

# Une introduction au contrôle acoustique actif

Emmanuel Friot

▶ **To cite this version:**

Emmanuel Friot. Une introduction au contrôle acoustique actif. DEA. 2006. cel-00092972

**HAL Id: cel-00092972**
**https://cel.hal.science/cel-00092972**

Submitted on 12 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.




# UNE INTRODUCTION AU
# CONTRÔLE ACOUSTIQUE ACTIF

EMMANUEL FRIOT

*CNRS - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique*

v. 6 octobre 2005



# Table des matières

**Introduction** **5**

**1 Contrôle actif et acoustique** **7**
1.1 Contrôle d'un monopôle par un autre . . . . . 8
1.1.1 Effet global d'un contrôle local . . . . . 8
1.1.2 Conditions d'atténuation globale . . . . . 10
1.1.3 Tracés d'intensité acoustique . . . . . 11
1.1.4 Développement en harmoniques sphériques . . . . . 12
1.2 Contrôle en propagation guidée . . . . . 13
1.2.1 Conditions d'annulation globale du champ . . . . . 13
1.2.2 Détermination du nombre de modes effectivement propagatifs . . . . . 14
1.3 Contrôle en espace clos . . . . . 16
1.3.1 Développement en série de modes à basse fréquence . . . . . 16
1.3.2 Modélisation du champ à plus haute fréquence . . . . . 17
1.4 Contrôle avec un grand nombre de sources . . . . . 18
1.4.1 Contrôle global d'un côté d'une surface fermée . . . . . 18
1.4.2 Une estimation du nombre de transducteurs nécessaires . . . . . 20
1.5 Contrôle actif et psychoacoustique . . . . . 20
1.6 Résumé . . . . . 21

**2 Contrôle actif et automatique** **23**
2.1 Un exemple introductif . . . . . 23
2.2 Contrôle par feedforward optimal . . . . . 25
2.2.1 Contrôle optimal non causal . . . . . 25
2.2.2 Contrôle optimal causal . . . . . 27
2.3 Contrôle adaptatif FXLMS . . . . . 29
2.3.1 L'algorithme LMS monovoie . . . . . 29
2.3.2 L'algorithme FXLMS monovoie . . . . . 31
2.3.3 Robustesse et convergence . . . . . 31
2.3.4 Utilisation pratique . . . . . 32
2.4 Contrôle par feedback . . . . . 33
2.4.1 Effet d'un feedback sur la référence . . . . . 34
2.4.2 Equivalence entre feedback et feedforward . . . . . 35

2.4.3 Contrôle optimal et représentation d'état . . . . . 36
2.5 Résumé . . . . . 37

**3 Quelques applications du contrôle actif 38**
3.1 Le casque anti-bruit actif . . . . . 38
3.2 Contrôle actif et automobile . . . . . 39
3.2.1 Contrôle du bruit moteur . . . . . 40
3.2.2 Contrôle du bruit d'échappement . . . . . 42
3.2.3 Contrôle du bruit de roulement . . . . . 43
3.2.4 Contrôle du bruit aérodynamique . . . . . 45
3.3 Contrôle actif et aéronautique . . . . . 45
3.3.1 Contrôle du bruit d'hélices . . . . . 45
3.3.2 Contrôle du bruit de soufflante . . . . . 46
3.3.3 Contrôle du bruit dû à la couche limite turbulente . . . . . 49
3.3.4 Contrôle des écoulements . . . . . 50
3.4 Autres applications en extérieur . . . . . 50
3.4.1 Contrôle du bruit de transformateur . . . . . 50
3.4.2 Ecrans anti-bruit actifs . . . . . 51

**Conclusion - Résumé 53**

**A Décomposition en valeurs singulières 54**

**B Transferts à phase minimale et factorisation spectrale 56**

**C Sujets d'examen du DEA d'acoustique 58**

**D Bibliographie sommaire 60**

**Index 62**

# Introduction

On appelle contrôle acoustique actif (en anglais *Active Noise Control*) ou anti-bruit l'utilisation de sources de bruit dites *secondaires* pour réduire un bruit indésirable dit *primaire*.

L'idée d'utiliser des sources auxiliaires pour réduire le bruit est quasiment contenue dans la description même de l'acoustique linéaire en termes de fluctuations de pression qui peuvent s'additionner. Parmi les premiers travaux spécifiques au contrôle actif, on peut citer des brevets[1] des années 1930 puis un article[2] au JASA en 1956 et, en France, les travaux de Maurice Jessel à Marseille dans les années 1960. Même si les principes de base du contrôle actif sont simples, un système de contrôle sophistiqué est en général requis pour faire fonctionner efficacement un dispositif d'anti-bruit ; il a fallu en fait attendre la fin des années 1970 pour qu'une application comme le contrôle dans les gaines de ventilation soit véritablement envisageable. Les années 1980 voient ensuite la mise au point du casque anti-bruit actif ; les micro-processeurs spécialisés en traitement du signal (*Digital Signal Processing*) permettent alors aussi la mise en œuvre en temps-réel d'algorithmes de contrôle adaptatifs. Le premier livre[3] entièrement consacré au contrôle actif du bruit paraît en 1992.

Aujourd'hui, de nombreuses équipes travaillent dans le monde entier sur le contrôle actif du bruit. Malgré le haut niveau de spécialisation atteint, le casque anti-bruit et les systèmes pour les gaines de ventilation demeurent les seul produits de contrôle actif fabriqués en grande série. Les solutions passives à un problème de bruit donné s'avèrent en effet souvent moins chères que les solutions actives. Le contrôle actif cherche donc encore son «application miracle». Il apparaît à l'heure actuelle que les matériels et les méthodes développés pour le contrôle actif du bruit peuvent aussi être utilisés pour recréer, en temps-réel, un champ acoustique donné C'est donc peut-être dans le domaine de la *restitution en temps-réel d'environnements sonores* qu'une application du contrôle actif aussi emblématique que le casque anti-bruit verra le jour.

L'objectif de ce document est de donner, à un lecteur ayant des connaissances élémentaires en acoustique et en traitement du signal, des indications en français sur les *possibilités* et les *limites* du contrôle actif du bruit. Le contrôle actif n'est en effet pas une «technique magique» et ses performances sont bien liées aux équations usuelles de la physique. Pour le lecteur dési-

[1] Henri Coanda, *Procédé de protection contre les bruits*, brevet numéro 722.274 délivré le 29 décembre 1931, et P. Lueg, *Process of silencing sound oscillations*, US Patent No. 2,043,416 de 1936 après le brevet allemand DRP 655 508 de 1933

[2] H.F. Olson et E.G. May, *Electronic sound absorber*, Journal of the Acoustical Society of America, **38**, 966-972

[3] P.A. Nelson et S.J. Elliott, *Active Control of Sound*, Academic Press

reux d'en savoir plus, une bibliographie sommaire est donnée en annexe ; on pourra s'y référer à propos de chacun des résultats théoriques présentés ici ; on a choisi de ne pas rappeler cela par des renvois continuels dans le texte.

Pour du contrôle actif il faut disposer judicieusement des sources acoustiques puis les piloter convenablement. Il faut donc faire appel aussi bien à des notions d'acoustique que d'automatique et de traitement du signal en temps-réel. Dans une première partie on va donc s'intéresser à l'interaction de sources secondaires avec un champ acoustique donné. On montrera les limites effectivement imposées au contrôle actif par la propagation acoustique. Dans une deuxième partie, on se penchera sur l'obtention effective des signaux de commande à fournir aux sources secondaires ; cette fois c'est la causalité obligatoire des contrôleurs qui limitera leurs performances. Enfin dans une troisième partie on décrira quelques-unes des applications industrielles du contrôle actif en présentant notamment quelques résultats tirés de travaux conduits au LMA.

# Chapitre 1

# Contrôle actif et acoustique

Pour concevoir un dispositif de contrôle actif, il faut savoir comment des sources de bruit secondaires peuvent interagir avec un champ primaire donné. Il faut notamment savoir si, compte tenu du milieu de propagation où l'on se trouve, une ou plusieurs sources sont bien capables de réduire le bruit et si cette réduction sera *locale* (i.e. restreinte à quelques points de l'espace) ou si elle peut être *globale* ; il faut également se forger quelques règles générales pour savoir combien de sources secondaires et de capteurs utiliser et où les disposer. Pour cela, le début de ce chapitre est consacrée à l'étude de quelques situations académiques où le contrôle est fait à l'aide d'un petit nombre de transducteurs. On va montrer ensuite que, même si un contrôle global du champ acoustique est théoriquement possible, le nombre de transducteurs utilisables en pratique restreint le champ d'application du contrôle actif : pour une atténuation dans une zone donnée le nombre de transducteurs à utiliser augmente rapidement avec la fréquence.

On va se placer ici dans le cadre de l'acoustique linéaire non dissipative des milieux stationnaires ; on va notamment supposer de façon plus ou moins réaliste que :

- le niveau de bruit est «raisonnable» (y compris devant les sources) ;
- le milieu ne comprend pas d'écoulement non uniforme ;
- les transducteurs (sources et capteurs) utilisés pour le contrôle sont linéaires invariants ;
- le milieu est stationnaire (pas d'évolution de la géométrie ou de la célérité du son avec le temps ... ).
- la dissipation est négligeable dans le milieu de propagation et à ses limites.

Ces hypothèses n'ont pas forcément besoin d'être vérifiées pour faire effectivement fonctionner un dispositif de contrôle actif ; en revanche elles sont commodes pour établir analytiquement des résultats intéressants, les fluctuations de pression étant alors solution de l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \tag{1.1}$$

où $c$ est la célérité du son, $\rho_0$ la masse volumique et $q$ la densité volumique de *débit* de sources telles que des enceintes acoustiques présentes dans le milieu. Il faut associer les fluctuations de la vitesse dans le fluide à celles de la pression pour prendre en compte les conditions aux limites usuelles et pour avoir une idée des transferts énergétiques liées à la propagation acoustique. La vitesse et la pression sont couplées par exemple via l'équation de conservation de la quantité de

mouvement (équation d'Euler) linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \tag{1.2}$$

Pour ne considérer que des sons purs à la pulsation ω, on peut poser a priori $p = \Re(\tilde{p}\mathrm{e}^{j\omega t})$[1]. Dans ce cas l'équation des ondes se transforme en l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta\tilde{p} + k^2\tilde{p} = -j\omega\rho_0\tilde{q} \tag{1.3}$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde et où $q = \Re(\tilde{q}\mathrm{e}^{j\omega t})$. De même l'équation (1.2) s'écrit en son pur : $\rho_0 j\omega\tilde{\mathbf{v}} = -\nabla\tilde{p}$. On omettra le symbole ˜ dans la suite pour désigner les grandeurs complexes considérées quand on se restreint aux sons purs.

## 1.1 Contrôle d'un monopôle par un autre

L'objectif de cette section est de montrer que, même dans le cas très simple d'une source de bruit ponctuelle en espace libre, les modalités de la propagation acoustique font qu'il est difficile de réduire le bruit par contrôle actif dans une zone de dimensions significatives.

On va supposer ici que le bruit primaire est produit en champ libre par une source monopôlaire, idéalisation d'une source omnidirectionnelle (telle qu'une sphère pulsante) dont les dimensions sont petites devant la longueur d'onde. Si $q_p$ est le débit de cette source, la pression acoustique primaire $p_p$ solution de l'équation (1.3) est donnée par :

$$p_p(\mathbf{M}) = \frac{j\omega\rho_0 q_p}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-jkr_p}}{r_p} \tag{1.4}$$

où $r_p$ désigne la distance entre le monopôle et le point d'écoute **M**.

### 1.1.1 Effet global d'un contrôle local

Lorsque qu'une source secondaire de débit $q_s$, elle-aussi monopôlaire, est mise en marche, la pression totale s'écrit :

$$p(\mathbf{M}) = \frac{j\omega\rho_0 q_p}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-jkr_p}}{r_p} + \frac{j\omega\rho_0 q_s}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-jkr_s}}{r_s} \tag{1.5}$$

On pourra donc annuler parfaitement le bruit en un point **M** en pilotant la source secondaire de telle sorte que :

$$q_s = -q_p\,\frac{r_s}{r_p}\,\mathrm{e}^{-jk(r_p-r_s)} \tag{1.6}$$

[1] On peut tout aussi bien comme certains auteurs préférer poser $p = \Re(\tilde{p}\mathrm{e}^{-i\omega t})$ ; attention aux conséquences de l'une ou l'autre convention, par exemple sur l'expression des fonctions de Green ou le signe de la partie imaginaire d'une impédance de surface...

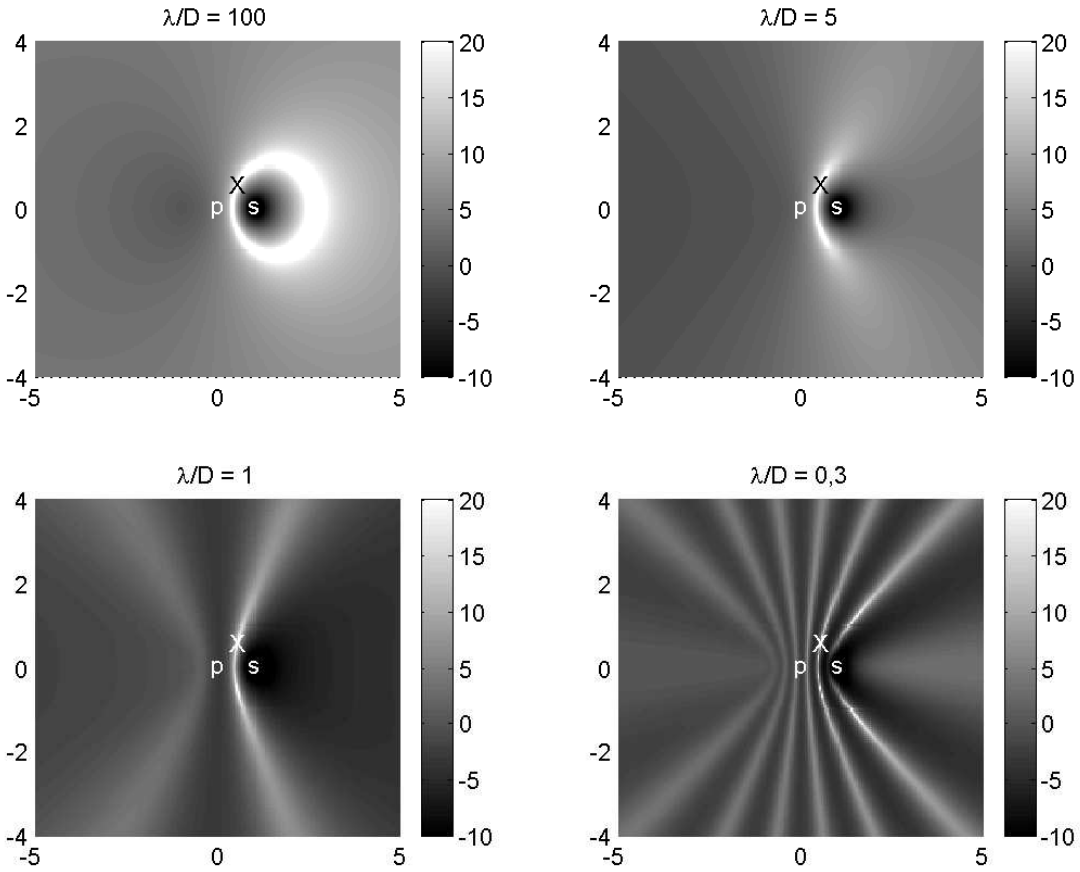



FIG. 1.1 – Atténuation (en dB) obtenue par contrôle avec un monopôle secondaire (s) du bruit produit en un point (X) par un monopôle primaire (p)

En revanche, avec une telle commande, il n'y a aucune raison pour que la pression acoustique soit nulle en un autre point quelconque $\mathbf{M}'$ ; la figure 1.1 montre par exemple, à plusieurs fréquences, l'atténuation obtenue dans le plan $z = 0$ lorsque le bruit est contrôlé au point de coordonnées $(0,5;0,5;0)$ avec les monopôles en $(-1;0;0)$ et $(1;0;0)$. Sur ces figures on constate que le bruit n'est réduit de façon importante que dans des zones étroites ; ces zones rétrécissent lorsque la fréquence s'élève.

### 1.1.2 Conditions d'atténuation globale

Un résultat intéressant peut être établi lorsque l'on cherche à annuler le bruit en un point éloigné des monopôles primaire et secondaire. Dans ce cas, on peut simplifier l'équation (1.5) par une *approximation de champ lointain*. Avec les notations de la figure 1.2, la pression acous-

tique s'écrit alors :

$$p(\mathbf{M}) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-jkr_p}}{r_p}\left[q_p + q_s\,\mathrm{e}^{-jkD\cos\theta}\right] \tag{1.7}$$

Le bruit est annulé en $\mathbf{M}$ si $q_s = -q_p\mathrm{e}^{-jkd\cos\theta}$. La pression en un autre point $\mathbf{M}'$ de coordonnées $(r'_p, \theta')$ vaut alors :

$$p(\mathbf{M}') = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-jkr'_p}}{r'_p}\,q_p\,\left[1-\mathrm{e}^{jkD(\cos\theta-\cos\theta')}\right] \tag{1.8}$$

On peut maintenant calculer le ratio entre la pression avec contrôle et la pression sans contrôle au point $\mathbf{M}'$ :

$$J = \frac{p(\mathbf{M}')}{p_p(\mathbf{M}')} = \left[1-\mathrm{e}^{jkD(\cos\theta-\cos\theta'}\right] \tag{1.9}$$

En remarquant que $|1-\mathrm{e}^{j\alpha}|^2 = 2(1-\cos\alpha)$, on obtient :

$$|J|^2 = 2(1-\cos[kD(\cos\theta-\cos\theta')]) \tag{1.10}$$

Par conséquent on aura $|J|^2 < 1$ si :

$$\cos[kD(\cos\theta-\cos\theta')] > \frac{1}{2} \tag{1.11}$$

ce qui sera vérifié pout tout $\theta$ et pour tout $\theta'$ si $2kD < \pi/3$ donc finalement si :

$$D < \frac{\lambda}{12} \tag{1.12}$$

Dans le cas particulier où le point d'annulation se trouve à égale distance des deux monopôles, on a alors $\cos\theta = 0$ et $q_s = -q_p$ et l'inégalité (1.11) conduit à une réduction du bruit dans tout l'espace en champ lointain si :

$$D < \frac{\lambda}{6} \tag{1.13}$$

Ce petit calcul montre d'une part qu'annuler avec un monopôle secondaire le bruit produit par un monopôle primaire en un point quelconque ne réduit le bruit dans tout l'espace que si la distance entre les deux monopôles est inférieure à un douzième de longueur d'onde. D'autre part dans le meilleur des cas le bruit ne peut être réduit dans tout l'espace autour des monopôles que s'ils sont écartés de moins d'*un sixième de longueur d'onde*, ce qui est peu. On verra en section 1.4 qu'avec un grand nombre de sources secondaires et de points de minimisation autour du monopôle primaire un contrôle très efficace du bruit est néanmoins possible *dans tout l'espace*.

### 1.1.3 Tracés d'intensité acoustique

Dans le cas où le monopôle secondaire est suffisamment proche du monopôle primaire, la pression acoustique et donc l'*énergie acoustique* rayonnée peuvent être réduites dans tout l'espace par contrôle actif. Cette disparition d'une partie de l'énergie présente sans contrôle a laissé perplexe plus d'une personne aux débuts du contrôle actif, certains clamant que cette énergie devait bien devoir se retrouver quelque part dans l'espace en pratique.

