{E} est réel, donc $P = 0$. Il n'y a donc pas d'échange d'énergie : le présent modèle ne peut pas rendre compte d'effets d'absorption ou d'amplification du rayonnement, seulement d'effets propagatifs. Il ne permet de calculer que l'indice de réfraction du milieu.

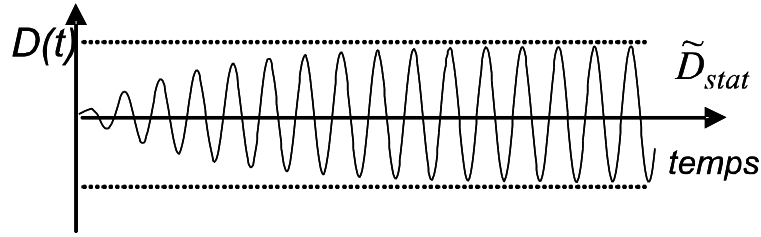


Fig. 1.1: évolution du dipôle atomique dans le cadre du modèle de Lorentz

1.2 Effet de l'environnement : relaxation

Le modèle précédent n'était pas réaliste, car il aboutissait pour une excitation résonnante ($\omega = \omega_0$) à une oscillation d'amplitude divergente pour le dipôle, à cause de l'absence d'amortissement. En fait :

- L'atome n'est pas isolé, mais au milieu d'un grand nombre d'autres : il y a des collisions, des champs créés par les charges ou les dipôles voisins, il y a possibilité de couplage aux vibrations du réseau dans le cas d'un cristal ... : L'énergie d'oscillation est dissipée dans le milieu extérieur, il y a *relaxation*.

- Même isolé, l'atome est nécessairement couplé au rayonnement : l'électron oscillant rayonne et perd de l'énergie. Cela aboutit à une friction effective sur le mouvement du dipôle (réaction de rayonnement). L'équation du dipôle s'écrit alors :

$$\frac{d\tilde{D}}{dt} = i(\omega - \omega_0)\tilde{D} - \gamma_d\tilde{D} + i\frac{q^2\tilde{E}}{2m\omega}$$

où la constante d'amortissement γ_d est la somme d'un taux d'amortissement radiatif γ_{rayt} et d'un amortissement collisionnel $\gamma_{collision}$. Le calcul de la puissance dissipée par le rayonnement dipolaire de l'électron [?] montre que γ_{rayt} a pour expression :

$$\gamma_{rayt} = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 mc^3}\omega_0^3$$

Si on part de $\tilde{D} = 0$ à l'instant équation $t = 0$, on a une évolution monotone de \tilde{D} (voir figure (1.1)), qui tend aux temps longs vers une solution stationnaire, qui est la solution forcée :

$$\tilde{D} = \frac{q^2}{2m\omega} \frac{\tilde{E}}{\omega_0 - \omega - i\gamma_d}$$

On a donc une nouvelle expression de la polarisabilité :

$$\tilde{\alpha} = \frac{q^2}{2m\varepsilon_0\omega} \frac{\omega_0 - \omega + i\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2}$$

On a maintenant $\alpha' \neq 0$, donc $P \neq 0$: La relaxation permet les échanges d'énergie atome-champ. D'autre part $\alpha' > 0$, donc $P < 0$. Il ne peut y avoir qu'absorption de l'énergie du champ, et donc pas d'amplification possible (pas de laser !). L'énergie du champ ne peut qu'être irréversiblement transférée à l'environnement de l'atome. Enfin on voit que \tilde{D} est proportionnel à \tilde{E} : la réponse de l'atome au champ est *linéaire*. Il n'y a pas de saturation, ce qui est naturel pour un oscillateur harmonique idéal.

En comparant aux résultats expérimentaux, on constate que ce modèle "naïf" (on sait que l'électron n'est pas lié au noyau par une force élastique, mais coulombienne) donne des résultats en bon accord avec les mesures (pour l'absorption, l'indice, la diffusion de la lumière). L'accord est même très bon quantitativement si :

-on prend pour ω_0 une fréquence de résonance mesurée expérimentalement.

-on multiplie la polarisabilité par un facteur ajustable f_i appelé "force d'oscillateur", et on somme les expressions de $\tilde{\alpha}$ correspondant aux différentes fréquences ω_i de résonance de l'atome. On a alors une expression phénoménologique de la polarisabilité :

$$\tilde{\alpha} = \sum_i f_i \frac{q^2}{2m\varepsilon_0\omega_i} \frac{\omega_i - \omega + i\gamma_{di}}{(\omega_i - \omega)^2 + \gamma_{di}^2}$$

en très bon accord avec les mesures.

2. Le modèle d'Einstein

En 1916, la notion de photon est connue, de même que l'atome de Bohr, avec ses niveaux stationnaires d'énergie E_i ($i = a, b, \dots$). On sait que des transitions peuvent être induites entre ces niveaux par un rayonnement de fréquence $\nu = (E_a - E_b)/h$. Mais on ne dispose pas d'une théorie cohérente de l'ensemble de ces phénomènes, qui ne viendra que dans la décennie suivante, avec l'avènement de la Mécanique Quantique. Pour rendre compte du rayonnement à l'équilibre thermique et des échanges d'énergie avec les atomes, Einstein introduit un autre modèle phénoménologique.

2.1 Equation d'évolution des populations

On se restreint ici au cas où l'atome n'a que deux niveaux $|a\rangle, |b\rangle$, non dégénérés pour simplifier. $|a\rangle$ étant le niveau fondamental, et $|b\rangle$ un niveau excité. La fréquence de Bohr pour la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ a pour expression :

$$\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

L'état de l'atome est caractérisé par les *populations* N_a et N_b , qui sont les probabilités d'occupation des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$. On a donc $N_a + N_b = 1$ si le système est fermé.

Le champ est supposé "incohérent" (il s'agit de rendre compte des propriétés du rayonnement thermique), donc uniquement caractérisé par sa densité spectrale d'énergie :

$$u(\nu) = \frac{dU}{d\nu}$$

où U est l'énergie volumique du champ.

Les équations phénoménologiques posées par Einstein s'écrivent :

$$\frac{dN_b}{dt} = -\frac{dN_a}{dt} = -AN_b + BN_a u\left(\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}\right) - BN_b u\left(\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}\right)$$

-1) Le premier terme de cette équation d'évolution caractérise l'émission spontanée du niveau supérieur, dont on constate expérimentalement qu'il peut se désexciter même si $u = 0$. On peut aussi écrire

$$A = \gamma_p$$

où γ_p est le taux de désexcitation des populations, qui est, comme le taux γ_d introduit dans la partie précédente, la somme d'une partie radiative γ'_{rad} liée à la fluorescence de l'atome, qui émet un champ dans toutes les directions, et d'une partie collisionnelle γ'_{col} , qui traduit les processus de désexcitation non radiatifs, par exemple ceux qui sont assistés par les vibrations du réseau cristallin dans le cas d'un solide. Noter qu'a priori γ_p et γ_d sont des quantités physiques différentes.

-2) Le deuxième terme, proportionnel à N_a , rend compte de l'absorption de rayonnement par l'atome, qui passe du niveau fondamental dans le niveau excité sous l'effet du rayonnement incident.

-3) Le dernier terme, proportionnel à N_b , décrit le phénomène d'émission stimulée, ou induite, de rayonnement par l'atome, qui passe du niveau

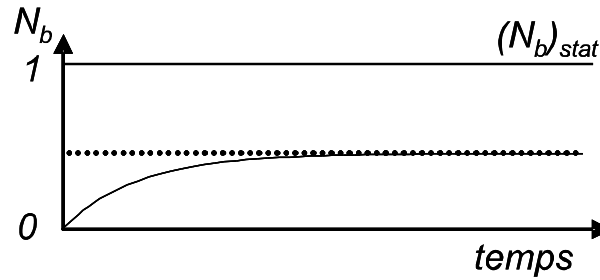


Fig. 1.2: évolution temporelle de la population de l'état excité dans le cadre du modèle d'Einstein

excité au niveau fondamental sous l'effet du rayonnement incident. On sait que ce terme, moins intuitif à introduire phénoménologiquement, a dû être ajouté par Einstein pour obtenir la formule de Planck du rayonnement thermique lorsque les populations des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont donnés, à l'équilibre thermique, par la formule de Boltzmann.

Si on résout cette équation d'évolution en supposant qu'à $t = 0$ l'atome est non excité ($N_a = 1$, $N_b = 0$), on obtient la courbe de la figure (1.2) : il y a évolution monotone vers un état final stable caractérisé par

$$(N_b)_{stat} = \frac{B}{\gamma_P + 2Bu} u$$

- Si u est faible ($u \ll \gamma_P/B$), $(N_b)_{stat}$ est proportionnel à u . Il y a réponse linéaire de l'atome au champ incident.

- Si le champ est très intense ($u \gg \gamma_P/B$), $(N_b)_{stat}$, et donc aussi $(N_a)_{stat}$, tend vers $\frac{1}{2}$. Il y a *saturation* de la réponse à très forte intensité. On remarque qu'il n'y a jamais dans ce modèle transfert total du système de l'état $|a\rangle$ vers l'état $|b\rangle$.

2.2 Énergie transférée de l'atome au champ appliqué

Le champ électromagnétique appliqué a une énergie qui diminue, ou augmente, de la quantité $\hbar\omega_0$ chaque fois qu'il y a une transition de $|b\rangle$ vers $|a\rangle$ due aux processus 2) ou 3). Le processus 1), quant à lui, augmente l'énergie du champ rayonné dans toutes les directions. La puissance transférée au champ s'écrit donc :

$$P = -\hbar\omega_0 \left(\frac{dN_b}{dt} \right)_{2,3} = \hbar\omega_0 B (N_b - N_a) u \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right)$$

On voit que $P < 0$ si $N_a > N_b$, ce qui est le cas le plus courant, $|a\rangle$ étant le niveau fondamental. L'absorption domine dans ce cas, et il y a atténuation du faisceau appliqué. Par contre, $P > 0$ si $N_a < N_b$. L'émission stimulée domine, et il y a donc amplification du champ appliqué dans le cas d'une inversion de population.

En conclusion, ce modèle phénoménologique s'avère être lui aussi un très bon modèle : Il donne bien le rayonnement thermique, pour lequel il a été développé, mais il rend aussi compte de manière quantitative du fonctionnement de la plupart des lasers, si l'on introduit les constantes A et B à partir des résultats de mesure.

On constate cependant que ce modèle est incomplet, car *il ne traite pas des phases des oscillations du champ et du dipôle atomique*, qui interviennent nécessairement dans le problème, surtout quand on veut décrire un système aussi cohérent qu'un laser. Ce défaut du modèle d'Einstein est parfois comblé par l'hypothèse supplémentaire introduite dans le modèle que le champ émis par émission stimulée est en phase avec le champ incident. On trouve même dans certains ouvrages l'affirmation que le "photon émis par émission stimulée est en phase avec le photon incident". Nous verrons dans le chapitre (3) que ce type d'assertion, qui mêle propriétés ondulatoire et corpusculaire du rayonnement, n'a aucun sens précis. Enfin, le lien avec le modèle précédent n'est pas établi, et on ne sait pas ce qui se passe dans le cas d'un champ non résonnant avec la transition atomique ($\omega \neq \omega_0$).

3. Récapitulatif

L'introduction de ces deux modèles phénoménologiques, à bien des égards très complémentaires, nous a permis d'introduire les paramètres importants pour l'interaction matière rayonnement :

- Le dipôle atomique \vec{D} ;
- Les populations N_a, N_b .

On a aussi vu le rôle essentiel des relaxations γ_d, γ_p dans la dynamique du problème, pour obtenir une évolution monotone de l'atome vers un état stationnaire, ainsi que pour les échanges énergétiques.

2. L'APPROCHE SEMI-CLASSIQUE

Les années 20 ont vu l'avènement et le triomphe de la Mécanique Quantique, et ses succès pour expliquer en particulier la structure atomique. Pour décrire dans le cadre de cette théorie l'interaction de l'atome avec un champ électromagnétique imposé de l'extérieur, une première approche consiste à rajouter dans l'hamiltonien de l'atome les termes correspondant à l'interaction avec un champ électromagnétique classique.

On ne fait dans cette approche que la moitié du travail (d'où son nom, mais il faudrait plutôt parler d'approche "semi-quantique"), puisque le champ n'est pas traité de manière quantique. Il s'avère toutefois que cette approche donne une description valable des phénomènes dans 95% des cas et englobe, comme nous allons le voir, les deux approches précédentes.

1. Atome isolé

On va dans un premier temps négliger toute interaction de l'atome avec l'extérieur autre qu'avec le champ appliqué.

1.1 Hamiltonien d'interaction (rappels)

On trouvera dans la référence (1), et dans une moindre mesure (2), un exposé détaillé sur les hamiltoniens susceptibles de décrire l'interaction entre un atome quantique et un champ classique. Nous allons ici rappeler quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.

En présence d'un champ électromagnétique classique décrit par les potentiels vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et scalaire $U(\vec{r}, t)$, un hamiltonien possible pour l'électron s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}}, t) \right)^2 + qU(\hat{\vec{r}}, t)$$

Ce hamiltonien est correct pour tout choix de jauge. Il redonne l'équation de Lorentz de la force moyenne. Il faut prendre garde que, dans cette approche,

la vitesse de l'électron en présence de \vec{A} n'est plus $\vec{v} = \vec{p}/m$, mais $\vec{v} = (\vec{p} - q\vec{A})/m$.

Si on se place en *jauge de Coulomb* :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

dans laquelle le potentiel vecteur \vec{A} est réduit à sa "partie transverse" (plus précisément transverse dans l'espace de Fourier) \vec{A}_\perp , le champ de rayonnement est décrit *totalement* par son potentiel vecteur \vec{A}_\perp , par les formules

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}_\perp$$

qU est alors uniquement le terme d'énergie coulombienne électrostatique $V(\vec{r})$ créé par le coeur de l'atome. D'où :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\widehat{\vec{p}} - q\vec{A}_\perp \right)^2 + V(\widehat{\vec{r}}) = \hat{H}_{at} - \frac{q}{m} \widehat{\vec{p}} \cdot \vec{A}_\perp + \frac{q^2}{2m} \vec{A}_\perp^2$$

On a en effet $\widehat{\vec{p}} \cdot \vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp \cdot \widehat{\vec{p}}$:

$$[\widehat{p}_i, \widehat{A}_i] = \frac{\hbar}{i} \partial_i \widehat{A}_i \Rightarrow \widehat{\vec{p}} \cdot \vec{A}_\perp - \vec{A}_\perp \cdot \widehat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \operatorname{div} \vec{A}_\perp = 0$$

C'est l'hamiltonien dénommé " $\vec{A} \cdot \vec{p}$ ". Noter qu' \vec{A}_\perp n'est un opérateur quantique que parce qu'on a remplacé dans son expression la variable de position \vec{r} par l'opérateur $\widehat{\vec{r}}$. \hat{H}_{at} est l'hamiltonien atomique, dont les valeurs propres sont les énergies de l'atome considéré.

Dans le cas d'un rayonnement visible, IR, ou micro-onde, on peut souvent faire une simplification supplémentaire : c'est l'*approximation dipolaire ou des grandes longueurs d'onde*. En effet, dans ce cas on a $\langle \lambda \rangle \gg \langle \vec{r} \rangle$, et on peut donc remplacer $\vec{A}_\perp(\widehat{\vec{r}})$ par $\vec{A}_\perp(\vec{0})$ ($\vec{0}$ est la position du noyau de l'atome, supposé dans tout ce cours immobile). Le dernier terme figurant dans \hat{H} , qui est du second ordre en \vec{A}_\perp , est alors une simple constante. Il reste :

$$\hat{H}' = \hat{H}_{at} - \frac{q}{m} \vec{A}_\perp(\vec{0}) \cdot \widehat{\vec{p}}$$

Par changement de jauge, on peut alors se ramener à un autre hamiltonien :

$$\hat{H}'' = \hat{H}_{at} - q \widehat{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{0}, t) = \hat{H}_{at} - \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{E}(\vec{0}, t)$$

où \widehat{D} est l'opérateur dipolaire électrique, $\widehat{D} = q \widehat{r}$. C'est l'hamiltonien dipolaire électrique, ou " $\vec{E} \cdot \vec{D}$ ", que nous utiliserons essentiellement dans la suite. Il montre que l'interaction matière rayonnement se fait à cette approximation par l'intermédiaire du dipôle électrique. Notons enfin que ce hamiltonien n'est valable que si on néglige les effets liés au spin de l'électron. Sinon il faut rajouter un terme d'énergie magnétique en $-\frac{q}{m} \widehat{S} \cdot \vec{B}(\vec{0}, t)$.

Si l'approximation des grandes longueurs d'onde n'est pas valable, de nouveaux termes s'introduisent, couplant d'autres grandeurs caractéristiques de l'atome aux dérivées successives des champs électriques et magnétiques : c'est le "développement multipolaire" (voir ref (1)).

1.2 Approximation du système à 2 niveaux

\widehat{H}_{at} a pour états propres les états discrets $|a\rangle, |b\rangle, \dots$, d'énergies E_a, E_b, \dots , et le continuum $|E\rangle$. L'état atomique le plus général s'écrit donc :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=a,b,\dots} c_i(t) e^{-iE_i t/\hbar} |i\rangle + \int c(E)(t) e^{-iEt/\hbar} |E\rangle dE$$

Les coefficients de la décomposition sont écrits sous la forme $c_i(t) e^{-iE_i t/\hbar}$ pour que le coefficient $c_i(t)$ soit constant en l'absence d'interaction avec le champ appliqué ("représentation d'interaction"). L'espace de Hilbert des états atomiques est de dimension infinie, et difficile à manipuler. Le problème se simplifie si on suppose le champ appliqué $\vec{E} = E \vec{e} \cos(\omega t - \varphi)$ quasi-résonnant sur la seule transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ (de fréquence de Bohr ω_0). La fonction d'onde se décompose alors uniquement sur les deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, et tous les autres niveaux peuvent être ignorés :

$$|\Psi\rangle \approx c_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} |a\rangle + c_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} |b\rangle$$

On se ramène alors à un espace de dimension 2, où l'hamiltonien atomique s'écrit sous la forme d'une matrice 2×2 :

$$\widehat{H}_{at} = \begin{bmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0 \end{bmatrix}$$

de même que l'opérateur dipolaire électrique

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} \vec{d}_{aa} & \vec{d}_{ab} \\ \vec{d}_{ab}^* & \vec{d}_{bb} \end{bmatrix}$$

Dans un atome $\langle i | \widehat{D} | i \rangle = \vec{0}$, car il n'y a pas de direction privilégiée (le système est invariant par rotation). On supposera de plus \vec{d}_{ab} réel pour simplifier. On a alors :

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{bmatrix} E \cos(\omega t - \varphi)$$

avec

$$d = \vec{d}_{ab} \cdot \vec{\varepsilon}$$

Dans la suite, on supposera de plus que $|a\rangle$ est l'état fondamental de l'atome.

1.3 Évolution du système

L'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \widehat{H} |\Psi(t)\rangle$$

On en déduit les équations couplées d'évolution des coefficients $c_a(t)$ et $c_b(t)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_a}{dt} &= -\frac{dEe^{-i\phi}}{2} e^{i(\omega-\omega_0)t} c_a - \frac{dEe^{i\phi}}{2} e^{-i(\omega+\omega_0)t} c_b \\ i\hbar \frac{dc_b}{dt} &= -\frac{dEe^{i\phi}}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} c_a - \frac{dEe^{-i\phi}}{2} e^{i(\omega+\omega_0)t} c_b \end{aligned}$$

Ce système se simplifie considérablement si l'on fait *l'approximation séculaire*, valable à cause de la quasi-résonance entre la fréquence du champ et celle de l'atome. Elle consiste à négliger l'effet des termes du type $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$, oscillant rapidement avec des fréquences optiques, et à ne garder que les termes oscillant lentement (ou statiques à résonance exacte), appelés termes séculaires, du type $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$. En effectuant de plus le changement de variable ("passage dans le référentiel tournant") :

$$\begin{aligned} c_a(t) &= \tilde{c}_a(t) e^{i\frac{\delta t}{2}} \\ c_b(t) &= \tilde{c}_b(t) e^{-i\frac{\delta t}{2}} \end{aligned}$$

où $\delta = \omega - \omega_0$, on obtient alors un système d'équations couplées à coefficients constants :

$$\begin{aligned} i \frac{d\tilde{c}_a}{dt} &= \frac{\delta}{2} \tilde{c}_a + \frac{\Omega_R e^{-i\phi}}{2} \tilde{c}_b \\ i \frac{d\tilde{c}_b}{dt} &= \frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2} \tilde{c}_a - \frac{\delta}{2} \tilde{c}_b \end{aligned}$$

où

$$\Omega_R = -dE/\hbar$$

est la *pulsation de Rabi*. Ce système a pour pulsations propres les quantités $\pm\Omega$, avec :

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \delta^2}$$

On trouve alors aisément que sa solution générale s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{c}_a(t) &= \left(\cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) c_a(t=0) - i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega t}{2} c_b(t=0) \\ \tilde{c}_b(t) &= -i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} \sin \frac{\Omega t}{2} c_a(t=0) + \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) c_b(t=0)\end{aligned}$$

Si l'on prend comme conditions initiales $c_a(t=0) = 1$, $c_b(t=0) = 0$, on obtient les valeurs suivantes des populations $N_b(t) = |c_b|^2$ et $N_a = |c_a|^2$, et du dipôle atomique $\langle \vec{D}(t) \rangle = \text{Re}(2dc_a c_b^*)$:

$$\begin{aligned}N_b &= 1 - N_a = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \\ \text{Re} \tilde{D} &= d \frac{\delta \Omega_R}{\Omega_R^2 + \delta^2} (1 - \cos \Omega t) \\ \text{Im} \tilde{D} &= d \frac{\Omega_R}{\Omega} \sin \Omega t\end{aligned}$$

On a représenté sur la figure (2.1) l'évolution temporelle de N_b et $\text{Im} \tilde{D}$ lorsque le système est dans l'état fondamental $|a\rangle$ à l'instant $t = 0$. On voit que le système présente un comportement oscillant : ce sont les *oscillations de Rabi*. Il n'y a pas de régime stationnaire ou forcé atteint. Remarquons que $\text{Im} \tilde{D}$, qui est proportionnel, et de signe opposé, à la puissance transférée de l'atome au champ, change de signe toutes les demies périodes de Rabi : le transfert énergétique se fait alternativement des atomes vers le champ et du champ vers les atomes.

A résonance exacte, on a $c_a(t_m) = 0$ pour $t_m = (2m + 1) \frac{\pi}{\Omega_R}$, et $c_b(t_{m'}) = 0$ pour $t_{m'} = 2m' \frac{\pi}{\Omega_R}$ (avec m et m' entiers) : il y a à ces instants *transfert total* du système vers l'état $|b\rangle$, puis de nouveau dans l'état $|a\rangle$.

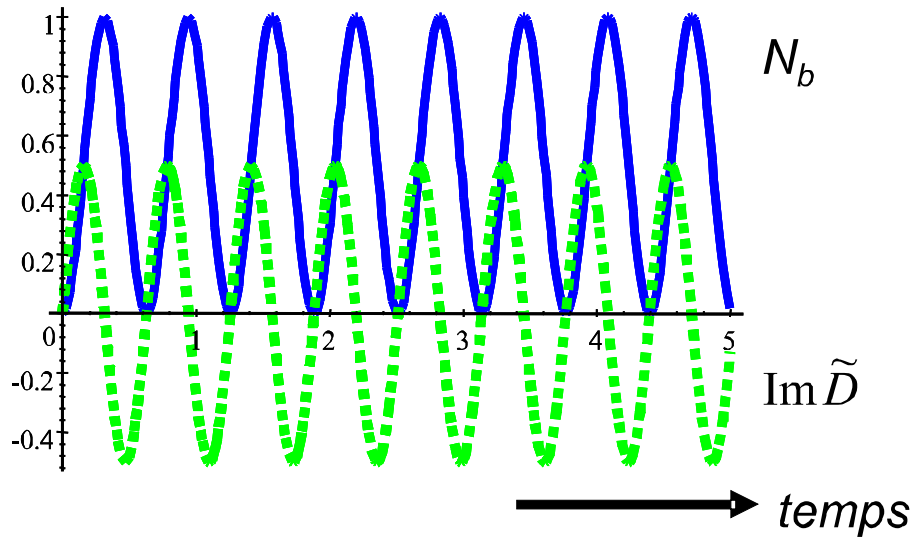


Fig. 2.1: Évolution de la population N_b et du dipôle atomique en l'absence de relaxation

2. Effet de l'environnement : équations de Bloch

Il faut ici aussi tenir compte de l'environnement : l'atome fait nécessairement partie d'un système plus gros, à cause de son couplage aux autres atomes et au champ de rayonnement.

2.1 Matrice densité

Si l'on s'intéresse à l'évolution de l'atome seulement, on sait qu'on ne peut plus le décrire en termes de fonction d'onde. Il faut utiliser la matrice densité ρ . Dans le cas présent où on ne s'intéresse qu'à un système à 2 niveaux, ρ est une matrice 2×2 :

$$\begin{bmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ba}^* \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{bmatrix}$$

avec $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$. On écrira $\rho_{aa} = N_a$, $\rho_{bb} = N_b$: ce sont les *populations* des deux niveaux, que nous avons rencontrées dans le modèle d'Einstein. ρ_{ba} est la "*cohérence*", qui est directement relié au dipôle :

$$\langle \widehat{D} \rangle = Tr \rho \widehat{D} = \text{Re} \left(2 \vec{d} \rho_{ba} \right)$$

$2\vec{d}\rho_{ba}$ est le donc le dipôle complexe, et $2\vec{d}\rho_{ba}e^{i\omega t}$ est l'enveloppe \tilde{D} lentement variable de ce dipôle introduite à propos du modèle de Lorentz. On voit donc que parmi les paramètres qui décrivent l'état de l'atome, Lorentz ne s'est en quelque sorte intéressé qu'aux cohérences et Einstein qu'aux populations. Le présent modèle va nous permettre de déterminer l'évolution de l'ensemble de ces paramètres.

En l'absence de relaxation, ρ évolue selon l'équation :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho = [\hat{H}, \rho]$$

où, comme nous l'avons vu plus haut,

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - dE \cos(\omega t - \varphi) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En calculant explicitement les commutateurs, on trouve les équations d'évolution de ρ_{bb} et ρ_{ba} (celle de ρ_{aa} s'en déduit par $\rho_{aa} = 1 - \rho_{bb}$) :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\rho_{bb} &= -(\rho_{ab} - \rho_{ba})dE \cos(\omega t - \varphi) \\ i\hbar\frac{d}{dt}\rho_{ba} &= \hbar\omega_0\rho_{ba} + (\rho_{bb} - \rho_{aa})dE \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

On voit que l'évolution des populations est liée à la valeur de la cohérence, et l'évolution de la cohérence liée à la différence des populations : l'interaction matière-rayonnement est donc essentiellement un couplage mutuel entre dipôle et populations. Posons alors :

$$\rho_{ba} = \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\omega t}$$

de sorte que $2d\tilde{\rho}_{ba} = \tilde{D}$. C'est pour la matrice densité le "passage dans le référentiel tournant" que nous avons effectué sur les coefficients de la fonction d'onde dans la partie précédente. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{bb} &= i\frac{dE}{2\hbar}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(\tilde{\rho}_{ba}^*e^{i\omega t} - \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\omega t}) \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -i(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{ba} + \frac{dE}{2i\hbar}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(\rho_{bb} - \rho_{aa})e^{i\omega t} \end{aligned}$$

On fait ici aussi l'*approximation séculaire* consistant à négliger les termes en $e^{\pm 2i\omega t}$, dont les effets se moyennent en première approximation à zéro, et on

obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{bb} &= i\frac{d}{2\hbar}\left(\tilde{E}\tilde{\rho}_{ba}^* - \tilde{E}^*\tilde{\rho}_{ba}\right) \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -i(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{ba} - i\frac{d\tilde{E}}{2\hbar}(\rho_{bb} - \rho_{aa})\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{bb} &= -\Omega_R\text{Im}\tilde{\rho}_{ba} \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -i(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{ba} + i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{bb} - \rho_{aa})\end{aligned}$$

où Ω_R est la pulsation de Rabi introduite précédemment (souvent appelée improprement fréquence de Rabi). La résolution de ces équations redonne évidemment les oscillations de Rabi, puisque pour le moment nous n'avons fait que récrire en termes de matrice densité l'équation de Schrödinger. Il faut maintenant rajouter l'effet de la relaxation.

2.2 Evolution en présence de relaxation

Le système atome+environnement est isolé, donc hamiltonien. La matrice densité ρ_{tot} qui le décrit obéit à l'équation :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_{tot} = \left[\hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_{AR}, \rho_{tot}\right]$$

\hat{H}_A est l'hamiltonien de l'atome en interaction avec le champ, que nous venons de considérer, \hat{H}_R est l'hamiltonien de l'environnement ou "réservoir" (ou "bain"), \hat{H}_{AR} décrit leur couplage. On ne s'intéresse qu'à la matrice densité réduite, obtenue après trace partielle sur les variables du réservoir, $\rho_A = \text{Tr}_R\rho_{tot}$. La théorie de la relaxation montre que l'équation pour ρ_A se met sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\rho_A = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A, \rho_A\right] + \mathcal{L}_R(\rho_A)$$

où \mathcal{L}_R est un opérateur de relaxation agissant sur ρ_A , et qui ne peut pas se mettre sous la forme d'un commutateur. Moyennant certaines approximations et hypothèses sur le réservoir, et en supposant que le niveau $|a\rangle$ est fondamental, on montre qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{bb} &= \frac{1}{i\hbar}\left(\left[\hat{H}_A, \rho_A\right]\right)_{bb} - \gamma_p\rho_{bb} \\ \frac{d}{dt}\rho_{ba} &= \frac{1}{i\hbar}\left(\left[\hat{H}_A, \rho_A\right]\right)_{ba} - \gamma_d\rho_{ba}\end{aligned}$$

On a toujours $\rho_{aa} = 1 - \rho_{bb}$, car le système formé des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ reste toujours fermé, même en présence de relaxation. On retrouve les taux de relaxation des populations (γ_p) et de la cohérence ou du dipôle (γ_d) qui avaient été introduits respectivement dans les modèles d'Einstein et de Lorentz. La théorie de la relaxation nous permet de les calculer si l'on connaît la forme de l'interaction avec l'environnement. Une notation souvent utilisée, notamment en théorie de la résonance magnétique, consiste à écrire :

$$\gamma_p = \frac{1}{T_1} \quad \gamma_d = \frac{1}{T_2}$$

T_1 est la durée de vie de la population, T_2 la durée de vie du dipôle.

- Si le *milieu est dilué*, le seul couplage de l'atome avec son environnement est celui lié au rayonnement (émission spontanée). On étudiera en détail ce phénomène dans le chapitre 5, une fois connue la quantification du rayonnement. En dépit de l'origine quantique du phénomène, son effet sur l'atome seul peut être pris en compte dans les équations semi-classiques. On montre qu'on a alors :

$$\gamma_p = \Gamma_{sp} \quad \gamma_d = \frac{\Gamma_{sp}}{2}$$

où Γ_{sp} est le taux d'émission spontanée que nous calculerons dans le chapitre 5.

- Si le *milieu est dense*, il faut tenir compte de l'effet des collisions, de l'interaction avec les phonons du réseau, etc... . La relaxation est alors beaucoup plus rapide et on a dans la plupart des cas :

$$\gamma_d \gg \gamma_p$$

La relaxation d'un dipôle est beaucoup plus rapide que celle d'une population. Il est en effet beaucoup plus facile de brouiller une phase (ce qui aboutit à détruire le dipôle, ou la cohérence) que de modifier une énergie (nécessaire pour détruire la population).

2.3 Équations de Bloch (cas d'une transition entre niveau fondamental et niveau excité)

Le système d'équations que nous venons d'établir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{bb} &= -\gamma_p\rho_{bb} + i\frac{d}{2\hbar}\left(\tilde{E}\tilde{\rho}_{ba}^* - \tilde{E}^*\tilde{\rho}_{ba}\right) \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -\gamma_d\tilde{\rho}_{ba} - i(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{ba} - i\frac{d\tilde{E}}{2\hbar}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \end{aligned}$$

peut aussi écrire en termes de populations N_a , N_b et de dipôle complexe $\tilde{D} = 2d\tilde{\rho}_{ba}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}N_b &= -\gamma_p N_b + \frac{1}{2\hbar} \text{Im}\tilde{D}\tilde{E}^* \\ \frac{d}{dt}\tilde{D} &= -[\gamma_d + i(\omega_0 - \omega)]\tilde{D} - i\frac{d^2\tilde{E}}{\hbar}(N_b - N_a)\end{aligned}$$

Ces deux ensembles d'équation sont les *équations de Bloch optiques*, qui sont très importantes car elles permettent de résoudre un très grand nombre de problèmes en optique quantique. Remarquons que ce sont des équations du premier ordre.

