Annexe A

Compléments de géométrie et de relativité générale

A.1 Algèbre extérieure et différentiation extérieure

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle p-forme une forme p-linéaire alternée de E. C'est donc un tenseur p fois covariant complètement antisymétrique. L'ensemble des p-formes constitue un espace vectoriel $\bigwedge_p \mathrm{E}$. On note que $\bigwedge_0 \mathrm{E} = I\!R$.

Soient p 1-formes, c'est-à-dire des formes ϕ^1, ..., ϕ^p. On définit le produit extérieur de ces p formes comme étant la p-forme définie par sa valeur sur p vecteurs X_1, ..., X_p suivant la formule

$$\left(\phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^p\right)(X_1, \ldots, X_p) = \epsilon_{i_1,\ldots i_p} \phi^{i_1}(X_1) \cdots \phi^{i_p}(X_p)$$

où $\epsilon_{i_1 \ldots i_p}$ est le symbole de Levi-Civita.

Soit e^i une base de E*. A l'aide du produit extérieur, on construit une base de $\bigwedge_p \mathrm{E}$ formée de

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n.$$

La dimension de $\bigwedge_p \mathrm{E}$ est donc C_n^p. Ainsi, $p \leq n$ et la dimension de $\bigwedge_n \mathrm{E}$ est un. Une p-forme ω s'exprime dans cette base

$$\omega = \omega_{<i_1 \ldots i_p>} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$$

où les $\omega_{<i_1 \ldots i_p>}$ s'appellent les composantes strictes de ω. Il faut faire attention que les composantes strictes ne se transforment pas comme celles d'un tenseur.

Il est commode d'introduire une généralisation du symbole de Levi-Civita. On définit $\epsilon_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_p}$ comme valant 1 si $j_1 \ldots j_p$ est une permutation paire de $i_1 \ldots i_p$, -1 pour une permutation impaire et 0 autrement, en formule

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_p} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \ldots & \delta_{i_1}^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_p}^{j_1} & \ldots & \delta_{i_p}^{j_p} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

On note que $\epsilon_i^j = \delta_j^i$ et que $\epsilon_{i_1\dots i_p}^{1\dots p} = \epsilon_{i_1\dots i_p}$.

On peut alors récrire les éléments de la base sous la forme

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \epsilon_{j_1\dots j_p}^{i_1\dots i_p} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p}.$$

Par suite, en tant que tenseur p fois covariant, les composantes covariantes de ω sont

$$\omega_{i_1\dots i_p} = \epsilon_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_p} \omega_{<j_1\dots j_p>}.$$

Dans la pratique, on écrit

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\dots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}.$$

On a la notion de produit extérieur d'une p-forme α de compsantes $\alpha_{i_1\dots i_p}$ et d'une q-forme β de composantes $\beta_{j_1\dots j_q}$. On définit la $p+q$-forme par la formule

$$(\alpha \wedge \beta)_{i_1\dots i_{p+q}} = \frac{1}{p!q!}\epsilon_{i_1\dots\dots\dots i_{p+q}}^{j_1\dots j_p k_1\dots k_q} \alpha_{j_1\dots j_p}\beta_{k_1\dots k_q}.$$

On note l'identité

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha.$$

On peut bien sûr définir des champs de p-formes dans un espace affine et plus généralement sur une variété différentiable. Pour un système de coodonnées (x^i), la base canoniquement associée des formes est formée des dx^i. On rappelle qu'on écrit $e^{\underline{i}}$ pour une base quelconque des formes afin de bien les distinguer.

Soit une p-forme α qui s'écrit

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

La différentielle extérieure de α est une $(p+1)$-forme définie par

$$d\alpha = \frac{1}{p!}\partial_j \alpha_{i_1\dots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

que l'on récrit

$$d\alpha = \frac{1}{(p+1)!}\epsilon_{k_1\dots k_{p+1}}^{j i_1\dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1\dots i_p} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{p+1}}.$$

Ainsi, les composantes de $d\alpha$ sont

$$(d\alpha)_{k_1\dots k_{p+1}} = \epsilon_{k_1\dots k_{p+1}}^{j i_1\dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1\dots i_p}.$$

On note l'identité

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

Enfin, on a la propriété fondamentale

$$d^2\alpha = 0.$$

Réciproquement, si une p-forme β satisfait $d\beta = 0$ alors il existe au moins localement une $(p-1)$-forme α telle que $\beta = d\alpha$.