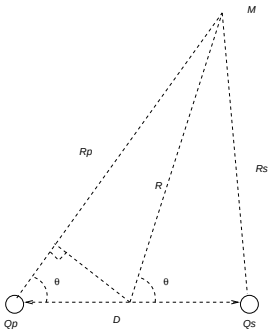



FIG. 1.2 – Notations pour l'approximation de champ lointain

En fait ce sont bien les *haut-parleurs* faisant office de sources primaire et secondaire qui peuvent absorber de l'énergie acoustique. Il faut d'abord se rappeler que le *rendement* acoustique d'un haut-parleur est typiquement inférieur à 1% ; l'essentiel de l'énergie qui lui est fournie est dissipée dans les circuits électriques. Il est par conséquent possible que, dans un dispositif de contrôle actif, un ou plusieurs haut-parleurs *absorbent* de l'énergie sans qu'aucune anomalie ne puisse être constatée. Il s'avère même que cette absorption est difficile à observer expérimentalement en pratique tant l'énergie acoustique absorbée est faible devant les énergies électriques présentes !

Pour illustrer ensuite le fait que des monopôles peuvent absorber de l'énergie, on peut tracer des vecteurs *intensité acoustique*. L'intensité est définie par $\mathbf{i} = p\mathbf{v}$ où la vitesse acoustique $\mathbf{v}$ peut être déduite de la pression $p$ solution de l'équation d'Helmholtz (1.3) à partir de l'équation de conservation de quantité de mouvement linéarisée (1.2) Avec une onde monofréquentielle cette équation devient $\rho_0 j\omega\mathbf{v} = -\nabla p$. L'intensité acoustique moyennée sur une période vaut dans ce cas $\mathbf{i} = \Re(p\mathbf{v}^*)/2$, on la qualifie d'*active* par rapport à l'intensité réactive définie par $\Im(p\mathbf{v}^*)/2$ qui renseigne, elle, sur l'énergie stockée localement dans le champ proche d'une source. Dans le cas du monopôle, seule la composante radiale de la vitesse est non nulle et elle vaut :

$$v_r = \frac{1}{\rho_0 c}(1+jkr)p \tag{1.14}$$

La figure 1.3 montre les intensités active et réactive dans les même conditions que la figure 1.1 pour $\lambda/D = 10$ ; on voit bien l'intensité (active) «rentrer» dans un des monopôles.

Pour terminer on soulignera que l'absorption d'énergie par les sources primaires ou secondaires n'est pas le seul mécanisme de redistribution de l'énergie lors de la mise en œuvre d'un contrôle actif ; on l'a mis en évidence ici parce que les monopôles étaient relativement proches. Si les deux monopôles étaient très éloignés l'un de l'autre, l'intensité que chacun rayonne serait égale à celle rayonnée en l'absence de l'autre monopôle. Dans ce cas, on aurait en un point contrôle actif du bruit simplement par *interférence destructive* des deux pressions produites ; on observerait au final une augmentation de l'énergie globale. Un troisième mécanisme peut aussi être identifié notamment dans les conduits : le fonctionnement de sources secondaires modifie la condition aux limites qui détermine le rayonnement acoustique d'une source primaire de débit fixé ; dans ce cas on peut dire que le contrôle se fait aussi en partie via une modification de

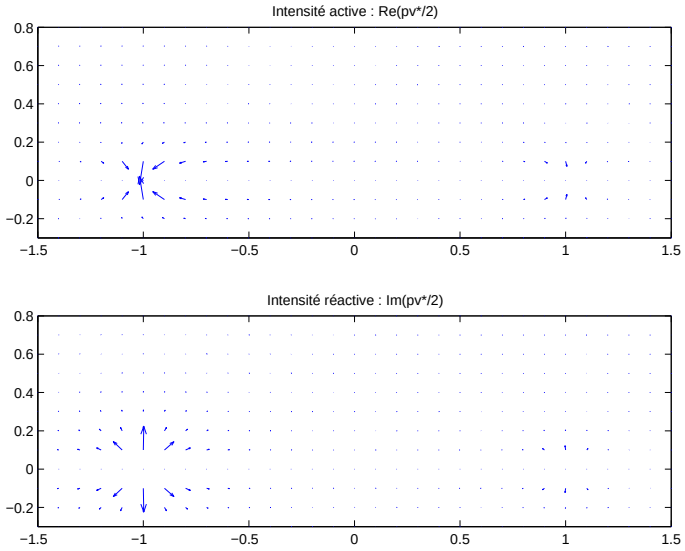



FIG. 1.3 – Intensité acoustique après contrôle pour $\lambda/D = 10$

l'*impédance de rayonnement* de la source primaire. En pratique tous ces mécanismes peuvent être présents ; la mise en œuvre effective d'un contrôle optimal peut être être faite sans savoir quel mécanisme plutôt qu'un autre est concerné.

### 1.1.4 Développement en harmoniques sphériques

Un haut-parleur dans une enceinte peut être considéré, à basse fréquence, comme un monopôle. A plus haute fréquence il devient directif ; de même la plupart des sources primaires que l'on sera amené à combattre par contrôle actif ne sont pas assimilables à des monopôles. Pour simuler, comme on l'a fait pour un monopôle, le contrôle actif d'une source à directivité complexe à l'aide de sources secondaires réelles, il est pratique d'utiliser le *développement en harmoniques sphériques* du champ dans une couronne sphérique ne comprenant pas de sources :

$$p(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n^{(1)}(kr) \sum_{m=-n}^{+n} a_m^n P_n^{|m|}(\cos\theta)\, e^{jm\phi} + \sum_{n=0}^{+\infty} h_n^{(2)}(kr) \sum_{m=-n}^{+n} b_m^n P_n^{|m|}(\cos\theta)\, e^{jm\phi} \tag{1.15}$$

ou $h_n^{(1)}$ est la fonction de Hankel sphérique d'ordre $n$ et de première espèce et $P_n^{|m|}$ est la fonction de Legendre de degré n et d'ordre $|m|$. Les deux sommations correspondent à des ondes convergeant depuis l'infini vers l'origine ou à des ondes divergeant depuis l'origine. Chacun des termes du développement correspond au rayonnement d'un *multipôle* association élémentaire de monopôles, placés à l'origine ou à celui d'un «*multipuits*». Le nombre de termes à prendre en compte pour évaluer précisément la série (1.15) reflète la complexité du rayonnement de la source.

## 1.2 Contrôle en propagation guidée

La réduction du bruit dans les gaines de ventilation a été une des premières applications du contrôle actif ; elle demeure une des seules a avoir conduit à la mise sur le marché de «produits» du contrôle actif de série. On va voir dans cette section que la propagation en conduit est effectivement un cas favorable pour le contrôle actif. On peut, avec un nombre limité de sources à basse fréquence, annuler exactement dans un conduit le bruit dans les tronçons ne comprenant pas de sources.

En dehors des gaines de ventilation, les cheminées, les lignes d'échappement, les entrées de réacteur d'avion mais aussi le conduit auditif ont donné lieu à des études de contrôle actif en propagation guidée. Les instruments de musique à vent, «le chenal océanique» et l'atmosphère dans certaines conditions météorologiques sont d'autres exemples de guides d'onde.

### 1.2.1 Conditions d'annulation globale du champ

D'une façon générale, si un conduit est rectiligne et de section constante, l'équation d'Helmholtz (1.3) peut être séparée en termes de coordonnée longitudinale $z$ et de coordonnées transversales $x,y$. Sans écoulement et pour un conduit à parois rigides, la pression dans les tronçons ne comprenant pas de sources s'écrit, à une pulsation donnée $\omega$, comme une somme *finie* de «modes propagatifs» :

$$p(x,y,z,\omega) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\omega)\phi_n(x,y)\,\mathrm{e}^{-jk_nz} + a_{-n}(\omega)\phi_n(x,y)\,\mathrm{e}^{+jk_nz} \tag{1.16}$$

où les $\phi_n$ sont les fonctions propres de l'équation d'Helmoltz pour le problème de Neumann associé à la section du conduit. Les coefficients $a_n$ et $a_{-n}$ du développement (1.16) changent au passage des sections comportant des sources de bruit. Dans un conduit infini et en aval de toute source, les ondes se propagent dans un seul sens ; l'expression (1.16) se réduit à :

$$p(x,y,z,\omega) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\omega)\phi_n(x,y)\,\mathrm{e}^{-jk_nz} \tag{1.17}$$

Dans le cas général les conditions aux limites en extrémité de conduit permettent de relier linéairement les coefficients $a_{-k}$ aux coefficients $a_l$. Pour quelques sections de forme simple, les fonctions propres $\phi_n$ peuvent être obtenues par séparation des variables transversales ; dans le cas général on peut les obtenir numériquement par exemple via une modélisation par éléments finis. Enfin au voisinage immédiat des sources, les «modes évanescents» contribuent aussi à la pression ;

Dans les tronçons ne comprenant pas de sources, le champ est donc parfaitement caractérisé par la donnée du vecteur $\mathbf{A} = (a_1 \ldots a_N)^t$ des amplitudes modales dont il est une fonction linéaire ; les amplitudes modales représentent les «degrés de liberté effectifs» du champ dans le conduit. Si un réseau de capteurs est disposé dans le conduit, il existe une matrice $\mathbf{G}$ reliant le vecteur des amplitudes modales au vecteur $\mathbf{P}$ des pressions effectivement mesurées, $\mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{A}$. Réciproquement, avec des sources linéaires dans le conduit (mais pas dans le tronçon considéré), il existe une matrice $\mathbf{H}$ qui relie les signaux de commande $\mathbf{U}$ envoyés aux sources au vecteur

des amplitudes modales : $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{U}$. A partir de ces expressions on peut discuter de l'efficacité d'un système de contrôle actif ; le vecteur des amplitudes modales lorsqu'un bruit brimaire et des bruits secondaires se propagent dans le tuyau sera de la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_p + \mathbf{H}\,\mathbf{U} \tag{1.18}$$

Comme expliqué en section 1.1.3, les amplitudes modales du champ primaire $\mathbf{A}_p$ peuvent parfois dépendre des commandes secondaires $\mathbf{U}$. Que cela soit le cas ou non, le vecteur des amplitudes modales globales —et donc le champ en tout point en aval des sources— sera nul si $\mathbf{A}_p + \mathbf{H}\mathbf{U} = 0$. Il existera donc un vecteur des commandes qui annule le champ si la matrice $\mathbf{H}$ est de rang supérieur ou égal au nombre $N$ de modes propagatifs dans le conduit ; concrètement cela sera le cas dès que le nombre de sources secondaires est égal au nombre de modes propagatifs si ces sources sont disposées de telle sorte que la matrice $\mathbf{H}$ ne soit pas singulière. Cette dernière condition sera vérifiée de façon presque sûre avec un nombre modéré de modes si les sources sont disposées de façon aléatoire ; avec un très grand nombre de modes et un petit nombre de transducteurs, la position des sources et des capteurs peut en revanche modifier significativement l'efficacité d'un contrôle. Si le nombre de sources est inférieur au nombre $N$ de modes propagatifs, la pression peut être minimisée mais pas totalement annulée ; si le nombre est supérieur à $N$, plusieurs vecteurs de commande différents peuvent conduire à l'annulation de la pression.

Comme on le verra par ailleurs au chapitre 2, la mise en œuvre d'un contrôle actif est grandement simplifiée si l'on dispose de signaux mesurant directement les quantités à minimiser. Puisqu'avec un réseau de capteurs on mesure un vecteur de pression $\mathbf{P} = \mathbf{G}\mathbf{A}$, annuler $\mathbf{P}$ impliquera l'annulation de $\mathbf{A}$ si la matrice $\mathbf{G}$ est de rang plein c'est à dire notamment si le nombre de *capteurs* est supérieur au nombre $N$ de modes propagatifs.

En conclusion, un contrôle actif global du champ dans les tronçons sans sources est possible dans un conduit avec un nombre de sources secondaires supérieur ou égal au nombre de modes propagatifs. Si on dispose d'un nombre de capteurs supérieur à ce même nombre, minimiser la pression sur ces capteurs impliquera l'annulation totale du champ en aval des sources. En pratique l'atténuation obtenue en conduit peut dépasser 60dB ; elle est plus limitée par la qualité du système électronique de contrôle que par l'acoustique.

### 1.2.2 Détermination du nombre de modes effectivement propagatifs

A basse fréquence (par exemple en deça de $c/2a$ pour un conduit de section carrée de côté $a$), *un seul mode* est propagatif et il est associé à des fronts d'onde plans qui s'éloignent dans le conduit. Une seule source secondaire et un seul capteur de minimisation suffisent pour annuler la pression acoustique en aval du système de contrôle actif ; c'est pourquoi les conduits (en l'occurence les gaines de ventilation) ont donné lieu aux premières applications du contrôle actif.

A une fréquence plus élevée (ou pour des conduits de plus grande section), le nombre exact de modes propagatifs s'obtient via l'extraction des fonctions propres de l'équation d'Helmholtz. Pour un conduit tel qu'une entrée de réacteur d'avion et pour un bruit à $2kHz$ comme la première raie du bruit de soufflante (cf. la section 3.3.2), plusieurs dizaines de modes sont propagatifs et autant de transducteurs sont en principe nécessaires pour un contrôle actif global. En pratique,

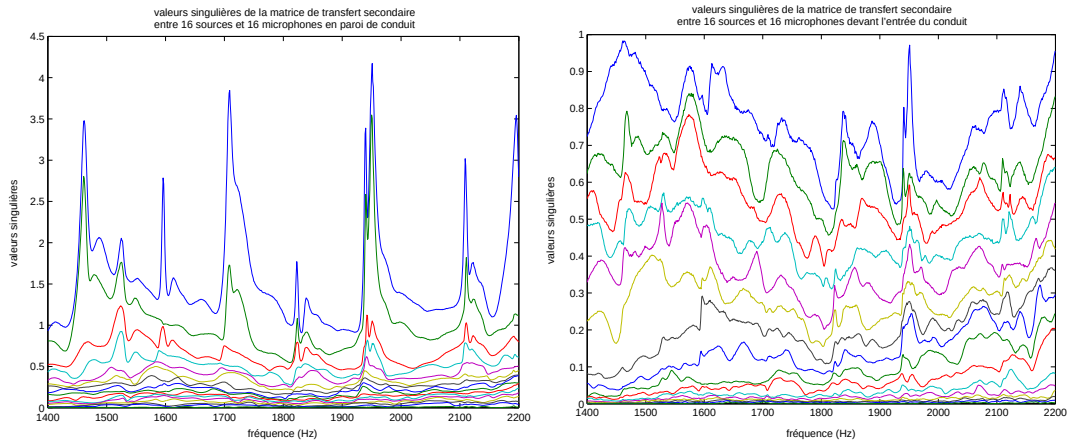



FIG. 1.4 – Tracés de valeurs singulières de matrices de transfert

il s'avère qu'une source de bruit primaire donnée n'excite pas tous les modes propagatifs et que seule une partie d'entre eux contribue significativement à la propagation du bruit dans le conduit ; le nombre de transducteurs nécessaires à un contrôle actif peut être réduit.

Une indication pratique du nombre de transducteurs à utiliser peut être obtenue en disposant un grand nombre de sources et de capteurs dans le conduit. On peut alors effectuer, fréquence par fréquence, la *décomposition en valeurs singulières* (cf. l'annexe A) de la matrice de transfert entre les sources et les capteurs. En traçant les valeurs singulières, on observe la contribution de chacun des modes à la matrice de transfert. La figure 1.4 montre à gauche ce tracé pour une matrice de transfert mesurée, dans l'entrée d'un réacteur, entre 16 chambres de compression et 16 microphones en paroi. On constate que cette matrice de transfert peut être approchée avec moins de 10% d'erreur par une matrice de rang 6 ; par conséquent, utiliser un plus grand nombre de sources ou de capteurs n'améliorerait que peu en pratique les résultats d'un contrôle actif visant à atténuer le bruit dans le conduit. La figure 1.4 montre à droite la matrice de transfert entre les même sources et 16 microphones disposés devant l'entrée du réacteur ; cette figure montre qu'un plus grand nombre de capteurs est nécessaire pour réduire le bruit à l'extérieur que pour le réduire à l'intérieur. Cela s'explique par le fait que les modes fortement excités dans le conduit sont précisément ceux qui sont peu amortis par couplage avec l'extérieur, des modes qui contribuent peu au niveau dans le conduit peuvent contribuer fortement au niveau à l'extérieur. Enfin le «dédoublement» des pics sur la figure 1.4 est dû à un écoulement à 4 m/s dans le conduit : les modes sont associés à des vitesses légèrement différentes suivant qu'ils se propagent dans un sens ou dans l'autre.

Une fois effectuée la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert secondaire, le bruit primaire peut être décomposé sur la base des vecteurs singuliers à gauche. Les composantes correspondantes indiquent comment la source primaire excite les modes tels qu'ils sont détectés par les capteurs.

## 1.3 Contrôle en espace clos

On va rappeler ici qu'à basse fréquence peu de modes contribuent significativement au bruit dans une cavité ; un contrôle actif global du bruit y est alors envisageable. Cette situation correspond au cas de la fréquence fondamentale du bruit moteur dans une voiture mais aussi à celui du volume contenu sous la coquille d'un casque anti-bruit.

### 1.3.1 Développement en série de modes à basse fréquence

La pression acoustique dans une cavité à bords rigides peut être exprimée sous la forme d'une série de modes :

$$p(x,y,z,\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n(\omega)}{\omega_n^2 - \omega^2}\, \phi_n(x,y,z) \tag{1.19}$$

Les pulsations propres $\omega_n$ et les modes propres $\phi_n$ de la cavité peuvent être calculés par exemple via une Modélisation par Elements Finis ou, pour quelques géométries simples, par séparation de variables. Dans le cas d'une cavité parallélépipédique, les $\phi_n$ sont, à un coefficient de normalisation prêt, de la forme $\cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z$ et $\omega_n^2 = c^2\,(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$, les nombres d'ondes partiels $k_\alpha$ étant des multiples de $\pi/L_\alpha$ où $L_\alpha$ est la longueur du côté correspondant de la cavité.

A partir de la série modale (1.19), un raisonnement analogue à celui de la section précédente montre qu'une infinité de transducteurs est en principe nécessaire pour un contrôle global du bruit dans la cavité. Toutefois la plupart des sources de bruit conduisent à des amplitudes modales $\alpha_n(\omega)$ qui varient lentement avec la fréquence ; un monopôle conduit par exemple à des coefficients $\alpha_n$ en $j\omega$. Par conséquent, chacun des termes de la série (1.19) n'apporte en général de contribution significative qu'*au voisinage de sa pulsation de résonance* $\omega_n$. Pour un bruit dans une bande de fréquence donnée, le nombre de modes à contrôler et par conséquent le nombre de sources secondaires et de capteurs à utiliser pour du contrôle actif sera typiquement comparable au nombre de modes dont la fréquence de résonance est dans la bande à traiter.

Le nombre de modes contribuant à la réponse acoustique d'une cavité augmente rapidement avec la fréquence. Pour une cavité parallélépipédique, une bonne approximation du nombre de modes dont la fréquence de résonance est inférieure à $f$ est par exemple donnée par :

$$N(f) = \frac{4\pi f^3 V}{3c^3} + \frac{\pi f^2 S}{4c^2} + \frac{fL}{8c} \tag{1.20}$$

où $L$ est la somme des dimensions de la cavité, $S$ la surface totale de ses parois et $V$ son volume. En dérivant cette expression par rapport à la fréquence il apparaît bien le nombre de modes dans une bande de fréquence donnée augmente comme le carré de la fréquence. Le nombre de transducteurs nécessaires à un contrôle actif global du bruit dans la cavité devient donc rapidement supérieur à ce qu'on peut utiliser en pratique si on se base sur le nombre de modes à traiter. On verra néanmoins en section 1.4 qu'un contrôle global n'est pas exclu même si le nombre de modes qui contribuent au bruit est très élevé.