2.4 Cas d'un système peu excité

Si l'excitation est faible $N_b \approx 0$, donc $N_a \approx 1$, et $N_b - N_a \approx -1$. On a alors :

$$\frac{d}{dt}\tilde{D} = [i(\omega_0 - \omega) - \gamma_d]\tilde{D} + if\frac{q^2}{2m\omega}\tilde{E}$$

avec :

$$f = \frac{2m\omega d^2}{q^2\hbar}$$

Cette quantité sans dimension est la force d'oscillateur. On retrouve bien, à cette constante multiplicative près, l'équation d'évolution du dipôle introduite par Lorentz. Le modèle de Lorentz s'applique donc bien aux situations où l'atome est excité par une lumière de faible intensité, comme celle d'une lampe classique (thermique ou à décharge). Notons qu'il y a analogie entre les équations d'évolution d'un atome faiblement excité et celles d'un oscillateur harmonique, mais pas entre les phénomènes : l'électron n'est pas élastiquement lié dans un atome, mais il s'avère que l'"élastique" (l'oscillateur harmonique classique) est l'objet classique qui a le comportement le plus "quantique". Assimiler un système, quel qu'il soit, à un oscillateur harmonique classique est ainsi un premier pas vers la description quantique de ce système. La théorie semi-classique permet donc d'établir sur des bases solides le modèle phénoménologique de Lorentz. Notons qu'en outre, il permet de calculer la population de l'état excité dans le régime de faible excitation.

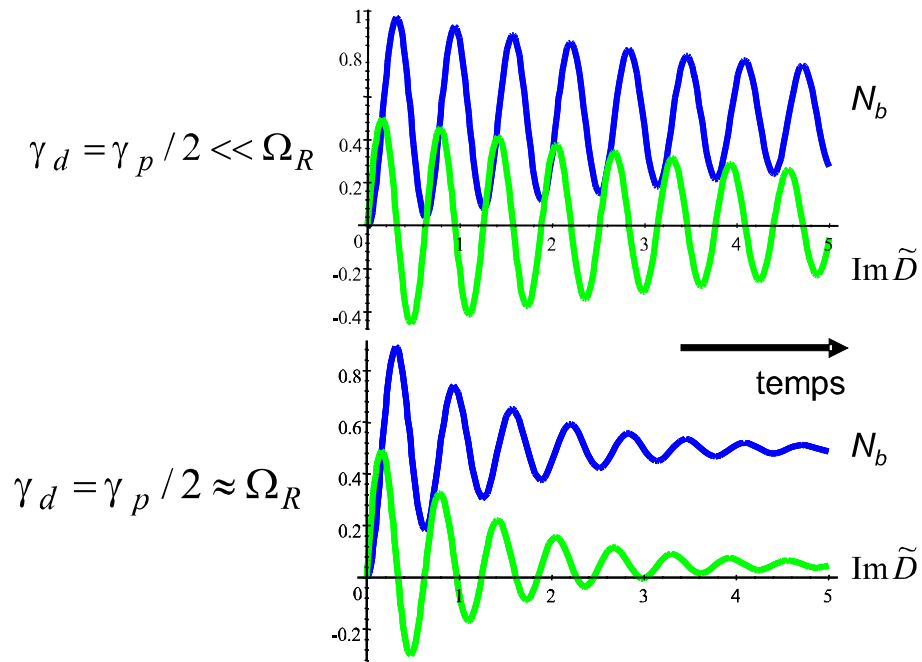


Fig. 2.2: évolution de la population N_b et du dipôle atomique lorsque la relaxation est due uniquement à l'émission spontanée (milieu dilué)

2.5 Evolution du système à partir de l'état fondamental

Lorsqu'on résout numériquement les équations de Bloch, on obtient les courbes des figures (2.2) et (2.3). On observe sur celles-ci des oscillations (analogue à celle de Rabi) qui s'amortissent et aboutissent à un état stationnaire. Ces oscillations ne permettent plus d'atteindre avec une probabilité unité le niveau excité. Lorsque γ_d croît, l'évolution devient monotone et la variation des populations ressemble de plus en plus à celle prévue par Einstein. On va donc s'intéresser plus en détail à ce cas limite.

2.6 Régime de fort amortissement du dipôle

Dans l'équation du dipôle, les termes $\frac{d}{dt}\tilde{D}$ et $\gamma_d\tilde{D}$ interviennent au même niveau. Dans le régime de fort amortissement, on va négliger $\frac{d}{dt}\tilde{D}$ devant $\gamma_d\tilde{D}$. On obtient alors une équation algébrique pour \tilde{D} au lieu d'une équation différentielle, qui permet de calculer la valeur à tout instant de $\tilde{D}(t)$:

$$\tilde{D}(t) = \frac{i}{\gamma_d - i(\omega - \omega_0)} \frac{d^2\tilde{E}}{\hbar} (N_a(t) - N_b(t))$$

Cette expression est valable si $\tilde{D}(t)$ donné par cette équation, et donc aussi l'inversion de population $N_a - N_b$, évoluent lentement sur une échelle de temps $(\gamma_d)^{-1}$. *La variable à relaxation rapide* (le dipôle) *suit donc adiabatiquement l'évolution temporelle de la variable à relaxation lente* (les populations). Si on introduit cette valeur de \tilde{D} dans l'équation de N_b , on obtient une équation différentielle pour les seules variables "lentes" N_a et N_b . On dit qu'on a "*éliminé adiabatiquement la variable rapide*". On obtient alors :

$$\frac{d}{dt}N_b = -\gamma_p N_b + \frac{d^2 E^2}{2\hbar^2} (N_a - N_b) \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2}$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre qui relie uniquement les variables "énergétiques" du problème, c'est-à-dire les populations atomiques et le carré du champ, E^2 , proportionnel à la densité énergétique

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

On constate qu'à cette approximation *les phases ont disparu du problème*. On retrouve des équations proches de celles du modèle d'Einstein, mais valables

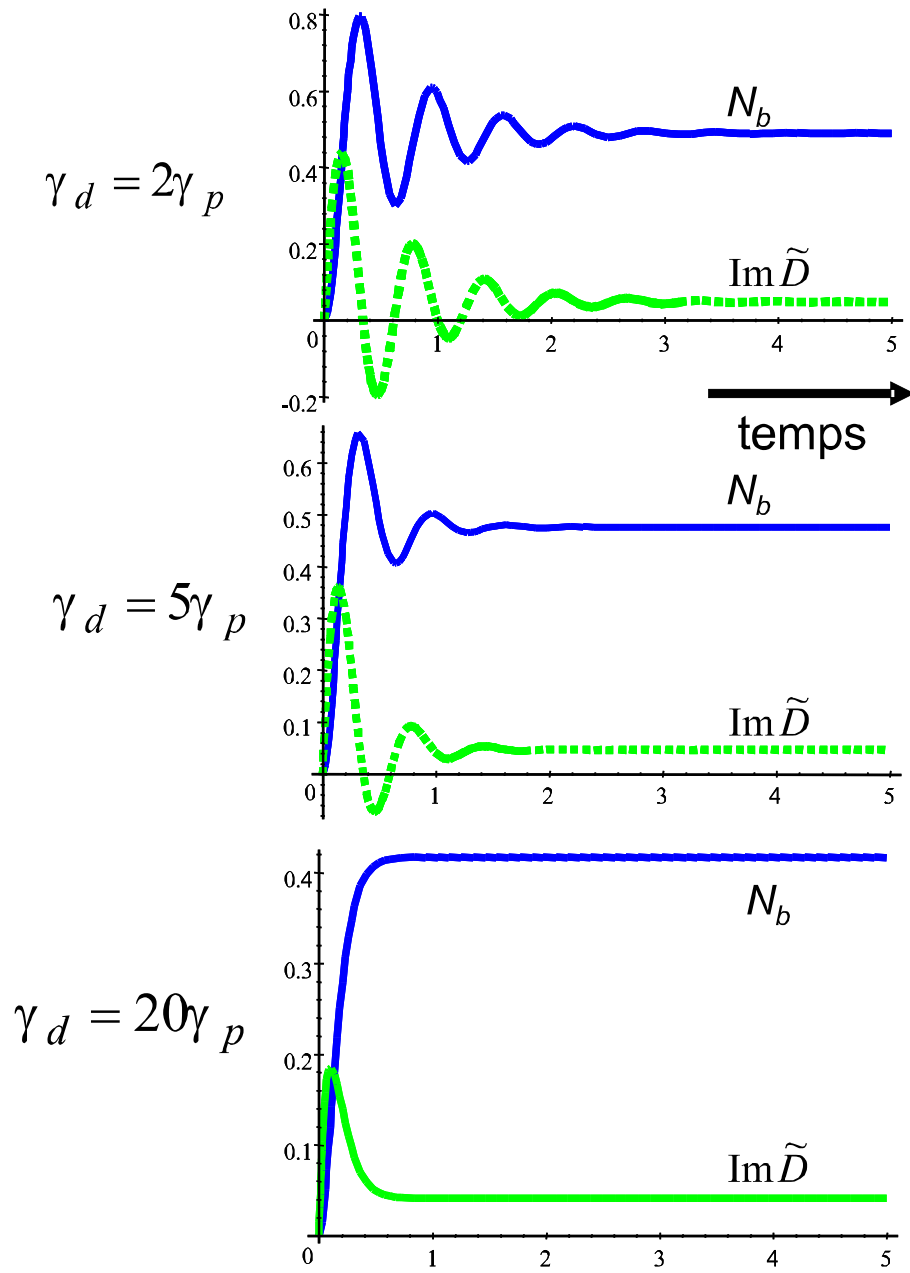


Fig. 2.3: évolution de la population N_b et du dipôle atomique dans le cas où le dipôle s'amortit plus vite que les populations (milieu dense)

dans le cas d'un champ monochromatique, avec les identifications :

$$A = \gamma_p \quad Bu(\nu) = \frac{d^2}{\hbar^2} \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2} U$$

Il faut bien distinguer ici des quantités voisines mais distinctes : la quantité $u(\nu)$, utilisée dans les équations d'Einstein, est la densité spectrale d'énergie volumique, valable pour un champ à spectre large, alors que la quantité U qui apparaît maintenant est l'énergie volumique, valable pour un champ monochromatique.

Notons finalement que la présente expression est valable pour un champ qui n'est pas strictement résonnant avec la transition atomique, et que la théorie semi-classique permet de retrouver comme cas limite l'équation d'Einstein pour les populations, mais qu'elle donne en outre le dipôle atomique, qui s'exprime en fonction de la différence des populations par l'expression donnée au début de ce paragraphe.

2.7 Généralisation des équations de Bloch

Les équations de Bloch s'appliquent aussi au cas où le système atomique n'est pas fermé, comme le cas de deux niveaux excités par exemple (ce système est évidemment important lorsqu'on étudie les lasers) : il faut alors introduire les taux de remplissage représentant le processus de pompage incohérent des niveaux a et b à partir du niveau fondamental, Λ_a et Λ_b , et les taux de départ vers les autres niveaux : γ_b est le taux de départ du niveau supérieur vers tous les niveaux d'énergie inférieure sauf a (il faut donc rajouter γ_p pour trouver le taux total de desexcitation de ce niveau), et γ_a est le taux de départ du niveau inférieur de la transition vers tous les niveaux d'énergie inférieure. On obtient alors le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{bb} &= \Lambda_b - \gamma_b \rho_{bb} - \gamma_p \rho_{bb} + i \frac{d}{2\hbar} \left(\tilde{E} \tilde{\rho}_{ba}^* - \tilde{E}^* \tilde{\rho}_{ba} \right) \\ \frac{d}{dt} \rho_{aa} &= \Lambda_a - \gamma_a \rho_{aa} + \gamma_p \rho_{bb} - i \frac{d}{2\hbar} \left(\tilde{E} \tilde{\rho}_{ba}^* - \tilde{E}^* \tilde{\rho}_{ba} \right) \\ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ba} &= -\gamma_d \tilde{\rho}_{ba} - i(\omega_0 - \omega) \tilde{\rho}_{ba} - i \frac{d\tilde{E}}{2\hbar} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \end{aligned}$$

Il faut prendre garde que le système n'est plus fermé, et que la somme des deux populations n'est plus une constante.

Les équations de Bloch se généralisent aisément au cas où il y a plus de deux niveaux : il faut alors introduire les taux de relaxation et de pompage de chacune des populations et de chacune des cohérences.

3. Interaction avec un champ non monochromatique

3.1 Sources lumineuses stationnaires à spectre large

Beaucoup de sources lumineuses, surtout classiques, ont un spectre large. Si le champ qu'elles émettent était certain, sa dépendance temporelle, transformée de Fourier de la répartition spectrale, aurait l'allure d'une impulsion lumineuse. On constate expérimentalement que ce sont des sources non pulsées, mais stationnaires, ce qui implique qu'elles émettent, non pas un champ certain, mais une *superposition statistique* de champs (par exemple des trains d'onde émis aléatoirement par chacun des atomes de la source, voir figure (2.4)). On peut alors écrire pour un tirage au sort donné :

$$E = \text{Re} \left[\tilde{E}(t) e^{-i\bar{\omega}t} \right]$$

où $\bar{\omega}$ est la fréquence centrale d'émission de la source, et $\tilde{E}(t)$ un champ aléatoire, dont les caractéristiques varient d'un tirage à l'autre. Ce sont par exemple des trains d'ondes exponentiels d'amplitude initiale et de constante d'amortissement fixes, mais commençant à un instant t_0 aléatoire (figure (2.4)). D'une manière générale, on écrit :

$$\overline{\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t')} = \Gamma_E(t - t')$$

où la barre située au dessus de $\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t')$ indique une moyenne sur l'ensemble statistique décrivant l'aspect aléatoire de la source (qu'on assimilera souvent à une moyenne temporelle). La fonction de corrélation du champ $\Gamma_E(\tau)$ est une fonction paire qui décroît à partir de $\tau = 0$ et tend vers zéro aux temps longs sur un intervalle de temps de l'ordre de T_c , appelé *temps de corrélation* du champ. Dans le cas particulier des trains d'onde exponentiellement amortis d'amplitude fixe E_0 , $\Gamma_E(\tau)$ vaut :

$$\Gamma_E(\tau) = E_0^2 e^{-|\tau|/T_c}$$

D'après le théorème de Wiener-Khintchine, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ n'est autre que la *densité spectrale* $S(\omega)$ de

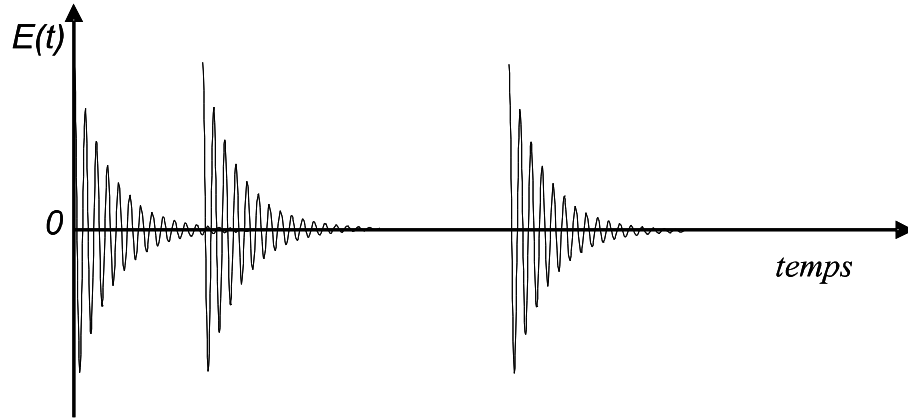


Fig. 2.4: allure du champ émis par une source stationnaire émettant des trains d'ondes amortis à des instants aléatoires

la quantité $|\tilde{E}(t)|^2$. La largeur spectrale $\Delta\omega$ de la source est donc inversement proportionnelle au temps de corrélation T_c . Dans l'exemple des trains d'onde exponentiels, la densité spectrale a la forme d'une Lorentzienne de largeur $1/T_c$:

$$S(\omega) = \frac{2E_0^2}{T_c} \frac{1}{\omega^2 + (1/T_c)^2}$$

3.2 Evolution de l'atome en présence du champ aléatoire

Nous allons nous placer dans le cas simple où on peut négliger toute relaxation dans l'atome. L'évolution de ρ en présence du champ à large spectre, toujours à l'approximation séculaire, est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{bb} &= \frac{id}{2\hbar} \left(\tilde{E}(t)\tilde{\rho}_{ba}^* - \tilde{E}^*(t)\tilde{\rho}_{ba} \right) \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -i(\omega_0 - \bar{\omega})\tilde{\rho}_{ba} - i\frac{d}{2\hbar}\tilde{E}(t)(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \end{aligned}$$

avec :

$$\rho_{ba} = \tilde{\rho}_{ba}e^{-i\bar{\omega}t}$$

En effet, l'utilisation de l'approximation séculaire n'est pas restreinte au cas d'un champ strictement monochromatique. Il suffit qu'on puisse l'appliquer pour toutes les composantes spectrales de la source. On résout formellement

la deuxième équation en prenant comme condition initiale $\rho_{ba}(0) = 0$:

$$\tilde{\rho}_{ba}(t) = -\frac{id}{2\hbar} \int_0^t \tilde{E}(t') (\rho_{bb} - \rho_{aa})(t') e^{-i(\omega_0 - \bar{\omega})(t-t')} dt'$$

On reporte ensuite cette expression de $\tilde{\rho}_{ba}(t)$ dans la première équation et on effectue la moyenne sur l'ensemble statistique. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{bb} &= -\frac{d^2}{4\hbar^2} \left[\int_0^t dt' \overline{\tilde{E}(t) E^*(t')} e^{i(\omega_0 - \bar{\omega})(t-t')} (\rho_{bb} - \rho_{aa})(t') + c.c. \right] \\ &= -\frac{d^2}{4\hbar^2} \left[\int_0^t dt' e^{i(\omega_0 - \bar{\omega})(t-t')} \Gamma_E''(t-t') (\rho_{bb} - \rho_{aa})(t') + c.c. \right] \end{aligned}$$

L'intégrand s'annule pour toutes les valeurs de t' telles que $|t - t'| \gg T_c$. On suppose maintenant :

1) que $\rho_{bb} - \rho_{aa}$ varie lentement sur l'échelle de temps T_c . On peut alors remplacer $(\rho_{bb} - \rho_{aa})(t')$ par $(\rho_{bb} - \rho_{aa})(t)$, qui sort de l'intégrale (il faudra vérifier ultérieurement cette hypothèse). Cela implique en particulier que les temps de relaxation de l'atome sont très grands devant T_c . Cette approximation est qualifiée d'approximation de mémoire courte, ou approximation de Markov.

2) que $t \gg T_c$. L'intégrand est alors pratiquement nul entre t et $+\infty$, et on peut étendre la borne de l'intégrale jusqu'à $+\infty$ sans changer sa valeur.

En utilisant ces deux approximations, et la relation

$$\left[\int_0^{+\infty} d\tau \Gamma_E(\tau) e^{-i\omega\tau} + c.c \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \Gamma_E(\tau) e^{-i\omega\tau}$$

car $\Gamma_E(\tau)$ est pair, il vient :

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb}(t) = -\frac{d^2}{4\hbar^2} S_{|E|^2}(\bar{\omega} - \omega_0) (\rho_{bb} - \rho_{aa})(t)$$

On obtient à nouveau une équation pour les seules populations, comme celle introduite par Einstein (il faut évidemment ajouter le terme d'émission spontanée, que cette théorie ne peut pas retrouver), qui fait intervenir $S_{|E|^2}(\omega)$, transformée de Fourier de la fonction de corrélation de $\tilde{E}(t)$

$$S_{|E|^2}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \Gamma_E(\tau) e^{-i\omega\tau}$$

qui n'est autre que la densité spectrale de la source. $S_{|E|^2}(\omega)$ est plus précisément proportionnel à la *densité spectrale d'énergie volumique* $u(\nu)$:

$$S_{|E|^2}(\bar{\omega} - \omega_0) = \frac{1}{\pi \varepsilon_0} u\left(\nu = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}\right)$$

On retrouve ainsi dans le cas d'une source large l'expression exacte posée par Einstein (toujours sans l'émission spontanée)

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb}(t) = -B u(\nu) (\rho_{bb} - \rho_{aa})(t)$$

avec la valeur suivante pour le coefficient d'Einstein B :

$$B = \frac{d^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar^2}$$

Si la source a une densité spectrale de forme Lorentzienne de largeur à mi hauteur $2\Delta\omega$:

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb} = -\frac{d^2 E_0^2}{2\hbar^2} \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\omega_0 - \bar{\omega})^2} (\rho_{bb} - \rho_{aa})$$

et donc une fonction de corrélation Γ_E en $e^{-\Delta\omega|\tau|}$, on obtient une expression analogue à celle obtenue dans le cas monochromatique, mais dans laquelle la fonction de distribution spectrale de la source a remplacé la fonction spectrale décrivant la réponse de l'atome. Rappelons que cette formule n'est valable que si T_c est court, c'est-à-dire si la largeur spectrale de la source est grande devant la largeur naturelle de la transition atomique. Le problème est plus complexe si le temps de corrélation de la source est du même ordre de grandeur que les temps de relaxation de l'atome.

4. Force d'oscillateur

Dans l'approximation du système à deux niveaux, nous avons vu qu'on retrouvait à la limite des faibles intensités lumineuses le modèle de Lorentz à partir du modèle semi-classique, à condition d'introduire un facteur multiplicatif appelé "force d'oscillateur". On peut généraliser ce résultat en tenant

compte de tous les niveaux de l'atome, dans le cadre d'une théorie perturbative à l'ordre le plus bas entre l'atome et le champ (justifiée ici par la faible valeur du champ appliqué). On trouve alors la formule :

$$\tilde{D} = \left[\sum_i f_i \frac{q^2}{2m\omega_i} \frac{\omega_i - \omega + i\gamma_{di}}{(\omega_i - \omega)^2 + \gamma_{di}^2} \right] \tilde{E}$$

qui est bien l'expression phénoménologique introduite à la fin du paragraphe (1.1.2). La "force d'oscillateur" f_i donne en fin de compte l'importance relative dans le résultat final de la contribution du $i^{\text{ème}}$ oscillateur.

Cette interprétation est corroborée par le fait que cette quantité est positive et que la somme des forces d'oscillateur pour toutes les transitions vaut 1 :

$$\sum_i f_i = 1$$

Donnons la démonstration de cette formule, dite de Thomas-Reiche-Kuhn. f_i est donné par :

$$f_i = \frac{2m\omega_i d^2}{q^2 \hbar} = \frac{2m}{\hbar^2} (E_i - E_a) |\langle i | x | a \rangle|^2$$

si on suppose E polarisé selon Ox. Donc

$$\begin{aligned} \sum_i f_i &= \frac{2m}{\hbar^2} \sum_i (E_i \langle a | x | i \rangle \langle i | x | a \rangle - E_a \langle a | x | i \rangle \langle i | x | a \rangle) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \left(\langle a | x H_{at} x | a \rangle - \frac{1}{2} \langle a | H_{at} x^2 | a \rangle - \frac{1}{2} \langle a | x^2 H_{at} | a \rangle \right) \\ &= -\frac{m}{\hbar^2} \langle a | [x, [x, H_{at}]] | a \rangle \end{aligned}$$

On peut calculer ce double commutateur :

$$\begin{aligned} [x, H_{at}] &= i\hbar \frac{\partial H_{at}}{\partial p_x} = i\hbar \frac{p_x}{m} \\ [x, [x, H_{at}]] &= i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \left(i\hbar \frac{p_x}{m} \right) = \frac{(i\hbar)^2}{m} \end{aligned}$$

Ce qui permet de démontrer la formule cherchée.

5. Récapitulatif

Ce chapitre nous a permis d'introduire les équations de Bloch, qui nous permettront de résoudre un très grand nombre de problèmes en optique quantique. Il nous a permis aussi de mieux comprendre les modèles phénoménologiques introduits par Lorentz et Einstein, et d'en préciser les domaines de validité.

Le modèle de Lorentz est correct dans le cas d'un atome peu excité :

$$N_b \ll 1$$

Le modèle d'Einstein est correct dans le cas où le dipôle atomique est très rapidement amorti par l'environnement, ou bien lorsque la source excitatrice est à spectre large :

$$\begin{aligned}\gamma_d &\gg \gamma_p \\ \Delta\omega &\gg \gamma_d, \gamma_p\end{aligned}$$

Nous avons aussi vu un certain nombre de méthodes d'approximation que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique : l'approximation séculaire, consistant à négliger l'effet des composantes haute-fréquence de l'excitation, l'élimination adiabatique des variables rapides en tant que variables dynamiques du problème, qui s'asservissent à l'évolution des variables à amortissement lent ; l'approximation de mémoire courte qui consiste à négliger l'effet de mémoire du système, qui n'évolue que sous l'effet des valeurs instantanées des variables.

3. DESCRIPTION QUANTIQUE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE LIBRE

Historiquement, l'aspect quantique du monde physique s'est révélé pour la première fois en 1900 à l'occasion d'études sur le rayonnement, et plus particulièrement sur le rayonnement thermique, dont le comportement à grande fréquence défiait les lois de la physique classique. Il a fallu cependant attendre ensuite la fin des années 1920 pour avoir une description quantique complète et déduite des principes de base de la mécanique quantique du champ électromagnétique.

1. Aspect corpusculaire du champ de rayonnement thermique

1.1 Lois de Planck et de Wien

A la fin du dix-neuvième siècle, les physiciens ont pu déterminer expérimentalement la densité spectrale $u(\nu, T)$ de l'énergie du rayonnement à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat complètement absorbant à la température T , ou corps noir. Ils constatèrent que $u(\nu, T)$ décroît et tend vers zéro à grande fréquence. Wien obtint un bon accord entre les données expérimentales haute fréquence et la loi empirique :

$$u(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

Planck, en 1900, trouva une meilleure formule à partir de considérations de physique statistique et de l'hypothèse extrêmement hardie et mystérieuse que les échanges d'énergie avec le thermostat se font par multiples de $h\nu$. Il obtint la célèbre formule :

$$u(\nu, T) = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\beta \frac{h\nu}{T}} - 1}$$

où

$$\alpha = \frac{2h}{c^3}, \beta = \frac{h}{k_B}$$

1.2 Le raisonnement d'Einstein

Dans son célèbre article publié en 1905 (*Annalen der Physik* 17, 132 (1905)), Einstein montre que la loi de Wien implique un aspect corpusculaire du rayonnement, et pas seulement de l'interaction. Son raisonnement est extrêmement astucieux et peu connu. En effet, on ne retient habituellement de cet article que l'explication de l'effet photoélectrique, alors que celle-ci occupe une part très restreinte de l'article.

Le raisonnement d'Einstein part de l'idée que la dépendance de u avec T nous permet de connaître directement l'entropie du système. En effet :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{ds}{du}$$

où s est la densité spectrale volumique d'entropie, prise ici comme fonction de u et de T . La loi de Wien implique :

$$\frac{1}{T} = -\frac{u}{\beta\nu} \ln \frac{u}{\alpha\nu^3} = \frac{ds}{du}$$

soit, en intégrant :

$$s = -\frac{u}{\beta\nu} \left(\ln \frac{u}{\alpha\nu^3} - 1 \right)$$

en supposant $s(0) = 0$. On en déduit l'expression de l'entropie du rayonnement contenu dans le volume V , $S = sV$, en fonction de l'énergie totale du rayonnement $E = uV$:

$$S = -\frac{E}{\beta\nu} \left(\ln \frac{E}{\alpha\nu^3 V} - 1 \right)$$

La variation d'entropie du rayonnement thermique lors d'une variation isotherme de volume de V_0 à V s'écrit alors :

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \ln \frac{V}{V_0}$$

C'est la même loi de variation que pour l'entropie d'un *gaz parfait de N particules* :

$$S - S_0 = k_B N \ln \frac{V}{V_0}$$

Einstein est donc conduit par ce raisonnement à assimiler le rayonnement thermique dans la zone où il obéit à la loi de Wien à un gaz parfait de N particules avec

$$N = \frac{E}{k_B \beta \nu} = \frac{E}{h\nu}$$

L'énergie totale du rayonnement thermique dans la bande de fréquence $d\nu$ est donc assimilable à celle de N particules indépendantes ayant chacune une énergie $h\nu$.

2. Décomposition modale du champ électromagnétique classique

Avant de passer à la quantification du champ, il nous faut mettre les équations classiques de l'électromagnétisme et ses solutions sous une forme adaptée. Celle-ci consiste essentiellement en une *décomposition modale* des champs électromagnétiques.

Le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$, à partir duquel on peut calculer aussi bien le champ électrique que le champ magnétique de l'onde, est un *champ vectoriel*, défini par la donnée de 3 nombres pour tout \vec{r} et t , qui permet de déterminer à la fois le champ électrique et le champ magnétique de l'onde considérée. On peut le décomposer sur toute *base* de cet espace, formée de *modes du rayonnement*. Celle-ci comporte un nombre dénombrable de vecteurs de base si on se restreint à ne décrire les champs qu'à l'intérieur d'un volume V fini (très grand devant le système physique étudié). Nous allons tout d'abord introduire le *potentiel vecteur complexe* (ou signal analytique) $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$, intermédiaire de calcul souvent pratique, et défini par :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) + \left[\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) \right]^*$$

Précisons enfin que nous nous plaçons dans tout ce chapitre en *jauge de Coulomb*.

2.1 Base des ondes planes progressives

Si le volume V est un cube de côté L , on peut par exemple utiliser la décomposition en *série de Fourier* de $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$, et écrire :

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t) \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i \vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}}$$

Le champ que nous considérons pour l'instant étant le champ libre, les équations de Maxwell nous donnent directement la dépendance temporelle du coefficient de Fourier $\mathcal{A}_{\ell}(t)$:

$$\mathcal{A}_{\ell}(t) = A_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t}$$

avec $\omega_{\ell} = c \|\vec{k}_{\ell}\|$. Le potentiel vecteur est donc parfaitement déterminé quand on connaît la liste (dénombrable) des coefficients complexes A_{ℓ} .

La somme s'étend sur l'indice global ℓ défini comme un ensemble de quatre entiers : $\ell = (n_x, n_y, n_z, m)$, les trois premiers étant des entiers relatifs quelconques et le quatrième entier prenant seulement les valeurs 1 ou 2. Cet indice permet de définir sans ambiguïté les caractéristiques du mode considéré :

- le vecteur d'onde \vec{k}_{ℓ} de l'onde plane a pour composantes :

$$\left(\vec{k}_{\ell}\right)_x = n_x \frac{2\pi}{L} \quad \left(\vec{k}_{\ell}\right)_y = n_y \frac{2\pi}{L} \quad \left(\vec{k}_{\ell}\right)_z = n_z \frac{2\pi}{L}$$

ce qui assure que les exponentielles $e^{i \vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}}$ sont périodiques de période L sur les trois axes.

- le vecteur $\vec{\epsilon}_{\ell}$ est un vecteur unitaire, éventuellement de composantes complexes, définissant la polarisation du potentiel vecteur, et se situant dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde (puisque nous sommes en jauge de Coulomb). Deux vecteurs polarisations orthogonaux (et indexés par les deux valeurs possibles de l'entier m) suffisent pour construire une polarisation arbitraire dans le plan perpendiculaire à \vec{k}_{ℓ} .

On trouve le coefficient de la décomposition de Fourier par la formule :

$$\mathcal{A}_{\ell}(t) = \iiint_V d^3r \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\epsilon}_{\ell} e^{-i \vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}}$$

Si on fait tendre la dimension L de la boîte vers l'infini, les vecteurs \vec{k}_ℓ figurant dans la décomposition en série de Fourier appartiennent à un réseau de plus en plus serré. Il est souvent utile de passer à la limite continue :

$$\sum_{\ell} \approx \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_{m=1,2} \iiint_V d^3k$$

ce qui revient à dire que la densité dans l'espace des \vec{k} vaut $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$.

On déduit aisément de cette décomposition celle des champs électrique et magnétique, qui sont tous des champs transverses dans l'espace vide, et celle des champs complexes associés $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} (i\omega_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t)) \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}} \quad (3.1)$$

$$\vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \left(i\mathcal{A}_{\ell}(t) \vec{k}_{\ell} \times \vec{\epsilon}_{\ell} \right) e^{i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}} \quad (3.2)$$

2.2 Décomposition modale dans le cas général

La base des ondes planes progressives et transverses n'est pas la seule possible pour décomposer le potentiel vecteur dans le volume fini (V). Il en existe bien d'autres, et on écrira alors de manière générale :

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \alpha_{\ell}(t) \vec{u}_{\ell}(\vec{r})$$

La base des modes $\vec{u}_{\ell}(\vec{r})$ est par définition orthonormée et complète :

$$\iiint_V d^3r \vec{u}_{\ell}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{\ell'}^*(\vec{r}) = \delta_{\ell\ell'} \quad \sum_{\ell} \vec{u}_{\ell}^*(\vec{r}') \cdot \vec{u}_{\ell}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

De nombreuses bases de modes peuvent être utilisées, en fonction du problème précis traité : on peut prendre les modes propres d'une cavité fermée si le système physique est effectivement enfermé dans une telle cavité, les modes Gaussiens si on veut décrire le faisceau issu d'un laser, une base d'ondes stationnaires, etc... Dans la suite de l'exposé, on se restreindra à la base des ondes planes progressives décrite dans le premier paragraphe :

$$\vec{u}_{\ell}(\vec{r}) = L^{-3/2} \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}}$$

parce qu'elle est la plus facile à manipuler mathématiquement, mais la plupart des résultats que nous obtiendrons se transposent au cas général.

