HAL open science

Variétés symplectiques et variétés de Poisson

Charles-Michel Marle

▶ To cite this version:

Charles-Michel Marle. Variétés symplectiques et variétés de Poisson. DEA. 2006. cel-00092952

HAL Id: cel-00092952
https://cel.hal.science/cel-00092952v1

Submitted on 12 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Variétés symplectiques

et variétés de Poisson

Cours de DEA

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie

Avant-propos

La géométrie symplectique a été découverte par Joseph Louis Lagrange (1736-1813) vers 1780, lorsqu'il a eu l'idée de considérer les éléments orbitaux des planètes du système solaire non plus comme des constantes, mais comme des variables, et qu'il a défini le crochet de deux éléments orbitaux. Son développement a été, pendant près de deux siècles, étroitement lié à ceux de la Mécanique analytique et de la Mécanique céleste, avec des contributions majeures de William Rowan Hamilton (1805-1865), Siméon Denis Poisson (1781-1840), Carl Jacobi (1804-1851), Gaston Darboux (1842-1917), Sophus Lie (1842-1899), Henri Poincaré (1854-1912), Élie Cartan (1869-1951), Constantin Carathéodory (1873-1950), Carl Ludwig Siegel (1896-1912), Andrei Kolmogorov (1903-1987), André Lichnerowicz (1915-1998), ...(*). Le présent document, basé sur un cours enseigné pendant plusieurs années à l'Université Pierre et Marie Curie, est une introduction à cette théorie. Le lecteur soucieux d'en approfondir l'étude pourra consulter les ouvrages suivants.

R. Abraham et J. Marsden, *Foundations of mechanics*, second edition, Benjamin, 1978.

V.I. Arnol'd, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, éditions Mir, Moscou, 1976.

V.I. Arnol'd et A.B. Givental, Symplectic geometry, dans *Dynamical systems IV*, V.I. Arnol'd and S.P. Novikov, eds., Springer, 1990.

A. Cannas da Silva et A. Weinstein, *Geometric models for noncommutative algebras*, American mathematical Society, 1999.

V. Guillemin et S. Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*, Cambridge University press, 1984.

P. Libermann et C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel, Dordrecht, 1987.

J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970.

S. Sternberg, *Celestial mechanics*, volumes I et II, W.A. Benjamin, New York, 1969.

I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Birkhäuser, 1994.

Le lecteur désirant avoir rapidement un aperçu d'ensemble de la géométrie symplectique pourra se reporter aux articles de Michèle Audin et Patrick Iglesias: *Lagéométrie symplectique*, La Recherche, 271, décembre 1994, p. 1246–1252, et *Optique géométrique et topologie symplectique*, Images des mathématiques, supplément au Courrier du CNRS, 1994.

Enfin pour se détendre sans quitter le domaine, tout en stimulant son intellect, le lecteur pourra savourer l'ouvrage d'Ivar Ekeland *Le meilleur des mondes possibles*, Seuil, 2000.

(*) Nous avons choisi de ne citer que les mathématiciens aujourd'hui décédés.

Table des matières

Avant-propos iii

Table des matières iv

Chapitre I. Espaces vectoriels symplectiques 1
1. Forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel 1
2. Orthogonalité symplectique 4
3. Réduction d'un espace vectoriel symplectique 6
4. Permutations canoniques 7
5. Le groupe symplectique 8
6. Structures complexes adaptées 11

Chapitre II. Variétés symplectiques 15
1. Variétés symplectiques 15
2. La forme de Liouville sur un fobré cotangent 16
3. Sous-variétés remarquables d'une variété symplectique 17
4. Symplectomorphismes 18
5. Champs de vecteurs hamiltoniens 20
6. Le crochet de Poisson 23
7. Réduction d'une variété symplectique 25

Chapitre III. Variétés de Poisson 31
1. Variétés de Poisson; propriétés élémentaires 31
2. Applications de Poisson 37
3. Quotient d'une variété symplectique ou de Poisson 38
4. Structure locale d'une variété de Poisson 42
5. Structure locale d'une variété symplectique 47
6. Feuilletage symplectique d'une variété de Poisson 48

Chapitre IV. Les théorèmes de Darboux-Weinstein 51
1. Le lemme d'homotopie 51
2. Théorèmes de Weinstein 54

Chapitre V. Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique 62

1. Rappels sur les groupes de Lie 62
2. Action d'un groupe de Lie sur une variété 66
3. Actions symplectiques et actions hamiltoniennes 69
4. Propriétés élémentaires du moment 73
5. Équivariance du moment 75
6. Action d'un groupe de Lie sur son fibré cotangent 82
7. Moment d'une action hamiltonienne et application de Poisson 88
8. Réduction de variétés de niveau du moment 90

Chapitre VI. Crochet de Schouten-Nijenhuis et variétés de Poisson . 93

1. Notions générales sur les algèbres $\mathbf{Z}_2$-graduées et leurs endomorphismes 93
2. Algèbres extérieures sur une variété différentiable 98
3. Quelques dérivations bien connues 101
4. Le crochet de Schouten-Nijenhuis 104
5. Application aux variétés de Poisson 107

Exercices 114

Solutions 118

Chapitre I

Espaces vectoriels symplectiques

1. Forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel

1.1. Généralités et notations. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\Omega : V \times V \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire antisymétrique sur V. On note $\Omega^\flat : V \to V^*$ l'application linéaire de V dans son dual définie par

$$\Omega^\flat(x) = -i(x)\Omega\,,$$

c'est-à-dire

$$\big\langle \Omega^\flat(x), y \big\rangle = -\Omega(x,y)\,, \quad x \text{ et } y \in V\,.$$

On appelle *rang* de Ω la dimension de l'image de $\Omega^\flat$, et *noyau* de Ω, noté $\ker\Omega$, le noyau de $\Omega^\flat$.

Puisque Ω est antisymétrique, l'application transposée de $\Omega^\flat$ est $-\Omega^\flat$. Comme, d'une manière générale, l'annulateur du noyau d'une application linéaire est l'image de l'application transposée, on voit que

$$\Omega^\flat(V) = (\ker\Omega)^0 = \big\{\, \alpha \in V^* \;\big|\; \langle \alpha, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \ker\Omega \,\big\}\,.$$

On a

$$\dim\ker\Omega + \dim\Omega^\flat(V) = \dim V\,.$$

1.2. Proposition. *Le rang de Ω est un entier pair $2p$. Si $p \neq 0$ (c'est-à-dire si Ω n'est pas identiquement nulle) il existe $2p$ éléments $f^1, \dots, f^{2p}$ de $\Omega^\flat(V)$, qui forment une base de ce sous-espace de V^*, tels que*

$$\Omega = f^1 \wedge f^2 + \cdots + f^{2p-1} \wedge f^{2p}\,.$$

Démonstration. Si $\Omega = 0$, son rang est nul, donc pair, et il n'y a rien de plus à démontrer. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante: toute forme bilinéaire B de rang $\leq 2k$ est de rang pair $2p$ (avec $p \leq k$), et il existe $2p$ éléments de $B^\flat(V)$, notés $\alpha^1, \dots, \alpha^{2p}$, formant une base de $B^\flat(V)$, tels que

$$B = \alpha^1 \wedge \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2p-1} \wedge \alpha^{2p}\,.$$

Supposons Ω de rang $2k+1$ ou $2k+2$, donc non nulle. Il existe alors $x_1 \in V$ tel que $f^1 = \Omega^\flat(x_1) \neq 0$. On a

$$\langle f^1, x_1 \rangle = -\Omega(x_1, x_1) = 0\,.$$

Comme $f^1 \neq 0$, il existe $x_2 \in V$ tel que $\langle f^1, x_2 \rangle = -1$. Posons $\Omega^\flat(x_2) = f^2$. On a

$$\langle f^2, x_2 \rangle = -\Omega(x_2, x_2) = 0\,,$$

et

$$-1 = \langle f^1, x_2 \rangle = -\Omega(x_1, x_2) = \Omega(x_2, x_1) = -\langle f^2, x_1 \rangle\,. \tag{$*$}$$

Posons alors

$$\Omega' = \Omega - f^1 \wedge f^2\,.$$

Le noyau de Ω' contient celui de Ω, et contient aussi x_1 et x_2, qui n'appartiennent pas au noyau de Ω et sont linéairement indépendants. Donc le rang de Ω' est inférieur ou égal à $2k$, puisque celui de Ω est inférieur ou égal à $2k+2$. On applique à Ω' l'hypothèse de récurrence: son rang est pair, égal à $2q$ ($q \leq k$), et il existe $2q$ éléments de $(\Omega')^\flat(V)$, notés $f^3, f^4, \ldots, f^{2q+1}, f^{2q+2}$, qui forment une base de $(\Omega')^\flat(V)$, tels que

$$\Omega' = f^3 \wedge f^4 + \cdots + f^{2q+1} \wedge f^{2q+2}\,.$$

On a alors

$$\Omega = f^1 \wedge f^2 + f^3 \wedge f^4 + \cdots + f^{2q+1} \wedge f^{2q+2}\,. \tag{$**$}$$

D'après les relations $(*)$ ci-dessus, f^1 et f^2 n'appartiennent pas à l'annulateur du noyau de Ω', qui est égal à l'image de $(\Omega')^\flat$. Donc $f^1, f^2, f^3, f^4, \ldots, f^{2q+1}, f^{2q+2}$ sont linéairement indépendants. L'expression $(**)$ montre qu'ils engendrent l'image de $\Omega^\flat$, donc ils en forment une base. $\square$

1.3. Définition. Une forme bilinéaire antisymétrique Ω sur l'espace vectoriel réel V, de dimension finie, est dite *symplectique* si son rang est égal à la dimension de V. Un espace vectoriel V, muni d'une forme symplectique Ω, est appelé *espace vectoriel symplectique* et noté (V, Ω).

1.4. Propriétés élémentaires.

Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique.

1. D'après 1.2, le rang de Ω est pair. Comme on le suppose égal à la dimension de V, celle-ci est paire; on la notera $2n$.

2. Dans le cas présent, $\Omega^\flat$ est un isomorphisme de V sur son dual V^*. On notera $\Omega^\sharp$ son inverse.

3. En ordonnant différemment les éléments de la base de $\Omega^\flat(V) = V^*$ construite lors de la démonstration de 1.2, on voit qu'il existe une base (pas nécessairement unique) $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^{2n})$ de V^* telle que

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \epsilon^{n+i} \wedge \epsilon^i\,.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base de V duale de la base $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^{2n})$ de V^*. On a pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\Omega(e_i, e_j) = 0\,, \quad \Omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0\,, \quad \Omega(e_{n+i}, e_j) = \delta_{i\,j}\,.$$

Une base $(e_1, \ldots, e_{2n})$ de l'espace vectoriel symplectique (V, Ω) vérifiant ces relations est dite *canonique*. On a donc montré que tout espace vectoriel symplectique admet une base canonique. Par suite, deux espaces vectoriels symplectiques de même dimension sont isomorphes, par un isomorphisme qui échange leurs formes symplectiques. On remarquera que de ce point de vue, la situation est plus simple que dans le cas des espaces vectoriels euclidiens ou pseudo-euclidiens munis d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, puisque pour une dimension fixée de l'espace, la signature de cette forme peut prendre diverses valeurs.

4. On définit sur $\mathbf{R}^{2n}$ une structure symplectique en posant, pour $x = (x^1, \ldots, x^{2n})$ et $y = (y^1, \ldots, y^{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$,

$$\Omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x^{n+i} y^i - x^i y^{n+i})\,.$$

Pour cette structure, dite *standard*, la base usuelle de $\mathbf{R}^{2n}$ est une base canonique, au sens indiqué ci-dessus.

5. Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base canonique de l'espace vectoriel symplectique (V, Ω). Posons

$$\Omega_{i\,j} = \Omega(e_i, e_j)\,.$$

La matrice $J = (\Omega_{i\,j})$ a pour expression

$$J = \begin{pmatrix} \Omega_{1\,1} & \ldots & \Omega_{1\,2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{2n\,1} & \ldots & \Omega_{2n\,2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\,,$$

où I_n désigne la matrice $n \times n$ unité.

En convenant d'identifier les éléments x et y de V avec les éléments de $\mathbf{R}^{2n}$ qui les représentent dans la base considérée, on peut écrire, en utilisant les notations matricielles usuelles (${}^t x$ désignant le vecteur-ligne transposé du vecteur-colonne x à $2n$ composantes):

$$\Omega(x, y) = {}^t x J y\,.$$

2. Orthogonalité symplectique

2.1. Définition. Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de V. On appelle *orthogonal symplectique* (ou, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, *orthogonal*) de W, le sous-espace vectoriel de V:

$$\operatorname{orth} W = \left\{ x \in V \;\middle|\; \Omega(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in W \right\}.$$

2.2. Propriétés élémentaires. Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, W, W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V. Le lecteur établira aisément les propriétés suivantes.

1. On a $\operatorname{orth}(\operatorname{orth} W) = W$.
2. On a $\dim W + \dim \operatorname{orth} W = \dim V$.
3. On a
$$\Omega^\flat(\operatorname{orth} W) = W^0 = \left\{ \eta \in V^* \;\middle|\; \langle \eta, x \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in W \right\}.$$
4. On a $W_1 \subset W_2$ si et seulement si $\operatorname{orth} W_1 \supset \operatorname{orth} W_2$.
5. On a
$$\operatorname{orth}(W_1 \cap W_2) = \operatorname{orth} W_1 + \operatorname{orth} W_2\,,$$
$$\operatorname{orth}(W_1 + W_2) = \operatorname{orth} W_1 \cap \operatorname{orth} W_2\,.$$

2.3. Définitions. Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel W de V est dit

– *isotrope* si $W \subset \operatorname{orth} W$,
– *coïsotrope* si $\operatorname{orth} W \subset W$,
– *lagrangien* si $\operatorname{orth} W = W$,
– *symplectique* si $W \cap \operatorname{orth} W = \{0\}$.

2.4. Exemples.

1. Tout sous-espace de dimension 1 est isotrope; tout sous-espace de codimension 1 est coïsotrope.

2. Un sous-espace W de (V, Ω) est isotrope si et seulement si $\operatorname{orth} W$ est coïsotrope.

3. Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base canonique. Les sous-espaces engendrés par $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ sont lagrangiens, supplémentaires l'un de l'autre. Plus généralement, soit I une partie de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et J son complémentaire. Le sous-espace engendré par les e_i, $i \in I$, et les e_{n+j}, $j \in J$, est lagrangien, ainsi que celui engendré par les e_{n+i}, $i \in I$, et les e_j, $j \in J$, et ces deux sous-espaces lagrangiens sont supplémentaires. Le sous-espace engendré par les e_i et les e_{n+i}, $i \in I$, est symplectique.

2.5. Proposition. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et I un sous-espace vectoriel isotrope de V. Il existe un sous-espace lagrangien L tel que $I \subset L \subset \operatorname{orth} I$.*

Démonstration. On a $I \subset \operatorname{orth} I$. Si $I = \operatorname{orth} I$, I est lagrangien et on peut prendre $L = I$. Dans le cas contraire, il existe un élément x_1 de $\operatorname{orth} I$ qui n'est pas élément de I. Soit $I_1 = I + \langle x_1 \rangle$ (en notant $\langle x_1 \rangle$ le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par x_1). On vérifie aisément que I_1 est isotrope et que $I \subset I_1 \subset \operatorname{orth} I_1 \subset \operatorname{orth} I$. Si $I_1 = \operatorname{orth} I_1$, on peut prendre $L = I_1$; dans le cas contraire, on répète la même construction en remplaçant I par I_1. Après un nombre fini de constructions de ce type, on aboutit nécessairement (puisque à chaque opération, la codimension de l'espace isotrope considéré dans son orthogonal décroît de deux unités) à un sous-espace I_n égal à son orthogonal, donc lagrangien, contenant I et contenu dans $\operatorname{orth} I$. □

2.6. Proposition. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de V. Le noyau de la forme bilinéaire Ω_W induite par Ω sur W (c'est-à-dire restriction de Ω à $W \times W$) est*

$$\ker \Omega_W = W \cap \operatorname{orth} W .$$

La démonstration, facile, est laissée au lecteur.

2.7. Conséquences.

1. Les formes bilinéaires Ω_W et $\Omega_{\operatorname{orth} W}$ induites par Ω sur W et sur son orthogonal ont même noyau. On en déduit:

$$\operatorname{rang}(\Omega_W) - \operatorname{rang}(\Omega_{\operatorname{orth} W}) = 2 \dim W - \dim V .$$

2. Un sous-espace vectoriel W de V est isotrope si et seulement si $\operatorname{rang}(\Omega_W) = 0$, coïsotrope si et seulement si $\operatorname{rang}(\Omega_W) = 2 \dim W - \dim V$, symplectique si et seulement si $\operatorname{rang}(\Omega_W) = \dim W$. On voit donc qu'un sous-espace vectoriel symplectique W au sens de la définition 2.3 est bien un sous-espace sur lequel la forme Ω induit une forme symplectique Ω_W.

2.8. Proposition. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, L un sous-espace lagrangien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de L. Il existe n autres éléments $e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ de V tels que $(e_1, \ldots, e_{2n})$ soit une base canonique.*

Démonstration. L'annulateur L^0 de L (sous-espace du dual V^* de V constitué par les formes linéaires nulles sur L) s'identifie au dual $(V/L)^*$ de l'espace quotient V/L, et on sait que $\big(\Omega^\flat(e_1), \ldots, \Omega^\flat(e_n)\big)$ en est une base. Soit $(\dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_n)$ la base duale de V/L. Pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, on choisit un représentant f_i de $\dot{f}_i$. Par construction:

$$\Omega(e_i, f_j) = -\big\langle \Omega^\flat(e_i), f_j \big\rangle = -\delta_{i\,j} .$$

Posons

$$e_{n+i} = f_i + 1/2 \sum_{k=1}^{n} \Omega(f_i, f_k) e_k .$$

On vérifie aisément que $(e_1, \ldots, e_{2n})$ est une base canonique. $\square$

2.9. Corollaire. *Tout sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique possède un supplémentaire lagrangien.*

Démonstration. Il suffit en effet de choisir une base $(e_1, \ldots, e_n)$ du sous-espace lagrangien donné L, de compléter cette base en une base canonique $(e_1 \ldots, e_{2n})$ de V, et de considérer le sous-espace engendré par $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$. $\square$

2.10. Proposition. *Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces vectoriels lagrangiens supplémentaires de l'espace vectoriel symplectique (V, Ω). L'application de L_2 dans le dual L_1^* de L_1:*

$$y \mapsto -\Omega^\flat(y)\,\big|_{L_1}$$

est un isomorphisme. Si on l'utilise pour identifier V à $L_1 \times L_1^*$, l'expression de Ω devient

$$\Omega\big((x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)\big) = \langle \alpha_1, x_2 \rangle - \langle \alpha_2, x_1 \rangle\,.$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de L_1 et $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ la base duale de L_1^*, $(e_1, \ldots, e_{2n})$ est une base canonique de V (identifié à $L_1 \times L_1^*$).

La démonstration ne présente pas de difficulté.

3. Réduction d'un espace vectoriel symplectique

3.1. Proposition. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de V. On considère le quotient*

$$\dot{W} = W/(W \cap \operatorname{orth} W)\,,$$

et on note $p : W \to \dot{W}$ la projection canonique.

1. *La forme Ω_W induite par Ω sur W est projetable par p sur $\dot{W}$, et sa projection $\dot{\Omega}$ est une forme symplectique sur $\dot{W}$.*

2. *Si I un sous-espace isotrope de V, $\dot{I} = p(I \cap W)$ est un sous-espace isotrope de $(\dot{W}, \dot{\Omega})$. Si I est lagrangien et si, de plus, W est coïsotrope, $\dot{I}$ est lagrangien.*

Démonstration.

1. L'espace $\dot{W}$ est précisément le quotient de W par le noyau de Ω_W. On voit alors aisément qu'il existe une forme bilinéaire unique $\dot{\Omega}$ sur $\dot{W}$ dont l'image réciproque par p est Ω_W, et que $\dot{\Omega}$ est symplectique.

2. Si I est isotrope, la forme induite par Ω sur $W \cap I$ est nulle. On en déduit aisément que $\dot{I}$ est isotrope. Si I est lagrangien et W coïsotrope, on sait déjà que $\dot{I}$ est isotrope, il suffit donc de montrer qu'il est coïsotrope. Soit $\dot{x} \in \operatorname{orth} \dot{I}$, et $x \in W$ un représentant

de $\dot{x}$. Pour tout $y \in I \cap W$, on a $\Omega(x, y) = 0$, donc $x \in W \cap \operatorname{orth}(I \cap W)$. Mais $\operatorname{orth}(I \cap W) = \operatorname{orth} I + \operatorname{orth} W = I + \operatorname{orth} W$ puisque I est lagrangien. Donc $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in I$ et $x_2 \in \operatorname{orth} W$. Mais puisque W est coïsotrope, $\operatorname{orth} W \subset W$, donc $x_2 \in W$. Comme $x \in W$, $x_1 = x - x_2$ est aussi élément de W, tandis que x_2 appartient au noyau de p. Par suite, x_1 est un autre représentant de $\dot{x}$. Comme $x_1 \in I$, $\dot{x} \in \dot{I}$; on a prouvé que $\operatorname{orth} \dot{I} \subset \dot{I}$. $\square$

On verra plus tard que la proposition précédente se généralise, et permet de définir la réduction d'une sous-variété d'une variété symplectique. Cette notion a de très importantes applications.

4. Permutations canoniques

Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base canonique de V. Il est utile, dans certains cas, de modifier l'ordre des vecteurs éléments de cette base, tout en faisant en sorte que la base reste canonique. Cela permettra par exemple de mettre en évidence un sous-espace vectoriel lagrangien (engendré par les vecteurs de la base qui occupent, pour le nouvel ordre, les n premières places) adapté au problème qu'on a à traiter. Le lemme suivant (dû à Arnol'd) donne un exemple de construction de ce type.

4.1. Lemme. *Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique, $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base canonique et X un sous-espace lagrangien de V. Il existe une partie I de $\{1, \ldots, n\}$ telle que, si on note J son complémentaire, le sous-espace engendré par les e_i et les e_{n+j}, avec $i \in I$ et $j \in J$, soit lagrangien et supplémentaire de X.*

Démonstration. Soit L' le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$ et L'' le sous-espace engendré par $e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$. Soit $k = \dim(L' \cap X)$.

Si $k = n$, $I = \emptyset$ répond à la question. De même, si $k = 0$, $I = \{1, \ldots, n\}$ répond à la question.

Supposons donc $1 < k < n$. $L' \cap X$ étant un sous-espace vectoriel de dimension k de L', et $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de L', il existe une famille $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}})$ de $n - k$ vecteurs pris dans cette base qui engendre un supplémentaire Y' de $L' \cap X$ dans L'. Posons $I = \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$, et notons J son complémentaire. Soit Y'' le sous-espace vectoriel engendré par les e_{n+j}, $j \in J$. On sait (exemple 2.4.3) que $Y = Y' \oplus Y''$ est lagrangien. Il reste à prouver qu'il est supplémentaire de X. On a

$$L' = (L' \cap X) \oplus Y', \quad L' \cap X \subset X, \quad Y' = L' \cap Y \subset Y,$$

donc $L' \subset X + Y$. Comme L', X et Y sont lagrangiens, on a

$$L' = \operatorname{orth} L' \supset \operatorname{orth}(X + Y) = \operatorname{orth} X \cap \operatorname{orth} Y = X \cap Y,$$

donc

$$X \cap Y = X \cap Y \cap L' = (L' \cap X) \cap (L' \cap Y) = \{0\},$$

car $L' \cap X$ et $L' \cap Y$ sont supplémentaires dans L'. Donc X et Y sont supplémentaires dans V. $\square$

4.2. Corollaire. *Dans les hypothèses du lemme précédent, il existe une permutation σ de $\{1,\dots,2n\}$ et une application ϵ de $\{1,\dots,2n\}$ dans $\{-1,1\}$ telle que $\big(\epsilon(1)e_{\sigma(1)},\dots,\epsilon(2n)e_{\sigma(2n)}\big)$ soit une base canonique de V et que le sous-espace lagrangien engendré par les n premiers vecteurs de cette base soit supplémentaire de X.*

Démonstration. Il suffit de ranger les éléments de la base canonique donnée dans l'ordre suivant: d'abord les e_i, puis les e_{n+j}, puis les e_{n+i}, et enfin les e_j (avec $i \in I$ et $j \in J$). On remplacera ensuite les e_j par leurs opposés, afin de respecter les conventions de signes figurant dans la définition d'une base canonique. □

5. Le groupe symplectique

5.1. Définition. Soient (V,Ω) et (V',Ω') deux espaces vectoriels symplectiques, et $f : V \to V'$ une application linéaire. On dit que f est *symplectique* si

$$f^*\Omega' = \Omega\,.$$

Lorsque V et V' sont de même dimension, une application symplectique $f : V \to V'$ est appelée *isomorphisme symplectique*.

5.2. Quelques propriétés.

1. On remarque qu'un isomorphisme symplectique $f : V \to V'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, car si on désigne par $2n$ la dimension de V (et de V'), Ω^n et $(\Omega')^n$ sont des formes éléments de volume sur V et sur V', respectivement; on a

$$f^*\big((\Omega')^n\big) = \Omega^n\,,$$

ce qui prouve que f est bien un isomorphisme.

2. La composée de deux applications symplectiques est une application symplectique. L'inverse d'un isomorphisme symplectique est un isomorphisme symplectique.

5.3. Définition. Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique. On appelle *groupe symplectique* de (V,Ω), et on note $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ l'ensemble des isomorphismes symplectiques de V sur lui-même.

5.4. Quelques propriétés.

1. D'après les propriétés 5.2.2, $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$. C'est un sous-groupe fermé puisqu'il est défini par

$$\mathbf{Sp}(V,\Omega) = \big\{\, g \in \mathbf{GL}(V) \;\big|\; g^*\Omega = \Omega \,\big\}\,.$$

D'après un théorème de Cartan, $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathbf{GL}(V)$.

2. Le déterminant $\det g$ de tout élément g de $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ est égal à 1. En effet, Ω^n est une forme élément de volume sur V et on a, par définition du déterminant:

$$g^*(\Omega^n) = \det g\, \Omega^n\,, \quad \text{et} \quad g^*(\Omega^n) = \Omega^n\,.$$

3. Une application linéaire de l'espace vectoriel symplectique (V,Ω) dans lui-même est élément du groupe symplectique si et seulement si elle transforme une base canonique de V en une autre base canonique de V.

4. Une application élément de $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ transforme tout sous-espace vectoriel isotrope (resp., coïsotrope, resp., lagrangien) de V en un autre sous-espace isotrope (resp., coïsotrope, resp., lagrangien).

5. Le groupe symplectique agit transitivement sur $V\backslash\{0\}$, sur l'ensemble des bases canoniques de (V,Ω), sur l'ensemble des sous-espaces lagrangiens, sur l'ensemble des couples de sous-espaces lagrangiens transverses, sur l'ensemble des couples de sous-espaces lagrangiens dont l'intersection est de dimension donnée.

5.5. Matrices symplectiques. Après avoir choisi une base canonique de l'espace vectoriel symplectique (V,Ω), on peut identifier celui-ci à $\mathbf{R}^{2n}$. Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 1.4.5, on peut écrire, en utilisant les notations matricielles,

$$\Omega(x,y) = {}^t x J y\,, \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\,, \quad x \text{ et } y \in \mathbf{R}^{2n}\,.$$

Une application linéaire de V dans V est élément du groupe symplectique si et seulement si la matrice $2n \times 2n$ A qui la représente vérifie

$${}^t x\, {}^t A J A y = {}^t x J y \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \in \mathbf{R}^{2n}\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$${}^t A J A = J\,.$$

Les matrices vérifiant cette propriété sont appelées *matrices symplectiques*. Elles forment un groupe, isomorphe au groupe symplectique de (V,Ω), appelé *groupe symplectique linéaire*, noté $\mathbf{Sp}(2n,\mathbf{R})$.

On remarque que si A est une matrice symplectique, son déterminant est égal à 1, et sa transposée ${}^t A$ est symplectique.

6. L'algèbre de Lie du groupe symplectique. Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Puisque $\mathbf{Sp}(V,\Omega)$ est un sous-groupe de Lie du groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$, son algèbre de Lie, notée $\mathbf{sp}(V,\Omega)$, est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie du groupe linéaire. On sait que celle-ci est l'espace des endomorphismes linéaires de V, avec pour crochet le commutateur. Soit donc $X \in \mathcal{L}(V,V)$ une application linéaire de V dans lui-même. Cherchons à quelle condition X est élément de $\mathbf{sp}(V,\Omega)$. Pour tout réel $t \in \mathbf{R}$, posons

$$g(t) = \exp(tX)\,.$$

On rappelle que $g(t)$ est la solution maximale de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = Xg(t) \tag{$*$}$$

qui vérifie la donnée de Cauchy

$$g(0) = \mathrm{id}_V \ .$$

Remarquons d'ailleurs que $g(t)$ commute avec X et qu'on pourrait écrire $g(t)X$ au lieu de $Xg(t)$ au second membre de l'équation différentielle utilisée pour définir $g(t) = \exp(tX)$.

D'après les propriétés connues de l'application exponentielle, l'endomorphisme X est élément de l'algèbre de Lie du groupe symplectique si et seulement si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t) = \exp(tX)$ est élément du groupe symplectique, c'est-à-dire vérifie, pour tous x et $y \in V$,

$$\Omega\big(g(t)x, g(t)y\big) = \Omega(x, y)\,.$$

En dérivant ceci par rapport à t puis en faisant $t = 0$, on voit, compte tenu de $(*)$, qu'une condition nécessaire que doit vérifier X pour appartenir à $\mathbf{sp}(V, \Omega)$ est

$$\Omega(Xx, y) + \Omega(x, Xy) = 0 \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \in V\,.$$

En utilisant encore $(*)$, on voit aisément que cette condition est aussi suffisante.

Moyennant le choix d'une base canonique, on se ramène, comme dans le paragraphe précédent, au cas où $V = \mathbf{R}^{2n}$. Une matrice $2n \times 2n$ A est élément de l'algèbre de Lie $\mathbf{sp}(2n, \mathbf{R})$ si et seulement si, pour tous x et $y \in \mathbf{R}^{2n}$,

$${}^t x\, {}^t AJy + {}^t xJAy = 0\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$${}^t AJ + JA = 0\,.$$

En écrivant A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\,,$$

où A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des matrices $n \times n$, et en portant cette expression dans la condition ci-dessus, on voit que A est élément de $\mathbf{sp}(2n, \mathbf{R})$ si et seulement si

$${}^t A_1 = -A_4\,, \quad {}^t A_2 = A_2\,, \quad {}^t A_3 = A_3\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -{}^t A_1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{avec} \quad {}^t A_2 = A_2\,, \quad {}^t A_3 = A_3\,.$$

Il est facile d'en déduire la dimension de $\mathbf{sp}(2n, \mathbf{R})$ (qui est aussi celle de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{R})$:

$$\dim \mathbf{sp}(2n, \mathbf{R}) = 2n^2 + n\,.$$

6. Structures complexes adaptées

6.1 Quelques rappels sur les structures complexes. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle *structure complexe*, ou *opérateur complexe* sur V, toute application linéaire $\mathcal{I}$ de V dans lui-même vérifiant $\mathcal{I}^2 = -\operatorname{id}_V$.

On remarque que s'il existe sur V une structure complexe $\mathcal{I}$, celle-ci vérifie

$$(\det \mathcal{I})^2 = \det(-\operatorname{id}_V) = (-1)^{\dim V}\,.$$

Ceci n'est possible que si $\dim V$ est paire. Réciproquement, sur un espace vectoriel V de dimension paire $2n$, il existe une structure complexe: il suffit en effet, pour en définir une, de prendre une base $(e_1, \ldots, e_{2n})$ de V et de poser:

$$\mathcal{I}(e_i) = e_{n+i}\,, \quad \mathcal{I}(e_{n+i}) = -e_i\,, \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

La donnée d'une structure complexe $\mathcal{I}$ sur un espace vectoriel réel V permet de munir V d'une structure d'espace vectoriel complexe, en posant, pour tout $x \in V$ et tout $a + ib \in \mathbf{C}$ (a et $b \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$):

$$(a + ib)x = ax + b\mathcal{I}(x)\,.$$

On notera $V_{\mathbf{C}}$ l'espace vectoriel V muni de cette structure d'espace vectoriel complexe. On remarquera que la dimension (complexe) de $V_{\mathbf{C}}$ est égale à la moitié de la dimension (réelle) de V.

Réciproquement, soit $V_{\mathbf{C}}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie. Notons V le même espace, muni de la structure d'espace vectoriel réel sous-jacente. Posons pour tout $x \in V$:

$$\mathcal{I}(x) = ix\,,$$

en convenant de considérer x, figurant au second membre, comme élément de $V_{\mathbf{C}}$, ce qui permet de le multiplier par $i = \sqrt{-1}$. On voit immédiatement que $\mathcal{I}$ est une structure complexe sur V, et que la structure d'espace vectoriel complexe qui lui correspond est celle initialement donnée.

Une *forme réelle* d'un espace vectoriel réel V muni d'une structure complexe $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel réel W de V, tel que

$$V = W \oplus \mathcal{I}(W)\,.$$

Pour trouver une forme réelle de V, il suffit de prendre une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $V_{\mathbf{C}}$, et de définir W comme le sous-espace vectoriel réel engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$.

Soit $V_{\mathbf{C}}$ un espace vectoriel complexe, et $\eta : V_{\mathbf{C}} \times V_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ une forme sesquilinéaire sur $V_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire une application linéaire par rapport à sa première variable, antilinéaire par rapport à la seconde, vérifiant pour tous x et $y \in V_{\mathbf{C}}$:

$$\eta(y, x) = \overline{\eta(x, y)}\,.$$

On dit que η est une forme *pseudohermitienne* si elle est non dégénérée, c'est-à-dire si pour tout $x \in V_{\mathbf{C}}$, $x \neq 0$, il existe $y \in V_{\mathbf{C}}$ tel que $\eta(x, y) \neq 0$. On dit que η est *hermitienne* si pour tout $x \in V_{\mathbf{C}}$, $x \neq 0$, on a $\eta(x, x) > 0$.

Soit $V_{\mathbf{C}}$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et η une forme pseudohermitienne (ou hermitienne) sur cet espace. Pour tous x et $y \in V_{\mathbf{C}}$, notons $G(x,y)$ et $\Omega(x,y)$ la partie réelle et la partie imaginaire de $\eta(x,y)$:

$$\eta(x,y) = G(x,y) + i\Omega(x,y)\,.$$

On vérifie alors que G est un produit scalaire pseudo-euclidien (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique non dégénérée) et Ω une forme symplectique sur l'espace vectoriel réel V. La forme η sur $V_{\mathbf{C}}$ est hermitienne si et seulement si G est un produit scalaire euclidien sur V, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Dans la définition suivante, on considère la construction inverse de celle décrite ci-dessus: une structure symplectique étant donnée sur un espace vectoriel réel, on veut munir cet espace d'une structure complexe et d'une forme pseudo-hermitienne (ou hermitienne) ayant pour partie imaginaire la forme symplectique donnée.

6.2. Définition. Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe $\mathcal{I}$ sur V est dite *adaptée* à Ω s'il existe sur $V_{\mathbf{C}}$ une forme pseudohermitienne η ayant pour partie imaginaire Ω. On dira que $\mathcal{I}$ est *strictement adaptée* à Ω si elle est adaptée et si la forme η est hermitienne.

6.3. Remarque. Il est facile de voir que sur tout espace vectoriel symplectique (V,Ω) il existe une structure complexe adaptée (non unique en général). En effet, soit $(e_1,\dots,e_{2n})$ une base canonique de (V,Ω). On définit $\mathcal{I}$ en posant

$$\mathcal{I}(e_i) = e_{n+i}\,, \quad \mathcal{I}(e_{n+i}) = -e_i\,, \qquad (1 \le i \le n)\,.$$

On voit alors que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $V_{\mathbf{C}}$. Soient z et z' deux éléments de $V_{\mathbf{C}}$, ayant pour composantes dans cette base $(z_1,\dots,z_n)$ et $(z'_1\dots,z'_n)$, respectivement. On définit la forme hermitienne η en posant

$$\eta(z,z') = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z'_k}\,.$$

On voit aisément que sa partie imaginaire est Ω.

6.4. Proposition. *Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique et $\mathcal{I} : V \to V$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{I}$ est un opérateur complexe adapté à Ω.*
2. *Ω et $\mathcal{I}$ vérifient, pour tous x et $y \in V$,*

$$\Omega(x,y) = \Omega(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y)\,,$$

et la forme bilinéaire G définie par

$$G(x,y) = \Omega(\mathcal{I}x,y)\,,$$

est symétrique.

Lorsque ces propriétés équivalentes sont satisfaites, la forme pseudo-hermitienne η dont Ω est la partie imaginaire est donnée par

$$\eta(x,y) = G(x,y) + i\Omega(x,y) = \Omega(\mathcal{I}x,y) + i\Omega(x,y)\,.$$

La forme η est hermitienne si et seulement si G est définie positive.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{I}$ soit une structure complexe adaptée, et soit η la forme pseudohermitienne ayant Ω pour partie imaginaire. On a

$$\eta(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = -i^2\eta(x,y) = \eta(x,y)\,,$$

d'où, en distinguant les parties réelle et imaginaire,

$$\Omega(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = \Omega(x,y)\,, \quad G(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = G(x,y)\,.$$

D'autre part

$$\eta(\mathcal{I}x,y) = i\eta(x,y) = i\big(G(x,y) + i\Omega(x,y)\big) = G(\mathcal{I}x,y) + i\Omega(\mathcal{I}x,y)\,,$$

d'où

$$G(x,y) = \Omega(\mathcal{I}x,y)\,,$$

ce qui prouve que G, définie par la formule indiquée dans l'énoncé, est la partie réelle de η, donc est symétrique.

Réciproquement, supposons les propriétés 2 vérifiées. On a alors

$$\Omega(\mathcal{I}^2x,y) = G(\mathcal{I}x,y) = G(y,\mathcal{I}x) = \Omega(\mathcal{I}y,\mathcal{I}x) = -\Omega(x,y)\,.$$

Ω étant non dégénérée, cela prouve que $\mathcal{I}^2 = -\operatorname{id}_V$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}$ est une structure complexe. Il est alors facile de vérifier que $\eta = G + i\Omega$ est une forme pseudohermitienne (hermitienne si et seulement si G est définie positive). $\square$

6.5. Remarque. Si $\mathcal{I}$ est une structure complexe adaptée à Ω, il vérifie, pour tous x et $y \in V$:

$$\Omega(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = \Omega(x,y)\,, \quad G(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = G(x,y)\,, \quad \eta(\mathcal{I}x,\mathcal{I}y) = \eta(x,y)\,.$$

6.6. Proposition. *Soit (V,Ω) un espace vectoriel symplectique et $\mathcal{I}$ une structure complexe strictement adaptée à Ω. Alors tout sous-espace vectoriel complexe de $V_{\mathbf{C}}$ est un sous-espace symplectique de (V,Ω); tout sous-espace lagrangien de (V,Ω) est une forme réelle de $V_{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. Convenons de noter orth_G l'orthogonalité euclidienne (relativement au produit scalaire euclidien G), et $\operatorname{orth}_\Omega$ l'orthogonalité symplectique. Compte tenu de $G(x,y) = \Omega(\mathcal{I}x,y)$ et de $\mathcal{I}^2 = -\operatorname{id}_V$, on voit que, pour tout sous-espace vectoriel réel W de V

$$\operatorname{orth}_G W = \operatorname{orth}_\Omega(\mathcal{I}W)\,, \quad \operatorname{orth}_G(\mathcal{I}W) = \operatorname{orth}_\Omega W\,.$$

Or W est un sous-espace vectoriel complexe de $V_{\mathbf{C}}$ si et seulement si $W = \mathcal{I}W$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{orth}_\Omega W = \operatorname{orth}_G W$. Mais l'orthogonal euclidien de W étant supplémentaire de W, cela implique que W est symplectique.

De même, W est lagrangien si et seulement si $\operatorname{orth}_\Omega W = W$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{orth}_G(\mathcal{I}W) = W$. Mais l'orthogonal euclidien de $\mathcal{I}W$ étant supplémentaire de $\mathcal{I}W$, cela implique que W est une forme réelle de $V_{\mathbf{C}}$. $\square$

6.7. Exercice. Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique et $\mathcal{I}$ un opérateur complexe strictement adapté à Ω. Soit $g \in \mathbf{GL}(V)$. On considère les trois propriétés:

1. g est un isomorphisme symplectique;
2. g est un isomorphisme orthogonal de (V, G);
3. g est un isomorphisme complexe de $V_{\mathbf{C}}$.

Montrer que lorsque g vérifie deux des propriétés ci-dessus, il vérifie aussi la troisième, et que c'est un isomorphisme unitaire de $(V_{\mathbf{C}}, \eta)$. En déduire que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(V_{\mathbf{C}}, \eta) &= \mathbf{Sp}(V, \Omega) \cap \mathbf{O}(V, G)\\ &= \mathbf{Sp}(V, \Omega) \cap \mathbf{GL}(V_{\mathbf{C}})\\ &= \mathbf{O}(V, G) \cap \mathbf{GL}(V_{\mathbf{C}})\,.\end{aligned}$$

Chapitre II

Variétés symplectiques

Dans tout ce chapitre, les variétés, applications, formes différentielles considérées seront supposées différentiables de classe C^∞.

1. Variétés symplectiques

1.1. Définition. Une *forme symplectique* sur une variété différentiable M est une 2-forme différentielle Ω fermée (c'est-à-dire vérifiant $d\Omega = 0$) et partout non dégénérée (c'est-à-dire partout de rang égal à la dimension de M). Une variété M munie d'une forme symplectique Ω est appelée *variété symplectique* et notée (M, Ω).

1.2. Propriétés élémentaires.

1. Soit (M, Ω) une variété symplectique. Pour tout point x de M, l'espace vectoriel tangent en x, T_xM, muni de la forme bilinéaire $\Omega(x)$, est un espace vectoriel symplectique. Par suite, d'après 1.4.1, la dimension de M est paire.

2. L'espace $\mathbf{R}^{2n}$ (coordonnées $x^1, \ldots, x^{2n}$), muni de la 2-forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i$$

est une variété symplectique.

3. Plus généralement, un espace vectoriel symplectique (V, Ω) peut être considéré comme une variété symplectique, Ω étant considérée comme une 2-forme différentielle sur V. En effet, à toute base de V correspond une carte, dans laquelle Ω a des composantes constantes, ce qui prouve que $d\Omega = 0$.

4. Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$. La $2n$-forme Ω^n est une forme élément de volume sur M. Par suite, M est orientable.

5. Sur une variété différentiable de dimension 2, toute 2-forme différentielle est automatiquement fermée. Par suite, toute variété différentiable de dimension 2 orientable peut être munie d'une structure symplectique.

6. Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques. On note $p_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ et $p_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ les projections de $M_1 \times M_2$ sur ses deux facteurs. Les 2-formes

$p_1^*\Omega_1 + p_2^*\Omega_2$ et $p_1^*\Omega_1 - p_2^*\Omega_2$ sur la variété produit $M_1 \times M_2$, sont toutes deux des formes symplectiques, qu'on notera simplement $\Omega_1 + \Omega_2$ et $\Omega_1 - \Omega_2$, pour alléger l'écriture.

2. La forme de Liouville sur un fibré cotangent

On va voir que le fibré cotangent à une variété différentiable possède une structure symplectique naturelle.

2.1. Quelques notations. Soit N une variété différentiable, et T^*N son fibré cotangent. On note $q : T^*N \to N$ la projection canonique, $Tq : T(T^*N) \to TN$ le prolongement de q aux vecteurs, $p_N : TN \to N$ et $p_{T^*N} : T(T^*N) \to T^*N$ les projections canoniques des fibrés tangents, respectivement à N et à T^*N, sur leurs bases. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(T^*N) & \xrightarrow{Tq} & TN \\ \Big\downarrow p_{T^*N} & & \Big\downarrow p_N \\ T^*N & \xrightarrow{q} & N \end{array} \tag{1}$$

2.2. Définition. Avec les notations précisées ci-dessus, on appelle *forme de Liouville* sur le fibré cotangent T^*N la 1-forme α sur T^*N définie par la formule, dans laquelle z est un point de T^*N et v un vecteur tangent en z à T^*N:

$$\langle \alpha, v \rangle = \big\langle p_{T^*N}(v), Tq(v) \big\rangle = \big\langle z, Tq(v) \big\rangle \,.$$

2.3. Commentaire.

1. La formule ci-dessus définit bien une 1-forme différentielle sur T^*N, car d'après la commutativité du diagramme (1), $z = p_{T^*N}(v)$ et $Tq(v)$ sont éléments, respectivement, de l'espace T_x^*N, cotangent en $x = q(z)$ à N, et T_xN, tangent en x à N; or ces deux espaces vectoriels sont en dualité. On voit ainsi que $\langle \alpha, v \rangle$ est bien défini, et que sur chaque fibre $T_z(T^*N)$, $v \mapsto \langle \alpha, v \rangle$ est linéaire.