On a aussi la notion de p-formes à valeurs dans un espace vectoriel M. C'est un élément de $\mathrm{M} \otimes \bigwedge_p \mathrm{E}$. Soit ϵ_A une base de M, on a $\Phi = \epsilon_A \otimes \alpha^A$ où les α^A sont des p-formes. La différentielle extérieure de Φ est $d\Phi = \epsilon_A \otimes d\alpha^A$.

A.2 1-forme de connexion

Soit une variété différentiable munie d'une métrique g et soit une base orthonormée formée des champs de vecteurs $e_{\underline{a}}$ $(a = 1, \ldots, n)$. A titre d'exemple, on prend comme métrique $\eta_{\underline{a}\,\underline{b}}$ dans la base $e_{\underline{a}}$. Une base duale est constituée des 1-formes $e^{\underline{b}}$ définies par

$$e^{\underline{b}}_i = \eta^{\underline{b}\,\underline{a}} g_{ij} e^j_{\underline{a}}$$

dans un système de coordonnées (x^i). On remarque que les $e^{\underline{a}}$ s'interprètent comme des 1-formes à valeur vectorielle.

On considère une connexion métrique ∇, c'est-à-dire telle que la dérivée covariante de la métrique est nulle. On définit la 1-forme connexion $\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ par sa valeur sur un vecteur X

$$\nabla_X e_{\underline{a}} = \omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}(X) e_{\underline{b}}.$$

En coordonnées, cette formule devient

$$\nabla_i e^j_{\underline{a}} = \omega_{i\,\underline{a}}^{\;\underline{b}} e^j_{\underline{b}}.$$

En contractant par $e^{\underline{c}}_i$, on obtient

$$e^{\underline{b}}_j \nabla_i e^j_{\underline{a}} = \omega_{i\,\underline{a}}^{\;\underline{b}}.$$

Abaissant l'indice $\underline{b}$, la relation $e_{\underline{b}j} \nabla_i e^j_{\underline{a}} = -e^j_{\underline{a}} \nabla_i e_{\underline{b}j}$ montre que la 1-forme connexion métrique $\omega_{\underline{b}\,\underline{a}}$ est antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Elle s'interprète alors comme une 1-forme à valeur dans l'espace vectoriel des matrices $\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ ayant cette propriété d'antisymétrie qui constitue l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, le crochet étant le commutateur des matrices.

Il est possible de changer de base orthonormée par une transformation de Lorentz $e_{\underline{a}} = L^{\underline{m}'}_{\underline{a}}(x^i) e_{\underline{m}'}$. On trouve que la loi de transformation de la 1-forme connexion est

$$\omega_{i\,\underline{a}}^{\;\underline{b}} = L^{\underline{b}}_{\underline{n}'} L^{\underline{m}'}_{\underline{a}} \omega_{i\,\underline{m}'}^{\;\underline{n}'} + L^{\underline{b}}_{\underline{n}'} \partial_i L^{\underline{n}'}_{\underline{a}}.$$

On peut se limiter aux transformations de $\mathrm{L}_0(n)$.

Cependant, à partir de la 1-forme connexion, on peut construire une 2-forme $R^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ à valeur tensorielle en posant

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = d\omega^{\underline{b}}_{\underline{a}} + \omega^{\underline{b}}_{\underline{c}} \wedge \omega^{\underline{c}}_{\underline{a}}$$

comme on peut le vérifier à la main en effectuant une transformation de Lorentz,

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = L^{\underline{b}}_{\underline{n}'} L^{\underline{m}'}_{\underline{a}} R^{\underline{n}'}_{\underline{m}'}.$$

On l'appelle la 2-forme de courbure. En coordonnées (x^i), on a

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}} = \frac{1}{2} R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij} dx^i \wedge dx^j.$$

On retrouve le tenseur de courbure sous la forme

$$R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij} = \partial_i \omega_j{}^{\underline{b}}{}_{\underline{a}} - \partial_j \omega_i{}^{\underline{b}}{}_{\underline{a}} + \omega_i{}^{\underline{b}}{}_{\underline{c}} \omega_j{}^{\underline{c}}{}_{\underline{a}} - \omega_j{}^{\underline{b}}{}_{\underline{c}} \omega_i{}^{\underline{c}}{}_{\underline{a}}.$$

On remarque que le tenseur $R_{\underline{b}\underline{a}ij}$ est antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$ puisque la connexion est métrique. Les composantes du tenseur de courbure dans le repère naturel sont $R^k_{lij} = e^k_{\underline{b}} e^{\underline{a}}_l R^{\underline{b}}_{\underline{a}ij}$.