2.3 Énergie et impulsion du champ libre

Nous allons ici utiliser l'égalité de Parseval-Plancherel :

$$\iiint_V d^3r \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{G}^*(\vec{r}) = L^3 \sum_{\ell} \mathcal{F}_{\ell} \mathcal{G}_{\ell}^*$$

où \mathcal{F}_{ℓ} et \mathcal{G}_{ℓ} sont les composantes de la décomposition en série de Fourier de $F(\vec{r})$ et $G(\vec{r})$ ($\vec{F} = \sum_{\ell} \mathcal{F}_{\ell} \vec{e}_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{r}}, \dots$).

On sait que l'énergie du champ électromagnétique a pour expression :

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V d^3r \left(\vec{E}^2(\vec{r}, t) + c^2 \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right)$$

On en déduit, après un calcul sans difficulté :

$$H = 2\varepsilon_0 L^3 \sum_{\ell} \omega_{\ell}^2 |A_{\ell}|^2$$

On constate que l'énergie du champ apparaît comme une somme des énergies de chacun des modes d'ondes progressives, qui "diagonalisent" en quelque sorte l'hamiltonien. L'excitation énergétique d'un tel mode est ainsi proportionnelle à $|A_{\ell}|^2$. Cette diagonalisation est vraie quelle que soit la décomposition modale utilisée.

On montre en électromagnétisme classique que la quantité de mouvement du champ électromagnétique s'exprime comme l'intégrale volumique du vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \iiint_{(V)} d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

La relation de Parseval-Plancherel donne alors :

$$\vec{P} = 2\varepsilon_0 L^3 \sum_{\ell} \omega_{\ell} |A_{\ell}|^2 \vec{k}_{\ell}$$

Comme pour l'énergie, on constate que chaque mode d'onde plane progressive contribue séparément à l'impulsion avec le poids $|A_{\ell}|^2$, et dans la direction de \vec{k}_{ℓ} . Il s'agit d'un effet de *pression de radiation* exercée par chacun des modes. Cette décomposition modale de la quantité de mouvement n'est valable que pour la base de mode des ondes planes progressives.

3. Quantification du rayonnement

Pour ne pas alourdir l'exposé, on ne va pas détailler ici la procédure rigoureuse, dite de quantification canonique, à partir du Lagrangien. On se reportera à la référence ([?]), ou aux livres plus spécialisés de théorie quantique des champs pour un exposé rigoureux et détaillé de cette quantification. On va ici simplement donner les résultats de cette procédure de quantification, dont nous détaillerons alors les conséquences physiques.

3.1 Opérateurs \hat{a}_ℓ - relations de commutation

Pour quantifier le mouvement d'une particule matérielle à une dimension, on associe à ses variables dynamiques réelles position $x(t)$ et impulsion $p_x(t)$ des opérateurs hermitiens position et impulsion :

$$x(t) \rightarrow \hat{x} \quad p_x(t) \rightarrow \hat{p}_x$$

avec la règle de commutation :

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

De la même manière, aux champs électromagnétiques classiques dépendant du temps, on associe des *opérateurs champs* indépendant du temps. Une fois effectuée la décomposition des champs en modes, les variables dynamiques du problème sont les quantités complexes $\mathcal{A}_\ell(t)$, auxquelles nous allons associer des opérateurs non hermitiens \hat{a}_ℓ :

$$\mathcal{A}_\ell(t) \rightarrow \hat{a}_\ell \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_\ell L^3}}$$

La constante de proportionnalité introduite, apparemment compliquée, simplifie considérablement les relations de commutation, qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^+] &= \delta_{\ell,\ell'} \\ [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}] &= 0 \\ [\hat{a}_\ell^+, \hat{a}_{\ell'}^+] &= 0 \end{aligned}$$

La procédure de quantification, non détaillée ici, montre en effet que *chaque mode du champ est formellement équivalent à un oscillateur harmonique*

quantique à une dimension. C'est la raison pour laquelle on obtient des relations de commutation analogues, et que l'opérateur \widehat{a}_ℓ que nous venons d'introduire est analogue à l'opérateur quantique non hermitien \widehat{a} de destruction d'une excitation de l'oscillateur harmonique matériel.

Les opérateurs \widehat{a}_ℓ sont les briques élémentaires qui permettent de construire tout l'édifice. Toutes les propriétés quantiques des champs électromagnétiques viennent du fait que $[\widehat{a}_\ell, \widehat{a}_\ell^+] \neq 0$.

3.2 Expression des différents opérateurs physiques

Beaucoup de quantités physiques s'expriment en fonction de la quantité $|\alpha_l|^2$, dont l'équivalent quantique est ambigu, puisqu'il peut être aussi bien $\widehat{a}_l \widehat{a}_l^+$ que $\widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l$, qui sont pourtant deux quantités différentes. La règle de quantification consiste en fait à prendre :

$$|\alpha_l|^2 \rightarrow \frac{1}{2} (\widehat{a}_l \widehat{a}_l^+ + \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l) = \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \frac{1}{2}$$

On est amené à introduire l'opérateur suivant, appelé à jouer un rôle important dans la suite :

$$\widehat{N}_l = \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l$$

A partir des expressions des différentes grandeurs physiques relatives au champ classique données dans le paragraphe (3.2) et de la valeur de la constante C_l donnée en (3.3.1), on peut maintenant écrire les opérateurs quantiques associés :

- Opérateur énergie ou hamiltonien :

$$\widehat{H} = \sum_l \hbar \omega_l \left(\widehat{N}_l + \frac{1}{2} \right)$$

- Opérateur impulsion :

$$\widehat{\vec{P}} = \sum_l \hbar \vec{k}_l \widehat{N}_l$$

(la somme portant sur le terme $\frac{1}{2}$ vaut zéro car on trouve dans cette somme les vecteurs d'ondes \vec{k}_l et leurs opposés $\vec{k}_{-l} = -\vec{k}_l$).

- Opérateur potentiel vecteur complexe (non hermitien) :

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_l L^3}} \vec{\varepsilon}_l \widehat{a}_l e^{i \vec{k}_l \cdot \vec{r}}$$

Il s'agit d'un opérateur défini en tout point de l'espace, donc d'un champ d'opérateurs (\vec{r} n'est pas ici un opérateur, mais un paramètre).

- Observable potentiel vecteur (hermitien) :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}) + \left(\vec{A}^{(+)}(\vec{r}) \right)^\dagger$$

- Opérateur champ électrique complexe (non hermitien) :

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_l i \mathcal{E}_l \vec{\varepsilon}_l \hat{a}_l e^{i \vec{k}_l \cdot \vec{r}}$$

avec

$$\mathcal{E}_l = \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2 \varepsilon_0 L^3}}$$

- Observable champ électrique (hermitien) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{(+)}(\vec{r}) + \left[\vec{E}^{(+)}(\vec{r}) \right]^\dagger$$

On a une expression analogue pour les opérateurs champs magnétiques complexe et réel.

On peut tout aussi bien quantifier sur n'importe quelle autre base de modes du champ. On écrit de manière générale l'opérateur champ électrique complexe sous la forme :

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2 \varepsilon_0}} \hat{b}_l \vec{u}_l(\vec{r})$$

Les opérateurs \hat{b}_l , qui ont les mêmes relations de commutation que les opérateurs \hat{a}_l , sont relatifs aux modes $\vec{u}_l(\vec{r})$. On passe des uns aux autres par une transformation linéaire unitaire de changement de base

4. États stationnaires du rayonnement

4.1 États propres de \hat{H}

On montre à partir de la relation de commutation $[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] = 1$ que l'opérateur \hat{N}_l que nous avons introduit dans le paragraphe précédent a pour spectre

l'ensemble des entiers N . C'est la raison pour laquelle on l'appelle *opérateur nombre*. Il existe donc des vecteurs d'états, notés $|n_l\rangle$, tels que :

$$\hat{N}_l |n_l\rangle = n_l |n_l\rangle$$

pour lesquels on a aussi les relations suivantes, démontrées dans le cadre de l'oscillateur harmonique matériel mais valides aussi pour un mode du champ car elles se déduisent uniquement des relations de commutation :

$$\hat{a}_l |n_l\rangle = \sqrt{n_l} |n_l - 1\rangle \quad \hat{a}_l^+ |n_l\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_l + 1\rangle$$

Comme $[\hat{N}_l, \hat{N}_{l'}] = 0$, les états propres de l'hamiltonien \hat{H} sont des produits tensoriels d'états $|n_l\rangle$, de la forme :

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_l\rangle \otimes \dots$$

que nous noterons pour simplifier :

$$|n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle$$

On a donc :

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \left[\sum_l \left(n_l + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l \right] |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle$$

Ces états sont les *états stationnaires du champ*. Ils forment de plus une base de l'espace des états du champ. Le vecteur d'état le plus général pour le champ électromagnétique s'écrit donc :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \dots C_{n_1, n_2, \dots, n_l, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle$$

La dimension de l'espace vectoriel dans lequel évolue cet état est $(\text{card}N)^{\text{card}N}$, où $\text{card}N$ est l'infini dénombrable, alors qu'un champ classique, défini par la donnée des quantités $\{\alpha_l\}_{l \in N}$, appartient à un espace vectoriel de dimension $\text{card}N$. On a du mal à imaginer la prodigieuse variété de ces états. Au début du vingt-unième siècle, on n'a encore étudié théoriquement qu'une toute petite fraction de cette espace, et on en a produit expérimentalement encore moins.

4.2 Notion de photon

Remarquons que les états stationnaires du champ ont aussi la propriété suivante :

$$\widehat{\vec{P}} |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \sum_l n_l \hbar \vec{k}_l |n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$$

On constate un caractère additif de E et $\widehat{\vec{P}}$: l'état $|n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle$, du point de vue de son énergie et de sa quantité de mouvement, apparaît avoir les mêmes propriétés qu'un ensemble de particules sans interaction mutuelle, formé de n_1 particules d'énergie $\hbar\omega_1$ et de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_1$, de n_2 particules d'énergie $\hbar\omega_2$ et de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_2, \dots$, de n_l particules d'énergie $\hbar\omega_l$ et de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_l \dots$ On appellera *photons* ces particules.

L'opérateur \widehat{a}_l^+ est donc l'*opérateur de création* d'un photon, et l'opérateur \widehat{a}_l est l'*opérateur d'annihilation* d'un photon. \widehat{N}_l est l'opérateur nombre de photons. On remarque que, comme le nombre de photons dans un mode donné est un entier quelconque, les photons sont des *bosons*.

Rappelons que dans une autre base de modes du champ, l'opérateur champ électrique complexe s'écrit :

$$\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0}} \widehat{b}_l \vec{u}_l(\vec{r})$$

L'opérateur \widehat{b}_l est l'opérateur de destruction d'un photon dans le mode considéré, quelle que soit sa dépendance spatiale. Par exemple, si $u_l(\vec{r})$ décrit une onde stationnaire, les états propres $|n_l\rangle$ de $\widehat{b}_l^+ \widehat{b}_l$ correspondent à un mode défini de photons dans ce mode. On peut montrer aisément qu'ils sont états propres de l'énergie, comme ceux que nous avons définis précédemment, mais qu'ils ne sont pas états propres de l'impulsion.

D'une manière générale, seul l'état $|n_l = 1\rangle$ présente de fortes analogies avec l'état d'une particule matérielle isolée. L'état $|n_l = 1, n_{l'} = 1, \dots\rangle$ correspond à plusieurs particules, chacune dans un mode différent. En revanche, l'état $|n_l\rangle$ avec $n_l > 1$ a un équivalent difficile à trouver pour une particule matérielle. Seules des situations aussi exotiques que la *condensation de Bose-Einstein* permettent d'accumuler plusieurs particules matérielles dans le même état quantique.

4.3 L'état fondamental du champ

L'état de plus basse énergie du champ électromagnétique s'écrit :

$$|n_1 = 0, \dots, n_l = 0, \dots\rangle$$

Nous le noterons $|0\rangle$ pour simplifier. On l'appelle *vide* (de photons). On devrait aussi l'appeler *obscurité*, ou noir : c'est l'état du champ lorsqu'on a coupé toutes les sources de lumière, y compris les sources thermiques (il faut donc en principe refroidir l'enceinte à $T = 0K$ pour l'obtenir). On a alors :

$$\hat{H} |0\rangle = \sum_l \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_l \right) |0\rangle = E_v |0\rangle$$

On constate que cet état a une énergie non nulle, appelée *énergie du vide*, ou *énergie de point zéro*, alors que l'énergie du vide (ou obscurité) classique, définie par $\{\alpha_l = 0\}$, est nulle. Calculons la valeur moyenne du champ électrique dans cet état :

$$\langle 0 | \hat{E}(\vec{r}, t) | 0 \rangle = 0$$

comme attendu, car :

$$\hat{a}_l |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{a}_l^+ = 0$$

En revanche,

$$\langle 0 | \widehat{\vec{E}}^2(\vec{r}, t) | 0 \rangle = \sum_l (\mathcal{E}_l)^2 = \sum_l \frac{\hbar \omega_l}{2\epsilon_0 L^3}$$

On constate que la *variance du champ* ΔE n'est pas nulle dans le vide : le vide est le siège de fluctuations de champ autour de zéro, qu'on appelle *fluctuations du vide*.

On voit que l'état du champ appelé, de manière assez arbitraire, vide, possède des propriétés physiques particulières. De manière imagée, on peut dire que le "vide" ce n'est pas "rien". On peut par exemple le constater en considérant l'état :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |0\rangle)$$

dans lequel on a "ajouté du vide" à un photon dans un mode donné, tous les autres modes étant vides. Cet état possède des propriétés très différentes de celles de l'état à un photon $|0\rangle$. Par exemple, dans cet état, $\langle \Psi | \vec{E} | \Psi \rangle \neq 0$, alors que pour l'état à un photon, $\langle 1 | \vec{E} | 1 \rangle = 0$.

La "présence du vide" se manifeste par différents effets mesurables :

- Il conduit à des déplacements des niveaux atomiques. On sait en effet que pour la plupart des atomes, le déplacement des niveaux atomiques sous l'effet d'un champ électrostatique ("effet Stark") est proportionnel à E^2 , et que dans le vide E^2 est non nul. De plus, dans l'atome d'hydrogène par exemple, ce déplacement n'est pas le même dans les différents sous-niveaux d'une même multiplicité de nombre quantique principal donné. Il y a alors une levée de dégénérescence induite par les fluctuations du vide : c'est le *déplacement de Lamb, ou Lamb shift*, qui a été observé pour la première fois par Lamb et Retherford en 1949 entre les niveaux $2S_{\frac{1}{2}}$ et $2P_{\frac{3}{2}}$ de l'hydrogène. Ce faible écart énergétique, de l'ordre de 1GHz, ne peut pas s'expliquer sans faire intervenir la théorie quantique de l'électrodynamique. Cette observation eut un très grand retentissement, car elle montrait qu'on ne pouvait se contenter d'une théorie quantique de l'atome uniquement pour rendre compte des résultats expérimentaux .

- Le champ fluctuant du vide, lorsqu'il est en présence d'un atome excité "stimule" son retour vers l'état fondamental. C'est l'*émission spontanée*, phénomène bien connu car facilement observable, mais calculable seulement dans ce cadre. Nous reviendrons au chapitre 5 sur les deux phénomènes de déplacement de niveau et d'instabilité causés par le couplage au rayonnement quantifié.

- Les fluctuations du vide sont aussi à l'origine d'une force, qui s'exerce entre deux plaques conductrices parallèles proches l'une de l'autre. En effet, ces plaques sont soumises à la pression de radiation des fluctuations du vide de manière dissymétrique, puisqu'entre les deux plaques n'existent que les modes de resonance du Fabry-Perot, alors que tous les modes possibles existent à l'extérieur des deux plaques. Cette force, attractive, est appelée *force de Casimir*.

- Les fluctuations du vide peuvent se coupler à d'autres états du champ à l'aide d'une lame semi-réfléchissante : Celle-ci, considérée classiquement, coupe un faisceau incident en deux faisceaux d'amplitudes strictement égales. D'un point de vue quantique, elle superpose les fluctuations du vide entrant de l'autre côté de la lame aux deux faisceaux sortants, et entraîne que ces deux faisceaux ne sont plus strictement identiques (ce type de phénomène sera étudié plus en détail dans le cours du deuxième semestre d'optique quantique).

Notons enfin le calcul précis de presque tous ces effets se heurte à des problèmes de *divergences*, dite catastrophes ultra-violettes : les expressions qui

donnent l'énergie du vide $\sum_l \frac{1}{2} \hbar \omega_l$, les fluctuations de champ électrique du vide $\sum_l \frac{\hbar \omega_l}{2 \varepsilon_0 L^3}$, le Lamb shift, conduisent à des quantités divergentes. Ce problème, décelé dès les débuts de l'électrodynamique quantique, en a constitué l'énigme essentielle. Les physiciens avaient alors coutume d'introduire une coupure haute-fréquence ad-hoc dans la somme sur les modes, arguant que d'autres effets apparaissent dans la théorie lorsque $\hbar \omega$ devient supérieur à $2mc^2$. Le problème n'a vraiment été résolu qu'à la fin des années 40, lorsque Feynman, Schwinger, Tomonoga trouvèrent indépendamment une méthode pour éliminer les infinis de la théorie (dite méthode de "renormalisation"), ou plutôt pour les englober dans un petit nombre de quantités observables, par essence finies (voir le cours de théorie des champs). Ces méthodes permettent de prédire par exemple la valeur du Lamb shift avec une grande précision, valeur qui coïncide avec celle mesurée par toutes les expériences de métrologie de l'hydrogène faites jusqu'à ce jour (la précision actuelle sur les mesures de fréquences de Bohr de l'hydrogène est de l'ordre de 10^{-13} !)

5. Valeur du champ électrique dans un état quantique

5.1 Champ en représentation de Heisenberg

Nous nous sommes placés jusqu'à présent en *représentation de Schrödinger*, dans laquelle les opérateurs sont indépendants du temps, et les états variables dans le temps. L'analogie avec la description classique est plus facile si on se place en *représentation de Heisenberg*, dans laquelle les opérateurs sont variables, et les états indépendants du temps. On passe de l'une à l'autre par la transformation :

$$\widehat{O}_H = e^{\widehat{H}t/\hbar} \widehat{O}_S e^{-\widehat{H}t/\hbar}$$

On a alors :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{O}_H = [\widehat{O}_H, \widehat{H}]$$

Il nous suffit de connaître l'expression de l'opérateur d'annihilation en représentation de Heisenberg, qui évolue selon l'équation :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{a}_l = [\widehat{a}_l, \widehat{H}] = \left[\widehat{a}_l, \hbar \omega_l \left(\widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \right]$$

On utilise l'expression suivante du commutateur :

$$[\widehat{a}, f(\widehat{a}^+)] = f'(\widehat{a}^+)$$

pour en déduire :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a}_l = \hbar \omega_l \hat{a}_l$$

et finalement :

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i\omega_l t}$$

avec : $\hat{a}_l(0) = (\hat{a}_l)_S = \hat{a}_l$. On retrouve la dépendance temporelle qui était celle de la quantité classique équivalente.

On en déduit l'expression de $\widehat{E}_H^{(+)}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{\widehat{E}}_H^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_l i \mathcal{E}_l \vec{\varepsilon}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} \hat{a}_l$$

L'opérateur champ (hermitien) s'écrivant :

$$\widehat{\vec{E}}_H(\vec{r}, t) = \widehat{\vec{E}}_H^{(+)} + \left(\widehat{\vec{E}}_H^{(+)} \right)^\dagger$$

Toutes ces expressions sont formellement identiques à celles des grandeurs classiques équivalentes. Mais les opérateurs quantiques ne commutent pas nécessairement. On a évidemment :

$$\left[\widehat{E}_i^{(+)}(\vec{r}, t), \widehat{E}_j^{(+)}(\vec{r}', t') \right] = 0$$

où $(i, j) = (x, y, z)^2$. Mais ce n'est pas le cas pour l'opérateur hermitien $\widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t)$. On peut montrer que :

$$\left[\widehat{\vec{E}}_H(\vec{r}, t), \widehat{\vec{E}}_H(\vec{r}', t') \right] \neq 0$$

si $|\vec{r} - \vec{r}'| = c|t - t'|$. L'expression exacte du commutateur est compliquée. On la trouvera par exemple dans la référence (1).

La conséquence essentielle de cette non-commutation est qu'on ne peut donc pas trouver d'état du champ qui soit état propre de l'opérateur champ électrique pour tout \vec{r} et pour tout t : un état propre pour une valeur de (\vec{r}, t) donnée ne le sera plus un peu plus loin, ou un peu plus tard. En théorie quantique, le champ électrique est ainsi une quantité qui, *dans tout état quantique*, présente des fluctuations d'origine quantique lorsqu'on varie

\vec{r} ou t . Le vide en est un exemple : l'existence des fluctuations du vide est due au fait que dans cet état, on ne peut pas avoir :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv 0 \quad \forall \vec{r}, \forall t$$

On voit ainsi que les règles de commutation quantique imposent des contraintes sur les résultats des mesures effectuées sur les champ électromagnétiques, dont les conséquences physiques seront détaillées dans le cours d'optique quantique du deuxième semestre.

5.2 Cas de l'état nombre ou état de Fock

Revenons à l'état propre de l'hamiltonien :

$$|\Psi\rangle = |n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$$

que l'on appelle souvent *état nombre*, ou *état de Fock*. Comme $\hat{a}_l |\Psi\rangle = \sqrt{n_l} |n_1, \dots, n_l - 1, \dots\rangle$, on a :

$$\langle \Psi | \hat{a}_l | \Psi \rangle = 0$$

Il en résulte que :

$$\langle \Psi | E(\vec{r}, t) | \Psi \rangle = 0 \quad \forall t \quad \forall \vec{r}$$

Le champ électrique est donc nul en moyenne dans les états nombre, comme dans un champ ayant une cohérence temporelle nulle. Il s'avère que ces états sont très pratiques pour les calculs, car ils sont simples à manipuler mathématiquement, mais ce sont des états aux propriétés étranges (on parle d'*états non-classiques*), car ils conduisent à des effets physiques souvent très différents de ceux prévus par l'électromagnétisme classique. Ils sont en outre *très difficiles* à produire (sauf $n = 0$) : l'état nombre $n_l = 1$, comme nous le verrons ultérieurement, est produit par l'émission spontanée d'un seul atome. Il s'agit d'une procédure expérimentale généralement compliquée, mais courante maintenant. Quelques rares expériences ont produit des états à deux photons. Des états de Fock avec n_l très grand n'ont jamais été produits (voir cours de deuxième semestre)

Il existe aussi des états nombres "multimodes", c'est à dire des états propres du *nombre total* de photons

$$\hat{N} = \sum_l \hat{N}_l$$

Les états de Fock sont de tels états, mais ils ne sont pas les seuls. Par exemple les états :

$$|\Psi\rangle = \sum c_{n_1 \dots n_l} |n_1 \dots, n_l\rangle$$

avec $\sum n_l = N$ sont états propres de \hat{N} avec la valeur propre N , mais pas séparément de chaque \hat{N}_l . De tels états ne sont donc pas stationnaires. Un exemple important est l'état à un photon multimode :

$$|\Psi_1\rangle = \sum_l c_l |0 \dots 1 \dots\rangle$$

où le 1 est dans le mode courant l . Cet état décrit une sorte de "paquet d'onde à un photon", proche de l'idée qu'on peut se faire du corpuscule "photon" se déplaçant à la vitesse de la lumière. mais la forme spatio-temporelle de ce paquet d'onde, et donc du "photon", n'est pas intrinsèque : elle dépend du choix des c_l .

Il n'existe pas d'état dans lequel le champ (et donc le photon) est localisé exactement en un point de l'espace. En effet un tel état serait caractérisé par un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

soit dans l'espace réciproque :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}$$

qui n'est pas un champ transverse (\vec{E}_0 n'est pas orthogonal à \vec{k} pour tout \vec{k}). En d'autres termes, la fonction delta ne fait pas partie du sous-espace des champs vectoriels transverses. Le paquet d'onde du photon peut être localisé dans des volumes d'autant plus faibles qu'on superpose des modes de longueurs d'onde de plus en plus petites, mais il ne peut pas être rigoureusement localisé en un point (classiquement, on ne peut pas focaliser un champ en un point). Comme il n'y a pas d'état localisé $|\vec{r}_0\rangle$, il n'y a donc pas de fonction d'onde du photon à proprement parler $\langle \vec{r}_0 | \Psi \rangle$.

5.3 Cas d'un état quelconque

Considérons l'état général :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_l} c_{n_1 \dots n_l} |n_1 \dots, n_l, \dots\rangle$$

On voit facilement que :

$$\langle \Psi | \widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) | \Psi \rangle = \sum_l \alpha_l \vec{\varepsilon}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} + \text{comp.conj.}$$

où le nombre complexe α_l est donné par :

$$\alpha_l = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_l} \dots i \sqrt{n_l} C_{n_1 \dots n_l} C_{n_1 \dots n_l - 1}^* \dots \mathcal{E}_l$$

(Il vaut zéro pour un état nombre). Il en résulte que, dans n'importe quel état quantique, *la valeur moyenne du champ évolue comme le champ classique*. On ne peut donc distinguer les différents états quantiques, dans cet immense espace de Hilbert, sur la valeur moyenne qu'ils donnent au champ. Ce qui les différencie sont :

- les variances, c'est-à-dire les *fluctuations quantiques autour de la valeur moyenne*, $\Delta E(\vec{r}, t)$, ainsi que les moments d'ordre supérieur de la distribution de probabilité ;

- les corrélations entre deux mesures différentes $\langle \widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) \widehat{\vec{E}}(\vec{r}', t') \rangle$, et les corrélations d'ordre supérieur, entre plus de deux observables.

5.4 Cas de l'état cohérent

L'état du champ appelé état cohérent (ou état quasi-classique, ou état de Glauber) est l'état qui donne aux mesures effectuées sur une champ leurs valeurs "les plus classiques". Ce sont en particulier des états pour lesquels les corrélations

$$\langle \widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) \widehat{\vec{E}}(\vec{r}', t') \rangle_{sym} - \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle \langle \vec{E}(\vec{r}', t') \rangle$$

sont minimales pour toutes valeurs de \vec{r}, \vec{r}', t, t' .

État cohérent monomode : On se restreint tout d'abord au sous-espace correspondant aux états d'un mode de 1 donné.

Par définition, *un état cohérent est un état propre de \hat{a}_l* :

$$\hat{a}_l |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

Ses propriétés seront étudiées en détail en TD. On montre que le spectre des valeurs propres α est l'ensemble des nombres complexes, et qu'il a la décomposition suivante sur la base des états de Fock :

$$|\alpha\rangle = \left(\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |0\dots 0, n, 0\dots\rangle \right) e^{-|\alpha|^2/2}$$

où n est dans le mode l uniquement. Le vide est en particulier l'état cohérent de valeur propre 0. On montre aisément que :

$$\langle \widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) \widehat{\vec{E}}(\vec{r}', t') \rangle_{sym} - \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle \langle \vec{E}(\vec{r}', t') \rangle = \mathcal{E}_l^2$$

où $\vec{E}_l(\vec{r}, t)$ est la restriction au mode l de l'opérateur champ électrique. En particulier :

$$\Delta^2 E_l = \mathcal{E}_l^2$$

La variance des fluctuations du champ électrique dans un état cohérent est indépendante de $\langle E_l \rangle$. Elle est égale aux fluctuations du vide dans ce mode. Pour des champs intenses ΔE_l devient négligeable en valeur relative devant $\langle E_l \rangle$. On se trouve alors à la limite de l'électromagnétisme classique, où on peut négliger les fluctuations quantiques.

Rappelons certaines propriétés des états cohérents, dont on trouvera la démonstration dans les références données au début de ce cours :

- On peut les construire à partir du vide :

$$|\alpha\rangle = \widehat{D}(\alpha) |0\rangle$$

avec

$$\widehat{D}(\alpha) = \exp [\alpha \widehat{a}_l^+ - \alpha^* \widehat{a}_l]$$

$\widehat{D}(\alpha)$, équivalent de l'opérateur de translation $= e^{-i\widehat{p} \cdot \frac{x_0}{\hbar}}$ pour l'oscillateur harmonique matériel, est appelé *opérateur de déplacement*. On peut montrer en effet que :

$$\widehat{D}^\dagger(\alpha) \widehat{a} \widehat{D}(\alpha) = \widehat{a} + \alpha$$

- On peut décomposer tout état sur les états cohérents. On a en effet la relation de fermeture :

$$\frac{1}{\pi} \iint |\alpha\rangle \langle \alpha| d(Re\alpha) d(Im\alpha) = 1$$

qui permet d'écrire :

$$|\Psi\rangle = \int f(\alpha) |\alpha\rangle d^2\alpha$$

mais cette décomposition n'est pas unique : l'ensemble des états cohérents est "sur-complet".

- Les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux :

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} - \alpha'\alpha^{*}\right)$$

et :

$$|\langle\alpha'|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}$$

Ils sont cependant pratiquement orthogonaux dès que $|\alpha - \alpha'| > 2$

Les états cohérents sont les états les plus faciles à produire expérimentalement :

- Les sources classiques de rayonnement électromagnétique (antenne, source micro-onde, ...) produisent ce type d'état ;

- La plupart des lasers, lorsqu'ils fonctionnent très au dessus du seuil, produisent ce type d'état ;

- Toutes les sources habituelles (lampes thermiques ou à décharge) produisent des champs qu'on peut considérer comme des *superpositions statistiques d'états cohérents* ;

- Un état lumineux quelconque très fortement atténué se rapproche d'un état cohérent.

État cohérent multimode : Les états cohérents $|\Psi_{coh}\rangle$ sont alors définis comme *états propres de l'opérateur champ complexe* $\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$, c'est-à-dire :

$$\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) |\Psi_{coh}\rangle = \left\langle \widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right\rangle |\Psi_{coh}\rangle$$

Les états produits tensoriels $|\alpha_1, \dots, \alpha_l, \dots\rangle$ sont des cas particuliers d'états cohérents multimodes, mais il y en a beaucoup d'autres. Par exemple, l'état :

$$|\Psi_{coh}\rangle = \sum_l c_l |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes \left| \frac{E_0}{\mathcal{E}_l} \right\rangle \otimes \dots$$

où $\left| \frac{E_0}{\varepsilon_l} \right\rangle$ est un état cohérent monomode dans le mode l , est état propre de $\overrightarrow{E^{(+)}}$ avec la valeur propre E_0 .

La variance du champ dans les états cohérents multimodes est donnée par :

$$\Delta^2 E = \sum_l \varepsilon_l^2$$

Elle est égale à celles des fluctuations du vide multimode, et ce quelle que soit la valeur moyenne du champ.

4. INTERACTION ENTRE ATOME ET CHAMP QUANTIQUE

Nous avons maintenant tous les éléments pour résoudre le problème de l'interaction matière-rayonnement dans toute sa généralité. Dans ce chapitre, nous allons nous restreindre toutefois au cas où le système est seulement électromagnétique : le système champ + atome sera pris isolé, et les phénomènes de relaxation dus aux collisions entre atomes, ou à l'interaction avec le réseau cristallin, seront négligés.