2. Considérons une carte de N dont les coordonnées locales sont notées $x^1, \ldots, x^n$; notons $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*N. La forme de Liouville α a pour expression dans cette carte

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx^i \,.$$

2.4. Proposition. *La différentielle extérieure $d\alpha$ de la forme de Liouville α est une forme symplectique sur T^*N, dite forme symplectique canonique.*

Démonstration. On a évidemment

$$d(d\alpha) = 0$$

puisque $d \circ d = 0$. De plus, $d\alpha$ est non dégénérée. Son expression locale, dans la carte considérée en 2.3.2, est en effet

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,. \quad \square$$

2.5. Proposition. *Soit β une 1-forme différentielle sur la variété N. Puisque β est une application différentiable de N dans son fibré cotangent T^*N, qui vérifie $q \circ \beta = \mathrm{id}_N$ ($q : T^*N \to N$ désignant la projection canonique), on peut considérer l'image réciproque $\beta^*\alpha$ de la forme de Liouville α sur T^*N. On a:*

$$\beta^*\alpha = \beta \,.$$

Démonstration. Soit $x \in N$ et $v \in T_xN$. On a par définition d'une forme image réciproque et d'après la définition de α:

$$\begin{aligned}
\big\langle \beta^*\alpha(x), v \big\rangle &= \big\langle \alpha\big(\beta(x)\big), T\beta(v) \big\rangle \\
&= \big\langle \beta(x), Tq \circ T\beta(v) \big\rangle \\
&= \big\langle \beta(x), T(q \circ \beta)(v) \big\rangle \\
&= \big\langle \beta(x), v \big\rangle \,,
\end{aligned}$$

car $q \circ \beta = \mathrm{id}_N$, donc $T(q \circ \beta) = \mathrm{id}_{TN}$. On a donc bien

$$\beta^*\alpha = \beta \,. \quad \square$$

3. Sous-variétés remarquables d'une variété symplectique

3.1. Définitions. Soit (M, Ω) une variété symplectique et N une sous-variété de M. On dit que N est une sous-variété *isotrope* (resp., *coïsotrope*, resp., *lagrangienne*, resp., *symplectique*) si pour tout $x \in N$, T_xN est un sous-espace vectoriel isotrope (resp., coïsotrope, resp., lagrangien, resp., symplectique) de $\big(T_xM, \Omega(x)\big)$.

3.2. Quelques exemples.

Soit N une variété différentiable, et T^*N son fibré cotangent, muni de la forme symplectique $\Omega = d\alpha$, différentielle extérieure de sa forme de Liouville α.

1. Pour tout $x \in N$, la fibre T^*_xN est une sous-variété lagrangienne de T^*N. Cela résulte en effet immédiatement de l'expression locale de Ω, dans la carte de T^*N, de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$, associée à une carte de N de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

2. La section nulle de T^*N (image de la forme nulle) est une sous-variété lagrangienne de T^*N. Cela résulte aussi de l'expression locale de Ω indiquée ci-dessus.

3. Plus généralement, soit S une sous-variété de N. On note $T^*_S N$ la restriction à S du fibré cotangent à N, c'est-à-dire le fibré de base S dont la fibre, en chaque point x de S, est l'espace cotangent $T^*_x N$. On appelle *fibré conormal à* S et on note $(TS)^0$ le sous-fibré de $T^*_S N$ dont la fibre, en chaque point x de S, est l'annulateur de l'espace $T_x S$ tangent en x à S, c'est-à-dire l'ensemble des $\eta \in T^*_x N$ telles que $\langle \eta, v \rangle = 0$ pour tout $v \in T_x S$. On montrera, à titre d'exercice, que $(TS)^0$ est une sous-variété lagrangienne de T^*N. [Indications: On pourra, au voisinage de chaque point de S, choisir une carte de N, de domaine U, adaptée à la sous-variété S, c'est-à-dire une carte dont les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sont telles que $S \cap U$ soit l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x^i = 0$ pour $s+1 \leq i \leq n$, où s désigne la dimension de S. On considèrera alors la carte de T^*N associée à une telle carte de N, et on cherchera comment sont caractérisés, au moyen de leurs coordonnées locales, les points de $(TS)^0$ contenus dans le domaine de cette carte.] On remarquera que lorsque S est réduite à un point x de N, on retrouve le cas 1, et que lorsque $S = N$, on retrouve le cas 2.

La proposition ci-dessous donne un autre exemple important de sous-variété lagrangienne.

3.3. Proposition. *Soit N une variété différentiable, T^*N son fibré cotangent, muni de sa 2-forme symplectique canonique $\Omega = d\alpha$. Soit β une forme différentielle sur N. L'image de β est une sous-variété lagrangienne de T^*N si et seulement si β est fermée, c'est-à-dire vérifie $d\beta = 0$.*

Démonstration. Soit n la dimension de N. Le fibré cotangent T^*N est donc de dimension $2n$. L'image $\beta(N)$ de β est une sous-variété de T^*N de dimension n. Elle est donc lagrangienne si et seulement si elle est isotrope, c'est-à-dire si et seulement si la 2-forme induite par Ω sur $\beta(N)$ est nulle. Comme β est un difféomorphisme de N sur $\beta(N)$, dont l'inverse est la restriction à $\beta(N)$ de la projection canonique $q : T^*N \to N$, la 2-forme induite par Ω sur $\beta(N)$ est nulle si et seulement si son image réciproque par β est nulle. Or celle-ci n'est autre que

$$\beta^*(\Omega) = \beta^*(d\alpha) = d(\beta^*\alpha) = d\beta\,,$$

compte tenu de la proposition 2.5, et du fait que la différentiation extérieure d commute avec la prise d'image réciproque. □

4. Symplectomorphismes

4.1. Définition. Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension, et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application différentiable.

1. On dit que φ est un *symplectomorphisme local* si

$$\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1\,.$$

2. On dit que φ est un *symplectomorphisme* si c'est à la fois un symplectomorphisme local et un difféomorphisme.

4.2. Remarques.

1. Un symplectomorphisme local est un difféomorphisme local. En effet, si $\varphi : M_1 \to M_2$ est un symplectomorphisme local, on a

$$\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1 \,, \quad \text{donc aussi} \quad \varphi^*(\Omega_2^n) = \Omega_1^n \,.$$

Comme Ω_2^n et Ω_1^n sont des formes éléments de volume, respectivement sur M_2 et M_1, cela prouve que φ est de rang $2n$ en tout point de M_1, donc est un difféomorphisme local.

2. Si $\varphi : M_1 \to M_2$ est un symplectomorphisme, son inverse $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ est aussi un symplectomorphisme.

4.3. Proposition. *Soient N_1 et N_2 deux variétés de même dimension n, et $\varphi : N_1 \to N_2$ un difféomorphisme. On note $\widehat{\varphi} : T^*N_1 \to T^*N_2$ le relèvement de φ aux fibrés cotangents, ainsi défini: pour tout $x \in N_1$, la restriction de $\widehat{\varphi}$ à la fibre $T_x^*N_1$ est la transposée de $T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}) : T_{\varphi(x)}N_2 \to T_xN_1$. En désignant par α_1 et α_2 les formes de Liouville de T^*N_1 et T^*N_2, on a*

$$\widehat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1 \,, \quad \widehat{\varphi}^*(d\alpha_2) = d\alpha_1 \,,$$

donc $\widehat{\varphi}$ est un symplectomorphisme de $(T^*N_1, d\alpha_1)$ sur $(T^*N_2, d\alpha_2)$.

Démonstration. On a, pour tout $z \in T^*N_1$ et tout $v \in T_z(T^*N_1)$:

$$\begin{aligned}\big\langle \widehat{\varphi}^*\alpha_2(z), v\big\rangle &= \big\langle \alpha_2\big(\widehat{\varphi}(z)\big), T\widehat{\varphi}(v)\big\rangle \\ &= \big\langle \widehat{\varphi}(z), Tq_{N_2} \circ T\widehat{\varphi}(v)\big\rangle \\ &= \big\langle z, T(\varphi^{-1}) \circ Tq_{N_2} \circ T\widehat{\varphi}(v)\big\rangle \,.\end{aligned}$$

Mais $q_{N_2} \circ \widehat{\varphi} = \varphi \circ q_{N_1}$, donc $Tq_{N_2} \circ T\widehat{\varphi} = T\varphi \circ Tq_{N_1}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\big\langle \widehat{\varphi}^*\alpha_2(z), v\big\rangle &= \big\langle z, T(\varphi^{-1}) \circ T\varphi \circ Tq_{N_1}(v)\big\rangle \\ &= \big\langle z, Tq_{N_1}(v)\big\rangle \\ &= \big\langle \alpha_1(z), v\big\rangle \,.\end{aligned}$$

On a donc bien $\widehat{\varphi}^*\alpha_2 = \alpha_1$. Comme la différentiation extérieure commute avec la prise d'images réciproques, on en déduit

$$\widehat{\varphi}^*(d\alpha_2) = d\alpha_1 \,,$$

ce qui prouve que $\widehat{\varphi}$ est un symplectomorphisme local. Comme c'est un difféomorphisme, c'est en fait un symplectomorphisme. □

4.4. Proposition. *Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension. Une application différentiable $\varphi : M_1 \to M_2$ est un symplectomorphisme local si et seulement si son graphe*

$$\mathrm{Gr}(\varphi) = \big\{\, (x, y) \in M_1 \times M_2 \;\big|\; y = \varphi(x) \,\big\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $(M_1 \times M_2, \Omega_1 - \Omega_2)$ *(avec les notations de 1.2.5).*

Démonstration. On laisse cette démonstration à faire comme exercice, en donnant seulement quelques indications. Remarquer que le graphe de φ est une sous-variété de dimension $2n$ de $M_1 \times M_2$, de dimension $4n$, et que l'application $x \mapsto \big(x, \varphi(x)\big)$ est un difféomorphisme de M_1 sur le graphe de φ. Par suite, le graphe de φ est une sous-variété lagrangienne de $(M_1 \times M_2, \Omega_1 - \Omega_2)$ si et seulement si l'image réciproque de $\Omega_1 - \Omega_2$ par l'application $x \mapsto \big(x, \varphi(x)\big)$ est la forme identiquement nulle sur M_1. □

4.5. Remarque. Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques, pas nécessairement de même dimension. La proposition précédente suggère de considérer les sous-variétés lagrangiennes du produit $M_1 \times M_2$, muni de la forme symplectique $\Omega_1 - \Omega_2$. W. M. Tulczyjew et S. Benenti ont développé l'étude de ces sous-variétés, qu'ils ont appelé *relations symplectiques*, et ont montré qu'elles jouent un rôle important dans de nombreux problèmes de géométrie symplectique et de mécanique.

5. Champs de vecteurs hamiltoniens

5.1. Rappel. Soit X un champ de vecteurs différentiable sur une variété différentiable M. On appelle *flot réduit* de X l'application Φ, définie sur un ouvert de $\mathbf{R} \times M$ contenant $\{0\} \times M$, à valeurs dans M, telle que pour tout $x \in M$ fixé, $t \mapsto \varphi(t) = \Phi(t, x)$ soit la courbe intégrale maximale de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\big(\varphi(t)\big)$$

vérifiant la donnée de Cauchy

$$\varphi(0) = x\,.$$

5.2. Proposition. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique,* X *un champ de vecteurs différentiable sur* M*, et* Φ *son flot réduit. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$, $\Phi_t : x \mapsto \Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ *est un symplectomorphisme de l'ouvert de* (M, Ω) *sur lequel il est défini, sur son image.*

2. *Le champ de vecteurs* X *vérifie*

$$\mathcal{L}(X)\Omega = 0\,,$$

où $\mathcal{L}(X)$ *désigne la dérivée de Lie selon* X*.*

3. *La 1-forme différentielle* $i(X)\Omega$*, produit intérieur de* Ω *par* X*, est fermée:*

$$di(X)\Omega = 0\,.$$

Démonstration. Le lecteur pourra se reporter, si nécessaire, à l'excellent livre de Claude Godbillon "Géométrie et mécanique" pour approfondir ses connaissance sur la dérivée de Lie. On rappelle la formule

$$\mathcal{L}(X) = i(X)\, d + d\, i(X)\,,$$

qui nous donne ici

$$\mathcal{L}(X)\Omega = i(X)\, d\Omega + d\, i(X)\Omega = d\, i(X)\Omega$$

puisque $d\Omega = 0$. Par suite, 2 et 3 sont équivalentes.

D'autre part, on rappelle la formule, valable pour toute forme différentielle η,

$$\frac{d}{d\theta}\big(\Phi_\theta^*\eta\big)\big|_{\theta=t} = \Phi_t^*\big(\mathcal{L}(X)\eta\big)\,.$$

Supposons la propriété 1 vérifiée. Puisque pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\Phi_\theta^*\Omega = \Omega$, la formule ci-dessus montre que $\mathcal{L}(X)\Omega = 0$. Réciproquement, si $\mathcal{L}(X)\Omega = 0$, cette même formule montre que la dérivée de $\Phi_\theta^*\Omega$ par rapport à θ en $\theta = t$ est nulle, quel que soit t. Par suite, $\Phi_t^*\Omega$ ne dépend pas de t, et comme $\Phi_0^*\Omega = \Omega$, on en déduit que tous les Φ_t sont des symplectomorphismes. □

5.3. Définitions. Soit (M, Ω) une variété symplectique. Un champ de vecteurs différentiable X sur M est dit

- *localement hamiltonien* s'il vérifie les trois propriétés équivalentes de la proposition 5.2,
- *globalement hamiltonien*, ou s'il n'y a pas de risque de confusion, *hamiltonien*, s'il existe une fonction différentiable f telle que

$$i(X)\Omega = -df\,.$$

La fonction f est alors appelée un *hamiltonien* associé au champ de vecteurs X.

5.4. Remarques.

1. Un champ de vecteurs hamiltonien est automatiquement localement hamiltonien, puisque $i(X)\Omega = -df$ implique $d\, i(X)\Omega = -d(df) = 0$.

2. Réciproquement, sur une variété simplement connexe, ou plus généralement sur une variété M telle que $H^1(M) = 0$, tout champ de vecteurs localement hamiltonien est hamiltonien; en effet, si la 1-forme différentielle $i(X)\Omega$ est fermée et si $H^1(M) = 0$, il existe une fonction différentiable f telle que $i(X)\Omega = -df$.

5.5. Expression locale. Soit N une variété différentiable de dimension n, T^*N son fibré cotangent, muni de sa forme symplectique canonique $\Omega = d\alpha$, α étant sa 1-forme de Liouville. Soit $H : T^*N \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable, et X_H le champ de vecteurs hamiltonien associé, défini par

$$i(X_H)\Omega = -dH\,.$$

On considère une carte de N, dont les coordonnées locales sont notées $x^1, \ldots, x^n$, et la carte associée de T^*N, dont on note les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$. On

rappelle que dans ces coordonnées, la forme de Liouville et sa différentielle extérieure ont pour expressions locales

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx^i \,, \qquad \Omega = d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

La différentielle de H ayant pour expression locale

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x^i} \, dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dp_i \right) \,,$$

on en déduit, par identification, l'expression locale de X_H:

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \,. \tag{$*$}$$

L'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X_H\big(\varphi(t)\big)$$

s'écrit donc, en coordonnées,

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \,, \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i} \,. \end{cases} \tag{$**$}$$

Ces équations sont appelées *équations de Hamilton*.

Ces expressions locales ne sont pas particulières au cas où la variété symplectique considérée est un fibré cotangent.On verra en effet plus loin que toute variété symplectique de dimension $2n$ possède un atlas de cartes, dites *cartes canoniques*, dans lesquelles la forme symplectique Ω a pour expression locale, au moyen des coordonnées locales, notées $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

Dans une telle carte, le champ de vecteurs hamiltonien X_H associé à une fonction différentiable H a pour expression locale $(*)$, et l'équation différentielle de Hamilton a pour expression $(**)$.

5.6. Proposition. *Soient X et Y deux champs de vecteurs localement hamiltoniens sur une variété symplectique (M, Ω). Leur crochet $[X, Y]$ est globalement hamiltonien, et a pour hamiltonien $i(Y)i(X)\Omega = \Omega(X, Y)$.*

Démonstration. Rappelons une formule très utile. Soit η une forme différentielle de degré quelconque p, X et Y deux champs de vecteurs, tous définis sur une variété M. On a

$$\mathcal{L}(X)i(Y)\eta = i\big([X, Y]\big)\eta + i(Y)\mathcal{L}(X)\eta \,.$$

Appliquons cette formule dans le cas présent, avec $\eta = \Omega$. On obtient

$$i\big([X,Y]\big)\Omega = \mathcal{L}(X)i(Y)\Omega$$

car $\mathcal{L}(X)\Omega = 0$, le champ X étant localement hamiltonien. D'autre part

$$\mathcal{L}(X)i(Y)\Omega = \big(i(X)d + di(X)\big)i(Y)\Omega = di(X)i(Y)\Omega = -d\big(\Omega(X,Y)\big)\,,$$

car $di(Y)\Omega = 0$. $\square$

5.7. Exercice. Soit (M,Ω) une variété symplectique. On note $\Omega^\flat : TM \to T^*M$ l'application

$$v \mapsto -i(v)\Omega$$

et $\Omega^\sharp : T^*M \to TM$ l'inverse de $\Omega^\flat$. On munit TM de la 2-forme

$$\Omega_{TM} = (\Omega^\flat)^*(d\alpha)\,,$$

image réciproque par $\Omega^\flat$ de la forme $d\alpha$ sur T^*M (α étant la forme de Liouville).

1. Montrer que (TM,Ω_{TM}) est une variété symplectique. Donner l'expression locale de Ω_{TM}, dans une carte de TM associée à une carte canonique de M, c'est-à-dire dans laquelle Ω a pour expression (les coordonnées locales sur M étant notées $x^1,\dots,x^{2n}$),

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i\,.$$

2. Soit X un champ de vecteurs différentiable sur M. Montrer que X est localement hamiltonien si et seulement si son image $X(M)$ est une sous-variété lagrangienne de (TM,Ω_{TM}). Ce résultat est dû à W. M. Tulczyjew.

6. Le crochet de Poisson

6.1. Définition. Soit (M,Ω) une variété symplectique. À tout couple de fonctions différentiables (f,g) sur M, on associe la fonction

$$\{f,g\} = i(X_f)dg\,,$$

où X_f est le champ de vecteurs hamiltonien associé à f, défini par $i(X_f)\Omega = -df$. On dit que $\{f,g\}$ est le *crochet de Poisson* des fonctions f et g.

6.2. Proposition. *Le crochet de Poisson a les propriétés suivantes.*

1. *On a, pour tout couple de fonctions différentiables (f,g) sur M, en notant X_f et X_g les champs de vecteurs hamiltoniens associés,*

$$\{f,g\} = i(X_f)dg = -i(X_g)df = i(X_g)i(X_f)\Omega = \Omega(X_f,X_g)\,.$$

2. *Le crochet de Poisson est une application bilinéaire de* $C^\infty(M,\mathbf{R})\times C^\infty(M,\mathbf{R})$ *dans* $C^\infty(M,\mathbf{R})$.

3. *Le crochet de Poisson est antisymétrique,*

$$\{g,f\} = -\{f,g\}\,.$$

4. *Le crochet de Poisson vérifie la formule de Leibniz:*

$$\{f,g_1g_2\} = \{f,g_1\}g_2 + g_1\{f,g_2\}\,, \quad f,\ g_1,\ g_2 \in C^\infty(M,\mathbf{R})\,.$$

5. *Le champ hamiltonien* $X_{\{f,g\}}$ *ayant pour hamiltonien le crochet de Poisson* $\{f,g\}$ *de deux fonctions* f *et* g*, est le crochet des champs hamiltoniens* X_f *et* X_g *associés à ces fonctions:*

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]\,.$$

6. *Le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi*

$$\big\{\{f,g\},h\big\} + \big\{\{g,h\},f\big\} + \big\{\{h,f\},g\big\} = 0\,, \quad f,\ g,\ h \in C^\infty(M,\mathbf{R})\,.$$

Démonstration. Les propriétés 1, 2, 3 et 4 sont des conséquences immédiates de la définition. La propriété 5 est conséquence de la proposition 5.6. Montrons 6. On a, compte tenu de la propriété 5 (en notant $Z.h = i(Z)dh = \langle dh, Z\rangle$ la dérivée d'une fonction h dans la direction d'un champ de vecteurs Z):

$$\begin{aligned}
\big\{\{f,g\},h\big\} &= [X_f, X_g].h\,,\\
\big\{\{g,h\},f\big\} &= -\big\{f,\{g,h\}\big\} = -X_f.(X_g.h)\,,\\
\big\{\{h,f\},g\big\} &= \big\{g,\{f,h\}\big\} = X_g.(X_f.h)\,.
\end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient

$$\big\{\{f,g\},h\big\} + \big\{\{g,h\},f\big\} + \big\{\{h,f\},g\big\} = 0\,,$$

en vertu de la formule bien connue applicable à tout couple de champs de vecteurs (Y,Z) et à toute fonction différentiable h:

$$[Y,Z].h = Y.(Z.h) - Z.(Y.h)\,. \quad \square$$

6.3. Expression locale du crochet de Poisson en coordonnées canoniques. Soit (M,Ω) une variété symplectique. Ainsi qu'on l'a déjà annoncé, il existe un atlas de M formé de cartes canoniques, c'est-à-dire telles que la 2-forme Ω ait pour expression locale, au moyen des coordonnées locales $x^1,\dots,x^{2n}$,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n} dx^{n+i}\wedge dx^i\,.$$

Dans une telle carte, le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables a pour expression locale

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{n+i}}\,\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial g}{\partial x^{n+i}}\right)\,.$$

7. Réduction d'une variété symplectique

7.1. Quelques rappels sur les feuilletages. Soit N une variété différentiable de dimension n, et k un entier vérifiant $1 \leq k \leq n$.

On appelle *champ de k-directions* (ou parfois aussi *distribution* de rang k) sur N un sous-ensemble $\mathcal{F}$ du fibré tangent TN tel que, pour tout point $x \in N$, $\mathcal{F} \cap T_xN$ soit un sous-espace vectoriel de dimension k de T_xN. Ce sous-espace $\mathcal{F} \cap T_xN$ est noté $\mathcal{F}_x$, et appelé *fibre* de $\mathcal{F}$ au point x.

Un champ de k-directions $\mathcal{F}$ est dit *différentiable* (sous-entendu: de classe C^∞) si tout point x de N possède un voisinage U sur lequel existent k champs de vecteurs différentiables (de classe C^∞) X_i, $1 \leq i \leq k$, dont les valeurs, en tout point $y \in U$, forment une base de la fibre $\mathcal{F}_y$.

On appelle *intégrale* d'un champ de k-directions différentiable $\mathcal{F}$, sur la variété différentiable N, une immersion $f : S \to N$ d'une variété différentiable connexe S dans la variété N telle que, pour tout point $x \in S$, $T_xf(T_xS)$ soit un sous-espace vectoriel de la fibre $\mathcal{F}_{f(x)}$. Lorsque c'est le cas, la dimension de S est nécessairement inférieure ou égale à k, car f étant une immersion, T_xf est injective. On appelle *sous-variété intégrale* de $\mathcal{F}$ une sous-variété de N dont l'injection canonique dans N est une intégrale de $\mathcal{F}$. Bien souvent, on n'exige pas que S soit une sous-variété de N au sens strict, c'est-à-dire une sous-variété plongée (dont la topologie en tant que variété est identique à la topologie induite par celle de N). On demande seulement que S soit une "sous-variété immergée" de N, c'est-à-dire un sous-ensemble de N possédant une structure de variété différentiable telle que son injection canonique dans N soit une immersion. Une sous-variété intégrale de $\mathcal{F}$ est dite *maximale* si toute sous-variété intégrale de $\mathcal{F}$ qui la contient lui est égale.

Un champ de k directions différentiable $\mathcal{F}$ sur la variété N est dit *complètement intégrable* si, pour tout point x de N, il existe une sous-variété intégrale de $\mathcal{F}$ de dimension k passant par le point x. Lorsque c'est le cas, on montre que par tout point de N passe une unique sous-variété intégrale maximale de $\mathcal{F}$. On dit alors que $\mathcal{F}$ définit un *feuilletage* de N. Les sous-variétés intégrales maximales de $\mathcal{F}$ sont appelées *feuilles* de ce feuilletage. L'appartenance à une même feuille est une relation d'équivalence sur N, dont les classes sont précisément les feuilles. Celles-ci forment donc une partition de N. De plus, une intégrale quelconque $f : S \to N$ de $\mathcal{F}$ (la dimension de S pouvant être inférieure à k) a nécessairement son image $f(S)$ entièrement contenue dans une feuille, et f, considérée comme application de S dans cette feuille, est une immersion (dans le cas où la dimension de S est k, c'est un difféomorphisme local).

La structure locale d'une variété feuilletée (c'est-à-dire d'une variété différentiable N munie d'un champ de k-directions différentiable et complètement intégrable) est très simple: tout point de N possède un voisinage U qui est le domaine d'une carte dont les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sont telles que $\mathcal{F}$ soit localement engendré, au dessus de l'ouvert U, par les k champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Les composantes connexes des intersections de U avec les feuilles du feuilletage défini par $\mathcal{F}$ sont les sous-variétés définies par des équations de la forme $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$, où $c^{k+1}, \ldots, c^n$ sont des constantes.

Un théorème dû à Frobenius donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de k-directions différentiable $\mathcal{F}$ soit complètement intégrable. Une des formes les plus souvent utilisées de ces conditions est la suivante: $\mathcal{F}$ est complètement intégrable si

et seulement si, pour tout couple (X, Y) de sections locales différentiables de $\mathcal{F}$, le crochet $[X, Y]$ est une section locale de $\mathcal{F}$. On rappelle qu'une section locale différentiable de $\mathcal{F}$ est un champ de vecteurs différentiable X, défini sur un ouvert U de N, et tel que, pour tout $x \in U$, $X(x)$ soit élément de la fibre $\mathcal{F}_x$. Pour plus de détails sur les diverses formes du théorème de Frobenius, le lecteur pourra consulter le livre de Claude Godbillon déjà cité.

Les notions de complète intégrabilité et de feuilletage s'étendent aux champs de directions différentiables dont le rang k n'est pas nécessairement constant. Il existe des généralisations du théorème de Frobenius (théorèmes de Stefan et Sussmann) adaptées à ce cas, qui se révèleront utiles dans la suite du cours (notamment lors de l'étude des variétés de Poisson). Mais pour le moment nous n'avons à considérer que des feuilletages au sens usuel, dont toutes les feuilles sont de même dimension.

7.2. Proposition. *Soit (M, Ω) une variété symplectique et N une sous-variété de M telle que la forme $\Omega_N = i_N^*\Omega$, induite par Ω sur N, soit de rang constant. Alors $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$ est un sous-fibré vectoriel complètement intégrable de TN.*

Démonstration. Pour tout point $x \in N$, on a

$$\ker \Omega_N(x) = T_xN \cap \operatorname{orth}(T_xN)\,.$$

La dimension de $T_xN \cap \operatorname{orth}(T_xN)$ ne dépend donc pas du choix du point x de N. Par suite, $\ker \Omega_N = TN \cap \operatorname{orth}(TN)$ est un sous-fibré vectoriel de TN. Pour montrer qu'il est complètement intégrable il suffit, d'après le théorème de Frobenius, de montrer que si X et Y sont deux sections différentiables de $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$, c'est-à-dire deux champs de vecteurs différentiables sur N tels que, pour tout $x \in N$, $X(x)$ et $Y(x)$ soient éléments de $T_xN \cap \operatorname{orth}(T_xN)$, alors $[X, Y]$ est aussi une section de $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$. On a

$$\begin{aligned} i([X,Y])\Omega_N &= \mathcal{L}(X)i(Y)\Omega_N - i(Y)\mathcal{L}(X)\Omega_N \\ &= -i(Y)\mathcal{L}(X)\Omega_N \\ &= -i(Y)\big(i(X)d\Omega_N + di(X)\Omega_N\big) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

compte tenu de $d\Omega_N = 0$, $i(Y)\Omega_N = 0$, $i(X)\Omega_N = 0$. Ceci montre que $[X, Y]$ est une section de $\ker \Omega_N = TN \cap \operatorname{orth}(TN)$. □

7.3. Théorème. *On fait les mêmes hypothèses que dans la proposition 7.2. On suppose de plus que le feuilletage de N défini par le sous-fibré complètement intégrable $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$ de TN est simple, c'est-à-dire que l'ensemble P des feuilles de ce feuilletage est une variété différentiable et que la projection canonique $\pi : N \to P$ est une submersion. Alors il existe sur P une 2-forme symplectique Ω_P unique telle que*

$$\pi^*\Omega_P = i_N^*\Omega = \Omega_N.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage de N défini par $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$. S'il existe une 2-forme Ω_P sur P telle que $\pi^*\Omega_P = \Omega_N$, on doit nécessairement avoir, pour tout point $\dot{x} \in P$ et tout couple de vecteurs $\dot{v}$ et $\dot{w}$ éléments de $T_{\dot{x}}P$,

$$\Omega_P(\dot{x})(\dot{v}, \dot{w}) = \Omega_N(x)(v, w)\,,$$

où x est un point quelconque de $\pi^{-1}(\dot{x})$, v et w deux vecteurs éléments de T_xN tels que

$$T\pi(v) = \dot{v}\,, \quad T\pi(w) = \dot{w}\,.$$

Cela montre que si elle existe, la 2-forme Ω_P est unique. Pour prouver son existence, il suffit de vérifier que $\Omega_N(x)(v,w)$ ne dépend pas du choix de x dans $\pi^{-1}(\dot{x})$, ni des choix de v et w dans $(T_x\pi)^{-1}(\dot{v})$ et $(T_x\pi)^{-1}(\dot{w})$, respectivement.

Si v et v' appartiennent tous deux à $(T_x\pi)^{-1}(\dot{v})$, $v - v'$ est élément de $T_x\big(\pi^{-1}(\dot{x})\big) = \ker \Omega_N(x)$, donc $\Omega_N(x)(v,w) = \Omega_N(x)(v',w)$. Le même raisonnement vaut aussi pour w.

Soient x et x' deux éléments de $\pi^{-1}(\dot{x})$. Chaque feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ étant connexe, il existe un champ de vecteurs Z, défini sur un ouvert de N contenant x et x', à valeurs dans $TN \cap \mathrm{orth}(TN)$, tel que x et x' soient sur la même courbe intégrale de Z. Notons Φ le flot de Z. La courbe intégrale de Z passant par x pour $t = 0$ est $t \mapsto \Phi_t(x) = \Phi(t,x)$. Puisque x' est sur cette courbe intégrale, il existe un réel τ tel que $\Phi_\tau(x) = x'$. Soient v et w deux vecteurs éléments de T_xN, vérifiant

$$T\pi(v) = \dot{v}\,, \quad T\pi(w) = \dot{w}\,.$$

Posons

$$v' = T\Phi_\tau(v)\,, \quad w' = T\Phi_\tau(w)\,.$$

Puisque Z est une section de $TN \cap \mathrm{orth}(TN)$, chaque courbe intégrale de ce champ de vecteurs est entièrement contenue dans une feuille du feuilletage $\mathcal{F}$. Par suite, $\pi \circ \Phi_\tau = \pi$, donc

$$\begin{aligned} T\pi(v') &= T\pi \circ T\Phi_\tau(v) = T\pi(v) = \dot{v}\,, \\ T\pi(w') &= T\pi \circ T\Phi_\tau(w) = T\pi(w) = \dot{w}\,. \end{aligned}$$

On a

$$\Omega_N(x')(v',w') = \Omega_N\big(\Phi_\tau(x)\big)\big(T\Phi_\tau(v), T\Phi_\tau(w)\big) = \big(\Phi_\tau^*(\Omega_N)\big)(x)(v,w)\,.$$

Mais d'après une formule bien connue concernant la dérivée de Lie,

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi_t^*\Omega_N\big) = \Phi_t^*\big(\mathcal{L}(Z)\Omega_N\big) = 0\,,$$

car

$$\mathcal{L}(Z)\Omega_N = i(Z)d\Omega_N + di(Z)\Omega_N = 0\,,$$

puisque $d\Omega_N = 0$ et $i(Z)\Omega_N = 0$. On a donc

$$\Phi_\tau^*\Omega_N = \Omega_N\,,$$

et par suite

$$\Omega_N(x')(v',w') = \Omega_N(x)(v,w)\,.$$

On a donc prouvé l'existence et l'unicité de Ω_P.

L'espace vectoriel $T_{\dot{x}}P$ s'identifie au quotient de T_xN par son sous-espace $T_xN \cap \mathrm{orth}(T_xN)$. On reconnaît, dans la définition de $\Omega_P(\dot{x})$, la construction de la structure d'espace vectoriel symplectique réduit sur ce quotient, étudiée au chapitre I. Ceci prouve que Ω_P est partout de rang égal à la dimension de P.

Enfin on a

$$\pi^*(d\Omega_P) = d(\pi^*\Omega_P) = d\Omega_N = 0\,,$$

ce qui implique $d\Omega_P = 0$ car π étant une submersion, π^* est injective. $\square$

7.4. Théorème. *Dans les hypothèses du théorème 7.3, soit H une fonction différentiable définie sur M, telle que le champ de vecteurs hamiltonien correspondant X_H soit tangent à la sous-variété N (en chacun de ses points). Il existe alors une fonction différentiable unique $\widehat{H}$ définie sur P telle que*

$$H\big|_N = \widehat{H} \circ \pi\,.$$

De plus, soit $X_{\widehat{H}}$ le champ de vecteurs hamiltonien sur P associé à la fonction $\widehat{H}$ (relativement à la structure symplectique Ω_P). La restriction à N du champ de vecteurs X_H est projetable par π sur P, et a pour projection $X_{\widehat{H}}$.

Démonstration. On note $^\sharp : T^*M \to TM$ le morphisme de fibrés vectoriels inverse de $^\flat : TM \to T^*M$, $^\flat v = -i(v)\Omega$. Par hypothèse, pour tout point x de N, $X_H(x) = {}^\sharp\big(dH(x)\big)$ est élément de T_xN; par suite, $dH(x)$ est élément de l'annulateur $\big(\operatorname{orth} T_xN)\big)^0$ de l'orthogonal de T_xN. Par suite, H est constante sur chaque feuille du feuilletage $\mathcal{F}$, puisque celui-ci est défini par le sous-fibré $TN \cap \operatorname{orth}(TN)$. Il existe donc bien une fonction $\widehat{H} : P \to \mathbf{R}$ unique telle que $H\big|_N = \widehat{H} \circ \pi$. La fonction $\widehat{H}$ est différentiable car la structure de variété de P est la structure quotient de celle de N. On a

$$\Omega_N = \pi^*\Omega_P\,, \quad H\big|_N = \pi^*\widehat{H}\,, \quad \text{donc } d(H\big|_N) = \pi^*(d\widehat{H})\,,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\pi^*\Big(i\big(T\pi(X_H\big|_N)\big)\Omega_P\Big) &= -i(X_H\big|_N)\Omega_N \\
&= -d(H\big|_N) \\
&= -\pi^*(d\widehat{H}) \\
&= \pi^*\big(i(X_{\widehat{H}})\Omega_P\big)\,.
\end{aligned}$$

Mais π étant une submersion, et Ω_P étant non dégénérée, on en déduit que pour tout point $x \in N$:

$$T\pi\big(X_H(x)\big) = X_{\widehat{H}}\big(\pi(x)\big)\,. \quad \square$$

7.5. Remarques.

1. Le théorème 7.4 facilite la recherche des courbes intégrales du champ de vecteurs X_H contenues dans N, car on peut chercher d'abord leurs projections sur P, qui sont les courbes intégrales de $X_{\widehat{H}}$. Mais dans certaines applications, la construction est utilisée dans l'autre sens: un système hamiltonien sur une variété symplectique (P, Ω_P) étant donné, on cherche à déterminer un autre système hamiltonien, sur une variété symplectique de dimension plus grande (M, Ω), dont le système donné se déduit par réduction. Il arrive en effet que le système sur (M, Ω) soit plus simple que le système initialement donné, par exemple en

raison de symétries plus visibles, bien que la dimension de la variété sur laquelle il est défini soit plus grande. Cette méthode a été utilisée, notamment par Kazhdan, Kostant et Sternberg (Comm. Pure and Appl. Math., 31, 1978, 481–508) et par J. P. Françoise et O. Ragnisco (Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 49, 3, 1989, 369–375), pour prouver la complète intégrabilité de certains systèmes hamiltoniens.

2. Le théorème 7.4 a été généralisé par A. Lichnerowicz (Journal of Differential Geometry, 12, 1977, 253–300) au cas où le champ de vecteurs hamiltonien X_H n'est pas nécessairement tangent à N en chacun de ces points, mais où la restriction de ce champ de vecteurs à N est une section du fibré vectoriel $TN + \mathrm{orth}(TN)$.

7.6. Exemples de réduction.

1. Réduction d'une variété de niveau du hamiltonien. Soit (M, Ω) une variété symplectique et $H : M \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable. Soit $h \in \mathbf{R}$ une valeur régulière de H, c'est-à-dire une valeur telle que $dH(x) \neq 0$ pour tout $x \in H^{-1}(h)$. On sait alors que $N = H^{-1}(h)$ est une sous-variété de M, de codimension 1. Puisque H garde une valeur constante le long de chaque courbe intégrale de X_H, ce champ de vecteurs est tangent à N en chacun de ses points. De plus, X_H ne s'annule en aucun point de N, car dH ne s'annule pas sur N. Pour tout point x de N, l'orthogonal de T_xN est le sous-espace vectoriel de dimension 1 de T_xM engendré par $X_H(x)$. Il est contenu dans T_xN. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc, dans le cas présent, le feuilletage dont les feuilles sont les trajectoires de X_H contenues dans N. Si ce feuilletage est simple, on voit que l'ensemble P de ces trajectoires est une variété munie d'une 2-forme symplectique Ω_P, telle que $\pi^*\Omega_P = \Omega_N$. Le hamiltonien réduit $\widehat{H} : P \to \mathbf{R}$ est constant, égal à h, et le champ hamiltonien réduit $X_{\widehat{H}}$ est identiquement nul.

2. L'oscillateur harmonique. On prend pour variété symplectique $\mathbf{R}^{2n}$ (coordonnées $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$), muni de la forme symplectique

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} dy^k \wedge dx^k \,.$$

On prend pour hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left((x^k)^2 + (y^k)^2 \right) .$$

Le champ hamiltonien correspondant est

$$X_H = \sum_{k=1}^{n} \left(y^k \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial y^k} \right) .$$

Les équations de Hamilton s'écrivent donc

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt} = y^k \,, \\ \dfrac{dy^k}{dt} = -x^k \,. \end{cases}$$

On peut écrire ce qui précède en utilisant des coordonnées complexes $z^k = x^k + iy^k$. On note $z = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{C}^n$, et on munit $\mathbf{C}^n$ de la norme

$$\|z\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z^k|^2 \right)^{1/2} .$$

Le hamiltonien du système s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2} \|z\|^2 ,$$

et les équations de Hamilton ont pour expression

$$\frac{dz}{dt} = -iz .$$

Leur solution, prenant la valeur $z_0 \in \mathbf{C}^n$ pour $t = 0$, est

$$z(t) = z_0 \exp(it) .$$

Prenons par exemple $h = 1/2$. C'est une valeur régulière de H, et $N = H^{-1}(1/2)$ est la sphère S^{2n-1} de $\mathbf{C}^n$, centrée à l'origine, de rayon 1. Sa dimension (réelle) est $2n - 1$. Les courbes intégrales de X_H situées sur cette sphère sont des grands cercles, orbites de l'action de S^1 (cercle trigonométrique) sur S^{2n-1}:

$$(\exp(i\alpha), z) \mapsto \exp(i\alpha) z .$$

La variété symplectique réduite s'identifie à l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^{n-1}$, quotient de $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ par la relation d'équivalence: z équivalent à z' s'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, tel que $z' = \lambda z$. La projection $\pi : S^{2n-1} \to \mathbf{CP}^{n-1}$ est appelée *fibration de Hopf*.

7.7. Exercice. Dans l'exemple ci-dessus, déterminer l'expression de la forme symplectique de la variété symplectique réduite $\mathbf{CP}^{n-1}$, dans la carte ayant pour domaine la projection de l'ouvert de $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ constitué par les $z = (z^1, \ldots, z^n)$ tels que $z^1 \neq 0$.

Chapitre III

Variétés de Poisson

1. Variétés de Poisson; propriétés élémentaires

1.1. Définition. Une *structure de Poisson* sur une variété différentiable M est définie par la donnée d'une application de $C^\infty(M,\mathbf{R})\times C^\infty(M,\mathbf{R})$ dans $C^\infty(M,\mathbf{R})$, notée $(f,g)\mapsto\{f,g\}$, vérifiant les propriétés suivantes:

(i) L'espace vectoriel $C^\infty(M,\mathbf{R})$ muni de cette application comme loi de composition est une algèbre de Lie. Autrement dit, cette application est bilinéaire, antisymétrique

$$\{g,f\}=-\{f,g\}\,,$$

et vérifie l'identité de Jacobi

$$\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}=0\,,\quad f,\ g \text{ et } h\in C^\infty(M,\mathbf{R})\,.$$

(ii) Elle vérifie la formule de Leibniz:

$$\begin{aligned}\{f,g_1g_2\}&=\{f,g_1\}g_2+g_1\{f,g_2\}\,,\\ \{f_1f_2,g\}&=\{f_1,g\}f_2+f_1\{f_2,g\}\,.\end{aligned}$$

Munie d'une telle structure, M est appelée *variété de Poisson*, et l'algèbre de Lie $C^\infty(M,\mathbf{R})$ est appelée *algèbre de Poisson* de M.

1.2. Exemples.

1. Soit (M,Ω) une variété symplectique. On a défini une loi de composition appelée *crochet de Poisson* sur sur $C^\infty(M,\mathbf{R})$ en posant, pour tous f et $g\in C^\infty(M,\mathbf{R})$,

$$\{f,g\}=X_f.g=-X_g.f=\Omega(X_f,X_g)\,,$$

où X_f et X_g désignent les champs de vecteurs hamiltoniens associés, respectivement à f et à g. On a prouvé que cette loi de composition faisait de $C^\infty(M,\mathbf{R})$ une algèbre de Lie, et qu'elle vérifiait la formule de Leibniz. On voit donc que M possède une structure de Poisson, naturellement associée à sa structure symplectique.

2. Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, et $\mathcal{G}^*$ l'espace dual. Pour tout couple (f, g) d'éléments de $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ et tout point $x \in \mathcal{G}^*$, posons

$$\{f, g\}(x) = \big\langle x, [df(x), dg(x)] \big\rangle .$$

Le crochet [,] figurant au second membre désigne la loi de composition de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On a identifié $\mathcal{G}$ à son bidual, ce qui a permis de considérer $df(x)$ et $dg(x)$, qui sont des formes linéaires sur $\mathcal{G}^*$, comme des éléments de $\mathcal{G}$.

La loi de composition ainsi définie sur $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ est évidemment bilinéaire et antisymétrique. On vérifie aisément qu'elle satisfait la formule de Leibniz: il suffit de remarquer que la différentielle d'un produit vérifie cette même formule,

$$d(f_1 f_2)(x) = f_1(x)\, df_2(x) + f_2(x)\, df_1(x) .$$

Montrons que cette loi de composition vérifie l'identité de Jacobi. Introduisons d'abord quelques notations. Pour tout élément X de $\mathcal{G}$, on notera $\mathrm{ad}_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ l'application

$$\mathrm{ad}_X\, Y = [X, Y] .$$

On notera $\mathrm{ad}_X^* : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ l'application transposée de $(-\mathrm{ad}_X)$; on a donc, pour tout $x \in \mathcal{G}^*$ et tous X et $Y \in \mathcal{G}$:

$$\big\langle \mathrm{ad}_X^*\, x, Y \big\rangle = \big\langle x, -\mathrm{ad}_X\, Y \big\rangle = \big\langle x, [Y, X] \big\rangle .$$

Soient f, g et h trois éléments de $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$, x un point de $\mathcal{G}^*$. On a

$$\{f, g\}(x) = \big\langle x, [df(x), dg(x)] \big\rangle ,$$

donc, si y est un autre élément de $\mathcal{G}^*$,

$$\begin{aligned} d\{f, g\}(x)(y) &= \big\langle y, [df(x), dg(x)] \big\rangle \\ &\quad + \big\langle x, [D^2 f(x)(y), dg(x)] \big\rangle \\ &\quad + \big\langle x, [df(x), D^2 g(x)(y)] \big\rangle \\ &= \big\langle y, [df(x), dg(x)] \big\rangle \\ &\quad + \big\langle \mathrm{ad}_{dg(x)}^*\, x, D^2 f(x)(y) \big\rangle \\ &\quad - \big\langle \mathrm{ad}_{df(x)}^*\, x, D^2 g(x)(y) \big\rangle \\ &= \big\langle y, [df(x), dg(x)] \big\rangle \\ &\quad + \big\langle y, D^2 f(x)(\mathrm{ad}_{dg(x)}^*\, x) \big\rangle \\ &\quad - \big\langle y, D^2 g(x)(\mathrm{ad}_{df(x)}^*\, x) \big\rangle . \end{aligned}$$

On a noté $D^2 f(x)$ et $D^2 g(x)$ les différentielles secondes de f et de g en x, et tenu compte de leur symétrie; on a aussi utilisé l'identification habituelle de l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{G}^*$ avec l'espace des applications linéaires de $\mathcal{G}^*$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*, \mathbf{R}) = \mathcal{G}$. En posant

$$df(x) = X , \quad dg(x) = Y , \quad dh(x) = Z ,$$

on peut donc écrire

$$d\{f,g\}(x) = [X,Y] + D^2 f(x)\big(\mathrm{ad}^*_Y\, x\big) - D^2 g(x)\big(\mathrm{ad}^*_X\, x\big)\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\big\{\{f,g\},h\big\}(x) = {} & \big\langle x, \big[[X,Y],Z\big]\big\rangle \\ & + \big\langle x, \big[D^2 f(x)(\mathrm{ad}^*_{dg(x)}\, x), dh(x)\big]\big\rangle \\ & - \big\langle x, \big[D^2 g(x)(\mathrm{ad}^*_{df(x)}\, x), dh(x)\big]\big\rangle\,.\end{aligned}$$

En faisant la somme des termes obtenus par permutation circulaire de f, g et h, on obtient

$$\big\{\{f,g\},h\big\}(x) + \big\{\{g,h\},f\big\}(x) + \big\{\{h,f\},g\big\}(x) = 0\,.$$

En effet, la somme des termes faisant intervenir $\big[[X,Y],Z\big]$ et les termes qui s'en déduisent par permutation circulaire de X, Y et Z est nulle, car le crochet dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ vérifie l'identité de Jacobi. Quant aux termes faisant intervenir $D^2 f(x)$, ils s'écrivent

$$\begin{aligned}&\big\langle x, \big[D^2 f(x)(\mathrm{ad}^*_Y\, x), Z\big]\big\rangle - \big\langle x, \big[D^2 f(x)(\mathrm{ad}^*_Z\, x), Y\big]\big\rangle \\ &\quad = \big\langle \mathrm{ad}^*_Z\, x, D^2 f(x)(\mathrm{ad}^*_Y\, x)\big\rangle - \big\langle \mathrm{ad}^*_Y\, x, D^2 f(x)(\mathrm{ad}^*_Z\, x)\big\rangle \\ &\quad = D^2 f(x)\big(\mathrm{ad}^*_Y\, x, \mathrm{ad}^*_Z\, x\big) - D^2 f(x)\big(\mathrm{ad}^*_Z\, x, \mathrm{ad}^*_Y\, x\big) \\ &\quad = 0\,,\end{aligned}$$

en raison de la symétrie de $D^2 f(x)$. De même, la somme des termes faisant intervenir $D^2 g(x)$, et celle des termes faisant intervenir $D^2 h(x)$, sont nulles. La loi de composition qu'on a définie sur $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ vérifie donc bien l'identité de Jacobi.