La différentielle extérieure d'une p-forme $\Phi^{\underline{b}\cdots}_{\underline{a}\cdots}$ à valeur tensorielle n'est pas une $(p+1)$-forme à valeur tensorielle, c'est pourquoi on a introduit la différentiation extérieure covariante, notée D, définie par

$$(D\Phi)^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} = d\Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \omega^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge \Phi^{\underline{c}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \cdots - \omega^{\underline{c}}_{\underline{b}} \wedge \Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{c}\cdots} - \cdots$$

qui assure que $D\Phi^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ est une $(p+1)$-forme à valeur tensorielle. On note l'identité

$$\left(D^2\Phi\right)^{\underline{a}\cdots}_{\underline{b}\cdots} = R^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge \Phi^{\underline{c}\cdots}_{\underline{b}\cdots} + \cdots - R^{\underline{c}}_{\underline{b}} \wedge \Phi^{\underline{a}\cdots}_{\underline{c}\cdots} - \cdots.$$

On définit alors la 2-forme de torsion $T^{\underline{a}}$ à valeur vectorielle par la formule

$$T^{\underline{a}} = De^{\underline{a}}.$$

En coordonnées (x^i), on a

$$T^{\underline{a}} = \frac{1}{2} T^{\underline{a}}_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

On retrouve le tenseur de torsion sous la forme

$$T^{\underline{a}}_{ij} = \partial_i e^{\underline{a}}_j - \partial_j e^{\underline{a}}_i + \omega_i{}^{\underline{a}}{}_{\underline{c}} e^{\underline{c}}_j - \omega_j{}^{\underline{a}}{}_{\underline{c}} e^{\underline{c}}_i.$$

conduisant dans le repère naturel aux composantes $T^k_{ij} = e^k_{\underline{a}} T^{\underline{a}}_{ij}$.

La 2-forme de torsion et la 2-forme de courbure constituent la géométrie fondamentale d'une 1-forme de connexion métrique. Ces deux 2-formes satisfont les deux identités de Bianchi

$$DT^{\underline{a}} = R^{\underline{a}}_{\underline{c}} \wedge e^{\underline{c}} \quad \text{et} \quad DR^{\underline{a}}_{\underline{b}} = 0$$

qui généralisent celles indiquées précédemment pour le tenseur de Riemann d'une connexion riemannienne, c'est-à-dire telle que la torsion $T^{\underline{a}}$ est nulle.

A.3 Equation de Dirac en espace-temps courbe

Il faut d'abord définir les champs de spineurs sur un espace-temps courbe $\mathcal{V}$ muni d'une métrique g. Dans un système de coordonnées (x^μ), nous aurons besoin des éléments γ^α d'une algèbre non commutative satisfaisant

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2g^{\alpha\beta} Id$$

où Id est l'unité de l'algèbre. Cette condition définit de fait en chaque point x de $\mathcal{V}$ l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ de l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathcal{V}$ caractérisée par l'existence d'une application $\gamma\ :\ \mathrm{T}_x\mathcal{V} \to \mathcal{C}$ satisfaisant

$$\gamma(X)\gamma(Y) + \gamma(Y)\gamma(X) = -2g(X,Y)Id.$$

Introduisons une tétrade lorentzienne $e_{\underline{a}}$. Nous posons $\gamma_{\underline{a}} = \gamma(e_{\underline{a}})$. Nous voyons que cela justifie de poser

$$\gamma^{\alpha} = e^{\alpha}_{\underline{a}}\gamma^{\underline{a}} \quad \text{avec} \quad \gamma^{\underline{a}} = \eta^{\underline{a}\,\underline{b}}\gamma_{\underline{b}}.$$

Il y a un isomorphisme non canonique entre l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ et l'algèbre des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}$ de dimension 4. Dans une base de $\mathcal{S}$, les $\gamma^{\underline{a}}$ coïncident avec les matrices usuelles de Dirac.

Nous définissons maintenant le groupe de spin, noté Spin(4), qui est le groupe des opérateurs linéraires Λ sur $\mathcal{S}$ inversibles et de déterminant 1 tels que

$$\Lambda\gamma(e_{\underline{a}})\Lambda^{-1} = \gamma\left(\mathrm{L}(e_{\underline{a}})\right)$$

où L est un élément du groupe de Lorentz L(4). Nous pouvons *mutatis mutandis* définir $\mathrm{Spin}_0(4)$ pour $\mathrm{L}_0(4)$ qui est un groupe simplement connexe. Cela induit un homomorphisme surjectif $\mathcal{H}\ :\ \mathrm{Spin}(4) \to \mathrm{L}(4)$ qui a tout Λ fait correspondre une transformation de Lorentz L. Nous remarquons que le noyau de cet homomorphisme est Id et $-Id$.