1. Hamiltonien d'interaction

1.1 Hamiltonien d'interaction classique en jauge de Coulomb

On trouvera dans la référence ([?]) un exposé détaillé de ces points. Considérons un ensemble de charges q_i de masses m_i , de coordonnées \vec{r}_i et de vitesses \vec{v}_i dépendant du temps. L'énergie totale du système atome + charges s'écrit de manière générale :

$$H = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} d^3r (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

Le système étant isolé, H est une *constante du mouvement*. La jauge de Coulomb permet de séparer naturellement dans les champs une partie longitudinale "électrostatique" liée aux charges et une partie transverse liée aux champs de rayonnement. On peut écrire finalement :

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i - q_i \vec{A}(\vec{r}_i, t) \right)^2 + V_{coulomb} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} d^3r \left(\left(\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)^2 + c^2 (\text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t))^2 \right)$$

1.2 Hamiltonien "semi-quantique"

On fait encore une fois la moitié du chemin, mais cette fois l'autre : (\vec{p}, \vec{q}) restent classiques, mais les quantités électromagnétiques (potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}_i, t)$ et énergie du champ libre) deviennent des opérateurs quantiques fonction des opérateurs d'annihilation et de création de photons :

$$\widehat{H}_{SQ} = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i(t) - q_i \widehat{A}(\vec{r}_i, t) \right)^2 + V_{coulomb} + \sum_l \hbar\omega_l (\widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \frac{1}{2})$$

L'hamiltonien \widehat{H}_{SQ} est alors un opérateur agissant sur l'espace des seules variables du champ $\{|n_1, \dots, n_l, \dots|\}$. Ce type d'approche est utile quand on n'a pas affaire à des atomes isolés mais à des "antennes" produisant un courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ classique qui est non perturbé par l'émission et l'absorption de photons. Le terme $\sum_i \frac{q_i}{m_i} \vec{p}_i(t) \cdot \widehat{A}(\vec{r}_i, t)$ peut alors se mettre sous la forme de l'intégrale $\int \int \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \widehat{A}(\vec{r}, t)$, et l'hamiltonien s'écrit alors, en négligeant le terme quadratique en potentiel vecteur et en retirant l'énergie de la matière qui est constante :

$$\widehat{H}'_{SQ} = - \int \int \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \widehat{A}(\vec{r}, t) + \sum_l \hbar\omega_l (\widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \frac{1}{2})$$

Supposons par exemple que le courant source oscille à la fréquence ω . L'intégrale portant sur le courant, à l'approximation des grandes longueurs d'onde où $\vec{k}_l \cdot \vec{r} \ll 1$, s'écrit alors :

$$\widehat{H}_{SQ,int} = \sum_l (\widehat{a}_l^+ + \widehat{a}_l) (A_l e^{-i\omega t} + A_l^* e^{i\omega t})$$

où A_l est une constante qui décrit le recouvrement du mode avec la distribution du courant. On a donc affaire ici, comme dans le cas semi-classique développé précédemment, à un hamiltonien dépendant du temps, cette fois-ci à cause de la dépendance temporelle imposée du mouvement des charges, et non plus de celle du champ électromagnétique. Dans le cas d'une oscillation à la fréquence ω , on sait que cette dépendance temporelle va essentiellement induire des transitions vers des niveaux d'énergie distants de $\pm \hbar\omega$ du niveau initial. On peut donc restreindre l'évolution du champ à l'intérieur des modes de fréquence ω . Nous supposons de plus que la géométrie du courant

est telle qu'un seul de ces modes, indexé par l_0 est excité par les courants. L'hamiltonien semi-quantique s'écrit alors :

$$\widehat{H}_{SQ} = \hbar\omega\widehat{a}_{l_0}^+\widehat{a}_{l_0} + (\widehat{a}_{l_0}^+ + \widehat{a}_{l_0})(A_{l_0}e^{-i\omega t} + A_{l_0}^*e^{i\omega t})$$

Plaçons-nous en représentation d'interaction, ce qui a pour effet de tenir automatiquement compte de l'évolution libre de l'opérateur $\widehat{a}_{l_0}(t) = \widehat{a}_{l_0}e^{-i\omega t}$:

$$\widehat{H}_{SQ} = e^{i\widehat{H}_{libre}/\hbar}\widehat{H}_{SQ}e^{-i\widehat{H}_{libre}/\hbar}$$

où $\widehat{H}_{libre} = \hbar\omega\widehat{a}_{l_0}^+\widehat{a}_{l_0}$. On obtient :

$$\widehat{H}_{SQ} = \widehat{a}_{l_0}^+A_{l_0} + \widehat{a}_{l_0}A_{l_0}^* + \widehat{a}_{l_0}^+A_{l_0}^*e^{2i\omega t} + \widehat{a}_{l_0}A_{l_0}e^{-2i\omega t}$$

Nous allons négliger les deux derniers termes, "anti-résonnants", oscillant à des fréquences très élevées, par rapport aux deux premiers termes, qui sont indépendants du temps, et dont l'effet s'accumule au cours du temps (approximation séculaire). L'hamiltonien est alors indépendant du temps, et l'état du champ à l'instant t est connu quand on connaît son état $|\Psi_0\rangle$ à l'instant initial. Il s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i(\widehat{a}_{l_0}^+A_{l_0} + \widehat{a}_{l_0}A_{l_0}^*)t/\hbar}|\Psi_0\rangle$$

L'opérateur d'évolution en représentation d'interaction n'est autre que l'opérateur déplacement $\widehat{D}(\alpha_0(t))$ que nous avons introduit au moment de l'introduction des états cohérents, avec $\alpha_0(t) = -iA_{l_0}t/\hbar$. Si son état initial est le vide, le champ se trouve donc à tout instant dans un état cohérent, plus précisément dans l'état $|\alpha_0(t)\rangle$. Le champ électrique complexe dans cet état a pour valeur moyenne dans cet état :

$$\langle \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\omega A_{l_0} t}{2\epsilon_0 L^3} \vec{\epsilon}_{l_0} e^{i(\vec{k}_{l_0} \cdot \vec{r} - \omega_l t)}$$

En insérant l'expression exacte de A_{l_0} , il est facile de voir que la valeur moyenne du champ quantique est égale au champ qu'on calculerait directement à partir des équations de Maxwell. L'aspect quantique du champ rayonné par une source classique réside donc simplement dans ses fluctuations autour de la valeur moyenne, qui sont égales aux fluctuations du vide.

1.3 Hamiltonien quantique du système atome+champ

Il s'écrit :

$$\widehat{H} = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i - q_i \widehat{A}(\vec{r}_i) \right)^2 + V_{coulomb} + \sum_l \hbar\omega_l (\widehat{a}_l^\dagger \widehat{a}_l + \frac{1}{2})$$

On a maintenant un hamiltonien sur l'espace de Hilbert produit tensoriel de l'espace de Hilbert de l'atome par celui des états du champ, dont un vecteur quelconque de la base naturelle s'écrit :

$$|i\rangle \otimes |n_1, \dots, n_l, \dots\rangle = |i; n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$$

où $|i\rangle$ est un état stationnaire quelconque de l'atome. On voit que l'opérateur \widehat{p}_i n'agit que sur l'atome, et que les opérateurs $\widehat{a}_l^\dagger \widehat{a}_l$ n'agissent que sur le champ, alors que

$$\widehat{A}(\vec{r}_i) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_l L^3}} \vec{\varepsilon}_l \widehat{a}_l e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}_i} + \text{herm.conj}$$

agit sur les deux parties de l'espace de Hilbert. Si on développe l'expression, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \widehat{H}_{at} + \widehat{H}_{ray} + \widehat{H}_{int} \\ \widehat{H}_{at} &= \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V_{coulomb} & \widehat{H}_{ray} &= \sum_l \hbar\omega_l \left(\widehat{a}_l^\dagger \widehat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \\ \widehat{H}_{int} &= \widehat{H}_{i1} + \widehat{H}_{i2} \\ \widehat{H}_{i1} &= - \sum_i \frac{q_i}{m_i} \widehat{p}_i \cdot \widehat{A}(\vec{r}_i) & \widehat{H}_{i2} &= \sum_i \frac{q_i^2}{2m_i} \widehat{A}(\vec{r}_i)^2 \end{aligned}$$

1.4 Hamiltonien dipolaire électrique

A la limite des grandes longueurs d'onde, où λ est très grand devant les dimensions de l'atome, $\vec{r}_{electron} \approx \vec{R}_{noyau}$. On peut alors faire une transformation unitaire sur l'hamiltonien pour obtenir le hamiltonien dipolaire électrique, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \widehat{H}'_{at} + \widehat{H}_{ray} + \widehat{H}'_{int} \\ \widehat{H}'_{int} &= -\widehat{D} \cdot \widehat{E}(\vec{R}_{noyau}) \\ \widehat{H}'_{at} &= \widehat{H}_{at} + E_{dip} \end{aligned}$$

E_{dip} étant un terme d'énergie propre constant, qui peut être retiré de l'énergie totale. Si on ne s'intéresse pas au mouvement global de l'atome, \vec{R}_{noyau} est fixe et pris pour origine des coordonnées. Il reste alors :

$$\widehat{H}'_{int} = -\widehat{\vec{D}} \cdot \widehat{\vec{E}}(\vec{r} = \vec{0})$$

Le champ électrique est alors un opérateur n'agissant que sur les états du champ. Si en revanche l'atome n'est pas immobile, $\widehat{\vec{E}}(\vec{R}_{noyau})$ agit aussi sur les variables externes : il peut y avoir mouvement global dû à l'interaction matière-rayonnement (ralentissement, refroidissement), qui sera étudié en cours d'option du deuxième semestre.

1.5 Considérations générales

- A la différence de l'approche du chapitre 2, l'atome n'est pas seul à évoluer, en présence d'un champ appliqué de l'extérieur et qui n'est pas affecté par l'interaction : les deux systèmes sont affectés par l'interaction et sont susceptibles d'évoluer.

- Les deux hamiltoniens que nous venons d'introduire sont *indépendants du temps*, puisqu'ils décrivent un système isolé. Il y a là une très importante différence par rapport à l'hamiltonien semi-classique et l'hamiltonien semi-quantique, qui dépendaient sinusoidalement du temps. Le système atome-champ possède donc des *énergies propres* E_λ et des *états propres* $|\Psi_\lambda\rangle$, qui s'écrivent :

$$|\Psi_\lambda\rangle = \sum C_{i;n_1,\dots,n_l,\dots} |i; n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$$

Un tel vecteur ne peut en général pas se factoriser :

$$|\Psi_\lambda\rangle \neq |\Psi_{at}\rangle \otimes |\Psi_{rayt}\rangle$$

Il contient donc de *très fortes corrélations quantiques* entre l'atome et le champ. Si on se place du point de vue de l'atome, on dira que l'atome est en quelque sorte "habillé" par le champ qui l'entoure et avec lequel il interagit. E_λ est alors l'énergie de l'atome habillé.

- S'il y a des spins, il ne faut pas oublier de rajouter les termes d'interaction correspondants :

$$\sum_i g_i \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}_i \cdot \widehat{\vec{B}}(\vec{R}_{noyau})$$

où g_i est le facteur gyromagnétique (2 pour l'électron), et \vec{S}_i l'opérateur spin de l'électron.

2. Processus d'interaction

2.1 Position du problème

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ il n'y a pas de couplage entre l'atome et le champ. Les états stationnaires du système sont alors les états : $|i; n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$. On "branche" ensuite l'interaction, et on cherche à savoir dans quel état se trouve le système au bout d'un certain temps T . Comme on ne veut faire qu'une exploration qualitative des différents processus possibles, on adoptera ici une approche perturbative, et on envisagera successivement les deux premiers ordres du développement perturbatif.

- Au premier ordre de la théorie des perturbations, la probabilité de transition de l'état atomique i vers l'état f , $P_{i \rightarrow f}$ est proportionnelle à l'élément de matrice $\left| \langle i | \widehat{H}_{int} | f \rangle \right|^2$, avec la contrainte :

$$|E_i - E_f| < \frac{2\pi\hbar}{T}$$

car l'hamiltonien est indépendant du temps : les transitions se font à énergie d'autant plus constante que le temps d'interaction est grand .

-Au deuxième ordre de la théorie des perturbations, la probabilité de transition $P_{i \rightarrow f}$ est proportionnelle à :

$$\left| \sum_r \langle i | H_{int} | r \rangle \frac{1}{E_i - E_r} \langle r | H_{int} | f \rangle \right|^2$$

où $|r\rangle$ est un niveau "relais" quelconque de l'atome, toujours avec la contrainte de quasi-conservation de l'énergie : $|E_i - E_f| < \frac{2\pi\hbar}{T}$. Notons que le processus est d'autant plus efficace que $E_r \approx E_i = E_f$.

2.2 Processus du premier ordre

On va utiliser ici l'hamiltonien $\vec{E} \cdot \vec{D}$, soit $\widehat{H}_{int} = -\vec{E}(\vec{0}) \cdot \widehat{\vec{D}}$, et se placer dans le cas simple d'un atome à un électron, supposé immobile à l'origine des coordonnées et de masse infinie. On a alors

$$\widehat{H}_{int} = -i \sum_l \mathcal{E}_l \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{\varepsilon}_l (\widehat{a}_l - \widehat{a}_l^+)$$

en supposant $\vec{\varepsilon}_l$ réel. Rappelons que, dans un atome, les seuls éléments de matrice du dipôle éventuellement non nuls sont les éléments non diagonaux $\langle a | \widehat{D} \cdot \vec{\varepsilon}_l | b \rangle$. L'état $|a; n_1, \dots, n_l, \dots\rangle$ est donc connecté à tous les états $|b; n_1, \dots, n_l \pm 1, \dots\rangle$ pour toutes les valeurs de l avec la contrainte

$$E_a + \sum_{l'} n_l \hbar \omega_l = E_b + \sum_{l'} n_{l'} \hbar \omega_{l'} \pm \hbar \omega_l$$

- Dans le cas du signe moins, on a $E_b = E_a + \hbar \omega_l$. Il y a *excitation* de l'atome, avec annihilation d'un photon dans le mode l . L'élément de matrice correspondant est $\sqrt{n_l} \langle b | \widehat{D} \cdot \vec{\varepsilon}_l | a \rangle$. La probabilité du processus est donc proportionnelle à n_l , c'est-à-dire à l'énergie du champ : il s'agit du processus d'*absorption*, qui obéit ainsi à l'équation d'Einstein du chapitre 1.

- Dans le cas du signe plus, on a $E_b = E_a - \hbar \omega_l$. Il y a *désexcitation* de l'atome, avec création d'un photon dans le mode l . L'élément de matrice correspondant est $\sqrt{n_l + 1} \langle b | \widehat{D} \cdot \vec{\varepsilon}_l | a \rangle$. La probabilité du processus est donc proportionnelle à $n_l + 1$. Si $n_l + 1$ est grand, la probabilité de ce processus d'*émission stimulée* est aussi proportionnelle à l'énergie du champ, et obéit aussi à l'équation d'Einstein du chapitre 1. Mais ce processus est possible même si $n_l = 0$, donc dans le vide : il s'agit alors du processus d'*émission spontanée*, que nous étudierons plus en détail dans le paragraphe suivant.

La probabilité de transition pour ces différents processus est aussi proportionnelle à l'élément de matrice atomique $\left| \langle b | \widehat{D} \cdot \vec{\varepsilon}_l | a \rangle \right|^2$, qui peut être nul entre certains niveaux atomiques. Il n'y a pas de transition possible dans ce cas au premier ordre de perturbation. Il y a donc des *règles de sélection*, dépendant de la polarisation du champ $\vec{\varepsilon}_l$, qui sont les mêmes qu'en théorie semi-classique, et que nous rappelons ici :

- cas de la polarisation π (linéaire parallèle à l'axe Oz de quantification des sous-niveaux Zeeman)

$$\Delta m = 0 \quad \Delta l = \pm 1 \quad \Delta J = 0 \pm 1$$

- cas de la polarisation σ^+ (circulaire directe dans le plan xOy)

$$\Delta m = 1 \quad \Delta l = \pm 1 \quad \Delta J = 0 \pm 1$$

- cas de la polarisation σ^- (circulaire inverse dans le plan xOy)

$$\Delta m = -1 \quad \Delta l = \pm 1 \quad \Delta J = 0 \pm 1$$

2.3 Processus du deuxième ordre

Le terme d'interaction $\vec{E} \cdot \vec{D}$ fait passer de l'état $|a; n_1 \dots n_l, \dots\rangle$ à l'état intermédiaire $|b; n_1 \dots n_l \pm 1, \dots\rangle$, puis à l'état final $|c; n_1 \dots n_l \pm 1, n_{l'} \pm 1, \dots\rangle$, ou bien à l'état $|c; n_1 \dots, n_l \text{ ou } n_l \pm 2, \dots\rangle$, avec la contrainte :

$$E_a = E_c \pm \hbar * \omega_l \pm \hbar \omega_{l'}$$

(avec éventuellement $l = l'$) et la condition :

$$\langle a | \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{\varepsilon}_l | b \rangle \langle b | \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{\varepsilon}_{l'} | c \rangle \neq 0$$

Remarquons qu'on peut maintenant avoir $c = a$. Il y a donc deux types de processus :

- Les processus *élastiques*, où $|c\rangle = |a\rangle$. Il y a conservation de l'état atomique, et nécessairement $\omega_l = \omega_{l'}$. La transition s'effectue de l'état $|a; n_1 \dots, n_l, \dots\rangle$ à l'état $|a; n_1 \dots, n_l - 1, \dots, n_{l'} + 1, \dots\rangle$. Un photon disparaît, un autre apparaît de même énergie, mais de \vec{k}_l différent. Il s'agit d'un processus de *diffusion élastique*. La probabilité de transition est proportionnelle à $n_l(n_{l'} + 1)$. Il faut donc nécessairement qu'il y ait des photons dans l'état initial, mais on peut avoir $n_{l'} = 0$ pour le mode du photon émis. Il s'agit alors d'une *diffusion spontanée*. Dans le cas $n_{l'} \neq 0$, la diffusion, dite *stimulée*, est évidemment beaucoup plus efficace.

- Les processus *inélastiques*, où $|c\rangle \neq |a\rangle$ (avec $E_c \neq E_a$).

- Lorsque $E_a = E_c \pm 2\hbar\omega_l$, il y a *transition à deux photons*, soit en absorption, soit en émission. La probabilité de ces deux processus est respectivement proportionnelle à $n_l(n_l - 1)$ et $(n_l + 1)(n_l + 2)$. Par un raisonnement analogue aux précédents, on voit qu'il y a possibilité d'*émission spontanée à deux photons*, lorsque les règles de sélection interdisent l'émission spontanée à un photon : c'est le cas du niveau $2S_{1/2}$ de l'hydrogène. Pour ces processus à deux photons, on applique deux fois les règles de sélection. On a donc en particulier : $\Delta_l = 0, \pm 2$.

- Lorsque $E_a = E_c \pm (\hbar\omega_l + \hbar\omega_{l'})$, il y a transition à deux photons avec deux photons "inégaux", dont les caractéristiques sont très analogues au cas précédent.

- Lorsque $E_a = E_c + (\hbar\omega_l - \hbar\omega_{l'})$, la transition se fait de l'état $|a; n_1 \dots, n_l \dots\rangle$ à l'état $|c; n_1 \dots, n_l + 1, \dots, n_{l'} - 1\rangle$. Encore une fois, un photon apparaît un autre disparaît, mais de fréquence différente : il s'agit maintenant de *diffusion inélastique* ou *diffusion Raman*. Celle-ci peut être spontanée, si $n_l = 0$,

ou stimulée, si $n_l \neq 0$. Ce processus a une grande importance en spectroscopie.

3. Photodétection

Les observables que nous avons introduites jusqu'ici ne correspondent pas nécessairement à des observations réalisables dans l'état actuel de la technologie. En particulier le champ électrique d'une onde lumineuse, à cause de la très grande rapidité de son oscillation, n'est pas directement mesurable, alors que celui d'une onde radiofréquence, qui oscille beaucoup moins vite, est mesurable (jusqu'à des fréquences ν de l'ordre de 100GHz environ). Jusqu'à présent, on n'a pas mis au point d'"oscilloscope à champ optique", et on mesure seulement des quantités moyennées sur un grand nombre d'oscillations du champ optique :

- Les bolomètres, les pellicules photographiques ou l'oeil sont sensibles à l'énergie du champ, même très faible, avec une sensibilité qui dépend de la longueur d'onde et s'annule à l'extérieur d'une bande de longueur d'onde $\Delta\lambda$. Ces détecteurs, qualifiés de détecteurs "énergétiques", mesurent l'observable \hat{H} , plus précisément sa restriction aux modes inclus dans la bande de longueurs d'onde $\Delta\lambda$.

- D'autres photodétecteurs sont basés sur une transition d'un état discret vers un continuum sous l'effet du champ incident. Dans les photomultiplicateurs, le rayonnement incident ionise les atomes métalliques de la surface sensible. Les électrons ainsi libérés sont ensuite multipliés par un processus d'avalanche. Dans les photodiodes, le rayonnement incident crée des paires électrons trous dans la jonction entre deux semi-conducteurs dopés p et n. Dans les deux cas, le courant produit, $\langle i \rangle$, est en valeur moyenne proportionnel à la probabilité du processus par unité de temps, que l'on obtient par la règle d'or de Fermi. On peut faire la théorie complètement quantique de cette interaction. Si le rayonnement se trouve dans l'état $|\phi_R\rangle$, on trouve (voir référence 1) :

$$\langle i \rangle = \alpha \int_{S_{\text{détecteur}}} d^2r \langle \phi_R | \left(\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right)^+ \left(\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right) | \phi_R \rangle$$

α étant une constante de proportionnalité. Cette expression est l'analogie quantique de l'expression classique :

$$i = \alpha \int_{S_{\text{détecteur}}} d^2r |E^{(+)}(r, t)|^2$$

où $E^{(+)}(r, t)$ est le champ complexe classique. Dans ce cas aussi les détecteurs ne sont pas sensibles à tous les modes du champ électromagnétique, mais ont un domaine de détection dans une bande de longueurs d'onde donnée $\Delta\lambda$. Ces détecteurs lorsqu'ils ont une très petite surface, mesurent donc l'observable $\left(\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)\right)^+ \left(\widehat{E}^+(\vec{r}, t)\right)$, où la somme sur les opérateurs \widehat{a}_i ne s'étend que sur l'intervalle $\Delta\lambda$. C'est l'observable *photodétection au point \vec{r} et à l'instant t* , qui donne en définitive la meilleure idée de la "probabilité de présence" en \vec{r} du photon. Remarquons que si $|\phi_R\rangle = |0\rangle$, le signal du photodétecteur est nul : on ne peut pas détecter directement les fluctuations du vide.

Dans le cas où le photodétecteur a un rendement quantique égal à 1, c'est-à-dire que chaque photon incident produit à coup sûr une transition dans le photodétecteur, le flux numérique de photons est égal au flux numérique d'électrons. On montre facilement que la constante α vaut dans ce cas :

$$\alpha = \frac{2q\varepsilon_0 c}{\hbar\omega_0}$$

où ω_0 est la pulsation correspondant au centre de la bande $\Delta\lambda$. L'observable photodétection $\left(\widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)\right)^+ \left(\widehat{E}^+(\vec{r}, t)\right)$ permet alors de déterminer non seulement la valeur moyenne du photocourant mais aussi sa variance ainsi que les corrélations quantiques spatiales ou temporelles des photocourants ([?]).

Deuxième partie

QUELQUES PHÉNOMÈNES DE L'OPTIQUE
QUANTIQUE

La première partie de ce cours nous a permis d'introduire tous les outils nécessaires pour comprendre et étudier un certain nombre de phénomènes intéressants qui apparaissent dans l'interaction matière-lumière. Pour les traiter, il faut utiliser à chaque étape le traitement le plus approprié, qui n'est pas forcément le plus sophistiqué, mais celui qui permet d'aboutir le plus rapidement possible au résultat. De même qu'en mécanique on utilise à juste titre l'équation de Newton pour décrire le mouvement d'une boule de billard et non pas les équations relativistes, on utilisera le modèle de Lorentz pour décrire l'interaction d'un rayonnement de faible intensité, loin de toute résonance, avec la matière, et non pas le traitement complètement quantique. Mentionnons toutefois que l'approche complètement quantique permet d'avoir des images physiques simples de nombreux phénomènes, en termes d'absorption ou d'émission de photons, même si la théorie semi-classique permet de calculer avec une très bonne précision ces phénomènes.

5. ÉMISSION SPONTANÉE

Il s'agit d'un phénomène très important de l'optique quantique, facile à observer, mais pour lequel aucune explication satisfaisante en termes de champs classiques n'a pu être trouvée. Il est donc nécessaire pour traiter ce phénomène de recourir à une théorie complètement quantique de l'interaction atome-champ.

1. Généralités

On part d'un atome dans l'état excité $|b\rangle$ en présence du vide. L'état initial, qui est donc $|b; 0\rangle$, est couplé par le terme d'interaction \widehat{H}'_{int} aux états $|a; \dots, 1_l, \dots\rangle$: il y a émission d'un photon dans un mode quelconque avec la contrainte $E_b = E_a + \hbar\omega_l$, c'est-à-dire $\omega_l = \omega_0$. La fréquence du photon est donc la fréquence de Bohr de la transition. Cependant, la polarisation du mode n'est a priori pas fixée, et les angles polaires θ et ϕ définissant la direction du vecteur \vec{k}_l , donc la direction d'émission du photon spontané, varient continûment. Il y a donc un continuum d'états finaux possibles.

2. Approche perturbative

Pour des temps pas trop longs après $t = 0$, on peut appliquer la règle d'or de Fermi : la probabilité de transition par unité de temps $d\Gamma_{sp}$ d'émission spontanée dans une direction Ω définie par les angles θ, ϕ , à $d\Omega$ près, vaut donc :

$$d\Gamma_{sp} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle b; 0 | \widehat{\vec{E}} \cdot \widehat{\vec{D}} | a \dots 1_l \dots \rangle \right|^2 \rho(E = \hbar\omega_0, \Omega)$$

où $\rho(E, \Omega)$ est la densité des modes du champ dont les vecteurs d'onde \vec{k}_l correspondent à l'énergie E à dE près, et pointent dans la direction Ω à $d\Omega$ près.

L'élément de matrice vaut :

$$\mathcal{E}_l^2 \left| \langle b | \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{\varepsilon}_l | a \rangle \right|^2$$

Sa valeur exacte dépend du choix des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Si on prend par exemple un état initial S ($|a\rangle = |l=0, m=0\rangle$), et un état final P avec $m=0$ ($|b\rangle = |l=1, m=0\rangle$), on peut montrer que :

$$\left| \langle b | \widehat{\vec{D}} \cdot \vec{\varepsilon}_l | a \rangle \right|^2 = d_{ab}^2 (\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_l)^2$$

où \vec{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe Oz .

La densité d'état dans l'espace des \vec{k} est uniforme et vaut $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$. Par un calcul déjà vu en thermodynamique statistique, on en déduit :

$$d\rho(E, \Omega) = \frac{dN}{dE} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{E^2}{(\hbar c)^3} d\Omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega_0^2}{\hbar c^3} d\Omega$$

Elle est indépendante de Ω .

On obtient finalement l'expression suivante de la probabilité d'émission spontanée d'un photon de polarisation $\vec{\varepsilon}_l$ dans la direction (Ω) :

$$\frac{d\Gamma_{sp}}{d\Omega} = \frac{\omega_0^3 d_{ab}^2 (\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_l)^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar c^3}$$

où $d_{ab} = q \langle b | z | a \rangle$. La dépendance angulaire et en polarisation de l'émission spontanée est contenue dans le facteur $(\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_l)^2$: sa polarisation a donc nécessairement une composante parallèle à l'axe Oz , et l'émission est maximale lorsque le photon est émis dans le plan xOy , et nulle pour une émission le long de l'axe Oz .

Pour obtenir la probabilité totale Γ_{sp} , il faut sommer sur les polarisations et les directions d'émission. Puisque $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ et $\frac{\vec{k}}{k}$ forment un trièdre, on a :

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_1)^2 + (\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 = 1 - \left(\vec{e}_z \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)^2 = \sin^2 \theta$$

On en déduit :

$$\Gamma_{sp} = \int d\Omega \frac{\omega_0^3 d_{ab}^2 \sin^2 \theta}{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar c^3}$$

Comme $\int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3}$, on a finalement :

$$\Gamma_{sp} = \frac{\omega_0^3 d_{ab}^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

Dans le cas où ω_0 est dans le domaine optique ($\lambda = 0,6\mu m$), et pour un élément de matrice dipolaire électrique valant $0,5 \cdot 10^{-10} m \times q$, Γ_{sp} vaut environ $3 \times 10^8 s^{-1}$. Un temps typique d'émission spontanée dans ces conditions est donc $T_{sp} = \Gamma_{sp}^{-1} \sim 3 \times 10^{-9} s$. D'autre part on voit que Γ_{sp} est proportionnel, toutes choses égales d'ailleurs, à ω_0^3 . Le taux d'émission spontanée augmente donc rapidement avec la fréquence du champ émis. Si $\frac{\omega_0}{2\pi} \sim 1 GHz$ (niveaux hyperfins), $\Gamma_{sp} \sim 10^{-6} s^{-1}$, donc T_{sp} est pratiquement infini. En revanche, si $\frac{\omega_0}{2\pi}$ est très grand, (domaine des UV ou des rayons X), l'émission spontanée est extrêmement efficace : $\Gamma_{sp} \sim 10^{12} s^{-1}$. Le temps d'émission spontanée est alors de l'ordre de la picoseconde, voire de la femtoseconde.

3. Approche non perturbative de Wigner-Weisskopf

3.1 Fonction d'onde du système

Si à $t = 0$ le système est dans l'état $|b; 0\rangle$, il se trouve à tout instant ultérieur dans l'état :

$$|\Psi(t)\rangle = \gamma_0(t) |b; 0\rangle + \sum_l \gamma_l(t) |a; 1_l\rangle$$

où la somme s'étend a priori sur tous les modes (on a négligé ici toutes les possibilités de peuplement non-résonnant d'états du système comportant plusieurs photons). L'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\gamma_0}{dt} &= \hbar\omega_0 \gamma_0 + \sum_l V_l \gamma_l \\ i\hbar \frac{d\gamma_l}{dt} &= \hbar\omega_l \gamma_l + \gamma_0 V_l^* \end{aligned}$$

avec :

$$V_l = \langle b; 0 | \widehat{H}'_{int} | a; 1_l \rangle = -i\mathcal{E}_l d_{ab} (\vec{\epsilon}_l \cdot \vec{e}_z)$$

En utilisant la condition initiale :

$$\gamma_0(0) = 1 \quad \gamma_e(0) = 0$$

la deuxième équation s'intègre formellement et donne :

$$\gamma_l(t) = \frac{V_l^*}{i\hbar} \int_0^t \gamma_0(t') e^{i\omega_l(t'-t)} dt'$$

Une fois cette valeur insérée dans la première équation, on a une équation intégral-différentielle exacte pour γ_0 :

$$i\hbar \frac{d\gamma_0}{dt} = -i\omega_0 \gamma_0 - \sum_l \frac{|V_l|^2}{\hbar^2} \int_0^t e^{i\omega_l(t'-t)} \gamma_0(t') dt'$$

Posons maintenant :

$$\gamma_0 = \alpha(t) e^{-i\omega_0 t}$$

et :

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_l |V_l|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_l)\tau}$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = - \int_0^t \mathcal{N}(\tau) \alpha(t - \tau) d\tau \quad (\tau = t - t')$$

La dérivée de α à l'instant t dépend des valeurs de α antérieures, sur un intervalle temporel égal à la largeur de la fonction $\mathcal{N}(\tau)$. On qualifie donc $\mathcal{N}(\tau)$ de *fonction de mémoire*. Son expression est :

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{d_{ab}^2}{\hbar^2} \left[\sum_l (\vec{\varepsilon}_l \cdot \vec{e}_z)^2 \mathcal{E}_l^2 e^{-i\omega_l \tau} \right] e^{i\omega_0 \tau} = \frac{d_{ab}^2}{\hbar^2} G(\tau) e^{i\omega_0 \tau}$$

où

$$G(\tau) = \langle 0 | (E_z^{(+)}(t)) (E_z^{(+)}(t - \tau))^{\dagger} | 0 \rangle$$

$G(\tau)$ est la *fonction d'autocorrélation des fluctuations de la composante selon Oz du champ dans le vide*. On retrouve que c'est bien la dynamique des fluctuations du vide qui est responsable de l'émission spontanée.

Lorsque $\tau = 0$ toutes les exponentielles valent 1 et s'ajoutent, alors que pour $\tau \neq 0$ on a un brouillage rapide des oscillations si $\omega_0 \neq \omega_l$. $\mathcal{N}(\tau)$ tend donc vers zéro si τ est supérieur au temps de corrélation des fluctuations du vide. Ce temps est très court, de l'ordre de quelques périodes optiques. Donc

si t est grand devant ce temps de corrélation (quelques femtosecondes), et en supposant que α varie peu sur ce temps de corrélation, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \approx - \left[\int_0^t \mathcal{N}(\tau) d\tau \right] \alpha(t) \approx - \left[\int_0^{+\infty} \mathcal{N}(\tau) d\tau \right] \alpha(t)$$

puisque $\mathcal{N}(\tau)$ est pratiquement nul entre t et l'infini. En posant :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{N}(\tau) d\tau = \frac{\Gamma}{2} + i\delta\omega$$

on obtient l'expression suivante des coefficients $\gamma_0(t)$ et $\gamma_l(t)$:

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-i(\omega_0 + \delta\omega)t} \\ \gamma_l(t) &= \frac{V_l^*}{i\hbar} \frac{1 - e^{-\Gamma t/2} e^{i(\omega_l - \omega_0 - \delta\omega)t}}{\frac{\Gamma}{2} - i(\omega_l - \omega - \delta\omega)} e^{-i\omega_l t} \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé une expression pour la fonction d'onde du système, valable, à la différence de l'approche perturbative, même aux temps longs.