Comme pour le contrôle dans les guides d'onde, la décomposition en valeurs singulières d'une matrice de transfert mesurée en cavité peut renseigner sur le nombre de modes qui contribuent significativement à la pression. La figure 1.5 montre la décomposition en valeurs singulières d'une matrice de transfert entre 9 haut-parleurs et 32 microphones dans une cavité

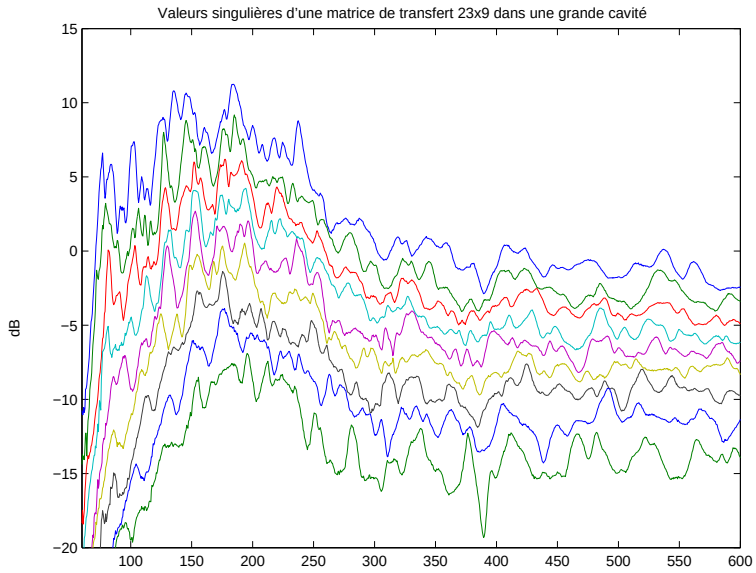



FIG. 1.5 – Valeurs singulières d'une matrice de transfert en cavité

reproduisant l'habitacle d'un avion bi-moteur. Entre 80Hz (fréquence en deça de laquelle les haut-parleurs sont inefficaces) et 250Hz, les pics observés sur la plus grande valeur singulière sont typiques de résonances isolées. Quelques transducteurs peuvent suffirent à un contrôle efficace dans toute la cavité. En revanche au delà de 250Hz le bruit dans la cavité ne peut plus être controlé en agissant individuellement sur quelques modes.

### 1.3.2 Modélisation du champ à plus haute fréquence

Au delà d'une certaine fréquence, le bruit dans une cavité peut être assimilé à un *champ diffus*, situation où l'on considère que le bruit en tout point est dû à la somme d'ondes planes provenant de toutes les directions et dont les phases relatives sont aléatoires. Cette description n'est pas antagoniste avec une représentation modale : chaque mode propre d'une cavité parallélépipédique correspond par exemple à la superposition de 8 ondes planes, ce qu'on peut constater à partir du développement :

$$\cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z = (e^{jk_x x} + e^{-jk_x x})(e^{jk_y y} + e^{-jk_y y})/8(e^{jk_z z} + e^{-jk_z z}) \qquad (1.21)$$

Le nombre de modes contribuant à la réponse de la cavité à une fréquence élevée fait qu'on peut effectivement considérer la pression comme due à un grand nombre d'onde planes.

On considère souvent que la fréquence à partir de laquelle le champ peut être considéré comme diffus dans une cavité est la *fréquence de Schroeder*, fréquence pour laquelle le nombre moyen de fréquences de résonance dans la bande passante à -3dB d'une résonance quelconque est égal à 3. Cette fréquence peut être évaluée par $f_{Sch} = 2000(T_{60}/V)^{1/2}$ où $V$ est le volume de

la cavité et $T_{60}$ le *temps de réverbération* nécessaire à une décroissance du bruit de 60dB après extinction des sources.

Une propriété importante des champs diffus pour la mise en œuvre pratique d'un système de contrôle actif concerne la *corrélation* entre les pressions mesurées en deux points distincts. Sous les hypothèses de champ diffus on montre que cette corrélation n'est fonction que de la distance $\Delta\mathbf{r}$ entre deux points et qu'elle est de la forme :

$$\gamma(\Delta\mathbf{r}) = \frac{< p(\mathbf{r})p(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})^* >}{< |p(\mathbf{r})|^2 >} = \operatorname{sinc} k\Delta\mathbf{r} = \frac{\sin k\Delta\mathbf{r}}{k\Delta\mathbf{r}} \tag{1.22}$$

où $< . >$ désigne l'opération de moyenne spatiale. On verra au chapitre 2 l'influence que peut avoir une telle fonction de corrélation sur l'efficacité d'un dispositif pratique de contrôle actif.

## 1.4 Contrôle avec un grand nombre de sources

### 1.4.1 Contrôle global d'un côté d'une surface fermée

On a vu en section 1.1 que l'annulation avec un monopôle de la pression en un point ne conduisait à une réduction significative du bruit qu'en une zone de l'espace très étroite. Lorsqu'on utilise plusieurs points de minimisation et plusieurs sources secondaires, on obtient plusieurs zones d'atténuation qui peuvent être jointives si les points de minimisation sont suffisamment proches les uns des autres ; de cette façon on peut étendre, dans une certaine mesure, la zone de minimisation.

Une situation très intéressante apparaît lorsque les zones où le bruit a été fortement réduit forment une *surface fermée S* avec les sources primaires et secondaires situées du même côté de cette surface. En effet, la seule solution à l'équation d'Helmholtz avec pression nulle au bord (problème de Dirichlet homogène ) est $p = 0$ dans tout le domaine, sauf aux fréquences de résonance du volume délimité par la surface. Par conséquent, assurer $p = 0$ sur $S$ assure $p = 0$ dans *tout le volume* situé de l'autre côté des sources par rapport à $S$ en dehors de ces fréquences. Pour assurer $p = 0$ dans le volume aux fréquences de résonance, il est nécessaire d'imposer $p = 0$ dans le volume ou $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ à sa surface en un nombre de points suffisants [2].

La figure 1.6 montre, pour différentes fréquences, le contrôle obtenu dans un disque à l'aide de 32 sources secondaires et de 32 points de minimisation lorsque le bruit primaire est une onde plane. Cette simulation de contrôle a été faite en 2D, la fonction de Green étant en 2D de la forme $\frac{j}{4}H_0^{(2)}(kr)$. On constate qu'une atténuation importante du bruit à l'intérieur du polygone défini par les points de minimisation est possible ; il apparaît que pour cela *deux points de minimisation par longueur d'onde* sont nécessaires le long du polygone de points de minimisation.

D'une façon plus formelle, la pression sur une surface fermée $S$ ne contenant pas de source est reliée à celle dans le volume qu'elle délimite par une représentation intégrale du champ :

$$p(\mathbf{M}) = \int_S G(\mathbf{M},\mathbf{M}')\partial_n p(\mathbf{M}') - p(\mathbf{M}')\,\partial_n G(\mathbf{M},\mathbf{M}')\,d\mathbf{M}' \tag{1.23}$$

[2] ce procédé n'est pas sans analogie avec la méthode CHIEF utiliser pour traiter les "fréquences singulières" rencontrées dans les méthodes d'éléments finis de frontière

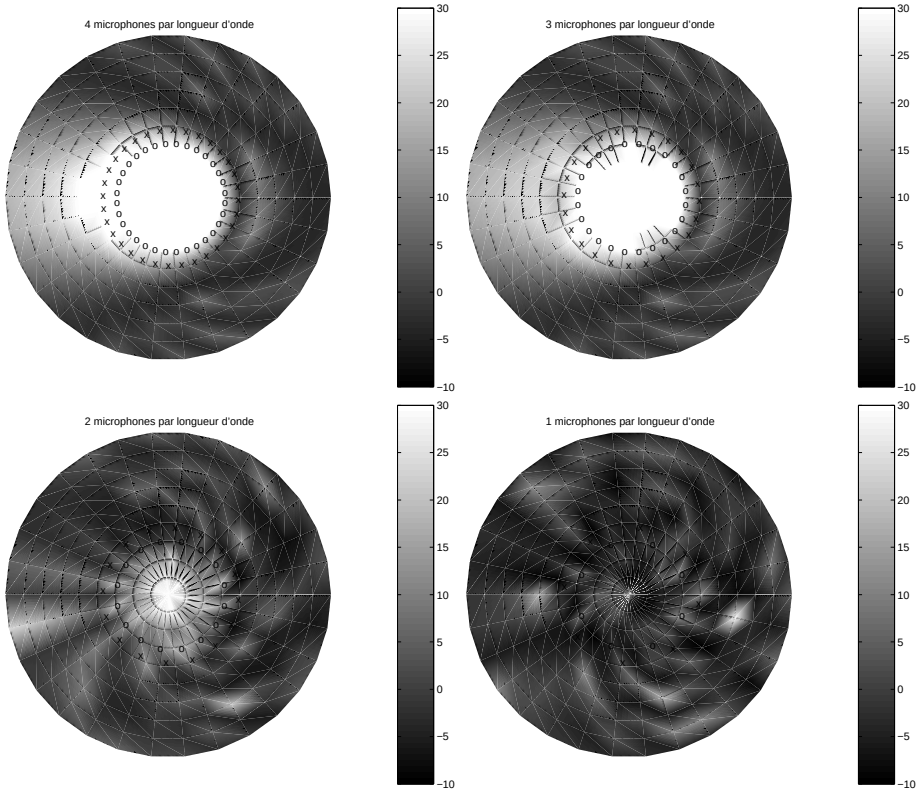



FIG. 1.6 – Atténuation avec 32 monopôles (x) du bruit produit en 2D par une onde plane en 32 points (o)

où $G$ est une fonction de Green pour l'équation d'Helmoltz. La pression est donc parfaitement définie dans le volume délimité par la surface $S$ par sa valeur et la valeur de son gradient normal sur $S$ ; un contrôle en surface permet d'assigner les valeurs de la pression dans le volume. En fait, comme on l'a vu plus haut, annuler la pression au bord suffira pour l'annuler partout dans $S$ en dehors des fréquences de résonance du volume correspondant.

### 1.4.2 Une estimation du nombre de transducteurs nécessaires

Des expériences et des simulations dans des configurations variées (onde plane en champ libre, cavités etc...) ont montré qu'il fallait typiquement (comme en figure 1.6) «trois points de minimisation par longueur d'onde» pour que les zones de minimisation obtenues par contrôle acoustique actif apparaissent comme jointives. Si l'on cherche à réduire le bruit d'un côté ou de l'autre d'un cube de côté $L$, il faudra, pour une longueur d'onde $\lambda$ donnée, environ $3a/\lambda$ points de minimisation par côté. Avec un maillage régulier cela conduira à environ $6 \times 9(a/\lambda)^2$ tranducteurs. Par conséquent, pour un contrôle jusqu'à la fréquence $f$, une estimation du nombre de transducteurs nécessaires est :

$$N = \frac{54a^2 f^2}{c^2} \tag{1.24}$$

Cette formule indique par exemple que, pour réduire le bruit dans un cube d'un mètre de diamètre en decà de 340Hz, une cinquantaine de points de minimisation sont nécessaires, ce qui est imaginable avec les technologies disponibles aujourd'hui. A 3400Hz il faudrait en revanche 5000 points de minimisation, ce qui n'est pas envisageable. Même avec un grand nombre de sources et de points de minimisation, il apparaît encore qu'un contrôle actif global sera en général réservé aux basses fréquences.

## 1.5 Contrôle actif et psychoacoustique

On a montré au cours des sections précédentes qu'il était possible, avec un nombre fini de sources secondaires, d'atténuer significativement par contrôle actif le bruit à basse fréquence dans une zone donnée de l'espace. Malheureusement cette atténuation ne se traduit pas forcément par une atténuation du bruit *perçu* ; il faut prendre en compte les mécanismes mis en évidence par la psychoacoustique pour évaluer l'effet audible d'un contrôle actif.

En premier lieu, le dB ou le dB(A) ne rendent pas bien compte de la *sonie*, l'intensité subjective d'un bruit, qui est une fonction non linéaire de la pression acoustique. Le dB ne rend pas compte du fait que l'oreille humaine perçoit mieux les sons entre 1 et 4 kHz ; de son côté le dB(A) minimise l'importance des basses fréquence quel que soit leur niveau alors qu'à fort niveau la sonie associée à un son basse fréquence est proche de celle d'un son de fréquence plus élevée. Il en résulte d'une part que certains dispositifs de contrôle actif du bruit donnent à l'écoute un résultat décevant en regard du nombre de dB gagnés ; d'autre part d'autres dispositifs comme dans les avions à hélice sont perçus comme efficaces alors qu'ils ne permettent une réduction du bruit que de quelques dB(A). Il serait intéressant de minimiser directement par contrôle actif la sonie plutôt que la pression acoustique ; malheureusement on ne dispose que de capteurs de pression à partir desquels estimer la sonie suppose un calcul non linéaire en temps-réel.

En deuxième lieu, lorsqu'on supprime par contrôle actif les composantes basse fréquence d'un bruit, l'auditeur qui perçoit plus nettement les composantes non traitées peut juger par comparaison le contrôle comme «rajoutant du bruit» même si la sonie a effectivement été réduite ! Un phénomène lié au *masquage* peut également se produire avec un son pur très bien atténué dans un «bruit de fond» de niveau élevé ; il arrive que le bruit contrôlé soit perçu comme plus gênant que le bruit sans contrôle. Plus généralement, une réduction de la sonie par contrôle actif peut ne pas être appréciée par un auditeur si d'autres attributs du son tels que son *acuité* ou sa *rugosité* sont modifiées pas le contrôle, la *qualité* d'un bruit ou la gêne qu'il provoque ne dépendant pas que de la sonie.

Par conséquent l'interprétation d'un résultat de contrôle actif doit en général se faire en ayant les concepts de la psychoacoustique à l'esprit. Il arrive toutefois que l'objectif du contrôle ne soit pas de diminuer la gêne perçue mais simplement de gagner 1 dB pour satisfaire une norme ! Enfin, les collaborations entre les spécialistes du contrôle actif et de la psychoacoustique ne font à l'heure actuelle que débuter. On peut penser qu'elles donneront des résultats intéressants pour améliorer les systèmes de contrôle actif et en concevoir de nouveaux visant à améliorer la qualité des bruits. Les techniques du contrôle actif pourront réciproquement être mises à profit par les psychoacousticiens pour la conception de tests.

## 1.6 Résumé

Dans ce chapitre on a montré que le contrôle actif du bruit était possible aussi bien en champ libre qu'en milieu confiné. Le nombre de transducteurs nécessaire (microphones fournissant un signal à minimiser et haut-parleurs utilisés comme sources de bruit secondaire) augmente toutefois rapidement avec la fréquence des bruits à traiter. Les modalités de la propagation acoustique font donc que le contrôle actif du bruit est a priori *une technique adaptée aux basses fréquences*.

Parmi les résultats que l'on a établis ou illustrés au cours ce ce chapitre on peut rappeler que :

- en champ libre, un contrôle avec un monopôle du bruit produit par un autre monopôle ne peut être fait efficacement que dans une zone très petite (devant la longueur d'onde) ; si les deux monopôles sont distants de moins d'un sixième de longueur d'onde, le bruit peut être néanmoins être réduit dans tout l'espace ;
- en guide d'onde, un contrôle total du bruit dans les tronçons sans sources est possible si le nombre de sources secondaires et de points de minimisation est supérieur au nombre de modes propagatifs ;
- en cavité, un contrôle global à basse fréquence est envisageable avec un nombre de transducteurs comparable à celui du nombre de modes contribuant au bruit dans la cavité ;
- avec un *polyèdre* de points de minimisation de la pression acoustique, un contrôle global efficace du bruit est possible du côté où ne se trouve aucune source de bruit. Il faut pour cela disposer typiquement de trois points de minimisation (et de trois sources secondaires) par longueur d'onde à la surface du polyèdre ;
- une atténuation même importante d'un bruit par contrôle actif ne se traduit pas forcément par une réduction du désagrément qu'il produit.

# Chapitre 2

# Contrôle actif et automatique

On suppose donné un dispositif de contrôle actif, à savoir un certain nombre de :
- *sources secondaires* pour produire l'anti-bruit,
- *capteurs* acoustiques fournissant notamment un ou plusieurs *signaux de minimisation* à réduire par contrôle.

On suppose que ces *transducteurs* ont été placés de telle sorte que, d'un point de vue purement acoustique, le champ puisse être contrôlé d'une façon satisfaisante, notamment en termes d'étendue de la zone de contrôle (cf. chapitre 1).
Le problème est maintenant de fournir effectivement aux sources secondaires un *signal de commande* permettant de réduire les signaux de minimisation, y compris dans les cas où le bruit primaire est inconnu a priori, large bande et instationnaire en temps ou en espace. Il s'agit pour cela de traiter convenablement les différents signaux fournis pas les capteurs de mesure.

On va dans ce chapitre se placer dans le cadre de l'Automatique linéaire (pas d'opérations non linéaires sur les signaux, pas d'effets non linéaires dans les transducteurs ... ). Après avoir discuté des modalités du contrôle dans le cas simple d'un conduit à basse fréquence, on va donner l'expression mathématique des contrôleurs optimaux, *sans* puis *avec* la contrainte que le contrôle soit *causal*. On présentera ensuite l'algorithme FXLMS qui permet en pratique de mettre en œuvre un contrôle quasi optimal. La dernière partie du chapitre montrera le lien entre les résultats présentés et le formalisme auquel on fait d'habitude appel en Automatique.

## 2.1 Un exemple introductif

On considère un conduit en sortie duquel on veut atténuer le bruit par contrôle actif. En deça de la première fréquence de coupure ($c/2a$ pour un conduit de section carrée de côté $a$), seuls des fronts d'onde plans se propagent dans le conduit ; en annulant la pression en un point en aval de la source secondaire et en l'absence d'autres sources au-delà, la pression sera identiquement nulle partout . Il faut donc installer un capteur de minimisation en aval de la source secondaire et à une distance suffisante pour que seul le mode propagatif contribue au bruit sur le capteur.

Dans le cas ou le bruit primaire arrivant sur le capteur de minimisation n'est pas prédictible (par exemple avec une impulsion ou un avec un bruit blanc), un contrôle ne sera possible que si un autre capteur détecte le bruit primaire avant qu'il n'atteigne la source secondaire ; on

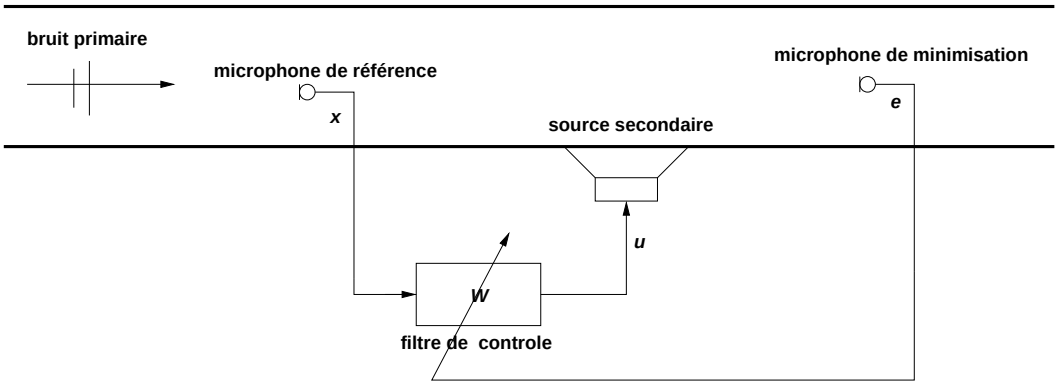



FIG. 2.1 – Contrôle dans un conduit

appellera *signal de référence* le signal $x$ fourni par ce capteur de détection et on parlera d'une situation de contrôle par *feedforward* (aucune expression française telle que *par anticipation* n'étant consacrée par l'usage). On suppose enfin que la commande à fournir à la source secondaire est obtenue par le filtrage de $x$ par un filtre linéaire $W$. On aboutit ainsi au dispositif de contrôle actif schématisé en figure 2.1.