Nous sommes en mesure de définir un spineur Ψ par la donnée de couples $(e_{\underline{a}}, \psi)$ où $e_{\underline{a}}$ est une tétrade lorentzienne et où ψ est un élément de $\mathcal{S}$, satisfaisant la relation d'équivalence

$$\psi' = \Lambda\psi \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda).$$

Dans une base de $\mathcal{S}$, ψ a les composantes spinorielles ψ^A avec $A = 1, 2, 3, 4$ et la relation d'équivalence s'écrit

$$\psi^{A'} = \Lambda^{A'}_{B}\psi^{B} \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda).$$

Il y a en réalité une indétermination puisque $(e_{\underline{a}}, \psi)$ et $(e_{\underline{a}}, -\psi)$ représentent le même spineur Ψ.

Nous disons que les composantes ψ^A définissent un spineur contravariant. Nous pouvons définir un spineur covariant comme la donnée d'un couple $(e_{\underline{a}}, \phi)$ où ϕ est un élément du dual de $\mathcal{S}$ dont les composantes ϕ_A se transforment suivant la loi

$$\phi_{A'} = \Lambda^{B}_{A'}\phi_{B} \quad e_{\underline{a}'} = L^{\underline{b}}_{\underline{a}'}e_{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L} = \mathcal{H}(\Lambda),$$

où $\Lambda^{B}_{A'}$ est la matrice inverse de $\Lambda^{B'}_{A}$. Ainsi, les $\gamma^{\underline{a}}$ sont des spineurs une fois contravariants et une fois covariants.

L'adjonction de Dirac assure la correspondance entre les composantes spinorielles contravariantes et covariantes. Soit un spineur ψ, l'adjoint de Dirac est le spineur covariant, noté $\overline{\psi}$, exprimé en notation matricielle sous la forme $\psi^{\dagger}\gamma^{\underline{0}}$ où $\dagger$ désigne l'hermitique conjugué.

Nous obtenons des champs de spineurs sur l'espace-temps, tout au moins localement, en tenant compte de la dépendance des $e_{\underline{a}}$ et des ψ^A sur $\mathcal{V}$. Nous remarquons que $\overline{\psi}\psi$ est une fonction, $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ un champ de vecteurs, ...

Il faut maintenant introduire la notion de dérivée covariante d'un spineur ψ car $\partial_\mu\psi$ n'est pas un vecteur quand nous changeons les $e^{\underline{a}}$. Aussi, nous posons

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \Gamma_\mu\psi$$

où Γ_μ est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre des matrices Λ qui devra correspondre à l'algèbre de Lie de Spin(4), isomorphe à celle de L(4). Nous devons avoir $\nabla_\mu(\Lambda\psi) = \Lambda\nabla_\mu\psi$. Notant Γ'_μ le transformé de Γ_μ, nous devons satisfaire

$$\Gamma_\mu = \Lambda^{-1}\Gamma'_\mu\Lambda + \Lambda^{-1}\partial_\mu\Lambda.$$

Cette loi de transformation est à rapprocher de celle de la 1-forme connexion métrique $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$ antisymétrique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Nous vérifions qu'une solution est [1]

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}} \quad \text{soit} \quad \Gamma_\mu = -\frac{1}{8}\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}\left(\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}} - \gamma^{\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\right).$$

Ceci s'étend à la dérivée covariante d'un spineur covariant

$$\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \phi\Gamma_\mu.$$

Nous vérifions que γ^μ considéré comme un vecteur-spineur a une dérivée covariante nulle

$$\nabla_\rho\gamma^\mu = \omega_{\rho\,\underline{a}}^{\;\;\underline{m}}\gamma^{\underline{a}}e^\mu_{\underline{m}} + \frac{1}{4}\omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{m}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}}e^\mu_{\underline{m}} - \frac{1}{4}\omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}\gamma^{\underline{a}}\gamma^{\underline{b}}\gamma^{\underline{m}}e^\mu_{\underline{m}} = 0.$$

En conséquence pour la particule libre de spin $1/2$ et de masse m, nous posons l'équation covariante de Dirac dans un espace-temps courbe

$$i\hbar\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - mc\psi = 0.$$

L'équation covariante de Dirac dérive du lagrangien

$$L[e^\mu_{\underline{a}}, \omega_{\rho\underline{a}\,\underline{b}}, \psi] = \frac{i\hbar c}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) - mc^2\overline{\psi}\psi.$$