3.2 Caractéristiques de la fonction d'onde du système

- La fonction d'onde n'est pas factorisable en général en une fonction d'onde atomique et un état du champ. Si on mesure grâce à un photodétecteur la présence d'un photon dans un mode l donné, l'état du système est projeté par la mesure sur l'état $|a; 1_l\rangle$. On sait alors *avec certitude* que l'atome est dans l'état inférieur : il y a *corrélation quantique totale entre l'atome et le champ*.

- La probabilité de trouver l'atome dans l'état b s'écrit :

$$P_b(t) = |\gamma_0(t)|^2 = e^{-\Gamma t}$$

On obtient bien une décroissance exponentielle de la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité, avec un temps moyen de décroissance égal à Γ^{-1} .

- Le coefficient de la fonction d'onde sur l'état excité oscille en $e^{-i(\omega_0 + \delta\omega)t}$, comme si l'énergie de l'atome était :

$$\overline{E}_b = \hbar(\omega_0 + \delta\omega)$$

La déstabilisation de l'état excité de l'atome liée à l'émission spontanée s'accompagne d'un déplacement de son énergie : c'est le Lamb-shift qui a été mentionné dans le chapitre précédent.

- Aux temps longs ($t \gg \frac{1}{\Gamma}$) $\gamma_0(t) = 0$ et $\gamma_1(t) \neq 0$. L'état du système est une superposition d'états $|a; 1_l\rangle$: il est donc, comme dans l'état initial, factorisable en une partie atomique et une partie de champ :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= |a\rangle \otimes |\psi_R\rangle \\ |\psi_R\rangle &= \sum_l \frac{V_l^*}{i\hbar} \frac{e^{-i\omega_l t}}{\frac{\Gamma}{2} - i(\omega_l - \omega - \delta\omega)} |1_l\rangle \end{aligned}$$

On a $\hat{N}|\psi_R\rangle = |\psi_R\rangle$. L'état du rayonnement $|\psi_R\rangle$ est un *état à un photon multimode*, du type que nous avons introduit dans le chapitre précédent. L'émission spontanée d'un atome unique est le moyen le plus simple de créer un état à un photon. Pour avoir un atome unique, on peut utiliser un jet atomique très dilué, ou bien isoler un atome ou un ion unique dans un piège. L'inconvénient de cette technique est que cet état n'existe que pour $t \gg \Gamma^{-1}$. Il faut donc "attendre" un temps long après l'excitation de l'atome pour être sûr d'avoir un état à un photon : on obtient ainsi une source peu intense de photons uniques.

- La probabilité de trouver le photon dans le mode l s'écrit :

$$P(1_l) = \frac{|V_l|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega_l - \omega_0 - \delta\omega)^2}$$

Elle est importante uniquement dans une bande de pulsations de largeur Γ autour de $E_b + \delta\omega$. Cette propriété est une nouvelle preuve que l'énergie du niveau b est déplacée en $\bar{E}_b = E_b + \delta\omega$, et que le niveau acquiert du fait de l'émission spontanée une largeur Γ liée à sa durée de vie finie. Cette probabilité est enfin proportionnelle à $(\vec{\varepsilon}_l \cdot \vec{\varepsilon}_z)^2$, qui varie selon l'angle d'émission : on obtient ainsi le diagramme angulaire de l'émission spontanée.

- L'apparition dans la solution d'exponentielles décroissantes et non plus seulement oscillantes pose le problème de l'*irréversibilité* d'un tel processus, pourtant déduit de l'équation de Schrödinger dont on sait qu'elle décrit des phénomènes réversibles. En fait, malgré les apparences, le processus d'émission spontanée est réversible : si on part à $t = 0$ du système dans l'état $\Psi^*(T_1)$ où $\Psi(t)$ est la solution complète exacte de Schrödinger, alors il est facile de voir qu'on se retrouve dans l'état $|b; 0\rangle$ après un laps T_1 . L'évolution inverse de celle de la désexcitation d'un niveau atomique excité en présence du vide est donc possible dans le cadre de cette approche. Néanmoins, cet état initial est *difficile à produire*, car il faut créer un état compliqué avec les bons

facteurs de phase pour que l'évolution aboutisse exactement à l'état excité. Cet état est donc moins fréquemment rencontré, *moins "probable"*, que l'état $|b; 0\rangle$. On voit que, comme en thermodynamique statistique, l'irréversibilité est encore une fois liée à une question de probabilité.

3.3 Valeurs de Γ et $\delta\omega$

On a vu que :

$$\frac{\Gamma}{2} + i\delta\omega = \frac{1}{\hbar^2} \sum_l \int_0^{+\infty} |V_l|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_l)\tau} d\tau$$

On utilise la relation :

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega t} = \pi\delta(t) + iPP\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

où PP est la partie principale.

- Pour la partie réelle de cette expression, on a :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_l \delta(\omega_0 - \omega_l) |V_l|^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int \rho(E) d(\hbar\omega_l) \delta(\omega_0 - \omega_l) |V_l|^2$$

où $\rho(E)$ est la densité d'états. On a finalement :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E = \hbar\omega_0) |V_l|^2$$

On retrouve l'expression de Γ_{sp} obtenue dans le cadre de la théorie perturbative du paragraphe précédent. On raccorde donc bien les solutions aux temps courts et aux temps longs que l'on a trouvées successivement. Dans la suite, on utilisera la notation Γ_{sp} pour le taux de desexcitation spontanée aussi bien aux temps courts qu'aux temps longs.

- Pour la partie imaginaire de cette expression, $\delta\omega$ s'écrit :

$$\delta\omega = \frac{1}{\hbar} \int \rho(E = \hbar\omega) PP\left(\frac{|V_l|^2}{\omega_0 - \omega_l}\right) d\omega$$

Elle est divergente sous la forme simple qu'on obtient ici. Il faut faire un calcul plus précis sans utiliser l'approximation des grandes longueurs d'onde, tenir compte des modes relativistes et renormaliser proprement la théorie. On trouve alors une valeur du déplacement du niveau en accord avec les observations expérimentales.

4. Relaxation de l'atome par émission spontanée

On a pu trouver ici la fonction d'onde totale du système atome+champ, moyennant l'approximation dite de mémoire courte. On peut en déduire l'évolution de la seule partie atomique, en passant à la matrice densité et en faisant la trace partielle sur les variables de champ :

$$\rho_{ii'} = \sum_R \langle i; R | \rho | i'; R \rangle$$

où R est un état quelconque du rayonnement ($|0\rangle$ ou $|1_l\rangle$).

- En ce qui concerne les populations $\rho_{bb} = |\gamma_0|^2$ on obtient aisément l'équation d'évolution :

$$\frac{d}{dt}\rho_{bb} = -\Gamma_{sp}\rho_{bb} = -\frac{d}{dt}\rho_{aa}$$

- En ce qui concerne les cohérences atomiques, comme on a choisi ici de traiter le cas où il n'y a aucune cohérence atomique initiale (atome dans l'état excité), on ne peut pas déterminer directement leur évolution. Pour voir l'évolution des cohérences, il faut en fait partir à l'instant $t = 0$ d'un état du type :

$$(\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle) \otimes |0\rangle$$

qui va évoluer à un instant t quelconque, sachant que l'état $|a; 0\rangle$ n'est pas couplé de manière résonnante au rayonnement et donc n'évolue pas, en l'état :

$$\alpha |a; 0\rangle + \beta \left(\gamma_0(t) |b; 0\rangle + \sum_l \gamma_l(t) |a; 1_l\rangle \right)$$

Un calcul sans difficultés montre que la cohérence atomique vaut alors :

$$\rho_{ba} = \alpha^* \beta \gamma_0$$

Elle a ainsi la même évolution que γ_0 , et obéit donc à l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\rho_{ba} = \left(-\frac{\Gamma_{sp}}{2} - i\omega_0 - i\delta\omega \right) \rho_{ba}$$

On constate donc que *le taux de relaxation par émission spontanée des cohérences est la moitié du taux de relaxation des populations*, comme nous l'avions annoncé dans le chapitre 2.

Si on inclut le déplacement $\delta\omega$ dans l'énergie du niveau b ($\bar{E}_b = \omega_0 + \delta\omega$) et donc dans l'hamiltonien atomique, on peut finalement condenser les trois équations d'évolution pour les éléments de matrice de la matrice densité en une seule équation portant sur la matrice ρ elle-même :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{at}, \rho] - \frac{\Gamma_{sp}}{2} (\rho |b\rangle \langle b| + |b\rangle \langle b| \rho) + \Gamma_{sp} |a\rangle \langle b| \rho |b\rangle \langle a|$$

Cette équation, appelée forme de Lindblad de l'"équation pilote", est souvent utilisée dans les problèmes d'optique quantique. On remarquons qu'on peut aussi écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}_{at,ef}\rho - \rho\hat{H}_{at,ef}^\dagger) + \Gamma_{sp} |a\rangle \langle b| \rho |b\rangle \langle a|$$

où $\hat{H}_{at,ef}$ est un hamiltonien atomique effectif, non hermitien, qui s'écrit :

$$\hat{H}_{at,ef} = \begin{bmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b - i\frac{\hbar\Gamma_{sp}}{2} \end{bmatrix}$$

L'émission spontanée provoque l'apparition dans l'énergie des niveaux excités de l'atome d'une *partie imaginaire*, qui rend bien compte de son instabilité lorsqu'on l'introduit dans le facteur exponentiel d'évolution temporelle. Remarquons cependant que le phénomène de relaxation n'est pas décrit dans sa totalité par l'apparition de cette partie imaginaire, puisqu'il subsiste dans l'équation d'évolution un terme (dit "de saut quantique") qui ne peut pas se mettre sous cette forme.

6. INTERACTIONS QUASI-RÉSONNANTES DANS LES SYSTÈMES À DEUX NIVEAUX

On suppose le champ incident de fréquence ω proche d'une fréquence de Bohr ω_0 entre le niveau fondamental a et un niveau excité b . On suppose en outre que les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ ne sont pas dégénérés, et que les autres niveaux sont très éloignés. On peut alors faire l'approximation du système à 2 niveaux.

1. Description d'un système à deux niveaux par le vecteur de Bloch

1.1 Vecteur de Bloch

Dans l'espace de dimension 2 tout état du système atomique est décrit par une matrice densité ρ dans un espace de dimension 2, de trace égale à 1 et hermitienne. On a donc $\rho_{bb} = 1 - \rho_{aa}$ et $\rho_{ab} = \rho_{ba}^*$. ρ est donc défini par la donnée de trois paramètres réels et indépendants. On peut utiliser le *vecteur de Bloch* pour le représenter commodément dans un espace réel à trois dimensions. Ce vecteur a pour coordonnées u, v, w telles que

$$\begin{aligned}u + iv &= \rho_{ba} e^{i\omega_0 t} \\ w &= \frac{1}{2} (\rho_{bb} - \rho_{aa})\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz sur les éléments de la matrice densité impose que $u^2 + v^2 + w^2 \leq \frac{1}{4}$. On voit que la troisième coordonnée w est liée aux populations, et que u et v sont liés au dipole :

$$\langle \widehat{De^{-i\omega_0 t}} \rangle = Re \left(2 \vec{d} \rho_{ba} \right)$$

Si le système est dans un cas pur, il peut être décrit par une fonction d'onde

atomique qu'on peut toujours mettre sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |a\rangle + e^{-i\omega_0 t - i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |b\rangle$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ w &= -\frac{1}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Le point représentatif P du cas pur est sur la sphère de rayon $\frac{1}{2}$, alors qu'il est à l'intérieur de cette sphère dans le cas général. Les angles ϕ et θ introduits dans l'expression de la fonction d'onde sont donc les coordonnées polaires du point P. Plus précisément, comme l'évolution spontanée de l'état est $\rho_{ba} = \rho_{ba}(0) e^{-i\omega_0 t}$, cette évolution a été enlevée par le facteur $e^{i\omega_0 t}$, de sorte que le point P est fixe lors de l'évolution libre du système. On appelle "référentiel tournant" un tel référentiel.

1.2 Cohérence quantique, "q-bits" et "q-registres"

Lorsque u ou v est non nul, ρ_{ba} est aussi non nul : il y a de la cohérence quantique dans le système atomique. L'atome est dans une superposition de l'état inférieur et de l'état supérieur qui n'est pas une simple superposition statistique. Il s'agit d'un objet quantique intéressant, un peu difficile à imaginer, qui possède un dipole moyen, alors que ni $|a\rangle$, ni $|b\rangle$ n'en ont. On peut s'en faire une idée à l'aide d'un autre problème de dimension 2, celui de la polarisation de la lumière. L'analogie du vecteur de Bloch est la *sphère de Poincaré* : un état pur correspond à une polarisation parfaitement déterminée (circulaire pour un point représentatif sur l'axe Oz, rectiligne s'il est dans le plan xOy), un cas non pur à une polarisation dite "partielle". La lumière naturelle, non polarisée, est représentée par l'origine des coordonnées. L'existence d'une cohérence correspond à l'existence d'une certaine proportion de polarisation rectiligne dans l'état de la lumière.

Un système classique à deux états a b , comme celui d'une mémoire d'ordinateur (un bit, ou "c-bit"), se trouve soit en a (bit 0), soit en b (bit 1). L'informatique actuelle est basée sur la manipulation de "c-registres", formés d'un très grand nombre de c-bits, comme par exemple (0, 0, 1, 1, 0, 1..), et connectés par des opérations logiques simples et séquentielles .

Un système quantique à deux états a beaucoup plus de possibilités qu'un système classique à deux états. Il peut-être "à la fois" dans les deux états, lorsqu'il se trouve dans une superposition $|\Psi_{bit}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Il s'agit d'un "q-bit", dont l'évolution obéit aux règles de la mécanique quantique. La variété est encore plus grande lorsqu'on considère les "q-registres" formés de N q-bits, et la possibilité de manipuler des combinaisons linéaires de type $|\Psi_{reg}\rangle = \sum \alpha_i |0, 0, 1, 1, 0, 1..\rangle$, où la somme s'étend sur tous les nombres binaires comme 001101 variant entre 0 et 2^N .

La manipulation d'un très grand nombre de q-bits et les opérations susceptibles de les connecter, font l'objet d'un domaine en développement rapide à l'heure actuelle, celui du traitement quantique de l'information, ou "informatique quantique" (quantum computing). On a pu montrer que cette nouvelle informatique avait un grand intérêt dans les problèmes de "choix", où il faut faire un grand nombre d'essais au hasard pour trouver la solution (trouver un élément particulier dans une liste, factoriser un grand nombre). En informatique classique, on essaie successivement toutes les valeurs possibles pour un c-registre de N c-bits. En informatique quantique, on essaie des superpositions de q-registres, donc d'états quantiques du type $|\Psi_{reg}\rangle$, qui contiennent "à la fois" toutes les valeurs possibles des registres classiques. On a montré théoriquement qu'on a des procédures plus rapides avec des q-registres qu'avec des c-registres, lorsque N est très grand.

Mais la réalisation pratique d'un tel dispositif se heurte à un problème majeur : les cohérences quantiques sont d'autant plus fragiles que N est grand. Elles relaxent très vite vers 0, et les q-registres se muent alors en superpositions statistiques "ordinaires" de c-registres. Le chemin est donc encore très long qui mène à l'ordinateur quantique avec N grand.

2. Cas de deux niveaux de longue durée de vie

A cause de l'existence du spin du noyau, le niveau fondamental de beaucoup d'atomes présente une *structure hyperfine*, de l'ordre du GHz. C'est le cas en particulier du niveau fondamental $1S_{\frac{1}{2}}$ de l'hydrogène, qui se décompose en deux sous-niveaux de moment cinétique total $F = 0$ et $F = 1$, distants de $\nu = 1\ 420\text{GHz}$, ou du niveau fondamental $6S_{\frac{1}{2}}$ du Césium, qui se décompose en deux sous-niveaux $F = 3$ et $F = 4$, distants de $\nu = 9\ 192\ 631\ 770\text{Hz}$ (par définition du Hertz ou de la seconde). A cause du terme en ω^3 dans Γ_{sp} , la durée de vie du niveau $F = 4$ est pratiquement

infinie. On peut alors utiliser les résultats du paragraphe 2.1.

2.1 La précession de Rabi du vecteur de Bloch

Lorsqu'on applique à partir de $t = 0$ un champ $E \cos(\omega t - \phi)$ sur un système dans l'état $|a\rangle$, le système reste pur au cours de son évolution temporelle parce qu'il n'y a pas de relaxation. Le vecteur de Bloch qui le représente évolue donc sur la sphère de rayon $\frac{1}{2}$. Il a plus précisément pour composantes :

$$\begin{aligned} u + iv &= -i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i(\delta t - \phi)} \sin \frac{\Omega t}{2} \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \\ w &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \cos \Omega t \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad \Omega_R = -\frac{dE}{\hbar} \quad \Omega^2 = \Omega_R^2 + \delta^2$$

L'évolution temporelle a une interprétation géométrique simple dans le cas exactement résonnant où on a :

$$u + iv = -i \frac{1}{2} e^{i\phi} \sin \Omega_R t \quad w = -\frac{1}{2} \cos \Omega_R t$$

Le point P effectue une rotation d'angle $\Omega_R t$ dans le plan de longitude $\phi - \pi/2$. L'axe de cette rotation est donc constitué par le vecteur représentant dans le plan xOy le champ appliqué en représentation complexe (voir figure 6.1). Cette rotation ou précession dans un champ résonnant permet de faire passer le système dans n'importe quel état pur (n'importe quel q-bit), en ajustant correctement les valeurs de t et ϕ .

En particulier, si $t = t_1$ tel que $\Omega_R t_1 = \frac{\pi}{2}$, l'atome se trouve porté dans l'état :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle - i e^{i\phi - i\omega_0 t_1} |b\rangle)$$

Il s'agit d'une superposition dans laquelle la cohérence atomique est maximale. En coupant le champ à l'instant t_1 ("impulsion $\frac{\pi}{2}$ "), l'atome évolue librement à partir de cet état. Son point représentatif P reste fixe dans le repère tournant. On voit que la *cohérence temporelle* du champ exciteur est capitale. En effet si ϕ est une quantité aléatoire (champ incohérent), le point P se trouvera dans le plan xOy avec un angle ϕ aléatoire. La moyenne

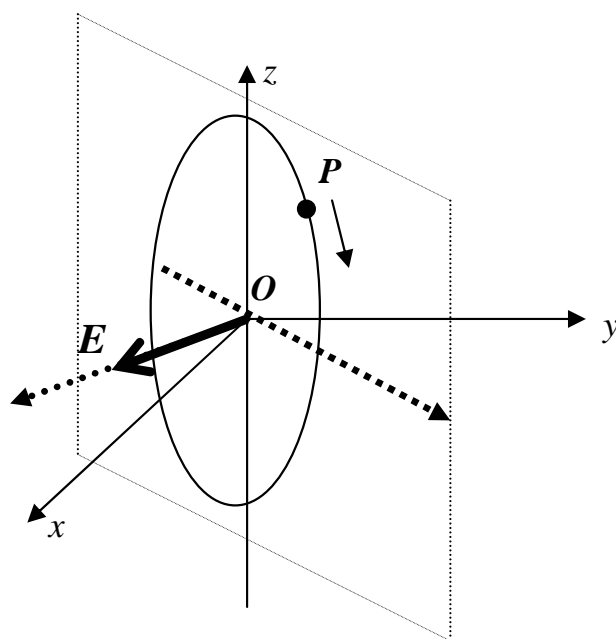


Fig. 6.1: l'évolution du point représentatif P sous l'effet d'un champ résonnant est une précession autour du vecteur représentant le champ complexe



Fig. 6.2: séquence de deux impulsions $\frac{\pi}{2}$ séparées par un temps T

statistique donnera alors $\rho_{ba} = 0$. On retrouve ici qualitativement la conclusion du paragraphe 2.3, qui a montré qu'avec une source spectralement large les cohérences sont détruites.

Au bout d'un temps $t_2 = 2t_1$ ($\Omega_R t_2 = \pi$), c'est-à-dire si on impose au système une "impulsion π ", l'atome est porté dans l'état :

$$|\Psi\rangle = -i |b\rangle e^{-i\omega_0 t_2 + i\phi}$$

C'est le moyen le plus efficace pour porter un atome dans son état excité avec une probabilité 1.

Si enfin on impose au système une "impulsion 2π ", en arrêtant le champ au bout d'un temps $t_3 = 4t_1$ ($\Omega_R t_3 = 2\pi$), l'atome est porté dans l'état :

$$|\Psi\rangle = - |a\rangle e^{-i\omega t_3}$$

Il s'agit *au signe près*, de l'état initial. Ce signe peut se révéler important dans certaines applications.

2.2 Franges de Ramsey

En appliquant des suites d'impulsion de champ de durées déterminées, on peut faire évoluer le vecteur d'onde du système de manière voulue. La configuration la plus simple, très souvent utilisée, a été inventé par Ramsey. Elle consiste à appliquer sur l'atome la séquence donnée sur la figure 6.2,

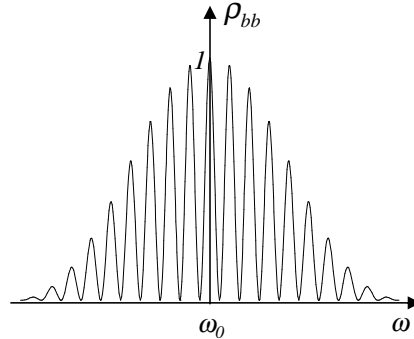


Fig. 6.3: Probabilité de trouver le système dans l'état excité après les deux impulsions de Ramsey

formée d'une impulsion $\pi/2$ de durée t_1 , puis d'une deuxième impulsion $\pi/2$ un temps T plus tard.

- Supposons tout d'abord que $\omega = \omega_0$. Dans le repère tournant à la fréquence angulaire ω_0 où P reste fixe en l'absence d'interaction, le point E représentatif du champ de valeur complexe $Ee^{-i\omega t+i\phi}$ reste aussi fixe car nous sommes à résonance exacte. Les rotations du vecteur de Bloch dues aux deux impulsions $\pi/2$ s'ajoutent pour donner une rotation de π . Le système se trouve donc à l'issue des deux impulsions dans l'état excité, comme s'il avait subi une seule impulsion π .

- Supposons maintenant que $\omega \neq \omega_0$, mais que ω reste suffisamment proche de ω_0 pour que les deux impulsions restent très proches d'impulsions $\pi/2$, à des petits termes près. Le point E représentatif du champ appliqué dans le repère tournant correspond au nombre complexe $Ee^{-i(\omega-\omega_0)t+i\phi}$. Son argument varie de la quantité $(\omega - \omega_0)T$ entre la première et la deuxième impulsion, quantité qui peut ne pas être négligeable si T est suffisamment long. En particulier :

- si $\delta T \equiv \pi (2\pi)$, le point E effectue un demi-tour entre les deux impulsions : la rotation due à la deuxième impulsion est l'opposée de celle due à la première. L'atome se retrouve dans son état initial $|a\rangle$;

- si $\delta T \equiv 0 (2\pi)$, le point E se retrouve au même endroit avant la deuxième impulsion, et les deux rotations s'ajoutent à nouveau. L'atome est à nouveau transféré dans l'état $|b\rangle$.

Un calcul plus détaillé montre que la probabilité de transition vers l'état supérieur à l'issue des deux impulsions en fonction de la pulsation du champ appliqué a l'allure de la figure (6.3). On observe dans la probabilité des oscillations ou "franges", de période $1/T$, donc très faible, qui se superposent à la courbe de résonance large (de largeur $1/t_1$) que l'on aurait avec une seule impulsion π de durée t_1 . Par exemple, si $T = 1s$, la largeur de la structure centrale, centrée en $\omega = \omega_0$ $\Delta\omega$ vaut 1Hz. Ce type de réponse permet de pointer la résonance $\omega = \omega_0$ avec une précision bien meilleure qu'avec une seule interaction. On ne s'étonnera donc pas de voir que cette technique est très utilisée en métrologie des fréquences. C'est en particulier sur ce principe que fonctionnent depuis 40 ans les horloges atomiques à Césium qui servent à définir la seconde. L'utilisation d'atomes froids a permis récemment d'augmenter considérablement les temps d'interaction T . La figure (6.4) donne une courbe expérimentale enregistrée avec l'horloge à Césium à atomes froids du Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences (LPTF) de l'Observatoire de Paris (A. Clairon et al Europhysics Letters **16**, 165 (1991)). Les atomes froids sont lancés verticalement vers le haut et retombent sous l'effet de la gravité. Ils passent ainsi deux fois dans une cavité contenant le champ à la fréquence de la transition. La largeur de la frange centrale, égale à 2Hz, permet une stabilité de l'horloge de l'ordre de $10^{-14}t^{-0,5}$, où t est le temps d'intégration en secondes.

3. Cas d'un niveau excité de courte durée de vie

Considérons maintenant une transition optique dans un atome qui relie le niveau fondamental à un niveau électronique excité. Par exemple, dans le cas de la transition $3S \rightarrow 3P$ du sodium, de longueur d'onde $\lambda = 589nm$, la durée de vie du niveau excité T_{sp} vaut $16ns$ ($\Gamma_{sp} \approx 60MHz$). Pour la transition $6S \rightarrow 6P$ du Césium ($\lambda = 852nm$), T_{sp} vaut $32ns$ ($\Gamma_{sp} \approx 30MHz$). On pourra négliger l'émission spontanée uniquement pour des phénomènes de durée courte devant T_{sp} , donc uniquement dans le cas d'impulsions ultra-courtes. Pour des temps plus longs, il faut utiliser les équations de Bloch du chapitre 2.

3.1 Caractéristiques du régime stationnaire

L'atome obéit donc aux équations de Bloch que nous avons introduites au paragraphe 2.2.3. Il atteint alors aux temps longs ($t \gg T_{sp}$) un régime

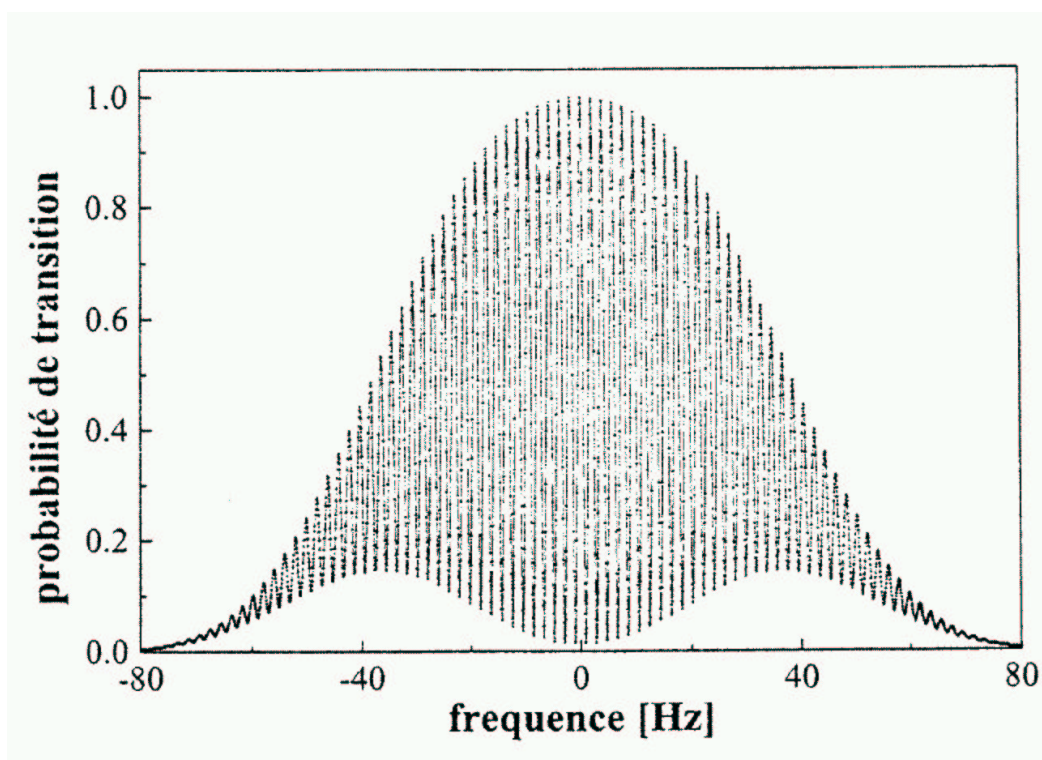


Fig. 6.4: Nombre d'atomes dans le niveau excité en fonction de la fréquence de l'onde appliquée, mesuré avec une horloge atomique à atomes froids

stationnaire caractérisé par le dipôle suivant :

$$\tilde{D} = \frac{\omega_0 - \omega + i\gamma_d}{\gamma_d^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \frac{d^2 E}{\hbar} (N_a - N_b)$$

La puissance transférée du champ à l'atome, P_{abs} , est l'opposée de celle que nous avons calculée au chapitre 1. Elle vaut :

$$P_{abs} = \frac{\omega E}{2} \text{Im} \tilde{D} = \frac{\omega d^2 E^2}{2\hbar} (N_a - N_b) \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2}$$

P_{abs} est donc négatif si $N_a > N_b$, et positif si $N_a < N_b$. Il n'y a d'amplification de l'onde lumineuse possible, dans le cadre de ce modèle, que s'il y a *inversion de population*. Les équations de Bloch fournissent l'expression suivante de la différence des populations dans le régime stationnaire :

$$N_a - N_b = \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2 + \frac{\gamma_d}{\gamma_P} \Omega_R^2}$$

où $\Omega_R = \frac{dE}{\hbar}$ est la fréquence de Rabi du système en l'absence d'émission spontanée. On voit sur cette expression que $N_a - N_b$ est toujours positif. Il n'y a donc pas d'amplification possible dans un système à deux niveaux. Il en faut 3 ou 4 pour parvenir à une inversion de population. On trouvera des descriptions détaillées des processus d'inversion de population dans les cours lasers (par exemple la référence 2).

On constate d'autre part que, si l'intensité du champ tend vers l'infini, $N_a - N_b$ tend vers zéro : il y a égalisation des populations à $\frac{1}{2}$, les processus d'absorption et d'émission stimulée se neutralisant réciproquement.

La puissance absorbée par l'atome sur le champ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P_{abs} &= \hbar\omega \frac{\Omega_R^2}{2} \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2 + \frac{\gamma_d}{\gamma_P} \Omega_R^2} \\ &= \hbar\omega \frac{\Omega_R^2}{2} \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2 \left(1 + \frac{I}{I_{sat}}\right)} \end{aligned}$$

où $s = \frac{I}{I_{sat}}$ est le *paramètre de saturation*, $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 c$ est le flux incident du champ (en W/m^2), et

$$I_{sat} = \frac{\varepsilon_0 c \hbar \gamma_p \gamma_d}{2d^2}$$

est l'*intensité de saturation* de la transition. Si l'émission spontanée est la seule cause de relaxation $\gamma_d = \frac{\gamma_p}{2} = \frac{\Gamma_{sp}}{2}$, où Γ_{sp} a été calculé dans le chapitre précédent. On trouve alors :

$$I_{sat,resonant} = \frac{3 \hbar \omega_0 \Gamma_{sp}}{\pi \lambda^2}$$

C'est, à un facteur géométrique proche de un près, le *flux lumineux correspondant au passage d'un photon pendant la durée de vie de l'état excité à travers une surface égale au carré de la longueur d'onde*. Dans le cas du Césium, I_{sat} vaut approximativement $2mW/cm^2$, ce qui est un flux facilement accessible pour un laser, même très peu intense. Par contre, il faut que cette puissance soit fournie à l'atome à une fréquence exactement égale à sa fréquence de résonance. Il faut donc utiliser un *laser accordable* qui permette d'ajuster avec précision la fréquence du champ à celle de l'atome. Lorsque la source lumineuse est loin de résonance ($\delta \gg \gamma_d$), le flux lumineux de saturation est beaucoup plus grand et vaut :

$$I_{sat,nonresonant} = \frac{3 \hbar \omega_0 |\omega - \omega_0|}{2\pi \lambda^2}$$

C'est, toujours à un facteur géométrique proche de un près, le *flux lumineux correspondant au passage d'un photon pendant le temps $\frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}$ à travers une surface égale au carré de la longueur d'onde*.

La dépendance en I du coefficient d'absorption A de l'atome, c'est-à-dire du rapport $\frac{P_{abs}}{I}$ est donnée sur la figure (6.5). A a une valeur non nulle en champ incident faible, et tend vers zéro si I tend vers l'infini : le système devient alors *pratiquement transparent* pour l'onde incidente, parce que émission stimulée et absorption s'équilibrent dans le milieu atomique. Cette limite est atteinte dès que $I \gg I_{sat}(\omega) = I_{sat} \left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_d} \right)^2 \right)$. Ce régime de saturation est donc d'autant plus difficile à atteindre qu'on est loin de résonance.

En fait, lorsque I devient très grand, la puissance absorbée par l'atome tend vers une valeur limite qui vaut :

$$(P_{abs})_{max} = \hbar \omega \frac{1}{2} \gamma_p$$

Elle correspond à l'absorption d'un photon toutes les deux durées de vie γ_p^{-1} de l'état excité. C'est en effet la relaxation de la population de l'état excité qui dissipe en définitive l'énergie incidente.