Par ailleurs, on suppose connaître la *fonction de transfert H* dite secondaire entre la source secondaire et le capteur de minimisation ; on note $h$ la réponse impulsionnelle correspondante. La pression secondaire $p_s$ est alors donnée dans le domaine fréquentiel en fonction de la commande $u$ fournie au haut-parleur secondaire par :

$$p_s(\omega) \;=\; H(\omega)u(\omega) \tag{2.1}$$

et dans le domaine temporel par :

$$p_s(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

La fonction de transfert $H$ est une combinaison de la fonction de transfert propre à la source secondaire et de la propagation acoustique dans le conduit, on peut la factoriser sous la forme :

$$H = H_{HP}e^{-j\omega l/c} \tag{2.3}$$

Si le microphone de référence est *directif* et tourné vers l'amont, il fournit un signal $x$ qui ne représente que le bruit primaire. On en déduit que, si les deux microphones sont identiques, le bruit primaire sur celui de minimisation s'obtient en retardant le signal $x$ :

$$p_p(\omega) = x(\omega)e^{-j\omega L/c} \tag{2.4}$$

Avec ces notations, le bruit total sur le microphone de minimisation est donné par

$$e = p_p + p_s = p_p + Hu = xe^{-j\omega L/c} + HWx = (e^{-j\omega L/c} + H_{HP}e^{-j\omega l/c}W)x \tag{2.5}$$

Par conséquent on aura $e = 0$ si :

$$W = -H_{HP}^{-1}e^{-j\omega(L-l)/c} \tag{2.6}$$

Il semble donc que le filtre de contrôle $W$ qui annule le signal de minimisation puisse se calculer facilement. Malheureusement en pratique :

1. les fluctuations de température peuvent modifier significativement le filtre optimal $W$ (variation de $c$ en $\sqrt{T}$) ;
2. la fonction de transfert $H_{HP}$ n'est qu'une représentation idéalisée du haut-parleur qui est en pratique instationnaire et non-linéaire ;
3. la fonction de transfert $H_{HP}$ n'est pas inversible à toutes les fréquences ;
4. la fonction de tranfert définie par (2.6) n'est pas forcément réalisable parce que peut-être non causale (s'il y a des retards supérieurs à $(L-l)/c$ dans $H_{HP}$) ;
5. le signal de référence $x$ peut être perturbé en pratique par le contrôle ;
6. une petite erreur sur $W$ suffit pour dégrader le contrôle (une erreur de 1% limite à 40dB l'atténuation du bruit) ;
7. ...

Pour toutes ces raisons, un contrôle actif simplement basé sur la formule 2.6 ne peut être satisfaisant en pratique, notamment pour une application industrielle. Pour les raisons 1, 2 et 6 il apparaît que le filtre de commande $W$ doit pouvoir s'*adapter* plus ou moins automatiquement à des variations de l'environnement dans lequel on effectue le contrôle. Pour les raisons 2 et 5 il apparaît que le procédé de calcul de $W$ doit être *robuste* à une erreur sur la fonction de transfert $H$ et à une altération de la référence. Enfin pour les raisons 3 et 4 ce procédé doit conduire à un filtre $W$ physiquement réalisable c'est à dire *causal* et *stable*.

L'objet des paragraphes suivants est de montrer que, pourvu que le signal de référence et la fonction de transfert secondaire soient convenables, il existe des algorithmes adaptatifs efficaces et robustes pour calculer et rendre opérationnel en temps réel un filtre de contrôle $W$ causal quasi optimal.

## 2.2 Contrôle par feedforward optimal

Le diagramme de la figure 2.2 reprend sous une forme générale un dispositif tel que celui de la figure 2.1. Le signal de minimisation $e$ est la somme du bruit secondaire et d'un bruit primaire a priori inconnu $d$ (comme *disturbance*) ; la flèche en provenance du signal de minimisation $e$ signifie que l'on va chercher à régler le filtre $W$ pour minimiser ce signal.

### 2.2.1 Contrôle optimal non causal

Dans le cas où le bruit primaire $d$ provient exclusivement de la même source que le signal de référence $x$, on peut écrire $d = Fx$ où la fonction de transfert $F$ est définie à partir des signaux $x$ et $d$ comme :

$$F = \frac{S_{xd}}{S_{xx}} \tag{2.7}$$

Dans ce cas le signal de minimisation vaut $e = Fx + HWx$ et le filtre de commande optimal est donné directement comme au paragraphe précédent par :

$$W = -H^{-1}F = -\frac{1}{H}\frac{S_{xd}}{S_{xx}} \tag{2.8}$$

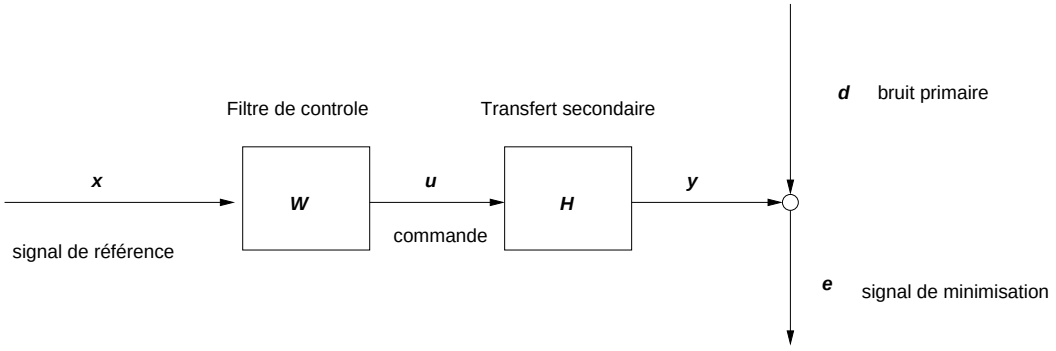



FIG. 2.2 – Contrôle par feedforward

Dans le cas général où $d$ n'est pas seulement le filtrage linéaire de $x$, si tous les signaux sont stationnaires on montre que ce résultat est conservé :

***Contrôle par feeforward optimal***
Le filtre $W$ (éventuellement non causal) qui minimise la valeur quadratique moyenne du signal de minimisation est donné par :

$$W = -\frac{1}{H}\frac{S_{xd}}{S_{xx}} \tag{2.9}$$

Avec ce filtre, le rapport de la Densité Spectrale de Puissance du bruit avec contrôle sur celle sans contrôle vaut $1-\gamma_{xd}^2$ où $\gamma_{xd}^2$ est la cohérence entre le signal de référence et le bruit primaire.

On rappelle que la cohérence $\gamma_{xd}^2$ entre les signaux $x$ et $d$ est définie par :

$$\gamma_{xd}^2 = \frac{|S_{xd}|^2}{S_{xx}S_{dd}} \tag{2.10}$$

L'exercice suivant montre sur un exemple académique comment le contrôle se dégrade lorsque la cohérence entre le signal de référence et le signal de minimisation n'est pas égale à 1 :

***Exercice :***
*On considère deux monôpoles en champ libre en $x=0$ et $x=1$. Les monopôles produisent deux bruits blancs décorrélés de même débit volumique $q$. Calculer, en fonction de $x$, l'atténuation possible lorsque le débit du monopôle en $x=0$ est pris comme signal de référence.*

***Solution :***
Le bruit produit par les deux monopôles est donné par :

$$p(x,\omega) = \frac{j\omega\rho_0 q_1(\omega)\ \mathrm{e}^{-jkx}}{4\pi x} + \frac{j\omega\rho_0 q_2(\omega)\mathrm{e}^{-jk(1-x)}}{4\pi(1-x)} \tag{2.11}$$

où les contributions $q_1$ et $q_2$ de chaque monopôle ont même module $q$ mais des phases décorrélées. Compte tenu du fait que $S_{x+y,x+y} = S_{xx} + S_{yy} + 2\Re(S_{xy})$ et qu'ici $S_{q_1q_2} = 0$, il vient :

$$S_{p(x)q_1} = \frac{j\omega\rho_0\mathrm{e}^{-jkx}}{4\pi x} S_{q_1q_1} = \frac{j\omega\rho_0\mathrm{e}^{-jkx}}{4\pi x} S_{qq} \tag{2.12}$$

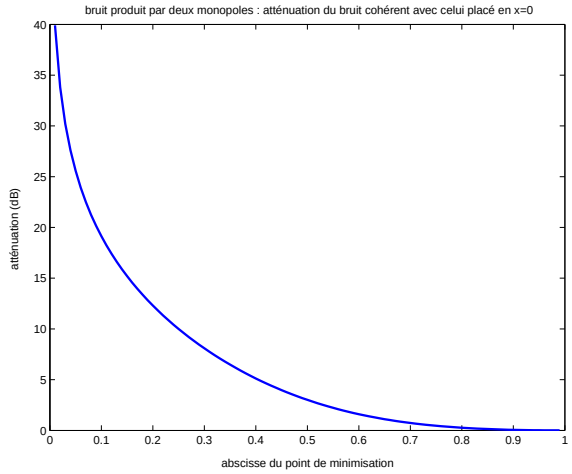



FIG. 2.3 – Solution de l'exercice de la section2.2.1

$$S_{p(x)p(x)} = \left|\frac{j\omega\rho_0}{4\pi x}\right|^2 S_{q_1q_1} + \left|\frac{j\omega\rho_0}{4\pi(1-x)}\right|^2 S_{q_2q_2} = \left|\frac{j\omega\rho_0}{4\pi}\right|^2 S_{qq}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right] \tag{2.13}$$

d'où l'on déduit :

$$\gamma^2_{p(x)q_1} = \frac{1/x^2}{1/x^2+1/(1-x)^2} \tag{2.14}$$

La figure 2.3 montre l'atténuation possible du niveau de bruit par contrôle actif $-10\log_{10}(1-\gamma^2_{p(x)q_1})$ en fonction de l'abscisse du point de minimisation. En section 1.3.2 on a plus généralement vu l'expression donnant la corrélation entre les pressions mesurées en deux points d'un champ diffus :

$$\gamma(\Delta\mathbf{r}) == \operatorname{sinc} k\Delta\mathbf{r} = \frac{\sin k\Delta\mathbf{r}}{k\Delta\mathbf{r}} \tag{2.15}$$

Pour un contrôle en champ diffus les capteurs de minimisation et de référence doivent donc être très proches.

On retiendra de cette section que pour un contrôle par feedforward efficace une très bonne *cohérence* est nécessaire entre le signal de référence et le signal de minimisation.

### 2.2.2 Contrôle optimal causal

Le contrôleur optimal présenté en section précédente n'a aucune raison d'être causal dans le cas général. Reprenons l'expression (2.8) $W = -H^{-1}F$ qui conduit à un contrôle parfait quel que soit le bruit primaire lorsque la cohérence entre référence et minimisation vaut 1. La fonction de transfert $F$ incorpore le temps de propagation entre le signal de référence et le bruit primaire. De son côté $H$ incorpore le temps de propagation entre la source secondaire et le signal de minimisation ; le produit $H^{-1}F$ incorpore la différence entre ces deux retards qui sera soit une avance (non causale), soit un retard. Par exemple si, sur le dispositif représenté en figure 2.1, le microphone de référence était situé entre la source secondaire et le microphone de minimisation,

la référence détecterait bien le bruit primaire avant la minimisation mais il serait trop tard pour que le haut-parleur puisse instantanément agir dessus.

Dans le cas général, les *retards* compris dans la fonction de transfert secondaire et dans $S_{xd}$ peuvent limiter les performances d'un contrôleur nécessairement causal. De plus on peut montrer que l'inverse de la fonction de transfert $H$ qui apparaît dans l'équation (2.8) peut inclure des avances bien plus grandes que les retards présents dans $H$, par exemple en présence de réflexions acoustiques. En revanche si le bruit primaire est périodique ou plus généralement *prédictible*, ces différents retards n'auront en revanche aucune influence sur le contrôleur une fois passées les premières périodes ; le *contenu spectral* du bruit (bruit de raies ou bruit large bande) joue donc lui aussi sur la contrainte de causalité du contrôleur optimal, ce que traduit le résultat ci-dessous :

***Contrôle par feedforward optimal causal***
Le filtre $W$ causal qui minimise la valeur quadratique moyenne du signal de minimisation $e$ est donné par :

$$W = -\frac{1}{GH_{min}} \left\{ \frac{S_{xd}}{G^* H_{all}} \right\}_+ \tag{2.16}$$

où :
- la fonction de transfert $H$ est factorisée en fonction à phase minimale et fonction passe-tout : $H = H_{min}H_{all}$ (cf. l'annexe B)
- $G$ est le résultat de la factorisation spectrale de la Densité Spectrale de Puissance du signal de référence, $S_{xx} = GG^*$ (cf. l'annexe B)
- le crochet $\{\ldots\}_+$ représente la *projection causale* obtenue par transformation de Fourier inverse, mise à zéro des termes correspondant à $t < 0$ puis transformation de Fourier pour revenir au domaine fréquentiel.

La formule (2.16) montre formellement l'influence des retards dans le transfert secondaire et du contenu du bruit sur le contrôleur optimal. Elle permet aussi une simulation numérique précise d'un contrôle idéal. Considérons par exemple le contrôle du bruit constitué par la réponse à un bruit blanc d'un oscillateur du second ordre (système masse-ressort ou mode acoustique isolé d'une cavité) ; la Densité Spectrale de Puissance du signal de référence est de la forme :

$$S_{xx} = \left| \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2j\xi\omega_0\omega} \right|^2 \tag{2.17}$$

La figure 2.4 montre le contrôle obtenu, lorsque le bruit primaire $d$ est égal au signal de référence $x$, avec $\xi = 10\%$ et une fonction de transfert $H$ égale à un retard pur $\tau$. Si le retard contenu dans $H$ est faible (ce retard est exprimé en périodes sur la figure 2.4), le contrôle est très efficace ; si le retard est très important le contrôle est inopérant. Entre ces deux extrêmes on obtient à partir de la formule (2.16) un ensemble de contrôleurs optimaux dont les performances sont difficiles à imaginer a priori ; la position précise des zéros dans le bruit après contrôle est notamment difficile à expliquer.

La figure 2.5 montre le contrôle obtenu avec un retard donné (en l'occurence $\tau = 10$) lorsque l'on fait varier le coefficient d'amortissement $\xi$ dans la DSP du bruit primaire donnée par (2.17).

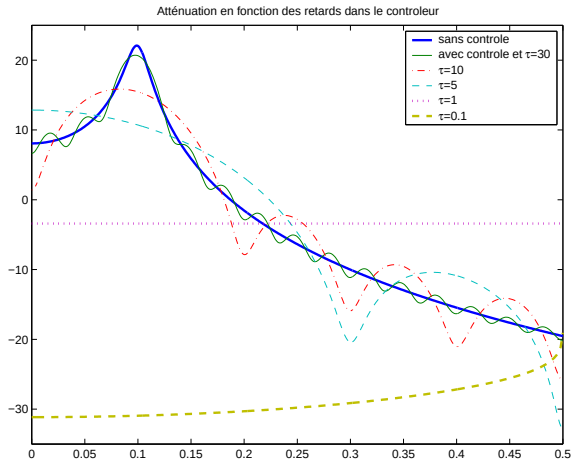



FIG. 2.4 – Influence sur le contrôle actif d'un retard dans le transfert secondaire

Lorsque $\xi$ est petit, l'oscillateur du second ordre est très résonnant et sa réponse, proche d'un sinus de fréquence celle de la résonance, est assez prédictible ; le contrôle actif est alors très efficace. Lorsque $\xi$ augmente, la réponse de l'oscillateur est à bande de plus en plus large et le contrôle devient de moins en moins efficace.

## 2.3 Contrôle adaptatif FXLMS

La formule (2.16) du contrôleur optimal causal fait appel à un calcul dans le domaine fréquentiel qui suppose la *stationnarité* des signaux de référence et de minimisation ; par ailleurs dans le cas multivoies il s'avère qu'on ne dispose pas de méthode numérique efficace pour calculer le contrôleur optimal à partir de (2.16). C'est pourquoi d'autres approches sont nécessaires à la mise en œuvre d'un contrôle actif efficace. Dans cette section on va voir que l'algorithme de *Moindres carrés récursifs à référence filtrée* (*Filtered-X Least Mean Square*) permet l'obtention en temps réel d'un contrôle adaptatif quasi optimal.

### 2.3.1 L'algorithme LMS monovoie

On suppose dans cette section que la fonction de transfert secondaire est l'identité ($H(\omega) = 1$).

En pratique il est très intéressant de rechercher le filtre $W$ nécessaire au contrôle actif par feedforward dans la classe des filtres à réponse impulsionnelle finie (*Finite Impulse Response*) parce que ces filtres sont naturellement *stables* et *causaux*. Cela revient dans le domaine fréquentiel à chercher une approximation polynomiale de la fonction donnée par la formule (2.16) ; on peut espérer atteindre une bonne approximation du filtre optimal avec un FIR d'ordre élevé.

Avec un filtre FIR $W$ de réponse impulsionnelle $\{w_0, \ldots, w_{K-1}\}$, le signal de commande $u$

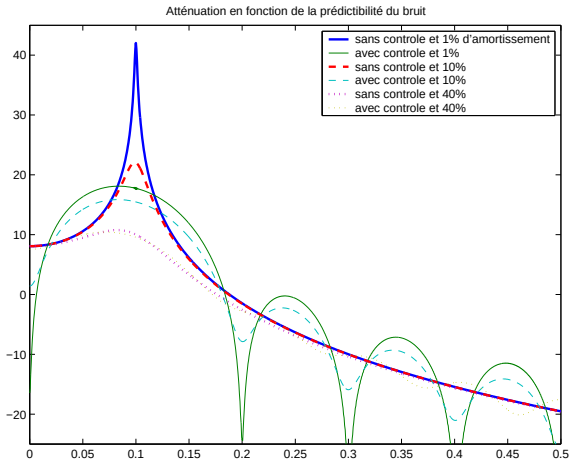



FIG. 2.5 – Influence sur le contrôle actif de la prédictibilité du bruit

se déduit par définition du signal de référence par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{K-1} w_k x_{n-k} = \mathbf{w}^t \mathbf{x} \tag{2.18}$$

En supposant le signal de référence $x$ stationnaire et aléatoire, la quantité que l'on cherche à réduire par contrôle actif s'écrit sous la forme :

$$J = E(e^2) = E([d + \mathbf{w}^t \mathbf{x}]^2) \tag{2.19}$$

où $E$ désigne l'espérance mathématique. Il apparaît qu'avec des signaux stationnaires ce critère de minimisation est une *forme quadratique* des coefficients $w_k$ ; le vecteur $\mathbf{w}$ des coefficients qui minimise $J$ peut être recherché de façon itérative avec un *algorithme de plus grande pente* :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\beta}{2} \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}(n)} \right) \tag{2.20}$$

Il apparaît ensuite que :

$$\left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}(n)} \right) = 2E(\mathbf{x}(n)e(n)) \tag{2.21}$$

Si le processus aléatoire $x$ est ergodique on pourrait, pour calculer ce gradient, faire des moyennes temporelles de la quantité $\left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}(n)} \right)$ avant d'effectuer l'itération (2.20). Une autre idée consiste à effectuer les itérations en utilisant la *valeur instantanée* du gradient plutôt que sa moyenne temporelle, l'opération d'estimation du gradient se combinant à l'évolution des coefficients du filtre optimal :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \beta \mathbf{x}(n)e(n) \tag{2.22}$$

On démontre qu'effectivement pour un pas constant $\beta$ positif pas trop grand les coefficients du filtre $W$ convergent vers leur valeur optimale. L'algorithme défini par la relation de récurrence

(2.22) est dit de moindres carrés récursifs (*Least Mean Square*) ; comme on a substitué la valeur instantanée du gradient à sa valeur moyenne on dit aussi qu'il s'agit d'un algorithme de *gradient stochastique*. Un gros atout de l'algorithme LMS est aussi sa capacité, de par sa nature itérative, à adapter les coefficients du filtre $W$ à des fluctuations des caractéristiques statistiques du bruit $x$ ; l'algorithme LMS est *adaptatif*.