D'après les principes généraux des théories métriques de la gravitation, le tenseur énergie-impulsion symétrique devrait s'obtenir par variation de $\mathcal{L}$ par rapport à $g_{\mu\nu}$ en prenant la connexion riemannienne pour $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$. Cela ne se présente pas simplement. Aussi, il est plus commode de faire séparément des variations par rapport à $e^\mu_{\underline{a}}$ et à $\omega_{\mu\underline{a}\,\underline{b}}$ pour une connexion métrique. Si l'on applique également ces variations au lagrangien gravitationnel R alors on n'obtient pas la relativité générale mais la théorie d'Einstein-Cartan de la gravitation dans laquelle la torsion est engendrée par la densité de spin de la matière.

[1] Attention le signe de cette expression dépend des conventions utilisées.

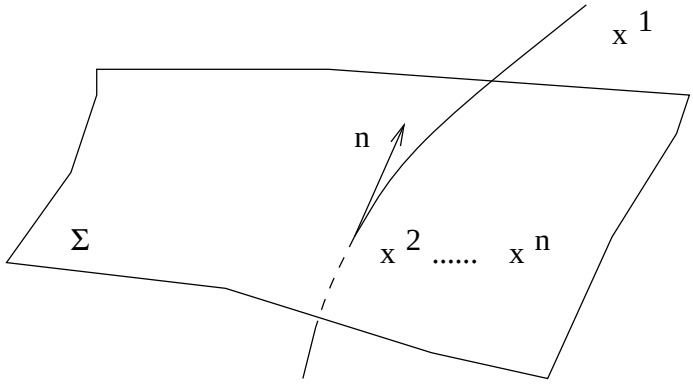
A.4 Courbure extrinsèque d'une hypersurface

Soit $\mathcal{V}$ une variété différentiable munie d'une métrique g et de la connexion riemannienne associée ∇. Considérons l'hypersurface Σ définie par $f(x) = 0$ avec la condition $\partial_i f \neq 0$.

Nous supposons que $\partial_i f$ est toujours orienté dans le temps ou bien toujours orienté dans l'espace. Le vecteur unitaire n normal à Σ est choisi par convention

$$n_i = \frac{\pm\partial_i f}{\sqrt{\pm g^{ij}\partial_i f \partial_j f}} \quad \text{avec} \quad g_{ij}n^i n^j = \pm 1.$$

Nous pouvons définir les coordonnées normales de Gauss relatives à Σ. Soit $x^2, \ldots, x^n$ un système de coordonnées de Σ. En chaque point de Σ, nous considérons la géodésique du genre temps, ou espace suivant le cas, issue de ce point et dont le vecteur-dérivée coïncide avec le vecteur normal n pour un paramètre affine x^1. Celui-ci définit une coordonnée x^1 choisie de telle sorte que l'équation de Σ soit $x^1 = 0$.



Nous avons ainsi construit des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ de $\mathcal{V}$. Par construction les composantes de la métrique dans les coordonnées (x^i) sont telles que

$$g_{11} = \pm 1 \quad \text{et} \quad g_{i1} \mid_{x^1=0} = 0.$$

En utilisant le fait que les lignes-coordonnées $x^2, \ldots, x^n =$ const. sont des géodésiques, nous obtenons $\Gamma^i_{11} = 0$ et par suite $\partial_1 g_{i1} = 0$. Compte tenu du résultat précédent, la métrique s'écrit

$$ds^2 = \pm(dx^1)^2 + g_{ij}(x^1, x^k)dx^i dx^j \quad (i, j, k = 2, \ldots, n)$$

et les (x^i) sont appelées les coordonnées normales de Gauss.

Nous pouvons induire sur Σ les quantités géométriques suivantes.

1. Une métrique h définie par

$$X, Y \in \mathrm{T}_x\Sigma \quad h(X, Y) = g(X, Y).$$

C'est ce qu'on appelle quelquefois la première forme fondamentale de Σ. Dans les coordonnées normales de Gauss, nous obtenons simplement $h_{ij} = g_{ij} \mid_{x^1=0}$.

2. Une connexion ∇^Σ définie par la décomposition unique de la connexion

$$X, Y \in \mathrm{T}_x\Sigma \quad \nabla_X Y = \nabla^\Sigma_X Y + K(X,Y)\frac{n}{< n, n >}.$$

où $K(X,Y)$ est la courbure extrinsèque de Σ souvent appelée la seconde forme fondamentale de Σ. Dans les coordonnées normales de Gauss nous avons simplement

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{ij} \mid_{x^1=0} .$$

Nous démontrerons que ∇^Σ est la connexion métrique associée à h.