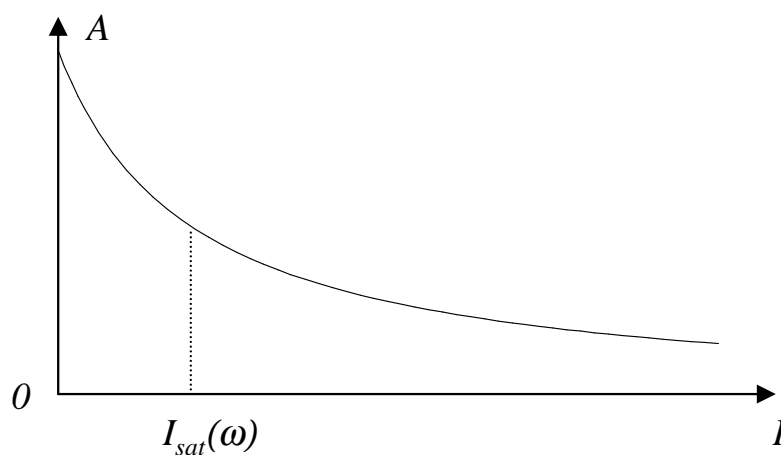


Fig. 6.5: coefficient d'absorption A d'un atome en fonction de l'intensité I du champ incident

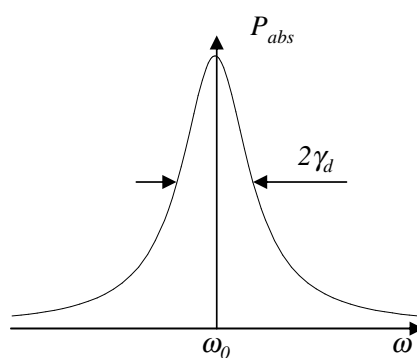


Fig. 6.6: valeur du coefficient d'absorption à puissance incidente fixe en fonction de la fréquence du champ incident

La dépendance en ω de P_{abs} est donnée sur la figure (6.6). C'est une Lorentzienne centrée en ω_0 : à faible puissance lumineuse, l'absorption (ou l'émission stimulée) est importante seulement si $(\omega - \omega_0)^2 \approx \gamma_d^2$, c'est-à-dire dans un intervalle de pulsation dont la largeur à mi-hauteur est égale à $2\gamma_d$ (γ_d/π en unité de fréquence). *La largeur de la transition est donc uniquement liée à l'amortissement du dipôle (et pas de la population).* En outre, la largeur à mi-hauteur croît avec la puissance lumineuse : c'est ce qu'on appelle l'*élargissement radiatif*.

3.2 Absorption saturée

Considérons une assemblée d'atomes ayant des fréquences de résonance ω_0 réparties dans un intervalle $\Delta\omega$ autour d'une fréquence centrale ω_{ab} . On dit que le milieu présente un *élargissement inhomogène*. Cet élargissement est par exemple dû à l'effet Doppler dans le cas d'un gaz : $\omega_0 = \omega_{ab} + kv$, où v est la composante de la vitesse de chaque atome le long de la direction de propagation du champ, dont la distribution obéit à la loi statistique de Maxwell. En général $\Delta\omega \gg \gamma_d$. Dans un milieu solide et dense comme un cristal, les atomes ont des environnements différents et subissent sous l'effet du champ cristallin des déplacements différents d'un site à un autre par effet Stark.

Ces atomes interagissent avec deux champs : un champ $E \cos \omega t$ saturant, et un champ $E' \cos \omega' t$ faible, qui ne perturbe que très faiblement les atomes de l'échantillon. La puissance absorbée sur le champ E' , P'_{abs} , vaut alors :

$$P'_{abs} = \int d\omega_0 \mathcal{N}(\omega_0) \frac{\gamma_d}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2} (N_a - N_b)(\omega_0)$$

où $(N_a - N_b)$ est dû à l'effet des deux champs sur les atomes, et où $\mathcal{N}(\omega_0)$ est le nombre d'atomes ayant une fréquence d'absorption égale à ω_0 . Puisque $\Delta\omega \gg \gamma_d$, la Lorentzienne est pratiquement une fonction $\delta(\omega - \omega_0)$, et on peut écrire :

$$P'_{abs} \approx P'_0 \mathcal{N}(\omega') (N_a - N_b)(\omega')$$

- En l'absence du champ intense $N_a - N_b \approx 1$, et la courbe de résonance a pour largeur $\Delta\omega$, qui est très grand : la précision des mesures spectroscopiques ainsi effectuées est limitée par la largeur inhomogène du système (voir figure 6.7a)).

- En présence du champ intense, $N_a - N_b \approx 1$ si $\omega_0 \neq \omega$, et on est ramené au cas précédent. En revanche, si $\omega_0 = \omega$ à γ_d près, alors $N_a - N_b \approx 0$,

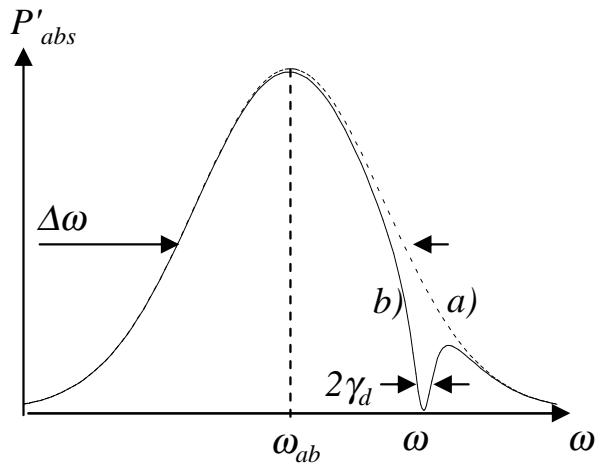


Fig. 6.7: absorption du champ sonde en fonction de sa fréquence : a) (pointillés) en l'absence de champ pompe ; b) (traits pleins) en présence de champ pompe

donc $P'_{abs} \approx 0$: le champ intense a "creusé un trou" dans la différence des populations $N_a - N_b$, qui a été "sondé" par le champ faible (voir figure (6.7b)). Cette méthode, dite d'absorption saturée, permet de remonter à γ_d , qui n'est plus masqué par $\Delta\omega$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier de l'élargissement Doppler. Les deux champs appliqués sont pris de même fréquence ω , mais de directions opposées (voir figure (6.8a)). Ils provoquent donc des effets Doppler opposés.

- Si $\omega \neq \omega_{ab}$, le champ E sature les atomes de vitesse $v = \frac{\omega - \omega_{ab}}{k}$, tandis que le champ E' sonde les atomes de vitesse $v = \frac{\omega'_{ab} - \omega}{k}$, qui ne sont pas perturbés par la présence du champ saturant.

- Si $\omega = \omega_{ab}$, E et E' sont couplés tous deux aux atomes de vitesse nulle pour lequel $N_a = N_b$ à cause du champ saturant E : on trouve au centre de la large résonance due à E' seul un creux centré en $\omega = \omega_{ab}$, de largeur γ_d (voir figure (6.8b)). La "spectroscopie d'absorption saturée" permet donc de mesurer la fréquence d'une transition dans un échantillon gazeux avec une précision limitée par la largeur naturelle Γ_{sp} , et non par la largeur Doppler bien plus grande.

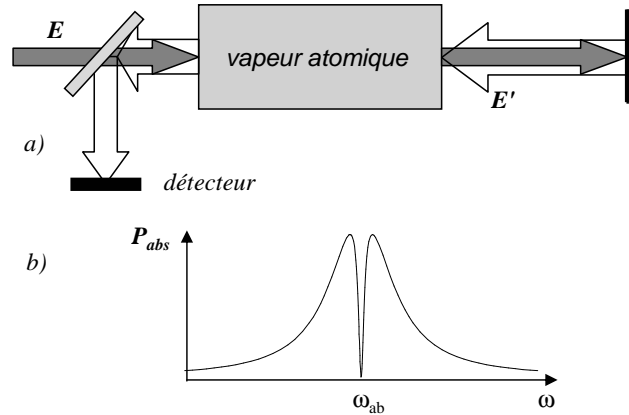


Fig. 6.8: spectroscopie d'absorption saturée sur une vapeur atomique : a) configuration des champs ; b) courbe d'absorption en présence du champ direct saturant et du champ réfléchi faible

4. Interaction entre un atome à deux niveaux et un mode du champ quantique

On va maintenant passer à la description complètement quantique de l'interaction matière-rayonnement, pour voir les phénomènes nouveaux qui apparaissent. On va se placer ici aussi dans le cas le plus simple : le système à deux niveaux pour l'atome et le mode unique pour le champ.

4.1 Position du problème

Cette situation simple correspond en fait à deux situations expérimentales réelles :

- Celle de l'*électrodynamique en cavité* : on considère une cavité électromagnétique sans pertes, qui possède un ensemble discret de *modes résonnants* discrets, de pulsations ω_l . On suppose qu'un seul de ces modes est proche de la fréquence de Bohr de la transition atomique ω_0 . Le couplage essentiel a donc lieu entre les états atomiques $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ et les états du seul mode l , du type $\sum_{n_l} |0\dots n_l\dots 0\rangle$, où seul le mode l est rempli.

- Celle de l'*interaction entre un atome de longue durée de vie et un laser monomode intense* : le laser produit un état contenant en moyenne beaucoup

de photons dans un mode l donné : $\langle \widehat{N}_l \rangle \gg 1$. Son interaction avec l'atome va se faire avec un élément de matrice $\sqrt{N_l}$ ou $\sqrt{N_{l+1}}$ dans le mode l , et un élément de matrice de l'ordre de 1 pour les autres modes. Si on néglige l'émission spontanée, les autres modes ne se remplissent pas et on va donc pouvoir se restreindre à l'espace de Hilbert sous-tendu par les vecteurs de base $|i; n\rangle$, avec $i = a, b$, et où $|n\rangle$ désigne un état de Fock du mode l .

4.2 Hamiltonien de Jaynes-Cummings

L'hamiltonien du système restreint à ce sous-espace s'écrit, dans le cas d'un atome immobile à l'origine des coordonnées :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_{at} + \widehat{H}_{ray} + \widehat{H}'_{int}$$

avec :

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{at} &= E_b |b\rangle \langle b| + E_a |a\rangle \langle a| \\ \widehat{H}_{ray} &= \hbar\omega_l \left(\widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \\ \widehat{H}'_{int} &= -i\mathcal{E}_l \widehat{D} \cdot \vec{\varepsilon}_l (\widehat{a}_l - \widehat{a}_l^+)\end{aligned}$$

On prendra pour simplifier la polarisation du mode considéré parallèle à Oz , et on appellera d_{ab} l'élément de matrice de \widehat{D}_z entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. \widehat{H}'_{int} s'écrit alors :

$$\widehat{H}'_{int} = -i\mathcal{E}_l d_{ab} [|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|] [\widehat{a}_l - \widehat{a}_l^+]$$

Lorsqu'on développe le produit, on trouve quatre termes, qui décrivent quatre processus : ceux où l'atome transite de b à a , et le champ de l'état n à l'état $n-1$ (1), ou $n+1$ (2) ; ceux où l'atome transite de a à b , et le champ de l'état n à l'état $n-1$ (3), ou $n+1$ (4). Si ω_l est proche de ω_0 , les processus (1) et (4) sont fortement non résonnants et ont un effet très faible devant ceux induits par les processus quasi-résonnants (2) et (3). On les négligera ici, et on ne gardera donc que deux termes dans l'hamiltonien. D'autre part on prendra comme zéro d'énergie E_a pour les atomes et $\frac{1}{2}\hbar\omega_l$ pour les photons. L'hamiltonien du système, appelé *hamiltonien de Jaynes-Cummings*, s'écrit finalement :

$$\widehat{H}_{JC} = \hbar\omega_0 |b\rangle \langle b| + \hbar\omega_l \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + i\frac{\hbar\Omega_v}{2} [|a\rangle \langle b| \widehat{a}_l^+ - |b\rangle \langle a| \widehat{a}_l]$$

où $\hbar\Omega_v = 2\mathcal{E}_l d_{ab}$ est appelé "fréquence de Rabi du vide".

4.3 États et énergies propres du système

Cet hamiltonien agit de la manière suivante sur les états de la base :

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{JC} |a; n\rangle &= n\hbar\omega_l |a; n\rangle - i\hbar\Omega_v\sqrt{n} |b; n-1\rangle \\ \widehat{H}_{JC} |b; n-1\rangle &= \hbar[\omega_0 + (n-1)\omega_l] |b; n-1\rangle + i\hbar\Omega_v\sqrt{n} |a; n\rangle\end{aligned}$$

On constate que le sous-espace, ou multiplicité, noté \mathcal{M}_n , sous-tendu par les vecteurs $\{|a; n\rangle, |b; n-1\rangle\}$, est fermé sous l'action de \widehat{H}_{JC} . Pour trouver les éléments propres de cet hamiltonien, il nous suffit donc de le diagonaliser dans chacun de ces sous-espaces, sauf pour $n=0$ où il est déjà diagonal :

$$\widehat{H}_{JC} |a; 0\rangle = 0$$

$|a; 0\rangle$ est l'état propre fondamental du système couplé. Les éléments propres dans \mathcal{M}_n sont faciles à trouver. On appellera $|\Psi_{\pm n}\rangle$ les états propres dans cette multiplicité : $\widehat{H}_{JC} |\Psi_{\pm n}\rangle = E_{\pm n} |\Psi_{\pm n}\rangle$, avec :

$$\begin{aligned}E_{\pm n} &= \hbar \left(n\omega_l - \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{n\Omega_v^2 + \delta^2} \right) \\ |\Psi_{+n}\rangle &= \cos \theta_n |a; n\rangle + i \sin \theta_n |b; n-1\rangle \\ |\Psi_{-n}\rangle &= i \sin \theta_n |a; n\rangle + \cos \theta_n |b; n-1\rangle\end{aligned}$$

et :

$$\delta = \omega_l - \omega_0 \quad \tan 2\theta_n = \frac{-\Omega_v\sqrt{n}}{\delta}$$

Niveaux d'énergie

Les niveaux d'énergie pour une valeur de n quelconque sont donnés sur la figure (6.9), dans la région $\delta \ll \omega_0, \omega_l$. On observe une forme hyperbolique des niveaux d'énergie, correspondant à ce qu'on appelle un *anticroisement de niveaux*. En particulier, à résonance exacte ($\delta = 0$), on a deux niveaux séparés par l'écart énergétique :

$$\Delta E_n = \sqrt{n}\hbar\Omega_v$$

- Plaçons-nous d'abord dans le cas $n=1$, qu'on peut réaliser expérimentalement dans une expérience d'électrodynamique en cavité. On considère une cavité résonnante pour les ondes centimétriques interagissant avec un atome

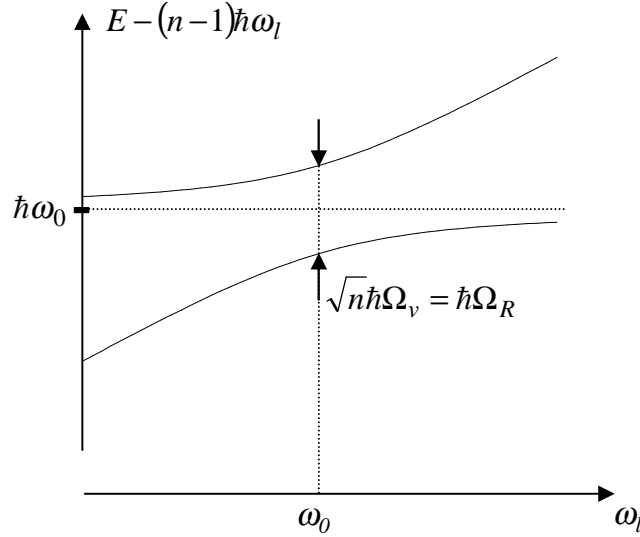


Fig. 6.9: niveaux d'énergie du système atome+champ (une fois le terme $(n-1)\hbar\omega_l$ retiré) en fonction de la fréquence ω_l du champ

de Rydberg, c'est-à-dire un atome porté dans un état très excité de grand nombre quantique principal. Par exemple la transition $n = 30 \rightarrow n = 29$ a une fréquence de Bohr de $50GHz$ environ, ce qui correspond bien à une longueur d'onde centimétrique. Le volume de la cavité est alors $V = 1cm^3$, et la taille de l'atome de Rydberg, donc du dipôle atomique, proportionnelle à n^2 , est très grande, de l'ordre de $250nm$. $\frac{\Omega_v}{2\pi}$ vaut alors $100kHz$. On peut aussi envisager le cas d'un atome de Césium, dont la raie de résonance entre le fondamental et le premier niveau excité vaut $\lambda = 0,8\mu m$, situé dans une cavité de type Fabry-Perot de très petite taille $V = 1mm \times (50\mu m)^2$, et une taille d'atome d'environ $0,1nm$. $\frac{\Omega_v}{2\pi}$ vaut alors $3MHz$. On remarque que $\frac{\Omega_v}{2\pi}$ est d'autant plus petit que V est grand.

- On peut aussi s'intéresser aux niveaux correspondant à n grand, pour lesquels on a la même forme d'anticroisement des niveaux d'énergie, mais avec un écart plus grand. A résonance exacte, les deux niveaux sont alors séparés par l'écart énergétique ΔE_n que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta E_n = d_{ab} \sqrt{\frac{2n\hbar\omega_l}{\epsilon_0 V}} = d_{ab} E_{cl}$$

où E_{cl} est le champ classique ayant la même énergie que l'état quantique $|n\rangle$:

$$\frac{n\hbar\omega_l}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{cl}^2$$

On a donc $\Delta E_n = \hbar\Omega_R$, où Ω_R est la fréquence de Rabi de la théorie semi-classique associé au champ classique E_{Cl} . Pour un champ correspondant à un éclaircissement de $1mW/cm^2$ et un dipôle correspondant à une distance entre proton et électron de $10^{-10}m$, $\frac{\Omega_R}{2\pi}$ vaut environ $2MHz$.

États propres

Les états $|\Psi_{\pm n}\rangle$ ne sont en général pas factorisables :

$$|\Psi_{\pm n}\rangle \neq |\Psi_{at}\rangle \otimes |\Psi_{ray}\rangle$$

Ils impliquent l'existence d'une corrélation quantique forte entre l'atome et le champ. Ce sont des "états intriqués". On les appelle aussi états de l'"atome habillé" (par les photons du champ quantique).

A résonance exacte, $\delta = 0$, θ_n vaut $\frac{\pi}{4}$, et donc :

$$|\Psi_{+n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a; n\rangle + i|b; n-1\rangle)$$

$$|\Psi_{-n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|a; n\rangle + |b; n-1\rangle)$$

Il y a dans ces états intrication maximale entre le champ et l'atome.

Si le désaccord devient très grand par valeurs négatives, alors $\theta_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, et $|\Psi_{+n}\rangle$ tend vers $i|b; n-1\rangle$. Si le désaccord devient très grand par valeurs positives, $\theta_n \rightarrow 0$, et $|\Psi_{+n}\rangle$ tend vers $|a; n\rangle$. Ces états sont factorisés : il y "désintrication" entre l'atome et le champ lorsque les fréquences propres de chaque systèmes sont très éloignées.

4.4 Émission spontanée de l'atome à l'intérieur de la cavité

On suppose qu'à $t = 0$ on met l'atome excité dans une cavité exactement résonnante avec sa transition ($\delta = 0$), et vide de photons. L'état initial du système est donc $|\Psi(0)\rangle = |b; 0\rangle$. Comme cet état n'est pas un état propre du système, il évolue donc dans le temps, tout en restant dans la multiplicité

$\mathcal{M}_1 = \{|b; 0\rangle, |a; 1\rangle\}$. Il s'écrit plus précisément sur la base des états propres du système :

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}} (|\Psi_{+1}\rangle + i|\Psi_{-1}\rangle)$$

On en déduit son expression à tout instant :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{e^{-i\omega_0 t}}{i\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega_v \frac{t}{2}} |\Psi_{+1}\rangle + i e^{i\Omega_v \frac{t}{2}} |\Psi_{-1}\rangle \right) \\ &= e^{-i\omega_0 t} \left(\cos \frac{\Omega_v t}{2} |b; 0\rangle - \sin \frac{\Omega_v t}{2} |a; 1\rangle \right) \end{aligned}$$

en revenant à la base "naturelle" $|i; n\rangle$. On obtient un comportement analogue à l'oscillation de Rabi semi-classique, mais entre les états $|a; 1\rangle$ et $|b; 0\rangle$, et non pas les états purement atomiques $|a\rangle$ et $|b\rangle$. La probabilité de trouver l'atome en b vaut :

$$P_b(t) = \sum_n \langle b; n | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | b; n \rangle = \cos^2 \frac{\Omega_v t}{2}$$

On trouve que *cette probabilité a un comportement oscillant* et non pas exponentiel comme dans l'espace libre : la cavité "renvoie" le photon sur l'atome qui le réabsorbe (c'est une sorte de "squash atomique"). On a ainsi des oscillations de Rabi à un photon, appelées souvent oscillations de Rabi du vide.

Si la cavité n'est pas résonnante, on trouve :

$$P_b(t) = 1 - \frac{\Omega_v^2}{\Omega_v^2 + \delta^2} \sin^2 \left(\sqrt{\delta^2 + \Omega_v^2} \frac{t}{2} \right)$$

P_b reste proche de 1 : l'atome reste essentiellement tout le temps dans l'état excité, et a une probabilité faible de se retrouver dans l'état fondamental.

On voit donc que l'émission spontanée est très profondément modifiée lorsqu'on met l'atome en présence d'une cavité, qu'elle soit résonnante ou non-résonnante. L'émission spontanée apparaît donc non pas comme un propriété intrinsèque de l'atome, mais comme celle de l'ensemble atome-environnement.

4.5 Évolution sous l'effet d'un état nombre

On va maintenant évaluer la manière dont on peut exciter l'atome initialement dans son état fondamental sous l'effet d'un champ présent dans la

cavité. Nous traiterons d'abord le cas où le champ est initialement dans un état nombre $|n\rangle$. L'état initial du système est alors :

$$|\Psi(0)\rangle = |a; n\rangle$$

Le système va alors évoluer entre les états $|a; n\rangle$ et $|b; n-1\rangle$ de la multiplicité \mathcal{M}_{n-1} . Un calcul identique au précédent donne pour $|\Psi(t)\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-in\omega_0 t} \left(\cos \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2} |a; n\rangle + \sin \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2} |b; n-1\rangle \right)$$

On a maintenant :

$$P_b(t) = \cos^2 \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2}$$

On retrouve bien l'oscillation de Rabi pour l'atome, avec la même fréquence d'oscillation, comme nous l'avons montré au début de cette section. On peut ici aussi faire subir au système une impulsion $\frac{\pi}{2}$ ($(\sqrt{n}\Omega_v t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2})$). On atteindra alors l'état :

$$|\Psi(t_{\frac{\pi}{2}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-in\omega_0 t_{\frac{\pi}{2}}} (|a; n\rangle + |b; n-1\rangle)$$

C'est un état intriqué très différent de celui atteint dans le régime semi-classique $|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle + |b\rangle)$. On peut voir en particulier que dans cet état $\langle \widehat{E} \rangle = 0$ et $\langle \widehat{D} \rangle = 0$, alors que $\langle \Psi_{at} | \widehat{D} | \Psi_{at} \rangle \neq 0$ dans un champ classique $E \cos \omega t$. Cet état présente de fortes corrélations atome-champ : si l'atome est mesuré dans l'état $|a\rangle$, alors on est sûr que le champ est dans l'état $|n\rangle$. Si l'atome est mesuré dans l'état $|b\rangle$, on est sûr que le champ est dans l'état $|n-1\rangle$. Les états du champ atteints dans les deux cas sont deux états orthogonaux, donc très différents même pour n très grand. Cette corrélation est non locale : on peut mesurer l'état de l'atome bien après qu'il ait traversé la cavité, et en déduire "à distance" l'état du champ dans cette cavité.

4.6 Évolution sous l'effet d'un état cohérent quelconque

Les propriétés de corrélations quantiques constatées dans le paragraphe précédent sont liées à la nature très "non-classique" de l'état nombre. On suppose maintenant que le champ est dans un état plus "habituel", plus précisément :

$$|\Psi(0)\rangle = |a\rangle \otimes |\alpha\rangle$$

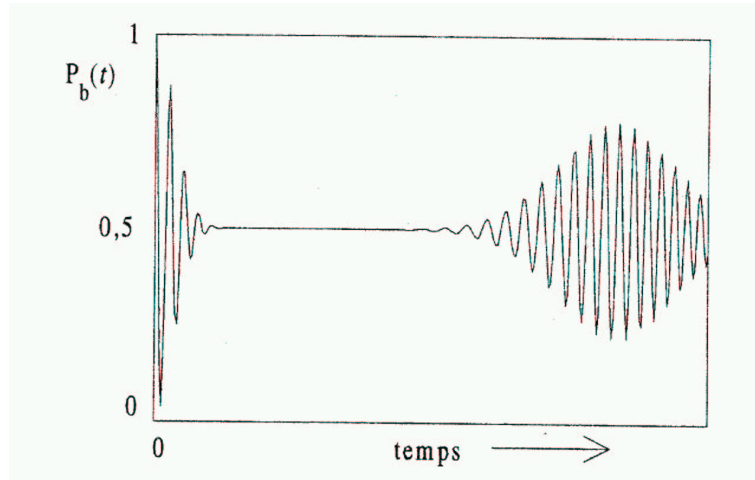


Fig. 6.10: probabilité de trouver l'atome dans l'état inférieur lorsqu'il interagit avec un état cohérent de valeur de $\alpha = 4$

avec :

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad c_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

On a donc $|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |a; n\rangle$, d'où l'on déduit l'état du système à tout instant, par linéarité de l'équation de Schrödinger :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-in\omega_0 t} \left[\cos \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2} |a; n\rangle + \sin \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2} |b; n-1\rangle \right]$$

Cet état nous permet de calculer la probabilité de trouver l'atome dans l'état initial $|a\rangle$:

$$P_a(t) = \sum_n |c_n|^2 \cos^2 \frac{\sqrt{n}\Omega_v t}{2}$$

Cette fonction est représentée sur la figure (6.10). $P_a(t)$ est formé par une superposition d'oscillations de Rabi de fréquences différentes, qui démarrent toutes en phase. Les différentes oscillations se brouillent à des instants ultérieurs, et $P_a(t)$ se rapproche de sa valeur moyenne $\frac{1}{2}$ au bout d'un temps de l'ordre de Ω_v^{-1} . Cependant, comme le nombre de sinusoïdes qui contribuent est fini, les oscillations finissent, après un temps de récurrence, par se remettre approximativement en phase, et $P_a(t)$ reprend des valeurs proches de 1 au bout d'un temps de l'ordre de $|\alpha| \Omega_v^{-1}$: c'est le phénomène de *renaissance*

quantique. Ce comportement complexe du système, qui n'a pas d'équivalent classique, a été mis en évidence expérimentalement. La figure (6.11) donne un exemple de résultat expérimental obtenu avec différentes valeurs de α , entre 0 et 1,3 sur un atome de Rydberg interagissant avec une cavité micro-onde supraconductrice (M. Brune et al, Phys. Rev. Letters **76**, 1800 (1996)).

4.7 Évolution sous l'effet d'un état cohérent intense

Si $|\alpha| \gg 1$, l'état cohérent est de plus en plus classique car ses fluctuations quantiques deviennent négligeables en valeur relative ($\Delta E \ll \langle E \rangle$, ou bien $\Delta N = |\alpha| \ll \bar{n} = |\alpha|^2$). On peut alors écrire que :

$$\sqrt{n} \approx \sqrt{\bar{n}} + (n - \bar{n}) \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}$$

tant que $(n - \bar{n}) \langle \Delta n = \sqrt{\bar{n}}$. On en conclut que \sqrt{n} reste très voisin (à quelques unités près) de $\sqrt{\bar{n}}$ dans toute la zone où les coefficients $|c_n|^2$ ne sont pas négligeables. Rappelons enfin que $\sqrt{\bar{n}}\Omega_v = \Omega_R$, qui est la fréquence de Rabi dans le champ classique de même valeur moyenne. On en déduit l'expression approchée suivante de $|\Psi(t)\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle \approx (c_n e^{-in\omega_0 t} |n\rangle) \otimes |a\rangle \cos \frac{\Omega_R t}{2} + (c_n e^{-in\omega_0 t} |n-1\rangle) \otimes |b\rangle \sin \frac{\Omega_R t}{2}$$

Or on a :

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = e^{i\phi}$$

dans toute la zone où $|c_n|^2 \neq 0$. ϕ n'est autre que l'argument de α , donc la phase du champ cohérent appliqué. Moyennant ces approximations, on peut écrire l'état du système sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle \approx |\alpha e^{-i\omega_0 t}\rangle \otimes \left\{ |a\rangle \cos \frac{\Omega_R t}{2} + e^{-i(\omega_0 t - \phi)} |b\rangle \sin \frac{\Omega_R t}{2} \right\}$$

On a donc *factorisation à tout instant de l'état complet, donc décorrélation, ou désintrication* :

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_{ray}\rangle \otimes |\Psi_{at}\rangle$$

L'état du champ est un état cohérent évoluant librement, donc non perturbé par l'interaction avec l'atome. L'état de l'atome, $|\Psi_{at}\rangle$, est l'état déjà obtenu par la théorie semi-classique.

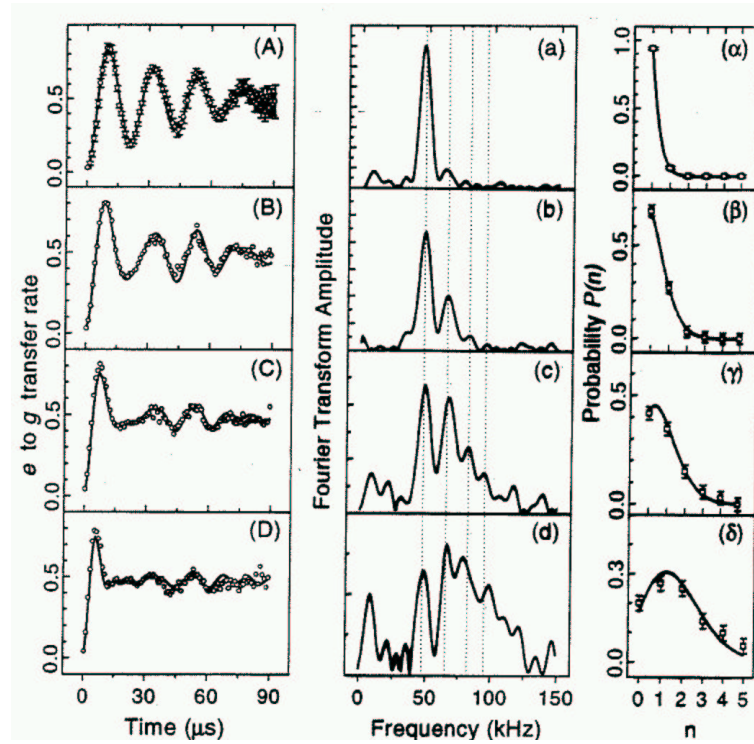


Fig. 6.11: (A), (B), (C), (D) : probabilité mesurée de trouver l'atome dans son état excité en fonction du temps d'interaction lorsque le nombre moyen de photons dans l'état cohérent est respectivement de 0 (avec 0,06 photons d'origine thermique subsistant dans le mode), 0,4, 0,85 et 1,77. (a), (b), (c), (d) : transformées de Fourier correspondantes. (α), (β), (γ), (δ) : distribution du nombre de photons déduite de la transformée de Fourier. La ligne en traits pleins correspond à l'expression théorique

Considérons le même problème sous un angle quelque peu différent : introduisons le vecteur $|\theta\rangle$ défini par $|\theta\rangle = \hat{a}_l^+ |\alpha\rangle - \alpha^* |\alpha\rangle$. Il est élémentaire de montrer que ce vecteur a pour norme 1. On peut alors écrire :

$$\hat{a}_l^+ |\alpha\rangle = \alpha^* |\alpha\rangle + |\theta\rangle$$

Dans le deuxième membre de cette égalité, le premier terme, qui a pour norme $|\alpha|^2$, l'emporte sur le second, de norme 1, lorsque $|\alpha|$ devient très grand. A cette limite, l'état cohérent devient donc un quasi-vecteur propre de \hat{a}_l^+ , en plus d'être "naturellement" vecteur propre de \hat{a}_l . Ecrivons l'hamiltonien \hat{H}_{JC} de Jaynes-Cummings en représentation d'interaction vis à vis du hamiltonien de rayonnement libre \hat{H}_{ray} , c'est-à-dire en enlevant \hat{H}_{ray} et en remplaçant \hat{a}_l par $\hat{a}_l e^{-i\omega t}$:

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_0 |b\rangle \langle b| + i\frac{\hbar\Omega_v}{2} [|a\rangle \langle b| \hat{a}_l^+ e^{i\omega t} - |b\rangle \langle a| \hat{a}_l e^{-i\omega t}]$$

A cause de la propriété des états cohérents que nous venons de signaler, un état initial factorisé du type $|\phi_{at}\rangle \otimes |\alpha\rangle$ avec $|\alpha| \gg 1$ est vecteur propre de la partie rayonnement de ce hamiltonien. La partie rayonnement du vecteur d'état va donc rester dans stationnaire au cours de l'évolution sous l'effet de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings : l'état va rester factorisé, du type $|\phi_{at}(t)\rangle \otimes |\alpha\rangle$, et sa partie atomique va évoluer sous l'effet d'un hamiltonien purement atomique, $\hat{H}_{JC,at}$ qui s'écrit :

$$\hat{H}_{JC,at} = \hbar\omega_0 |b\rangle \langle b| + i\frac{\hbar\Omega_v}{2} [|a\rangle \langle b| \alpha^* e^{i\omega t} - |b\rangle \langle a| \alpha e^{-i\omega t}]$$

Cet hamiltonien n'est autre que l'hamiltonien semi-classique à l'approximation séculaire que nous avons étudié dans le chapitre 2.