L'algorithme LMS n'a pas été utilisé à l'origine pour du contrôle actif mais pour différentes applications en traitement du signal telles que la prédiction linéaire. Puisque le filtre $W$ minimise $|d + W * x|$, $-W$ est aussi une estimation optimale de la fonction de transfert entre $x$ et $d$ ; l'algorithme LMS a donc été utilisé avant d'être appliqué au contrôle actif comme outil d'identification de systèmes linéaires.

### 2.3.2 L'algorithme FXLMS monovoie

En «permutant» les fonctions de transfert $H$ et $W$ sur le dispositif de la figure 2.2, on constate que la formule de l'algorithme LMS donnée dans la section précédente peut être étendue au cas où $H \neq 1$ à condition de remplacer le vecteur des signaux de référence passés $\mathbf{x}(n) = (x(n) \dots x(n-K+1))^t$ par sa convolution par la fonction de transfert secondaire. On appelle le vecteur qui résulte de cette convolution la *référence filtrée* (sous-entendu : par le transfert secondaire). Une estimation $\mathbf{R}$ de la référence filtrée peut être calculée en approchant la fonction de transfert par un filtre FIR de réponse impulsionnelle $\{h_0, \dots, h_{L-1}\}$ :

$$\mathbf{R}(n) \;=\; \sum_{l=0}^{L-1} h_l \mathbf{x}(n-l) \;=\; \mathbf{h} * \mathbf{x} \tag{2.23}$$

La formule de récurrence donnant les coefficient du filtre $W$ est alors :

$$\mathbf{w}_{n+1} \;=\; \mathbf{w}_n \;-\; \beta \mathbf{R}(n)\, e(n) \tag{2.24}$$

Cette formule définit l'algorithme FXLMS (pour *Filtered-X Least Mean Square*, $x$ désignant traditionnellement le signal de référence). La figure 2.6 montre, sur un cas pratique de contrôle dans une grande cavité acoustique, le résultat obtenu expérimentalement avec un algorithme FXLMS ainsi qu'une simulation numérique du contrôle optimal faite à partir de la formule (2.16). On constate sur cette figure que l'algorithme FXLMS permet, même dans un cas réel complexe, d'atteindre en pratique un contrôle proche de l'optimum théorique.

### 2.3.3 Robustesse et convergence

On démontre que l'algorithme FXLMS est très *robuste* à une erreur d'estimation de la fonction de transfert $H$ : même si l'approximation FIR de $H$ est très imprécise, parce que comportant par exemple trop peu de coefficients ou parce que $H$ «dérive» au cours du temps, la récurrence (2.24) converge. On montre que la *marge de phase* pour la stabilité de l'algorithme FXLMS est de $90^o$ ; les performances d'un algorithme FXLMS sont, elles, typiquement robustes à une erreur sur la phase de $H$ inférieure à $45^o$. Ces propriétés qui sont assez remarquables pour un algorithme aussi simple ont certainement contribué à la généralisation du recours au FXLMS en contrôle actif.

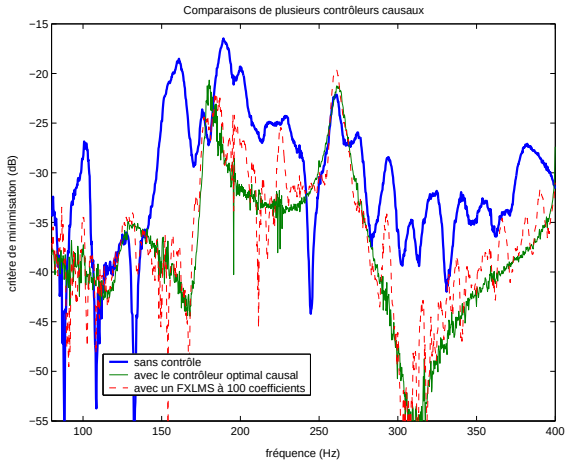



FIG. 2.6 – Contrôle optimal vs. contrôle FXLMS

Plusieurs phénomènes peuvent contrarier la bonne convergence de l'algorithme FXLMS. En premier lieu il est nécessaire, pour observer l'effet d'une variation des coefficients sur le critère de minimisation, d'attendre que cette modification soit apparente dans le signal de minimisation ; l'estimation correcte du gradient via les itérations (2.24) ne peut se faire qu'après un temps plus long que le temps de propagation inclus dans la fonction de transfert secondaire. La présence de *retards* dans la fonction de transfert secondaire ralentit donc significativement la convergence de l'algorithme.

En deuxième lieu, la convergence de l'algorithme FXLMS peut être problématique lorsque le contenu spectral du signal de référence est contrasté. La figure 2.7 montre par exemple les résultats de contrôle obtenus avec un algorithme FXLMS lorsque le signal de référence est identique à un bruit primaire composés de deux sons purs de niveaux différents ; l'algorithme a du mal à atténuer la raie de niveau le plus faible. En revanche on constate aussi que, si le signal de référence comprend deux raies de même niveau, le filtre optimal permet une atténuation des deux composantes du bruit primaire. La convergence de l'algorithme se fait alors en quelques périodes alors que, dans le cas où une raie est moins présente dans la référence, la convergence se fait nettement plus lentement pour la raie de niveau plus faible.

Enfin d'autres facteurs interviennent pour perturber l'algorithme FXLMS dans les cas multivoies (plusieurs sources secondaires, plusieurs signaux de minimisation) et multi-références (plusieurs signaux de référence alimentant plusieurs filtres de contrôle). Dans le cas multivoies un mauvais *conditionnement* de la matrice de transfert peut conduire à des commandes d'amplitude très importante voire à une divergence de l'algorithme. Dans le cas de plusieurs signaux de référence corrélés, les interactions entre filtres peuvent là encore rendre problématique la convergence du FXLMS.

### 2.3.4 Utilisation pratique

Pour appliquer la formule (2.24) de l'algorithme FXLMS, il faut obtenir une estimation FIR $h$ de la fonction de transfert secondaire et choisir un coefficient de convergence $\beta$.

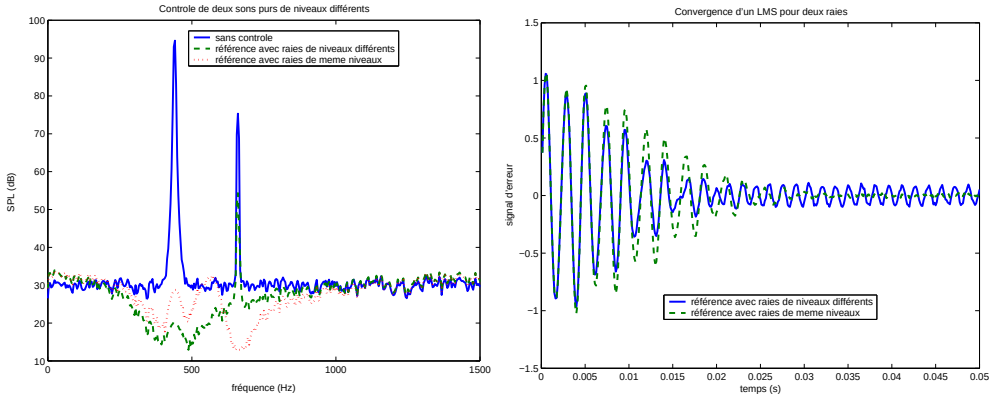



FIG. 2.7 – Contrôle de deux sons purs de niveaux différents

On peut identifier de plusieurs façons une approximation FIR du transfert secondaire. Une solution simple consiste à envoyer une impulsion à la source secondaire puis à mesurer directement le signal sur le capteur de minimisation. On obtient ainsi directement la valeur des coefficients d'une réponse impulsionnelle. En présence d'un bruit de fond, la réponse impulsionnelle peut être estimée en moyennant plusieurs mesures successives.

Si le coefficient de convergence $\beta$ choisi est trop petit, l'algorithme FXLMS peut converger trop lentement ou ne pas être capable de suivre des fluctuations des bruits à traiter. Inversement, si le coefficient est trop grand, l'algorithme peut diverger ou le filtre de contrôle avoir des oscillations trop grandes autour de sa valeur optimale. En fait le coefficient de convergence «optimal» ou simplement la valeur conduisant à la divergence sont difficile à estimer a priori parce qu'ils dépendent de facteurs nombreux. Une bonne solution pratique consiste à disposer d'un «potentiomètre» pour déterminer in situ quel coefficient de convergence utiliser : on augmente progressivement $\beta$ à partir de 0 jusqu'à obtenir la divergence de l'algorithme, on abaisse ensuite $\beta$ jusqu'à une valeur typiquement égale à la moitié de sa valeur à la divergence.

## 2.4 Contrôle par feedback

On a vu dans la section précédente que l'algorithme FXLMS permettait le contrôle actif quasi-optimal d'un signal de minimisation pourvu que l'on dispose à l'avance d'un signal de référence bien cohérent avec le signal de minimisation et non affecté par le contrôle. Dans certains cas on ne dispose pas d'un tel signal, soit parce que le signal utilisé comme référence est modifié par le contrôle (comme avec un microphone de référence non directif sur le dispositif schématisé en figure 2.1), soit parce que la taille du dispositif n'est pas suffisante pour inclure un capteur de référence à bonne distance (comme dans le cas du casque actif). On va voir dans cette section comment adapter les résultats de la section précédente à ces différents cas.

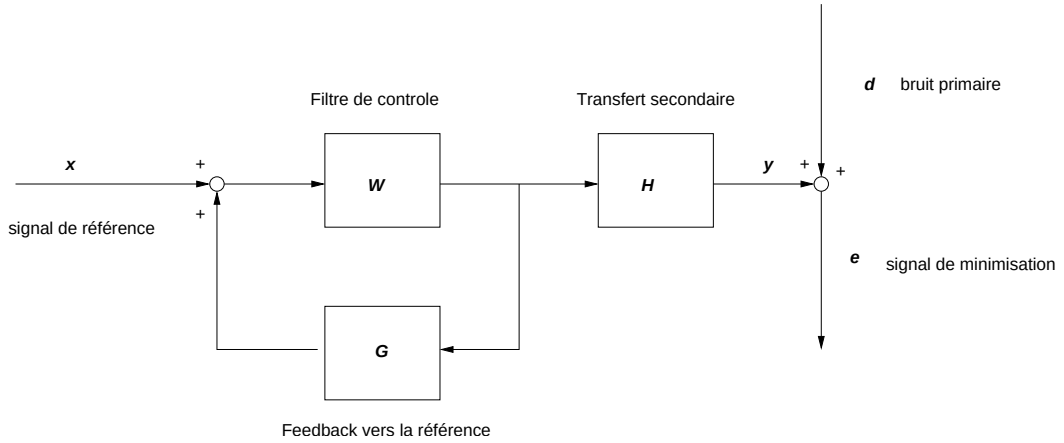



FIG. 2.8 – Dispositif de contrôle par feedforward avec feedback vers la référence

### 2.4.1 Effet d'un feedback sur la référence

Supposons que le signal de référence du dispositif de la figure 2.2 soit modifié par le contrôle actif ; on parle dans ce cas de la présence d'un *feedback* (en français une *rétroaction*) vers la référence. Cela est en particulier le cas lorsque qu'un seul capteur est utilisé au lieu d'une référence et d'un signal de minimisation distincts ; on parle alors spécifiquement d'un problème de contrôle par feedback. En appelant $G$ la fonction de transfert entre la source secondaire et le capteur de référence, le dispositif à prendre en considération est maintenant celui de la figure 2.8.

En l'absence de feedback ($G = 0$), la fonction de transfert entre le signal de référence $x$ et le signal de commande $u$ se réduit au filtre de contrôle $W$ ; avec $G \neq 0$ il vient $u = W(x + Gu)$ et par conséquent :

$$\frac{u}{x} = \frac{W}{1 - WG} \tag{2.25}$$

Même si $W$ est un filtre FIR (stable et causal), la fonction de transfert globale entre le signal de référence et le signal de commande peut devenir instable à cause du feedback, il y a risque de *Larsen*. Ce risque est d'autant plus grand que le feedback mesuré par $G$ est grand.

On dispose, à partir de la connaissance de $W$ et $G$, d'un certain nombre d'outils permettant de s'assurer de la stabilité d'une fonction de transfert telle que (2.25), par exemple le *critère de Nyquist* ou le *théorème du petit gain*. Pour utiliser les résultats de la section précédente on peut aussi montrer que le feedback peut être interprété, dans un dispositif de contrôle par feedforward, comme une erreur d'estimation de la fonction de transfert secondaire. En effet avec le feedback le signal de minimisation peut s'écrire :

$$e = d + Hu = d + \frac{H}{1 - GW} Wx = d + \tilde{H} Wx \tag{2.26}$$

Si un algorithme FXLMS est utilisé pour mettre à jour les coefficients du filtre de contrôle $W$, tout se passe donc à chaque instant comme si la fonction de transfert $H$ utilisée dans la formule de récurrence (2.16) était une mauvaise estimation de la fonction de transfert secondaire

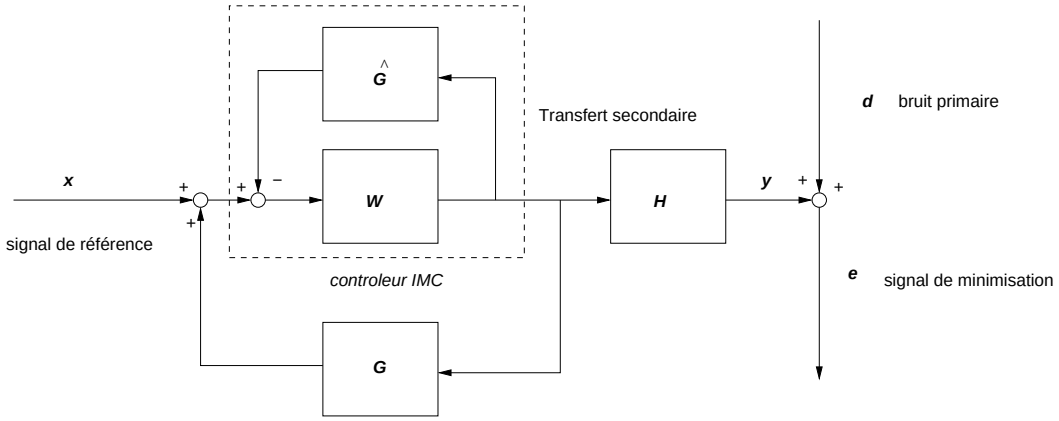



FIG. 2.9 – *Internal Model Control*

incorporant le feedback $\tilde{H}$. Par conséquent, si le terme $GW$ reste assez petit, on peut espérer que l'algorithme FXLMS converge comme dans une situation sans feedback mais avec une erreur sur l'estimation du transfert secondaire.

### 2.4.2 Equivalence entre feedback et feedforward

La fonction de transfert $G$ caractérisant le feedback sur le dispositif de la figure 2.8 peut être mesurée au même titre que la fonction de transfert $H$. Puisque le signal de commande est lui aussi connu par le contrôleur, on peut songer à soustraire du signal fourni par le capteur de référence la contribution de la source secondaire avant de filtrer ce signal pour le contrôle. On aboutit ainsi au dispositif de la figure 2.9 incorporant un «anti-feedback». On appelle *paramétrisation de Youla* le fait de postuler pour un contrôleur la structure de celui représenté en figure 2.9 ; on démontre en fait qu'un contrôleur avec une telle structure est stable si et seulement si le filtre $W$ est stable. On parle aussi d'*Internal Model Control* pour qualifier un tel dispositif où le contrôleur inclut un modèle du transfert vers le capteur de référence. Avec une copie exacte de la fonction $G$ dans le contrôleur, ce dispositif devient rigoureusement identique à un dispositif de contrôle par feedforward et un algorithme FXLMS peut être utilisé pour déterminer le filtre $W$ optimal.

Malheureusement dans un dispositif tel que celui de la figure 2.9 la fonction de transfert de la source secondaire vers le capteur de référence $G$ n'est jamais parfaitement connue, il faut se contenter à la place d'une *estimation* constante $\hat{G}$ par exemple sous la forme d'un filtre FIR. Un feedback résiduel de fonction de transfert $G - \hat{G}$ peut donc déstabiliser un contrôleur IMC en pratique, on parle cette fois d'un problème de *stabilité robuste* ; si l'erreur d'estimation $G - \hat{G}$ devient plus grande que le feedback $G$ (ce qui n'est pas exclu à certaines fréquences), la stabilité robuste est plus difficile à assurer que la stabilité du contrôleur sans antifeedback de la figure 2.8.

L'utilisation de contrôleurs IMC ne s'est par conséquent pas généralisée en contrôle actif, les contrôleurs «avec anti-feedback» s'avérant en pratique plus difficile à stabiliser que les contrôleurs «sans anti-feedback». En revanche, d'un point de vue formel, la paramétrisation de

Youla montre qu'un problème de feedback peut être ramené à un problème de contrôle par feedforward. On peut par conséquent utiliser les résultats des sections 2.2 et 2.3 pour simuler un contrôle actif optimal causal en faisant abstraction des risques d'instabilité du contrôleur. Différentes techniques permettent éventuellement ensuite de modifier l'algorithme FXLMS pour prendre en compte pendant, la convergence, les contraintes de stabilité ou de stabilité robuste.

### 2.4.3 Contrôle optimal et représentation d'état

Une littérature abondante traite du contrôle de systèmes décrits par une *représentation d'état* de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{Bu} + \mathbf{v} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{CX} + \mathbf{Du} + \mathbf{w} \end{cases} \tag{2.27}$$

où, pour des systèmes à temps discrets :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{AX}_n + \mathbf{Bu}_n + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{CX}_n + \mathbf{Du}_n + \mathbf{w}_n \end{cases} \tag{2.28}$$

Ces représentations visent à décrire la réaction d'un système quelconque à un vecteur de commandes **u** à l'aide d'un vecteur de degrés de liberté (dit vecteur d'état) **X**, le vecteur **Y** représentant les mesures fournies par un ensemble de capteurs et les vecteurs **v** et **w** des bruits sur l'état et la mesure. En contrôle actif, **Y** représentera les signaux microphoniques et **u** les signaux de commande envoyés aux haut-parleur ; **X** peut désigner selon les cas un grand nombre de degrés de liberté internes tels que les courants dans les bobines de haut-parleurs et par exemple dans une cavité les pressions partielles associées à chacun des modes ; **v** représentera l'effet du bruit primaire sur les variables internes du système.

Une fois décrit par une représentation d'état un système acoustique incorporant des capteurs et des actionneurs, on sait calculer un certains nombre de *contrôleurs optimaux* minimisant par exemple une norme du vecteur d'état **X**. Le contrôleur optimal *Linéaire Quadratique Gaussien* ou $H_2$, incluant un *filtre de Kalman* pour estimer le vecteur d'état à partir du vecteur des mesures, ou le contrôleur $H_\infty$ sont des exemples bien connus largement évoqués dans les traités d'Automatique moderne.

Même si plusieurs dispositifs de contrôle actif ont été conçus, y compris au LMA, à partir de représentations d'état, il s'avère que de telles mises en équation y sont finalement peu adaptées. En premier lieu les systèmes incluant de la propagation acoustique demandent un grand nombre de degrés de liberté pour être représentés à l'aide d'un système différentiel tel que (2.27) ; la représentation d'état convient mieux à des systèmes à constantes localisées. En deuxième lieu l'écriture d'une représentation d'état suppose d'avoir établi ou identifié un *modèle* (i.e. les matrices $A, B, C, D$ assez précis du système à contrôler ; on s'autorise en revanche à des bruits a priori assez quelconques souvent décrits comme un ensemble de bruits blancs. Au contraire en contrôle actif on connaitra aussi bien voire mieux le bruit primaire que le système à contrôler. Enfin les bruits à traiter et les systèmes à contrôler seront souvent instationnaires en contrôle actif et, plutôt qu'un contrôleur fixe prêt à traiter des bruits quelconques, on préfèrera un contrôle adaptatif répondant précisément à un bruit primaire pas forcément large bande et éventuellement instationnaire.