Parce que cela sera utile dans la suite, nous allons donner l'expression générale de K_{ij} pour une hypersurface Σ du genre espace. L'équation de Σ est notée maintenant $x^0 = 0$ et la métrique a la forme générale

$$ds^2 = -(N^2 - h_{ij}N^iN^j)(dx^0)^2 + 2h_{ij}N^i dx^0 dx^j + h_{ij}dx^i dx^j$$

à l'aide des fonctions N, N^i et h_{ij} de x^0 et de x^i. La métrique inverse est

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2} \quad , \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2} \quad , \quad g^{ij} = h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2}$$

où h^{ij} est la matrice inverse de h_{ij}. Le vecteur normal à Σ, dirigé dans le sens croissant de x^0 comme nous l'avons défini, a pour composantes

$$n_0 = -N \quad , \quad n_i = 0 \quad \text{soit} \quad n^0 = \frac{1}{N} \quad , \quad n^i = -\frac{N^i}{N}.$$

La métrique induite sur Σ a pour composantes

$$h_{ij} = h_{ij} \mid_{x^0=0} .$$

La courbure extrinsèque a une expression plus compliquée. Ecrivons la décomposition relative au vecteur normal n

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k + N^m\Gamma^0_{ij}\partial_m + N\Gamma^0_{ij}n$$

puisque $\partial_0 = Nn + N^m\partial_m$. Par suite, nous avons $K_{ij} = -N\Gamma^0_{ij}$ qui s'exprime sous la forme

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\left(\partial_0 h_{ij} - \nabla^{(h)}_i N_j - \nabla^{(h)}_j N_i\right)$$

où $\nabla^{(h)}$ est la connexion métrique associée à h. D'autre part, nous avons

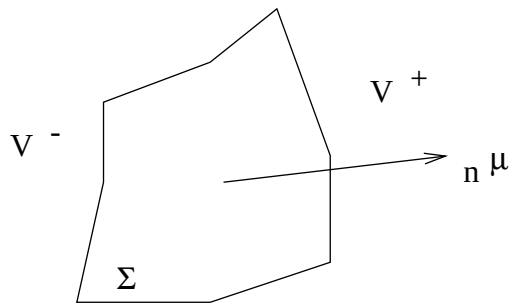
$$\Gamma^{\Sigma\,k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + N^k\Gamma^0_{ij}.$$

Après calcul nous voyons que $\Gamma^{\Sigma\,k}_{ij} = \Gamma^{(h)\,k}_{ij}$.

A.5 Conditions de raccordement vide-matière

Une distribution matérielle présente en général des discontinuités. Ainsi, à la surface d'un corps massif la densité volumique de masse ρ est discontinue. En théorie de Newton de la gravitation, l'étude de l'équation de Poisson montre que le potentiel newtonien U et ses dérivées premières sont continus mais en revanche les dérivées secondes sont discontinues. Dans la théorie d'Einstein, la condition de raccordement vide-matière est valable s'il existe un système de coordonnées dans lequel les composantes de la métrique et ses dérivées premières sont continues. Il n'est cependant pas toujours facile de le trouver explicitement.

Il est indispensable d'examiner ce problème d'un point de vue géométrique. Dans l'espace-temps $\mathcal{V}$, la séparation vide-matière est une hypersurface Σ du genre temps de vecteur normal unitaire n^μ dirigé vers l'extérieur, $n^\mu n_\mu = 1$. Une telle hypersurface Σ du



genre temps est l'histoire dans l'espace-temps d'une 2-surface, c'est-à-dire la surface du corps massif.

On désigne par $\mathcal{V}^+$ la partie extérieure et par $\mathcal{V}^-$ la partie intérieure. Il est possible d'associer à cette hypersurface Σ les coordonnées normales de Gauss (x^μ) telles que $x^1 = 0$ soit l'équation de Σ. On a respectivement les métriques induites $h_{ij}^\pm$ et les courbures extrinsèques $K_{ij}^\pm$. On peut vérifier que, suivant respectivement $\mathcal{V}^\pm$, les composantes des équations d'Einstein s'écrivent

$$G_1^1 = -\frac{1}{2}R^{(3)} + \frac{1}{2}(K^2 - K_{ij}K^{ij}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1,$$

$$G_i^1 = -(\nabla_m^{(3)}K_i^m - \partial_i K) = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^1,$$