L'espace vectoriel $\mathcal{G}^*$, dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, possède donc une structure de Poisson naturelle, appelée *structure de Lie-Poisson*.

3. Comme ci-dessus, soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, et $\mathcal{G}^*$ l'espace dual. Soit $\Theta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$, vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) Θ est antisymétrique,

$$\Theta(X,Y) + \Theta(Y,X) = 0\,, \quad X \text{ et } Y \in \mathcal{G}\,.$$

(ii) Pour tous X, Y et $Z \in \mathcal{G}$,

$$\Theta\big([X,Y],Z\big) + \Theta\big([Y,Z],X\big) + \Theta\big([Z,X],Y\big) = 0\,.$$

Une forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$ vérifiant ces deux propriétés est appelée un 2-*cocycle symplectique* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Pour tout couple (f,g) d'éléments de $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ et tout point $x \in \mathcal{G}^*$, posons

$$\{f,g\}_\Theta(x) = \big\langle x, [df(x), dg(x)]\big\rangle - \Theta\big(df(x), dg(x)\big)\,.$$

On vérifie, comme ci-dessus, que la loi de composition ainsi définie sur $C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbf{R})$ définit sur $\mathcal{G}^*$ une structure de Poisson, appelée *structure de Lie-Poisson modifiée* associée au cocycle Θ.

1.3. Propriétés élémentaires.

1. Soit M une variété de Poisson. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, l'application de $C^\infty(M, \mathbf{R})$ dans lui-même

$$g \mapsto \{f, g\}$$

est une dérivation, puisque

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\} .$$

Il existe donc un champ de vecteurs C^∞ unique X_f tel que, pour toute fonction $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\{f, g\} = X_f . g = i(X_f) dg .$$

Le champ de vecteurs X_f est appelé *champ hamiltonien*, et on dit que la fonction f est le *hamiltonien* auquel ce champ est associé. Dans le cas où M est une variété symplectique, la notion de champ hamiltonien définie ici coïncide avec celle précédemment définie.

L'identité de Jacobi peut s'écrire

$$\big\{\{f, g\}, h\big\} = \big\{f, \{g, h\}\big\} - \big\{g, \{f, h\}\big\} .$$

Ceci étant vrai pour tout $h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, on en déduit, en notant X_f, X_g et $X_{\{f,g\}}$ les champs de vecteurs hamiltoniens ayant respectivement pour hamiltonien f, g et $\{f, g\}$:

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g] .$$

2. La formule

$$\{f, g\} = i(X_f) dg = -i(X_g) df$$

montre que la valeur en un point $x \in M$ du crochet de Poisson de deux fonctions f et g ne dépend que des valeurs en ce point, $df(x)$ et $dg(x)$, des différentielles de ces deux fonctions. De plus, cette dépendance est bilinéaire et antisymétrique. Pour tout point x de M, il existe donc une forme bilinéaire antisymétrique $\Lambda(x)$ sur l'espace cotangent $T_x^* M$ telle que, pour tous f et $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\{f, g\}(x) = \Lambda(x)\big(df(x), dg(x)\big) .$$

De plus, l'application $x \mapsto \Lambda(x)$ est différentiable C^∞, car dans une carte où les coordonnées locales sont notées $x^1, \ldots, x^n$, les composantes de $\Lambda(x)$ sont

$$\Lambda^{i\,j}(x) = \{x^i, x^j\}(x) .$$

Ce sont donc des fonctions de classe C^∞. On dit que Λ est un *champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques* sur la variété M. On dit aussi, par abus de langage, que Λ est un *tenseur*, que l'on appelle *tenseur de Poisson* de la variété de Poisson M. On notera celle-ci désormais (M, Λ), car la donnée de Λ détermine la structure de Poisson de M, au même titre que la donnée de la structure d'algèbre de Lie de $C^\infty(M, \mathbf{R})$.

On notera $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ le morphisme de fibrés vectoriels ainsi défini: pour tout $x \in M$ et $\alpha \in T_x^*M$, $\Lambda^\sharp(x)(\alpha)$ est l'unique vecteur élément de T_xM tel que, pour tout $\beta \in T_x^*M$,

$$\big\langle \beta, \Lambda^\sharp(x)(\alpha) \big\rangle = \Lambda(x)(\alpha, \beta)\,.$$

Avec cette notation, le champ de vecteurs hamiltonien ayant pour hamiltonien une fonction f peut être noté

$$X_f = \Lambda^\sharp(df)\,.$$

1.4. Remarque. La donnée d'un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques Λ, de classe C^∞, sur une variété M, permet de définir une loi de composition bilinéaire antisymétrique sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$, en posant:

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg)\,.$$

Cette loi de composition vérifie la formule de Leibniz

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}\,,$$

mais, en général, ne vérifie pas l'identité de Jacobi. Lichnerowicz a montré que cette loi de composition vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si le champ de tenseurs Λ vérifie

$$[\Lambda, \Lambda] = 0\,,$$

le crochet figurant au membre de droite de l'égalité ci-dessus étant le *crochet de Schouten*.

1.5. Définition. Soit (M, Λ) une variété de Poisson. On appelle *champ caractéristique* de cette variété l'image $C = \Lambda^\sharp(T^*M)$ du morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp$. Pour tout point $x \in M$, on appelle *espace caractéristique* en x la fibre $C_x = \Lambda^\sharp(T_x^*M)$ du champ caractéristique au point x.

1.6. Quelques propriétés du champ caractéristique.

1. Pour tout point $x \in M$, l'espace caractéristique C_x est un sous-espace vectoriel de dimension paire de l'espace tangent T_xM. Ce résultat n'est autre, en effet, que celui, établi au chapitre I, selon lequel le rang d'une forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel de dimension finie est toujours pair.

2. Le champ caractéristique C d'une variété de Poisson n'est en général pas un sous-fibré vectoriel du fibré tangent, car la dimension de chaque fibre C_x peut dépendre du point x. Cependant, le champ caractéristique est différentiable, dans le sens suivant: tout point possède un voisinage U sur lequel existe une famille finie de champs de vecteurs de classe C^∞, $(X_1, \ldots, X_k)$, telle que, pour tout $y \in U$, C_y soit le sous-espace vectoriel de T_yM engendré par les vecteurs $X_1(y), \ldots, X_k(y)$. Il suffit en effet de remarquer que dans le domaine d'une carte dont les coordonnées locales sont notées $x^1, \ldots, x^n$, les champs de vecteurs $X_i = \Lambda^\sharp(dx^i)$ ont précisément cette propriété.

3. Pour tout point $x \in M$, on peut définir sur l'espace caractéristique C_x une forme bilinéaire antisymétrique $\Omega_C(x)$ de la manière suivante. Soient u et v deux éléments de C_x. Par définition de C_x, il existe α et $\beta \in T_x^*M$ tels que

$$\Lambda^\sharp(\alpha) = u\,, \quad \Lambda^\sharp(\beta) = v\,.$$

On pose alors, pour définir $\Omega_C(x)$,

$$\Omega_C(x)(u,v) = \Lambda(\alpha,\beta) = \langle \beta, u\rangle = -\langle \alpha, v\rangle\,.$$

On vérifie aisément que $\Omega_C(u,v)$ ne dépend pas des choix de α dans $(\Lambda^\sharp)^{-1}(u)$ et de β dans $(\Lambda^\sharp)^{-1}(v)$. On vérifie aussi que $\Omega_C(x)$ est une forme symplectique sur l'espace vectoriel C_x.

1.7. Variétés de Poisson transitives. Une variété de Poisson (M,Λ) est dite *transitive* si son champ caractéristique C est égal au fibré tangent entier TM. Dans ce cas, pour tout $x \in M$, la 2-forme $\Omega_C(x)$ définie en 1.6.3, qu'on notera $\Omega(x)$, est une forme symplectique sur l'espace tangent T_xM. On vérifie aisément qu'elle dépend différentiablement, de manière C^∞, du point x. On a donc sur M une 2-forme différentielle Ω, partout non dégénérée. Montrons qu'elle est fermée. Pour tout point $x \in M$ et tout triplet (u,v,w) de vecteurs tangents en x à M, il existe trois fonctions différentiables f, g, h, définies sur un voisinage de x, telles que

$$u = \Lambda^\sharp\big(df(x)\big)\,, \quad v = \Lambda^\sharp\big(dg(x)\big)\,, \quad w = \Lambda^\sharp\big(dh(x)\big)\,.$$

Posons pour alléger

$$X = \Lambda^\sharp(df)\,, \quad Y = \Lambda^\sharp(dg)\,, \quad Z = \Lambda^\sharp(dh)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} d\Omega(X,Y,Z) = {} & X.\big(\Omega(Y,Z)\big) + Y.\big(\Omega(Z,X)\big) + Z.\big(\Omega(X,Y)\big) \\ & - \Omega\big([X,Y],Z\big) - \Omega\big([Y,Z],X\big) - \Omega\big([Z,X],Y\big)\,. \end{aligned}$$

Mais

$$\Omega(Y,Z) = \Lambda(dg,dh) = \{g,h\}\,, \quad X.\big(\Omega(Y,Z)\big) = \big\{f,\{g,h\}\big\}\,,$$

et de même

$$[X,Y] = \big[\Lambda^\sharp(df), \Lambda^\sharp(dg)\big] = \Lambda^\sharp\big(d\{f,g\}\big)\,,$$

donc

$$\Omega\big([X,Y],Z\big) = \big\{\{f,g\},h\big\}\,.$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions, ainsi que ceux qui s'en déduisent par permutation circulaire, et en utilisant l'identité de Jacobi, on trouve

$$d\Omega(X,Y,Z) = 0\,,$$

donc en particulier

$$d\Omega(x)(u,v,w) = 0\,.$$

On voit donc que (M, Ω) est une variété symplectique, et que le crochet de Poisson de deux fonctions associé à la structure symplectique définie par Ω coïncide avec le crochet de Poisson défini au moyen du tenseur de Poisson Λ. Les variétés de Poisson transitives sont donc tout simplement des variétés symplectiques.

On montrera plus loin que le champ caractéristique d'une variété de Poisson générale (M, Λ) est complètement intégrable et définit un feuilletage (en un sens généralisé, car les feuilles ne sont pas toutes de même dimension) dont les feuilles sont des variétés symplectiques.

2. Applications de Poisson

2.1. Définition. Soient (M_1, Λ_1) et (M_2, Λ_2) deux variétés de Poisson. Une application différentiable $\varphi : M_1 \to M_2$ est dite *application de Poisson* ou *morphisme de Poisson* si, pour tout couple de fonctions f et $g \in C^\infty(M_2, \mathbf{R})$,

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} = \varphi^* \{f, g\}_{M_2} .$$

On a noté $\varphi^* f = f \circ \varphi$, $\varphi^* g = g \circ \varphi$, $\varphi^* \{f, g\}_{M_2} = \{f, g\}_{M_2} \circ \varphi$.

2.2. Proposition. *Soient (M_1, Λ_1) et (M_2, Λ_2) deux variétés de Poisson et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application différentiable. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application φ est de Poisson.*

2. *Pour toute fonction $f \in C^\infty(M_2, \mathbf{R})$, les champs de vecteurs hamiltoniens $\Lambda_2^\sharp(df)$ sur M_2 et $\Lambda_1^\sharp\big(d(f \circ \varphi)\big)$ sur M_1 sont compatibles par φ, ce qui signifie que, pour tout $x \in M_1$,*

$$T_x\varphi\Big(\Lambda_1^\sharp\big(d(f \circ \varphi)(x)\big)\Big) = \Lambda_2^\sharp\Big(df\big(\varphi(x)\big)\Big) .$$

3. *Les champs de tenseurs Λ_1 sur M_1 et Λ_2 sur M_2 sont compatibles par φ, ce qui signifie que, pour tout $x \in M_1$,*

$$T_x\varphi\big(\Lambda_1(x)\big) = \Lambda_2\big(\varphi(x)\big) .$$

4. *On a, pour tout $x \in M_1$,*

$$T_x\varphi \circ \Lambda_1^\sharp(x) \circ {}^t(T_x\varphi) = \Lambda_2^\sharp\big(\varphi(x)\big) ,$$

où on a noté ${}^t\big(T_x\varphi\big)$ l'application transposée de $T_x\varphi$.

La démonstration de cette proposition est un simple exercice d'algèbre linéaire.

2.3. Proposition. *Soient (M_1, Λ_1), (M_2, Λ_2) et (M_3, Λ_3) trois variétés de Poisson, $\varphi : M_1 \to M_2$ et $\psi : M_2 \to M_3$ des applications différentiables.*

1. *Si φ et ψ sont de Poisson, l'application composée $\psi \circ \varphi$ est de Poisson.*

2. *Si φ et $\psi \circ \varphi$ sont de Poisson et si de plus φ est surjective, alors ψ est de Poisson. En particulier, si $\varphi : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme et une application de Poisson, $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ est de Poisson; on dit alors que φ est un difféomorphisme de Poisson.*

La démonstration de cette proposition ne présente pas de difficulté.

3. Quotient d'une variété symplectique ou de Poisson

On va étudier dans ce paragraphe certains feuilletages d'une variété de Poisson, tels que l'ensemble des feuilles possède un structure de Poisson, la projection canonique étant une application de Poisson. On s'intéressera particulièrement au cas où la variété de Poisson de départ est en fait une variété symplectique. Mais établissons d'abord quelques résultats préliminaires d'algèbre linéaire.

3.1. Proposition. *Soit (C, Ω) un espace vectoriel symplectique. On note $\Omega^\sharp : C^* \to C$ l'isomorphisme inverse de $\Omega^\flat : C \to C^*$, lui-même défini par $\Omega^\flat(v) = -i(v)\Omega$. Pour tout sous-espace vectoriel W de C, la restriction de $\Omega^\sharp$ à l'annulateur W^0 de W (sous-espace vectoriel du dual C^* de C constitué par les formes linéaires sur C dont la restriction à W est nulle) est un isomorphisme de W^0 sur l'orthogonal symplectique* $\operatorname{orth} W$ *de W.*

Cette propriété a été établie au chapitre I.

3.2. Proposition. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, V^* son dual, et Λ une forme bilinéaire antisymétrique sur V^*. On note $\Lambda^\sharp : V^* \to V$ l'application linéaire définie par*

$$\langle \beta, \Lambda^\sharp(\alpha) \rangle = \Lambda(\alpha, \beta)\,, \quad \alpha \text{ et } \beta \in V^*\,.$$

Soit $C = \Lambda^\sharp(V^*)$ l'image de $\Lambda^\sharp$, et Ω_C la forme bilinéaire antisymétrique définie sur C par

$$\Omega_C(u, v) = \Lambda(\alpha, \beta)$$

où u et v sont deux éléments de C, α et β deux éléments de V^* tels que $\Lambda^\sharp(\alpha) = u$, $\Lambda^\sharp(\beta) = v$. Alors (C, Ω_C) est un espace vectoriel symplectique. De plus, pour tout sous-espace vectoriel W de V, d'annulateur W^0, on a

$$\Lambda^\sharp(W^0) = \operatorname{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\,.$$

Démonstration. Le fait que (C, Ω_C) est un espace vectoriel symplectique, déjà annoncé en 1.6.3, résulte de l'antisymétrie de Λ: en effet, l'annulateur de l'image C de $\Lambda^\sharp$ est le noyau de l'application transposée de $\Lambda^\sharp$, qui n'est autre que $-\Lambda^\sharp$; cet annulateur est donc $\ker \Lambda^\sharp$. On en déduit aisément que la définition de $\Omega_C(u, v)$ ne dépend pas des choix de α et β, et que Ω_C est non dégénérée.

Soient α et $\beta \in V^*$. On a

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Omega_C(\Lambda^\sharp\alpha, \Lambda^\sharp\beta) = \langle \beta, \Lambda^\sharp\alpha \rangle = -\langle \alpha, \Lambda^\sharp\beta \rangle\,.$$

Donc pour tout $\alpha \in V^*$ et tout $v \in C$, on a

$$\Omega_C(\Lambda^\sharp\alpha, v) = -\langle \alpha, v \rangle\,.$$

Si $\alpha \in W^0$, et $v \in W \cap C$, on a donc $\Omega_C(\Lambda^\sharp\alpha, v) = 0$, ce qui prouve que $\Lambda^\sharp(W^0) \subset \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$. Réciproquement, si $\Omega_C(\Lambda^\sharp\alpha, v) = 0$ pour tout $v \in W \cap C$, $\langle \alpha, v\rangle = 0$ pour tout $v \in W \cap C$, donc $\alpha \in (W \cap C)^0 = W^0 + C^0 = W^0 + \ker \Lambda^\sharp$. On a donc $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, avec $\alpha_1 \in W^0$ et $\alpha_2 \in \ker \Lambda^\sharp$. Par suite, $\Lambda^\sharp\alpha = \Lambda^\sharp\alpha_1$ donc $\Lambda^\sharp(W^0) \supset \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$. □

3.3. Proposition. *Les hypothèses et notations étant les mêmes que dans la proposition 3.2, soit $\dot V = V/W$ l'espace vectoriel quotient de V par le sous-espace W. On note $\pi : V \to \dot V$ la projection canonique, et ${}^t\pi : \dot V^* \to V^*$ sa transposée. L'application ${}^t\pi$ est injective et a pour image l'annulateur W^0 de W. On définit une forme bilinéaire antisymétrique $\dot\Lambda$ sur $\dot V^*$ en posant*

$$\dot\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda({}^t\pi\alpha, {}^t\pi\beta)\,, \quad \alpha \text{ et } \beta \in \dot V\,.$$

Alors le noyau de $\dot\Lambda^\sharp$ est

$$\ker \dot\Lambda^\sharp = \big(\Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\big)^{-1}\Big(W \cap C \cap \big(\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\big)\Big)\,.$$

Démonstration. Puisque π est surjective et a pour noyau W, sa transposée ${}^t\pi$ est injective et a pour image l'annulateur W^0 de W: ce sont des résultats bien connus d'algèbre linéaire. On a pour tous α et $\beta \in \dot V^*$:

$$\begin{aligned}\dot\Lambda(\alpha, \beta) &= \langle \beta, \dot\Lambda^\sharp\alpha\rangle \\ &= \langle {}^t\pi\beta, \Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\alpha\rangle \\ &= \langle \beta, \pi \circ \Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\alpha\rangle\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\dot\Lambda^\sharp = \pi \circ \Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\,,$$

ce qui montre que $\alpha \in \ker \dot\Lambda^\sharp$ si et seulement si $\pi \circ \Lambda^\sharp \circ {}^t\pi(\alpha) = 0$; c'est-à-dire, comme le noyau de π est W, si et seulement si $\Lambda^\sharp \circ {}^t\pi(\alpha)$ est élément de W. Mais ${}^t\pi(\alpha)$ est élément de W^0, donc $\Lambda^\sharp \circ {}^t\pi(\alpha)$ est élément de $\Lambda^\sharp(W^0)$, qui d'après la proposition 3.2 n'est autre que $\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$. D'autre part $\Lambda^\sharp \circ {}^t\pi(\alpha)$ est toujours élément de C. On a donc bien

$$\ker \dot\Lambda^\sharp = \big(\Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\big)^{-1}\Big(W \cap C \cap \big(\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\big)\Big)\,. \quad \square$$

3.4. Corollaire. *Dans les hypothèses de la proposition 3.3, la projection π applique $\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$ sur $\dot\Lambda^\sharp(\dot V^*)$, et le rang de $\dot\Lambda$ est*

$$\mathrm{rang}\,\dot\Lambda = \dim C - \dim(W \cap C) - \dim\big(W \cap C \cap \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\big)\,.$$

Démonstration. On a vu lors de la démonstration de 3.3 que

$$\dot\Lambda^\sharp = \pi \circ \Lambda^\sharp \circ {}^t\pi\,.$$

Comme l'image de ${}^t\pi$ est W^0 et que $\Lambda^\sharp(W^0) = \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$, π applique bien $\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$ sur l'image de $\dot{\Lambda}^\sharp$. Le noyau de la restriction de π à $\mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$ est $W \cap \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$, qu'on peut aussi écrire puisque $C \supset \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$, $W \cap C \cap \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)$. Le rang de $\dot{\Lambda}$, c'est-à-dire la dimension de l'image de $\dot{\Lambda}^\sharp$, est donc

$$\dim \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C) - \dim\bigl(W \cap C \cap \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\bigr)\,,$$

ou encore

$$\dim C - \dim(W \cap C) - \dim\bigl(W \cap C \cap \mathrm{orth}_{\Omega_C}(W \cap C)\bigr)\,. \quad \square$$

3.5. Remarque. Dans le cas particulier où (V, Ω) est un espace vectoriel symplectique, on a $C = V$, $\Omega_C = \Omega$. Le rang de $\dot{\Lambda}$ est

$$\dim V - \dim W - \dim(W \cap \mathrm{orth}\, W)\,.$$

3.6. Proposition. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson et $\Phi : M \to N$ une submersion surjective de M sur une autre variété N. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur N, et tout point $x \in N$, la restriction à $\Phi^{-1}(x)$ de $\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}$ est constante.*

2. *Il existe sur N une structure de Poisson pour laquelle Φ est une application de Poisson.*

Lorsque ces deux propriétés équivalentes sont vérifiées, la structure de Poisson sur N pour laquelle Φ est une application de Poisson est unique.

D'autre part, ces deux propriétés sont notamment vérifiées lorsque pour tout $x \in N$, $\Phi^{-1}(x)$ est connexe et que $\ker(T\Phi)$ est localement engendré, au voisinage de chaque point de M, par des champs de vecteurs hamiltoniens.

Démonstration. Puisque Φ est une submersion surjective, l'application $f \mapsto f \circ \Phi$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions différentiables sur N sur l'espace des fonctions différentiables sur M dont la restriction à chaque fibre $\Phi^{-1}(x)$ est constante. La propriété 2 implique donc la propriété 1. Réciproquement, si la propriété 1 est satisfaite, la structure de Poisson sur N pour laquelle Φ est une application de Poisson, si elle existe, est nécessairement obtenue en définissant, pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur N, le crochet $\{f, g\}$ comme étant l'unique fonction différentiable sur N qui vérifie

$$\{f, g\} \circ \Phi = \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}\,.$$

On peut donc déjà affirmer l'unicité de cette structure de Poisson sur N. Quant à l'existence, on vérifie aisément que le crochet ainsi défini a bien toutes les propriétés de la loi de composition sur une variété de Poisson.

Supposons les fibres $\Phi^{-1}(x)$ $(x \in N)$ toutes connexes, et $\ker(T\Phi)$ localement engendré par des champs de vecteurs hamiltoniens. Cela signifie que tout point de M possède un voisinage U sur lequel on a des fonctions différentiables f_i, $i \in I$, ensemble d'indices pas nécessairement fini, tel que pour tout $x \in U$, $\ker(T_x\Phi)$ soit l'espace vectoriel engendré par

les vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)(x)$. Soient g et h deux fonctions différentiables sur N. On a, pour tout $i \in I$,

$$\begin{aligned} i\big(\Lambda^\sharp(df_i)\big)d\big(\{g\circ\Phi, h\circ\Phi\}\big) &= \big\{f_i, \{g\circ\Phi, h\circ\Phi\}\big\} \\ &= \big\{\{f_i, g\circ\Phi\}, h\circ\Phi\big\} + \big\{g\circ\Phi, \{f_i, h\circ\Phi\}\big\} \\ &= \big\{i\big(\Lambda^\sharp(df_i)\big)d(g\circ\Phi), h\circ\Phi\big\} + \big\{g\circ\Phi, i\big(\Lambda^\sharp(df_i)\big)d(h\circ\Phi)\big\} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

car $g\circ\Phi$ et $h\circ\Phi$ étant constantes sur chaque fibre $\Phi^{-1}(x)$, on a

$$i\big(\Lambda^\sharp(df_i)\big)d(g\circ\Phi) = 0\,, \quad i\big(\Lambda^\sharp(df_i)\big)d(h\circ\Phi) = 0\,.$$

Ceci prouve que $\{g\circ\Phi, h\circ\Phi\}$ est localement constante sur chaque fibre $\Phi^{-1}(x)$. Mais ces fibres étant connexes, $\{g\circ\Phi, h\circ\Phi\}$ est constante sur chaque fibre. La propriété 1 est donc vérifiée. ∎

3.7. Remarque. Dans les hypothèses de la proposition 3.6, le rang de la structure de Poisson de M en un point x et celui de la structure de Poisson de N au point $\Phi(x)$ sont liés par la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\dot\Lambda\big(\Phi(x)\big) = \operatorname{rang}\Lambda(x) &- \dim\big(C(x)\cap\ker(T_x\Phi)\big) \\ &- \dim\Big(C(x)\cap\ker(T_x\Phi)\cap\operatorname{orth}_{\Omega_C}\big(C(x)\cap\ker(T_x\Phi)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

La proposition 3.6 prend une forme particulièrement intéressante lorsque la variété M est symplectique. Elle conduit alors au résultat suivant (Voir P. Libermann, Sous-variétés et feuilletages symplectiquement réguliers, dans "Symplectic geometry", A. Crumeyrolle et J. Grifone, ed., 81–106, Pitman, London 1983).

3.8. Proposition (P. Libermann). *Soit (M,Ω) une variété symplectique, et $\mathcal{F}$ un sous-fibré complètement intégrable de TM. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout couple (f,g) d'intégrales premières de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire de fonctions différentiables, définies sur un ouvert de M, dont les différentielles sont nulles sur $\mathcal{F}$, le crochet de Poisson $\{f,g\}$ est une intégrale première de $\mathcal{F}$.*

2. *L'orthogonal symplectique* $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ *de $\mathcal{F}$ est un sous-fibré complètement intégrable de TM.*

Lorsque ces deux propriétés équivalentes sont vérifiées, les sous-fibrés complètement intégrables $\mathcal{F}$ et $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ *de TM sont dits symplectiquement complets.*

Lorsque le feuilletage de M défini par $\mathcal{F}$ est simple, c'est-à-dire lorsque l'ensemble N des feuilles de $\mathcal{F}$ possède une structure de variété différentiable telle que la projection canonique $\Phi : M \to N$ soit une submersion, $\mathcal{F}$ est symplectiquement complet si et seulement s'il existe sur N une structure de Poisson telle que Φ soit une application de Poisson. Lorsque c'est le cas, la structure de Poisson sur N telle que Φ soit une application de Poisson est unique.

Démonstration. On sait que $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ est localement engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens X_f dont les hamiltonients f sont des intégrales premières de $\mathcal{F}$. D'après le théorème de Frobenius, $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ est complètement intégrable si et seulement si, pour tout couple (f,g) d'intégrales premières de $\mathcal{F}$, le crochet $[X_f, X_g]$ des champs de vecteurs hamiltoniens associés X_f et X_g est une section de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$. Mais $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$, champ hamiltonien associé au crochet de Poisson $\{f,g\}$. Celui-ci est une section de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ si et seulement si $\{f,g\}$ est une intégrale première de $\mathcal{F}$.

Supposons le feuilletage engendré par $\mathcal{F}$ simple, soit N la variété des feuilles de ce feuilletage et $\Phi : M \to N$ la projection canonique. Les intégrales premières de $\mathcal{F}$ sont alors les fonctions de la forme $f \circ \Phi$, où f est une fonction différentiable sur N. La dernière assertion de l'énoncé résulte donc immédiatement de la proposition 3.6. $\square$

3.9. Remarque. On se place dans les hypothèses de la proposition 3.8: les sous-fibrés $\mathcal{F}$ et $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ de TM sont supposés tous deux complètement intégrables, donc symplectiquement complets. On suppose de plus que les feuilletages qu'ils définissent sont simples. On note N et P les variétés des feuilles, respectivement de $\mathcal{F}$ et de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$, $\Phi : M \to N$ et $\Psi : M \to P$ les projections canoniques. La proposition 3.8 montre que chacune des variétés N et P possède une structure de Poisson unique telle que Φ et Ψ soient des applications de Poisson. On notera ces structures Λ_N et Λ_P, respectivement. A. Weinstein (dans "The local structure of Poisson manifolds", J. Differential Geometry, 18, 1983, 523–557) a étudié les propriétés du couple de variétés de Poisson (N, Λ_N) et (P, Λ_P), qu'il appelle *paire en dualité*. Il a montré notamment que les structures transverses de ces deux variétés (cette notion étant définie en 4.5.2 ci-après), en deux points $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, images d'un même point x de M, sont opposées l'une de l'autre. On verra un exemple de cette situation lors de l'étude des actions d'un groupe de Lie, à droite et à gauche, sur son fibré cotangent. Les propriétés du couple de variétés de Poisson (N, Λ_N) , (P, Λ_P) avaient été auparavant étudiées par C. Carathéodory (dans "Calculus of variations and partial differential equations of the first order", vol. I and II, Holden Day, San Francisco, 1967, réimpression d'un ouvrage publié originellement en allemand par Teubner, Berlin, 1935), sous le nom de *groupes de fonctions, polaires l'un de l'autre*.

4. Structure locale d'une variété de Poisson

L'étude de la structure locale d'une variété de Poisson repose sur les deux lemmes qui suivent.

4.1. Lemme. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson, et $a \in M$ un point tel que* $\operatorname{rang}\Lambda(a) = 2p > 0$. *Il existe des fonctions différentiables f et g, définies sur un voisinage ouvert U de a, vérifiant*

$$\{f, g\} = 1\,.$$

De plus, si l'on connaît déjà l fonctions différentiables $f_1, \ldots, f_l$, définies sur un voisinage de a, telles que les champs de vecteurs hamiltoniens associés $\Lambda^\sharp(df_i)$ soient linéairement indépendants au point a, et vérifiant

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \quad 1 \le i, j \le l\,,$$

avec $l \leq p$, on peut prendre $f = f_1$ et imposer à g de vérifier

$$\{f_1, g\} = 1\,, \quad \{f_i, g\} = 0 \quad \text{pour} \;\; 2 \leq i \leq l\,.$$

Enfin, les champs de vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)$, $1 \leq i \leq l$, et $\Lambda^\sharp(dg)$, sont linéairement indépendants au point a.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $l = 0$ (aucune fonction n'est donnée d'avance). Puisque $\Lambda(a) \neq 0$, il existe une fonction différentiable f, définie sur un voisinage de a, telle que $\Lambda^\sharp(df)(a) \neq 0$. D'après le théorème bien connu de redressement d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point où il est non nul, il existe une carte de M, dont le domaine contient le point a, et dont les coordonnées locales sont notées $x^1, \ldots, x^n$, telle que, dans le domaine de cette carte,

$$\Lambda^\sharp(df) = \frac{\partial}{\partial x^1}\,.$$

Posons alors

$$g = x^1\,.$$

On a

$$\{f, g\} = \Lambda^\sharp(df).g = \frac{\partial}{\partial x^1}.x^1 = 1\,,$$

ce qui implique que $\Lambda^\sharp(df)$ et $\Lambda^\sharp(dg)$ sont linéairement indépendants au point a.

Supposons maintenant $l = 1$ (une fonction f_1, telle que $\Lambda^\sharp(df_1)(a) \neq 0$, est donnée). Le même raisonnement que ci-dessus s'applique, avec la seule différence qu'au lieu de choisir une fonction f quelconque parmi celles qui sont telles que $\Lambda^\sharp(df)(a) \neq 0$, on prend la fonction f_1 déjà donnée.

Supposons maintenant $l > 1$. Les $l - 1$ champs de vecteurs $X_i = \Lambda^\sharp(df_i)$, $2 \leq i \leq l$, définissent un feuilletage local d'un voisinage du point a, car ils vérifient

$$[X_i, X_j] = \Lambda^\sharp(d\{f_i, f_j\}) = 0\,.$$

En restreignant éventuellement le voisinage V de a considéré, on peut supposer ce feuilletage simple. Soit alors N la variété des feuilles, et $\Phi : V \to N$ la projection canonique. D'après la proposition 3.6, il existe sur N une structure de Poisson unique Λ_N telle que Φ soit une application de Poisson. D'après 3.7, le rang de cette structure de Poisson au point $\Phi(a)$ est $2(p - l + 1) > 0$; en effet, $\Lambda(a)$ est de rang $2p$, $\ker T_a\Phi$ est isotrope, contenu dans $C(a)$ et de dimension $l - 1$, il est donc égal à son intersection avec son orthogonal symplectique. La fonction f_1 étant constante sur chaque feuille de ce feuilletage, est de la forme $f_1 = \widehat{f_1} \circ \Phi$, où $\widehat{f_1}$ est une fonction définie sur N. On a

$$\Lambda_N^\sharp(d\widehat{f_1})\big(\Phi(a)\big) = T_a\Phi\big(\Lambda^\sharp(df_1)(a)\big) \neq 0\,,$$

car les champs de vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)$ étant linéairement indépendants au point a, $\Lambda^\sharp(df_1)(a)$ n'est pas dans le noyau de $T_a\Phi$. On peut alors appliquer à la variété de Poisson N le résultat établi ci-dessus dans le cas $l = 1$: il existe une fonction différentiable $\widehat{g}$, définie sur un voisinage de $\Phi(a)$ dans N, telle que

$$\{\widehat{f_1}, \widehat{g}\} = 1\,.$$

Posons $g = \widehat{g} \circ \Phi$. Puisque Φ est une application de Poisson, on a

$$\{f_1, g\} = 1\,, \quad \{f_i, g\} = 0 \quad \text{pour} \;\; 2 \le i \le n\,.$$

Enfin les vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)(a)$, $1 \le i \le l$, et $\Lambda^\sharp(dg)(a)$ sont linéairement indépendants, car les deux vecteurs $\Lambda^\sharp(df_1)(a)$ et $\Lambda^\sharp(dg)(a)$ sont indépendants et tous deux non contenus dans le noyau de $T_a\Phi$, tandis que les vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)(a)$, $2 \le i \le l$, forment une base de ce noyau. $\square$

4.2. Lemme. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson, et $a \in M$ un point tel que* $\operatorname{rang} \Lambda(a) = 2p > 0$. *Soient $f_1, \dots, f_k$, $g_1, \dots, g_l$ $k+l$ fonctions différentiables, $0 \le l \le k \le p$, définies sur un voisinage de a, telles que les champs de vecteurs hamiltoniens associés $\Lambda^\sharp(df_i)$ et $\Lambda^\sharp(dg_r)$ soient linéairement indépendants au point a, et vérifiant, pour $1 \le i, j \le k$, $1 \le r, s \le l$,*

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \quad \{g_r, g_s\} = 0\,, \quad \{f_i, g_r\} = \delta_{i\,r}\,. \tag{$*$}$$

Alors il existe $2p - k - l$ autres fonctions différentiables $f_{k+1}, \dots, f_p$, $g_{l+1}, \dots, g_p$, définies sur un voisinage de a, telles que les identités $(*)$ ci-dessus soient vérifiées pour tous $1 \le i, j, r, s \le p$. De plus, les champs de vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)$, $\Lambda^\sharp(dg_j)$, $1 \le i, j \le p$, sont linéairement indépendants au point a.

Démonstration. Montrons que si $l < k$, on peut trouver les fonctions $g_{l+1}, \dots, g_k$, et ainsi se ramener au cas où $l = k$. Les champs de vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)$ et $\Lambda^\sharp(dg_j)$, $1 \le i, j \le l$, sont linéairement indépendants en a, donc aussi au voisinage de a, et définissent un feuilletage local d'un voisinage V de ce point, car leurs crochets deux à deux sont nuls. En restreignant si nécessaire V, on peut supposer ce feuilletage simple. Soit $\pi : V \to Q$ la projection canonique. D'après la proposition 3.6, il existe sur Q une structure de Poisson Λ_Q unique telle que π soit une application de Poisson. En utilisant 3.7, on voit que le rang de cette structure au point $\pi(a)$ est $2(p - l)$. De plus, les fonctions f_i, pour $l + 1 \le i \le k$, sont constantes sur chaque feuille de ce feuilletage, donc sont de la forme $\widehat{f_i} \circ \pi$, où les $\widehat{f_i}$ sont des fonctions différentiables définies sur Q. L'indépendance linéaire des champs de vecteurs $\Lambda^\sharp(df_i)$ et $\Lambda^\sharp(dg_r)$ au point a ($1 \le i \le k$, $1 \le r \le l$) implique l'indépendance linéaire des champs de vecteurs $\Lambda^\sharp_N(d\widehat{f_j})$, $l+1 \le j \le k$, au point $\pi(a)$. En appliquant le lemme 4.1 à la variété de Poisson (Q, Λ_Q), on voit qu'il existe une fonction différentiable $\widehat{g}_{l+1}$, définie sur un voisinage de $\pi(a)$ dans Q, telle que

$$\{\widehat{f}_{l+1}, \widehat{g}_{l+1}\} = 1\,, \quad \{\widehat{f}_i, \widehat{g}_{l+1}\} = 0 \quad \text{pour } l + 2 \le i \le k\,.$$

Posons $g_{l+1} = \widehat{g}_{l+1} \circ \pi$. On voit que les identités $(*)$ sont vérifiées pour $1 \le i, j \le k$, $1 \le r, s \le l + 1$. En répétant la même construction $k - l$ fois, on obtient de même les fonctions $g_{l+2}, \dots, g_k$ cherchées.

On peut donc maintenant supposer que $k = l$. Si $k < p$, on construit comme ci-dessus la variété de Poisson (Q, Λ_Q), et on voit que le rang de Λ_Q au point $\pi(a)$ est $2(p - k) > 0$. Le lemme 4.1 montre qu'il existe deux fonctions différentiables $\widehat{f}_{k+1}$ et $\widehat{g}_{k+1}$, définies sur un voisinage de $\pi(a)$ dans Q, vérifiant

$$\{\widehat{f}_{k+1}, \widehat{g}_{k+1}\} = 1\,.$$

Posons $f_{k+1} = \widehat{f}_{k+1} \circ \pi$, $g_{k+1} = \widehat{g}_{k+1} \circ \pi$. On voit que les identités $(*)$ sont vérifiées pour $1 \leq i, j \leq k+1$, $1 \leq r, s \leq k+1$. En répétant la même construction $p-k$ fois, on obtient de même les fonctions cherchées f_i et g_j pour $k+2 \leq i, j \leq p$.

Montrons que les champs de vecteurs $X_i = \Lambda^\sharp(df_i)$, $Y_j = \Lambda^\sharp(dg_j)$, $1 \leq i, j \leq p$, sont linéairement indépendants au point a. Soient λ_i et μ_i, $1 \leq i \leq p$, des scalaires tels que le champ de vecteurs

$$Z = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i X_i + \mu_i Y_i)$$

soit nul au point a. Posons

$$h = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i g_i - \mu_i f_i)\,.$$

On a

$$Z.h = \sum_{i=1}^{p} ({\lambda_i}^2 + {\mu_i}^2)\,.$$

Cette fonction (qui est constante) s'annule au point a (où le champ de vecteurs Z est nul). Elle est donc identiquement nulle, ce qui prouve que les scalaires λ_i et μ_i sont tous nuls, donc que les champs de vecteurs X_i, Y_i, $1 \leq i \leq p$, sont linéairement indépendants au point a (et, de même, en tout point de l'ouvert de M sur lequel ils sont tous définis). □

4.3. Théorème. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson de dimension n, a un point de M, et $2p$ $(p \geq 0)$ le rang de $\Lambda(a)$. Il existe une carte de M, dont le domaine contient a, et dont les coordonnées locales, notées x_i, y_j, z_r, avec $1 \leq i, j \leq p$, $1 \leq r \leq n-2p$, vérifient*

$$\{x_i, x_j\} = 0\,, \quad \{y_i, y_j\} = 0\,, \quad \{x_i, y_j\} = \delta_{i\,j}\,, \quad \{x_i, z_r\} = \{y_i, z_r\} = 0\,. \qquad (*)$$

De plus, les crochets de Poisson $\{z_r, z_s\}$, $1 \leq r, s \leq n-2p$, ne sont fonctions que des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_{n-2p}$, et sont nuls au point a.

Démonstration. D'après le lemme 4.2, il existe $2p$ fonctions différentiables f_i et g_j, $1 \leq i, j \leq p$, définies sur un voisinage de a, vérifiant

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \quad \{g_i, g_j\} = 0\,, \quad \{f_i, g_j\} = \delta_{i\,j}\,.$$

On sait de plus que les champs de vecteurs $X_i = \Lambda^\sharp(df_i)$ et $Y_i = \Lambda^\sharp(dg_i)$ sont linéairement indépendants au point a, donc aussi sur un voisinage de a. Leurs crochets deux à deux étant nuls, ces champs de vecteurs définissent un feuilletage d'un voisinage V de a. En restreignant éventuellement V, on peut supposer ce feuilletage simple. On note Q la variété des feuilles et $\pi : V \to Q$ la projection. La proposition 3.6 montre qu'il existe sur Q une structure de Poisson unique Λ_Q telle que π soit une application de Poisson, et la remarque 3.7 montre que Λ_Q s'annule au point a. Toute fonction sur V de la forme $h = \widehat{h} \circ \pi$, où $\widehat{h}$ est une fonction différentiable sur Q, vérifie

$$\{f_i, h\} = \{g_i, h\} = 0\,, \quad 1 \leq i \leq p\,.$$

Considérons donc une carte de Q dont le domaine contient $\pi(a)$, et dont les coordonnées locales sont notées $\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_{n-2p}$. Posons

$$x_i = f_i\,, \quad y_i = g_i\,, \quad z_r = \widehat{z}_r \circ \pi\,, \quad 1 \le i, j \le p\,, \quad 1 \le r \le n-2p\,.$$

On voit que les crochets de ces fonctions, prises deux à deux, vérifient les identités $(*)$ de l'énoncé. De plus, on a, pour tous r et s, $1 \le r, s \le n-2p$,

$$\{z_r, z_s\} = \{\widehat{z}_r, \widehat{z}_s\} \circ \pi\,,$$

ce qui prouve que $\{z_r, z_s\}$ peut s'exprimer en fonction de $z_1, \ldots, z_{n-2p}$. On voit aussi que les crochets de Poisson $\{z_r, z_s\}$ s'annulent au point a, puisque $\Lambda_Q\big(\pi(a)\big) = 0$. On remarque enfin que les différentielles des fonctions x_i, y_j, z_r, $1 \le i, j \le p$, $1 \le r \le n-2p$, sont linéairement indépendantes au point a. D'après le théorème d'inversion locale, ce sont donc des coordonnées locales associées à une carte de M ayant toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé. $\square$

4.4. Corollaire. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson de dimension n, a un point de M, et $2p$ $(p \ge 0)$ le rang de $\Lambda(a)$. Il existe un voisinage U de a dans M qui s'identifie, par un difféomorphisme de Poisson, au produit $S \times Q$ d'une variété symplectique S de dimension $2p$ et d'une variété de Poisson Q de dimension $n-2p$. La variété symplectique S est munie de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique, et le produit $S \times Q$ est muni de la structure de Poisson produit des structures de Poisson de S et de Q. De plus, dans cette identification, la structure de Poisson de Q est de rang nul au point projection de a.*

Démonstration. Indiquons tout d'abord ce qu'on entend par structure de Poisson produit. Soient (P_1, Λ_1) et (P_2, Λ_2) deux variétés de Poisson. On note $P = P_1 \times P_2$, $\pi_1 : P \to P_1$ et $\pi_2 : P \to P_2$ les deux projections. Il existe sur P une structure de Poisson unique Λ telle que π_1 et π_2 soient des applications de Poisson, et que, pour tout couple de fonctions différentiables $\widetilde{f}_1 : P_1 \to \mathbf{R}$ et $\widetilde{f}_2 : P_2 \to \mathbf{R}$,

$$\{\widetilde{f}_1 \circ \pi_1, \widetilde{f}_2 \circ \pi_2\} = 0\,.$$

Cette structure de Poisson sur P est dite *produit* des structures de Poisson de P_1 et de P_2.

La carte de M obtenue dans le théorème 4.3 nous donne immédiatement la décomposition cherchée: son domaine s'identifie au produit d'un ouvert S de $\mathbf{R}^{2p}$ (coordonnées x^i et y^j, $1 \le i, j \le p$), et de la variété de Poisson (Q, Λ_Q). L'expression des crochets de Poisson des fonctions coordonnées montre que ce produit est muni de la structure de Poisson produit de la structure de Poisson de S associée à la forme symplectique

$$\sum_{i=1}^{p} dy_i \wedge dx_i\,,$$

et de la structure de Poisson de Q. Ainsi qu'on l'a déjà mentionné, celle-ci est de rang nul au point projection de a. $\square$

4.5. Remarques.

1. Le théorème précédent nous montre que le champ caractéristique C de la variété de Poisson (M, Λ) est complètement intégrable. En utilisant l'identification du voisinage U de a avec le produit $S \times Q$, et en notant a_2 la projection de a sur le facteur Q, on voit que l'espace tangent, en chacun de ses points (x_1, a_2) (avec $x_1 \in S$) à la sous-variété $S \times \{a_2\}$, est l'espace caractéristique $C(x_1, a_2)$. Nous reviendrons sur cette propriété lors de l'étude du feuilletage symplectique d'une variété de Poisson.