Pour toutes ces raisons, un contrôle adaptatif avec un algorithme FXLMS donnera en général, en contrôle actif du bruit, une meilleure atténuation qu'un contrôle optimal basé sur une représentation d'état, même avec un signal de référence modifié par le contrôle.

## 2.5 Résumé

On a montré dans ce chapitre que, d'un point de vue théorique, les performances d'un système de contrôle actif donné sont d'abord dictées par la *prédictibilité* du bruit à minimiser. Si le bruit est périodique ou à bande étroite, un contrôle proche de l'optimum prédit par des simulations acoustiques est possible. Dans les cas où le bruit primaire est peu prédictible, il est nécessaire de faire appel à un ou plusieurs *signaux de référence*, corrélés au bruit à minimiser, qui permettent de synthétiser la commande à fournir avant que le bruit primaire n'atteigne les signaux de minimisation. On parle alors d'un contrôle par *feedforward*. Les performances d'un contrôle par feedforward dépendent :

- de la cohérence entre signaux de référence et de minimisation,
- de la prédictibilité du bruit à minimiser (indiquée par la Densité Spectrale de Puissance du signal de référence)
- des retards présents dans les transferts secondaires.

Dans le cas monovoie, le filtre de commande optimal causal s'écrit (cf. paragraphe 2.2.2) :

$$W = -\frac{1}{GH_{min}} \left\{ \frac{S_{xd}}{G^* H_{all}} \right\}_+ \tag{2.29}$$

En pratique, l'algorithme de *moindres carrés récursif à référence filtrée* (*Filtered-X Least Mean Square*) permet souvent un contrôle *adaptatif* en *temps réel* proche de l'optimum théorique et très *robuste*. La convergence de l'algorithme n'est problématique que si la dynamique des signaux de référence filtrée est large ou si les fonctions de transfert secondaires incluent des retards importants. Dans de nombreux cas pratiques l'algorithme FXLMS s'adapte à des variations même importantes des signaux de référence ou de minimisation. En monovoie, le signal de commande est donné par $u = W * x$ et les coefficients du filtre FIR adaptatif $W$ sont donnés par la formule de récurrence :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \beta\,(h * \mathbf{x}(n))\,e(n) \tag{2.30}$$

où $\mathbf{x}$ désigne le vecteur des dernières valeurs prises par le signal de référence. En adoptant le formalisme habituel de présentation de l'Automatique, le contrôle actif du bruit peut être présenté comme un problème de *rejet de perturbation* et les contrôleurs par feedforward correspondent à la *paramétrisation de Youla* des contrôleurs par feedback. En revanche les résultats de contrôle optimal présentés sous une forme faisant appel à une *modélisation d'état* (Filtrage de Kalman, contrôle optimal Linéaire Quadratique Gaussien, $H_\infty$ ou les *Linear Matrix Inequalities* ...) sont peu adaptés au contrôle actif du bruit.

# Chapitre 3

# Quelques applications du contrôle actif

Au cours des chapitres précédents, on a présenté des éléments pour déterminer la *faisabilité technique* d'un dispositif de contrôle actif et pour en prévoir les performances. Pour une véritable application industrielle, d'autres facteurs sont à prendre en compte. En premier lieu le *coût* du dispositif et de sa maintenance sera déterminant : un système de contrôle actif permettant une réduction du bruit de plus de 60dB ne sera jamais appliqué si une solution passive nettement moins chère est disponible. En deuxième lieu, le *produit* commercialisé ne se résume pas à une simple performance, il est entouré d'une *image* qui peut tout autant susciter une envie d'achat qu'un simple énoncé technique. Enfin une étude des *brevets* concernant l'application visée est nécessaire ; le principe du contrôle par feedforward a été par exemple décrit dans un brevet de 1975 tombé dans le domaine public, le casque antibruit a été breveté en 1985. En résumé un «bon» produit pour la vente n'est pas forcément un produit attaché à une prouesse technique.

Dans cette section on va décrire quelques-unes des applications industrielles du contrôle actif en se restreignant aux seuls aspects techniques. La liste des applications qui suit n'est certainement pas exhaustive ; en revanche elle permet d'illustrer les résultats des sections précédentes concernant la faisabilité du contrôle, aussi bien du point de vue de l'acoustique que de celui du traitement du signal.

## 3.1 Le casque anti-bruit actif

Les casques anti-bruit classiques protègent mal leur porteur à basse fréquence lorsque l'épaisseur des coquilles devient trop petite devant la longueur d'onde. Inversement, à basse fréquence, réaliser un point sourd dans la coquille du casque suffit à réduire le bruit jusque dans le conduit autiditif ; un contrôle actif efficace est envisageable dans la bande 30-500 Hz, y compris avec un haut-parleur de petite surface.

Pour ce qui est du filtre de contrôle, il est peu envisageable de disposer un ensemble de capteurs de référence autour du porteur du casque pour détecter à l'avance les bruits incidents sauf par exemple dans le cas de bruits produits par des machines à proximité ; on doit plutôt résoudre un problème de contrôle par feedback que par feedforward. Il s'agit pour le casque de deux problèmes monovoie, le bruit produit dans une coquille ne parvient pas jusqu'à l'autre. La

fonction de transfert secondaire s'avère assez régulière dans la bande de fréquence considéré ; le problème de contrôle optimal peut être traité avec les outils de l'automatique classique et conduire à un filtre de contrôle assez simple que l'on peut mettre en œuvre avec un circuit analogique. Une forme particulièrement intéressante pour le filtre de contrôle $W$ est :

$$W(s) = \frac{K(s-z)(s-z^*)}{(s-p)(s-p*)} \tag{3.1}$$

où les pôles et zéros sont judicieusement choisis. Le gain d'un tel filtre peut être maintenu assez élevé à basse fréquence puis réduit à plus haute fréquence lorsque le déphasage de la fonction de transfert secondaire pourrait déstabiliser le système en boucle fermée. Un bon compromis doit ensuite être trouvé entre performance et stabilité du contrôle.

Alain Roure et Christian Carme au cours de sa thèse ont mis au point et breveté dans les années 1980 un casque anti-bruit actif permettant une atténuation active du bruit dépassant 20dB dans la bande 100-400 Hz. Ce casque et ses variantes ultérieures (permettant par exemple une communication radio non atténuée par le contrôle) sont commercialisés par Technofirst, la société créée par C. Carme. Il permet d'améliorer significativement la protection des personnes exposées à des bruits intenses avec des composantes basse fréquence comme par exemple dans les aéroports.

Des grands groupes (tels que Sony) ont également mis sur le marché des anti-bruit actifs, le brevet français servant plus de protection que d'arme absolue contre ces groupes.

Des *bouchons d'oreille actifs* proches dans leur esprit du casque ont aussi été étudiés. En France, l'Institut franco-allemand de Saint-Louis (co-patronné par les deux Ministères de la Défense) a mis au point des bouchons actifs destinés aux artilleurs.

En revanche le passage du casque à l'*appui-tête actif* que pourrait inclure un fauteuil soulève un grand nombre de difficultés dans le cas général où l'on ne dispose pas d'un signal de référence évident : on se trouve cette fois face à un problème de contrôle multivoies où un bon compromis entre performance et robustesse s'avère difficile à obtenir. Un brevet a été déposé par l'Institute of Sound and Vibration Research de Southampton mais il semble qu'aucun appui-tête actif efficace en bande large ne soit encore commercialisé dans le monde.

## 3.2 Contrôle actif et automobile

La réduction du bruit à l'intérieur des voitures est destinée à améliorer le *confort* du conducteur qui est en général l'acheteur du véhicule. Ce confort acoustique a fortement été amélioré au cours des deux dernières décennies du vingtième siècle et réduire encore le bruit demande de sérieux efforts ; envisager des solutions actives n'est pas exclu a priori. La réduction du bruit vers l'extérieur correspond, elle, au besoin de satisfaire les *normes* en vigueur ; la norme actuelle (basse vitesse/haut régime) pénalise le bruit dû au moteur et à l'échappement mais l'augmentation constatée du bruit de roulement au cours des dernières années fait que la norme pourrait à terme être remise en question.

En dehors de quelques «gris-gris», couinements divers, et du bruit produit par quelques appareils spécifiques (ventilation, essuie-glace, turbo-compresseur ...), le bruit dans les voitures

provient essentiellement du moteur à basse vitesse, du contact pneu/chaussée puis de l'écoulement de l'air autour de l'habitacle à haute vitesse. Pour ce qui est du bruit vers l'extérieur il faut ajouter à ces trois sources le bruit rayonné par l'échappement. On va discuter dans cette section le contrôle actif de chacune de ces sources.

### 3.2.1 Contrôle du bruit moteur

Le bruit produit par un moteur de voiture n'est pas majoritairement dû aux explosions ; pour s'en convaincre il suffirait de couper le contact (sans retirer la clef !) dans une descente et d'écouter le bruit restant. En fait ce bruit est en grande partie produit par les vibrations du moteur liées aux mouvements des masses qui y sont reliées (l' «attelage mobile» constitué par les pistons, les bielles et le vilebrequin) et aux forces appliquées au moteur à cause des combustions. Ces vibrations sont responsables d'un rayonnement acoustique mais elles sont aussi transmises par voie solidienne à différents éléments de l'habitacle qui, à leur tour, vont y rayonner du bruit.

On doit dans un premier temps s'interroger sur le contenu fréquentiel du bruit moteur. A régime constant il s'agit d'un bruit presque totalement périodique puisqu'il est lié à la rotation de masses et à des combustions périodiques. On pourrait croire que la fréquence fondamentale de ce bruit est celle de rotation du moteur mais ça n'est pas le cas. En ce qui concerne les masses en mouvement, chaque piston est en translation verticale mais non sinusoïdale puisque, pour des raisons cinématiques, il passe plus de temps au voisinage du vilebrequin que de la culasse. Ce mouvement de translation peut être développé en série de Fourier. Lorsqu'on combine ensuite deux pistons parallèles avec des mouvements en opposition de phase, les fréquences fondamentales se compensent ; sur un 4 cylindres (la grande majorité des voitures en France) le mouvement vertical global du Groupe Moto-Propulseur résultant du mouvement de l'attelage mobile se fera avec une fréquence fondamentale *double* de celle de la rotation du moteur. Au terme de *forces d'inertie* appliquées au moteur à cause des mouvements de l'attelage mobile s'ajoutent les *forces «de gaz»* engendrées par la combustion. Ces forces sont également quasi périodiques de fréquence fondamentale double de celle de rotation du moteur dans la mesure où, avec un moteur 4 temps, une explosion se produit tous les deux tours pour chaque cylindre. Par conséquent, pour un régime moteur variant entre 600 et 6000 tr/mn, la fréquence fondamentale du bruit du moteur variera entre 20 et 200 Hz. D'un point de vue purement acoustique un contrôle actif global de ce bruit est donc envisageable dans l'habitacle avec un nombre réduit de transducteurs.

Le bruit dans l'habitacle est la conséquence du fonctionnement et du mouvement du moteur. N'importe quel signal corrélé (i.e. synchronisé, pour un mouvement périodique) avec la rotation du moteur peut servir de signal de référence pour un contrôle par feedforward, qu'il soit obtenu avec un capteur optique, magnétique, vibratoire ou acoustique. Un algorithme FXLMS peut donc être utilisé pour déterminer comment filtrer ce signal pour minimiser le bruit sur des capteurs dans l'habitacle. Même avec une voiture «sportive», les variations de régime moteur sont lentes en termes de nombre de périodes du bruit à traiter ; avec un algorithme adaptatif qui converge en quelques périodes, suivre les variations de régime moteur ne pose pas de problèmes. Mettre en œuvre un contrôle actif de la fondamentale et des premières harmoniques du bruit moteur dans les voitures est donc possible dès lors qu'on dispose d'un système de calcul

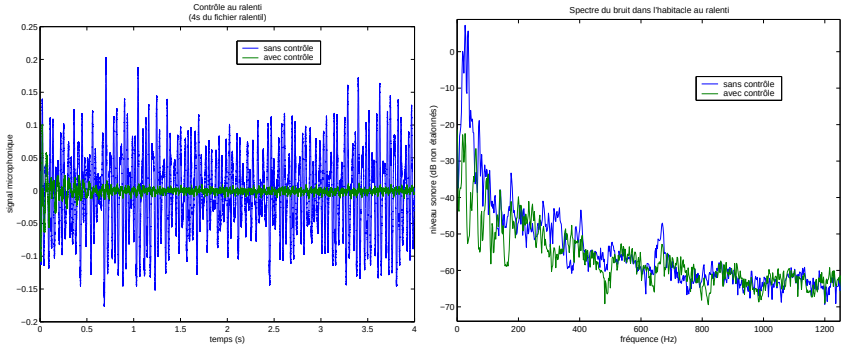



FIG. 3.1 – Contrôle actif du bruit moteur au ralenti

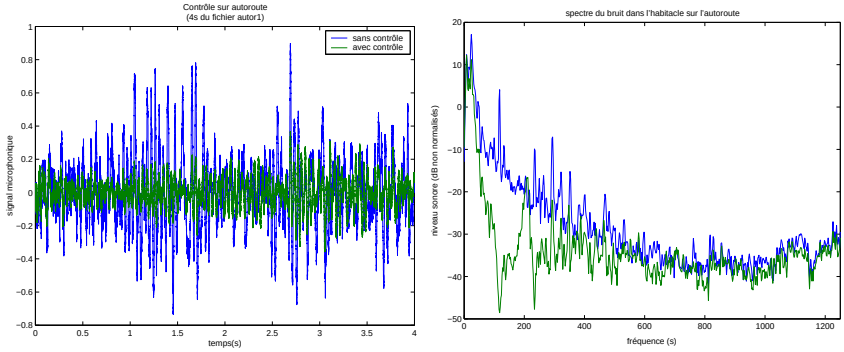



FIG. 3.2 – Contrôle actif du bruit moteur sur autoroute

en temps réel.

Dans le cadre d'un projet de troisième année à l'ESM2, un binôme a enregistré le bruit dans l'habitacle d'une voiture et a programmé un algorithme FXLMS pour en simuler le contrôle actif. Le signal de référence choisi et enregistré en même temps que le bruit sur un microphone a été le courant en entrée de la bobine d'allumage, saisi avec une pince crocodile. Sur une voiture plus récente avec un allumage électronique des signaux directement synchronisé à la rotation du moteur sont bien sûr présents mais moins directement accessibles.

La figure 3.1 montre la pression acoustique enregistrée dans la voiture en fonction du temps et de la fréquence ainsi que la simulation de cette pression contrôlée avec le signal de bobine comme référence. Même si les résultats de cette simulation de contrôle peuvent sembler excellents, l'écoute des fichiers sons correspondants s'avère très décevante ; il se trouve que la raie fondamentale du bruit moteur est à trop basse fréquence pour être gênante au ralenti, on perçoit à peine son atténuation. La figure 3.2 montre les résultats obtenus à partir du bruit enregistré sur autoroute à vitesse à peu près stabilisée. Même si les résultats sont moins bons en termes de dB gagnés qu'au ralenti, à l'écoute ils semblent en fait bien meilleurs et paraissent même bons pour cet exemple de petite voiture ancienne. Le calcul de la sonie des bruits avec et sans contrôle n'a pas permis de traduire quantitativement cette bonne impression, la sonie s'avèrant peu affectée par le contrôle.

Le contrôle actif du bruit moteur dans les voitures est donc techniquement possible et il peut donner des résultats appréciables ; le LMA a travaillé avec Renault et RVI à la mise aux point et à l'intégration de systèmes actifs sur différents types de véhicule. Toutefois, à l'exception d'une Nissan Blue Bird distribuée exclusivement au Japon au début des années 1990, aucune voiture n'est commercialisée avec un dispositif de contrôle actif du bruit moteur. Cela est principalement dû au coût d'un système de contrôle actif, coût moins lié aux microphones (moins d'un euro pièce si à électret), au micro-processeur pour les calculs en temps-réel (bon marché en grande série), aux haut-parleurs et à l'amplificateur (déjà présents dans une voiture) qu'au cablage et au frais d'implantation sur le véhicule ; au total une centaine d'euros par véhicule seraient nécessaire. Même si ce coût peut sembler modéré, il est totalement prohibitif pour une voiture bas de gamme où le prix de tous les équiments est calculé au plus juste. Inversement sur une voiture haut de gamme la cylindrée plus importante et la présence de matériaux acoustiques absorbants font que l'efficacité d'un système de contrôle sera très réduite, comme c'était le cas sur la Nissan. Enfin il peut être difficile de vendre un système de contrôle actif ne réduisant pas totalement le bruit, l'acheteur pouvant imaginer que le véhicule devait être particulièrement bruyant sans contrôle pour qu'on juge bon d'installer un système sophistiqué assez décevant ...

Il n'est par conséquent pas sûr que le contrôle actif du bruit moteur soit prochainement généralisé sur les voitures. En revanche on peut parier qu'il le sera un jour sur les véhicules industriels. Sur les camions par exemple on peut optimiser le contrôle actif pour les raies correspondant au régime nominal de rotation du moteur ; le niveau de bruit y est plus important que dans les véhicules particuliers et les problèmes de coût y sont moins aigus.

### 3.2.2 Contrôle du bruit d'échappement

L'écoulement pulsé en sortie de la ligne d'échappement d'une voiture est une source de débit acoustique. Deux expulsions de gaz se produisent par tour sur un moteur pour un 4 cylindres, la fréquence fondamentale du bruit rayonné sera double de celle du régime . Comme la surface rayonnante est très petite devant la longueur d'onde pour les premières raies du bruit, on peut assimiler la source de bruit à un monopôle. A 200 Hz un sixième de longueur d'onde équivaut à une trentaine de centimètres, d'après le résultat de la section 1.1.2 une réduction du bruit dans tout l'espace est envisageable avec un seul monopôle disposé à proximité de la bouche. Par ailleurs, un algorithme FXLMS peut être utilisé pour un contrôle adaptatif à partir d'un signal de référence quelconque pris au niveau du moteur. Un contrôle actif du bruit d'échappement est donc théoriquement faisable.

En pratique, plusieurs dispositifs ont été installés à titre expérimental sur différents véhicules notamment, en France, par Faurecia, équipementier automobile fournissant entre autres des lignes d'échappement. Des haut-parleurs optimisés pour résister à un environnement agressif (température élevée, projections diverses, vibrations etc ...) peuvent tout à fait être utilisés comme sources secondaires. Une autre solution défendue au départ par des chercheurs du Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques de Poitiers consiste à insérer un volet oscillant dans la ligne d'échappement ; le volet permet de «réguler» le débit et au final de réduire efficacement le bruit en sortie. Les normes sur le bruit des voitures devenant toujours plus exigeantes, il n'est pas exclu que de tels systèmes soient installés un jour en série notamment sur des véhicules industriels.

### 3.2.3 Contrôle du bruit de roulement

Le bruit de roulement des véhicules à pneus est bien sûr dû au contact entre le pneu et la chaussée mais les mécanismes qui en fixent le niveau final sont assez complexes : toute la surface du pneu contribue par exemple au rayonnement du bruit et l'angle formé par la bande de roulement et la chaussée constitue un «cor» qui favorise son rayonnement (le *horn effect*) ; il se propage aussi par voie solidienne jusqu'à différents éléments rayonnant du bruit dans l'habitacle. Comme le phénomène physique à l'origine du bruit fait intervenir des éléments de dimensions variées (les «grains» de la chaussée ne sont pas de tailles identiques, les dessins du pneu forment des structures de plusieurs tailles), le bruit de roulement est plutôt large bande et donc assez peu prédictible. La cavité acoustique torique que constitue un pneumatique a toutefois des fréquences de résonance qui amplifient localement le bruit de roulement. La première résonance survient lorsque la longueur d'onde est égale au périmètre moyen de la cavité puisque la pression doit y être une fonction $2\pi$ périodique de l'angle ; cela correspond à une première résonance entre 200 et 230 Hz pour les pneus usuels. D'un point de vue purement acoustique, le contrôle avec quelques transducteurs du bruit de roulement ne peut être fait dans l'habitacle que pour ses composantes basse fréquence.