$$G_j^i = G_j^{(3)\,i} + \partial_1(K_j^i - \delta_j^i K) - KK_j^i + \frac{1}{2}\delta_j^i K^2 + \frac{1}{2}\delta_j^i K_{mn}K^{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}T_j^i$$

où K est la trace de K_{ij}, $K = h^{ij}K_{ij}$. Le raccordement entre le vide et le milieu matériel est possible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de distribution de Dirac en $x^1 = 0$ dans les composantes du tenseur énergie-impulsion, si et seulement si les fonctions h_{ij} et K_{ij} sont continues en $x^1 = 0$. On exige donc les conditions de raccordement

$$h_{ij}^- = h_{ij}^+ \quad \text{et} \quad K_{ij}^- = K_{ij}^+.$$

Les composantes G^i_j sont discontinues en $x^1 = 0$ mais en revanche les composantes G^1_μ sont continues.

Dans des systèmes quelconques de coordonnées de $\mathcal{V}^-$ et $\mathcal{V}^+$, les composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières peuvent être discontinues sur Σ mais le critère intrinsèque de raccordement sera que les métriques induites sur Σ et les courbures extrinsèques de Σ relativement à $\mathcal{V}^-$ et $\mathcal{V}^+$ sont les mêmes. En conséquence, si au moins la métrique est continue, les combinaisons $T_{\mu\nu}n^\nu$ des composantes du tenseur énergie-impulsion seront continues à la traversée de Σ : $(T^+_{\mu\nu} - T^-_{\mu\nu})n^\mu = 0$.

A.6 Formalisme hamiltonien du vide

Le caractère hyperbolique des équations d'Einstein montre que les données de Cauchy $g_{\mu\nu}$ et $\partial_0 g_{\mu\nu}$ caractérisant la solution doivent être posées sur une hypersurface Σ du genre espace. Nous adoptons le système de coordonnées (x^μ) dans lequel la métrique s'exprime sous la forme

$$ds^2 = -(N^2 - h_{ij}N^iN^j)(dx^0)^2 + 2h_{ij}N^i dx^0 dx^j + h_{ij}dx^i dx^j$$

où l'équation de Σ est $x^0 = 0$. Il en résulte que *a priori* les variables du champ gravitationnel sont h_{ij}, $\partial_0 h_{ij}$, N, $\partial_0 N$, N^i et $\partial_0 N^i$. On appelle N le *lapse* et N^i le *shift* ; ils sont arbitraires. Le choix des coordonnées normales de Gauss correspond à $N = 1$ et $N^i = 0$.

L'espace-temps, ou seulement une partie, est feuilleté par les hypersurfaces Σ_t du genre espace définies par $x^0 = t$. La métrique induite sur les hypersurfaces Σ_t est h_{ij} et la courbure extrinsèque K_{ij} des hypersurfaces Σ_t a l'expression déjà introduite

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\left(\partial_0 h_{ij} - \nabla^{(3)}_i N_j - \nabla^{(3)}_j N_i\right).$$

Un très long calcul montre que la courbure scalaire s'exprime sous la forme

$$R = R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2 - \frac{2}{N}\partial_0 K + \frac{2N^i}{N}\partial_i K - \frac{2}{N}\nabla^{(3)}_k(h^{kl}\partial_l N).$$

Il faut calculer maintenant la densité lagrangienne $\sqrt{-g}R$. Compte tenu que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} \quad \text{avec} \quad h = \det h_{ij},$$

elle se met sous la forme

$$\sqrt{-g}R = N\sqrt{h}\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2\right) - 2\partial_0\left(\sqrt{h}K\right) + 2K\partial_0\sqrt{h} + 2\partial_i\left(N^i\sqrt{h}K\right)$$
$$-2\partial_i\left(\sqrt{h}N^i\right)K - 2\partial_k\left(\sqrt{h}h^{kl}\partial_l N\right).$$

La trace K est

$$K = -\frac{h^{ij}}{2N}\partial_0 h_{ij} + \frac{1}{N}\nabla^{(3)}_i N^i$$

et permet de calculer $\partial_0\sqrt{h}$ par l'expression $\sqrt{h}h^{ij}\partial_0 h_{ij}/2$. Finalement, $\sqrt{-g}R$ devient

$$\sqrt{-g}R = N\sqrt{h}\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right) - 2\partial_0\left(\sqrt{h}K\right) + 2\partial_i\left(\sqrt{h}N^iK\right) - 2\partial_k\left(\sqrt{h}h^{ik}\partial_i N\right).$$

Nous constatons que la densité lagrangienne $\sqrt{-g}R$ ne dépend que de h_{ij}, $\partial_0 h_{ij}$, N et N^i.