2. La structure de Poisson de Q au voisinage du point a_2, projection de a, est appelée *structure de Poisson transverse à la feuille symplectique de M qui passe par a.* A. Weinstein a montré (dans "The local structure of Poisson manifolds", déjà cité) que cette structure ne dépend que de la feuille symplectique de M considérée, non du choix du point a dans cette feuille, ni de la manière dont un voisinage de a est décomposé en produit.

5. Structure locale d'une variété symplectique

Le théorème 4.3 et son corollaire 4.4 s'appliquent, en particulier, au cas où la variété de Poisson considérée est en fait une variété symplectique. On obtient ainsi les théorèmes classiques de Darboux, Jacobi-Lie-Carathéodory et Cartan, énoncés ci-dessous.

5.1. Théorème de Darboux. *Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Tout point de M possède un voisinage qui est le domaine d'une carte canonique, c'est-à-dire d'une carte telle que, si l'on note $x^1, \ldots, x^{2n}$ les coordonnées locales associées, la forme symplectique ait pour expression locale*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \,.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.3, tout point de M possède un voisinage qui est le domaine d'une carte telle que les coordonnées locales associées x^i, y^j, $1 \leq i, j \leq n$, vérifient

$$\{x^i, x^j\} = \{y^i, y^j\} = 0\,, \quad \{x^i, y^j\} = \delta_{i\,j}\,.$$

En procédant par identification, on voit que la forme symplectique Ω a pour expression

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i \,.$$

Il suffit donc de poser $x^{n+i} = -y^i$. $\square$

5.2. Théorèmes de Jacobi-Lie-Carathéodory et de Cartan. *Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$.*

1. (Théorème de Jacobi-Lie-Carathéodory). *Soient $f_1, \ldots, f_k$ $(0 \leq k \leq n)$ des fonctions différentiables définies sur un ouvert U de M, dont les différentielles sont partout linéairement indépendantes, deux à deux en involution, c'est-à-dire vérifiant*

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \quad 1 \leq i, j \leq k\,.$$

Tout point de U possède un voisinage sur lequel existent $2n-k$ fonctions différentiables $f_{k+1},\dots,f_n$, $g_1,\dots,g_n$, telles que la forme symplectique Ω ait pour expression

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dg_i \,.$$

2. (Théorème de Cartan). *Soient $f_1,\dots,f_k$, $g_1,\dots,g_l$ $(0 \le l \le k \le n)$ des fonctions différentiables définies sur un ouvert U de M, dont les différentielles sont partout linéairement indépendantes, qui vérifient, pour tous i, j, r, s, $(1 \le i,j \le k,\ 1 \le r,s \le l)$*

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \quad \{g_r, g_s\} = 0\,, \quad \{f_i, g_r\} = \delta_{i\,r}\,.$$

Tout point de U possède un voisinage sur lequel existent $2n-k-l$ fonctions différentiables $f_{k+1},\dots,f_n$, $g_{l+1},\dots,g_n$, telles que la forme symplectique Ω ait pour expression

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dg_i \,.$$

Démonstration. On voit que le théorème de Jacobi-Lie-Carathéodory est un cas particulier du théorème de Cartan. Celui-ci est une conséquence immédiate du lemme 4.2. □

6. Feuilletage symplectique d'une variété de Poisson

6.1. Notions sur les feuilletages de Stefan. Soit M une variété différentiable. Un *champ de directions* sur M est une partie $\mathcal{F}$ de TM telle que, pour tout $x \in M$, $\mathcal{F}_x = \mathcal{F} \cap T_xM$ soit un sous-espace vectoriel de T_xM. Un champ de directions $\mathcal{F}$ est dit *différentiable* si tout point de M possède un voisinage U sur lequel existent des champs de vecteurs différentiables X_i, $1 \le i \le k$, tels que pour tout $x \in U$, $\mathcal{F}_x$ soit le sous-espace vectoriel de T_xM engendré par les vecteurs $X_i(x)$, $1 \le i \le k$.

Soit $\mathcal{F}$ un champ de directions différentiable sur la variété M. Une *variété intégrale* de $\mathcal{F}$ est une sous-variété (en général immergée, pas nécessairement plongée) connexe S de M telle que, pour tout $x \in S$, $T_xS \subset \mathcal{F}_x$. Cette variété intégrale est dite *de dimension maximale* si pour tout $x \in S$, on a $T_xS = \mathcal{F}_x$. Une variété intégrale de $\mathcal{F}$ est dite *maximale* si toute variété intégrale qui la contient lui est égale.

Un champ de directions différentiable $\mathcal{F}$ est dit *complètement intégrable* si, pour tout point $a \in M$, il existe une sous-variété S de M qui contient a et qui est une variété intégrale de $\mathcal{F}$ de dimension maximale.

Lorsque le champ de directions $\mathcal{F}$ considéré est différentiable et de rang constant, c'est-à-dire lorsque toutes les fibres $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ sont de même dimension, le théorème de Frobenius bien connu donne une condition nécessaire et suffisante de complète intégrabilité: $\mathcal{F}$ est complètement intégrable si et seulement si le crochet de deux sections différentiables locales de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire de deux champs de vecteurs différentiables, définis sur un ouvert de M et

à valeurs dans $\mathcal{F}$) est une section de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire prend ses valeurs dans $\mathcal{F}$). H. Sussmann (dans "Orbits of families of vector fields and integrability of distributions", Trans. Amer. Math. Soc., 180, 1973, 171–188) et P. Stefan (dans "Accessible sets, orbits and foliations with singularities", Proc. London Math. Soc., 29, 1974, 699–713) ont, indépendamment, établi une généralisation de ce théorème applicable lorsque $\mathcal{F}$ est différentiable, mais pas nécessairement de rang constant: $\mathcal{F}$ est complètement intégrable si et seulement si, pour tout couple (X, Y) de sections différentiables locales de $\mathcal{F}$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(\Phi_t)_* Y$ est une section de $\mathcal{F}$ (on a noté Φ le flot de X). Le lecteur trouvera la démonstration de ce résultat dans les publications de Sussmann et Stefan citées ci-dessus.

Lorsqu'un champ de directions différentiable $\mathcal{F}$ sur une variété M est complètement intégrable, on montre que M est réunion disjointe de variétés intégrales de $\mathcal{F}$, toutes maximales et de dimension maximale. Cette partition de M en variétés intégrales maximales et de dimension maximale est appelée *feuilletage de Stefan* de la variété M, et les variétés intégrales maximales et de dimension maximale sont appelées *feuilles* de ce feuiletage. On montre aussi que toute variété intégrale de $\mathcal{F}$, pas nécessairement maximale ni de dimension maximale, est contenue dans une feuille du feuilletage de Stefan défini par $\mathcal{F}$; si elle est de dimension maximale, c'est un ouvert de cette feuille. La démonstration de ces propriétés dans le cas général où $\mathcal{F}$ n'est pas de rang constant est la même que celle, classique, valable dans le cas où $\mathcal{F}$ est de rang constant (dans ce cas toutes les feuilles sont de même dimension, et le feuilletage de Stefan est un feuilletage au sens usuel). Le lecteur pourra l'étudier par exemple dans le livre de C. Chevalley, "Theory of Lie groups", Princeton University Press, Princeton, 1946. Elle consiste à définir une relation sur M, deux points étant dits liés par cette relation s'il existe une variété intégrale de dimension maximale de $\mathcal{F}$ qui les contient tous les deux. On montre alors que cette relation est une relation d'équivalence, et que les classes d'équivalence sont des variétés intégrales de $\mathcal{F}$, maximales et de dimension maximale.

6.2. Théorème. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson. Son champ caractéristique C est complètement intégrable, et définit un feuilletage de Stefan de M (les feuilles n'étant pas nécessairement toutes de même dimension). Chaque feuille de ce feuilletage possède une structure symplectique unique telle que son immersion canonique dans M soit une application de Poisson.*

Démonstration. On pourrait prouver la complète intégrabilité de C en appliquant le théorème de Sussmann et Stefan mentionné dans le paragraphe précédent. Mais ce n'est pas indispensable, car ainsi qu'on l'a remarqué en 4.5, le théorème de structure locale 4.3 prouve la complète intégrabilité de C. Ce théorème prouve aussi que sur chaque variété intégrale de dimension maximale S de C il existe, au voisinage de chaque point, une forme symplectique telle que l'injection canonique de ce voisinage dans M soit une application de Poisson. On obtient donc un recouvrement ouvert (U_i), $i \in I$, de S, et sur chaque U_i, une forme symplectique Ω_i telle que l'injection de U_i dans M soit une application de Poisson. On voit alors que cette propriété implique l'unicité: les formes symplectiques Ω_i et Ω_j sont égales sur $U_i \cap U_j$, ce qui prouve l'existence globale, sur S, d'une forme symplectique unique telle que l'injection de S dans M soit une application de Poisson. Ce résultat s'applique en particulier aux feuilles du feuilletage de Stefan défini par C, c'est-à-dire aux variétés intégrales maximales et de dimension maximale de C. $\square$

6.3. Remarque. Le théorème qui précède est dû à A. Kirillov (voir "Local Lie algebras",

Russian Math. Surveys 31, 1976, 55–75), qui a établi aussi un résultat analogue applicable aux variétés de Jacobi (qui généralisent les variétés de Poisson). Certains résultats relatifs aux feuilletages généralisés et à leur utilisation en géométrie symplectique avaient été antérieurement obtenus par R. Hermann (notamment "On the accessibility problem in control theory", International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, 1961, J. P. LaSalle and S. Lefschetz, eds, 325–332, Academic Press, New York, 1963).

Chapitre IV

Les théorèmes de Darboux-Weinstein

1. Le lemme d'homotopie

1.1. Lemme d'homotopie. *Soient M et N deux variétés différentiables, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times M$ contenant $[0,1] \times M$ et $\psi : \Omega \to N$ une application différentiable. Pour tout $t \in [0,1]$, on note $\psi_t : M \to N$ l'application définie par $\psi_t(x) = \psi(t,x)$. Pour toute forme différentielle η de degré k sur N, on définit une forme différentielle $H\eta$ de degré $k-1$ sur M en posant, x étant un point de M, $v_1, \ldots, v_{k-1}$ des vecteurs tangents en x à M,*

$$H\eta(x)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta\big(\psi_t(x)\big) \left(\frac{d}{d\theta}\psi(\theta,x)\big|_{\theta=t}, T\psi_t(v_1), \ldots, T\psi_t(v_{k-1}) \right) dt\,.$$

L'opérateur H, appelé opérateur d'homotopie, applique l'algèbre $A(N)$ des formes différentielles sur N dans l'algèbre $A(M)$ des formes différentielles sur M, et vérifie

$$\psi_1^* - \psi_0^* = H \circ d + d \circ H\,.$$

Démonstration. On définit une application

$$\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R} \times M$$

en posant

$$\Phi(t,s,x) = \Phi_t(s,x) = (t+s,x)\,.$$

L'application Φ est le flot du champ de vecteurs complet X sur $\mathbf{R} \times M$ dont la projection sur le premier facteur est le champ constant $\dfrac{\partial}{\partial s}$ et dont la projection sur le second facteur est nulle. Soit $j : M \to \mathbf{R} \times M$ l'application

$$j(x) = (0,x)\,.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\psi_t = \psi \circ \Phi_t \circ j\,.$$

Si η est une k-forme différentielle sur N, on peut donc écrire

$$\psi_t^*\eta = j^*\big(\Phi_t^*(\psi^*\eta)\big)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\psi_1^*\eta - \psi_0^*\eta &= \int_0^1 \left(\frac{d}{d\theta}(\psi_\theta^*\eta)\big|_{\theta=t} \right) dt \\ &= \int_0^1 j^* \left(\frac{d}{d\theta}\big(\Phi_\theta^*(\psi^*\eta)\big)\big|_{\theta=t} \right) dt\,.\end{aligned}$$

Mais puisque Φ est le flot du champ de vecteurs X:

$$\frac{d}{d\theta}\big(\Phi_\theta^*(\psi^*\eta)\big)\big|_{\theta=t} = \Phi_t^*\mathcal{L}(X)(\psi^*\eta)\,.$$

Mais la dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)$ vérifie

$$\mathcal{L}(X) = i(X)d + di(X)\,.$$

En utilisant le fait que la différentielle extérieure d commute avec les images réciproques, et en posant

$$H\eta = \int_0^1 j^*\Big(\Phi_t^*\big(i(X)(\psi^*\eta)\big)\Big)\,dt\,, \qquad (*)$$

on obtient

$$\psi_1^*\eta - \psi_0^*\eta = H \circ d\eta + d \circ H\eta\,.$$

On vérifie enfin que l'expression $(*)$ de H donnée ci-dessus est bien équivalente à celle de l'énoncé. □

Le lemme d'homotopie va nous permettre d'établir une généralisation du lemme de Poincaré, qui sera utile pour la suite.

1.2. Proposition (Généralisation du lemme de Poincaré**).** *Soit (E, π, B) un fibré vectoriel. On note $s_0 : B \to E$ la section nulle, et $B_0 = s_0(B)$ son image. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on note $\lambda_t : E \to E$ la multiplication par t dans chaque fibre. Soit U un ouvert de E contenant B_0 tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $\lambda_t(U) \subset U$.*

1. *Soit η une forme différentielle de degré k sur U, fermée et induisant sur B_0 la forme nulle, c'est-à-dire vérifiant*

$$d\eta = 0\,, \quad s_0^*\eta = 0\,.$$

Alors il existe une $(k-1)$-forme différentielle β sur U, nulle sur B_0, telle que

$$\eta = d\beta\,.$$

Si de plus η est nulle sur B_0, on peut choisir β de manière telle que dans toute carte de U, les dérivées partielles premières de ses composantes par rapport aux coordonnées locales soient nulles sur B_0.

2. *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $A(U)$ (algèbre des formes différentielles sur U) engendré par les 1-formes basiques, c'est-à-dire qui sont les images réciproques par π de 1-formes sur la base B. Soit η une forme différentielle sur U, telle que $d\eta \in \mathcal{I}$. Alors η est somme d'une forme*

exacte (c'est-à-dire différentielle extérieure d'une autre forme) et d'une forme élément de $\mathcal{I}$.

Démonstration. Soit ψ l'application, définie sur un ouvert Ω de $\mathbf{R} \times U$ contenant $[0,1] \times U$, et à valeurs dans U,

$$\psi(t,x) = \psi_t(x) = \lambda_{1-t}(x)\,.$$

On a

$$\psi_0 = \mathrm{id}_U\,, \quad \psi_1 = s_0 \circ \pi\,.$$

Soit H l'opérateur d'homotopie associé à ψ. D'après le lemme d'homotopie 1.1, toute k-forme différentielle η sur U vérifie

$$(s_0 \circ \pi)^*\eta - \eta = H \circ d\eta + d \circ H\eta\,,$$

d'où

$$\eta = \pi^*(s_0^*\eta) - H(d\eta) - d(H\eta)\,. \tag{$*$}$$

L'application ψ est le flot réduit d'un champ de vecteurs dépendant du temps $(t,x) \to \zeta_t(x)$, tangent aux fibres de E, donné par l'expression

$$\zeta_t(x) = -\lambda_{1/(1-t)}x\,.$$

Cela permet d'écrire l'opérateur d'homotopie H, appliqué à une forme différentielle γ quelconque, sous la forme

$$H\gamma = \int_0^1 \psi_t^*\big(i(\zeta_t)\gamma\big)\,dt\,. \tag{$**$}$$

Cette expression est parfaitement définie, bien que ζ_t ne soit pas défini pour $t = 1$.

1. Supposons η fermée et induisant sur B_0 une forme nulle. L'expression $(*)$ devient

$$\eta = -d(H\eta) = d\beta\,, \quad \text{avec} \quad \beta = -H\eta\,.$$

La formule $(**)$ montre que β est nulle sur B_0. Si de plus η est nulle sur B_0, les composantes de η et de ζ_t, dans toute carte de U, et pour tout $t \in]0,1[$, s'annulent sur B_0. Donc les composantes de $i(\zeta_t)\eta$ sont des sommes de produits de deux fonctions qui s'annulent sur B_0. Leurs dérivées partielles premières par rapport aux coordonnées locales s'annulent donc sur B_0. On en déduit qu'il en est de même des dérivées partielles premières des composantes de $H\eta$.

2. Supposons $d\eta \in \mathcal{I}$. On voit aisément qu'une forme différentielle de degré r est élément de $\mathcal{I}$ si et seulement si elle prend la valeur nulle lorsqu'on l'applique à r vecteurs tous éléments du noyau de $T\pi$. Mais $\zeta_t(x)$ est élément de ce noyau, et $T\psi_t$ applique ce noyau dans lui-même. La formule $(**)$ montre alors que si $\gamma \in \mathcal{I}$, $H\gamma$ est aussi élément de $\mathcal{I}$. L'expression $(*)$ donne alors le résultat annoncé, car $\pi^*(s_0^*\eta)$ et $H(d\eta)$ sont éléments de $\mathcal{I}$, tandis que $d(H\eta)$ est exacte. $\square$

1.3. Remarque. Le lemme de Poincaré généralisé 1.2 peut être combiné avec le théorème d'existence des voisinages tubulaires, afin de donner un énoncé applicable à un voisinage d'une sous-variété N d'une variété M.

2. Théorèmes de Weinstein

A. Weinstein (dans "Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds", Advances in Math., 6, 1971, 329–346) a établi plusieurs théorèmes qui, en un certain sens, généralisent le théorème de Darboux étudié dans le chapitre précédent. Alors que le théorème de Darboux est purement local (il concerne un voisinage d'un point) les théorèmes de Weinstein sont semi-globaux: ils concernent le voisinage d'une sous-variété. La méthode employée pour démontrer le premier de ces théorèmes est basée sur une idée de J. Moser (voir "On the volume element on a manifold", Trans. Amer. Math. Soc., 120, 1965, 286–294). J. Martinet (dans sa thèse de doctorat "Sur les singularités des formes différentielles", Ann. Institut Fourier, Grenoble, 20, 1970, 95–178) avait, indépendamment de Weinstein, remarqué que cette méthode permettait de prouver le théorème de Darboux.

2.1. Théorème (A. Weinstein). *Soit M une variété différentiable sur laquelle sont définies deux formes symplectiques Ω_0 et Ω_1, et N une sous-variété de M On suppose que*

$$\Omega_0\big|_N = \Omega_1\big|_N .$$

Alors il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage U_0 de N dans M sur un autre voisinage U_1 de N dans M, tel que

$$\varphi\big|_N = \mathrm{id}_N , \quad \varphi^*\Omega_1 = \Omega_0 .$$

On peut de plus imposer à φ de vérifier

$$T_x\varphi = \mathrm{id}_{T_xM} \quad \text{pour tout} \quad x \in N .$$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$\Omega_t = \Omega_0 + t(\Omega_1 - \Omega_0) .$$

La 2-forme $\Omega_1 - \Omega_0$ est nulle sur N. En considérant un voisinage tubulaire V de N dans M et en appliquant le lemme de Poincaré généralisé 1.2, on voit qu'il existe une 1-forme β, définie sur V, nulle sur N, telle que

$$\Omega_1 - \Omega_0 = d\beta .$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, et tout point x de N, $\Omega_t(x) = \Omega_0(x)$, donc est de rang maximum. L'ensemble des $(t,x) \in \mathbf{R} \times V$ tels que $\Omega_t(x)$ soit de rang maximum est donc un ouvert W_1 de $\mathbf{R} \times V$ contenant $\mathbf{R} \times N$. On définit sur W_1 le champ de vecteurs dépendant du temps $\xi : (t,x) \mapsto \xi_t(x)$ vérifiant

$$i\big(\xi_t(x)\big)\big(\Omega_t(x)\big) = -\beta(x) .$$

Soit $\Phi : (t,x) \mapsto \Phi_t(x)$ le flot réduit du champ de vecteurs dépendant du temps ξ, et W_2 l'ouvert de $\mathbf{R} \times V$ sur lequel Φ est défini. Le champ ξ étant nul sur $\mathbf{R} \times N$, W_2 contient $\mathbf{R} \times N$. En utilisant la compacité de $[0,1]$, on voit que tout point $x \in N$ possède un voisinage ouvert $U_x \subset V$ tel que $[0,1] \times U_x$ soit contenu dans W_2. Soit U_0 la réunion des U_x lorsque x parcourt N; c'est un voisinage ouvert de N dans M, contenu dans V, tel que $[0,1] \times U_0 \subset W_2$. On a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{d}{d\theta}\big((\Phi_\theta^*\Omega_\theta)\big)\big|_{\theta=t} = \Phi_t^*\left(\mathcal{L}(\xi_t)\Omega_t + \frac{d}{dt}\,\Omega_t\right) .$$

Mais on a

$$\mathcal{L}(\xi_t)\Omega_t = i(\xi_t)d\Omega_t + di(\xi_t)\Omega_t = -d\beta\,,$$

et d'autre part

$$\frac{d}{dt}\,\Omega_t = \Omega_1 - \Omega_0 = d\beta\,.$$

Par suite,

$$\frac{d}{d\theta}\big((\Phi_\theta^*\Omega_\theta)\big)\big|_{\theta=t} = 0\,,$$

donc

$$\Phi_1^*\Omega_1 = \Phi_0^*\Omega_0 = \Omega_0\,,$$

car $\Phi_0 = \mathrm{id}$. Puisque pour tout $t \in \mathbf{R}$, ξ_t est nul sur N, on a $\Phi_1\big|_N = \mathrm{id}_N$. D'autre part, $\Omega_1 - \Omega_0$ étant nulle sur N, on peut imposer à β d'avoir, dans toute carte, ses composantes et leurs dérivées partielles premières par rapport aux coordonnées locales qui s'annulent sur N. Le champ de vecteurs ξ_t a alors les mêmes propriétés. En dérivant, par rapport aux coordonnées locales, l'égalité, vérifiée pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in U_0$,

$$\frac{d}{d\theta}\big(\Phi(\theta,x)\big)\big|_{\theta=t} = \xi\big(t,\Phi(t,x)\big)\,,$$

on obtient, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in N$,

$$T_x\Phi_t = \mathrm{id}_{T_xM}\ .$$

On voit que $\varphi = \Phi_1$ possède toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé. □

2.2. Théorème (A. Weinstein). *Soit (M,Ω) une variété symplectique et L une sous-variété lagrangienne de M. On note T^*L le fibré cotangent à L, s_0 sa section nulle et α sa 1-forme de Liouville. Il existe un difféomorphisme ψ d'un ouvert V de M contenant L sur un ouvert $\psi(V)$ de T^*L contenant $L' = s_0(L)$, vérifiant les propriétés:*

$$\psi\big|_L = s_0\,, \qquad \psi^*(d\alpha) = \Omega\,.$$

Si de plus un sous-fibré vectoriel lagrangien E de T_LM, supplémentaire de TL, est donné, on peut choisir ψ de manière telle que pour tout $x \in L$, $T_x\psi(E_x)$ soit le sous-espace vectoriel de $T_{\psi(x)}(T^*L)$ tangent à la fibre T_x^*L en son origine $\psi(x) = s_0(x)$.

Démonstration. S'il n'est pas déjà donné, on choisit un sous-fibré vectoriel lagrangien E de T_LM, supplémentaire de TL. On admet pour le moment l'existence d'un tel sous-fibré; elle sera prouvée plus loin. Pour tout point x de L et tout vecteur $v \in E_x$, on désigne par $j(v)$ l'élément de T_x^*L qui vérifie, pour tout $w \in T_xL \subset T_xM$:

$$\big\langle j(v), w\big\rangle = \Omega(x)(v,w)\,.$$

D'après la proposition 2.10 du chapitre I, j est un isomorphisme de fibrés vectoriels de E sur T^*L. Le théorème d'existence des voisinages tubulaires montre qu'il existe un

difféomorphisme Φ d'un ouvert U de M contenant L sur un ouvert $\Phi(U)$ de T^*L, tel que $\Phi\big|_L$ soit égal à la section nulle s_0 de T^*L et que, pour tout $x \in L$,

$$T_x\Phi\big|_{E_x} = \mathrm{id}_{E_x} \ .$$

Dans cette égalité, on a convenu d'identifier le sous-espace vectoriel E_x de T_xM avec son espace tangent à l'origine.

L'application $j \circ \Phi$ est donc un difféomorphisme de U sur un ouvert $j \circ \Phi(U)$ de T^*L, qui vérifie $j \circ \Phi\big|_L = s_0$, tel que, pour tout $x \in L$, $T_x(j \circ \Phi)$ applique les deux sous-espaces lagrangiens supplémentaires T_xL et E_x de T_xM, respectivement sur $T_{x'}L'$ et $T_{x'}(T^*_xL)$. On a noté $L' = s_0(L)$ l'image de la section nulle, $x' = s_0(x)$. On remarque que $T_{x'}L'$ et $T_{x'}(T^*_xL)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $T_{x'}(T^*L)$, lagrangiens relativement à $d\alpha(x')$. Si l'on identifie L et L' au moyen de s_0, $T_{x'}L'$ s'identifie à T_xL, la restriction de $T_x(j \circ \Phi)$ à T_xL s'exprime comme l'identité, et sa restriction à E_x s'exprime comme j (car j est linéaire sur chaque fibre, et on sait que la différentielle d'une application linéaire, en un point quelconque, coïncide avec cette application linéaire).

D'autre part, on vérifie aisément (par exemple en utilisant des coordonnées locales canoniques) que si x' est un point de $L' = s_0(L)$, $v' \in T_{x'}(T^*_xL)$, que l'on peut identifier à T^*_xL, et $w' \in T_{x'}L'$, que l'on peut identifier à T_xL, on a

$$d\alpha(x')(v', w') = \langle v', w' \rangle \, .$$

Dans le cas présent, on part de $v \in E_x$, $w \in T_xL$, et on pose $v' = T_x(j \circ \Phi)(v)$, $w' = T_x(j \circ \Phi)(w)$. On a donc

$$\begin{aligned} d\alpha(x')(v', w') &= \big\langle T_x(j \circ \Phi)(v), T_x(j \circ \Phi)(w) \big\rangle \\ &= \big\langle j(v), w \big\rangle \\ &= \Omega(x)(v, w) \, . \end{aligned}$$

On en déduit que Ω et $(j \circ \Phi)^*(d\alpha)$ coïncident sur L. Le théorème 2.1 montre qu'il existe un difféomorphisme χ d'un ouvert V de M contenant L, sur un autre ouvert $\chi(V)$ de M contenant L (en restreignant si nécessaire V on peut faire en sorte que $\chi(V) \subset U$), tel que $\chi\big|_L = \mathrm{id}_L$, vérifiant

$$\chi^*\big((j \circ \Phi)^*(d\alpha)\big) = \Omega \, ,$$

et, pour tout $x \in L$, $T_x\chi = \mathrm{id}_{T_xM}$. Posons

$$\psi = j \circ \Phi \circ \chi \, .$$

On voit alors que ψ a toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé. $\square$

2.3. Commentaire. Dans le cas où aucun sous-fibré lagrangien E de T_LM supplémentaire de TL n'est donné d'avance, on doit, pour compléter la démonstration du théorème 2.2, prouver l'existence d'un tel sous-fibré. On doit pour cela établir certaines propriétés algébriques relatives à la décomposition polaire d'un isomorphisme.

2.4. Théorème. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, et G une forme bilinéaire symétrique définie positive sur V.*

1. *Tout isomorphisme A de V se décompose, de manière unique, en*

$$A = BI\,,$$

où B est autoadjoint défini positif et I orthogonal (relativement à G). Cette décomposition est appelée décomposition polaire de A relativement à G.

2. *On suppose de plus V muni d'une forme symplectique Ω. Soit A l'isomorphisme de V défini par*

$$G(Ax, y) = \Omega(y, x)\,, \quad x \text{ et } y \in V\,.$$

Alors A est anti-autoadjoint. Soit

$$A = BI$$

sa décomposition polaire. Alors I est un opérateur complexe adapté à Ω, et les opérateurs I et B commutent,

$$IB = BI\,.$$

Démonstration.

1. Rappelons que l'adjoint B^* d'un opérateur $B \in \mathcal{L}(V, V)$, relativement à G, est défini par

$$G(B^*x, y) = G(x, By)\,, \quad x \text{ et } y \in V\,.$$

L'opérateur B est dit *autoadjoint* si $B = B^*$, *anti-autoadjoint* si $B = -B^*$, *orthogonal* si $BB^* = B^*B = \mathrm{id}_V$.

Si la décomposition polaire $A = BI$ existe, on a

$$AA^* = BII^*B^* = B^2$$

car $I^* = I^{-1}$ et $B^* = B$. On est donc conduit à poser

$$B = \sqrt{AA^*}\,,$$

ce qui a un sens car AA^* est autoadjoint défini positif, et on sait qu'un opérateur autoadjoint défini positif possède une racine carrée bien définie, qui est aussi un opérateur autoadjoint défini positif. Le lecteur pourra se convaincre de cette propriété en choisissant une base de V dans laquelle la matrice de cet opérateur est diagonale.

Il suffit alors de poser

$$I = B^{-1}A\,.$$

On a bien

$$II^* = B^{-1}AA^*(B^*)^{-1} = B^{-1}B^2B^{-1} = \mathrm{id}_V\ .$$

2. Soit Ω une 2-forme symplectique sur V, et A l'opérateur défini par

$$G(Ax, y) = \Omega(y, x)\,.$$

On a

$$G(x, Ay) = G(Ay, x) = \Omega(x, y) = -\Omega(y, x) = -G(Ax, y)\,,$$

ce qui prouve que A est anti-autoadjoint.

Définissons $B = \sqrt{AA^*}$ comme précédemment, puis $I = B^{-1}A$.

En procédant exactement comme dans la partie 1, on montre que tout isomorphisme A de V se décompose, de manière unique, sous la forme

$$A = I'B'\,,$$

avec $B' = B'^*$, $I'^* = I'^{-1}$. Afin de voir quelle relation existe entre les deux décompositions $A = BI = I'B'$, on écrit

$$A = BI = I(I^{-1}BI)\,,$$

et on remarque que

$$(I^{-1}BI)^* = I^*B^*(I^{-1})^* = I^{-1}BI\,.$$

En raison de l'unicité, on a donc

$$I' = I\,, \quad B' = I^{-1}BI\,.$$

Dans le cas présent, puisque $A^* = -A$, on a

$$A = BI\,, \quad A^* = I^*B^* = I^{-1}B\,,$$

donc

$$A = -I^{-1}B\,.$$

En raison de l'unicité de la seconde décomposition $A = I'B'$, on en déduit

$$I' = I = -I^{-1}\,, \quad B' = I^{-1}BI = B\,,$$

ce qui montre que I est un opérateur complexe ($I^2 = -\mathrm{id}_V$) qui commute avec B ($IB = BI$). Par suite, I et B commutent aussi avec $BI = A$.

On a alors

$$\Omega(Ix, Iy) = G(AIy, Ix) = G(IAy, Ix) = G(Ay, x) = \Omega(x, y)\,.$$

Posons

$$G_1(x, y) = \Omega(Ix, y) = G(Ay, Ix) = G(IBy, Ix) = G(By, x) = G(Bx, y)\,.$$

La forme bilinéaire G_1 est symétrique définie positive. D'après la proposition 6.4 du chapitre I, I est un opérateur complexe adapté à Ω. □

2.5. Proposition. *Soit (F, π, N) un fibré vectoriel symplectique, et (L_1, π, N) un sous-fibré lagrangien. Il existe un autre sous-fibré lagrangien (L_2, π, N) supplémentaire du précédent.*

Démonstration. Rappelons les quelques notions sur les fibrés vectoriels utilisées ici. F et N sont des variétés différentiables et $\pi : F \to N$ est une submersion surjective. On dit que (F, π, N) est un *fibré vectoriel* si les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

1. Pour tout point $x \in N$, la fibre $F_x = \pi^{-1}(x)$ possède une structure d'espace vectoriel réel, de dimension finie.

2. Il existe un espace vectoriel de dimension finie V, appelé fibre-type, un recouvrement ouvert (U_i), $i \in I$, de N et pour tout $i \in I$, un difféomorphisme $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times V$, tel que pour tout point $x \in U_i$, la restriction de φ_i à la fibre $F_x = \pi^{-1}(x)$ soit un isomorphisme de cette fibre sur $\{x\} \times V$.

Les variétés F et N sont alors appelées *espace total* et *base*, et l'application π *projection canonique* du fibré vectoriel (F, π, N). Le recouvrement ouvert de N et la famille de difféomorphismes (U_i, φ_i) est appelé *atlas* de ce fibré vectoriel.

Un *fibré vectoriel symplectique* est un fibré vectoriel (F, π, N) tel que chaque fibre F_x possède une structure d'espace vectoriel symplectique (F_x, Ω_x), la 2-forme Ω_x dépendant différentiablement de $x \in N$. Un sous-fibré lagrangien du fibré vectoriel symplectique (F, π, N) consiste en la donnée, pour tout $x \in N$, d'un sous-espace vectoriel lagrangien $L_{1\,x}$ de (F_x, Ω_x), cette donnée dépendant différentiablement de $x \in N$. Un tel sous-fibré lagrangien sera noté (L_1, π, N). Un autre sous-fibré lagrangien (L_2, π, N) est dit supplémentaire du précédent si pour tout $x \in N$, les fibres $L_{1\,x}$ et $L_{2\,x}$ sont deux sous-espaces lagrangiens supplémentaires de (F_x, Ω_x).

Soit donc (F, π, N) un fibré vectoriel symplectique et (L_1, π, N) un sous-fibré lagrangien. On peut munir la fibre-type V d'une forme bilinéaire symétrique définie positive G_0. Soit (U_i, φ_i), $i \in I$, un atlas du fibré vectoriel (F, π, N), et (h_i), $i \in I$, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert (U_i) de N. Pour tout couple (v, w) d'éléments d'un même fibre F_x de F, on pose

$$G_x(v, w) = \sum_{i \in I} h_i(x) G_0\big(\varphi_i(v), \varphi_i(w)\big)\,.$$

On obtient ainsi une structure riemannienne G sur le fibré vectoriel (F, π, N), c'est-à-dire, pour chaque $x \in N$, une forme bilinéaire symétrique définie positive sur F_x, cette donnée dépendant différentiablement de x.

Pour tout $x \in N$, on a donc sur la fibre F_x une forme symplectique Ω_x et une forme bilinéaire symétrique définie positive G_x. On définit l'opérateur linéaire $A_x \in \mathcal{L}(F_x, F_x)$ en posant

$$G_x(A_x v, w) = \Omega_x(w, v)\,.$$

D'après le théorème 2.4, la décomposition polaire de A_x détermine un opérateur complexe I_x adapté à Ω_x. On pose alors

$$L_{2\,x} = I_x(L_{1\,x})\,.$$

D'après la proposition 6.6 du chapitre I, $L_{2\,x}$ est un sous-espace lagrangien de (F_x, Ω_x) supplémentaire de $L_{1\,x}$. De plus, toutes les constructions effectuées dépendent différentiablement du point $x \in N$. On obtient donc ainsi un sous-fibré lagrangien (L_2, π, N) supplémentaire de (L_1, π, N). $\square$

La proposition 2.5 donne donc le résultat qui manquait pour compléter la démonstration du théorème 2.2.

2.6. Proposition. *Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension, L_1 et L_2 des sous-variétés lagrangiennnes, respectivement de M_1 et de M_2. On suppose qu'il existe un difféomorphisme $\Phi : L_1 \to L_2$. Il existe alors un difféomorphisme Ψ d'un ouvert U_1 de M_1 contenant L_1 sur un ouvert U_2 de M_2 contenant L_2 tel que*

$$\Psi\big|_{L_1} = \Phi \quad \text{et} \quad \Psi^*\Omega_2 = \Omega_1 \,.$$

Démonstration. C'est une conséquence facile du théorème 2.2. □

Citons enfin un autre théorème, également dû à A. Weinstein. Le lecteur en trouvera la démonstration dans l'article de cet auteur "Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds" déjà cité.

2.7. Théorème (A. Weinstein)**.** *Dans les hypothèses du théorème 2.2, on suppose de plus la variété M munie d'un sous-fibré lagrangien complètement intégrable $\mathcal{F}$ transverse à L, c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in L$, T_xL et $\mathcal{F}_x$ soient deux sous-espaces lagrangiens supplémentaires de $\big(T_xM, \Omega(x)\big)$. On peut alors choisir le difféomorphisme ψ de telle sorte qu'il applique chaque feuille du feuilletage de V défini par $\mathcal{F}$ dans une fibre de T^*L.*

Le résultat qui suit, dû à V. Guillemin et S. Sternberg, peut être obtenu très simplement comme un corollaire du théorème précédent. Le lecteur en trouvera une autre démonstration dans le livre de Guillemin et Sternberg, "Geometric asymptotics", Mathematics Surveys number 14, American Mathematical Society, Providence, 1977.

2.8. Corollaire (V. Guillemin et S. Sternberg)**.** *Soit (M, Ω) une variété symplectique, L une sous-variété lagrangienne et $\mathcal{F}$ un sous-fibré lagrangien complètement intégrable transverse à L. Il existe, sur un ouvert V de M contenant L, une 1-forme ω unique vérifiant*

$$d\omega = \Omega \,, \quad \mathcal{F} \subset \ker \omega \,, \quad \omega\big|_L = 0 \,. \tag{$*$}$$

La 1-forme ω est dite associée à L et $\mathcal{F}$.

Démonstration. Appliquons le théorème 2.7, et posons $\omega = \psi^*\alpha$. On voit que ω vérifie les propriétés $(*)$. Soit ω_1 une autre 1-forme vérifiant aussi ces propriétés. On a

$$d(\omega - \omega_1) = 0 \,, \quad (\omega - \omega_1)\big|_L = 0 \,.$$

D'après le lemme de Poincaré généralisé 1.2, il existe une fonction différentiable f, définie sur un voisinage de L, nulle sur L, telle que $df = \omega - \omega_1$. Mais $\omega - \omega_1$ est nulle sur $\mathcal{F}$, donc f est constante sur chaque feuille du feuilletage de son domaine de définition défini par $\mathcal{F}$. En restreignant éventuellement celui-ci, on peut faire en sorte que chacune de ces feuilles rencontre L. Par suite, f est identiquement nulle, donc $\omega_1 = \omega$. □

B. Kostant, V. Guillemin et S. Sternberg ont établi une réciproque du résultat précédent, que nous indiquons ci-dessous. Le lecteur en trouvera la démonstration dans le livre "Geometric asymptotics" déjà cité.

2.9. Théorème (B. Kostant, V. Guillemin et S. Sternberg). *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique de dimension* $2n$, *et* ω *une* 1*-forme telle que* $d\omega = \Omega$. *On suppose que* $L = \omega^{-1}(0)$ *est une sous-variété de* M *de dimension* n. *Alors* L *est une sous-variété lagrangienne de* (M, Ω), *et il existe, sur un ouvert de* M *contenant* L, *un sous-fibré lagrangien complètement intégrable* $\mathcal{F}$ *du fibré tangent, transverse à* L, *tel que* ω *soit la* 1*-forme associée à* L *et à* $\mathcal{F}$ *au sens du corollaire précédent.*

Chapitre V

Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique

1. Rappels sur les groupes de Lie

1.1. Définition. Un *groupe de Lie* est une variété différentiable G, de classe C^∞, munie d'une structure de groupe, telle que les opérations du groupe

– multiplication $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$,
– inversion $g \mapsto g^{-1}$,

soient différentiables de classe C^∞.

1.2. Conséquences et commentaires.

1. Un célèbre théorème de Gleason montre que tout groupe de Lie possède en fait une structure de variété analytique, telle que les opérations du groupe soient des applications analytiques.

2. Soit G un groupe de Lie. Pour tout élément g de G fixé, les applications de G dans lui-même

$$L_g : h \mapsto gh\,, \qquad R_g : h \mapsto hg\,,$$

sont des difféomorphismes, appelés respectivement translations à gauche et à droite par g. On remarquera que pour tous g et $h \in G$, L_g et R_h commutent.

3. Un champ de vecteurs X sur le groupe de Lie G est dit *invariant à gauche* si, pour tout $g \in G$, $(L_g)_* X = X$. Un champ invariant à gauche est déterminé par sa valeur à l'élément neutre e car, d'après la définition,

$$X(g) = TL_g\big(X(e)\big)\,.$$

L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G est un espace vectoriel, isomorphe à l'espace T_eG tangent à G en e, donc de même dimension que G. De plus, le crochet de deux champs de vecteurs invariants à gauche est invariant à gauche. L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche est donc une algèbre de Lie.

1.3. Définition. On appelle *algèbre de Lie d'un groupe de Lie* G l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur G.

1.4. Remarques.

1. L'ensemble $\mathcal{G}_R$ des champs de vecteurs invariants à droite sur le groupe de Lie G est aussi une algèbre de Lie. Soit $j : G \to G$ l'inversion, $j(g) = g^{-1}$. L'application qui, à tout champ de vecteurs invariant à gauche X, associe son image directe j_*X par j, est un isomorphisme d'algèbres de Lie, de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}_R$. On aurait donc pu tout aussi bien définir l'algèbre de Lie du groupe G comme étant l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite. C'est d'ailleurs ce que font certains auteurs. On remarquera que les champs de vecteurs X et j_*X prennent, en l'élément neutre e, des valeurs opposées. Lorsqu'on identifie l'espace T_eG tangent à G en e avec l'algèbre de Lie du groupe (en associant à un champ de vecteurs sa valeur en e), on est conduit, selon la convention qui est faite pour définir l'algèbre de Lie du groupe G (c'est-à-dire selon que l'on choisit les champs invariants à gauche ou invariants à droite), à munir T_eG de l'une ou l'autre de deux structures d'algèbres de Lie, opposées l'une de l'autre, mais isomorphes par la symétrie par rapport à l'origine $X \mapsto -X$.

2. On définit de même les espaces des formes différentielles invariantes à gauche (ou à droite) sur le groupe de Lie G. Une forme différentielle invariante à gauche (ou à droite) est déterminée par sa valeur en l'élément neutre e. L'espace $\mathcal{G}^*$ des 1-formes invariantes à gauche sur G s'identifie au dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

1.5. Proposition. *Soit G un groupe de Lie. Tout champ de vecteurs invariant à gauche $X \in \mathcal{G}$ sur G est complet. Son flot réduit Φ_X vérifie, pour tous $g \in G$, $t \in \mathbf{R}$,*

$$\Phi_X(t, g) = g\Phi_X(t, e)\,.$$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, et $\Phi_{\lambda X}$ le flot réduit de λX. On a

$$\Phi_{\lambda X}(t, e) = \Phi_X(\lambda t, e)\,.$$

1.6. Définition. Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. On appelle *application exponentielle* l'application de $\mathcal{G}$ dans G,

$$X \mapsto \exp(X) = \Phi_X(1, e)\,.$$

1.7. Quelques propriétés.

1. L'application linéaire tangente à l'application exponentielle à l'origine de $\mathcal{G}$ est l'identité (si l'on identifie $\mathcal{G}$ à son espace tangent à l'origine et aussi à l'espace tangent à G en e). Par suite, d'après le théorème d'inversion locale, la restriction de l'application exponentielle à un voisinage convenable de l'origine est un difféomorphisme de ce voisinage sur un voisinage de l'élément neutre e du groupe G.

2. Le flot réduit Φ_X du champ de vecteurs invariant à gauche $X \in \mathcal{G}$ est

$$\Phi_X(t, g) = g\exp(tX)\,.$$

Soit d'autre part X_R le champ de vecteurs invariant à droite qui prend en e la même valeur que X. Son flot réduit Ψ_{X_R} a pour expression

$$\Psi_{X_R}(t,g) = \exp(tX)g\,.$$

On voit en particulier que les courbes intégrales de X et de X_R qui passent par l'élément neutre e pour $t=0$ sont confondues.

1.8. Définition. Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. On appelle *représentation adjointe* de G l'application qui associe, à chaque élément $g \in G$, la transformation linéaire de $\mathcal{G}$:

$$X \mapsto \operatorname{Ad}_g X = (R_{g^{-1}})_* X\,.$$

1.9. Quelques propriétés.

1. D'après la définition de l'image directe d'un champ de vecteurs, on a pour tous g et $h \in G$, $X \in \mathcal{G}$,

$$\operatorname{Ad}_g X(h) = TR_{g^{-1}}\big(X(R_g h)\big) = TR_{g^{-1}}\big(X(hg)\big)\,.$$

2. Pour mettre en évidence les relations qui lient représentation adjointe et automorphismes intérieurs, considérons, pour $g \in G$ fixé, l'automorphisme du groupe G

$$h \mapsto \alpha_g(h) = L_g \circ R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}\,.$$

Pour tout élément X de $\mathcal{G}$, on a

$$\operatorname{Ad}_g X = (\alpha_g)_* X\,,$$

(image directe de X par α_g). En effet

$$(\alpha_g)_* X = (L_g)_*\big((R_{g^{-1}})_* X\big) = (R_{g^{-1}})_*\big((L_g)_* X\big) = (R_{g^{-1}})_* X\,,$$

parce que L_g et $R_{g^{-1}}$ commutent et que X est invariant à gauche.

3. La représentation adjointe est une représentation linéaire de G dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire un homomorphisme de G dans le groupe linéaire $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$.