On vient donc de trouver la *condition de validité de l'approche semi-classique* : celle-ci donne l'évolution atomique exacte dans le cas où le champ appliqué est cohérent et intense. C'est aussi la condition de validité des équations de Bloch, qui décrivent classiquement les champs appliqués et tiennent compte de l'émission spontanée, phénomène purement quantique, par l'intermédiaire de termes de relaxation.

Précisons que seules les *valeur moyennes* des quantités atomiques sont décrites par les équations de Bloch. Les fluctuations des variables induites par l'émission spontanée et les fluctuations quantiques des champs appliqués ne sont évidemment pas prises en compte dans ces équations. Les fluctuations

dues à l'émission spontanée jouent en particulier un rôle important dans le problème du refroidissement des atomes par rayonnement laser appelé refroidissement "Doppler". De même, pour déterminer l'évolution moyenne du champ, on peut utiliser les équations de Maxwell avec les sources atomiques données par la solution des équations de Bloch. Mais on ne pourra pas déterminer dans ce cadre les variances des champs, pas plus que les corrélations quantiques de tous ordres (entre champs, entre le champ et l'atome), pour lesquelles la théorie quantique est totalement nécessaire.

5. *Atome à deux niveaux interagissant avec un mode unique du champ en présence de relaxation*

Le modèle de Jaynes-Cummings décrit en fait une situation très idéaliste où le système atome-mode est totalement isolé. Cette situation correspond assez bien au cas d'un atome de Rydberg, qui a une très longue durée de vie, couplé à une cavité de très grande finesse. Il s'applique moins au cas de l'atome de Césium, de courte durée de vie, dans une cavité de type Fabry-Perot. Il faut donc tenir compte des "fuites" du système atome-mode l vers d'autres états, c'est-à-dire de la relaxation. Nous allons donc chercher des équations du type des équations de Bloch, mais maintenant pour le système atome-mode l décrit en termes de matrice densité.

5.1 *Équations pour le système atome-cavité avec pertes*

Les pertes du système sont de deux types :

- L'atome est couplé à d'autres modes que le mode l de la cavité : quand il est dans l'état excité, l'émission spontanée le couple aussi à tous les autres modes de même fréquence, mais de directions et de polarisations différentes de celui du mode l . Ces modes étant en nombre infini, nous supposerons, ce qui est généralement le cas, que le taux d'émission spontané vers tous les modes autres que l est peu différent du taux total d'émission spontané dans l'espace libre Γ_{sp} .

- La cavité a des pertes : l'énergie électromagnétique dans la cavité décroît en $e^{-\kappa t}$. Pour donner un ordre de grandeur, la finesse (soit le nombre moyen d'allers-retours que fait la lumière avant de sortir, égal au rapport de l'intervalle spectral libre c/L à la largeur κ d'une résonance de la cavité) des cavités optiques les plus résonnantes que l'on sache réaliser actuellement est rarement

supérieure à 10^5 .

Dans le cas de l'expérience sur le Césium mentionnée précédemment, Γ_{sp} vaut environ $6 \times 10^7 s^{-1}$, et κ vaut $2 \times 10^7 s^{-1}$.

La théorie générale de la relaxation montre que l'équation "pilote" de la matrice densité σ du système atome-mode l s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma = \frac{1}{i\hbar} \left[\widehat{H}_{JC}, \sigma \right] & - \frac{\Gamma_{sp}}{2} (\sigma |b\rangle \langle b| + |b\rangle \langle b| \sigma) + \Gamma_{sp} |a\rangle \langle b| \sigma |b\rangle \langle a| \\ & - \frac{\kappa}{2} (\sigma \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l + \widehat{a}_l^+ \widehat{a}_l \sigma) + \kappa \widehat{a} \widehat{a}^+ \end{aligned}$$

La première ligne de cette équation est identique à celle de l'atome seul. Outre le terme hamiltonien, elle traduit l'effet de l'émission spontanée, qui couple l'état excité de l'atome aux modes l' du champ par un hamiltonien du type $\sum_{l'} g_{l'} (|a\rangle \langle b| \widehat{a}_{l'}^+ + |b\rangle \langle a| \widehat{a}_{l'})$ (transition de l'atome et absorption ou émission d'un photon du mode l'). La deuxième ligne traduit l'effet des pertes de la cavité, qui couple le mode l de la cavité aux autres modes du monde extérieur par un hamiltonien du type : $\sum_{l'} g_{l'} (\widehat{a}_l \widehat{a}_{l'}^+ + \widehat{a}_{l'} \widehat{a}_l^+)$ (diffusion par les pertes d'un photon du mode l de la cavité en un photon dans un autre mode l' , et processus inverse). En comparant les deux termes de couplage responsables de la relaxation, on constate l'analogie formelle entre les deux opérateurs de relaxation dans l'équation pilote. Cette équation n'a pas de solution simple dans le cas général, et il faudra faire des approximations supplémentaires pour la résoudre. Pour le cas des atomes de Rydberg en cavité Γ_{sp} est négligeable, mais on peut introduire le deuxième terme de relaxation pour tenir compte des pertes de la cavité.

5.2 Régimes de couplage fort et de couplage faible

On considère la problème où *un seul atome excité* se trouve dans la cavité résonnante, supposée initialement dans le vide. Il y a alors un seul photon au maximum dans le mode l de la cavité. Le système se décompose alors sur les trois seuls états : $|b; 0\rangle$, $|a; 1\rangle$ et $|a; 0\rangle$. La matrice densité σ du système est une matrice 3×3 . Posons :

$$\langle \widehat{a}_l \rangle = Tr(\sigma \widehat{a}_l) = \langle a; 1 | \sigma | a; 0 \rangle = e(t)$$

C'est, à une constante multiplicative près, le champ électrique complexe régnant dans la cavité.

$$\langle |a\rangle \langle b| \rangle = Tr(\sigma |a\rangle \langle b|) = \langle b; 0 | \sigma | a; 0 \rangle = d(t)$$

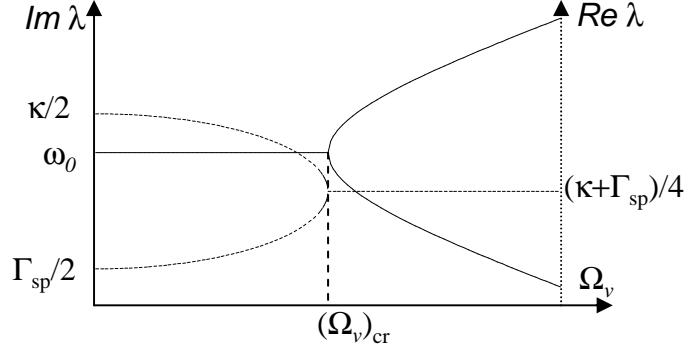


Fig. 6.12: parties réelles et imaginaires des valeurs propres en fonction du couplage Ω_v dans le cas où $\kappa > \Gamma_{sp}$

C'est, à une constante multiplicative près, le dipôle atomique complexe. A partir de l'équation pilote, on dérive facilement les équations d'évolution des quantités d et e :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e &= \left(-i\omega_l - \frac{\kappa}{2}\right)e + \frac{\Omega_v}{2}d \\ \frac{d}{dt}d &= \left(-i\omega_0 - \frac{\Gamma_{sp}}{2}\right)d - \frac{\Omega_v}{2}e\end{aligned}$$

où Ω_v est la fréquence de Rabi du vide, déjà introduite plus haut. On tombe sur deux équations dont la structure est familière : il s'agit de l'équation d'évolution de deux *oscillateurs classiques couplés et amortis*, de fréquences propres ω_l et ω_0 . Si on se place pour simplifier dans le cas résonnant $\omega_0 = \omega_l$, les exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 du système couplé sont racines de l'équation :

$$\lambda^2 + \left(2i\omega_0 + \frac{\kappa + \Gamma_{sp}}{2}\right)\lambda + \left(\frac{\Gamma_{sp}}{2} + i\omega_0\right)\left(\frac{\kappa}{2} + i\omega_0\right) + \frac{\Omega_v^2}{4} = 0$$

Deux cas se présentent selon la valeur du discriminant $\Delta = \left(\frac{\Gamma_{sp} - \kappa}{2}\right)^2 - \Omega_v^2$

Couplage fort

C'est le cas où $\Omega_v > (\Omega_v)_{cr} = \frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|}{2}$, qui correspond à une faible relaxation (ou à deux relaxations identiques) par rapport au couplage. Les

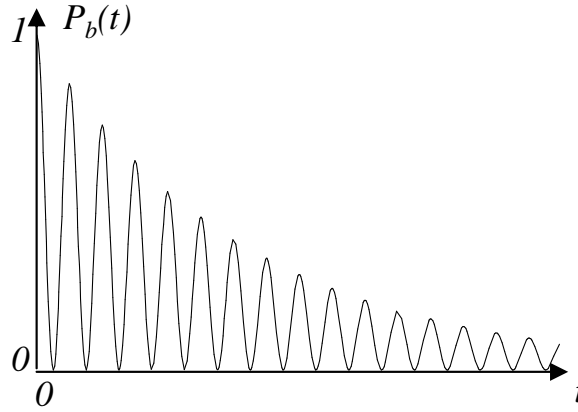


Fig. 6.13: probabilité de trouver le système dans l'état excité en régime de couplage fort

exposants valent alors :

$$\lambda_{1,2} = -i\omega_0 \pm \frac{i}{2} \sqrt{\Omega_v^2 - \frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|^2}{4}} - \frac{\kappa + \Gamma_{sp}}{4}$$

L'évolution du système étant en $e^{\lambda t}$, la partie réelle de λ donne le terme de relaxation du système, qui est donc en $e^{-\frac{\kappa + \Gamma_{sp}}{4} t}$ pour les variables $e(t)$ et $d(t)$, qui subissent une relaxation "moyenne" entre la relaxation due à la cavité et celle due aux atomes. Il y a par contre deux fréquences d'oscillations, correspondant aux deux parties imaginaires différentes (voir figure (6.12)). En l'absence de relaxation, ces deux pulsations sont séparées de Ω_v , comme on peut s'y attendre de la part de deux oscillateurs classiques de mêmes pulsations et couplés entre eux. On retrouve aussi la levée de dégénérescence d'amplitude Ω_v des niveaux de l'atome habillé. Lorsque la relaxation n'est plus négligeable, l'écart entre les fréquences propres du système diminue et s'annule pour $\Omega_v = \frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|}{2}$.

Si on part de l'atome dans l'état excité en l'absence de photons dans la cavité, on obtient la probabilité de trouver le système dans l'état excité de la figure (6.13) : il y a échange périodique d'énergie entre le dipole atomique et le champ électrique comme pour tout système d'oscillateurs couplés, mais l'énergie totale du système est dissipée par les deux relaxations du système.

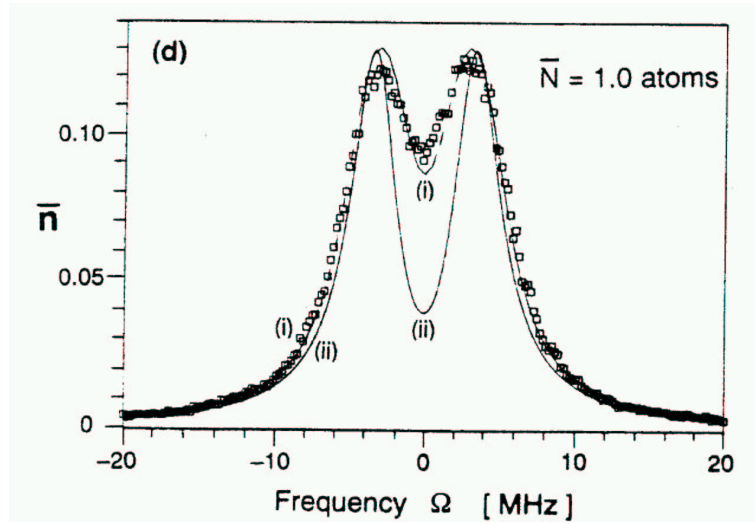


Fig. 6.14: spectre de transmission d'une cavité Fabry-Perot de très grande finesse contenant en moyenne un seul atome et accordée à résonance exacte avec la résonance atomique

L'existence de deux modes propres du système atome+cavité en régime de couplage fort se manifeste aussi sur les propriétés de la cavité : il faut pour cela coupler la cavité à une source extérieure de rayonnement de fréquence ω_s variable au voisinage de ω_l , par exemple en envoyant une onde incidente extérieure à travers l'un des deux miroirs du Fabry-Perot. Ce couplage à une source classique de rayonnement relève de l'approche "semi-quantique", qui a été abordée dans le paragraphe 1.2 du chapitre 4. Il a pour effet de rajouter un terme source dans l'hamiltonien du système, qui s'écrit en représentation d'interaction vis-à-vis de l'hamiltonien de rayonnement et en négligeant les termes anti-résonnants :

$$\hat{H}_{SQ,int} = A_l \hat{a}_l e^{i\omega_s t} + A_l^* \hat{a}_l^+ e^{-i\omega_s t}$$

Il faut alors rajouter l'effet de ce terme dans l'équation d'évolution de la valeur moyenne e du champ intracavité \hat{a}_l , qui comporte un nouveau terme d'évolution hamiltonienne $\langle [\hat{a}_l, \hat{H}_{SQ,int}] / i\hbar \rangle$ qui vaut ici $A_l^* e^{-i\omega_s t} / i\hbar = -A_l e^{-i\omega_s t}$. Si on suppose en outre que le couplage entre la source et la cavité (la transmission du miroir) est suffisamment faible pour qu'il n'y ait jamais plus d'un photon dans la cavité, on peut utiliser les résultats de cette partie.

Les équations d'évolution de e et d s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e &= \left(-i\omega_l - \frac{\kappa}{2}\right)e + \frac{\Omega_v}{2}d - A'e^{-i\omega_s t} \\ \frac{d}{dt}d &= \left(-i\omega_0 - \frac{\Gamma_{sp}}{2}\right)d - \frac{\Omega_v}{2}e\end{aligned}$$

Ce système comporte maintenant un terme inhomogène et a donc une solution forcée, de la forme $e = e_0 e^{-i\omega_s t}$, $d = d_0 e^{-i\omega_s t}$ donnés par :

$$\begin{aligned}\left(i(\omega_s - \omega_l) - \frac{\kappa}{2}\right)e_0 + \frac{\Omega_v}{2}d_0 &= A' \\ \left(i(\omega_s - \omega_0) - \frac{\Gamma_{sp}}{2}\right)d_0 - \frac{\Omega_v}{2}e_0 &= 0\end{aligned}$$

Ce système se résout aisément pour donner la valeur du champ intracavité :

$$e_0 = A' \frac{i(\omega_s - \omega_0) + \frac{\Gamma_{sp}}{2}}{(i\omega_s + \lambda_1)(i\omega_s + \lambda_2)}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux exposants caractéristiques déterminés au début de ce paragraphe. L'énergie électromagnétique intracavité est proportionnelle à $|e_0|^2$ qui s'écrit :

$$|e_0|^2 = |A'|^2 \frac{(\omega_s - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma_{sp}^2}{4}}{(\omega_s + \text{Im}\{\lambda_1\})^2 + \text{Re}\{\lambda_1\}^2)(\omega_s + \text{Im}\{\lambda_2\})^2 + \text{Re}\{\lambda_2\}^2}$$

Elle présentera donc un maximum au voisinage des résonances du système, c'est-à-dire lorsque ω_s coïncidera avec $-\text{Im}\{\lambda_1\}$ ou $-\text{Im}\{\lambda_2\}$, la largeur des pics correspondants étant égale à $\text{Re}\{\lambda_1\}$ et $\text{Re}\{\lambda_2\}$, ces quantités étant données sur la figure (6.12). On obtient donc directement de cette manière le spectre du système couplé.

En mesurant la transmission de la cavité à travers le deuxième miroir du Fabry-Perot, on obtient une quantité proportionnelle à $|e_0|^2$. Lorsque le champ incident est très faible et qu'on fait varier sa fréquence autour de la fréquence commune de résonance de la cavité vide et de l'atome, on observe, en l'absence d'atome un pic de résonance d'Airy unique (donné par l'expression précédente avec $\Omega_v = 0$). Par contre si la cavité contient un atome, c'est le système atome+cavité qui est testé, et on observe un dédoublement du pic de transmission correspondant à l'apparition des deux nouvelles fréquences propres du système (voir figure 6.14, tirée de la référence R. Thompson et al, Phys. Rev. Letters, **68**, 1133 (1992)).

Couplage faible

C'est le cas où $\Omega_v < (\Omega_v)_{cr} = \frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|}{2}$, qui correspond à une forte relaxation par rapport au couplage. Les valeurs propres valent alors :

$$\lambda = -i\omega_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|^2}{4} - \Omega_v^2} - \frac{\kappa + \Gamma_{sp}}{4}$$

La partie imaginaire de λ vaut $-\omega_0$. Il n'y a plus qu'une seule fréquence d'oscillation pour le système, qui est la fréquence non perturbée ω_0 : la levée de dégénérescence due au couplage est donc totalement annulée par l'effet de la relaxation. Par contre *le système a deux taux de relaxation* Γ_{\pm} :

$$\Gamma_{\pm} = \frac{\kappa + \Gamma_{sp}}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\kappa - \Gamma_{sp}|^2}{4} - \Omega_v^2}$$

Ces deux taux tendent vers $\frac{\kappa}{2}$ et $\frac{\Gamma_{sp}}{2}$ lorsque le couplage Ω_v tend vers zéro (voir figure (6.12)). Lorsque Ω_v est petit, on a, par exemple dans le cas $\kappa > \Gamma_{sp}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \frac{\kappa}{2} - \frac{\Omega_v^2}{2(\Gamma_{sp} - \kappa)} \\ \Gamma_- &= \frac{\Gamma_{sp}}{2} + \frac{\Omega_v^2}{2(\Gamma_{sp} - \kappa)} \end{aligned}$$

La deuxième relation montre en particulier que *l'atome a une durée de vie raccourcie* lorsqu'on le met dans une cavité résonnante avec la transition, même non parfaite (c'est l'"effet Purcell"). En revanche, la cavité a une durée de vie rallongée par le même couplage. Si la cavité est de moins en moins résonnante, κ devient trop grand, et on ne peut plus donner un rôle particulier au mode discret résonnant l de la cavité. On a plutôt affaire dans la cavité à une bande de fréquences, donc à un continuum "structuré", de largeur faible mais non nulle. Dans ce cas c'est la règle d'or de Fermi qu'on utilise, mais avec une densité d'états $\rho(E)$ modifiée par rapport à celle du vide. Dans ce cas, le taux d'émission spontanée est plus grand que celui dans l'espace libre lorsque la cavité est résonnante avec l'atome, et plus petit lorsque la cavité est hors résonance.

5.3 Atome à deux niveaux interagissant avec un champ laser monomode intense en présence de relaxation

Dans cette configuration, comme nous l'avons déjà signalé, le couplage se fait essentiellement avec le mode laser l , mais il y a aussi émission spontanée vers d'autres modes. Si on décrit, en première approximation, le champ laser par un état nombre $|n\rangle$, le système ne reste donc pas dans la multiplicité \mathcal{M}_n sous-tendue par $|a; n\rangle$ et $|b, n-1\rangle$. Il peut se retrouver dans l'état $|a; n-1, 1\rangle$ par émission spontanée, donc dans la multiplicité \mathcal{M}_{n-1} sous-tendue par les états $|a; n-1\rangle$ et $|b, n-2\rangle$. Il y a *cascade radiative* du système entre les multiplicités de l'atome habillé, plus précisément entre les niveaux de l'atome habillé, peu perturbés par cette instabilité (si on suppose que le déplacement de Lamb est petit devant le couplage, égal maintenant à $\Omega_v\sqrt{n}$). Les fréquences des photons d'émission spontanée sont donc égales aux fréquences de Bohr de l'atome habillé :

$$E_{\pm n} - E_{\pm n-1} = \omega_l \pm \sqrt{n} \frac{\Omega_v}{2} \pm \sqrt{n-1} \frac{\Omega_v}{2}$$

Comme $n \gg 1$, $\sqrt{n} \approx \sqrt{n-1}$, et on n'a en fait que trois fréquences de transition possibles, ω_l et $\omega_l \pm \sqrt{n}\Omega_v$. Rappelons enfin que $\sqrt{n}\Omega_v \approx \Omega_R$, la fréquence de Rabi purement atomique de la théorie semi-classique. La théorie complète du phénomène donne en outre les largeurs ($\approx \Gamma_{sp}$) des résonances. L'émission spontanée d'un atome irradié par une onde laser intense a donc lieu à trois fréquences au lieu d'une, séparées par la pulsation de Rabi : c'est le *triplet de fluorescence*, ou triplet de Mollow, que l'on peut observer dès que $\Omega_R > \Gamma$ (voir figure (6.15), tirée de la référence : R. Grove et al, Phys. Rev. A, **15**, 227 (1977)).

6. Récapitulatif

Nous avons vu dans ce chapitre un certain nombre de phénomènes qui apparaissent lorsqu'on fait interagir un atome avec un champ résonnant ou quasi-résonnant. Citons parmi les phénomènes les plus importants :

- La possibilité de créer et de manipuler des superpositions d'états atomiques ou atome-champ (états "intriqués" ou états de l'atome habillé), c'est-à-dire de la "cohérence quantique".

- Les effets de saturation : on constate qu'un système à deux niveaux est un système très "non linéaire" (à la différence d'un oscillateur harmonique).

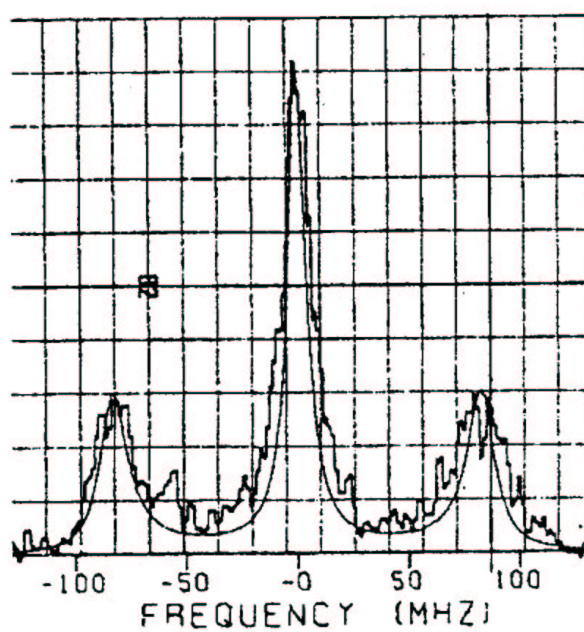


Fig. 6.15: mesure du spectre de fluorescence d'un atome de sodium éclairé à résonance exacte par un laser de $640\text{mW}/\text{cm}^2$

- L'atome est fortement perturbé par son interaction avec un champ, vide ou dans un état de grande énergie : déplacement des niveaux atomiques, apparition de triplet, diminution ou augmentation du taux d'émission spontanée

- Le rôle particulier de l'état cohérent du champ, qui permet de décorrélérer l'atome et le champ, et donc d'écrire des équations d'évolution pour les seules variables atomiques, qui sont les équations de Bloch du chapitre 2.

7. SYSTÈMES À TROIS NIVEAUX

Il existe de nombreuses situations expérimentales où trois niveaux, et non pas seulement deux, se trouvent fortement peuplés. On accède alors à un grand nombre de phénomènes nouveaux. On peut rencontrer de nombreuses configurations possibles pour les trois niveaux, et les possibilités pour les champs électromagnétiques appliqués sont innombrables. On ne va dans ce chapitre qu'effleurer le domaine, et nous restreindre à quelques phénomènes parmi les plus importants.

1. *Pompage optique*

Imaginé par Kastler en 1949, c'est un moyen extrêmement simple de manipuler les populations de niveaux atomiques, ainsi que les cohérences, comme nous le verrons aussi plus loin, et de mettre les atomes dans une situation hors d'équilibre. La méthode trouve une des ses plus importantes applications dans les milieux lasers, où elle permet de réaliser des inversions de population.

1.1 *Cas simple*

Considérons trois niveaux $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$, dont deux proches, et un niveau beaucoup plus excité (voir figure 7.1). Par exemple, $|a\rangle$ et $|c\rangle$ sont les deux niveaux de structure hyperfine de l'état fondamental, et $|b\rangle$ est un niveau électronique excité. L'émission spontanée s'effectue de $|b\rangle$ vers $|a\rangle$ avec un taux Γ_{ba} , et de $|b\rangle$ vers $|c\rangle$ avec un taux Γ_{bc} . En revanche, elle est négligeable du niveau $|c\rangle$ vers $|a\rangle$. On se place dans la situation où le modèle d'Einstein est valable (γ_d grand, ou excitation en raie large). L'atome est excité avec un champ résonnant sur la transition $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$. Les équations d'évolution des populations de l'atome s'écrivent alors :

$$\frac{dN_a}{dt} = +\Gamma_{ba}N_b + \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2}{\gamma_d} (N_b - N_a)$$

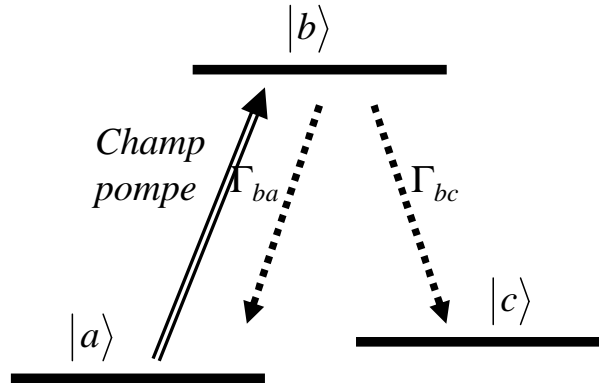


Fig. 7.1: configuration de niveaux pour le pompage optique

$$\begin{aligned} \frac{dN_c}{dt} &= \Gamma_{bc}N_b \\ \frac{dN_b}{dt} &= -(\Gamma_{ba} + \Gamma_{bc})N_b - \frac{\Omega_R^2}{2\gamma_d}(N_b - N_a) \end{aligned}$$

où Ω_R est la pulsation de Rabi associée au champ appliqué. On trouve facilement le régime stationnaire atteint par le système :

$$N_a = 0 \quad N_b = 0 \quad N_c = 1$$

Toute la population se retrouve dans le niveau non atteint par le laser ! Ce résultat en apparence paradoxal a une explication simple : le niveau $|c\rangle$ est un *niveau piège*, ou "niveau réservoir" où le système arrive de temps en temps à cause de l'émission spontanée, mais *d'où il ne repart jamais*. On conçoit donc que si on attend suffisamment longtemps, l'atome se trouvera nécessairement "pompe" dans cet état.

On peut trouver l'équation d'évolution de l'état fondamental $|a\rangle$ en faisant l'hypothèse que la population de l'état $|b\rangle$ évolue beaucoup plus vite que celle de l'état $|a\rangle$. On peut alors *éliminer adiabatiquement* N_b des populations en faisant $\frac{dN_b}{dt} = 0$, comme nous l'avons déjà fait dans la partie 2.2. Il faudra s'assurer par la suite de la validité de cette hypothèse. On trouve alors :

$$\frac{dN_a}{dt} = -\Gamma_{pompage}N_a$$

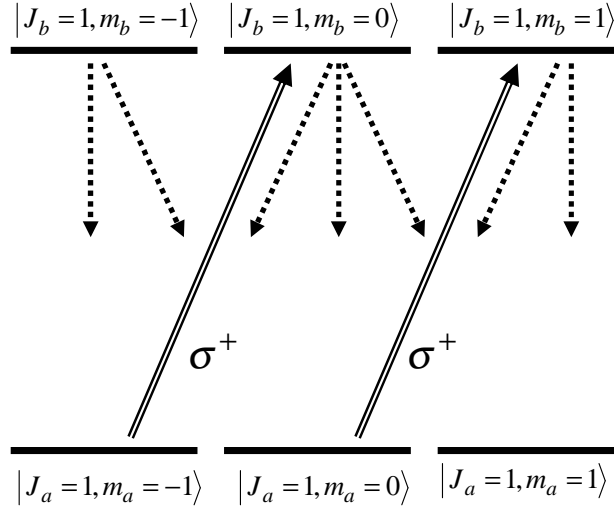


Fig. 7.2: pompage Zeeman dans la configuration $J_a = 1$, $J_b = 1$ en présence d'une onde polarisée σ^+

avec :

$$\Gamma_{pompage} = \frac{\Gamma_{bc}}{\Gamma_{ba} + \Gamma_{bc} + \frac{\Omega_R^2}{2\gamma_d}} \frac{\Omega_R^2}{2\gamma_d} \approx \frac{\Gamma_{bc}}{\Gamma_{ba} + \Gamma_{bc}} \frac{\Omega_R^2}{2\gamma_d}$$

Le taux de pompage optique $\Gamma_{pompage}$ est donc proportionnel à la puissance incidente. Cette approche est juste si $\Gamma_{pompage} \ll \Gamma_{ba} + \Gamma_{bc}$, mais aussi si $\Gamma_{pompage} \gg \Gamma_{ca}$, où Γ_{ca} est le taux de relaxation du niveau $|c\rangle$ vers le niveau $|a\rangle$, dû à l'effet perturbateur de l'environnement, puisque l'émission spontanée est négligeable sur cette transition. Une conséquence du pompage optique est que $N_a - N_b = 0$: le système devient transparent pour l'onde appliquée.

Le pompage optique peut être un phénomène utile, puisqu'il permet de peupler efficacement un niveau, ou gênant, puisqu'il stoppe l'interaction entre le champ appliqué et la transition avec lequel il est résonnant. Pour le contre-carrer, il suffit de faire en sorte que le niveau $|c\rangle$ ne soit plus piège. On peut en particulier ajouter un faible faisceau lumineux, dit "repompeur", sur la transition $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$, qui "recycle" la population de $|c\rangle$.

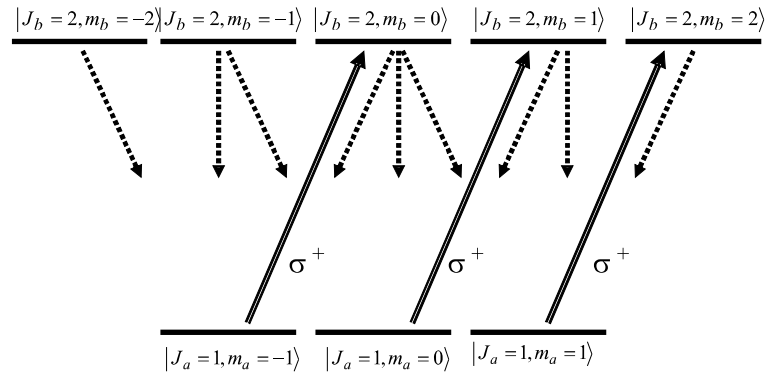


Fig. 7.3: pompage Zeeman dans la configuration $J_a = 1$, $J_b = 2$ en présence d'une onde polarisée σ^+

1.2 Pompage Zeeman

Un cas souvent rencontré est celui où les deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont des niveaux atomiques de mouvement cinétique J_a , J_b , qui ont donc $(2J + 1)$ sous-niveaux Zeeman dégénérés en l'absence de champ magnétique.