Nous ne nous posons pas de question à propos des conditions au bord et par suite nous éliminons les termes en divergence dans l'expression de l'action gravitationnelle $S_g[g_{\mu\nu}]$. Celle-ci se réduit à [2]

$$S_g[h_{ij}, \partial_0 h_{ij}, N, N^i] = \int dx^0 \int_{\Sigma_t} \left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right) N\sqrt{h}d^3x.$$

Le moment conjugué à $\partial_0 h_{ij}$ est

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\sqrt{-g}R}{\partial\partial_0 h_{ij}} = -\sqrt{h}(K^{ij} - h^{ij}K).$$

Il n'y a pas de moment conjugué pour N et N^i. Nous posons donc la densité d'hamiltonien

$$\mathcal{H}_g = \pi^{ij}\partial_0 h_{ij} - \sqrt{-g}R$$

et l'hamiltonien

$$H_g = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_g d^3x.$$

Il faut maintenant exprimer $\mathcal{H}_g$ en fonction des variables conjuguées h_{ij} et π^{ij} et des quantités N et N^i. De la définition de π^{ij}, nous avons

$$\pi = 2\sqrt{h}K \quad \text{et donc} \quad \pi^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}\pi = -\sqrt{h}K^{ij}.$$

Compte tenu de l'expression de K_{ij}, nous obtenons

$$\partial_0 h_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\pi_{ij} - \frac{N}{\sqrt{h}}h_{ij}\pi + \nabla_i^{(3)}N_j + \nabla_j^{(3)}N_i.$$

Quand on intègre $\pi^{ij}\partial_0 h_{ij}$ nous avons à considérer l'intégrale

$$2\int_{\Sigma_t} \pi^{ij}\nabla_i^{(3)}N_j d^3x = -2\int_{\Sigma_t}\left(\partial_i\pi^{ik} + \Gamma_{ij}^{(3)\,k}\pi^{ij}\right)N_k d^3x.$$

A une divergence près dans Σ_t que nous éliminons, il reste

$$H_g[h_{ij}, \pi^{ij}, N, N_i] = \int_{\Sigma_t}\left(N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i\right)d^3x$$

[2] Pour alléger l'écriture, nous omettons le facteur $c^3/16\pi G$.

avec

$$\mathcal{H} = -\sqrt{h}R^{(3)} + \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^i = -2\left(\partial_j\pi^{ij} + \Gamma^{(3)\,i}_{mn}\pi^{mn}\right).$$

$\mathcal{H}$ est une densité scalaire et $\mathcal{H}^i$ est $\sqrt{h}$ fois une dérivée covariante puisque π^{ij} est $\sqrt{h}$ fois un tenseur symétrique.

Nous voyons que N et N_i jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange. Nous avons donc les contraintes

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^i = 0$$

qui ne sont rien d'autre que les équations d'Einstein $G^0_\mu = 0$. La relation entre π^{ij} et h_{ij} est donnée par

$$\partial_0 h_{ij} = \frac{\delta\mathcal{H}_g}{\delta\pi^{ij}}$$

et les équations d'Einstein $R_{ij} = 0$ par

$$\partial_0\pi^{ij} = -\frac{\delta\mathcal{H}_g}{\delta h_{ij}}.$$

Nous avons également obtenu par ce moyen une description géométrique des données de Cauchy sur l'hypersurface du genre espace Σ : la métrique induite h_{ij} et la courbure extrinsèque K_{ij} qui doivent satisfaire les quatre contraintes $\mathcal{H} = 0$ et $\mathcal{H}^i = 0$. Ce système d'équations donne en outre un cadre pour effectuer l'intégration numérique des équations d'Einstein du vide.

En revanche si l'on pose le problème de Cauchy sur une hypersurface du genre lumière $x^0 = 0$ alors les dérivées secondes par rapport à x^0 des $g_{\mu\nu}$ ne sont pas déterminées puisque $g^{00} = 0$. Il existe donc une infinité de solutions se raccordant aux données de Cauchy. Ainsi, les hypersurfaces caractéristiques des équations d'Einstein du vide sont les hypersurfaces du genre lumière. Des discontinuités des dérivées secondes peuvent se produire à la traversée d'une hypersurface caractéristique qui constitue alors une onde de choc gravitationnelle.

A partir du formalisme hamiltonien, en incluant l'hamiltonien de la matière, on peut quantifier par la méthode canonique. On obtient alors l'équation de Wheeler-DeWitt avec cependant des difficultés conceptuelles d'interprétation quantique.