4. On a, pour tous $g \in G$, $X \in \mathcal{G}$, $t \in \mathbf{R}$,

$$\exp(t \operatorname{Ad}_g X) = g \exp(tX) g^{-1}\,,$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$\operatorname{Ad}_g X = \frac{d}{dt}\,(g \exp(tX) g^{-1})\big|_{t=0}\,.$$

1.10. Définition. Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$. On appelle *représentation coadjointe* de G la représentation linéaire de G dans $\mathcal{G}^*$

contragrédiente de la représentation adjointe, c'est-à-dire l'application qui associe, à tout élément $g \in G$, la transformation linéaire Ad_g^* de $\mathcal{G}^*$ définie par

$$\big\langle \mathrm{Ad}_g^* \xi, X \big\rangle = \big\langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \big\rangle .$$

1.11. Différentielle d'une représentation. Soient G et H deux groupes de Lie, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ leurs algèbres de Lie. A tout homomorphisme de groupes de Lie $\Phi : G \to H$ on peut, de manière naturelle, associer un homomorphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Cet homomorphisme associe, à chaque élément X de $\mathcal{G}$, le champ de vecteurs invariant à gauche $\varphi(X)$ sur H qui prend, en l'élément neutre e, la valeur $T_e\Phi\big(X(e)\big)$. On a utilisé la même notation e pour désigner les éléments neutres de G et de H. On vérifie que les champs de vecteurs X sur G et $\varphi(X)$ sur H sont compatibles par Φ, c'est-à-dire que, pour tout $g \in G$,

$$\varphi(X)\big(\Phi(g)\big) = T_g\Phi\big(X(g)\big) .$$

Par suite, φ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire vérifie, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$\varphi\big([X,Y]\big) = \big[\varphi(X), \varphi(Y)\big] .$$

On dit que φ est la *différentielle* de l'homomorphisme de groupes Φ.

Ainsi par exemple, soit $g \in G$ fixé, et considérons l'automorphisme de G: $h \mapsto \alpha_g(h) = ghg^{-1}$. On vérifiera que sa différentielle est Ad_g.

Dans le cas où $H = \mathbf{GL}(V)$ est le groupe linéaire d'un espace vectoriel V (de dimension finie), on dit que Φ est une *représentation linéaire* de G dans V. Sa différentielle φ est alors une représentation linéaire de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{GL}(V)$, c'est-à-dire un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie des endomorphismes linéaires de V, avec pour crochet le commutateur.

En appliquant cette notion à la représentation adjointe, on est conduit à la définition suivante.

1.12. Définition. Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. On appelle *représentation adjointe* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, et on note $X \mapsto \mathrm{ad}_X$, $X \in \mathcal{G}$, la différentielle de la représentation adjointe de G.

1.13. Proposition. *Dans les hypothèses de la définition précédente, on a, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,*

$$\mathrm{ad}_X Y = [X,Y] .$$

1.14. Remarques.

1. La proposition précédente montre qu'on peut définir la représentation adjointe d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sans avoir à utiliser le groupe de Lie correspondant G. L'identité de Jacobi

$$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$$

exprime que ad est une représentation d'algèbres de Lie, puisqu'elle peut s'écrire

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X \ .$$

2. On a, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$, $t \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d}{d\theta}\big(\mathrm{Ad}_{\exp(\theta X)}\, Y\big)\big|_{\theta=t} = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\big([X,Y]\big)\,,$$

donc en particulier, pour $t = 0$,

$$\frac{d}{d\theta}\big(\mathrm{Ad}_{\exp(\theta X)}\, Y\big)\big|_{\theta=0} = \mathrm{ad}_X\, Y = [X,Y]\,.$$

1.15. Définition. On appelle *représentation coadjointe* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ la représentation contragrédiente de la représentation adjointe, c'est-à-dire l'application qui associe, à tout élément $X \in \mathcal{G}$, l'endomorphisme ad^*_X du dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ défini par la formule (dans laquelle X et Y sont éléments de $\mathcal{G}$ et ξ élément de $\mathcal{G}^*$):

$$\big\langle \mathrm{ad}^*_X\, \xi, Y\big\rangle = \big\langle \xi, -\,\mathrm{ad}_X\, Y\big\rangle = \big\langle \xi, [Y,X]\big\rangle\,.$$

2. Action d'un groupe de Lie sur une variété

2.1. Définition. Une *action à gauche* d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M est une application différentiable $\Phi : G \times M \to M$ vérifiant, pour tous g_1 et $g_2 \in G$, $x \in M$,

$$\Phi\big(g_1, \Phi(g_2, x)\big) = \Phi(g_1 g_2, x)\,, \quad \Phi(e,x) = x\,.$$

Une *action à droite* de G sur M est une application différentiable $\Psi : M \times G \to M$ vérifiant, pour tous g_1 et $g_2 \in G$, $x \in M$,

$$\Psi\big(\Psi(x, g_1), g_2\big) = \Psi(x, g_1 g_2)\,, \quad \Psi(x,e) = x\,.$$

2.2. Commentaires.

1. Soit Φ une action à gauche de G sur M. Pour tout $g \in G$, on note Φ_g l'application de M dans M: $x \mapsto \Phi_g(x) = \Phi(g,x)$. On voit que Φ_g est un difféomorphisme de M, d'inverse $\Phi_{g^{-1}}$, et que, pour tous g_1 et $g_2 \in G$,

$$\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}\,.$$

Par suite, $g \mapsto \Phi_g$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe des difféomorphismes de M.

De même, soit Ψ une action à droite de G sur M. Pour tout $g \in G$, on note Ψ_g l'application de M dans M: $x \mapsto \Psi_g(x) = \Psi(x, g)$. On voit que Ψ_g est un difféomorphisme de M, d'inverse $\Psi_{g^{-1}}$, et que, pour tous g_1 et $g_2 \in G$,

$$\Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2} = \Psi_{g_2 g_1} .$$

Par suite, $g \mapsto \Psi_g$ est un anti-homomorphisme du groupe G dans le groupe des difféomorphismes de M. Afin de toujours raisonner sur des actions à gauche et des homomorphismes de groupes, plutôt que sur des anti-homomorphismes, on peut associer à l'action à droite ψ l'application $\Phi : G \times M \to M$ définie par

$$\Phi(g, x) = \Psi(x, g^{-1}) .$$

On vérifie que Φ est une action à gauche de G sur M.

Dans la suite, on conviendra d'appeler action d'un groupe sur une variété, une action à gauche.

2. Soit ρ une représentation linéaire d'un groupe de Lie G dans un espace vectoriel (de dimension finie) V, c'est-à-dire un homomorphisme $g \mapsto \rho_g$ de G dans le groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$. On peut lui associer, de manière naturelle, une action de G sur V, également notée ρ, en posant

$$\rho(g, v) = \rho_g(v) , \quad g \in G , \quad v \in V .$$

En particulier, lorsque ρ est la représentation adjointe (resp., coadjointe), on parlera de l'action adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (resp., de l'action coadjointe de G sur $\mathcal{G}^*$).

2.3. Définition. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M. On appelle *champ fondamental* associé à un élément X de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe G le champ de vecteurs X_M sur M défini par

$$X_M(x) = \frac{d}{dt} \Phi\big(\exp(-tX), x\big)\big|_{t=0} .$$

2.4. Quelques propriétés.

1. La courbe intégrale du champ fondamental X_M qui passe par le point $x \in M$ pour $t = 0$ est

$$t \mapsto \Phi(\exp\big(-tX), x\big) .$$

On a en effet, pour s et $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi\Big(\exp\big(-(s+t)X\big), x\Big) = \Phi\Big(\exp(-sX), \Phi\big(\exp(-tX), x\big)\Big) ,$$

d'où en dérivant par rapport à $\theta = s + t$ puis en faisant $\theta = t$, c'est-à-dire $s = 0$,

$$\frac{d}{d\theta} \Phi\big(\exp(-\theta X), x\big)\big|_{\theta=t} = X_M\Big(\Phi\big(\exp(-tX), x\big)\Big) .$$

Par suite, tout champ fondamental sur M est complet.

2. Soit x_0 un point fixé de M, et $\chi : G \to M$ l'application

$$\chi(g) = \Phi(g, x_0)\,.$$

L'image de cette application est appelée *orbite* du point x_0 sous l'action Φ. C'est une sous-variété immergée (mais pas nécessairement plongée) de M. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M est tangent à l'orbite de x_0 en chacun de ses points. Plus précisément, en dérivant par rapport à t l'expression

$$\chi\big(\exp(-tX)g\big) = \Phi\big(\exp(-tX), \chi(g)\big)\,,$$

on obtient

$$T\chi\Big(-TR_g\big(X(e)\big)\Big) = X_M\big(\chi(g)\big)\,,$$

ce qui exprime que les champs de vecteurs $-X^R$ sur G (champ invariant à droite qui prend en e la valeur $-X(e)$), et X_M sur M, sont compatibles par χ.

3. L'application $X \mapsto X_M$ qui associe, à chaque élément X de $\mathcal{G}$, le champ de vecteurs fondamental correspondant X_M, est un homomorphisme d'algèbres de Lie. En d'autres termes, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$, on a

$$[X_M, Y_M] = [X, Y]_M\,.$$

Si l'on a mis, dans la définition du champ fondamental, $\exp(-tX)$ plutôt que $\exp(tX)$, c'est précisément pour avoir un homomorphisme d'algèbres de Lie (avec $\exp(tX)$, on aurait obtenu un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie).

4. Soit $g \in G$, $X \in \mathcal{G}$. Considérons l'image directe $(\Phi_g)_*(X_M)$ par le difféomorphisme Φ_g du champ fondamental X_M. On vérifie aisément que c'est le champ fondamental associé à l'élément $\mathrm{Ad}_g\, X$ de $\mathcal{G}$:

$$(\Phi_g)_*(X_M) = (\mathrm{Ad}_g\, X)_M\,.$$

5. L'application $X \mapsto X_M$ est l'analogue, pour une action d'un groupe de Lie sur une variété, de la différentielle d'un homomorphisme de groupes de Lie (paragraphe 1.11).

3. Actions symplectiques et actions hamiltoniennes

3.1. Définition. Une action Φ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, Ω) est dit *symplectique* si pour tout $g \in G$, $\Phi_g : M \to M$ est un symplectomorphisme.

3.2. Quelques conséquences. Soit Φ une action symplectique d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, Ω).

1. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M est localement hamiltonien. Réciproquement d'ailleurs, si une action Φ d'un groupe de Lie connexe G sur une variété symplectique (M, Ω) est telle que tous les champs fondamentaux sont localement hamiltoniens, cette action est symplectique. Ces propriétés résultent de la proposition 5.2 du chapitre II, et du fait que tout élément d'un groupe de Lie connexe est le produit d'un nombre fini d'exponentielles.

2. Soient f et h deux fonctions, définies sur un ouvert de M, invariantes par l'action Φ, c'est-à-dire constantes sur chaque orbite de cette action. Leur crochet de Poisson $\{f, g\}$ est aussi invariant par l'action Φ.

3. L'ensemble $\mathcal{F}$ des valeurs des champs fondamentaux est un champ de directions différentiable et complètement intégrable sur M. Ses variétés intégrales sont les composantes connexes des orbites de l'action Φ. Le champ de directions $\mathcal{F}$ est de rang constant si et seulement si toutes les orbites de l'action Φ sont de même dimension. Lorsque c'est le cas, l'orthogonal symplectique $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est un sous-fibré complètement intégrable de TM. Cela résulte en effet de la propriété précédente et de la proposition 3.8 du chapitre III. Si de plus l'action Φ est simple, c'est-à-dire si l'ensemble P des orbites de cette action possède une structure de variété telle que la projection canonique $\pi : M \to P$ soit une submersion, il existe sur P une structure de Poisson unique telle que π soit une application de Poisson (voir encore la proposition 3.8 du chapitre III).

4. La forme induite par Ω sur chaque orbite de l'action Φ est de rang constant.

3.3. Définition. Une action Φ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, Ω) est dite *hamiltonienne* si elle est symplectique et si, pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental correspondant X_M est globalement hamiltonien.

3.4. Proposition. *Soit Φ une action hamiltonienne du groupe de Lie G sur la variété symplectique (M, Ω).*

1. *Il existe une application linéaire $X \mapsto J_X$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G dans l'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$ des fonctions différentiables sur M, telle que pour tout $X \in \mathcal{G}$, J_X soit un hamiltonien pour le champ fondamental X_M. Une telle application est appelée hamiltonien généralisé de l'action Φ.*

2. *Au hamiltonien généralisé $X \mapsto J_X$, on peut associer une application différentiable $J : M \to \mathcal{G}^*$, appelée moment de l'action Φ, définie par $J_X = X \circ J$ (en convenant de considérer $X \in \mathcal{G}$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{G}^*$), c'est-à-dire par*

$$J_X(x) = \big\langle J(x), X \big\rangle\,, \quad X \in \mathcal{G}\,, \quad x \in M\,.$$

Démonstration. Pour définir $X \mapsto J_X$, on choisit d'abord un hamiltonien J_{X_i} pour le champ fondamental $(X_i)_M$ associé à chaque élément X_i d'une base de $\mathcal{G}$. On prolonge ensuite par linéarité. $\square$

3.5. Exemple. Soit H un hamiltonien sur une variété symplectique (M, Ω), et Ψ le flot réduit du champ hamiltonien X_H. On suppose X_H complet. Le flot Ψ est alors une action du groupe additif $\mathbf{R}$ sur la variété symplectique (M, Ω). Afin d'assurer la cohérence avec les conventions de signe faites lors de la définition des champs fondamentaux, on pose

$$\Phi(t, x) = \Psi(-t, x)\,, \quad t \in \mathbf{R}\,, \quad x \in M\,.$$

On voit alors que Φ est aussi une action de $\mathbf{R}$ sur M, et que le champ fondamental associé à l'élément 1 de $\mathbf{R}$ est X_H. On remarquera que $\mathbf{R}$ coïncide avec son algèbre de Lie, et que l'application exponentielle est l'application identique de $\mathbf{R}$. L'action Φ est donc hamiltonienne, et admet H pour hamiltonien généralisé. Si l'on identifie $\mathbf{R}$ avec son dual, le couplage par dualité étant le produit ordinaire, on voit que le moment J de l'action Φ coïncide aussi avec H.

3.6. Remarques.

1. Toute action symplectique sur une variété symplectique (M, Ω) telle que $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$ est hamiltonienne. En effet, sur une telle variété, tout champ de vecteurs localement hamiltonien est globalement hamiltonien.

2. Une action symplectique d'un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie est égale à son idéal dérivé $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ (sous-espace engendré par les éléments de la forme $[X, Y]$, X et $Y \in \mathcal{G}$), est automatiquement hamiltonienne. Cela résulte en effet de la proposition 5.6 du chapitre II.

3. Le hamiltonien généralisé d'une action hamiltonienne Φ n'est pas unique: on peut lui ajouter une application linéaire quelconque de $\mathcal{G}$ dans l'espace des fonctions localement constantes sur M (c'est-à-dire constantes sur chaque composante connexe de M). De même, le moment correspondant $J : M \to \mathcal{G}^*$ n'est pas unique, on peut lui ajouter une application localement constante quelconque de M dans $\mathcal{G}^*$.

4. Soit $X \mapsto J_X$ un hamiltonien généralisé pour une action hamiltonienne Φ de G sur (M, Ω). Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{G}$. D'après la définition, les champs fondamentaux correspondants X_M et Y_M admettent pour hamiltoniens les fonctions J_X et J_Y. D'après la propriété 2.4.3, $[X_M, Y_M]$ est le champ fondamental associé à l'élément $[X, Y]$ de $\mathcal{G}$. Il admet donc pour hamiltonien $J_{[X,Y]}$. Mais d'après la propriété 6.2.5 du chapitre II, ce champ admet également pour hamiltonien le crochet de Poisson $\{J_X, J_Y\}$. La différence

$$\Theta(X, Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\} \tag{$*$}$$

est donc une fonction localement constante sur M. Pour simplifier, supposons M connexe. L'expression $(*)$ est alors constante sur M. Mais elle dépend évidemment, de manière bilinéaire, du couple (X, Y). L'expression $(*)$ définit donc une forme bilinéaire

antisymétrique Θ sur $\mathcal{G}$. On remarque que le hamiltonien généralisé $X \mapsto J_X$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si Θ est identiquement nulle. On est conduit à la définition suivante.

3.7. Définition. Une action Φ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, Ω) est dite *fortement hamiltonienne* si elle est hamiltonienne et si elle admet un hamiltonien généralisé $X \mapsto J_X$ qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire qui vérifie, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$,

$$J_{[X,Y]} = \{J_X, J_Y\}\,.$$

Lorsque c'est le cas, ce hamiltonien généralisé, et le moment J correspondant, sont dits *forts*.

3.8. Remarques.

1. Ainsi qu'on le verra plus loin, la forme bilinéaire antisymétrique Θ associée, comme indiqué en 3.6.4, à un moment J d'une action hamiltonienne Φ de G sur une variété symplectique connexe (M, Ω) vérifie, pour tous X, Y et $Z \in \mathcal{G}$,

$$\Theta\big([X,Y],Z\big) + \Theta\big([Y,Z],X\big) + \Theta\big([Z,X],Y\big) = 0\,.$$

On dit que c'est un *cocycle symplectique* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

2. Soit $J' = J + \mu$, avec $\mu \in \mathcal{G}^*$ constante, un autre moment de l'action Φ. Le cocycle symplectique Θ' qui lui est associé est

$$\Theta'(X,Y) = \Theta(X,Y) + \big\langle \mu, [X,Y] \big\rangle\,.$$

La différence $\Theta' - \Theta$ est la forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$, souvent notée $\partial\mu$,

$$\partial\mu(X,Y) = \big\langle \mu, [X,Y] \big\rangle\,.$$

On l'appelle *cobord* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ associé à l'élément μ de $\mathcal{G}^*$.

L'action Φ est fortement hamiltonienne si et seulement s'il existe un élément μ de $\mathcal{G}^*$ tel que $\Theta' = \Theta + \partial\mu = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le cocycle symplectique θ est un cobord (associé à l'élément $-\mu$ de $\mathcal{G}^*$).

Si l'action Φ est fortement hamiltonienne et si le moment J est fort, $J' = J + \mu$ est aussi un moment fort si et seulement si $\mu \in \mathcal{G}^*$ appartient à l'annulateur de l'idéal dérivé $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ (défini en 3.6 ci-dessus).

3. Si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est semi-simple, on montre (lemme de Whitehead) que tout cocycle symplectique de $\mathcal{G}$ est un cobord. Toute action hamiltonienne Φ est alors fortement hamiltonienne. De plus, on montre aussi que dans ce cas $\mathcal{G}$ est égale à son idéal dérivé . Par suite, le moment fort de Φ est unique, car l'annulateur de l'idéal dérivé de $\mathcal{G}$ est réduit à $\{0\}$.

3.9. Proposition. *Soit (M, Ω) une variété symplectique exacte, c'est-à-dire telle qu'il existe une 1-forme β sur M vérifiant $\Omega = d\beta$. Soit Φ une action d'un groupe de Lie G sur M conservant β, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $g \in G$,*

$$\Phi_g^* \beta = \beta \,.$$

Alors l'action Φ est fortement hamiltonienne et admet pour moment fort l'application J, définie par

$$\big\langle J(x), X \big\rangle = \big\langle \beta(x), X_M(x) \big\rangle \,, \quad x \in M \,, \quad X \in \mathcal{G} \,.$$

Démonstration. Puisque l'action Φ conserve β on a, pour tout $X \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{L}(X_M)\beta = i(X_M)d\beta + di(X_M)\beta = 0 \,,$$

ce qui prouve que $i(X_M)\beta$ est un hamiltonien pour X_M, donc que J, défini par la formule indiquée dans l'énoncé , est un moment. D'autre part on a, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \{J_X, J_Y\} &= \mathcal{L}(X_M)J_Y = \mathcal{L}(X_M)i(Y_M)\beta \\ &= i\big([X_M, Y_M]\big)\beta = J_{[X,Y]} \,, \end{aligned}$$

car $\mathcal{L}(X_M)\beta = 0$. $\square$

3.10. Exemple: relèvement au fibré cotangent. Soit $\Phi : G \times N \to N$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable N. Pour tout $g \in G$ on désigne par $\widehat{\Phi}_g$ l'isomorphisme du fibré cotangent T^*N sur lui-même

$$\widehat{\Phi}_g = {}^t(T\Phi_{g^{-1}}) \,.$$

D'après la proposition 4.3 du chapitre II, pour tout $g \in G$, $\widehat{\Phi}_g$, ainsi défini, est un symplectomorphisme de $(T^*N, d\alpha)$, qui conserve la forme de Liouville α de T^*N. On vérifie d'autre part que, pour tous g_1 et $g_2 \in G$,

$$\widehat{\Phi}_{g_1} \circ \widehat{\Phi}_{g_2} = \widehat{\Phi}_{g_1 g_2} \,.$$

Donc $\widehat{\Phi} : G \times T^*N \to T^*N$ est une action hamiltonienne de G sur $(T^*N, d\alpha)$, appelée *relèvement canonique au fibré cotangent* de l'action Φ. D'après la proposition précédente, cette action est fortement hamiltonienne et admet pour moment fort

$$\begin{aligned} \big\langle J(\xi), X \big\rangle &= \big\langle \alpha(\xi), X_{T^*N}(\xi) \big\rangle \\ &= \Big\langle \xi, X_N\big(q(\xi)\big) \Big\rangle \,. \end{aligned}$$

On a noté $q : T^*N \to N$ la projection canonique. La seconde expression ci-dessus de J résulte en effet de la définition de la forme de Liouville α, et du fait que le champ fondamental X_{T^*N} sur T^*N, pour l'action $\widehat{\Phi}$, est projetable par q sur N et a pour projection le champ fondamental X_N (pour l'action Φ de G sur N).

4. Propriétés élémentaires du moment

4.1. Proposition. *Soit Φ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, Ω), admettant un moment J. Pour tout point $x \in M$, la transposée de l'application linéaire $T_x J : T_x M \to \mathcal{G}^*$ est l'application de $\mathcal{G}$ dans $T_x^* M$: $X \mapsto -i(X_M)\Omega(x)$.*

Démonstration. D'après la définition du moment, pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M a pour hamiltonien $X \circ J$. On a donc

$$i(X_M)\Omega = -d(X \circ J)\,,$$

donc, pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_x M$,

$$\big\langle i(X_M)\Omega(x), v\big\rangle = -\big\langle T_x J(v), X\big\rangle\,,$$

ce qui exprime la propriété indiquée. □

4.2. Conséquences.

1. Pour tout $x \in M$, l'image de $T_x J$ est l'annulateur $\mathcal{G}_x^0$ de l'algèbre d'isotropie $\mathcal{G}_x$ du point x, qui par définition est

$$\mathcal{G}_x = \big\{\, X \in \mathcal{G} \;\big|\; X_M(x) = 0 \,\big\}\,.$$

L'image de $T_x J$ est en effet l'annulateur du noyau de l'application transposée.

De même, le noyau de $T_x J$ est l'orthogonal symplectique $\operatorname{orth}\Big(T_x\big(\Phi(G,x)\big)\Big)$ de l'espace tangent en x à l'orbite $\Phi(G,x)$ passant par ce point. C'est en effet l'annulateur de l'image de l'application transposée.

2. Pour tout point $x \in M$, le rang de l'application linéaire $T_x J$ est égal à la dimension de l'orbite $\Phi(G,x)$. Ce rang est en effet

$$\dim M - \dim(\ker T_x J) = \dim\big(\operatorname{orth}(\ker T_x J)\big) = \dim\Big(T_x\big(\Phi(G,x)\big)\Big)\,.$$

En particulier, J est une submersion au point x si et seulement si l'orbite $\Phi(G,x)$ est de même dimension que G, c'est-à-dire si et seulement si le groupe d'isotropie de x:

$$G_x = \big\{\, g \in G \;\big|\; \Phi(g,x) = x \,\big\}$$

est de dimension nulle, c'est-à-dire discret.

De même, $T_x J$ est nulle si et seulement si l'action Φ, restreinte à la composante neutre de G (composante connexe contenant l'élément neutre), laisse le point x fixe.

3. Si toutes les orbites de Φ sont de même dimension, le rang de TJ est constant sur M. Les sous-fibrés vectoriels $\mathcal{F}$, tangent aux orbites de l'action Φ (engendré par les valeurs des champs de vecteurs fondamentaux) et $\ker(TJ)$, sont orthogonaux symplectiques l'un de

l'autre, et tous deux complètement intégrables. On a dans ce cas un exemple de la situation étudiée au paragraphe 3.8 du chapitre III.

4.3. Théorème de Noether. *Soit Φ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M,Ω) admettant un moment J. Soit H une fonction différentiable sur M, invariante par l'action Φ, c'est-à-dire vérifiant, pour tous $g \in G$, $x \in M$,*

$$H\big(\Phi(g,x)\big) = H(x)\,.$$

Alors le moment J est constant sur chaque courbe intégrale du champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{G}$, et $t \mapsto x(t)$ une courbe intégrale de X_H. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\langle J\big(x(t)\big), X\Big\rangle &= \Big\langle T_{x(t)}J\big(X_H\big(x(t)\big)\big), X\Big\rangle\\ &= i(X_H)dJ_X\big(x(t)\big)\\ &= -\Omega\big(X_M, X_H\big)\big(x(t)\big)\\ &= -i(X_M)dH\big(x(t)\big)\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

car H est invariante par l'action Φ. □

4.4. Généralisation du théorème de Noether. *Soient Φ_1 et Φ_2 deux actions hamiltoniennes de deux groupes de Lie connexes G_1 et G_2 sur une même variété symplectique (M,Ω), admettant des moments $J_1 : M \to \mathcal{G}_1^*$ et $J_2 : M \to \mathcal{G}_2^*$. Le moment J_1 est constant sur chaque orbite de l'action Φ_2 si et seulement si le moment J_2 est constant sur chaque orbite de l'action Φ_1. Lorsque c'est le cas, les actions Φ_1 et Φ_2 commutent, c'est-à-dire vérifient, pour tous $x \in M$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$,*

$$\Phi_1\big(g_1, \Phi_2(g_2,x)\big) = \Phi_2\big(g_2, \Phi_1(g_1,x)\big)\,.$$

Démonstration. Soient $X_1 \in \mathcal{G}_1$ et $X_2 \in \mathcal{G}_2$. On montre comme ci-dessus que

$$i(X_{1\,M})d(X_2 \circ J_2) = \Omega(X_{1\,M}, X_{2\,M}) = \{X_1 \circ J_1, X_2 \circ J_2\} = -i(X_{2\,M})d(X_1 \circ J_1)\,.$$

On voit donc que $X_1 \circ J_1$ est constant sur chaque courbe intégrale de $X_{2\,M}$ si et seulement si $X_2 \circ J_2$ est constant sur chaque courbe intégrale de $X_{1\,M}$. Lorsque c'est le cas, $[X_{1\,M}, X_{2\,M}] = 0$, donc les flots de ces deux champs de vecteurs commutent. Lorsque c'est le cas pour tous $X_1 \in \mathcal{G}_1$, $X_2 \in \mathcal{G}_2$, les actions Φ_1 et Φ_2 commutent. □

4.5. Remarques.

1. Le lecteur pourra prouver, à titre d'exercice, que si G_2 est connexe (G_1 ne l'étant pas nécessairement) et si J_2 est constant sur chaque orbite de l'action Φ_1, alors J_1 est constant sur chaque orbite de l'action Φ_2, et les deux actions Φ_1 et Φ_2 commutent.

2. Plaçons-nous dans les hypothèses de 4.4, le moment de chaque action étant constant sur chaque orbite de l'autre action. Si l'une des deux actions, par exemple Φ_1, est simple, c'est-à-dire si l'ensemble P_1 de ses orbites possède une structure de variété telle que la projection $\pi_1 : M \to P_1$ soit une submersion, l'action Φ_2 passe au quotient en une action $\widetilde{\Phi}_2$ de G_2 sur P_1. De plus, il existe une application $\widetilde{J}_2 : P_2 \to \mathcal{G}_2$ unique telle que

$$J_2 = \widetilde{J}_2 \circ \pi_1 .$$

On sait que P_1 possède une structure de Poisson unique telle que π_1 soit une application de Poisson. On vérifie alors que l'action $\widetilde{\Phi}_2$ est hamiltonienne pour cette structure de Poisson et admet pour moment $\widetilde{J}_2$. (On n'a pas énoncé formellement la définition d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété de Poisson, ni celle du moment d'une telle action, mais ces définitions sont pratiquement les mêmes que dans le cas d'une variété symplectique).

5. Équivariance du moment

5.1. Lemme. *Soit A une représentation linéaire d'un groupe de Lie G dans un espace vectoriel de dimension finie V, et $\theta : G \to V$ une application différentiable. On pose, pour tous $g \in G$ et $v \in V$,*

$$a(g, v) = A_g(v) + \theta(g) .$$

L'application $a : G \times V \to V$ ainsi définie est une action de G sur V si et seulement si l'application θ vérifie, pour tous g_1 et $g_2 \in G$,

$$\theta(g_1 g_2) = A_{g_1}\big(\theta(g_2)\big) + \theta(g_1) . \qquad (*)$$

Lorsque cette condition est satisfaite, on dit que θ est un 1-cocycle de G à valeurs dans V, associé à la représentation A, et que a est une action affine de G sur V ayant pour partie linéaire la représentation A.

Démonstration. Exprimons que a est une action, en écrivant que pour tous g_1 et $g_2 \in G$, et tout $v \in V$,

$$a(g_1 g_2, v) = a\big(g_1, a(g_2, v)\big) .$$

En tenant compte de l'expression de a, on vérifie que cette condition est satisfaite si et seulement si θ vérifie $(*)$, pour tous g_1 et $g_2 \in G$. $\square$

5.2. Théorème. *Soit Φ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique connexe (M, Ω), admettant un moment J. Il existe une action affine unique $a : G \times \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$, ayant pour partie linéaire l'action coadjointe, c'est-à-dire de la forme*

$$a(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^* \xi + \theta(g) , \qquad (**)$$

qui rend le moment J équivariant, c'est-à-dire qui vérifie, pour tous $g \in G$, $x \in M$,

$$J\big(\Phi(g, x)\big) = a\big(g, J(x)\big) = \mathrm{Ad}_g^*\big(J(x)\big) + \theta(g) .$$

Le cocycle $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ est dit associé au moment J.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{G}$. Le champ fondamental associé X_M est hamiltonien, et admet pour hamiltonien $J_X = \langle J, X\rangle$. Soit $g \in G$. L'image directe $(\Phi_{g^{-1}})_* X_M$ de X_M par le symplectomorphisme $\Phi_{g^{-1}}$ est un champ hamiltonien, qui admet pour hamiltonien $J_X \circ (\Phi_{g^{-1}})^{-1} = \langle J \circ \Phi_g, X\rangle$. Mais d'après la propriété 2.4.4, $(\Phi_{g^{-1}})_* X_M$ est le champ fondamental associé à l'élément $\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X$ de $\mathcal{G}^*$. Il admet donc pour hamiltonien $\langle J, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\rangle = \langle \mathrm{Ad}_g^* \circ J, X\rangle$. La différence de ces deux hamiltoniens est une fonction localement constante (donc constante, puisqu'on a supposé M connexe) sur la variété M. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{G}$, on voit que

$$\theta(g) = J \circ \Phi_g - \mathrm{Ad}_g^* \circ J$$

est constante sur M (mais dépend évidemment de l'élément g de G considéré). L'application $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ ainsi définie est évidemment différentiable.

Soient g_1 et g_2 deux éléments de G. On a

$$\begin{aligned}
\theta(g_1 g_2) &= J\big(\Phi(g_1 g_2, x)\big) - \mathrm{Ad}^*_{g_1 g_2} J(x) \\
&= J\Big(\Phi\big(g_1, \Phi(g_2, x)\big)\Big) - \mathrm{Ad}^*_{g_1} \circ \mathrm{Ad}^*_{g_2} J(x) \\
&= \theta(g_1) + \mathrm{Ad}^*_{g_1}\Big(J\big(\Phi(g_2, x)\big) - \mathrm{Ad}^*_{g_2} J(x)\Big) \\
&= \theta(g_1) + \mathrm{Ad}^*_{g_1} \theta(g_2)\,.
\end{aligned}$$

L'application θ est donc un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathcal{G}^*$, pour la représentation coadjointe. D'après le lemme 5.1, l'application $a : G \times \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ définie par l'expression $(**)$ est une action affine de G sur $\mathcal{G}^*$, qui par construction rend J équivariant. □

5.3. Proposition. *La différentielle à l'élément neutre $T_e\theta$ du 1-cocycle θ associé au moment J vérifie, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,*

$$\big\langle T_e\theta(X), Y\big\rangle = \Theta(X, Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\}\,,$$

où Θ est le cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ défini en 3.6.4.

Démonstration. Pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$, et tout $x \in M$, on a

$$\begin{aligned}
\{J_X, J_Y\}(x) &= \Omega(X_M, Y_M)(x) \\
&= i(X_M) d\big(\langle J, Y\rangle\big)(x) \\
&= \frac{d}{dt}\Big\langle J\big(\Phi_{\exp(-tX)}(x)\big), Y\Big\rangle\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Big\langle \mathrm{Ad}^*_{\exp(-tX)} J(x) + \theta\big(\exp(-tX)\big), Y\Big\rangle\Big|_{t=0} \\
&= \big\langle J(x), [X, Y]\big\rangle - \big\langle T_e\theta(X), Y\big\rangle\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat indiqué. □

5.4. Quelques propriétés des cocycles θ et Θ.

1. On a vu (paragraphe 3.8.2) que si l'on remplace le moment J par $J' = J + \mu$, avec $\mu \in \mathcal{G}^*$ constante, le cocycle Θ de $\mathcal{G}$ est remplacé par Θ', défini par

$$\Theta'(X,Y) = \Theta(X,Y) + \big\langle \mu, [X,Y] \big\rangle .$$

On voit de même que le cocycle θ de G est remplacé par θ', défini par

$$\theta'(g) = \theta(g) + \mu - \operatorname{Ad}^*_g \mu .$$

L'application $g \mapsto \mu - \operatorname{Ad}^*_g \mu$ est appelée un *cobord* du groupe G à valeurs dans $\mathcal{G}^*$.

2. Dans l'identité, vérifiée par θ,

$$\theta(g_1 g_2) = \operatorname{Ad}^*_{g_1} \theta(g_2) + \theta(g_1) ,$$

faisons $g_1 = g_2 = e$. On obtient $\theta(e) = 2\theta(e)$, donc

$$\theta(e) = 0 .$$

Faisons maintenant $g_1 = g^{-1}$, $g_2 = g$. On obtient

$$\theta(g^{-1}) = -\operatorname{Ad}^*_{g^{-1}} \theta(g) .$$

En calculant $\theta(g_1 g_2 g_1^{-1})$, on obtient

$$\theta(g_1 g_2 g_1^{-1}) = -\operatorname{Ad}^*_{g_1 g_2 g_1^{-1}} \theta(g_1) + \operatorname{Ad}^*_{g_1} \theta(g_2) + \theta(g_1) .$$

Soient Y et Z deux éléments de $\mathcal{G}$. Faisons dans l'expression ci-dessus $g_2 = \exp(tY)$, et couplons avec Z. Puis dérivons par rapport à t, et faisons $t = 0$. Compte tenu de $g_1 \exp(tY) g_1^{-1} = \exp(t \operatorname{Ad}_{g_1} Y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \big\langle \Theta(\operatorname{Ad}_{g_1} Y), Z \big\rangle &= -\big\langle \theta(g_1), \frac{d}{dt}\big(\operatorname{Ad}_{g_1 \exp(-tY) g_1^{-1}} Z\big)\big|_{t=0} \big\rangle + \big\langle \Theta(Y), \operatorname{Ad}_{g_1^{-1}} Z \big\rangle \\ &= \big\langle \theta(g_1), [\operatorname{Ad}_{g_1} Y, Z] \big\rangle + \big\langle \Theta(Y), \operatorname{Ad}_{g_1^{-1}} Z \big\rangle . \end{aligned}$$

Soit maintenant X un troisième élément de $\mathcal{G}$. Faisons dans l'expression ci-dessus $g_1 = \exp(sX)$, dérivons par rapport à s et faisons $s = 0$. On obtient

$$\big\langle \Theta([X,Y]), Z \big\rangle = \big\langle \Theta(X), [Y,Z] \big\rangle + \big\langle \theta(e), \big[[X,Y], Z\big] \big\rangle + \big\langle \Theta(Y), -[X,Z] \big\rangle ,$$

ou, compte tenu de $\theta(e) = 0$ et de l'antisymétrie de Θ,

$$\Theta\big([X,Y], Z\big) + \Theta\big([Y,Z], X\big) + \Theta\big([Z,X], Y\big) = 0 .$$

Cette formule avait été annoncée paragraphe 3.8.1. On verra plus loin (paragraphes 5.5 à 5.7) qu'elle a une interprétation simple, en termes d'actions affines de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur son dual $\mathcal{G}^*$.

3. Le cocycle Θ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ peut être interprété de plusieurs manières:

– Considéré comme une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans son dual $\mathcal{G}^*$, Θ est un 1-cocycle de $\mathcal{G}$, à valeurs dans $\mathcal{G}^*$, pour la représentation coadjointe (voir la définition de cette notion paragraphe 5.6). En raison de son antisymétrie

$$\big\langle \Theta(X), Y \big\rangle + \big\langle \Theta(Y), X \big\rangle = 0\,,$$

on dit que c'est un 1-cocycle *symplectique*.

– Considéré comme une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{G}$, Θ est un 2-cocycle de $\mathcal{G}$ à valeurs réelles, pour la représentation triviale. Pour la définition de cette notion (qui ne sera pas utilisée dans ce cours), voir tout ouvrage traitant de la cohomologie des groupes et des algèbres de Lie, par exemple P. J. Hilton et U. Stammbach, "A course in homological algebra", Springer Verlag, New York, 1970.

– Enfin Θ peut être considéré comme une 2-forme différentielle invariante à gauche sur le groupe de Lie G. On va voir que cette forme est fermée. D'après une formule bien connue exprimant la différentielle extérieure d'une forme, on a pour tout triplet (X, Y, Z) de champs de vecteurs sur G,

$$\begin{aligned} d\Theta(X,Y,Z) = {} & X.\Theta(Y,Z) + Y.\Theta(Z,X) + Z.\Theta(X,Y) \\ & - \Theta\big([X,Y],Z\big) - \Theta\big([Y,Z],X\big) - \Theta\big([Z,X],Y\big)\,. \end{aligned}$$

Mais on peut supposer les champs X, Y et Z invariants à gauche. Dans ce cas, les trois premiers termes sont nuls car $\Theta(Y,Z)$, $\Theta(Z,X)$ et $\Theta(X,Y)$ sont des constantes. La somme des trois derniers termes est nulle d'après l'identité démontrée en 5.4.2. Pour tout point $g \in G$ et tout triplet de vecteurs (u, v, w) tangents à G en ce point, on peut trouver trois champs de vecteurs invariants à gauche X, Y, Z prenant en g les valeurs u, v, w, respectivement. On voit donc que $d\Theta(g) = 0$. Mais $g \in G$ étant quelconque, on a bien prouvé que $d\Theta = 0$. De ce point de vue, Θ est un 2-cocycle pour la cohomologie de De Rham sur G (cohomologie définie au moyen des formes différentielles). Comme de plus Θ est invariante à gauche, c'est en fait un 2-cocycle de la cohomologie de De Rham invariante à gauche sur G.

4. L'application linéaire $T_g\theta$ tangente à θ en un point quelconque g de G peut s'exprimer au moyen de $\Theta = T_e\theta$. Soit $X \in \mathcal{G}$, et $g \in G$. Dans l'identité

$$\theta(g_1 g_2) = \mathrm{Ad}^*_{g_1}\, \theta(g_2) + \theta(g_1)\,,$$

faisons $g_1 = g$, $g_2 = \exp(tX)$, puis dérivons par rapport à t, et faisons $t = 0$. On obtient

$$T_g\theta(TL_g X) = \mathrm{Ad}^*_g\big(\Theta(X)\big)\,,$$

d'où l'on déduit

$$T_g\theta = \mathrm{Ad}^*_g \circ \Theta \circ TL_{g^{-1}}\,.$$

5. Le moment J est équivariant pour l'action coadjointe de G sur $\mathcal{G}^*$ si et seulement si le cocycle θ est identiquement nul. Lorsque c'est le cas, Θ est nul aussi (puisque $\Theta = T_e\theta$)

donc, d'après 3.6.4, l'action Φ est fortement hamiltonienne, et le moment J est fort. De même, en remplaçant le moment J par $J' = J + \mu$, où $\mu \in \mathcal{G}^*$ est une constante, on obtient un moment J' équivariant pour l'action coadjointe si et seulement si θ est un cobord de G (voir 5.4.1). Lorsque c'est le cas, Θ est un cobord de $\mathcal{G}$, et l'action Φ est fortement hamiltonienne.

Réciproquement, supposons l'action Φ fortement hamiltonienne et le moment J fort (on sait que c'est le cas si et seulement si Θ est nul). L'expression de $T_g\theta$ obtenue en 5.4.4 montre alors que $T_g\theta$ est nul pour tout point $g \in G$. Par suite, θ est constant sur chaque composante connexe de G. Si de plus G est connexe, θ est identiquement nul (puisque $\theta(e) = 0$), et le moment J est équivariant pour l'action coadjointe.

5.5 Actions affines d'une algèbre de Lie. Afin d'établir l'analogue infinitésimal du lemme 5.1, on va introduire quelques notions relatives aux représentations linéaires et aux actions affines d'algèbres de Lie. Une *représentation linéaire* d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (de dimension finie) dans un espace vectoriel V (de dimension finie) est un homomorphisme H de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(V, V)$ des endomorphismes linéaires de V, la loi de composition étant le commutateur

$$[f_1, f_2] = f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1 \,, \quad f_1 \text{ et } f_2 \in \mathcal{L}(V, V)\,.$$

On a donc, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$H\big([X, Y]\big) = \big[H(X), H(Y)\big] = H(X) \circ H(Y) - H(Y) \circ H(X)\,.$$

La loi de composition (commutateur) de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(V, V)$ peut être interprétée de manière géométrique. Toute application différentiable de V dans V, en particulier toute application linéaire, peut être considérée comme un champ de vecteurs sur V. Soient f_1 et f_2 deux applications linéaires de V dans V. On vérifie aisément que leur crochet, lorsqu'on les considère comme des champs de vecteurs sur V, est le champ de vecteurs $-(f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1)$. Le commutateur $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1$ définit donc sur $\mathcal{L}(V, V)$ la structure d'algèbre de Lie *opposée* de celle définie par le crochet des champs de vecteurs.

Soit $\mathcal{A}(V, V)$ l'espace vectoriel des applications affines de V dans V, de la forme

$$f(v) = a(v) + b\,, \quad v \in V\,,$$

où $a \in \mathcal{L}(V, V)$, $b \in V$. Il existe sur cet espace une structure naturelle d'algèbre de Lie, qui prolonge celle de $\mathcal{L}(V, V)$. La loi de composition de cette algèbre est la suivante. Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathcal{A}(V, V)$, ayant pour expressions

$$f_1(v) = a_1(v) + b_1\,, \quad f_2(v) = a_2(v) + b_2\,,$$

avec a_1 et $a_2 \in \mathcal{L}(V, V)$, b_1 et $b_2 \in V$, on définit $[f_1, f_2]$ en posant

$$[f_1, f_2](v) = (a_1 \circ a_2 - a_2 \circ a_1)(v) + a_1(b_2) - a_2(b_1)\,.$$

On vérifie aisément que cette loi de composition est opposée de celle donnée par le crochet des champs de vecteurs, lorsqu'on considère f_1 et f_2 comme des champs de vecteurs sur V.

Une *action affine* (ou *représentation affine*) de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur l'espace vectoriel V est alors un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{A}(V,V)$ des applications affines de V dans V, la loi de composition de cette algèbre étant celle précisée ci-dessus.

Nous pouvons maintenant énoncer l'équivalent du lemme 5.1 pour les actions affines d'algèbres de Lie.

5.6. Lemme. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et V un espace vectoriel, tous deux de dimension finie. Une application $h : \mathcal{G} \to \mathcal{A}(V,V)$ est une action affine de $\mathcal{G}$ sur V si et seulement si elle est de la forme*

$$h(X)(v) = H(X)(v) + \Theta(X)\,, \tag{$*$}$$

où $H : \mathcal{G} \to \mathcal{L}(V,V)$ est une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans V, et $\Theta : \mathcal{G} \to V$ une application linéaire qui vérifie, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$\Theta\big([X,Y]\big) = H(X)\big(\Theta(Y)\big) - H(Y)\big(\Theta(X)\big)\,. \tag{$**$}$$

Une application linéaire $\Theta : \mathcal{G} \to V$ qui vérifie cette identité est appelée un 1-cocycle de $\mathcal{G}$ à valeurs dans V, pour la représentation linéaire H.

Démonstration. Toute application linéaire h de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{A}(V,V)$ est nécessairement de la forme $(*)$, H étant une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{L}(V,V)$, et Θ une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans V. L'application linéaire h est une action affine de $\mathcal{G}$ sur V si et seulement si, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$, $h\big([X,Y]\big)$ est égal à $\big[h(X), h(Y)\big]$. Compte tenu de l'expression du crochet dans $\mathcal{A}(V,V)$, on voit que c'est le cas si et seulement si H et Θ vérifient, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$H\big([X,Y]\big) = H(X) \circ H(Y) - H(Y) \circ H(X)\,,$$

ce qui exprime que H est une représentation linéaire, et

$$\Theta\big([X,Y]\big) = H(X)\big(\Theta(Y)\big) - H(Y)\big(\Theta(X)\big)\,,$$

ce qui exprime que Θ est un 1-cocycle. $\square$

5.7. Remarques.

1. Le lemme 5.1 nous donne une interprétation simple des cobords. Considérons en effet deux actions affines a_1 et a_2 du groupe de Lie G sur l'espace vectoriel V, ayant même partie linéaire A. Elles sont donc de la forme

$$a_1(g,v) = A_g(v) + \theta_1(g)\,, \qquad a_2(g,v) = A_g(v) + \theta_2(g)\,,$$

où θ_1 et θ_2 sont deux cocycles de G. Ces deux actions sont dites *conjuguées par une translation* s'il existe un élément μ de V, tel que l'on ait, pour tous $g \in G$, $v \in V$,

$$a_1(g, v+\mu) = a_2(g,v) + \mu\,.$$

On voit aisément que c'est le cas si et seulement si $\theta_1 - \theta_2$ vérifie, pour tout $g \in G$,

$$(\theta_1 - \theta_2)(g) = \mu - A_g(\mu)\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si $\theta_1 - \theta_2$ est un cobord (l'élément μ auquel est associé ce cobord donnant la translation de V qui conjugue a_1 et a_2).