Le bruit de roulement contribue significativement au bruit rayonné par les voitures vers l'extérieur. Le contrôle actif ne s'est toutefois pour l'instant intéressé qu'au bruit produit par le roulement à l'intérieur des voitures qui pose déjà de grandes difficultés.

Du point de vue de l'automatique, un contrôle large bande du bruit de roulement dans les voitures est difficile à mettre en œuvre. Avec un bruit peu prédictible et des fonctions de transfert secondaires incluant des retards, un signal de référence mesurant le bruit à la source est souhaitable pour un contrôle du bruit par feedforward. Avec quatre pneus produisant des bruits décorrélés, quatre signaux de référence et un contrôleur complexe sont a priori nécessaires mais la complexité de la génération du bruit de roulement est telle qu'il s'avère qu'un plus grand nombre de signaux de référence pris en différents points de la voiture est en fait nécessaire. La figure 3.3 tirée d'une étude du Virginia Polytechnic Institute montre à gauche, à partir de mesures vibratoires sur une voiture, l'atténuation du bruit de roulement que l'on peut espérer compte tenu de la cohérence entre le signal de minimisation et un ensemble de signaux de référence ; la contrainte de causalité du contrôleur n'est pas prise en compte pour ces simulations. A droite la figure 3.3 montre le bruit de roulement et sa composante totalement incohérente avec les capteurs vibratoires. On constate sur ces figures que, pour espérer un contrôle par feedforward efficace, il faut effectivement utiliser plusieurs signaux de référence. La figure 3.4 montre une simulation plus réaliste du contrôle que l'on peut espérer avec un dispositif multi-références. Sur cette figure les bruits avec et sans contrôle sonts représentés ainsi que les limites théoriques que peuvent laisser espérer la contrainte de causalité du contrôleur (avec des retards dans les fonctions de transfert secondaires) et la cohérence entre les références et la minimisation.

Le contrôle actif du bruit de roulement rencontre donc certaines difficultés liées à son caractère imprédictible et à la multiplicité de ses causes. Avec les performances que l'on peut obtenir même avec un système multi-références, il est peu probable qu'un système large bande soit installé en série dans un véhicule dans les années à venir. En revanche si une résonance particulière vient malencontreusement amplifier sur un véhicule donnée le niveau du bruit de roulement dans une bande de fréquence donnée, il est tout à fait possible qu'un dispositif plus

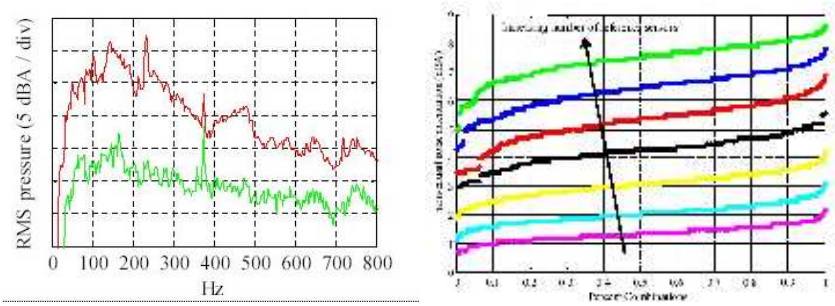



FIG. 3.3 – atténuation théorique du bruit de roulement en fonction du nombre de signaux de référence

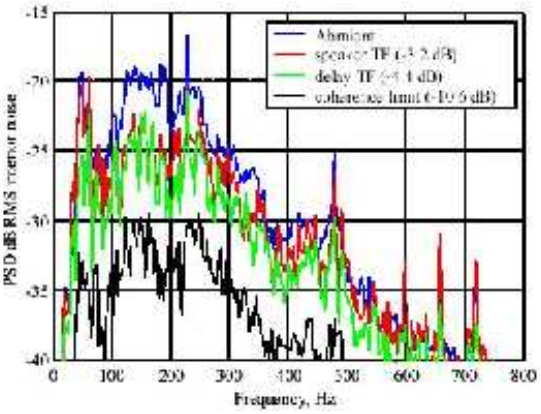



FIG. 3.4 – Contrôle actif du bruit de roulement

simple soit utilisé pour un contrôle actif dans cette bande de fréquence.

### 3.2.4 Contrôle du bruit aérodynamique

Les sources du bruit aérodynamiques dans une voiture sont multiples. Le bruit résulte d'une part des interactions avec l'écoulement d'appendices tels que les rétroviseurs, les essuie-glace et même les trous de serrure des portières. D'autre part les fluctuations de pression dans la couche limite turbulente autour de la voiture viennent exciter les surfaces telles que le pavillon (le «toit» de la voiture) qui rayonnent en retour du bruit dans l'habitacle. Les bruits aérodynamiques sont en général large bande compte tenu de la diversité des structures turbulentes présentes dans l'écoulement. Avec l'analogie de Lighthill, le bruit spécifiquement dû à la turbulence est constitué par des quadripôles et son niveau augmente comme une puissance 8 de la vitesse.

Quelques expériences ont été menées en laboratoire pour réduire par contrôle actif les vibrations des panneaux excités par la couche limite turbulente. On présentera en section 3.3.3 un des résultats obtenus. Même si un certain contrôle actif est possible, le besoin d'utiliser des actionneurs «non conventionnels» (par exemple des pastilles piézo-céramique) et la concurrence de solutions passives font qu'un contrôle actif large bande du bruit aérodynamique dans les voitures semble peu envisageable dans les années qui viennent.

En revanche, comme pour les bruits précédents, une solution active peut permettre sur un véhicule donné de réduire par contrôle actif une résonance gênante (par exemple un mode de cavité acoustique qui se révèle bien couplé avec une déformation de la caisse et peu amorti). Quel que soit la source d'excitation, on pourra réduire facilement de quelques dB une résonance associée à une nette émergence à basse fréquence dans la mesure où le bruit à cette fréquence deviendra prédictible.

## 3.3 Contrôle actif et aéronautique

Comme en automobile, le contrôle actif peut d'une part être envisagé dans les avions pour améliorer le confort acoustique de certains passagers ; en classe économique le manque d'espace est la première source d'inconfort mais pour les autres classes un système de réduction du bruit est envisageable. D'autre part le contrôle actif peut aider à satisfaire les normes qui réglementent le bruit rayonné par les avions.

Une contrainte particulièrement aigue dans le monde de l'aéronautique est celle du *poids* des systèmes embarqués. Si une solution active de réduction du bruit s'avérait globalement bien plus légère qu'une solution passive, les contraintes de coût, de mise en place et de maintenance pourraient être reléguées au second plan. Dans cette section on va présenter quelques uns des systèmes de contrôle actif qui ont été étudiés pour les avions.

### 3.3.1 Contrôle du bruit d'hélices

Le niveau du bruit est particulièrement élevé dans les avions à hélice commerciaux de quelques dizaines de place (ATR 42 de l'ex-Aérospatiale, avions Dornier, Saab ...). La fréquence fondamentale du bruit de raies produit par une hélice est égale à sa fréquence de rotation multi-



FIG. 3.5 – dispositif de contrôle du bruit des hélices

pliée par le nombre de pales ; elle vaut typiquement une centaine de Hz pour les avions ci-dessus. Un contrôle acoustique en est donc tout à fait envisageable d'un point de vue acoustique.

Des signaux synchronisés à la rotation des hélices sont disponibles comme référence pour un contrôle par feedforward. Avec deux hélices, on pourrait croire qu'un système bi-référence est nécessaire mais en fait un système de synchronisation (le *synchro-phaser*) est déjà installé sur les avions pour éviter le battement qui résulterait de deux moteurs de régime légèrement différents ; un seul signal de référence suffit.

La figure 3.5 montre un dispositif qui a été testé en vol dans le cadre des programmes de recherche européens ASANCA. Il s'agissait non seulement de réduire le bruit au niveau supposé de la tête des passagers mais aussi de ne pas utiliser de transducteurs sur les sièges qui peuvent être démontés pour le transport de fret. Les microphones sous les compartiments à bagage ne sont donc pas directment utilisés comme capteurs de minimisation mais ils servent à estimer les quantités à minimiser. La figure 3.6 montre les résultats obtenus sur 9 microphones au niveau de la tête de passagers, soit lorsqu'on minimise directement ces signaux avec un algorithmes FXLMS, soit lorsqu'on reconstitue la quantité à minimiser à partir des micros «déportés» (contrôle RMT). L'atténuation obtenue est satisfaisante et, comme il s'agit d'un bruit à basse fréquence (on traite les deux premières raies du bruit d'hélice) mais à très fort niveau, elle est appréciable en pratique.

Un certains nombres d'avion SAAB équipés d'un système anti-bruit actif sont en service en Europe. Les passagers n'en sont pas avertis et n'ont aucune raison de s'en douter mais, pour qui a effectué l'aller Marseille-Stockolm sans contrôle et le retour avec, la pénibilité du bruit est effectivement réduite par le contrôle actif.

### 3.3.2 Contrôle du bruit de soufflante

Le bruit des turbo-réacteurs est dû à la turbulence du jet en sortie et à la combustion mais aussi à la *soufflante* qui émet un sifflement caractéristique, particulièrement audible en approche et au sol. Ce bruit périodique est dû à l'effet sur l'écoulement du passage des aubes du rotor devant les éléments du stator ; sa fréquence fondamentale se situe typiquement vers 2 kHz. Le bruit de soufflante se propage à contre-courant dans l'entrée du réacteur avant d'être rayonné

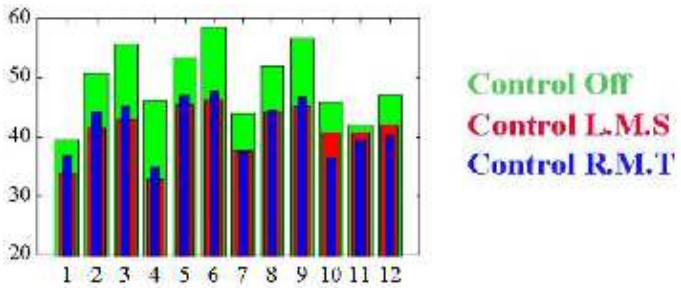



FIG. 3.6 – Contrôle actif sur 9 microphones du bruit des hélices

vers l'extérieur. La section du réacteur est grande devant la longueur d'onde ; comme discuté et illustré en section 1.2, un assez grand nombre de modes contribue à la propagation du bruit de soufflante dans le réacteur et un contrôle actif ne peut être envisagé qu'avec plusieurs capteurs et actionneurs. Comme le bruit est lié à la rotation de la soufflante, le contrôle est facile à mettre en œuvre par filtrage d'un signal de référence.

Bien que le bruit de soufflante soit à fréquence relativement haute, les fabricants de moteurs envisagent son contrôle actif parce que les solutions passives (la disposition de matériaux absorbants en entrée de réacteur) suffisent à peine à satisfaire les normes en vigueur. Plusieurs programmes de recherche européens concernent à l'heure actuelle la réduction du bruit de soufflante par des moyens actifs et passifs.

La figure 3.7 montre le banc d'essai 5C2 de la SNECMA qui comprend un turbo-réacteur à l'échelle 1/4 destiné à l'étude et au contrôle du bruit de soufflante ; la soufflante y est entrainée par un moteur auxiliaire, aucune combustion n'a lieu dans le moteur. Des microphones et des chambres de compression sont disposés en paroi de conduit pour le conduit ; une antenne disposée devant l'entrée devant le conduit permet d'évaluer le rayonnement vers l'extérieur. La figure 3.8 montre la raie fondamentale du bruit de soufflante mesurée, avec et sans contrôle, sur 16 microphones disposés devant le moteur. Le régime de rotation fluctue légèrement en permanence, ce qui exlique le léger décalage fréquentiel des raies entre les mesures avec et sans contrôle. Comme la raie fondamentale du bruit de soufflante est à fréquence assez élevée et qu'elle émerge nettement du bruit de fond large bande, sa réduction par contrôle actif est bien audible même si le niveau du bruit reste conséquent après contrôle.

Les résultats du contrôle actif du bruit de soufflante obtenus au sol sont très satisfaisants ; ils conduisent à une atténuation très supérieure à celle permise par les dispositifs passifs. En revanche plusieurs problèmes pratiques doivent être résolus avant une mise en œuvre sur un avion en vol : d'une part on ne dispose pas d'actionneurs secondaires qui produisent un niveau de bruit suffisant tout en étant assez légers et de consommation énergétique assez faible pour être embarqués. D'autre part la vitesse de l'écoulement en entrée de réacteur est telle en vol qu'il n'est pas sûr qu'un contrôle actif classique soit opérant. Pour ces raisons un contrôle actif du bruit de soufflante ne sera probablement pas installé sur les avions dans l'immédiat.



FIG. 3.7 – Le banc d'essai du bruit de soufflante

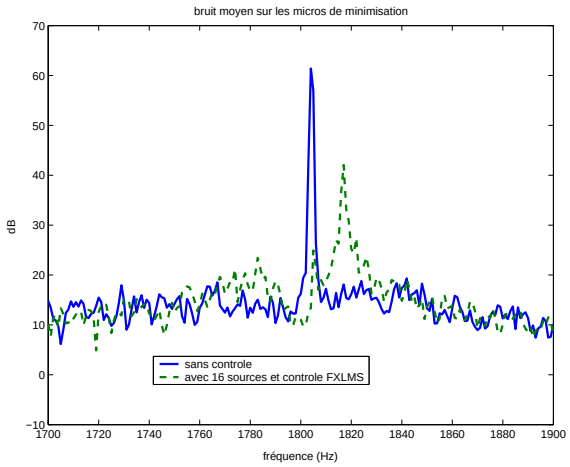



FIG. 3.8 – Contrôle actif du bruit de soufflante sur 16 microphones extérieurs

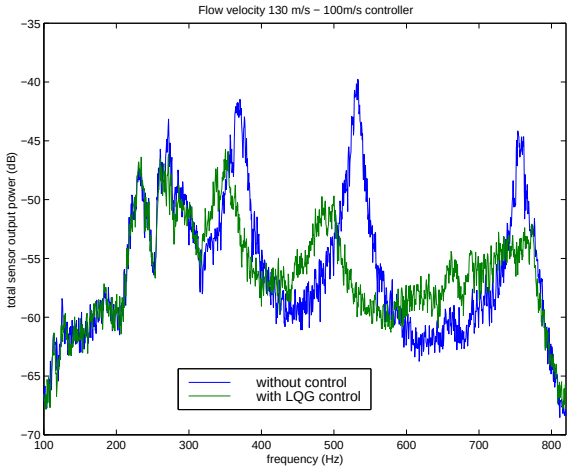



FIG. 3.9 – Contrôle de vibrations dues à une Couche Limite Turbulente

### 3.3.3 Contrôle du bruit dû à la couche limite turbulente

Avec le bruit de jet et le bruit des systèmes de ventilation/pressurisation, le bruit rayonné par les panneaux excités par les fluctuations de pression de la Couche Limite Turbulente (*Turbulent Boundary Layer*) constitue une contribution majeure au niveau de bruit à l'intérieur des avions à réaction civils. Comme dans les voitures il s'agit d'un bruit large bande ; sa composition fréquentielle exacte dépend des structures turbulentes présentes dans la couche limite mais aussi de la réponse élastique des panneaux couplés à la cavité acoustique que constitue l'habitacle. Le bruit résultant à l'origine de sources réparties tout autour de l'avion, on ne dispose pas naturellement de signal de référence permettant la mise en œuvre d'un contrôle par feedforward ; des solutions indirectes comme contrôler le bruit à partir de signaux de référence vibratoires pris sur les panneaux sont envisageables mais la multiplicité des sources fait que la cohérence entre les signaux de référence et de minimisation serait faible dans un cas réel.

Quelques expériences de contrôle des vibrations dûes à une CLT ont néanmoins été menées en soufflerie, chaque panneau étant contrôlé individuellement par feedback, par exemple avec un algorithme de contrôle FXLMS où un signal de minimisation est pris comme signal de référence. De cette façon seules les émergences fréquentielles dues à des résonances peuvent en fait être significativement atténuées. La figure 3.9 montre la réduction permise par un contrôle optimal LQG des vibrations d'un panneau excité par un écoulement à 130 m/s mesurées par un ensemble de capteurs piézo-électriques. La figure 3.10 montre une image par vélocimétrie laser de la déformée du panneau à la fréquence de résonance de son mode 3-1, sans et avec contrôle. Ces résultats ont été obtenus en 1998 à l'occasion d'une collaboration entre le LMA et le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon. Le contrôleur optimal LQG utilisé était assez délicat à construire ; après coup on peut penser qu'un algorithme FXLMS avec un capteur vibratoire comme référence donnerait des résultats au moins aussi bons et certainement plus robustes.

Les travaux sur le contrôle des vibrations et du rayonnement des panneaux excités par une CLT se poursuivent mais les résultats obtenus par des moyens actifs sont encore trop peu

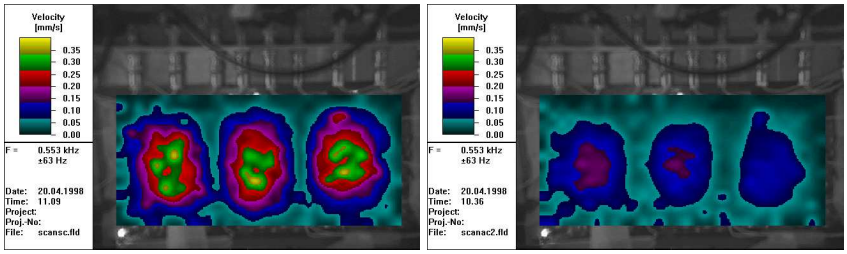



FIG. 3.10 – Vitesse du panneau à une fréquence de résonance, sans et avec contrôle

convaincants pour une réelle application industrielle dans l'immédiat.

### 3.3.4 Contrôle des écoulements

La présence d'un écoulement modifie la propagation acoustique mais elle constitue aussi en elle-même une source de bruit d'autant plus importante que la vitesse est grande. Contrôler, à l'aide de sources de pression ou de débit, l'écoulement lui-même peut également être d'un grand intérêt d'un point de vue *aérodynamique*, par exemple pour retarder le décollement de la couche limite de profils portants sous grande incidence.

Toute une panoplie variée d'actionneurs plus ou moins exotiques est disponible pour intervenir sur un écoulement. Les travaux en cours à l'heure actuelle consistent surtout à observer les façons dont une action secondaire peut interagir avec un écoulement. Dès que la turbulence est présente, les actionneurs ont un effet non linéaire sur l'écoulement et on ne dispose pas de théorie générale de la commande pour déterminer comment piloter des actionneurs secondaires.

En conclusion le contrôle des écoulements comme du bruit généré ou convecté par des écoulement constitue certainement un domaine de recherche prometteur. Les résultats obtenus demeurent toutefois trop fragmentaires pour donner lieu à une présentation dans le cadre de ce document.