Prenons tout d'abord comme exemple le cas $J_a = J_b = 1$ (figure 7.2). On ne peut pas ici séparer ces sous-niveaux par des conditions de résonance avec un champ appliqué, car ils sont dégénérés. Par contre, en choisissant un champ appliqué de polarisation circulaire σ^+ par rapport à un axe Oz donné, les règles de sélection imposent la contrainte $\Delta m = +1$ pour les transitions possibles (les sous-niveaux Zeeman étant définis comme états propres de \hat{J}_z par rapport à ce même axe Oz). Si l'atome est initialement à l'équilibre thermodynamique, les trois sous-niveaux du niveau fondamental sont peuplés également, donc $\langle J_z \rangle = 0$. Le champ polarisé circulairement va peupler dans l'état excité les sous-niveaux $|b; m = 0\rangle$ et $|b; m = 1\rangle$. L'émission spontanée s'effectue avec des photons de polarisation quelconque, donc avec $\Delta m = 0 \pm 1$. On voit sur la figure (7.2) que le sous-niveau $|a; m = 1\rangle$ est un niveau piège. Au bout d'un temps $\Gamma_{pompage}^{-1}$, l'atome va se trouver porté dans l'état $|a; m = 1\rangle$, caractérisé en particulier par son moment cinétique $\langle J_z \rangle = \hbar$. La lumière de polarisation circulaire σ^+ que l'on a utilisée ayant un mouvement cinétique non nul, on voit que le pompage optique a transféré du moment cinétique du rayonnement à l'atome.

Plaçons nous maintenant dans le cas d'une transition $J_a = 1$, $J_b = 2$ (figure 7.3), toujours en présence d'une onde polarisée circulairement σ^+ . On

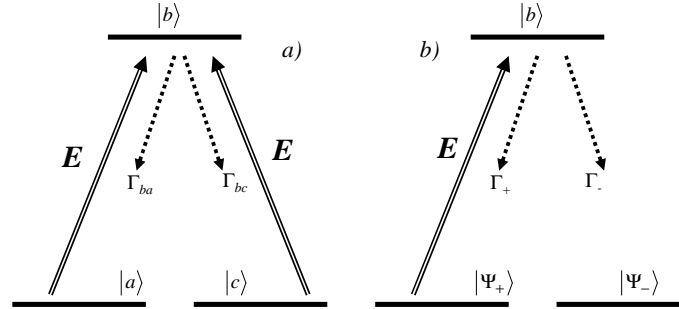


Fig. 7.4: configuration de niveaux pour le piégeage cohérent de population : a) dans la base des états atomiques usuels ; b) dans la base des états couplés et non couplés

voit alors aisément qu'au bout du temps de pompage, le système sera dans le sous-espace sous-tendu par les états $|a; m = 1\rangle$ et $|b; m = 2\rangle$: il n'y a plus un seul état piège, mais deux. Cette configuration permet donc d'*isoler un système à deux niveaux* en présence de nombreux autres niveaux de même énergie. Elle est très souvent utilisée par les expérimentateurs, qui disposent rarement de véritables systèmes à deux niveaux "naturels".

2. Piégeage cohérent de population

Ce phénomène de manipulation des cohérences est aussi appelé phénomène de "résonance noire".

2.1 Cas de deux niveaux dégénérés

Considérons la configuration de la figure (7.4a), où $|a\rangle$ et $|c\rangle$ sont par exemple deux sous-niveaux Zeeman, donc de même énergie en champ magnétique nul. On utilisera les notations :

$$\begin{aligned} \langle a | \vec{D} \cdot \vec{\epsilon} | b \rangle &= d_{ab} \\ \langle c | \vec{D} \cdot \vec{\epsilon} | b \rangle &= d_{cb} \end{aligned}$$

où $\vec{\varepsilon}$ est le vecteur polarisation du champ utilisé. On peut introduire les états quantiques :

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{(d_{cb}^* |a\rangle \pm d_{ab}^* |c\rangle)}{\sqrt{|d_{cb}|^2 + |d_{ab}|^2}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+ | \vec{D} \cdot \vec{\varepsilon} | b \rangle &= \frac{2d_{ab}d_{cb}}{\sqrt{|d_{ab}|^2 + |d_{cb}|^2}} \\ \langle \Psi_- | \vec{D} \cdot \vec{\varepsilon} | b \rangle &= 0 \end{aligned}$$

L'état $|\Psi_- \rangle$ n'est donc pas couplé au champ appliqué. On peut alors redessiner la configuration des niveaux en changeant de base (figure (7.4b)). Les taux de desexcitation par émission spontanée de $|b\rangle$ vers $|\Psi_+ \rangle$ et $|\Psi_- \rangle$, Γ_+ et Γ_- , sont tous deux a priori différents de zéro, car il n'y a pas annulation de l'élément de matrice dipolaire pour toutes les polarisations possibles du photon spontané. On se retrouve donc dans la situation du pompage optique décrite au début de ce chapitre, avec un état non couplé au champ appliqué. Au bout du temps de pompage, le système est porté dans l'état $|\Psi_- \rangle$ qui n'interagit plus avec le champ, donc un état "piège". On a donc créé dans le régime stationnaire une *superposition cohérente bien définie* des deux niveaux inférieurs. D'autre part, lorsqu'il est dans cet état, le système n'interagit plus avec le champ, et il ne fluorescence donc plus : d'où sa dénomination d'"état noir".

2.2 Cas de deux niveaux non dégénérés

Si les deux niveaux inférieurs ne sont plus de même énergie, les états $|\Psi_+ \rangle$ et $|\Psi_- \rangle$ ne sont plus stationnaires. En particulier :

$$|\Psi_- (t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|d_{cb}|^2 + |d_{ab}|^2}} \left(d_{cb}^* e^{-iE_a \frac{t}{\hbar}} |a\rangle - d_{ab}^* e^{-iE_c \frac{t}{\hbar}} |c\rangle \right)$$

La phase relative des deux composantes de l'état évolue en $e^{i(E_a - E_c) \frac{t}{\hbar}} = e^{i\omega_{ac} t}$. Lorsque $t = t_0 = \frac{\pi}{\omega_{ac}}$, alors il y a changement de signe, et le système se retrouve dans l'état $|\Psi_- (t_0)\rangle = |\Psi_+ \rangle$. Il est donc à nouveau couplé à la lumière, et n'est donc plus noir. Une analyse plus détaillée du phénomène montre qu'en fait il y a concurrence entre le pompage vers le niveau piège

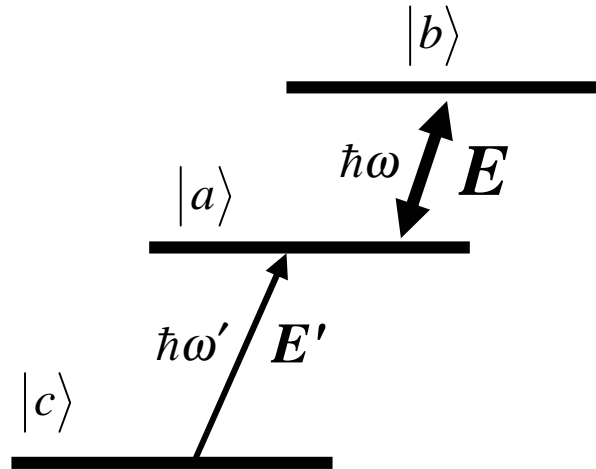


Fig. 7.5: configuration des niveaux permettant de mettre en évidence les déplacements lumineux

et déphasage dû à la levée de dégénérescence. Elle permet de calculer les populations stationnaires, non nulles toutes deux et fortement différentes, des deux sous-niveaux $|\Psi_+\rangle$ et $|\Psi_-\rangle$.

3. Déplacements lumineux

De la même manière que la matière perturbe la lumière, en modifiant sa vitesse (c'est l'effet d'indice), la lumière perturbe la matière, en modifiant ses niveaux d'énergie : c'est le phénomène de *déplacement lumineux* (ou "light shift"), intimement lié au précédent. On peut aussi voir le light shift comme l'extension à un champ non nul du Lamb shift dû au couplage avec le vide de rayonnement.

Pour mettre en évidence cet effet, on va se placer dans la configuration simple de la figure (7.5), dite "configuration en échelle". On applique un champ intense, ou champ pompe, de fréquence fixe ω , sur la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, avec $\omega - \omega_0 = \delta$ faible, et un champ faible, ou champ sonde, sur la transition $|c\rangle \rightarrow |a\rangle$, dont on balaie la fréquence ω' pour trouver les résonances du système. On suppose en outre que les fréquences de Bohr ω_{ba} et ω_{ac} sont très différentes l'une de l'autre.

3.1 Approche quantique : doublet Autler-Townes

A l'ordre 0 par rapport au champ sonde, les états propres du système (atome + champ pompe + champ sonde) sont :

- $|c; n, n'\rangle$, où n est le nombre de photons dans le mode p du champ pompe, et n' le nombre de photons dans le mode s du champ sonde, supposés tous deux décrits, pour simplifier les calculs, par des états nombres ;

- $|\Psi_{\pm n}, n'\rangle$, où $|\Psi_{\pm n}\rangle$ sont les états habillés résultant de l'interaction quasi-résonnante entre le champ pompe et les états atomiques $|a\rangle$ et $|b\rangle$. A l'ordre zéro de perturbation, le champ sonde ne perturbe évidemment pas les niveaux avec lesquels il interagit.

A l'ordre 1 par rapport au champ sonde, le terme de perturbation, qui s'écrit :

$$iD_{ac} (-\hat{a}_s |a\rangle \langle c| + |c\rangle \langle a| \hat{a}_s^\dagger)$$

pourra induire des transitions entre états couplés par cette perturbation, c'est-à-dire entre $|c; n, n'\rangle$ et $|\Psi_{\pm n}, n' - 1\rangle$ (car $|c\rangle$ est en dessous de $|a\rangle$). Cette transition se fait à énergie constante, donc :

$$E_c + n\hbar\omega + n'\hbar\omega' = n\hbar\omega + \hbar \left(-\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{n\Omega_v^2 + \delta^2} \right) + (n' - 1)\hbar\omega' + E_a$$

La probabilité de ces transitions, donc l'intensité des raies, sera proportionnelle aux carrés des éléments de matrice correspondants, soit

$$\left| \langle c | \vec{D} | a \rangle \right|^2 \left| \langle a_n | \Psi_{\pm n} \rangle \right|^2$$

L'intensité de la transition sera donc proportionnelle à $\cos^2 \theta_n$ pour une fréquence de champ sonde $\omega' = \omega_{ac} - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{n\Omega_v^2 + \delta^2}$, et à $\sin^2 \theta_n$ pour une fréquence de champ sonde $\omega' = \omega_{ac} - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{n\Omega_v^2 + \delta^2}$. Rappelons que $n\Omega_v^2 = \Omega_R^2$ n'est autre que la pulsation de Rabi obtenue dans l'approche semi-classique. La configuration que nous venons d'étudier permet donc de faire directement la spectroscopie des niveaux de l'atome habillé.

Considérons le cas particulier simple où le champ pompe est résonnant : $\delta = 0$, donc $\theta_n = \frac{\pi}{4}$. On a alors deux transitions de même intensité, situées en $\omega' = \omega_{ac} \pm \frac{1}{2}\Omega_R$. C'est le *doublet Autler-Townes*, manifestation directe de "l'habillage" de l'atome par le champ perturbateur. Signalons qu'on aurait pu aussi calculer la position de ces deux raies en résolvant les équations de Bloch pour le système à trois niveaux, en traitant à tous les ordres l'interaction avec le champ pompe, et au premier ordre l'interaction avec le champ sonde.

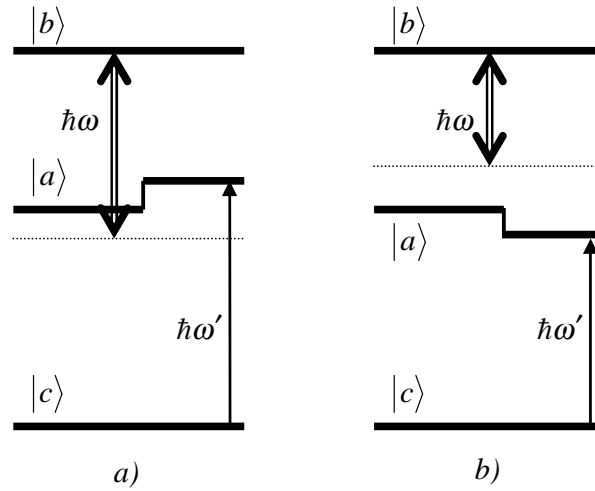


Fig. 7.6: le niveau atomique est "repoussé" par le "niveau virtuel" distant de $\hbar\omega$ de l'autre niveau

3.2 Limite perturbative pour le déplacement lumineux

Plaçons-nous maintenant dans le cas $\Omega_R \ll \delta$. Alors $\theta_n \approx -\frac{\Omega_R}{2\delta} \ll 1$. les deux raies sont alors très dissymétriques : La raie correspondant au signe plus a pour poids 1, et la raie correspondant au signe moins a une intensité relative $\frac{\Omega_R^2}{4\delta^2}$, donc très faible. On n'observe donc pratiquement qu'une raie, et non plus un doublet, de fréquence :

$$\hbar\omega' = \left(E_a + \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\delta} \right) - E_c$$

Tout se passe comme si le niveau $|a\rangle$ était déplacé sous l'effet du champ (non saturant, donc faible ou fortement non-résonnant) interagissant avec la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$. Ce niveau a donc subi le déplacement lumineux :

$$\Delta E_a = \frac{\hbar\Omega_R^2}{4(\omega - \omega_0)} = \frac{d_{ab}^2 E^2}{4(\omega - \omega_0)}$$

Le signe de ce déplacement peut être déterminé en faisant le schéma de la figure (7.6) : on constate que le niveau "virtuel" d'énergie $E_b - \hbar\omega$ "repousse" toujours le niveau $|a\rangle$.

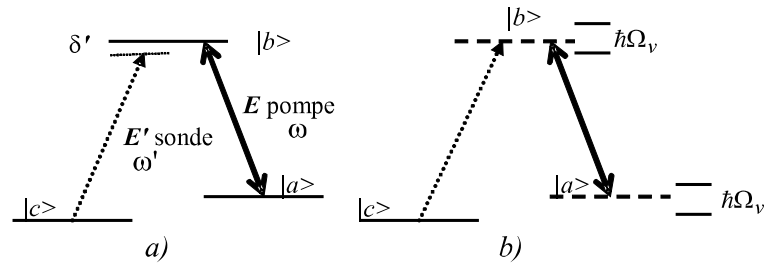


Fig. 7.7: a) configuration des niveaux d'énergie et des champs. b) interprétation de la transparence électromagnétiquement induite en termes de niveaux de l'atome habillé

3.3 Approche par les équations de Bloch

Là aussi, les effets trouvés précédemment ne sont pas spécifiquement quantiques. Ils existent aussi quand les deux champs sont cohérents et comportent un grand nombre de photons. On peut alors les décrire par les équations de Bloch, généralisées au cas de trois niveaux et deux champs incidents. Nous nous intéressons ici à la configuration de niveaux et de champs de la figure 7.7a), dite "configuration en lambda", où les niveaux $|a\rangle$ et $|c\rangle$ sont deux niveaux proches, et le niveau $|b\rangle$ est beaucoup plus excité. Le champ intense est sur la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, et le champ sonde faible peuple le niveau $|b\rangle$ à partir du fondamental $|c\rangle$. L'hamiltonien d'interaction s'écrit dans ce cas :

$$H_{int} = -dE \cos \omega t (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) - d'E' \cos \omega' t (|c\rangle\langle b| + |b\rangle\langle c|)$$

On supposera pour simplifier que le champ E intense ("champ pompe") est strictement résonnant avec la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, et que le champ E' , beaucoup plus faible ("champ sonde"), est de fréquence ω' variable au voisinage de la résonance avec la transition $|c\rangle \rightarrow |b\rangle$. On pourra alors se contenter de résoudre perturbativement le problème, en ne conservant que les termes d'ordre le plus bas en E' . La matrice densité est maintenant de dimension 3×3 : il y a une population de plus (ρ_{cc}), et deux cohérences : la cohérence ρ_{cb} , excitée par le champ sonde E' , et la cohérence ρ_{ca} , qui joue un rôle important dans ce problème, et se construit à partir de processus à deux photons de type Raman qui font intervenir en même temps les deux champs appliqués à l'atome.

En calculant les commutateurs, il est facile de voir que les équations de Bloch s'écrivent dans la configuration que nous étudions, et en supposant

que la relaxation est purement due à l'émission spontanée, sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{aa} &= \Gamma\rho_{bb} + \Omega_R \text{Im}\tilde{\rho}_{ba} \\
\frac{d}{dt}\rho_{bb} &= -(\Gamma + \Gamma')\rho_{bb} - \Omega_R \text{Im}\tilde{\rho}_{ba} - \Omega'_R \text{Im}\tilde{\rho}_{bc} \\
\frac{d}{dt}\rho_{cc} &= \Gamma'\rho_{bb} + \Omega'_R \text{Im}\tilde{\rho}_{bc} \\
\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ba} &= -\frac{\Gamma}{2}\tilde{\rho}_{ba} + i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) + i\frac{\Omega'_R}{2}\tilde{\rho}_{ca} \\
\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{bc} &= -\left(\frac{\Gamma'}{2} + i\delta'\right)\tilde{\rho}_{bc} + i\frac{\Omega'_R}{2}(\rho_{cc} - \rho_{bb}) + i\frac{\Omega_R}{2}\tilde{\rho}_{ac} \\
\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{ca} &= -i\delta'\tilde{\rho}_{ca} + i\frac{\Omega_R}{2}\tilde{\rho}_{cb} - i\frac{\Omega'_R}{2}\tilde{\rho}_{ba}
\end{aligned}$$

avec $\Omega_R = -dE/\hbar$, $\Omega'_R = -d'E'/\hbar$, $\delta' = \omega' - \omega_{bc}$. On a évidemment à tout instant $\rho_{aa} + \rho_{bb} + \rho_{cc} = 1$. Remarquons que les équations relatives aux cohérences ρ_{ba} et ρ_{bc} ne sont pas simplement la juxtaposition des termes relatifs à une transition, excitée par le champ E , et à l'autre, excitée par le champ E' . Il s'y rajoute le dernier terme, qui fait intervenir la "cohérence Raman" ρ_{ca} , dont la dernière équation nous montre qu'elle a un taux de relaxation nul. En effet les niveaux $|c\rangle$ et $|a\rangle$ sont très proches l'un de l'autre, et le taux de desexcitation spontanée est négligeable sur cette transition.

La solution stationnaire de cette équation est quelque peu complexe à écrire dans le cas général. Nous la résoudrons uniquement de manière perturbative par rapport au champ E' : tout d'abord à tous les ordres en E en supposant $E' = 0$, puis au premier ordre en E' . Dans le cas simple où $\Gamma = \Gamma'$, on trouve en particulier que le taux d'absorption sur le champ E' , proportionnel à $\text{Im}\tilde{\rho}_{bc}$, est proportionnel à la quantité A_{bc} , qui vaut :

$$A_{bc} = \frac{\Gamma^2\delta'^2}{\Gamma^2\delta'^2 + 4(\delta'^2 - \Omega_R^2/4)^2}$$

Dans le cas d'un champ pompe saturant, où $\Omega_R \gg \Gamma$, la contribution du premier terme du dénominateur est négligeable. On trouve alors qu'on a deux pics de résonance dans l'absorption, obtenus pour $\delta' = \pm\Omega_R/2$: on retrouve bien le doublet Autler-Townes, avec la forme exacte de la raie d'absorption.

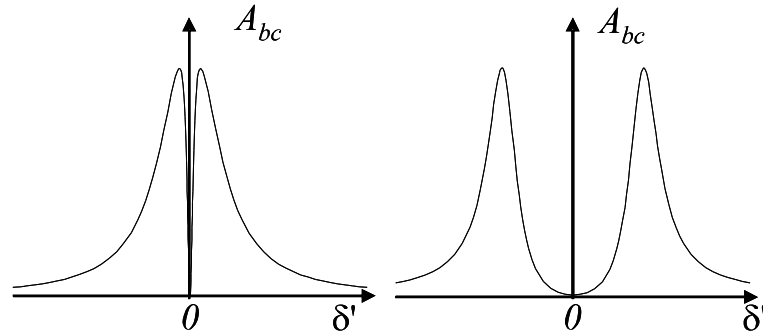


Fig. 7.8: coefficient d'absorption d'un faible champ sonde sur la transition bc en présence d'un champ saturant sur la transition ab en fonction de la fréquence du champ sonde

Un calcul simple nous permet de trouver à partir des équations de Bloch, dans la limite opposée $\Omega_R \ll \Gamma$, l'expression détaillée du Lamb-shift :

$$\Delta E_a = \frac{\hbar \Omega_R^2}{4} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

Cette expression est celle d'un *phénomène de dispersion*, très analogue à celle de la variation de l'indice d'un milieu atomique, ce qui corrobore le lien fort entre ces deux phénomènes.

3.4 Transparence électromagnétiquement induite

La variation du taux d'absorption de l'atome en fonction de δ' est donnée sur la figure(7.8) pour deux valeurs croissantes de la fréquence de Rabi. On remarque pour la plus forte intensité deux pics Autler-Townes bien séparés, qui se confondent à plus basse intensité. On remarque aussi que dans tous les cas l'absorption s'annule pour $\delta' = 0$ (l'expression précédente montre que que $A_{bc}(\delta' = 0) = 0$). On constate ainsi que, pour toute puissance pompe, *il n'y a pas d'absorption lorsque les deux champs sont à résonance exacte sur les deux transitions*. Ce phénomène, tout-à-fait paradoxal a priori puisqu'à la résonance exacte correspond en général un maximum d'absorption et non pas un zéro, est appelé "transparence électromagnétiquement induite" (Electromagnetically Induced Transparency : EIT). Il est très analogue au phénomène de résonance noire décrit plus haut, mais induit entre des niveaux d'énergie différente sous l'effet d'un champ saturant extérieur qui crée les deux bandes latérales d'absorption de Rabi.

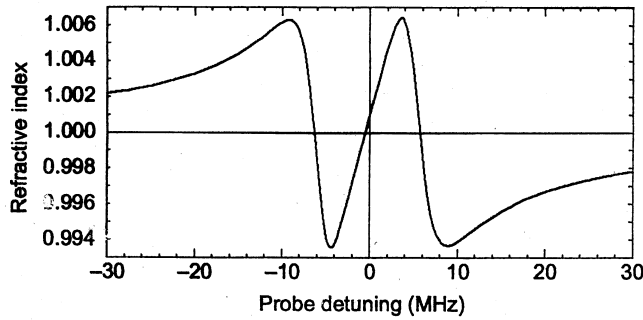


Fig. 7.9: variation de l'indice de réfraction vu par le champ sonde sur la transition bc en présence d'un champ saturant sur la transition ab (calcul fait dans les conditions exactes de l'expérience de la figure 7.10, et qui impliquent l'existence d'un léger déplacement de la résonance par rapport au désaccord nul)

L'annulation de l'absorption exactement au milieu de ces deux maxima se comprend en utilisant le modèle de l'atome habillé (figure 7.7b). Les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont "habillés" par le champ pompe et se dédoublent. L'absorption par le champ sonde implique des cycles d'émission et d'absorption via les niveaux habillés $|\Psi_+\rangle$ et $|\Psi_-\rangle$, sans qu'on puisse distinguer entre les deux chemins possibles. Il faut donc ajouter les amplitudes et non les probabilités des deux processus. Lorsque $\delta' = 0$, les amplitudes sont égales et interfèrent destructivement.

On a ici un exemple supplémentaire du fait que l'approche quantique est utile en dehors de son "domaine réservé" de validité, c'est-à-dire dans des configurations où l'approche semi-classique est a priori suffisante pour décrire les phénomènes. Les énergies propres et les états stationnaires pour le système global atome+champ qu'elle permet d'introduire permettent en effet de mieux comprendre des phénomènes purement semi-classiques, mais qui sont difficiles à extraire du formalisme des équations de Bloch, formées d'un grand nombre d'équations différentielles couplées.

3.5 Réduction de la vitesse de propagation d'une impulsion lumineuse

Le modèle précédent permet aussi de déterminer l'indice de réfraction pour le champ E' , qui est proportionnel à $Re\tilde{\rho}_{bc}$, et qui est représenté en fonction de δ' sur la figure(7.9). On remarque une très rapide variation de

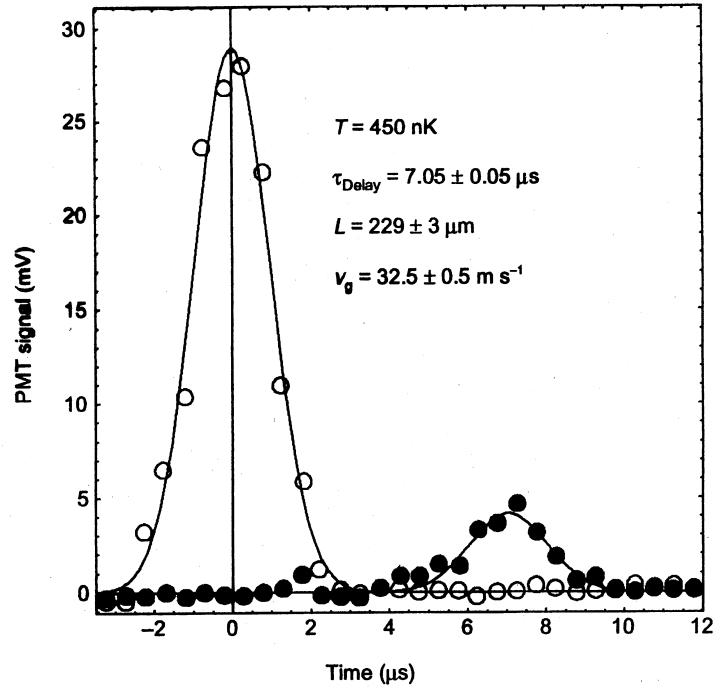


Fig. 7.10: propagation d'une impulsion lumineuse à travers un milieu dans les conditions de transparence électromagnétiquement induite : cercles blancs : sans onde intense. cercles noirs : en présence de l'onde saturante

l'indice au voisinage de $\delta' = 0$, c'est-à-dire dans la région de transparence électromagnétiquement induite. Si on se rappelle que la vitesse de propagation d'une impulsion lumineuse (vitesse de groupe v_g) est donnée par l'expression :

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega}$$

on voit que v_g peut être très faible dans les régions où $dn/d\omega$ est très grand. Comme il s'agit d'une région où le milieu est transparent, l'impulsion n'est pas absorbée et l'effet de ralentissement de l'impulsion peut être mesuré.

La figure 7.10 donne le résultat d'une expérience effectuée sur un ensemble dense d'atomes de sodium froids (en fait, un condensat de Bose-Einstein, mais la condensation en elle-même ne joue ici aucun rôle) soumis à une onde intense sur la transition $|3S_{1/2}, F = 2, m_F = -2 \rangle \rightarrow |3P_{3/2}, F = 2, m_F = -2 \rangle$, et

à une impulsion de lumière peu intense sur la transition $|3S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle \rightarrow |3P_{3/2}, F = 2, m_F = -2\rangle$ (L.V. Hau, S. Harris, Z. Dutton, C. Behroozi, Nature **397**, 594 (1999)). Elle permet de comparer cette impulsion après traversée du milieu perturbé par l'onde intense à la même impulsion enregistrée dans les mêmes conditions, mais en l'absence de champ intense. On constate un retard de $7\mu s$, entre elles, ce qui permet de déterminer que la vitesse de propagation de l'impulsion dans le milieu n'est que de $32ms^{-1}$! On voit donc que dans ces conditions extrêmes, le ralentissement de l'impulsion peut être extrêmement spectaculaire.

4. Sauts quantiques

La théorie semi-classique ne donne l'évolution que des moyennes quantiques $\langle \vec{D} \rangle$, ou $\langle \vec{E} \rangle$. Dans la plupart des expériences, on n'effectue pas les mesures sur un seul système quantique, mais sur un ensemble formé d'un grand nombre d'atomes identiques, interagissant avec le même champ. L'observation du système "macroscopique" correspond alors bien à la moyenne quantique. Il n'en est plus de même lorsqu'on observe un atome unique (ou un ion, ou un photon) : on a alors accès à *une réalisation*, différente à chaque mesure. La théorie semi-classique ne donne que peu de renseignements sur celle-ci, si ce n'est la moyenne qu'on trouvera après avoir réalisé un grand nombre d'expériences identiques sur le même atome.

Les physiciens se sont posés depuis longtemps la question suivante : lorsqu'un atome effectue une transition de $|a\rangle$ à $|b\rangle$ sous l'effet du rayonnement, l'effectue-t-il instantanément, ou passe-t-il de manière transitoire par un état intermédiaire ? Les mesures sur un grand nombre d'atomes ne permettent évidemment pas de répondre à cette question, mais des expériences réalisées sur un ion unique, piégé par une structure de champ, ont permis de montrer la réalité physique de ces *sauts quantiques* d'un niveau atomique à un autre.

L'expérience est schématisée sur la figure () : on considère un schéma de niveaux "en V", et on applique sur l'ion un champ pompe intense et résonnant sur la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, qui induit une forte fluorescence, facilement observable même si elle est émise par un ion unique, car elle produit $\frac{\Gamma_{sp}}{2}$ photons par seconde. On applique aussi un deuxième champ très faible (par exemple une lampe classique de faible intensité), qui est susceptible d'induire des transitions de $|a\rangle$ vers un niveau $|c\rangle$ de très longue durée de vie. L'intensité de la sonde est choisie de telle sorte que la probabilité de

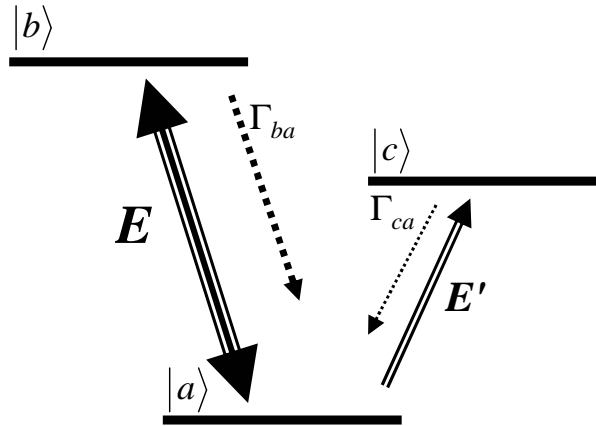


Fig. 7.11: configuration de niveaux pour observer les sauts quantiques par l'interruption de la fluorescence du niveau supérieur

transition $P_{a \rightarrow c}$ est très faible. Deux situations sont alors possibles :

- L'ion est en $|a\rangle$. Le champ pompe provoque alors un grand nombre de cycles $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$: il se produit une forte fluorescence, aisément mesurable.
- L'ion a été porté par le champ faible dans le niveau $|c\rangle$. La fluorescence intense est interrompue, jusqu'à ce que l'atome retombe par émission spontanée dans le niveau fondamental, où il reprend ses cycles d'absorption-émission.

On peut ainsi *voir en direct* la transition $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ sur la fluorescence du niveau $|b\rangle$. La figure (7.12) donne le signal observé (W. Nagourney et al, Phys. Rev. Letters **56**, 2797 (1986)) sur un ion unique piégé de Ba^+ . On observe des transitions instantanées, aux incertitudes expérimentales près : l'atome est soit en $|a\rangle$ soit en $|c\rangle$, avec des phases d'interruption de fluorescence qui nous renseignent sur la statistique des temps de séjour dans le niveau excité de très longue durée de vie (30 s dans le cas de cette expérience!). S'il y avait beaucoup d'atomes, on verrait en allumant le champ très faible une baisse de l'intensité de fluorescence égale à $\frac{1}{2}P_{a \rightarrow c} \times I_{fluorescence}$, qui est très faible, alors que l'effet est total sur une réalisation unique.

Si on trace l'histogramme des durées d'interruption de la fluorescence du niveau $|b\rangle$, on trouve un comportement exponentiel correspondant à une

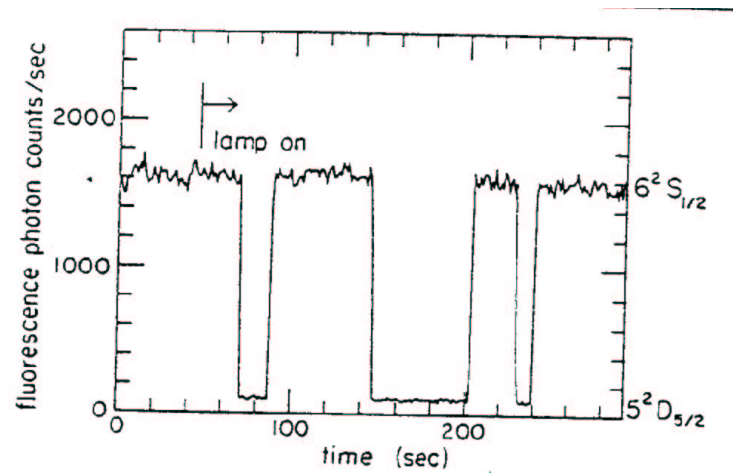


Fig. 7.12: signal de fluorescence observé sur un ion unique

durée de vie de 30s, qui est bien la durée de vie du niveau $|c\rangle$. La théorie quantique ne permet pas de prédire ce qui se passe pour une réalisation donnée de l'expérience, mais en revanche elle permet de prédire précisément les caractéristiques de la distribution de probabilité des périodes d'absence de fluorescence.