En partant du lemme 5.6, on obtient une interprétation tout à fait analogue des 1-cocycles de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$: les actions affines h_1 et h_2 de $\mathcal{G}$ sur V, associées à une même représentation linéaire H, sont dites *conjuguées par une translation* s'il existe un élément μ de V tel que, pour tous $X \in \mathcal{G}$, $v \in V$,

$$h_1(X)(v) = h_2(X)(v + \mu)\,.$$

On vérifie aisément que c'est le cas si et seulement si les cocycles Θ_1 et Θ_2, associés respectivement à h_1 et h_2, vérifient, pour tout $X \in \mathcal{G}$,

$$(\Theta_1 - \Theta_2)(X) = H(X)(\mu)\,.$$

Cette identité exprime que $\Theta_1 - \Theta_2$ est un *cobord* de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On verra ci-dessous que dans le cas où $V = \mathcal{G}^*$ et où H est la représentation coadjointe, on retrouve l'identité obtenue au paragraphe 3.8.2.

2. Soit a une action affine (au sens de 5.1) d'un groupe de Lie G sur un espace vectoriel V, ayant pour partie linéaire une représentation linéaire A de G dans V, de cocycle associé θ. On peut lui associer, de manière naturelle, une action affine h de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G dans V, en posant, pour tout $X \in \mathcal{G}$,

$$h(X) = -X_V\,.$$

On a noté X_V le champ fondamental associé à X pour l'action affine a. Le champ X_V est en effet un champ affine sur V; il peut donc être considéré comme une application affine de V dans lui-même. On sait que $X \mapsto X_V$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie lorsque le crochet sur l'espace des champs de vecteurs sur V est le crochet usuel des champs de vecteurs. Mais on a vu en 5.5 que $\mathcal{A}(V, V)$ est en fait muni de la structure d'algèbre de Lie opposée, le crochet étant construit au moyen du commutateur. Pour cettte structure d'algèbre de Lie, sur $\mathcal{A}(V, V)$, $X \mapsto h(X) = -X_V$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

On vérifie alors que le cocycle Θ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ correspondant à l'action affine h, n'est autre que

$$\Theta = T_e\theta\,,$$

application linéaire tangente au cocycle θ en l'élément neutre. On voit ainsi que la correspondance $\theta \mapsto \Theta$ mise en évidence dans la proposition 5.3, dans le cas particulier de l'action affine de G sur $\mathcal{G}^*$ qui rend le moment J équivariant, est en fait une propriété générale.

3. Considérons maintenant le cas où V est le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, et où la représentation linéaire A est la représentation coadjointe ad^*. L'identité $(**)$ du lemme 5.6, qui exprime que Θ est un cocycle, s'écrit maintenant

$$\Theta\big([X, Y]\big) = \mathrm{ad}^*_X\big(\Theta(Y)\big) - \mathrm{ad}^*_Y\big(\Theta(X)\big)\,, \quad X \text{ et } Y \in \mathcal{G}\,,$$

ou encore, si Z est un troisième élément de $\mathcal{G}$,

$$\Big\langle \Theta\big([X,Y]\big), Z\Big\rangle = \big\langle \Theta(Y), [Z,X]\big\rangle - \big\langle \Theta(X), [Z,Y]\big\rangle\,.$$

Si, de plus, on identifie l'application linéaire Θ de $\mathcal{G}$ dans son dual à une forme bilinéaire sur $\mathcal{G}$, et si on la suppose antisymétrique, l'identité ci-dessus devient

$$\Theta\big([X,Y],Z\big) + \Theta\big([Y,Z],X\big) + \Theta\big([Z,X],Y\big) = 0\,.$$

C'est l'identité obtenue au paragraphe 5.4.2.

6. Action d'un groupe de Lie sur son fibré cotangent

6.1. Trivialisation du fibré cotangent à un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, T^*G son fibré cotangent, et $q : T^*G \to G$ la projection canonique. On identifie le dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ à la fibre T^*_eG. Pour tout élément g de G, on note $\widehat{L}_g$ et $\widehat{R}_g$ les relèvements canoniques à T^*G des translations à gauche L_g et à droite R_g (voir proposition 4.3 du chapitre II). On définit une application $\pi : T^*G \to \mathcal{G}^*$ en posant, pour tout $z \in T^*G$,

$$\pi(z) = \widehat{L}_{q(z)^{-1}}(z)\,.$$

L'application $(q,\pi) : T^*G \to G \times \mathcal{G}^*$ est un isomorphisme de T^*G sur le fibré trivial $G \times \mathcal{G}^*$, appelé *trivialisation de T^*G par translation à gauche*. On définirait de même une trivialisation de T^*G par translation à droite.

6.2. Lemme. *Soit α la 1-forme de Liouville de T^*G, et $d\alpha$ sa différentielle extérieure. Soit $z \in T^*G$, $x = q(z) \in G$, $\xi = \pi(z) \in \mathcal{G}^*$. Soit $Z_i \in T_z(T^*G)$, $i = 1$ ou 2. On pose*

$$Y_i = TL_{x^{-1}} \circ Tq(Z_i) \in \mathcal{G}\,, \quad \eta_i = T\pi(Z_i) \in \mathcal{G}^*\,.$$

On a alors

$$\big\langle \alpha(z), Z_i\big\rangle = \langle \xi, Y_i\rangle\,.$$
$$d\alpha(z)(Z_1,Z_2) = \langle \eta_1, Y_2\rangle - \langle \eta_2, Y_1\rangle - \big\langle \xi, [Y_1,Y_2]\big\rangle\,.$$

Démonstration. D'après la définition de la forme de Liouville, on a

$$\begin{aligned}\big\langle \alpha(z), Z_i\big\rangle &= \big\langle z, Tq(Z_i)\big\rangle\\ &= \big\langle \widehat{L}_{q(z)^{-1}}(z), TL_{q(z)^{-1}} \circ Tq(Z_i)\big\rangle\\ &= \langle \xi, Y_i\rangle\,.\end{aligned}$$

Pour calculer $d\alpha(Z_1,Z_2)$, on peut supposer que les vecteurs Z_1 et Z_2 sont les valeurs en z de deux champs de vecteurs, également notés Z_1 et Z_2. On peut supposer ces champs choisis

de telle manière que Y_i et η_i, $i = 1$ ou 2, soient des éléments constants, respectivement de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^*$. On a alors

$$d\alpha(Z_1, Z_2) = Z_1.\big(\alpha(Z_2)\big) - Z_2.\big(\alpha(Z_1)\big) - \alpha\big([Z_1, Z_2]\big)\,.$$

Mais $\alpha(Z_2) = \langle \xi, Y_2 \rangle$, donc puisque Y_2 est constant

$$Z_1.\big(\alpha(Z_2)\big) = \langle \eta_1, Y_2 \rangle\,.$$

De même,

$$Z_2.\big(\alpha(Z_1)\big) = \langle \eta_2, Y_1 \rangle\,.$$

Enfin, les champs de vecteurs Z_1 et Z_2 sur T^*G sont projetables par q sur G, et ont pour projection les champs de vecteurs invariants à gauche Y_1 et Y_2. Le crochet $[Z_1, Z_2]$ est donc aussi projetable et a pour projection $[Y_1, Y_2]$ On a donc

$$\big\langle \alpha(z), [Z_1, Z_2](z) \big\rangle = \big\langle \xi, [Y_1, Y_2] \big\rangle\,.$$

La formule indiquée s'en déduit. □

6.3. Structure symplectique sur T^*G. Soit $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ un 1-cocycle symplectique du groupe de Lie G, et $\Theta = T_e\theta$ le cocycle correspondant de $\mathcal{G}$. Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 5.4.3, on peut considérer Θ comme une 2-forme différentielle invariante à gauche et fermée sur G. On munit T^*G de la forme symplectique

$$\Omega = d\alpha + q^*\Theta\,.$$

Un exercice de la feuille d'exercices 1 consiste précisément à prouver que cette forme est partout de rang maximum, donc symplectique.

En faisant $\theta = 0$ on pourra obtenir, en particulier, le cas où T^*G est muni de sa forme symplectique canonique $d\alpha$.

6.4. Deux actions de G sur T^*G. On va définir deux actions, notées Φ_L et Φ_R, de G sur son fibré cotangent T^*G. On montrera qu'elles commutent, qu'elles sont hamiltoniennes et que les espaces tangents en un même point aux orbites de ces deux actions sont orthogonaux symplectiques l'un de l'autre.

Par définition, l'action Φ_L est le relèvement canonique à T^*G de l'action de G sur lui-même par translation à gauche (voir paragraphe 3.10). On a donc, pour tous $g \in G$, $z \in T^*G$,

$$\Phi_L(g, z) = \widehat{L}_g(z)\,.$$

La définition de l'action Φ_R est un peu plus compliquée: c'est une modification, incorporant le cocycle θ, du relèvement canonique à T^*G de l'action de G sur lui-même par translation à droite. Elle est donnée par l'expression

$$\Phi_R(g, z) = \widehat{R}_{g^{-1}}(z) + \widehat{L}_{q(z)g^{-1}}\big(\theta(g)\big)\,.$$

Vérifions que cette formule définit bien une action. Soient g_1 et g_2 deux éléments de G. On a

$$\begin{aligned}
&\Phi_R\big(g_1, \Phi_R(g_2, z)\big) \\
&\quad = \widehat{R}_{g_1^{-1}}\Big(\widehat{R}_{g_2^{-1}}(z) + \widehat{L}_{q(z)g_2^{-1}}\big(\theta(g_2)\big)\Big) + \widehat{L}_{q(z)g_2^{-1}g_1^{-1}}\big(\theta(g_1)\big) \\
&\quad = \widehat{R}_{(g_1g_2)^{-1}}(z) + \widehat{L}_{q(z)(g_1g_2)^{-1}}\big(\mathrm{Ad}^*_{g_1}\,\theta(g_2) + \theta(g_1)\big) \\
&\quad = \Phi_R(g_1g_2, z)\,.
\end{aligned}$$

Vérifions que les actions Φ_L et Φ_R commutent:

$$\begin{aligned}
\Phi_R\big(g_1, \Phi_L(g_2, z)\big) &= \widehat{R}_{g_1^{-1}} \circ \widehat{L}_{g_2}(z) + \widehat{L}_{g_2q(z)g_1^{-1}}\big(\theta(g_1)\big) \\
&= \widehat{L}_{g_2}\Big(\widehat{R}_{g_1^{-1}}(z) + \widehat{L}_{q(z)g_1^{-1}}\big(\theta(g_1)\big)\Big) \\
&= \Phi_L\big(g_2, \Phi_R(g_1, z)\big)\,.
\end{aligned}$$

Les actions Φ_L et Φ_R ont pour expression, lorsqu'on trivialise T^*G par translation à gauche au moyen de (q, π) (comme indiqué en 6.1):

$$\begin{aligned}
(q,\pi) \circ (\Phi_L)_g \circ (q,\pi)^{-1}(x,\xi) &= (gx, \xi)\,, \\
(q,\pi) \circ (\Phi_R)_g \circ (q,\pi)^{-1}(x,\xi) &= \big(xg^{-1}, \mathrm{Ad}^*_g\,\xi + \theta(g)\big)\,.
\end{aligned}$$

6.5. Proposition. *Lorsqu'on munit T^*G de la forme symplectique*

$$\Omega = d\alpha + q^*\Theta\,,$$

les deux actions Φ_L et Φ_R définies ci-dessus sont symplectiques.

Démonstration. D'après 3.10, l'action Φ_L conserve $d\alpha$, car c'est le relèvement canonique de l'action de G sur lui-même par translation à gauche. Elle conserve aussi $q^*\Theta$, car Θ est invariante à gauche. Elle est donc symplectique.

Le fait que Φ_R est aussi symplectique est moins évident, et peut être vérifié par calcul. Nous en laissons le soin au lecteur. Nous montrerons plus loin que Φ_R est hamiltonienne (ce qui implique symplectique, du moins si G est connexe). □

6.6. Théorème. *L'espace T^*G étant muni de la forme symplectique*

$$\Omega = d\alpha + q^*\Theta\,,$$

les actions Φ_L et Φ_R sont hamiltoniennes, et admettent pour moment, respectivement, J_L et J_R, donnés par les expressions

$$\begin{aligned}
J_L(z) &= -\widehat{R}_{q(z)^{-1}}(z) - \theta\big(q(z)\big) = -\,\mathrm{Ad}^*_{q(z)}\,\pi(z) - \theta\big(q(z)\big)\,, \\
J_R(z) &= \widehat{L}_{q(z)^{-1}}(z) = \pi(z)\,.
\end{aligned}$$

De plus, les orbites $\Phi_L(G, z)$ et $\Phi_R(G, z)$ d'un point $z \in T^*G$ sous chacune de ces actions sont données par

$$\Phi_L(G, z) = J_R^{-1}\big(J_R(z)\big)\,, \quad \Phi_R(G, z) = J_L^{-1}\big(J_L(z)\big)\,.$$

Les espaces tangents en z à ces deux orbites sont orthogonaux symplectiques l'un de l'autre. Le moment J_L est constant sur chaque orbite de l'action Φ_R, et le moment J_R est constant sur chaque orbite de Φ_L.

Démonstration. Soit X un élément de $\mathcal{G}$. On note Z_L et Z_R les champs fondamentaux sur T^*G associés à X, respectivement pour les actions Φ_L et Φ_R. Soit $z \in T^*G$, $x = q(z) \in G$, $\xi = \pi(z) \in \mathcal{G}^*$. D'après l'expression de Φ_L dans la trivialisation (q, π) donnée en 6.4, on a

$$\begin{aligned} Tq\big(Z_L(z)\big) &= \frac{d}{dt}\big(\exp(-tX)x\big)\big|_{t=0} = -TR_x(X) = -TL_x(\mathrm{Ad}_{x^{-1}} X)\,; \\ T\pi\big(Z_L(z)\big) &= 0\,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} Tq\big(Z_R(z)\big) &= \frac{d}{dt}\big(x\exp(tX)\big)\big|_{t=0} = TL_x X\,; \\ T\pi\big(Z_R(z)\big) &= \frac{d}{dt}\Big(\mathrm{Ad}^*_{\exp(-tX)}\,\xi + \theta\big(\exp(-tX)\big)\Big)\Big|_{t=0} = -\,\mathrm{ad}^*_X\,\xi - \Theta(X)\,. \end{aligned}$$

Soit Z_2 un vecteur tangent à T^*G au point z. On pose

$$Tq(Z_2) = TL_x Y_2\,, \quad T\pi(Z_2) = \eta_2\,.$$

D'après l'expression de $d\alpha$ dans la trivialisation de T^*G par translation à gauche donnée en 6.2, et compte tenu de l'expression de Ω, on a

$$\Omega(z)\big(Z_L(z), Z_2\big) = \langle \eta_2, \mathrm{Ad}_{x^{-1}} X\rangle + \big\langle \xi, [\mathrm{ad}_{x^{-1}} X, Y_2]\big\rangle - \Theta(\mathrm{Ad}_{x^{-1}} X, Y_2)\,.$$

De même,

$$\begin{aligned} \Omega(z)\big(Z_R(z), Z_2\big) &= -\big\langle \mathrm{ad}^*_X\,\xi + \Theta(X), Y_2\big\rangle - \langle \eta_2, X\rangle - \big\langle \xi, [X, Y_2]\big\rangle + \Theta(X, Y_2) \\ &= -\langle \eta_2, X\rangle\,. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les expressions de J_L et de J_R données dans l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned} i(Z_2)d\big(\langle J_L, X\rangle\big) &= -\frac{d}{ds}\Big\langle \mathrm{Ad}^*_{x\exp(sY_2)}(\xi + s\eta_2) + \theta\big(x\exp(sY_2)\big), X\Big\rangle\Big|_{s=0} \\ &= -\langle \eta_2, \mathrm{Ad}_{x^{-1}} X\rangle - \big\langle \xi, [\mathrm{Ad}_{x^{-1}} X, Y_2]\big\rangle - \big\langle T_x\theta(TL_x Y_2), X\big\rangle\,. \end{aligned}$$

Mais d'après la formule exprimant $T_x\theta$, pour tout $x \in G$, établie au paragraphe 5.4.4,

$$\big\langle T_x\theta(TL_x Y_2), X\big\rangle = \big\langle \mathrm{Ad}^*_x\,\Theta(Y_2), X\big\rangle = -\Theta(\mathrm{Ad}_{x^{-1}} X, Y_2)\,.$$

On en déduit

$$\Omega(z)\big(Z_L(z), Z_2\big) = -i(Z_2)d\big(\langle J_L, X\rangle\big)(z)\,,$$

ce qui prouve que l'action Φ_L est hamiltonienne et admet J_L pour moment.

De même

$$i(Z_2)d\big(\langle J_R, X\rangle\big)(z) = \frac{d}{ds}\left(\langle \xi + s\eta_2, X\rangle\right)\big|_{s=0} = \langle \eta_2, X\rangle\,,$$

et par suite

$$\Omega(z)\big(Z_R(z), Z_2\big) = -i(Z_2)d\big(\langle J_R, X\rangle\big)(z)\,,$$

ce qui prouve que l'action Φ_R est hamiltonienne et admet J_R pour moment.

Calculons maintenant $J_R^{-1}\big(J_R(z)\big)$:

$$\begin{aligned} J_R^{-1}\big(J_R(z)\big) &= \big\{\, y \in T^*G \mid \pi(y) = \pi(z) \,\big\} \\ &= \big\{\, y \in T^*G \mid y = \widehat{L}_{q(y)q(z)^{-1}}(z) \,\big\} \\ &= \Phi_L(G, z)\,. \end{aligned}$$

De même, en utilisant les propriétés de θ, on peut calculer $J_L^{-1}\big(J_L(z)\big)$:

$$\begin{aligned} J_L^{-1}\big(J_L(z)\big) &= \big\{\, y \in T^*G \mid \widehat{R}_{q(y)^{-1}}y + \theta\big(q(y)\big) = \widehat{R}_{q(z)^{-1}}z + \theta\big(q(z)\big) \,\big\} \\ &= \big\{\, y \in T^*G \mid y = \widehat{R}_{q(z)^{-1}q(y)}z + \widehat{R}_{q(y)}\big(\theta\big(q(z)\big) - \theta\big(q(y)\big)\big) \,\big\} \\ &= \big\{\, y \in T^*G \mid y = \widehat{R}_{q(z)^{-1}q(y)}z + \widehat{L}_{q(y)}\theta\big(q(y)^{-1}q(z)\big) \,\big\} \\ &= \Phi_R(G, z)\,. \end{aligned}$$

Par suite, J_R est constant sur chaque orbite de l'action Φ_L, et J_L est constant sur chaque orbite de l'action Φ_R. D'après les propriétés du moment établies aux paragraphes 4.1 et 4.2, il en résulte que les espaces tangents en z aux orbites $\Phi_L(G, z)$ et $\Phi_R(G, z)$ sont orthogonaux symplectiques l'un de l'autre. □

6.7. Commentaires.

1. Le moment $J_L : T^*G \to \mathcal{G}^*$ est équivariant pour l'action Φ_L de G sur T^*G et l'action $\widetilde{\Phi}_L$ de G sur $\mathcal{G}^*$:

$$(g, \xi) \mapsto \widetilde{\Phi}_L(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^*\,\xi - \theta(g)\,.$$

De même, le moment $J_R : T^*G \to \mathcal{G}^*$ est équivariant pour l'action Φ_R de G sur T^*G et l'action $\widetilde{\Phi}_R$ de G sur $\mathcal{G}^*$:

$$(g, \xi) \mapsto \widetilde{\Phi}_R(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^*\,\xi + \theta(g)\,.$$

On voit donc que les cocycles $-\theta$ et θ associés, respectivement, aux moments J_L et J_R, sont opposés l'un de l'autre.

2. Les deux actions de G sur $\mathcal{G}^*$ qui rendent équivariant, l'une J_L et l'autre J_R, ont une interprétation géométrique très simple. Considérons par exemple le moment J_L (le raisonnement serait le même pour J_R). L'action Φ_L étant libre, J_L est une submersion (paragraphe 4.2.2). D'autre part, le théorème 6.6 montre que l'image réciproque par J_L d'un point de $\mathcal{G}^*$ est une orbite de l'action Φ_R. On voit donc que l'action de Φ_R sur T^*G est simple, que l'ensemble des orbites de cette action s'identifie à $\mathcal{G}^*$, la projection canonique,

associant à chaque point de T^*G son orbite sous l'action Φ_R, étant J_L. Mais d'autre part, on a une autre action hamiltonienne Φ_L de G sur T^*G, qui commute avec l'action Φ_R, et qui applique chaque orbite de Φ_R sur une autre orbite. Elle passe donc au quotient, en une action $\widetilde{\Phi}_L$ de G sur $\mathcal{G}^*$, qui rend J_L équivariant. Cette action $\widetilde{\Phi}_L$, quotient de Φ_L par Φ_R, est celle dont nous avons donné l'expression ci-dessus:

$$(g,\xi) \mapsto \widetilde{\Phi}_L(g,\xi) = \mathrm{Ad}_g^* \xi - \theta(g)\,.$$

3. Si le groupe G est connexe, la situation étudiée ici est exactement celle de la proposition 3.8 du chapitre III. Les sous-fibrés $\mathcal{F}$ et $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ de T^*M tangents aux orbites, respectivement, des actions Φ_L et Φ_R, sont symplectiquement orthogonaux l'un de l'autre, complètement intégrables (leurs variétés intégrales sont les orbites des actions Φ_L et Φ_R, respectivement), et symplectiquement complets. L'ensemble des feuilles de $\mathcal{F}$, ainsi d'ailleurs que l'ensemble des feuilles de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$, s'identifie à $\mathcal{G}^*$. La projection canonique qui associe à chaque point de T^*G la feuille de $\mathcal{F}$ (resp. la feuille de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$) qui passe par ce point est J_R (resp. J_L). On a donc une paire duale, au sens d'A. Weinstein. Par suite, on a sur $\mathcal{G}$ deux structures de Poisson, l'une (quotient de la structure de Poisson de T^*G par le feuilletage engendré par $\mathcal{F}$) pour laquelle J_R est une application de Poisson, et l'autre (quotient de la structure de Poisson de T^*G par le feuilletage engendré par $\operatorname{orth}\mathcal{F}$) pour laquelle J_L est une application de Poisson.

Si le groupe G n'est pas nécessairement connexe, tout ce qui est énoncé ci-dessus reste vrai, à condition de remplacer les feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. de $\operatorname{orth}\mathcal{F}$) par les orbites de l'action Φ_L (resp. de l'action Φ_R), chaque orbite étant la réunion de plusieurs feuilles, une feuille pour chaque composante connexe de G.

On va donner l'expression du crochet de Poisson de deux fonctions sur $\mathcal{G}^*$, pour chacune des deux structures de Poisson mises en évidence ci-dessus.

6.8. Théorème. *Il existe sur $\mathcal{G}^*$ deux structures de Poisson, définies par les formules suivantes, dans lesquelles f et h sont deux fonctions différentiables sur $\mathcal{G}^*$,*

$$\begin{aligned} \{f,h\}_\theta &= \Big\langle \xi, \big[df(\xi), dh(\xi)\big] \Big\rangle - \Theta\big(df(\xi), dh(\xi)\big)\,, \\ \{f,h\}_{-\theta} &= \Big\langle \xi, \big[df(\xi), dh(\xi)\big] \Big\rangle + \Theta\big(df(\xi), dh(\xi)\big)\,, \end{aligned} \tag{$*$}$$

L'application J_R (resp. J_L) est de Poisson lorsqu'on munit $\mathcal{G}^*$ de la structure de Poisson de crochet $\{\ ,\ \}_\theta$ (resp. de crochet $\{\ ,\ \}_{-\theta}$).

De plus, l'action $\widetilde{\Phi}_R$ (resp. $\widetilde{\Phi}_L$) définie en 6.7.1 est hamiltonienne lorsqu'on munit $\mathcal{G}^*$ de la structure de Poisson de crochet $\{\ ,\ \}_\theta$ (resp. de crochet $\{\ ,\ \}_{-\theta}$), et admet pour moment l'application identique de $\mathcal{G}^*$. Les feuilles symplectiques de la variété de Poisson $(\mathcal{G}^*, \{\ ,\ \}_\theta)$ (resp. $(\mathcal{G}^*, \{\ ,\ \}_{-\theta})$) sont les orbites de l'action $\widetilde{\Phi}_R$ (resp. $\widetilde{\Phi}_L$) restreinte à la composante neutre de G.

Démonstration. L'existence et les propriétés de ces deux structures de Poisson ont été établies dans les raisonnements géométriques présentés dans le paragraphe précédent. L'expression du crochet de Poisson $\{\ ,\ \}_\theta$ (resp. $\{\ ,\ \}_{-\theta}$) s'obtient aisément en calculant le crochet de Poisson de deux fonctions sur T^*G invariantes par l'action Φ_L (resp. par l'action

Φ_R), c'est-à-dire composées de J_R (resp. de J_L) et de fonctions différentiables définies sur $\mathcal{G}^*$. Mais la valeur, en un point d'une variété de Poisson, du crochet de Poisson de deux fonctions, ne dépend que des valeurs des différentielles de ces deux fonctions en ce point. On peut donc se ramener au cas où les deux fonctions considérées sur $\mathcal{G}^*$ sont des formes linéaires, c'est-à-dire des éléments X et Y de $\mathcal{G}$. Mais d'après la proposition 5.3, on a puisque le moment J_R est équivariant pour l'action $\widetilde{\Phi}_R$, de cocycle associé θ,

$$\big\{\langle J_R, X\rangle, \langle J_R, Y\rangle\big\} = \big\langle J_R, [X, Y]\big\rangle - \Theta(X, Y)\,.$$

La première formule $(*)$ s'en déduit. La seconde s'obtient de même, en remplaçant J_R, $\widetilde{\Phi}_R$ et θ, respectivement par J_L, $\widetilde{\Phi}_L$ et $-\theta$.

Les valeurs des champs fondamentaux relatifs à l'action $\widetilde{\Phi}_R$ en un point ξ de $\mathcal{G}^*$ engendrent l'espace caractéristique en ce point, pour la structure de Poisson ayant pour crochet $\{\ ,\ \}_\theta$. Par suite, les feuilles symplectiques de cette structure de Poisson sur $\mathcal{G}^*$ sont les composantes connexes des orbites de l'action $\widetilde{\Phi}_R$, c'est-à-dire les orbites de la restriction de cette action à la composante neutre de G. Le même raisonnement s'applique aux champs fondamentaux relatifs à l'action $\widetilde{\Phi}_L$. $\square$

6.9. Corollaire. *On fait $\theta = 0$. Les deux structures de Poisson définies sur $\mathcal{G}$ par le théorème précédent coïncident avec la structure de Lie-Poisson de $\mathcal{G}^*$, introduite au paragraphe 1.2.2 du chapitre III. Les feuilles symplectiques de cette structure de Poisson sont les orbites de la représentation coadjointe, réduite à la composante neutre de G.*

Démonstration. Lorsque $\theta = 0$, l'expression du crochet de Poisson de deux fonctions sur $\mathcal{G}^*$ devient

$$\{f, h\} = \Big\langle \xi, \big[df(\xi), dh(\xi)\big]\Big\rangle\,.$$

C'est bien la structure de Lie-Poisson définie au paragraphe 1.2.2 du chapitre III. Les actions hamiltoniennes $\widetilde{\Phi}_L$ et $\widetilde{\Phi}_R$ coïncident avec l'action coadjointe, qui a donc pour moment l'application identique de $\mathcal{G}^*$. Les valeurs des champs fondamentaux en un point ξ de $\mathcal{G}^*$ engendrent l'espace caractéristique en ce point. Par suite, les feuilles symplectiques de la structure de Lie-Poisson de $\mathcal{G}^*$ sont les composantes connexes des orbites de la représentation coadjointe, c'est-à-dire les orbites de la restriction de l'action coadjointe à la composante neutre de G. $\square$

7. Moment d'une action hamiltonienne et application de Poisson

Revenons au cas où un groupe de Lie G agit, par une action hamiltonienne Φ, sur une variété symplectique connexe (M, Ω). Soit J un moment de cette action. D'après le théorème 5.2, il existe une action affine a de G sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour expression

$$(g, \xi) \mapsto a(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^*(\xi) + \theta(g)\,,$$

pour laquelle le moment J est équivariant.

Mais d'autre part, d'après le théorème 6.8, il existe sur $\mathcal{G}^*$ une structure de Poisson, pour laquelle le crochet de Poisson a pour expression

$$\{f, h\}_\theta(\xi) = \Big\langle \xi, \big[df(\xi), dh(\xi)\big]\Big\rangle - \Theta\big(df(\xi), dh(\xi)\big)\,,$$

pour laquelle l'action a (qui était noté $\widetilde{\Phi}_R$ dans 6.8) est hamiltonienne, et admet pour moment l'application identique de $\mathcal{G}^*$.

On peut maintenant énoncer:

7.1. Théorème. *Dans les hypothèses précisées ci-dessus, le moment $J : M \to \mathcal{G}^*$ est une application de Poisson (lorsqu'on munit M de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique et $\mathcal{G}^*$ de la structure de Poisson ayant pour crochet $\{\ ,\ \}_\theta$).*

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout couple de fonctions différentiables (f, h) sur $\mathcal{G}^*$, on a

$$\{f \circ J, h \circ J\} = \{f, h\}_\theta \circ J\,. \qquad (*)$$

Mais la valeur, en un point d'une variété de Poisson, du crochet de Poisson de deux fonctions, ne dépend que des valeurs des différentielles de ces deux fonctions en ce point. On peut donc se contenter de vérifier la formule $(*)$ ci-dessus dans le cas particulier où f et h sont des formes linéaires sur $\mathcal{G}^*$, c'est-à-dire des éléments X et Y de $\mathcal{G}$. Mais dans ce cas, la formule devient

$$\big\{\langle J, X\rangle, \langle J, Y\rangle\big\} = \{X, Y\}_\theta \circ J = \big\langle J, [X, Y]\big\rangle - \Theta(X, Y)\,,$$

formule qui est bien vérifiée d'après la définition même de Θ. $\square$

7.2. Corollaire. *Soit $X \in \mathcal{G}$. Les champs de vecteurs fondamentaux X_M et $X_{\mathcal{G}^*}$ qui lui correspondent, respectivement sur M et sur $\mathcal{G}^*$, sont hamiltoniens et compatibles par J. Soit x un point de M, $\xi = J(x)$ le point correspondant de $\mathcal{G}^*$, $\mathcal{O}$ l'orbite de ξ, pour l'action affine a de G sur $\mathcal{G}^*$, de cocycle associé θ. On note $\Omega_{\mathcal{O}}$ la forme symplectique de cette orbite (dont chaque composante connexe est une feuille symplectique de $(\mathcal{G}^*, \{\ ,\ \}_\theta)$). On a, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$,*

$$\Omega(X_M, Y_M)(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(X_{\mathcal{G}^*}, Y_{\mathcal{G}^*})(\xi) = \langle \xi, [X, Y]\rangle - \Theta(X, Y)\,.$$

7.3. Corollaire (Kostant, Souriau)**.** *Si l'action hamiltonienne Φ de G sur la variété symplectique connexe (M, Ω) est transitive, $J(M)$ est une orbite de l'action affine a, et le moment J est un symplectomorphisme local, et une application de revêtement, de M sur cette orbite (munie de sa structure symplectique de feuille symplectique de $(\mathcal{G}^*, \{\ ,\ \}_\theta)$).*

On notera que ce dernier corollaire montre que tout espace homogène symplectique hamiltonien connexe d'un groupe de Lie G (c'est-à-dire toute variété symplectique connexe sur laquelle G agit par une action hamiltonienne transitive) s'identifie, par un symplectomorphisme, à un revêtement d'une orbite d'une action affine de G sur $\mathcal{G}^*$ ayant pour partie linéaire l'action coadjointe, dont le cocycle associé est symplectique. La structure symplectique dont est munie cette orbite est celle qu'elle a en tant que feuille symplectique de $\mathcal{G}^*$ muni de la structure de Lie-Poisson modifiée au moyen du cocycle θ. Ce résultat a été obtenu indépendamment par B. Kostant et J.-M. Souriau.

8. Réduction de variétés de niveau du moment

On considère dans ce paragraphe une action hamiltonienne Φ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique connexe (M, Ω). On note J un moment de cette action, et

$$a : (g, \xi) \mapsto a(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^* \xi + \theta(g)$$

l'action affine de G sur $\mathcal{G}^*$ pour laquelle J est équivariant. On a noté θ le cocycle symplectique associé à J.

On rappelle qu'un élément ξ de $\mathcal{G}^*$ est dit *valeur régulière* de J si $T_x J$ est surjective en tout point x de $J^{-1}(\xi)$. Lorsque c'est le cas, $J^{-1}(\xi)$ est une sous-variété de M, et l'espace tangent en un point x à cette sous-variété est $\ker(T_x J)$.

Plus généralement, on dit que $\xi \in \mathcal{G}^*$ est une *valeur faiblement régulière* de J si $J^{-1}(\xi)$ est une sous-variété et si, pour tout point x de $J^{-1}(\xi)$, l'espace tangent en x à cette sous-variété est $\ker(T_x \xi)$.

Une valeur faiblement régulière ξ de $\mathcal{G}^*$ étant donnée, on notera $M_\xi = J^{-1}(\xi)$, et

$$G_\xi = \left\{ g \in G \;\middle|\; a(g, \xi) = \xi \right\}$$

le sous-groupe d'isotropie de ξ, pour l'action a de G sur $\mathcal{G}^*$. On rappelle que G_ξ est un sous-groupe fermé de G, donc (théorème de Cartan) un sous-groupe de Lie, ayant pour algèbre de Lie

$$\mathcal{G}_\xi = \left\{ X \in \mathcal{G} \;\middle|\; X_{\mathcal{G}^*}(\xi) = 0 \right\}.$$

De même, pour tout point x de M, on note

$$G_x = \left\{ g \in G \;\middle|\; \Phi(g, x) = x \right\}$$

le sous-groupe d'isotropie de x pour l'action Φ. C'est un sous-groupe fermé de G, donc un sous-groupe de Lie, ayant pour algèbre de Lie

$$\mathcal{G}_x = \left\{ X \in \mathcal{G} \;\middle|\; X_M(x) = 0 \right\}.$$

8.1. Lemme. *Soit ξ une valeur faiblement régulière de J, $M_\xi = J^{-1}(\xi)$ et G_ξ le sous-groupe d'isotropie de ξ pour l'action affine a. La restriction de l'action Φ à $G_\xi \times M_\xi$ est une action de G_ξ sur M_ξ. Pour tout point x de M_ξ, la dimension du sous-groupe d'isotropie G_x est*

$$\dim G_x = \dim G - \dim M + \dim M_\xi \,;$$

elle ne dépend pas du choix du point x dans M_ξ. Le rang de la forme Ω_{M_ξ} induite par Ω sur M_ξ est

$$\operatorname{rang} \Omega_{M_\xi} = 2 \dim M_\xi + \dim \mathcal{O}_\xi - \dim M \,,$$

où $\mathcal{O}_\xi$ désigne l'orbite du point ξ sous l'action affine a.

Démonstration. En raison de l'équivariance de J, $\Phi(G_\xi, M_\xi) \subset M_\xi$, donc la restriction de Φ à $G_\xi \times M_\xi$ est une action de G_ξ sur M_ξ.

Par hypothèse, M_ξ est une sous-variété de M et pour tout $x \in M_\xi$, $T_x M_\xi = \ker(T_x J)$. Par suite, la dimension de $\ker(T_x J)$ ne dépend pas du choix du point x dans M_ξ. On sait d'autre part (voir paragraphes 4.1 et 4.2) que l'image de $T_x J$ est l'annulateur de l'algèbre d'isotropie $\mathcal{G}_x$ du point x. La dimension de G_x (égale à celle de $\mathcal{G}_x$) ne dépend donc pas du choix du point x dans M_ξ. La dimension de l'image de $T_x J$ est

$$\dim M - \dim \ker(T_x J) = \dim M - \dim M_\xi \,,$$

donc la dimension de G_x est

$$\dim G_x = \dim G - (\dim M - \dim M_\xi) = \dim G - \dim M + \dim M_\xi \,.$$

On sait d'autre part que pour tout $x \in M_\xi$,

$$\ker \Omega_{M_\xi}(x) = T_x M_\xi \cap \big(\mathrm{orth}(T_x M_\xi)\big) = \ker(T_x J) \cap T_x\big(\Phi(G,x)\big) \,.$$

Mais l'espace tangent en x à l'orbite de ce point, $T_x\big(\Phi(G,x)\big)$, est l'ensemble des valeurs en x des champs fondamentaux X_M, avec $X \in \mathcal{G}$. D'après 7.2, chaque champ fondamental X_M sur M seprojette par J sur $\mathcal{G}^*$, et a pour projection le champ fondamental $X_{\mathcal{G}^*}$. Par suite, $X_M(x)$ appartient à $\ker(T_x J)$ si et seulement si $X_{\mathcal{G}^*}\big(J(x)\big)$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si X appartient à $\mathcal{G}_\xi$. On a donc

$$\ker \Omega_{M_\xi}(x) = \ker(T_x J) \cap T_x\big(\Phi(G,x)\big) = T_x\big(\Phi(G_\xi,x)\big) \,,$$

espace tangent en x à l'orbite de ce point sous la restriction de l'action Φ au sous-groupe G_ξ. La dimension du noyau de Ω_{M_ξ} est donc égale à la codimension de G_x dans G_ξ, donc à

$$\dim G_\xi - \dim G_x = \dim G - \dim \mathcal{O}_\xi - \dim G_x = \dim M - \dim M_\xi - \dim \mathcal{O}_\xi \,.$$

Son rang est

$$\mathrm{rang}\, \Omega_{M_\xi} = 2 \dim M_\xi + \dim \mathcal{O}_\xi - \dim M \,.$$

On voit qu'il est constant sur M_ξ. $\square$

8.2. Remarque. Lorsque ξ est une valeur régulière de J, l'action de G sur M est localement libre au voisinage de M_ξ (les orbites des points de M_ξ sont de même dimension que G); cela résulte en effet des propriétés établies en 4.2.2. Le sous-groupe G_x est discret (de dimension nulle). Par suite on a

$$\dim M_\xi = \dim M - \dim G \,,$$

donc

$$\mathrm{rang}\, \Omega_{M_\xi} = \dim M - 2 \dim G + \dim \mathcal{O}_\xi \,.$$

Théorème (J. Marsden et A. Weinstein, K. Meyer)**.** *Soit ξ une valeur faiblement régulière de J, et $M_\xi = J^{-1}(\xi)$. La forme Ω_{M_ξ} induite par Ω sur M_ξ est de rang constant. Son noyau est un sous-fibré complètement intégrable de TM_ξ. Les feuilles du feuilletage de M_ξ qu'il définit sont les composantes connexes des orbites de l'action Φ restreinte à*

$G_\xi \times M_\xi$. Si ce feuilletage est simple, il existe sur la variété Q des feuilles une structure symplectique unique Ω_Q telle que

$$\pi^*\Omega_Q = \Omega_{M_\xi}\,,$$

$\pi : M_\xi \to Q$ désignant la projection canonique. Si d'autre part $H : M \to \mathbf{R}$ est une fonction différentiable invariante par l'action Φ, c'est-à-dire constante sur chaque orbite de cette action, il existe sur Q une fonction différentiable unique $\widehat{H} : Q \to \mathbf{R}$ telle que

$$H\big|_{M_\xi} = \widehat{H} \circ \pi\,.$$

Le champ de vecteurs hamiltonien X_H sur M est tangent à M_ξ, sa restriction à M_ξ est projetable par π sur Q et a pour projection le champ hamiltonien $X_{\widehat{H}}$, ayant $\widehat{H}$ pour hamiltonien.

Démonstration. Le lemme précédent montre que Ω_{M_ξ} est de rang constant sur M_ξ. On peut alors appliquer les théorèmes 7.2 et 7.3 du chapitre II, qui donnent tous les résultats indiqués. $\square$

Chapitre VI

Crochet de Schouten-Nijenhuis et variétés de Poisson

1. Notions générales sur les algèbres Z-graduées et leurs endomorphismes

1.1. Définitions.

1. Une *algèbre* est un espace vectoriel A sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, muni d'une loi de composition bilinéaire, c'est-à-dire d'une application bilinéaire de $A \times A$ dans A, notée $(x, y) \mapsto xy$.

2. Une algèbre A est dite *associative* si sa loi de composition est associative, c'est-à-dire si pour tous x, y et $z \in A$,

$$x(yz) = (xy)z\,.$$

3. Un espace vectoriel E, sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, est dit $\mathbf{Z}$-*gradué* si l'on a défini une famille E^p $(p \in \mathbf{Z})$ de sous-espaces vectoriels de E, telle que

$$E = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} E^p\,.$$

Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, on dit que E^p est le sous-espace des éléments de E *homogènes de degré* p.

4. Soient $E = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} E^p$ et $F = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} F^p$ deux espaces vectoriels $\mathbf{Z}$-gradués. On dit qu'une application linéaire $f : E \to F$ est *homogène de degré* d (avec $d \in \mathbf{Z}$) si pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $f(E^p) \subset F^{p+d}$.

5. Une algèbre A est dite $\mathbf{Z}$-*graduée* si $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ est un espace vectoriel gradué et si, pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$ et tous $x \in A^p$, $y \in A^q$, on a $xy \in A^{p+q}$.

6. Une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ est dite $\mathbf{Z}_2$-*commutative* si, pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$ et tous $x \in A^p$, $y \in A^q$, on a

$$xy = (-1)^{pq} yx\,.$$

L'algèbre A est dite $\mathbf{Z}_2$-*anticommutative* si, pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$ et tous $x \in A^p$, $y \in A^q$, on a

$$xy = -(-1)^{pq} yx\,.$$

1.2. Propriétés et exemples.

1. Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E. La composition usuelle des applications $(f,g) \mapsto f \circ g$ fait de $\mathcal{L}(E,E)$ une algèbre associative.

2. On suppose maintenant l'espace vectoriel E $\mathbf{Z}$-gradué et, pour chaque $p \in \mathbf{Z}$, on note E^p le sous-espace des éléments homogènes de degré p. Pour tout $d \in \mathbf{Z}$, on note A^d l'espace vectoriel des endomorphismes linéaires homogènes de degré d de E, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,E)$ formé par les applications linéaires $f : E \to E$ qui vérifient, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $f(E^p) \subset E^{p+d}$. Soit $A = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}$ la somme directe des A^p. La composition usuelle des applications, $(f,g) \mapsto f \circ g$, fait de A une algèbre associative $\mathbf{Z}$-graduée.

3. Soient E, F et G trois espaces vectoriels $\mathbf{Z}$-gradués, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires homogènes, de degrés respectifs d_1 et d_2. Leur composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire homogène de degré $d_1 + d_2$. Dans le cas particulier où $E = F = G$, on appelle *crochet* des applications linéaires homogènes f et g, de degrés respectifs d_1 et d_2, et on note $[f,g]$, l'application linéaire homogène, de degré $d_1 + d_2$,

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{d_1 d_2} g \circ f\,.$$

1.3. Définitions. Soit A une algèbre et $\omega : A \to A$ un automorphisme involutif de A, c'est-à-dire une application linéaire bijective de A dans elle-même telle que, pour tous x et $y \in A$,

$$\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)\,,$$

et que

$$\omega^2 = \omega \circ \omega = \mathrm{id}_A\ .$$

1. Une *dérivation* de A (relativement à ω) est une application linéaire $\theta : A \to A$ telle que

$$\theta \circ \omega = \omega \circ \theta$$

et que, pour tous x et $y \in A$,

$$\theta(xy) = \big(\theta(x)\big)y + x\big(\theta(y)\big)\,.$$

2. Une *antidérivation* de A (relativement à ω) est une application linéaire $\lambda : A \to A$ telle que

$$\lambda \circ \omega + \omega \circ \lambda = 0$$

et que, pour tous x et $y \in A$,

$$\lambda(xy) = \big(\lambda(x)\big)y + \big(\omega(x)\big)\big(\lambda(y)\big)\,.$$

1.4. Quelques propriétés. Avec les hypothèses et notations de 1.3, soient θ, θ_1 et θ_2 des dérivations, λ, λ_1 et λ_2 des antidérivations de A. On vérifie aisément que

(i) $\theta_1 \circ \theta_2 - \theta_2 \circ \theta_1$, $\lambda_1 \circ \lambda_2 + \lambda_2 \circ \lambda_1$ et $\lambda^2 = \lambda \circ \lambda$ sont des dérivations,

(ii) $\theta \circ \lambda - \lambda \circ \theta$ est une antidérivation.

1.5. Proposition. *Soit $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée. Posons, pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in A^p$,*

$$\omega(x) = (-1)^p x\,.$$

L'application ω ainsi définie sur chaque sous-espace vectoriel A^p de A se prolonge, de manière unique, en un automorphisme involutif ω de A.

La vérification de cette propriété est immédiate.