## 3.4 Autres applications en extérieur

### 3.4.1 Contrôle du bruit de transformateur

Les transports constituent un domaine d'application naturel du contrôle actif mais d'autres sources de bruit peuvent également être traitées en extérieur. Les transformateurs de puissance s'avèrent par exemple des sources de bruit parfois très gênantes pour les riverains. Le bruit qu'ils produisent est dû aux frictions des tôles magnétiques qu'ils renferment, tôles qui se déforment sous l'effet du champ magnétique (phénomène appelé la *magnéto-striction*. Comme ces déformations sont périodiques, un bruit est produit à des fréquences multiples de celle du courant électrique (50 Hz en France, 60 Hz aux Etats-Unis). Comme on l'a vu au chapitre 1, plusieurs sources secondaires sont nécessaires autour d'un transformateur pour un contrôle actif efficace ; un algorithme adaptatif tel que le FXLMS permet de suivre les variations du rayonnement du transformateur avec les conditions atmosphérique ou le courant produit.



FIG. 3.11 – Un transformateur de puissance en chambre anéchoïque

La figure 3.11 montre un transformateur de puissance installé dans la grande chambre sourde du LMA pour la mesure de son rayonnement ; il s'agissait entre autres d'en déterminer la directivité pour disposer autour de façon optimale les microphones et les haut-parleurs nécessaires au contrôle actif. La modélisation du rayonnement par une somme d'harmoniques sphériques (cf. la section 1.1.4) et l'optimisation de la position des transducteurs à l'aide d'algorithmes génétiques ont permis d'obtenir expérimentalement une atténuation des raies du bruit à 100 et 200 Hz de l'ordre de 15dB dans toutes les directions. Plusieurs systèmes de contrôle actif ont été vendus aux Etat-Unis pour équiper des transformateurs bruyants dont le remplacement aurait été trop coûteux. En Europe plusieurs études ont été menées (avec France-Transfo, ABB ...) et plusieurs dispositifs fonctionnent en permanence contre vents et orages. Il s'agit de solutions ponctuelles et spécifiques à chaque transformateur ; elles ne seront pas appliquées en série sur les nouveaux transformateurs moins bruyants. En revanche le contrôle actif a constitué une réponse appropriée au problème posé à basse fréquence par le bruit de ces transformateurs.

### 3.4.2 Ecrans anti-bruit actifs

Les problèmes de bruit au voisinage des aéroports, des voies ferrées et des autoroutes ou tout simplement en ville font que l'on peut s'interroger sur la possibilité d'isoler certaines zones à l'aide d'écrans antibruit actifs.

Malheureusement, compte-tenu des ordres de grandeur mis en évidence au chapitre 1, on peut estimer le nombre de points de minimisation (et le nombre de sources secondaires) nécessaire à deux ou trois par longueur d'onde pour qu'un écran antibruit actif ait le même effet qu'un écran passif. L'écran actif ne peut par conséquent avoir d'intérêt que pour des bruits intenses à basse et très basse fréquence, vouloir isoler son jardin de bruits large bande tels que ceux en provenance des avions ou des voitures n'aurait pas de sens car le maillage de haut-parleurs à utiliser s'apparenterait à un mur. Par ailleurs on ne dispose, pas pour un contrôle par feedforward, de signal de référence évident caractérisant les sources de bruits à traiter ; ces sources peuvent en effet être multiples, mobiles et inconnues a priori. La mise au point d'un écran actif, même destiné aux basses fréquence, pose donc un certain nombre de problèmes accentués par le fait de se trouver en extérieur avec de larges fluctuations de température, d'orientation et de



FIG. 3.12 – L'écran actif de Lyon St Exupéry

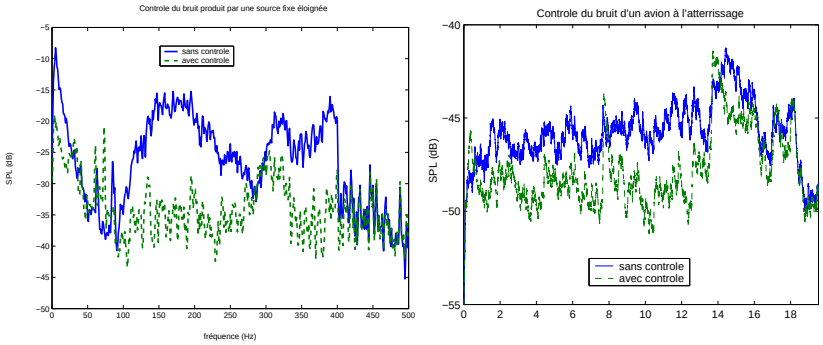



FIG. 3.13 – Contrôle avec l'écran actif dans la bande 50-300Hz

vitesse du vent.

La figure 3.12 montre un dispositif anti-bruit installé à proximité de l'aérodrome de Lyon St Exupéry. Un premier microphone qui reçoit le bruit en provenance des pistes fournit un signal de référence pour les sources secondaires disposées derrière. La réduction du bruit sur des microphones de minimisation en aval permet, moyennant quelques aménagements des algorithmes de contrôle, d'obtenir derrière l'antenne une zone où le bruit est atténué dans la bande 50-300 Hz. La figure 3.13 montre l'atténuation obtenue dans cette bande de fréquence lorsque le bruit incident est produit par un haut-parleur à bonne distance puis lorsque le bruit provient d'un avion à l'atterrissage. On constate sur cette figure une atténuation certaine du bruit. Même si elle s'avére perceptible, cette atténuation ne change pas toutefois pas significativement le niveau du bruit en provenance des avions dont l'essentiel de l'énergie audible se situe en dehors de la bande 50-300 Hz.

Les écrans actifs constituent un thème de recherche de recherche intéressant avec de nombreuses difficultés théoriques et pratiques à surmonter. En revanche, en l'état actuel des connaissances et de la technologie, l'étroitesse de la bande de fréquences où leur apport est réel font qu'ils ne constituent pas la réponse aux nuisances sonores en tout genre.

# Conclusion - Résumé

En guise de conclusion à ce document, voilà finalement ce qu'il apparaît comme essentiel de savoir aujourd'hui en matière de contrôle actif du bruit :

– Les champs acoustiques sont d'autant plus faciles à contrôler qu'on s'intéresse aux *basses fréquences* parce que le nombre de transducteurs nécessaires pour atténuer un bruit dans une zone donnée augmente rapidement avec la fréquence.

– Les actionneurs secondaires permettent un contrôle d'autant plus efficace que le bruit à contrôler est *prédictible* (périodique ou à bande étroite). Avec un bruit imprédictible il faut disposer d'une prise d'information sur le bruit en amont pour espérer un contrôle efficace ; les *retards* présents dans les fonctions de transfert secondaires pénalisent alors l'efficacité du contrôle.

– En pratique, des algorithmes de contrôle *adaptatifs* sont souvent nécessaires pour un contrôle efficace et robuste ; l'algorithme FXLMS (pour *Filtered-X Least Mean Square*, moindres carrés récursif à référence filtrée) permet dans de nombreux cas un contrôle quasi optimal.

– Dans des cas complexes mais favorables, le contrôle actif permet une réduction du bruit de l'ordre de 20 dB. Malheureusement cette réduction souvent obtenue à basse fréquence ne se traduit pas toujours par une réduction importante du bruit total tel qu'il est perçu.

– Le casque anti-bruit et les tronçons de gaine de ventilation actifs sont deux produits de série issus du contrôle actif. De nombreux autres dispositifs ont été étudiés et ont pu, dans certains cas, constituer une réponse appropriée à un problème de bruit donné. Il faut, en conclusion, tenir le contrôle actif pour une technique de réduction du bruit comme les autres qui peut compléter les techniques passives traditionnelles.

# Annexe A

# Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decompostion*, *svd* sous Matlab) est un outil puissant d'analyse des matrices. Elle présente certaines similitudes avec la décomposition en valeurs propres ; elle s'en distingue notamment par le fait que son obtention numérique ne se heurte pas à des problèmes de *conditionnement*, ce qui la rend préférable lorsqu'un choix entre les deux décompositions est possible. Malheureusement, l'usage de cette décomposition n'est pas aussi répandu qu'il pourrait l'être ; le recours à la SVD s'est surtout fait depuis les années 1960 avec le développement du calcul numérique alors que la décomposition en valeurs propres et les calculs analytiques associés sont classiquement enseignés depuis plus d'un siècle.

On va définir ici la décomposition en valeurs singulières et présenter quelques-unes de ses propriétés mathématiques et leur intérêt pour le contrôle acoustique actif.

***Décomposition en valeurs singulières :***
Toute matrice à coefficients complexes $\mathbf{M}$ de dimensions *mxn* se décompose sous la forme :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\,\Sigma\,\mathbf{V}^* \tag{A.1}$$

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des matrices carrées unitaires ($\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$) et où $\Sigma$ est une matrice diagonale de coefficients réels $\sigma_i$ décroissants ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)}$).
Les coefficients $\sigma_i$ sont appelés les *valeurs singulières* de la matrice $\mathbf{M}$ et les vecteurs $\mathbf{U}_k$ et $\mathbf{V}_k$ les vecteurs singuliers à gauche et à droite.

Cette décomposition est unique, aux permutations de vecteurs singuliers près si deux valeurs singulières sont identiques. Dans le cas où $\mathbf{M}$ est à coeffients réels, les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont aussi à coefficients réels (et donc *orthogonales*, $\mathbf{U}\mathbf{U}^t = \mathbf{I}_m$) ; par ailleurs, les valeurs singulières au carré sont les valeurs propres de la matrice hermitienne carrée $\mathbf{M}\mathbf{M}^*$. L'intérêt de la décomposition en valeurs singulières réside notamment dans la propriété suivante :

***Approximation de rang donné d'une matrice :***
la meilleure approximation de rang $p$ d'une matrice $\mathbf{M}$ au sens de la norme 2 (i.e. la matrice $\mathbf{M}_p$ qui minimise $\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_p\|^2$) est obtenue en tronquant à l'ordre $p$ le développement :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\,\Sigma\,\mathbf{V}^* = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \mathbf{U}_k \sigma_k \mathbf{V}_k^* \tag{A.2}$$

Cela implique notamment que le *rang* de la matrice est égal au nombre de valeurs singulières non nulles ; en pratique c'est de cette façon que l'on évalue numériquement le rang d'une matrice.

La décomposition en valeurs singulières présente très un grand intérêt en contrôle actif, aussi bien pour les aspects "acoustique" que "traitement du signal".

En premier lieu, étant donnée une matrice de transfert entre des capteurs et des actionneurs, la décomposition en valeurs singulières permet d'apprécier le nombre de *modes* qui contribuent significativement aux transferts énergétiques, en milieu confiné ou non ; en effet, si le nombre de transducteurs est suffisant, le développement (A.2) peut directement être comparé au développement en série de modes. On peut donc utiliser la décomposition en valeurs singulières pour déterminer le nombre de transducteurs à utiliser en pratique pour un contrôle actif, les vecteurs singuliers renseignant, eux, sur les positions et combinaisons de transducteurs excitant ou observant au mieux ces modes. Un tracé des valeurs singulières d'une matrice de transfert pourra aussi être utilisé pour détecter et séparer deux modes de fréquences de résonance très voisines.

En deuxième lieu, il s'avère en Automatique que la bonne généralisation au cas multivoies du *module d'une fonction de transfert* monovoie est la *plus grande valeur singulière de la matrice de transfert*. Un grand nombre de résultats sur la stabilité des systèmes monovoies (critère de Nyquist, théorème du petit gain ...) s'énoncent dans le cas multivoies en utilisant les valeurs singulières de la matrice de transfert ; certaines équations (comme les équations de Riccati matricielles issues de la commande optimale LQG ou $H_\infty$ des systèmes) peuvent également être résolues en utilisant une décomposition en valeurs singulières plutôt qu'en valeurs propres.

Enfin, au delà du contrôle actif, on retiendra en conclusion que l'intérêt majeur des valeurs singulières est de permettre une décomposition de type spectral sans problèmes de conditionnement.

# Annexe B

# Transferts à phase minimale et factorisation spectrale

Il existe une infinité de fonctions de transfert stables et causales ayant un module donné ; quelque soit par exemple le réel $\tau$ positif, les fonctions retardées $He^{-j\omega\tau}$ ont toutes le même module. Parmi toutes ces fonctions, il en existe une qui contient «le moins de retard possible» et dont l'inverse s'avère également stable et causale :

***Fonctions de transfert à phase minimale :***
On définit une fonction de transfert $H$ causale et stable comme étant *à phase minimale* si son inverse $H^{-1}$ est également causale et stable.
Toute fonction de transfert $H$ causale et stable se factorise sous la forme :

$$H = H_{min} H_{all} \tag{B.1}$$

où $H_{min}$ est à phase minimale et où $|H_{all}(\omega \neq 0)| = 1$. L'appellation «phase minimale» vient de ce que, de toutes les fonctions de transfert ayant le même module, $H_{min}$ est celle où le maximum d'énergie est concentré dans le début de la réponse impulsionnelle : précisément, à temps discret par exemple, pour tout entier positif $N$ la réponse impulsionnelle $h$ de $H_{min}$ est celle qui maximise $\sum_{n=1}^{N} h_n^2$.

Si $H$ est une fraction rationnelle en $j\omega$, elle sera à phase minimale si ses *zéros* sont à partie réelle strictement négative. La factorisation (B.1) peut facilement être faite dans le cas rationnel en «reflétant» les zéros à partie réelle positive de l'autre côté de l'axe imaginaire. Cette factorisation est aussi facile à faire dans le cas rationnel pour les systèmes à temps discret. Dans le cas général monovoie, on dispose d'un algorithme numérique efficace pour obtenir la factorisation (B.1) en utilisant comme intermédiaire le *cepstre* complexe du transfert $H$. Dans le cas où $H$ est une matrice de transfert de grande dimension, on ne sait construire la factorisation que si les composantes de $H$ sont des fractions rationnelles de degrés faibles.

Tout signal «physique» peut être interprété comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc par une fonction de transfert causale, stable et à phase minimale. L'identification de cette fonction

de transfert à partir de la Densité Spectrale de Puissance du signal s'appelle la factorisation spectrale :

***Factorisation spectrale :***
Toute fonction réelle positive $S(\omega)$ vérifiant la condition dite de Paley-Wiener :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log S(\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega > -\infty \tag{B.2}$$

se factorise sous la forme :

$$S(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) \tag{B.3}$$

où $H$ est une fonction de transfert causale, stable et à phase minimale.

Numériquement, la factorisation spectrale d'une DSP s'obtient comme la factorisation (B.1). Dans le cas des systèmes à temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_s$, la condition de Paley-Wiener s'écrit :

$$\int_{-f_s/2}^{+f_s/2} \log S(f)\, df > -\infty \tag{B.4}$$

# Annexe C

# Sujets d'examen du DEA d'acoustique

## Examen 2003-2003

*durée 1h - tous documents autorisés*

On va s'intéresser ici au contrôle actif du bruit dans une zone cubique de $2m$ de côté, cela dans différents environnements acoustiques.
Chacune des quatre situations ci-dessous peut être traitée indépendemment des autres.

**Situation 1**
On suppose que la zone cubique est l'intérieur d'une cabine assimilable à une cavité acoustique à bords rigides. Pour le contrôle, on dispose des microphones de minimisation et des haut-parleurs secondaires dans des positions plus ou moins aléatoires dans la cabine.

1. Quelle est la fréquence de résonance du mode $(1,0,0)$ de la cabine ? Celle du mode $(0,2,0)$ ?
2. Sachant que la fréquence de résonance du mode $(1,1,0)$ est $120Hz$, combien de modes ont une fréquence de résonance inférieure à $150Hz$ ?
3. Quel est le nombre de microphones de minimisation nécessaires à un contrôle actif global dans la cavité dans la bande $0-150Hz$ ?

**Situation 2**
La zone cubique est l'intérieur de la cabine de pilotage d'une locomotive diesel. On suppose qu'on y a disposé des microphones de minimisation et des haut-parleurs secondaires permettant un contrôle actif global du bruit du moteur.

1. Comment peut-on procéder pour calculer les signaux de commande à adresser aux haut-parleurs de contrôle ?
2. A votre avis, un tel contrôle actif présenterait-il un intérêt industriel ?

**Situation 3**
On suppose la zone cubique à minimiser comme étant dans l'espace libre. Pour le contrôle on

dispose autour un certain nombre de microphones de minimisation et de haut-parleurs.
Quel est l'ordre de grandeur du nombre de micros nécessaires à un contrôle global du bruit produit dans la zone cubique par une onde plane à $150Hz$ ?

**Situation 4**
La zone cubique de contrôle est posée sur un sol rigide délimitant un demi-espace libre. Le bruit à atténuer est celui d'un avion au décollage situé à quelques centaines de mètres.

1. Quel signal de référence pourrait-on utiliser pour un contrôle par feedforward du bruit dans la zone cubique ?
2. Que pensez-vous de l'effet sur un auditeur d'un contrôle efficace dans la bande $100 - 300Hz$ ?
3. On se propose d'entourer la zone cubique de microphones de minimisation pour un contrôle global. Faut-il en disposer sur le sol ?

*Question subsidiaire :* Faut-il disposer des microphones de minimisation au sol lorsque celui-ci n'est que partiellement réfléchissant ?

# Annexe D

# Bibliographie sommaire

Voilà quelques références bibliographiques en liaison avec le contrôle actif ; parmi les nombreux ouvrages disponibles, les recommandations ci-dessous sont surtout liées à des préférences personnelles.

**Sur le contrôle actif proprement dit :**

A l'heure actuelle plusieurs dizaine de livres sont consacrés au contrôle actif du bruit et des vibrations. Mes recommandations sont :

*Active Control of Sound, P.A. Nelson, S.J. Elliott, Academic Press, 1992*
LE livre sur le contrôle actif du bruit. Le premier, le plus complet sur les aspects «acoustiques», facile à lire qui plus est.

*Signal Processing for Active Control, S.J. Elliott, Academic Press, 2001*
Depuis 1992 les possibilités des systèmes de contrôle en temps réel se sont élargies. Ce livre est un complément idéal au précédent pour ce qui concerne les aspects «algorithmes» sophistiqués.

Plusieurs livres sont consacrés au contrôle des vibrations mais il s'agit plus de catalogues des travaux de leurs auteurs que de présentations véritablement unifiées, il est difficile d'en recommander un à titre général.

**Sur l'acoustique :**

Deux grands «classiques» en anglais plusieurs fois réédités :

*Acoustics : An Introduction to its Physical Properties and Applications,*
*A.D. Pierce, Mc Graw-Hill, 1981*

*Theoretical Acoustics, P.M. Morse, K.U. Ingard, Mc Graw-Hill, 1961*

Un ouvrage de référebce en français :

*Manuel d'Acoustique Fondamentale, M. Bruneau, Hermès,1991*

**Sur le traitement du signal :**

*Digital Signal Processing, A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, Prentice Hall, 1975*
Un ouvrage d'introduction déjà ancien mais toujours clair.

Pour finir il existe un très grand nombre de livres sur l'«Automatique» qui concernent le contrôle au sens large mais les théories présentées ne sont pas forcément appropriées au contrôle actif du bruit ; le livre *Signal Processing for Active Control* convient tout à fait de ce point de vue.

# Index

brevets, 38
bruit
    d'hélices, 45–46
    d'échappement, 42
    de couche limite turbulente, 49–50
    de moteur, 40–42
    de roulement, 43–45
    de soufflante, 46–47
    de transformateur, 50–51

casque anti-bruit, 38–39
causalité, 27–29
champ diffus, 17
champ lointain, 10
cohérence, 26
conditionnement, 32
convergence, 32

directivité, 12
Dirichlet (condition aux limites de), 18

écran actif, 51
énergie (absorption d'), 11
état (représentation d'), 36

factorisation spectrale, 57
feedback, 33–37
feedforward, 24–33
FIR (filtre), 29
FXLMS (algorithme), 29–33

Green (fonction de), 20
guide d'ondes, 13–16

harmoniques sphériques, 12

IMC (contrôleur), 35
intensité acoustique, 11

modes de cavité, 16
modes propagatifs, 13–16
monopôle, 8–11

phase minimale, 56
psychoacoustique, 20–21

rang (d'une matrice), 55
représentation intégrale, 20
robustesse, 31

Schroeder (fréquence de), 18
SVD, 54