## D E A de Physique Théorique - Paris VI, Paris VII, Paris XI, ENS, X ${\tt Ann\'ee~2004\text{-}2005}$

## Notes de cours de RELATIVITÉ GÉNÉRALE

## Bernard LINET

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique CNRS/UMR 6083, Université François Rabelais Parc de Grandmont 37200 TOURS

linet@phys.univ-tours.fr

## Table des matières

1	Obs	servateurs, espaces-temps et lois de la dynamique	5					
	1.1	Généralités	5					
	1.2	Observateurs	6					
	1.3	Espace-temps galiléen	8					
	1.4	Lois newtoniennes de la dynamique	9					
	1.5	Espace-temps minkowskien	10					
	1.6	Lois relativistes de la dynamique	16					
2	Thé	Théorie de Newton de la gravitation						
	2.1	Loi d'attraction gravitationnelle et principe d'équivalence faible	19					
	2.2	Vérifications expérimentales du principe d'équivalence faible	21					
	2.3	Equation de Schrödinger et principe d'équivalence faible	23					
	2.4	Equations newtoniennes du mouvement d'un fluide	25					
	2.5	Décalage des fréquences dans un champ de gravitation	26					
3	Eléments de calcul tensoriel en espace affine							
	3.1	Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel	29					
	3.2	Produit scalaire dans un espace vectoriel	32					
	3.3	Espace affine et espace affine métrique	33					
	3.4	Systèmes de coordonnées curvilignes	36					
4	Elé	ments de géométrie différentielle d'une variété	41					
	4.1	Variété différentiable	41					
	4.2	Champ de vecteurs et de tenseurs	44					
	4.3	Métrique et élément de volume induit	46					
	4.4	Dérivée de Lie et vecteur de Killing	48					
	4.5	Connexion linéaire, torsion et tenseur de courbure	50					
	4.6	Connexion riemannienne et tenseur de Riemann	52					
5	Théories métriques de la gravitation							
	5.1	Origines	55					
	5.2	Espace-temps einsteinien et principe de covariance	57					
	5.3	Observateur en chute libre et principe d'équivalence d'Einstein	59					

	5.4	Comparaison entre les temps des observateurs	6				
	5.5	Couplage de l'électromagnétisme à la gravitation	6				
	5.6	Couplage d'un milieu matériel à la gravitation	6				
	5.7	Formalisme lagrangien dans le cas d'un champ classique	6				
6	Théorie d'Einstein de la gravitation ou relativité générale						
	6.1	Equations d'Einstein de la gravitation	7				
	6.2	Formalisme lagrangien du champ gravitationnel	7				
	6.3	Caractère hyperbolique des équations d'Einstein	7				
	6.4	Approximation newtonienne de la théorie d'Einstein	7				
	6.5	Métrique extérieure post-newtonienne d'un corps massif	7				
	6.6	Avance du périhélie de Mercure	7				
	6.7	Déviation de la lumière et mirage gravitationnel	8				
7	Corps massif et trou de ver statiques et à symétrie sphérique						
	7.1	Métrique statique et à symétrie sphérique	8				
	7.2	Corps massif à symétrie sphérique	8				
	7.3	Métrique statique de Schwarzschild	8				
	7.4	Trou de ver statique et à symétrie sphérique	8				
8	Effondrement gravitationnel et trou noir à symétrie sphérique						
	8.1	Observateur en chute libre dans la métrique de Schwarzschild	ć				
	8.2	Effondrement gravitationnel d'une boule de fluide à pression nulle	Ć				
	8.3	Trou noir de Schwarzschild	ć				
	8.4	Extension maximale de Kruskal	(				
9	Généralités sur les trous noirs						
	9.1	Diagramme de Carter-Penrose	10				
	9.2	Propriétés générales des trous noirs	10				
	9.3	Trou noir stationnaire de Kerr	10				
	9.4	Processus d'extraction d'énergie	1				
10		orie linéarisée de la relativité générale	11				
	10.1	Champ gravitationnel à l'approximation linéaire	1				
		Equations d'Einstein linéarisées	1.				
	10.3	Solution retardée des équations d'Einstein linéarisées	1.				
	10.4	Onde plane gravitationnelle dans le vide	11				
11	Ray	onnement gravitationnel et observations	12				
	11.1	Pseudo-tenseur énergie-impulsion gravitationnelle	12				
		Energie gravitationnelle rayonnée	12				
		Exemple d'un corps rigide en rotation	12				
	$11.3 \\ 11.4$		12 12				

	11.6	Principes de détection d'une onde plane gravitationnelle	132		
<b>12</b>	2 Espaces-temps de la cosmologie				
	12.1	Le problème cosmologique	136		
	12.2	Observateurs fondamentaux et métriques cosmologiques	138		
	12.3	Effet Hubble du décalage vers le rouge	141		
	12.4	Relation entre luminosité apparente et luminosité absolue	143		
	12.5	Modèles cosmologiques et évolution de l'Univers	145		
	12.6	Horizon des particules et densité critique	149		
		Inflation et espace-temps de de Sitter	151		
$\mathbf{A}$	Compléments de géométrie et de relativité générale				
	A.1	Algèbre extérieure et différentiation extérieure	157		
	A.2	1-forme de connexion	159		
		Equation de Dirac en espace-temps courbe	160		
		Courbure extrinsèque d'une hypersurface	163		
		Conditions de raccordement vide-matière	165		
	A.6	Formalisme hamiltonien du vide	166		