1.6. Remarque. Les dérivations et antidérivations d'une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ que l'on considère en général sont homogènes, au sens de la définition 1.1.4, et sont relatives à l'automorphisme involutif ω de la proposition 1.5. En tenant compte de la définition de ω, on vérifie aisément qu'un endomorphisme $\theta : A \to A$, homogène de degré d ($d \in \mathbf{Z}$), vérifie

$$\theta \circ \omega = \omega \circ \theta \quad \text{si et seulement si } d \text{ est pair,}$$

et vérifie

$$\theta \circ \omega + \omega \circ \theta = 0 \quad \text{si et seulement si } d \text{ est impair.}$$

C'est pourquoi, lorsque toutes les dérivations et antidérivations que l'on considère sont homogènes et relatives à l'automorphisme involutif ω de 1.5, on utilise souvent, par abus de langage, le mot "dérivation" pour désigner aussi bien les antidérivations que les dérivations. Cela ne risque pas de causer de confusion, car selon que le degré de l'endomorphisme homogène considéré est pair ou impair, on saura si le mot "dérivation" signifie effectivement "dérivation" ou "antidérivation". Avec cette convention de langage, on peut énoncer:

1.7. Définition. Soit $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée et $\theta : A \to A$ un endomorphisme linéaire homogène de degré d. On dit que θ est une *dérivation* de A si, pour tous $p \in \mathbf{Z}$, $x \in A^p$, $y \in A$,

$$\theta(xy) = \big(\theta(x)\big)y + (-1)^{dp} x\big(\theta(y)\big)\,.$$

1.8. Exemples. Comme dans la définition ci-dessus, $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$ est une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée.

1. On pose, pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in A^p$,

$$\mu(x) = px\,.$$

L'application ainsi définie pour les éléments homogènes de A se prolonge par linéarité, de manière unique, en un endomorphisme linéaire de A, encore noté μ. On vérifie aisément que μ est une dérivation de degré 0.

2. Soient θ_1 et θ_2 deux dérivations de A, de degrés respectifs d_1 et d_2. On vérifie aisément que leur crochet,

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1 \circ \theta 2 - (-1)^{d_1 d_2} \theta_2 \circ \theta_1 \,,$$

déjà défini en 1.2.3, est une dérivation de degré $d_1 + d_2$.

1.9. Définitions.

1. Une *algèbre de Lie* est une algèbre A, au sens de la définition 1.1.1, dont la loi de composition, traditionnellement notée $(x, y) \mapsto [x, y]$, vérifie les deux propriétés suivantes.

– Antisymétrie: pour tous x et $y \in A$,

$$[x, y] = -[y, x] \,.$$

– Identité de Jacobi: pour tous x,y et $z \in A$,

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0 \,.$$

2. Une *algèbre de Lie* $\mathbf{Z}$*-graduée* est une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$, au sens de la définition 1.1.5, dont la loi de composition, notée $(x, y) \mapsto [x, y]$, vérifie les deux propriétés suivantes.

– $\mathbf{Z}_2$-anticommutativité: pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$, $P \in A^p$ et $Q \in A^q$,

$$[P, Q] = -(-1)^{pq} [Q, P] \,.$$

– Identité de Jacobi graduée: pour tous p, q et $r \in \mathbf{Z}$, $P \in A^p$, $Q \in A^q$ et $R \in A^r$,

$$(-1)^{pr} \big[P, [Q, R]\big] + (-1)^{qp} \big[Q, [R, P]\big] + (-1)^{rq} \big[R, [P, Q]\big] = 0 \,.$$

1.10. Exemples et commentaires.

1. Soit A une algèbre associative, dont la loi de composition est notée $(x, y) \mapsto xy$. On définit sur A une autre loi de composition en posant, pour tous x et $y \in A$,

$$[x, y] = xy - yx \,.$$

On vérifie aisément que A muni de cette loi de composition est une algèbre de Lie.

2. La construction ci-dessus s'applique, en particulier, au cas où l'algèbre A est l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel E (exemple 1.2.1).

3. On considère maintenant le cas d'une algèbre associative $\mathbf{Z}$-graduée $A = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} A^p$, dont la loi de composition est notée $(x, y) \mapsto xy$. Pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$, $x \in A^p$, $y \in A^q$, on pose

$$[x, y] = xy - (-1)^{pq} yx \,.$$

L'application ainsi définie lorsque x et y sont des éléments homogènes, se prolonge par bilinéarité, de manière unique, en une loi de composition sur A, encore notée $(x, y) \mapsto [x, y]$. On vérifie aisément que A, muni de cette loi de composition, est une algèbre de Lie graduée.

4. La construction ci-dessus s'applique, en particulier, au cas où, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, A^p est l'espace des endomorphismes linéaires homogènes de degré p d'un espace vectoriel gradué E (exemple 1.2.2).

5. Soit $A = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} A^p$ une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée associative. Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, soit D^p l'espace vectoriel des dérivations homogènes de degré p de A (au sens de la définition 1.7), et soit $D = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} D^p$ la somme directe des D^p. On a vu en 1.8.2 que pour tous p et $q \in \mathbf{Z}$, $x \in D^p$, $y \in D^q$, le crochet

$$[x, y] = xy - (-1)^{pq} yx$$

est élément de D^{p+q}. L'application crochet ainsi définie lorsque x et y sont des dérivations homogènes se prolonge par bilinéarité, de manière unique, en une loi de composition sur D, encore appelée *crochet* et notée $(x, y) \mapsto [x, y]$. On vérifie aisément que D, muni de cette loi de composition, est une algèbre de Lie $\mathbf{Z}$-graduée.

6. Soit A une algèbre de Lie. L'identité de Jacobi indiquée dans les définitions 1.9 peut se mettre sous d'autres formes équivalentes qui mettent mieux en évidence sa signification. Posons, pour tout couple (x, y) d'éléments de A,

$$\mathrm{ad}_x\, y = [x, y]\,.$$

Pour un élément x fixé de A, l'application ad_x est un endomorphisme linéaire de A. Il est facile de voir que compte tenu de l'antisymétrie, l'identité de Jacobi peut se mettre sous les deux formes équivalentes suivantes:

– Pour tous x, y et z éléments de A,

$$\mathrm{ad}_x\big([y, z]\big) = [\mathrm{ad}_x\, y, z] + [y, \mathrm{ad}_x\, z]\,.$$

  En d'autres termes, pour tout $x \in A$, ad_x est une dérivation de l'algèbre de Lie A (au sens de la dfinition 1.3.1, relativement l'application identique, prise comme automorphisme involutif).

– Pour tous x, y et z éléments de A,

$$\mathrm{ad}_{[x,y]}\, z = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y\, z - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x\, z = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] z\,.$$

  En d'autres termes, pour tous x et $y \in A$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}_{[x,y]}$ est égal au crochet $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ des endomorphismes ad_x et ad_y. Ou encore, l'application $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie A dans l'algèbre de Lie des endomorphismes linéaires de A, munie du commutateur comme loi de composition.

7. De même, soit $A = \oplus_{p\in\mathbf{Z}} A^p$ une algèbre de Lie $\mathbf{Z}$-graduée. L'identité de Jacobi graduée indiquée dans les définitions 1.9 peut se mettre sous d'autres formes équivalentes qui mettent mieux en évidence sa signification. Posons, pour tout couple (P, Q) d'éléments de A,

$$\mathrm{ad}_P\, Q = [P, Q]\,.$$

Pour un élément homogène P fixé de A, de degré p, l'application ad_P est un endomorphisme linéaire homogène de degré p de A. Il est facile de voir que compte tenu de la $\mathbf{Z}_2$-anticommutativité de A, l'identité de Jacobi graduée peut se mettre sous les deux formes équivalentes suivantes:

– Pour tous P, Q et R éléments homogènes de A, de degrés respectifs p, q et r,

$$\mathrm{ad}_P\big([Q,R]\big) = [\mathrm{ad}_P\, Q, R] + (-1)^{pq}[Q, \mathrm{ad}_P\, R]\,.$$

En d'autres termes, pour tout $P \in A^p$, ad_P est une dérivation de degré p de l'algèbre de Lie graduée A.

– Pour tous P, Q et R éléments homogènes de A, de degrés respectifs p, q et r,

$$\mathrm{ad}_{[P,Q]}\, R = \mathrm{ad}_P \circ \mathrm{ad}_Q\, R - (-1)^{pq}\, \mathrm{ad}_Q \circ \mathrm{ad}_P\, R = [\mathrm{ad}_P, \mathrm{ad}_Q]R\,.$$

En d'autres termes, pour tous $P \in A^p$ et $Q \in A^q$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}_{[P,Q]}$, homogène de degré $p+q$, est égal au crochet $[\mathrm{ad}_P, \mathrm{ad}_Q]$ des endomorphismes homogènes ad_P et ad_Q, de degrés respectifs p et q. Ou encore, l'application $P \mapsto \mathrm{ad}_P$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie graduée A dans l'algèbre de Lie graduée des endomorphismes linéaires homogènes de A, munie du commutateur comme loi de composition.

2. Algèbres extérieures sur une variété différentiable

Dans tout ce qui suit, M est une variété différentiable de classe C^∞, de dimension n.

2.1. Les algèbres extérieures des formes et des multivecteurs. Pour tout entier $p \geq 1$, on note $A^p(M)$ l'espace des champs de tenseurs contravariants de degré p, antisymétriques, de classe C^∞, et $\Omega^p(M)$ l'espace des formes différentielles extérieures de degré p, de classe C^∞, sur la variété M.

On rappelle qu'un élément P de $A^p(M)$ est une section C^∞ du fibré $\bigwedge^p(TM)$; pour tout point $x \in M$, $P(x)$ est un élément de l'espace $\bigwedge^p(T_xM)$ des formes p-multilinéaires alternées sur l'espace cotangent T_x^*M. L'espace $A^1(M)$ est l'ensemble des champs de vecteurs différentiables, de classe C^∞, sur la variété M. Pour $p > 1$, les éléments de $A^p(M)$ sont parfois appelés *p-multivecteurs*.

De même, un élément η de $\Omega^q(M)$ est une section C^∞ du fibré $\bigwedge^q(T^*M)$; pour tout $x \in M$, $\eta(x)$ est un élément de l'espace $\bigwedge^q(T_x^*M)$ des formes q-multilinéaires alternées sur l'espace tangent T_xM. Les éléments de $\Omega^1(M)$ sont appelés 1-*formes différentielles* ou *formes de Pfaff* sur la variété M.

Par convention, on pose

$$A^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbf{R})\,,$$
$$A^p(M) = \Omega^p(M) = \{0\} \quad \text{si } p < 0.$$
$$A(M) = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} A^p(M)\,, \qquad \Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} \Omega^p(M)\,.$$

On sait d'ailleurs qu'en raison de l'antisymétrie, on a

$$A^p(M) = \Omega^p(M) = \{0\} \quad \text{si } p > n.$$

On peut donc écrire

$$A(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} A^p(M)\,, \qquad \Omega(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)\,.$$

On sait qu'il existe sur $\Omega(M)$ une loi de composition appelée *produit extérieur*, notée $(\eta, \zeta) \mapsto \eta \wedge \zeta$, qui en fait une algèbre associative graduée $\mathbf{Z}_2$-commutative. Si $\eta \in \Omega^p(M)$ et $\zeta \in \Omega^q(M)$ sont deux formes différentielles sur M, de degrés respectifs p et q, $\eta \wedge \zeta \in \Omega^{p+q}(M)$ est la forme différentielle, de degré $p+q$, dont la valeur en chaque point x de M est donnée par la formule

$$\eta \wedge \zeta(x)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S(p,q)} \epsilon(\sigma)\eta(x)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\zeta(x)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})\,. \quad (*)$$

Dans cette expression, $v_1, \ldots, v_{p+q}$ sont des éléments de l'espace tangent T_xM, $S(p,q)$ désigne l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, p+q\}$ qui respectent l'ordre relatif des p premiers et des q derniers éléments, c'est-à-dire qui vérifient

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)\,, \qquad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)\,.$$

On a noté $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ (elle vaut 1 si σ est paire, -1 si σ est impaire).

On définit de même une loi de composition sur $A(M)$, appelée *produit extérieur*, et notée $(P, Q) \mapsto P \wedge Q$. Le produit extérieur d'un élément P de $A^p(M)$ et d'un élément Q de $A^q(M)$ est un élément $P \wedge Q$ de $A^{p+q}(M)$, dont l'expression est donnée par une formule de même forme que $(*)$ ci-dessus (en remplaçant bien entendu dans $(*)$ η par P, ζ par Q, et les vecteurs $v_1, \ldots, v_{p+q}$ par des covecteurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+q}$, éléments de T_x^*M). Avec cette loi de composition, $A(M)$ est une algèbre $\mathbf{Z}$-graduée $\mathbf{Z}_2$-commutative.

2.2. Le couplage de $\Omega(M)$ et $A(M)$. Pour toute forme de Pfaff $\alpha \in \Omega^1(M)$ et tout champ de vecteurs $X \in A^1(M)$, désignons par $\langle \alpha, X \rangle$ la fonction, élément de $C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\langle \alpha, X \rangle(x) = \big\langle \alpha(x), X(x) \big\rangle = \alpha(x)\big(X(x)\big)\,.$$

On a ainsi défini un couplage de $\Omega^1(M)$ avec $A^1(M)$, qui se prolonge, de manière naturelle, en un couplage de $\Omega(M)$ avec $A(M)$, c'est-à-dire en une application $C^\infty(M, \mathbf{R})$-bilinéaire de $\Omega(M) \times A(M)$ dans $C^\infty(M, \mathbf{R})$, notée

$$(\eta, P) \mapsto \langle \eta, P \rangle\,.$$

On a déjà défini cette application dans le cas où $\eta \in \Omega^1(M)$ est une 1-forme et $P \in A^1(M)$ un champ de vecteurs. On considère maintenant le cas où $\eta \in \Omega^q(M)$ et $P \in A^p(M)$ sont des éléments homogènes, de degrés respectifs q et p, décomposables, c'est-à-dire de la forme

$$\eta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q\,, \qquad P = X_1 \wedge \cdots \wedge X_p\,,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des 1-formes, $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs. On pose alors

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q, \\ \text{dét}\big(\langle \alpha_i, X_j \rangle\big) & \text{si } p = q. \end{cases}$$

On remarque que la valeur de $\langle \eta, P \rangle$ en un point ne dépend que des valeurs de P et de η en ce point. On sait d'autre part que localement, au voisinage de chaque point, tout p-multivecteur et toute q-forme s'expriment comme des sommes de p-multivecteurs et de q-formes décomposables. On peut donc, de manière unique, étendre par bilinéarité le couplage ci-dessus défini au cas d'éléments quelconques P de $A(M)$ et η de $\Omega(M)$, pas nécessairement homogènes ni décomposables.

2.3. Remarques.

1. Les deux termes $P \in A(M)$ et $\eta \in \Omega(M)$ jouant des rôles semblables, leur couplage peut être noté indifféremment $\langle P, \eta \rangle$ ou $\langle \eta, P \rangle$.

2. Soit $\eta \in \Omega^p(M)$. Pour tout point $x \in M$, $\eta(x)$ est une forme p-multilinéaire alternée sur l'espace tangent $T_x M$. Par suite, si $X_1, \ldots, X_p$ sont p champs de vecteurs sur M, on peut considérer la fonction C^∞ sur M, notée $\eta(X_1, \ldots, X_p)$, qui à chaque point x de M associe la valeur prise par la p-forme $\eta(x)$ lorsqu'on l'applique aux p vecteurs $X_1(x), \ldots, X_p(x)$, rangés dans cet ordre. Avec la définition du couplage donnée ci-dessus, on a

$$\langle \eta, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \rangle = \eta(X_1, \ldots, X_p)\,.$$

2.4. Le produit intérieur par un champ de vecteurs. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs. Rappelons que pour toute forme différentielle $\eta \in \Omega^p(M)$, de degré $p \geq 1$, on appelle *produit intérieur de η par X*, et on note $i(X)\eta$, la forme extérieure de degré $p-1$ telle que, pour tout $Y_1, \ldots, Y_{p-1} \in A^1(M)$,

$$i(X)\eta(Y_1, \ldots, Y_{p-1}) = \eta(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1})\,.$$

Lorsque la forme η est de degré $p \leq 0$, on a bien sûr

$$i(X)\eta = 0\,.$$

L'application $\eta \mapsto i(X)\eta$ ainsi définie pour les formes homogènes se prolonge de manière unique par linéarité en un endomorphisme de $\Omega(M)$, homogène de degré -1, encore noté $\eta \mapsto i(X)\eta$. On vérifie aisément que pour toute forme $\eta \in \Omega^p(M)$ et toute forme $\zeta \in \Omega(M)$,

$$i(X)(\eta \wedge \zeta) = \big(i(X)\eta\big) \wedge \zeta + (-1)^p \eta \wedge \big(i(X)\zeta\big)\,,$$

ce qui exprime que $i(X)$ est une dérivation de degré -1 de l'algèbre extérieure $\Omega(M)$.

2.5. Le produit intérieur par un élément de $A(M)$. Convenons d'abord de poser, si $f \in A^0(M) = C^\infty(M, \mathbf{R})$ et $\eta \in \Omega(M)$,

$$i(f)\eta = f\eta\,.$$

Le produit intérieur par un élément de $A(M)$ a donc été défini, au paragraphe 2.4 lorsque cet élément est homogène de degré 1, et ci-dessus lorsque cet élément est homogène de degré 0. On vérifie aisément qu'on peut, de manière unique, définir le produit intérieur $i(P)$ par un élément P de $A(M)$ de degré quelconque (ou même éventuellement un élément pas nécessairement homogène), de manière telle que les trois propriétés suivantes soient vérifiées:

— l'application $P \mapsto i(P)$ est une application $C^\infty(M)$-linéaire de $A(M)$ dans l'espace des endomorphismes du $C^\infty(M, \mathbf{R})$-module $\Omega(M)$,

— lorsque P est homogène de degré 0 ou 1, c'est-à-dire lorsque P est une fonction ou un champ de vecteurs, $i(P)$ coïncide avec l'endomorphisme de $\Omega(M)$ déjà défini,

— pour tout $X \in A^1(M)$, tout $P \in A(M)$ et tout $\eta \in \Omega(M)$,

$$i(X \wedge P)\eta = i(X)\big(i(P)\eta\big)\,.$$

2.6. Quelques propriétés et du produit intérieur. Il est facile d'établir les propriétés suivantes.

1. Si $P \in A^p(M)$ est homogène de degré p, $i(P)$ est un endomorphisme de $\Omega(M)$ homogène de degré $-p$. Mais attention! ce n'est en général pas une dérivation.

2. Pour tous P et $Q \in A(M)$ et tout $\eta \in \Omega(M)$, on a

$$i(P \wedge Q)\eta = i(P)\big(i(Q)\eta\big)\,.$$

3. Soient $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p \in A^1(M)$ des champs de vecteurs, $\eta \in \Omega(M)$ une forme; on a

$$i(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p)\eta = i(X_1)i(X_2)\ldots i(X_p)\eta\,.$$

En particulier, si $\eta \in \Omega^p(M)$ est homogène de degré p,

$$i(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p)\eta = \eta(X_p, \ldots, X_2, X_1) = (-1)^{(p-1)p/2}\eta(X_1, X_2, \ldots, X_p)\,.$$

4. Relation entre produit intérieur et couplage. Soient $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $\eta \in \Omega^{p+q}(M)$. On a

$$\big\langle i(P)\eta, Q\big\rangle = (-1)^{(p-1)p/2}\langle \eta, P \wedge Q\rangle\,.$$

Cette formule montre qu'au signe près, le produit intérieur est transposé du produit extérieur.

En particulier, si $P \in A^p(M)$ et $\eta \in \Omega^p(M)$,

$$i(P)\eta = (-1)^{(p-1)p/2}\langle \eta, P\rangle\,.$$

3. Quelques dérivations bien connues

Les hypothèses et notations étant celles du paragraphe précédent, on rappelle ci-dessous les définitions de quelques dérivations bien connues de $\Omega(M)$ et de $A(M)$

3.1. Différentielle extérieure. On sait qu'il existe une dérivation de degré 1 de $\Omega(M)$, appelée *différentielle extérieure*, notée d. C'est l'unique dérivation qui, pour les éléments de $\Omega^0(M)$ (c'est-à-dire les fonctions) coïncide avec la différentielle usuelle, et qui vérifie

$$d^2 = d \circ d = 0\,.$$

3.2. Produit intérieur par un champ de vecteurs. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs. Ainsi qu'on l'a rappelé en 2.4, le produit intérieur par X, $\eta \mapsto i(X)\eta$, est une dérivation de degré -1 de $\Omega(M)$.

3.3. Dérivée de Lie relativement à un champ de vecteurs. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs.

1. Cas des formes différentielles. Le produit intérieur par X, $i(X)$, et la différentielle extérieure, d, sont deux dérivations de $\Omega(M)$, de degrés respectifs -1 et 1. D'après 1.8.2, le crochet $\big[i(X), d\big]$ est une dérivation de degré 0 de $\Omega(M)$, appelée *dérivée de Lie selon* X, et notée $\mathcal{L}(X)$. On a donc (formule de Cartan)

$$\mathcal{L}(X) = \big[i(X), d\big] = i(X)\,d + d\,i(X)\,.$$

La dérivée de Lie selon X peut également être définie au moyen du flot Φ du champ de vecteurs X. On a, pour toute forme $\eta \in \Omega(M)$ et tout $t_0 \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi_t^*\eta)\,\big|_{t=t_0} = \Phi_{t_0}^*\big(\mathcal{L}(X)\eta\big)\,,$$

et en particulier, pour $t_0 = 0$,

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi_t^*\eta)\,\big|_{t=0} = \mathcal{L}(X)\eta\,.$$

On sait que la différentielle extérieure commute avec l'application image réciproque par un difféomorphisme. En particulier, $d \circ \Phi_t^* = \Phi_t^* \circ d$. En dérivant par rapport à t puis en faisant $t = 0$, on en déduit que la dérivée de Lie selon le champ de vecteurs X commute avec la différentielle extérieure:

$$\mathcal{L}(X) \circ d = d \circ \mathcal{L}(X)\,.$$

D'autre part, pour tout $t \in \mathbf{R}$, Φ_t est un difféomorphisme d'un ouvert D_t sur un autre ouvert D_{-t} de M; par suite, l'image réciproque Φ_t^* est un isomorphisme de l'algèbre extérieure des formes différentielles sur D_{-t}, sur l'algèbre extérieure des formes différentielles sur D_t. Autrement dit, si η et ζ sont des formes différentielles sur D_t,

$$\Phi_t^*(\eta \wedge \zeta) = (\Phi_t^*\eta) \wedge (\Phi_t^*\zeta)\,.$$

On en déduit immédiatement, par dérivation par rapport à t,

$$\mathcal{L}(X)(\eta \wedge \zeta) = \big(\mathcal{L}(X)\eta\big) \wedge \zeta + \eta \wedge \big(\mathcal{L}(X)\zeta\big)\,.$$

En d'autres termes, la dérivée de Lie selon X, $\mathcal{L}(X)$, est une dérivation de degré 0 de l'algèbre extérieure $\Omega(M)$.

2. Cas des champs de tenseurs. La formule, indiquée ci-dessus, qui a permis de définir la dérivée de Lie d'une forme différentielle relativement à un champ de vecteurs au moyen du flot de ce champ de vecteurs, reste applicable lorsqu'on remplace la forme différentielle η par un champ de tenseurs de type quelconque sur M. On sait en effet que pour tout $t \in \mathbf{R}$, Φ_t est un difféomorphisme d'un ouvert de M sur un autre ouvert de M; il est donc légitime de considérer l'image réciproque par Φ_t d'un champ de tenseurs Q de type quelconque. On définit alors la *dérivée de Lie* de Q *selon* X en posant

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi_t^* Q)\,\big|_{t=0} = \mathcal{L}(X)Q\,.$$

En utilisant les règles de composition du flot on montre aisément que, pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi_t^* Q)\,\big|_{t=t_0} = \Phi_{t_0}^*\big(\mathcal{L}(X)Q\big)\,.$$

D'autre part, comme ci-dessus pour les formes, pour tout $t \in \mathbf{R}$, Φ_t^* est un isomorphisme de l'algèbre des champs de tenseurs (de tous types) sur D_{-t}, sur l'algèbre des champs de tenseurs sur D_t. On en déduit immédiatement que la dérivée de Lie selon X, $\mathcal{L}(X)$, est une dérivation de degré 0 de l'algèbre des champs de tenseurs sur M.

Par restriction aux champs de multivecteurs (qui sont des champs de tenseurs contravariants antisymétriques), on voit que la dérivée de Lie selon X, $\mathcal{L}(X)$, est une dérivation de degré 0 de l'algèbre extérieure $A(M)$.

3. Cas des champs de vecteurs. En particulier, la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs Y relativement au champ de vecteurs X est un champ de vecteurs $\mathcal{L}(X)Y$, qu'on note aussi $[X, Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et de Y.

3.4. Quelques propriétés.

1. Algèbre de Lie des champs de vecteurs. Sur l'espace $A^1(M)$ des champs de vecteurs, la loi de composition $(X, Y) \mapsto [X, Y] = \mathcal{L}(X)Y$ est antisymétrique, et vérifie l'identité de Jacobi. Muni de cette loi de composition, $A^1(M)$ est une algèbre de Lie.

2. Commutateur de deux dérivées de Lie. Soient X et Y deux champs de vecteurs. On a

$$\mathcal{L}\big([X, Y]\big) = \mathcal{L}(X) \circ \mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y) \circ \mathcal{L}(X) = \big[\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)\big]\,.$$

Cette formule est applicable que l'on fasse opérer les dérivées de Lie sur l'espace des formes différentielles $\Omega(M)$ ou sur l'espace des champs de tenseurs contravariants antisymétriques $A(M)$, ou même sur l'espace des champs de tenseurs d'un type quelconque. On peut exprimer ce résultat en disant que l'application $X \mapsto \mathcal{L}(X)$ est un homomorphisme de

l'algèbre de Lie $A^1(M)$ (munie du crochet de champs de vecteurs comme loi de composition) dans l'algèbre de Lie des endomorphismes de degré 0 de $\Omega(M)$ (ou de $A(M)$, ou même de l'espace des tenseurs du type considéré, selon les cas), muni du crochet (défini en 1.2.3) comme loi de composition.

3. Dérivée de Lie et produit intérieur. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs, $P \in A^p(M)$, et $\eta \in \Omega(M)$. Soit Φ le flot de X. On vérifie aisément que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_t^*\big(i(P)\eta\big) = i(\Phi_t^* P)(\Phi_t^*\eta)\,.$$

En dérivant par rapport à t, puis en faisant $t = 0$, on en déduit

$$\mathcal{L}(X)\big(i(P)\eta\big) = i\big(\mathcal{L}(X)P\big)\eta + i(P)\big(\mathcal{L}(X)\eta\big)\,,$$

ou encore

$$i\big(\mathcal{L}(X)P\big) = \mathcal{L}(X)\circ i(P) - i(P)\circ\mathcal{L}(X) = \big[\mathcal{L}(X), i(P)\big]\,.$$

4. Le crochet de Schouten-Nijenhuis

Comme dans les deux paragraphes précédents, M est une variété différentiable de classe C^∞.

Le crochet de Schouten-Nijenhuis est un prolongement naturel de la dérivée de Lie relativement à un champ de vecteurs, opérant sur $A(M)$. Il possède les propriétés suivantes, qui peuvent servir à le définir.

4.1. Proposition. *Soit M une variété différentiable de classe C^∞ et $A(M)$ l'algèbre extérieure des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur M Il existe une unique application $\mathbf{R}$-bilinéaire de $A(M)\times A(M)$ dans $A(M)$, appelée crochet de Schouten-Nijenhuis et notée $(P,Q)\mapsto[P,Q]$, qui vérifie les propriétés:*

Propriété 1. *Pour f et $g \in A^0(M) = C^\infty(M,\mathbf{R})$, $[f,g] = 0$.*

Propriété 2. *Pour un champ de vecteurs $X \in A^1(M)$ et un champ de tenseurs $Q \in A(M)$, $[X,Q]$ est la dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)Q$ de Q relativement à X.*

Propriété 3. *Pour $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$,*

$$[P,Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P]\,.$$

Propriété 4. *Pour $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A(M)$,*

$$[P, Q\wedge R] = [P,Q]\wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q\wedge[P,R]\,.$$

Démonstration. On en donnera seulement les grandes lignes. En utilisant la propriété 4, on montre aisément que le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,Q]$ est local: ses valeurs, sur un ouvert de M, dépendent seulement des valeurs de P et de Q sur cet ouvert. On peut donc

travailler dans le domaine d'une carte, dans lequel P et Q sont des sommes finies de produits extérieurs de champs de vecteurs (ou, éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés 1 à 4 permettent alors d'eprimer $[P, Q]$, dans le domaine de la carte considérée, comme une somme finie de produits extérieurs faisant intervenir des foncctions, des champs de vecteurs et des dérivées de Lie de fonctions ou de champs de vecteurs relativement à un autre champ de vecteurs. Cela prouve l'unicité. Pour prouver l'existence, il suffit alors de vérifier que si on calcule le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$, dans le domaine d'une carte, par application des propriétés 1 à 4, de deux manières différentes, le résultat obtenu est le même. □

4.2 Remarques. En utilisant les propriétés 1 à 4, on voit aisément que le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie aussi la propriété:

Propriété 5. *Pour $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$, on a $[P, Q] \in A^{p+q-1}(M)$.*

Les propriétés 4 et 5 montrent que pour $P \in A^p(M)$ donné, l'application $Q \mapsto [P, Q]$ est une dérivation de degré $p - 1$ de l'algèbre extérieure $A(M)$.

En utilisant les propriétés 3, 4 et 5, on voit que le crochet de Schouten-Nijenhuis satisfait aussi la propriété:

Propriété 6. *Pour $P \in A(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$,*

$$[P \wedge R, Q] = P \wedge [R, Q] + (-1)^{(q-1)r}[P, Q] \wedge R\,.$$

Les propriétés 5 et 6 montrent que, pour $Q \in A^q(M)$ donné, l'application $P \mapsto [P, Q]$ est une "dérivation à droite" de l'algèbre extérieure $A(M)$.

La proposition suivante est une généralisation naturelle de la propriété bien connue selon laquelle $A^1(M)$, avec le crochet pour loi de composition, est une algèbre de Lie.

4.3. Proposition. *Soient $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$ trois champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur la variété M, de degrés p, q et r, respectivement. Le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie l'identité de Jacobi graduée*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}\big[P, [Q, R]\big] + (-1)^{(q-1)(p-1)}\big[Q, [R, P]\big] + (-1)^{(r-1)(q-1)}\big[R, [P, Q]\big] = 0\,.$$

Démonstration. Nous n'en donnerons que le principe. On observe d'abord que la formule est vraie lorsque les degrés p, q et r sont égaux à 0 ou 1. Le résultat général s'obtient par récurrence sur le degré, en utilisant les propriétés 3 et 4 pour remplacer, par exemple, P par $P \wedge X$, où $X \in A^1(M)$, donc p par $p + 1$. □

4.4. Remarque. La proposition 4.3, jointe aux propriétés 3 et 5, exprime que l'espace vectoriel gradué $A(M)$, avec le crochet de Schouten-Nijenhuis comme loi de composition, est une algèbre de Lie graduée. Mais attention! afin d'avoir une règle assez simple et conforme à la définition des algèbres de Lie graduées pour la composition des degrés, on doit convenir que le "degré de Lie" d'un champ de tenseurs $P \in A^p(M)$ (c'est-à-dire son degré relativement au crochet de Schouten, considéré comme loi de composition dans $A(M)$,

est $p-1$. Il ne faut pas le confondre avec le degré usuel (qu'on pourrait aussi appeler "degré extérieur" car il est relatif au produit extérieur comme loi de composition), qui est p. On voit alors que le degré de Lie de $[P,Q]$ est la somme des degrés de Lie de P et de Q. L'espace $A^1(M)$ des champs de vecteurs, qui est une algèbre de Lie au sens usuel, est le sous-espace de $A(M)$ des éléments homogènes de degré de Lie 0.

La proposition précédente indique une importante relation qui lie le crochet de Schouten-Nijenhuis, la différentielle extérieure et le produit intérieur.

4.5. Proposition. *Soient P et Q deux champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur la variété M, et $[P,Q]$ leur crochet de Schouten-Nijenhuis. Le produit intérieur $i\big([P,Q]\big)$ s'exprime, au moyen de la différentielle etérieure d et de produits intérieurs $i(P)$ et $i(Q)$, par la formule*

$$i\big([P,Q]\big) = \big[[i(P),d],i(Q)\big]\,,$$

où les crochets qui figurent dans le membre de droite sont des crochets d'endomorphismes homogènes de $\Omega(M)$.

Démonstration. On indique seulement ses grandes lignes. On remarque d'abord que la formule indiquée dans l'énoncé est vérifiée lorsque P et Q sont homogènes de degré 0 ou 1. Puis, en utilisant les propriétés du crochet de Schouten et en remplaçant P par $P\wedge X$, où X est un champ de vecteurs, donc en remplaçant p par $p+1$, on montre, par récurrence sur les degrés, que cette formule est vérifiée lorsque P et Q sont homogènes de degrés quelconques. Enfin le cas général, dans lequel P et Q ne sont pas nécessairement homogènes, résulte de la bilinéarité. □

4.6. Corollaire. *Soient $P\in A^p(M)$, avec $p\geq 1$, et $f\in A^0(M)$. Pour toute forme $\eta\in\Omega^{p-1}(M)$, on a*

$$\big\langle \eta,[P,f]\big\rangle = \langle \eta\wedge df,P\rangle\,.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(-1)^{(p-2)(p-1)/2}\big\langle \eta,[P,f]\big\rangle &= i\big([P,f]\big)\eta = \big[[i(P),d],i(f)\big]\eta\\ &= \big[i(P)\,d-(-1)^p d\,i(P)\,,\,i(f)\big]\eta\\ &= \big(i(P)\,d\,i(f)-i(f)\,i(P)\,d\big)\eta\\ &= i(P)(df\wedge\eta)\\ &= (-1)^{(p-1)p/2}\langle df\wedge\eta,P\rangle\\ &= (-1)^{(p-1)+(p-1)p/2}\langle \eta\wedge df,P\rangle\,,\end{aligned}$$

où on a tenu compte de $i(P)\eta=0$ et du fait que $(p-2)(p-1)/2$ et $(p-1)+(p-1)p/2$ sont de même parité. □

4.7. Corollaire. *Soit $P\in A^p(M)$, avec $p\geq 1$, et $f_1,f_2,\dots,f_p$ des éléments de $A^0(M)$. On a*

$$\langle df_1\wedge df_2\wedge\cdots\wedge df_p,P\rangle = \Big[\dots\big[[P,f_p],f_{p-1}\big],\dots,f_1\Big]\,.$$

Démonstration. Appliquons le corollaire précédent avec $f = f_p$ et $\eta = df_1 \wedge \cdots \wedge df_{p-1}$. Nous obtenons

$$\langle df_1 \wedge \cdots \wedge df_p, P\rangle = \big\langle df_1 \wedge \cdots \wedge df_{p-1}, [P, f_p]\big\rangle\,.$$

En répétant cette opération, nous obtenons le résultat indiqué. □

5. Application aux variétés de Poisson

5.1. Notations. Soit M une variété différentiable, et Λ un élément de $A^2(M)$. Posons, pour tous f et $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) = \langle df \wedge dg, \Lambda\rangle\,.$$

Compte tenu de 4.7 et de l'antisymétrie de Λ, nous avons

$$\{f, g\} = \big[[\Lambda, g], f\big] = -\big[[\Lambda, f], g\big]\,.$$

Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, nous désignons par $\Lambda^\sharp(df)$ le champ de vecteurs tel que, pour toute autre fonction $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\big\langle dg, \Lambda^\sharp(df)\big\rangle = \Lambda(df, dg) = -\big[[\Lambda, f), g\big]\,.$$

Nous avons donc

$$\Lambda^\sharp(df) = -[\Lambda, f] = -[f, \Lambda]\,.$$

Lemme (A. Lichnerowicz). *Les hypothèses et notations étant celles de 5.1, soient f, g et h trois fonctions éléments de $C^\infty(M, \mathbf{R})$. On a*

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = \frac{1}{2}\,[\Lambda, \Lambda](df, dg, dh)\,.$$

Démonstration. Posons, pour alléger l'écriture,

$$[\Lambda, g] = Y\,, \qquad [\Lambda, h] = Z\,.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\big\{f, \{g, h\}\big\} &= \Big[\Big[\Lambda, \big[[\Lambda, h], g\big]\Big], f\Big]\\ &= -\Big[\Big[\Lambda, \big[[\Lambda, g], h\big]\Big], f\Big]\\ &= -\Big[\big[\Lambda, [Y, h]\big], f\Big]\,.\end{aligned}$$

Mais d'après l'identité de Jacobi graduée

$$\begin{aligned}\big[\Lambda, [Y, h]\big] &= \big[Y, [h, \Lambda]\big] + \big[h, [\Lambda, Y]\big]\\ &= \big[Y, [\Lambda, h]\big] + \big[h, [\Lambda, Y]\big]\\ &= [Y, Z] + \big[h, [\Lambda, Y]\big]\,.\end{aligned}$$

D'autre part, toujours d'après l'identité de Jacobi graduée,

$$[\Lambda, Y] = \big[\Lambda, [\Lambda, g]\big] = -\big[\Lambda, [g, \Lambda]\big] - \big[g, [\Lambda, \Lambda]\big]\,,$$

d'où

$$2[\Lambda, Y] = 2\big[\Lambda, [\Lambda, g]\big] = -\big[g, [\Lambda, \Lambda]\big] = \big[[\Lambda, \Lambda], g\big]\,.$$

Nous avons donc

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} = -\big[[Y, Z], f\big] - \frac{1}{2}\,\Big[\Big[\big[[\Lambda, \Lambda], g\big], h\Big], f\Big]\,.$$

Nous obtenons de même

$$\big\{g, \{h, f\}\big\} = \big[Y, [Z, f]\big]\,, \qquad \big\{h, \{f, g\}\big\} = -\big\{h, \{g, f\}\big\} = -\big[Z, [Y, f]\big]\,.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} \\
&\quad = \Big(\mathcal{L}(Y)\mathcal{L}(Z) - \mathcal{L}(Z)\mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}\big([Y, Z]\big)\Big) f \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,\Big[\Big[\big[[\Lambda, \Lambda], g\big], h\Big], f\Big] - \frac{1}{2}\,\big\langle df \wedge dh \wedge dg, [\Lambda, \Lambda]\big\rangle = \frac{1}{2}\,\big\langle df \wedge dg \wedge dh, [\Lambda, \Lambda]\big\rangle\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

5.3. Corollaire (A. Lichnerowicz). *Dans les hypothèses et avec les notations de la proposition précédente, la loi de composition $(f, g) \mapsto \{f, g\}$, définie sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$, vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si $[\Lambda, \Lambda] = 0$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du lemme 5.2, et du fait que $[\Lambda, \Lambda]$ est nul si et seulement si, pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de $C^\infty(M, \mathbf{R})$, $\big\langle df \wedge dg \wedge dh, [\Lambda, \Lambda]\big\rangle$ est nul. $\square$

Le corollaire 5.3 permet de retrouver aisément, grâce aux propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis, certains résultats concernant les variétés de Poisson, déjà établis par d'autres moyens. Il en est ainsi, par exemple, du résultat suivant.

5.4. Proposition. *Soit (M, Λ) une variété de Poisson. L'application de $C^\infty(M, \mathbf{R})$, muni du crochet de Poisson, dans $A^1(M)$, muni du crochet usuel des champs de vecteurs,*

$$f \mapsto \Lambda^\sharp(df) = -[\Lambda, f]\,,$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. Nous devons prouver que pour tous f et $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\big[-[\Lambda, f], -[\Lambda, g]\big] = -\big[\Lambda, \{f, g\}\big]\,.$$

Or, d'après l'identité de Jacobi graduée,

$$\begin{aligned}
\big[-[\Lambda, f], -[\Lambda, g]\big] &= \big[[\Lambda, f], [\Lambda, g]\big] \\
&= -\Big[\Lambda, \big[g, [\Lambda, f]\big]\Big] + \Big[g, \big[[\Lambda, f], \Lambda\big]\Big] \\
&= -\big[\Lambda, \{f, g\}\big] + \Big[g, \big[[\Lambda, f], \Lambda\big]\Big]\,.
\end{aligned}$$

Mais d'autre part, toujours d'après l'identité de Jacobi graduée,

$$-\big[[\Lambda, f], \Lambda\big] - \big[[f, \Lambda], \Lambda\big] - \big[[\Lambda, \Lambda], f\big] = 0\,,$$

d'où, puisque $[\Lambda, \Lambda] = 0$,

$$\big[[\Lambda, f], \Lambda\big] = -\frac{1}{2}\,\big[[\Lambda, \Lambda], f\big] = 0\,.$$

Nous avons donc bien

$$\big[-[\Lambda, f], -[\Lambda, g]\big] = -\big[\Lambda, \{f, g\}\big]\,. \qquad \square$$

5.5. Théorème (A. Lichnerowicz). *Soit (M, Λ) une variété de Poisson. Pour tout $P \in A(M)$, posons*

$$\partial_\Lambda P = -[\Lambda, P]\,.$$

L'opérateur ∂_Λ ainsi défini est une dérivation homogène de degré 1 de l'algèbre extérieure $A(M)$, de carré nul:

$$\partial_\Lambda \circ \partial_\Lambda = 0\,.$$

Démonstration. On vérifie immédiatement que ∂_Λ est homogène de degré 1, et on sait, d'après les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis, que c'est une dérivation de l'algèbre extérieure $A(M)$. Il reste à vérifier que ∂_Λ est de carré nul. Soit $P \in A^p(M)$. D'après l'identité de Jacobi graduée,

$$(-1)^{p-1}\big[\Lambda, [\Lambda, P]\big] - \big[\Lambda, [P, \Lambda]\big] + (-1)^{p-1}\big[P, [\Lambda, \Lambda]\big] = 0\,,$$

d'où puisque $[P, \Lambda] = (-1)^{p-1}[\Lambda, P]$ et que $[\Lambda, \Lambda] = 0$,

$$(-1)^{p-1}\big[\Lambda, [\Lambda, P]\big] = 0\,,$$

ou encore

$$\partial_\Lambda \circ \partial_\Lambda P = 0\,. \qquad \square$$

5.6. Application: la cohomologie de Poisson-Lichnerowicz. Soit (M, Λ) une variété de Poisson. Considérons le complexe

$$0 \xrightarrow{\partial_\Lambda} A^0(M) \xrightarrow{\partial_\Lambda} A^1(M) \xrightarrow{\partial_\Lambda} A^2(M) \xrightarrow{\partial_\Lambda} \cdots \xrightarrow{\partial_\Lambda} A^p(M) \xrightarrow{\partial_\Lambda} \cdots$$

Sa cohomologie est appelée *cohomologie de Poisson-Lichnerowicz* de la variété de Poisson (M, Λ). Rappelons que le p-ième espace de cohomologie de ce complexe est, par définition, le quotient du noyau de la restriction de ∂_Λ à $A^p(M)$, par son sous-espace $\partial_\Lambda\big(A^{p-1}(M)\big)$. On le note $H^p_\Lambda(M)$.

On voit en particulier que $H^0_\Lambda(M)$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ qui vérifient $[\Lambda, f] = 0$. Ces fonctions forment le centre de l'algèbre de Lie $C^\infty(M, \mathbf{R})$ (la loi de composition étant le crochet de Poisson); en d'autres termes, ce sont les fonctions $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ qui vérifient, pour toute autre fonction $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, $\{f, g\} = 0$; on les appelle souvent *fonctions de Casimir* de la variété de Poisson (M, Λ).

Quant à $H^1_\Lambda(M)$, c'est le quotient de l'espace des champs de vecteurs X qui vérifient $[\Lambda, X] = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(X)\Lambda = 0$, par l'espace des champs de vecteurs de la forme $[\Lambda, f]$, c'est-à-dire l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens sur la variété de Poisson (M, Λ).

Exercices

1. Soit N une variété différentiable, T^*N son fibré cotangent, $q : T^*N \to N$ la projection canonique, et α la 1-forme de Liouville sur T^*N. Montrer que pour toute 2-forme fermée β sur N, $d\alpha + q^*\beta$ est une forme symplectique sur T^*N.

2. Soit N une variété différentiable, $\mathrm{Diff}(N)$ le groupe des difféomorphismes de N, $D(N)$ l'espace des fonctions différentiables réelles sur N. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Diff}(N)$, on note $\widehat{\varphi} : T^*N \to T^*N$ le relèvement canonique de φ au fibré cotangent. A tout couple (φ, f), avec $\varphi \in \mathrm{Diff}(N)$, $f \in D(N)$, on associe le difféomorphisme de T^*N:

$$\Phi_{(\varphi,f)}(\xi) = \widehat{\varphi}\big(\xi + df \circ q(\xi)\big)\,, \quad \xi \in T^*N\,.$$

On a noté $q : T^*N \to N$ la projection canonique.

Montrer que chaque $\Phi_{(\varphi,f)}$ est un symplectomorphisme de $(T^*N, d\alpha)$, α étant la 1-forme de Liouville. Montrer que

$$\Phi_{(\varphi_1,f_1)} \circ \Phi_{(\varphi_2,f_2)} = \Phi_{(\varphi_1\circ\varphi_2, f_1\circ\varphi_2+f_2)}\,.$$

3. Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques, qu'on munit des structures de Poisson associées à leurs structures symplectiques.

Soit $\varphi : M_1 \to M_2$ une application de Poisson, c'est-à-dire telle que pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M_2, on ait

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\} = \{f, g\} \circ \varphi\,.$$

Montrer que φ est une submersion, et que l'orthogonal de $\ker(T\varphi)$ est un sous-fibré vectoriel complètement intégrable de TM_1. Montrer aussi que $\ker(T\varphi)$ et $\mathrm{orth}\big(\ker(T\varphi)\big)$ sont deux sous-fibrés vectoriels symplectiques de TM_1, supplémentaires l'un de l'autre.

Réciproquement, soit $\varphi : M_1 \to M_2$ une submersion. On suppose que $\mathrm{orth}\big(\ker(T\varphi)\big)$ est un sous-fibré vectoriel symplectique complètement intégrable de TM_1, et que la restriction de φ à chaque feuille du feuilletage de M_1 défini par ce sous-fibré est un symplectomorphisme local de cette feuille sur M_2. Montrer que φ est une application de Poisson.

4. On munit $\mathbf{R}^{2n}$ (coordonnées $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$) de la forme symplectique $\Omega_0 = \sum_{i=1}^n dy^i \wedge dx^i$. Montrer que l'action sur $\mathbf{R}^{2n}$ du groupe symplectique linéaire $\mathbf{Sp}(\mathbf{R}^{2n}, \Omega_0)$ laisse invariante, non seulement la 2-forme Ω_0, mais aussi la 1-forme

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y^i\,dx^i - x^i\,dy^i)\,.$$

En déduire que cette action est hamiltonienne et donner l'expression du moment, nul à l'origine, de cette action. [Indications: on pourra remarquer que cette action laisse invariant le champ de Liouville

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

et comparer ω_0 avec $i(Z)\Omega_0$.]

5. Soit Φ une action symplectique d'un groupe de Lie connexe G sur une variété symplectique (M, Ω).

1. On suppose l'action Φ hamiltonienne. Montrer que ses orbites sont toutes des sous-variétés immergées isotropes de (M, Ω) si et seulement si son moment J est constant sur chaque orbite. Montrer que lorsque cette condition est satisfaite, l'action Φ est abélienne.

2. On suppose que toutes les orbites de l'action Φ (qui est supposée symplectique, mais pas nécessairement hamiltonienne) sont des sous-variétés immergées isotropes de (M, Ω). Montrer que l'action Φ est abélienne.

6. Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, et $\Theta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ un 1-cocycle symplectique de $\mathcal{G}$. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, on définit une 1-forme différentielle η^X sur G en posant, pour tout $g \in G$ et tout $v \in T_g G$,

$$\left\langle \eta^X(g), v \right\rangle = \left\langle \Theta \circ TL_{g^{-1}}(v), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \right\rangle .$$

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{G}$, la 1-forme différentielle η^X est fermée. En déduire l'existence d'une application différentiable $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ unique vérifiant

$$\theta(e) = 0 , \quad d\langle \theta, X \rangle = \eta^X \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{G} .$$

2. Montrer que θ est un 1-cocycle symplectique de G admettant Θ pour 1-cocycle de $\mathcal{G}$ associé (c'est-à-dire tel que $T_e\theta = \Theta$).

7. Soit E le plan euclidien (coordonnées (x, y) relativement à un repère orthonormé). On note $\Omega = dx \wedge dy$ la forme élément d'aire usuelle. Soit G le groupe des déplacements euclidiens de E (groupe engendré par les translations et les rotations autour de l'origine).

1. Vérifier que G s'identifie au groupe des matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

l'action $\varphi : \big(g, (x, y)\big) \mapsto (x', y')$ s'obtenant en faisant le produit matriciel

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Choisir une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Déterminer les champs de vecteurs fondamentaux associés aux éléments de cette base.

3. Montrer que l'action de G sur (E, Ω) est hamiltonienne et en déterminer un moment J. Quelle est l'expression du cocycle θ associé au moment J? L'action Φ est-elle fortement hamiltonienne?

8. Soit N une variété différentiable de dimension n, F un sous-fibré vectoriel de rang k de TM ($k \leq n$), F^0 l'annulateur de F (sous-fibré de T^*N dont la fibre, en chaque point, est l'annulateur de la fibre correspondante de F) et $P = T^*N/F^0$ le fibré quotient. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) le sous-fibré F de TN est complètement intégrable,

(ii) il existe une structure de Poisson sur$P$ telle que la projection canonique $\pi : T^*N \to P$ soit une application de Poisson (T^*N étant muni de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique canonique).

[On pourra remarquer que P est le quotient de T^*N par un feuilletage dont les feuilles sont des sous-espaces affines de ses fibres.]

Montrer que lorsque ces deux propriétés équivalentes sont vérifiées, le rang de la structure de Poisson de P est constant, égal à $2k$ et que les feuilles symplectiques de P s'identifient aux fibrés cotangents aux feuilles du feuilletage de N défini par F.

9. Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et ω un potentiel symplectique de Ω, c'est-à-dire une 1-forme telle que $d\omega = \Omega$. On suppose que $L = \{\, x \in M | \omega(x) = 0 \,\}$ est une sous-variété de M de dimension n. Montrer que M est lagrangienne.

10. Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, F et F' deux sous-fibrés vectoriels lagrangiens de TM, supplémentaires et complètement intégrables, $f^1, \ldots, f^n$ n intégrales premières de F (fonctions différentiables dont la restriction à chaque feuille du feuilletage défini par F est constante), dont les différentielles sont partout linéairement indépendantes, $g^1, \ldots, g^n$ n intégrales premières de F' dont les différentielles sont partout linéairement indépendantes. Montrer que tout point de M possède un voisinage sur lequel $(f^1, \ldots, f^n, g^1, \ldots, g^n)$ est un système de coordonnées locales et sur lequel il existe une fonction différentiable S telle que Ω ait pour expression

$$\Omega = \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 S}{\partial f^i \partial g^i}\, df^i \wedge dg^j \,.$$

11. Soit N une variété différnetiable, T^*N son fibré cotangent, $q : T^*N \to N$ la projection canonique, α la 1-forme de Liouville sur T^*N. On munit T^*N de la structure symplectique définie par $d\alpha$. A tout champ de vecteurs X sur N, on associe la fonction différentiable f_X sur T^*N définie par

$$f_X(\xi) = \big\langle \xi, X\big(q(\xi)\big)\big\rangle \,, \qquad \xi \in T^*N \,.$$

1. Montrer que pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs sur N, on a

$$\{f_X, f_Y\} = f_{[X,Y]} \,.$$

En déduire que $X \mapsto f_X$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

2. Soit X un champ de vecteurs sur N, Φ son flot, ${}^\sharp df_X$ le champ hamiltonien sur T^*N de hamiltonien f_X, et Ψ le flot de ${}^\sharp df_X$. Montrer que le champ de vecteurs ${}^\sharp df_X$ est projetable par q sur N et a pour projection X. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, le relèvement canonique de Φ_t au fibré cotangent est Ψ_t.

Solutions

1. Soit N une variété différentiable, T^*N son fibré cotangent, $q : N \to T^*N$ la projection canonique, β une 2-forme fermée sur N, α la 1-forme de Liouville sur T^*N. La 2-forme $d\alpha + q^*\beta$ est fermée car

$$d(d\alpha + q^*\beta) = d(d\alpha) + d(q^*\beta) = q^*(d\beta) = 0\,,$$

puisque d commute avec les images réciproques et que $d\beta = 0$. Montrons qu'elle est non dégénérée. Prenons un système de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sur N, et les coordonnées locales correspondantes $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ sur T^*N. L'expression locale de $d\alpha + q^*\beta$ est

$$d\alpha + q^*\beta = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i + \sum_{1 \le i < j \le n} \beta_{i\,j}\, dx^i \wedge dx^j\,,$$

où les $\beta_{i\,j}$ sont fonctions seulement des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$.

Soit v un vecteur tangent à T^*N en un point du domaine de la carte considérée, de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$. On note ce vecteur

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + w_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)\,.$$

Supposons v non nul; alors l'une au moins de ses composantes $(v^1, \ldots, v^n, w_1, \ldots, w_n)$ est non nulle. Si par exemple $v^1 \neq 0$, prenons

$$v' = \frac{\partial}{\partial p_1}\,.$$

On a alors

$$(d\alpha + q^*\beta)(v, v') = -v^1 \neq 0\,.$$

Si tous les v^i sont nuls $(1 \le i \le n)$, alors l'un des w_i est non nul; supposons par exemple que ce soit w_1. Prenons alors

$$v' = \frac{\partial}{\partial x^1}\,.$$

On a alors

$$(d\alpha + q^*\beta)(v, v') = w_1 \neq 0\,.$$

La 2-forme $d\alpha + q^*\beta$ est donc non dégénérée.

2. Soit $f \in D(N)$ une fonction différentiable sur la variété N. On lui associe l'application $Z_f : T^*N \to T^*N$ définie par

$$Z_f(\xi) = \xi + df\big(q(\xi)\big)\,.$$

Z_f est un difféomorphisme d'inverse Z_{-f}. Montrons que c'est un symplectomorphisme. Soit α la 1-forme de Liouville sur T^*N. On rappelle que si $v \in T_\xi(T^*N)$, on a

$$\alpha(v) = \big\langle \xi, Tq(v)\big\rangle\,.$$

On a

$$Z_f^*\alpha(v) = \alpha\big(TZ_f(v)\big)\,.$$

Mais si v est tangent à T^*N en ξ, $TZ_f(v)$ est tangent à T^*N en $Z_f(\xi) = \xi + df\big(q(\xi)\big)$. On a donc

$$\begin{aligned} Z_f^*\alpha(v) &= \big\langle \xi + df\big(q(\xi)\big), Tq \circ TZ_f(v)\big\rangle \\ &= \alpha(v) + (q^*df)(v)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$Z_f^*\alpha = \alpha + d(q^*f)\,, \quad Z_f^*(d\alpha) = d\alpha\,,$$

puisque d commute avec les images réciproques et que $d \circ d = 0$. On voit ainsi que Z_f est un symplectomorphisme de $(T^*N, d\alpha)$.

Soit φ un difféomorphisme de N sur elle-même et $\widehat{\varphi}$ son relèvement à T^*N. On sait, d'après le cours, que $\widehat{\varphi}$ est un symplectomorphisme de $(T^*N, d\alpha)$.

Considérons maintenant $\Phi_{(\varphi,f)} : T^*N \to T^*N$ défini par

$$\Phi_{(\varphi,f)}(\xi) = \widehat{\varphi}\Big(\xi + df\big(q(\xi)\big)\Big) = \widehat{\varphi} \circ Z_f(\xi)\,.$$

C'est un symplectomorphisme, puisque composé de deux symplectomorphismes.

Soient maintenant φ_1 et φ_2 deux difféomorphismes de N, f_1 et f_2 deux fonctions différentiables sur N. On a

$$\begin{aligned} \Phi_{(\varphi_1,f_1)} \circ \Phi_{(\varphi_2,f_2)}(\xi) &= \Phi_{(\varphi_1,f_1)} \circ \widehat{\varphi}_2\Big(\xi + df_2\big(q(\xi)\big)\Big) \\ &= \widehat{\varphi}_1\Big(\widehat{\varphi}_2(\xi) + \widehat{\varphi}_2\big(df_2\big(q(\xi)\big)\big) + df_1\big(q \circ \widehat{\varphi}_2(\xi)\big)\Big)\,, \end{aligned}$$

car $\widehat{\varphi}_2$ est linéaire sur chaque fibre de T^*N, et car

$$q\Big(\widehat{\varphi}_2(\xi) + \widehat{\varphi}_2\big(df_2\big(q(\xi)\big)\big)\Big) = q\big(\widehat{\varphi}_2(\xi)\big)\,,$$

puisque $\widehat{\varphi}_2(\xi)$ et $\widehat{\varphi}_2\big(df_2\big(q(\xi)\big)\big)$ appariennent à la même fibre de T^*N. On a donc

$$\Phi_{(\varphi_1,f_1)} \circ \Phi_{(\varphi_2,f_2)}(\xi) = \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\varphi}_2\Big(\xi + df_2\big(q(\xi)\big) + \widehat{\varphi}_2^{-1} \circ df_1\big(q \circ \widehat{\varphi}_2(\xi)\big)\Big)\,.$$

Mais

$$\widehat{\varphi}_2^{-1} \circ df_1\big(q \circ \widehat{\varphi}_2(\xi)\big) = d(f_1 \circ \varphi_2)\big(q(\xi)\big)\,,$$

d'où, compte tenu de $\widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\varphi}_2 = \widehat{\varphi_1 \circ \varphi_2}$, la formule

$$\Phi_{(\varphi_1, f_1)} \circ \Phi_{(\varphi_2, f_2)} = \Phi_{(\varphi_1 \circ \varphi_2, f_1 \circ \varphi_2 + f_2)} \,.$$

Cette formule exprime que Φ est une action sur T^*N du produit semi-direct de $\mathrm{Diff}(N)$ et de $D(N)$.

3. Soient (M_1, Ω_1) et (M_2, Ω_2) deux variétés symplectiques et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application différentiable

Supposons que φ soit une application de Poisson. Alors pour tout couple (f_1, f_2) de fonctions différentiables sur M_2, on a

$$\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\}_{M_1} = \{f, f_2\}_{M_2} \circ \varphi \,,$$

qu'on peut écrire, en notant ${}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)$ le champ hamiltonien sur M_1 de hamiltonien $f_1 \circ \varphi$, et ${}^\sharp df_1$ le champ hamiltonien sur M_2 de hamiltonien f_1,

$$i\big({}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)\big) d(f_2 \circ \varphi) = \big(i({}^\sharp df_1) df_2\big) \circ \varphi \,.$$

Mais, pour tout point x de M_1,

$$i\big({}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)\big) d(f_2 \circ \varphi)(x) = i\Big(T_x\varphi\big({}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)(x)\big)\Big) df_2\big(\varphi(x)\big) \,.$$

On a donc

$$i\Big(T_x\varphi\big({}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)(x)\big) - {}^\sharp df_1\big(\varphi(x)\big)\Big) df_2\big(\varphi(x)\big) = 0 \,.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction f_2, on en déduit

$$T_x\varphi\big({}^\sharp d(f_1 \circ \varphi)(x)\big) = {}^\sharp df_1\big(\varphi(x)\big) \,.$$

Mais lorsque f_1 parcourt l'ensemble des fonctions différentiables sur M_2, ${}^\sharp df_1\big(\varphi(x)\big)$ parcourt $T_{\varphi(x)}M_2$ entier. Par suite, $T_x\varphi$ est surjective. Ceci étant vrai pour tout point x de M_1, φ est une submersion. Pour tout $x \in M_1$, $\ker T_x\varphi$ est de dimension $\dim M_1 - \dim M_2$, ne dépendant pas du point x choisi. En d'autres termes, $\ker T\varphi$ est un sous-fibré vectoriel de TM_1. Son orthogonal symplectique $\mathrm{orth}(\ker T\varphi)$ est donc lui aussi de rang constant, égal à $\dim M_1 - (\dim M_1 - \dim M_2) = \dim M_2$. C'est aussi un sous-fibré vectoriel de TM_1. Il est engendré par les champs de vecteurs de la forme ${}^\sharp d(f \circ \varphi)$, où f est une fonction différentiable sur M_2. Mais

$$\big[{}^\sharp d(f_1 \circ \varphi), {}^\sharp d(f_2 \circ \varphi)\big] = {}^\sharp d\big(\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\}\big) = {}^\sharp d\big(\{f_1, f_2\} \circ \varphi\big) \,.$$

Le théorème de Frobenius montre alors que $\mathrm{orth}(\ker T\varphi)$ est complètement intégrable.

Soit S une feuille du feuilletage de M_1 déterminé par le sous-fibré complètement intégrable $\mathrm{orth}(\ker T\varphi)$. Les dimensions de S et de M_2 sont égales. L'expression obtenue ci-dessus, valable pour tout point x de S et toute fonction différentiable f sur M_2,

$$T_x\varphi\big({}^\sharp d(f \circ \varphi)(x)\big) = {}^\sharp df\big(\varphi(x)\big) \,,$$

montre que la restriction de $T_x\varphi$ à T_xS est surjective, donc (puisque T_xS et $T_{\varphi(x)}M_2$ sont de même dimension) que c'est un isomorphisme de T_xS sur $T_{\varphi(x)}M_2$. La restriction de φ à S est donc un difféomorphisme local de S sur M_2. Par suite, $\ker T_x\varphi$ et $\operatorname{orth}(\ker T_x\varphi)$, sous-espaces vectoriels de $\big(T_xM_1, \Omega_1(x)\big)$ supplémentaires et orthogonaux l'un de l'autre, sont tous deux symplectiques. La forme induite par Ω_1 sur S est donc symplectique. La formule

$$\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\}_{M_1} = \{f_1, f_2\}_{M_2} \circ \varphi$$

montre alors que la restriction de φ à S (munie de la 2-forme induite sur S par Ω_1) est un symplectomorphisme local de S sur M_2.

On remarque que les sous-fibrés $\ker T\varphi$ et $\operatorname{orth}(\ker T\varphi)$ sont tous deux complètement intégrables, et définissent deux feuilletages symplectiques transverses de M_1 (on veut dire par là qu'en tout point $x \in M_1$, les espaces tangents en x aux feuilles de ces deux feuilletages qui passent par x sont deux sous-espaces vectoriels symplectiques supplémentaires de $\big(T_xM, \Omega(x)\big)$.

Réciproquement, supposons que φ soit une submersion et que $\operatorname{orth}(\ker T\varphi)$ soit complètement intégrable. Ces deux conditions ne suffisent pas pour affirmer que φ est une application de Poisson. Supposons de plus que les feuilles du feuilletage de M_1 déterminé par $\operatorname{orth}(\ker T\varphi)$ soient des sous-variétés symplectiques de M_1 et que la restriction de φ à chacune de ces feuilles soit un symplectomorphisme local de cette feuille sur M_2. On voit alors que $\ker T\varphi$ et $\operatorname{orth}(\ker T\varphi)$ sont supplémentaires. En exprimant que la restriction de φ à une feuille du feuilletage de M_1 défini par $\operatorname{orth}(\ker T\varphi)$ est un symplectomorphisme local, on voit que pour tout couple de fonctions différentiables (f_1, f_2) sur M_2, on a

$$\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\}_{M_1} = \{f_, f_2\}_{M_2} \circ \varphi\,,$$

ce qui exprime que φ est une application de Poisson.

4. Soit $g \in \mathbf{Sp}(\mathbf{R}^{2n}, \Omega_0)$. Par définition, g est une application linéaire inversible de $\mathbf{R}^{2n}$ dans lui-même telle que $g^*\Omega_0 = \Omega_0$. Considérons d'autre part le champ de vecteurs

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

sur $\mathbf{R}^{2n}$ (coordonnées $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$). Son flot $\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ a pour expression

$$\Phi\big(t, (x, y)\big) = \big(e^t x, e^t y\big)\,,$$

où, pour alléger, on a posé $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$. On a

$$\Phi\big(t, g(x, y)\big) = g\Big(\Phi\big(t, (x, y)\big)\Big)\,,$$

car g est linéaire. En dérivant par rapport à t, puis en faisant $t = 0$, on obtient

$$g_* Z = Z\,.$$

Mais d'après une formule générale

$$g^*\big(i(g_* Z)\Omega_0\big) = i(Z)\big(g^*\Omega_0\big)\,,$$

d'où, puisque $g_*Z = Z$,

$$g^*\big(i(Z)\Omega_0\big) = i(Z)\Omega_0\,.$$

Mais

$$i(Z)\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n}(y^i dx^i - x^i dy^i) = 2\omega_0\,.$$

On a donc bien

$$g^*\omega_0 = \omega_0\,.$$

D'après le cours, on sait qu'une action conservant une 1-forme ω_0 telle que $d\omega_0 = \Omega_0$ est hamiltonienne et admet pour moment l'application J définie par

$$\big\langle J, X\big\rangle = i(X_M)\omega_0\,.$$

On explicitera l'expression de J en choisissant une base de l'algèbre de Lie du groupe symplectique, en déterminant les champs de vecteurs fondamentaux associés aux éléments de cette base et en faisant le produit intérieur de ω_0 avec chacun de ces champs fondamentaux.

5. Soit Φ une action symplectique d'un groupe de Lie connexe G sur une variété symplectique (M, Ω). On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G.

1. On suppose Φ hamiltonienne. Son moment J est constant sur chaque orbite de l'action Φ si et seulement si, pour tout point $x \in M$ et tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$,

$$\big(i(X_M)d\langle J, Y\rangle\big)(x) = 0\,.$$

Mais $d\langle J, y\rangle = -i(Y_M)\Omega$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\Omega(x)\big(X_M(x), Y_M(x)\big) = 0\,.$$

Or l'espace tangent en x à l'orbite $\Phi(G, x)$ est engendré par les $X_M(x)$, avec $X \in \mathcal{G}$. L'égalité ci-dessus exprime donc que cette orbite est une sous-variété (en général seulement immergée, non plongée) isotrope de M.

Lorsque J est constant sur chaque orbite, ou, ce qui est équivalent, lorsque toutes les orbites sont isotropes, on a pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_M)i(Y_M)\omega &= \big(i(X_M)d + di(X_M)\big)i(Y_M)\Omega\\ &= di(X_M)i(Y_M)\Omega\\ &= d\big(\Omega(X_M, Y_M)\big)\,,\end{aligned}$$

car $i(Y_M)\Omega = -d\langle J, Y\rangle$, donc $di(Y_M)\Omega = 0$. Donc, d'après ce qui précède,

$$\mathcal{L}(X_M)i(Y_M)\Omega = 0\,.$$

Mais

$$\mathcal{L}(X_M)i(Y_M)\Omega = i\big([X_M, Y_M]\big)\Omega + i(Y_M)\mathcal{L}(X_M)\Omega = i\big([X_M, Y_M]\big)\Omega\,,$$

car $\mathcal{L}(X_M)\Omega = 0$. Par suite, $[X_M, Y_M] = 0$, puisque Ω est non dégénérée. Le groupe G étant connexe, l'action Φ est engendrée par les flots des champs de vecteurs fondamentaux. Les champs de vecteurs X_M et Y_M étant complets, la nullité du crochet $[X_M, Y_M]$ implique que les flots de ces deux champs de vecteurs commutent. L'action Φ est donc abélienne.

2. On suppose l'action Φ symplectique et toutes ses orbites isotropes. On a comme ci-dessus, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{L}(X_M)i(Y_M)\Omega = d\big(\Omega(Y_M, X_M)\big) = 0\,,$$

le calcul étant le même que dans la question précédente, la seule différence étant que $i(Y_M)\Omega$ est maintenant fermée, pas nécessairement exacte. On en déduit, comme dans la question précédente, $i\big([X_M, Y_M]\big)\Omega = 0$, donc $[X_M, Y_M] = 0$, et on conclut, toujours comme ci-dessus, que l'action Φ est abélienne.

6. Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $\Theta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ un 1-cocycle symplectique de $\mathcal{G}$. On a par définition

$$\begin{gathered}\big\langle \Theta(X), Y\big\rangle = -\big\langle \Theta(Y), X\big\rangle\,,\\ \big\langle \Theta\big([X,Y]\big), Z\big\rangle + \big\langle \Theta\big([Y,Z]\big), X\big\rangle + \big\langle \Theta\big([Z,X]\big), Y\big\rangle = 0\,.\end{gathered}$$

Pour tout $X \in \mathcal{G}$, on définit une 1-forme différentielle η^X sur G en posant

$$\big\langle \eta^X(g), v\big\rangle = \big\langle \Theta \circ TL_{g^{-1}}(v), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\big\rangle\,.$$

1. Soient X, Y et Z trois champs de vecteurs invariants à gauche sur G, c'est-à-dire trois éléments de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On se propose de calculer la valeur de $d\eta^X(Y, Z)$ en un point g de G. On utilise pour cela la formule classique

$$\big(d\eta^X(Y,Z)\big)(g) = Y.\langle \eta^X, Z\rangle - Z.\langle \eta^X, Y\rangle - \big\langle \eta^X, [Y,Z]\big\rangle\,.$$

On a

$$\langle \eta^X, Y\rangle(g) = \big\langle \Theta(Y), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\big\rangle\,,$$

donc

$$\begin{aligned} Z.\langle \eta^X, Y\rangle &= \frac{d}{dt}\big\langle \Theta(Y), \mathrm{Ad}_{\left(g\exp(tZ)\right)^{-1}} X\big\rangle\big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\big\langle \Theta(Y), \mathrm{Ad}_{\exp(-tZ)}\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\big\rangle\big|_{t=0}\\ &= \big\langle \Theta(Y), -[Z, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X]\big\rangle\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\big(d\eta^X(Y,Z)\big)(g) = \big\langle \Theta(Z), [\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X, Y]\big\rangle - \big\langle \Theta(Y), [\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X, Z]\big\rangle - \big\langle \Theta([Y,Z]), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\big\rangle\,,$$

ou encore, en raison des propriétés de Θ rappelées ci-dessus,

$$\begin{aligned}\big(d\eta^X(Y,Z)\big)(g) &= -\big\langle \Theta\big([\mathrm{Ad}_{g^{-1}} X, Y]\big), Z\big\rangle - \big\langle \Theta([Y,Z]), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X\big\rangle - \big\langle \Theta\big([Z, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X]\big), Y\big\rangle\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

L'espace tangent en g à G étant engendré par les valeurs en ce point des champs de vecteurs invariants à gauche, le résultat ci-dessus montre que $d\eta^X$ est nulle. Comme G a été supposé connexe et simplement connexe, il existe une fonction différentiable unique θ^X, définie sur G, vérifiant

$$d\theta^X = \eta^X \qquad \text{et} \quad \theta^X(e) = 0\,.$$

En utilisant l'unicité de θ^X, on voit aisément que $X \mapsto \theta^X$ est linéaire. En posant

$$\big\langle \theta(g), X \big\rangle = \theta^X(g)\,,$$

on définit donc une application $\theta : G \to \mathcal{G}^*$, vérifiant $\theta(e) = 0$ et, pour tout $X \in \mathcal{G}$, $d\langle \theta, X\rangle = \eta^X$.

2. On doit montrer que pour tout couple (g_2, g_2) d'éléments de G, $\theta(g_1 g_2) = \mathrm{Ad}^*_{g_1}\,\theta(g_2) + \theta(g_1)$ et que $T_e\theta = \Theta$. On a pour X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$i(Y)d\langle \theta, X\rangle(e) = \big\langle T_e\theta(Y), X\big\rangle = \eta^X(Y)(e) = \big\langle \Theta(Y), X\big\rangle\,,$$

ce qui prouve que $T_e\theta = \Theta$.

D'autre part, soit $g \in G$, X et $Y \in \mathcal{G}$, $t \in \mathbf{R}$. Posons

$$w(t) = \Big\langle \theta\big(g\exp(tY)\big) - \mathrm{Ad}^*_g\,\theta\big(\exp(tY)\big) - \theta(g), X\Big\rangle\,.$$

On a pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$:

$$\frac{dw(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \big\langle \Theta(Y), \mathrm{Ad}_{\exp(-t_0Y)}\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,X\big\rangle - \big\langle \Theta(Y), \mathrm{Ad}_{\exp(-t_0Y)g^{-1}}\,X\big\rangle = 0\,.$$

Comme $w(0) = 0$, ceci montre qu'on a $w(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire que

$$\theta\big(g\exp(tY)\big) - \mathrm{Ad}^*_g\,\theta\big(\exp(tY)\big) - \theta(g) = 0\,.$$

La formule $\theta(g_1g_2) = \mathrm{Ad}^*_{g_1}\,\theta(g_2) + \theta(g_1)$ est donc vérifiée pour tout $g_1 = g \in G$ et tout g_2 de la forme $g_2 = \exp(tY)$, avec $Y \in \mathcal{G}$. Mais tout élément de G étant produit d'un nombre fini d'exponentielles, on en déduit aisément que cette formule est vérifiée pour tous g_1 et $g_2 \in G$.

7. Soit G le groupe des déplacements euclidiens du plan.

1. Il est bien connu que G s'identifie au groupe des matrices

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

l'action de l'élément g de G sur l'élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$ étant donnée par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \\ 1 \end{pmatrix}\,. \qquad (*)$$

2. Les trois matrices X_1, X_2, X_3 obtenues en dérivant la matrice g, respectivement par rapport à φ, a et b, puis en faisant $\varphi = 0$, $a = 0$, $b = 0$, forment une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Elles ont pour expressions:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le champ fondamental associé à X_1 s'obtient en dérivant l'expression $(*)$ ci-dessus par rapport à φ, puis en faisant $\varphi = 0$, $a = 0$, $b = 0$, et en changeant de signe (à cause de la convention de signe faite dans le cours). On obtient

$$X_{1\,M} = -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}.$$

On obtient de même $X_{2\,M}$ et $X_{3\,M}$ en dérivant $(*)$ respectivement par rapport à a et par rapport à b, en faisant $\varphi = 0$, $a = 0$, $b = 0$ et en changeant de signe. On obtient

$$X_{2\,M} = -\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_{3\,M} = -\frac{\partial}{\partial y}.$$

3. On a

$$i(X_{1\,M})\Omega = y\,dy + x\,dx = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right), \quad i(X_{2\,M})\Omega = -dy, \quad i(X_{3\,M})\Omega = dx.$$

On voit que l'action de G sur $\mathbf{R}^2$ est hamiltonienne et admet un moment J ayant pour expression

$$J(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{2}\,\eta_1 + y\,\eta_2 - x\,\eta_3,$$

où (η_1, η_2, η_3) est la base duale de (X_1, X_2, X_3).

Calculons $J\big(g.(x,y)\big)$. On obtient

$$\begin{aligned} J\big(g.(x,y)\big) = &-\frac{(x\cos\varphi - y\sin\varphi + a)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi + b)^2}{2}\,\eta_1 \\ &+ (x\sin\varphi + y\cos\varphi + b)\eta_2 \\ &- (x\cos\varphi - y\sin\varphi + a)\eta_3. \end{aligned}$$

Pour déterminer le cocycle θ, on calcule $J\big(g.(x,y)\big) - \mathrm{Ad}_g^*\,J(x,y)$. Cherchons donc d'abord l'expression de la représentation adjointe. On a:

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & -a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & a\sin\varphi - b\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient $\mathrm{Ad}_g X_i$, pour $i = 1,\ 2,\ 3$ grâce à la formule $\mathrm{Ad}_g X_i = gX_ig^{-1}$, les produits intervenant dans cette expression étant des produits matriciels. On obtient comme expression de la matrice de Ad_g dans la base (X_1, X_2, X_3),

$$\mathrm{Ad}_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -a & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La matrice de Ad_g^* dans la base (η_1, η_2, η_3), duale de (X_1, X_2, X_3), est la transposée de la matrice de $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$. C'est donc

$$\mathrm{Ad}_g^* = \begin{pmatrix} 1 & a\sin\varphi - b\cos\varphi & a\cos\varphi + b\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant calculer

$$\theta(g) = J\big(g.(x,y)\big) - \mathrm{Ad}_g^* J(x,y) = -\frac{(a^2+b^2)}{2}\,\eta_1 + b\eta_2 + a\eta_3\,.$$

On vérifie qu'il n'est pas possible d'éliminer θ en ajoutant à J un élément constant de $\mathcal{G}^*$. Le cocycle θ n'est donc pas un cobord, et l'action étudiée n'est pas fortement hamiltonienne.

8. Supposons F complètement intégrable. Tout point de N possède alors un voisinage U qui est le domaine d'une carte dont les coordonnées locales, notées $x^1, \ldots, x^n$, sont telles que F soit localement engendré, sur l'ouvert U, par les k champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Chaque feuille du feuilletage défini par F sur N est localement définie, dans U, par des équations de la forme $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$, où $c^{k+1}, \ldots, c^n$ sont des constantes. Notons $q : T^*N \to N$ la projection canonique, $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées locales dans la carte de T^*N, de domaine $q^{-1}(U)$, associée à la carte considérée de N. Un point de $q^{-1}(U)$, de coordonnées $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$, appartient à F^0 si et seulement si $p_i = 0$ pour $1 \le i \le k$. Par suite, deux points de cet ouvert, de coordonnées $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ et $x'^1, \ldots, x'^n, p'_1, \ldots, p'_n$, ont même projection sur le fibré quotient P si et seulement si $x^1 = x'^1, \ldots, x^n = x'^n, p_1 = p'_1, \ldots, p_k = p'_k$. Ceci montre que $\ker(T\pi)$ est localement engendré, sur l'ouvert $q^{-1}(U)$ de T^*N, par les $n-k$ champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial p_n}$. Le sous-fibré $\ker(T\pi)$ de $T(T^*N)$ définit sur T^*N un feuilletage dont les feuilles sont des sous-espaces affines de ses fibres (pour chaque point x de N, les feuilles contenues dans la fibre T_x^*N sont les sous-espaces affines de cette fibre d'epace vectoriel associé F_x^0), et le fibré quotient P s'identifie à l'ensemble des feuilles de ce feuilletage. La forme symplectique canonique de T^*N ayant pour expression locale

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i\,,$$

l'orthogonal symplectique de $\ker T\pi$ est localement engendré, sur l'ouvert $q^{-1}(U)$, par les champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}, \dfrac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial p_n}$. Ce sous-fibré de $T(T^*N)$ est complètement intégrable, puisqu'il détermine un feuilletage dont les feuilles sont localement définies

par des équations de la forme $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$, où $c^{k+1}, \ldots, c^n$ sont des constantes. On voit que ces feuilles sont les sous-variétés (immergées) de T^*N de la forme $T^*_S N$ (restriction de T^*N à une sous-variété immergée S de N), où S est une feuille du feuilletage défini par F sur N. D'après un théorème vu dans le cours, le sous-fibré $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$ étant complètement intégrable, il existe sur P une structure de Poisson unique pour laquelle π est une application de Poisson. On sait de plus que les feuilles symplectiques de P sont les images, par la projection π, des feuilles du feuilletage défini par $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$ sur T^*N. Ce sont donc les projections des $T^*_S N$, où S est une feuille du feuilletage défini par F sur N. On reconnaît la construction étudiée dans le cours sous le nom de réduction symplectique: $T^*_S N$ est une sous-variété (immergée) coïsotrope de T^*N, et la restriction de π à cette sous-variété est la projection de $T^*_S N$ sur la variété symplectique réduite qui lui est associée. Cette dernière est de dimension $2k$ (ce qui prouve que le rang de la structure de Poisson de P est constant, égal à $2k$), et les expressions en coordonnées locales données ci-dessus montrent qu'elle s'identifie naturellement à T^*S.

Réciproquement, supposons qu'il existe sur P une structure de Poisson telle que $\pi : T^*N \to N$ soit une application de Poisson. D'après un théorème vu dans le cours, $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$ est un sous-fibré complètement intégrable de $T(T^*N)$. Puisque $\ker T\pi$, de rang $n-k$, contient le sous-fibré vertical (tangent aux fibres de T^*N), son orthogonal $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$, de rang $2n-(n-k) = n+k$, contient l'orthogonal du fibré vertical, c'est-à-dire le fibré vertical (car celui-ci est lagrangien donc égal à son orthogonal). La restriction de la projection π à chaque feuille du feuilletage défini par $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$ est de rang k, donc chaque feuille de ce feuilletage se projette sur P en une sous-variété (immergée) S, de dimension k. Mais alors la feuille dont S est la projection n'est autre que $T^*_S N$, et les expressions en coordonnées locales données dans la première partie de la sdémonstration sont applicables et montrent que l'espace tangent à S en chacun de ses points est la fibre de F en ce point. Ceci prouve la complète intégrabilité de F.

9. Soit $i_L : L \to M$ l'injection canonique. On a $i_L^*\omega = 0$, donc $i_L^*\Omega = i_L^*(d\omega) = d(i_L^*\omega) = 0$, ce qui prouve que L est isotrope. Si de plus on suppose L de dimension n, elle est lagrangienne.

Commentaire. On a prouvé un résultat un peu plus fort que celui demandé dans l'énoncé: on a montré que si L est une sous-variété sur laquelle ω induit une forme nulle (ce qui est moins restrictif que d'imposer à L d'être l'ensemble des zéros de ω, et d'imposer à cet ensemble d'être une sous-variété), L est isotrope. On n'a pas eu à utiliser le lemme d'homotopie, contrairement à une indication donnée dans la première version de l'énoncé.

D'autre part, il est facile de donner des exemples de variétés symplectiques de dimension $2n$ admettant un potentiel symplectique dont l'ensemble de zéros est une sous-variété de dimension strictement inférieure à n. Ainsi sur $\mathbf{R}^4$, muni de la forme symplectique $dx^3 \wedge dx^1 + dx^4 \wedge dx^2$, la forme

$$\frac{1}{2}(x^3\,dx^1 + x^4\,dx^2 - x^1\,dx^3 - x^2\,dx^4)$$

est un potentiel symplectique qui ne s'annule qu'en un seul point, l'origine.

Plaçons-nous dans les hypothèses de l'énoncé: M est de dimension $2n$, et ω est un potentiel symplectique dont l'ensemble des zéros est une sous-variété L de M de dimension n. On peut alors montrer (mais c'est un excercice nettement plus difficile que celui-ci!)

qu'il existe un ouvert U de M contenant L et un difféomorphisme φ de U sur un ouvert $\varphi(U)$ de T^*L, tels que $\varphi\big|_L$ soit la section nulle de T^*L et que $\varphi^*\alpha = \omega$, α étant la 1-forme de Liouville de T^*L. De plus, en restreignant éventuellement U, on peut faire en sorte que φ soit unique.

10. En tout point x de M, $\big(df^1(x), \dots, df^n(x)\big)$ est une base de l'annulateur F_x^0 de F_x, $\big(dg^1(x), \dots, dg^n(x)\big)$ une base de l'annulateur ${F'}_x^0$ de F'_x. Puisque F_x et F'_x sont supplémentaires dans T_xM, F_x^0 et ${F'}_x^0$ sont supplémentaires dans T_x^*M, donc $df^1(x), \dots, df^n(x), dg^1(x), \dots, dg^n(x)$ sont linéairement indépendantes. Le théorème d'inversion locale montre alors que $(f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n)$ est un système de coordonnées locales sur un voisinage du point x.

La forme symplectique Ω est fermée, donc localement exacte. Par suite il esiste, au voisinage de x, une 1-forme ω telle que $d\omega = \Omega$. L'expression de ω en coordonnées locales est

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (a_i\, df^i + b_i\, dg^i)\,,$$

où les a_i et b_i sont des fonctions des coordonnées locales $f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n$.

Les feuilles du feuilletage défini par F sont les sous-variétés d'équations $f^1 = c^1, \dots, f^n = c^n$, où $c^1, \dots, c^n$ sont des constantes. On doit exprimer que ces feuilles sont lagrangiennes, c'est-à-dire que ω induit sur chacune de ces feuilles une forme fermée. On obtient ainsi

$$\frac{\partial b_i}{\partial g_j} - \frac{\partial b_j}{\partial g_i} = 0\,.$$

En restreignant éventuellement le voisinage U de x considéré, on peut supposer qu'il est contractile et que son intersection avec chaque feuille du feuilletage défini par F est contractile. Sur chaque sous-variété de U d'équations $f^1 = c^1, \dots, f^n = c^n$, il existe alors une fonction $B_{c^1,\dots,c^n}$ des coordonnées locales $g^1, \dots, g^n$, définie à une constante additive près, telle que pour tout i $(1 \le i \le n)$,

$$b_i(f^1 = c^1, \dots, f^n = c^n, g^1, \dots, g^n) = \frac{\partial B_{c^1,\dots,c^n}(g^1, \dots, g^n)}{\partial g^i}\,.$$

En choisissant convenablement la constante arbitraire qu'on peut ajouter à chaque $B_{c^1,\dots,c^n}$, on peut faire en sorte que la fonction

$$B : (f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n) \mapsto B_{f^1,\dots,f^n}(g^1, \dots, g^n)$$

soit différentiable par rapport à l'ensemble des variables dont elle dépend. On a donc prouvé l'existence d'une fonction différentiable B telle que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\, dg^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B(f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n)}{\partial g^i}\, dg^i\,.$$

De même, en échangeant les rôles de F et de F', on montre qu'il existe une fonction différentiable A telle que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, df^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A(f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n)}{\partial f^i}\, df^i\,.$$

Par suite on a

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial f^j}\, df^j + \frac{\partial B}{\partial g^j}\, dg^j \right) ,$$

d'où compte tenu de la symétrie des dérivées partielles secondes

$$\Omega = d\omega = \sum_{(i,j)} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial f^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 A}{\partial f^i \partial g^j} \right) df^i \wedge dg^j .$$

Il suffit donc de poser $S = B - A$.

Remarque. Le raisonnement fait ci-dessus pour prouver l'existence et la différentiabilité de la fonction B est en fait une démonstration élémentaire du lemme de Poincaré généralisé, qu'on déduit du lemme d'homotopie.

11.

1. Le problème étant local, on peut raisonner dans le domaine d'une carte de N et de la carte associée de T^*N, et utiliser des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sur N, $x^1, \ldots, x^n$, $p_1, \ldots, p_n$ sur T^*N. On a alors

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx^i , \qquad d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i .$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur N, f_X et f_Y les fonctions correspondantes sur T^*N. Leurs expressions locales sont:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} , \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

où X^i et Y^i sont des fonctoions de $x^1, \ldots, x^n$, et

$$f_X(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i X^i(x^1, \ldots, x^n) ,$$
$$f_Y(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i Y^i(x^1, \ldots, x^n) .$$

Les formules bien connues qui donnent les expressions en coordonnées locales de $[X, Y]$ et de $\{f_X, f_Y\}$ sont

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$
$$\{f_X, f_Y\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_X}{\partial p_k} \frac{\partial f_Y}{\partial x^k} - \frac{\partial f_X}{\partial x^k} \frac{\partial f_Y}{\partial p_k} \right) .$$

Compte tenu de

$$\frac{\partial f_X}{\partial p_k} = X^k , \qquad \frac{\partial f_Y}{\partial p_k} = Y^k ,$$

on vérifie aisément que $\{f_X, f_Y\} = f_{[X,Y]}$.

(2. Le champ de vecteurs ${}^\sharp df_X$ a pour expression locale

$$ {}^\sharp df_X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_X}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f_X}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) , $$

ou, compte tenu de l'expression locale de f_X,

$$ {}^\sharp df_X = \sum_{i=1}^n \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) . $$

On voit que sa projection sur N est bien le champ de vecteurs X.

Pour tout difféomorphisme φ de N sur N (ou d'un ouvert de N sur un autre ouvert de N), on note $\widehat{\varphi}$ le relèvement canonique de φ au fibré cotangent. On rappelle que pour tout élément x du domaine de définition de φ, $\widehat{\varphi}$ applique la fibre T_x^*N sur la fibre $T_{\varphi(x)}^*N$, et que pour tous $\xi \in T_x^*N$, $v \in T_{\varphi(x)}N$,

$$ \left\langle \widehat{\varphi}(\xi), v \right\rangle = \left\langle \xi, T\varphi^{-1}(v) \right\rangle . $$

On rappelle que si φ_1 et φ_2 sont deux difféomorphismes, $\widehat{\varphi_1 \circ \varphi_2} = \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\varphi}_2$.

Soit maintenant Φ le flot d'un champ de vecteurs X sur N. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, Φ_t est un difféomorphisme d'un ouvert de N sur un autre ouvert de N et, si t_1 et t_2 sont deux éléments de $\mathbf{R}$, on a $\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}$, et en particulier $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \mathrm{id}_N$. On en déduit que les relèvements à T^*N des Φ_t vérifient $\widehat{\Phi}_{t_1} \circ \widehat{\Phi}_{t_2} = \widehat{\Phi}_{t_1+t_2}$, $\widehat{\Phi}_t \circ \widehat{\Phi}_{-t} = \widehat{\Phi}_0 = \mathrm{id}_{T_N^*}$. La famille à un paramètre $\widehat{\Phi}_t$ de transformations de T^*N est donc un groupe local de difféomorphismes d'ouverts de T^*N sur d'autres ouverts de T^*N. D'après une propriété classique de géométrie différentielle, cela entraîne que $\widehat{\Phi}$ est le flot d'un champ de vecteurs sur T^*N. Nous allons vérifier que ce champ de vecteurs est bien ${}^\sharp df_X$. Il suffit pour cela de montrer que pour tous $x \in N$ $\xi \in T_x^*N$,

$$ \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Phi}_t(\xi)\big|_{t=0} = {}^\sharp(df_X)(\xi) . $$

Notons $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées du point $x \in N$, $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ celles du point $\xi \in T_x^*N$. Pour $|t|$ assez petit, $y = \Phi_t(x)$ est dans le domaine de la carte considérée. Ses coordonnées seront notées

$$ y^i = \varphi^i(t, x^1, \ldots, x^n) . $$

Puisque Φ est le flot du champ de vecteurs X, on a

$$ \frac{\partial \varphi^i(t, x^1, \ldots, x^n)}{\partial t}\Big|_{t=0} = X^i(x^1, \ldots, x^n) . $$

D'autre part, puisque $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, on a

$$ x^i = \varphi^i(-t, x^1, \ldots, x^n) . $$

Soit v un vecteur tangent en y à N. On note ses coordonnées $y^1, \ldots, y^n, v^1, \ldots, v^n$. On note $x^1, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^n$ les coordonnées de $T\Phi_{-t}(v)$. On a

$$w^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^k(-t, y^1, \ldots, y^n)}{\partial x^i}\, v^i \,.$$

Soient $y^1, \ldots, y^n, \pi_1, \ldots, \pi_n$ les coordonnées de $\widehat{\Phi}_t(\xi)$. D'après la définition de $\widehat{\Phi}_t$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\Phi}_t(\xi), v \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i v^i \\
&= \left\langle \xi, T\Phi_{-t}(v) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k w^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \varphi^k(-t, y^1, \ldots, y^n)}{\partial x^i}\, v^i \,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \varphi^k(-t, y^1, \ldots, y^n)}{\partial x^i} \,.$$

Le champ de vecteurs dont $\widehat{\Phi}$ est le flot a pour expression locale

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y^i}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial \pi_i}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) ,$$

c'est-à-dire, compte tenu des expressions locales des y^i et π_i données ci-dessus,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial X^k(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) .$$

On a tenu compte de

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^2 \varphi_k(t, y^1, \ldots, y^n)}{\partial t\, \partial x^i}\Big|_{t=0} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \,.$$

On reconnaît l'expression locale du champ de vecteurs ${}^\sharp df_X$.