HAL open science

Une introduction aux groupes nilpotents

Gerard Endimioni

To cite this version:

Gerard Endimioni. Une introduction aux groupes nilpotents. DEA. Cours de DEA 1996/1997 (Université de Provence - France), 1997, pp.38. cel-00147118

HAL Id: cel-00147118

https://cel.hal.science/cel-00147118v1

Submitted on 16 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une introduction aux Groupes nilpotents

Gérard Endimioni

Cours de D.E.A. 1996/1997

Centre de Mathématiques et d'Informatique
Université de Provence (France)

Table des matières

1 Généralités **3**

2 Nilpotence et résolubilité **9**

3 Quelques propriétés des groupes nilpotents **11**

4 Groupes nilpotents finis **15**

5 La condition maximale **19**

6 Groupes polycycliques **24**

7 Propriétés résiduelles **29**

8 Nilpotence locale **34**

Bibliographie **38**

Chapitre 1

Généralités

Soit G un groupe. Si $x, y \in G$, on pose $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$; cet élément est appelé le *commutateur* de x et y. Clairement, x et y commutent si et seulement si $[x, y] = 1$. Notons la relation $[x, y]^{-1} = [y, x]$. Dans ce qui suit, on désigne par $\zeta(G)$ le centre de G. Par définition, la *suite centrale ascendante* de G est la suite croissante $(\zeta_k(G))_{k\geq 0}$ de sous-groupes normaux de G définie par $\zeta_0(G) = \{1\}$ et $\zeta_k(G)/\zeta_{k-1}(G) = \zeta(G/\zeta_{k-1}(G))$ pour tout $k > 0$. En d'autres termes, si π_{k-1} est la surjection canonique de G sur $G/\zeta_{k-1}(G)$, on a $\zeta_k(G) = \pi_{k-1}^{-1}(\zeta(G/\zeta_{k-1}(G))$.

Définition 1.1 *S'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\zeta_n(G) = G$, on dit que G est nilpotent. Le plus petit entier $n \geq 0$ vérifiant $\zeta_n(G) = G$ est appelé la classe de nilpotence de G.*

Un groupe est nilpotent de classe 0 si et seulement si il est réduit à l'unité. Un groupe est nilpotent de classe 1 si et seulement si il est commutatif, non réduit à l'unité.

Proposition 1.1 *Si G est un groupe, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G est nilpotent, de classe $\leq n$;

(ii) il existe une suite finie $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de sous-groupes normaux de G telle que

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots H_{n-1} \leq H_n = G,$$

avec $H_{k+1}/H_k \leq \zeta(G/H_k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Démonstration. (i)→(ii). Il suffit de prendre $H_k = \zeta_k(G)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.
(ii)→(i). A l'aide d'une récurrence sur k, montrons l'inclusion $H_k \subseteq \zeta_k(G)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$ (d'où $\zeta_n(G) = G$). L'inclusion étant triviale pour $k = 0$, supposons que l'on ait $H_k \subseteq \zeta_k(G)$. Soient $h \in H_{k+1}$ et $x \in G$. Puisque $H_{k+1}/H_k \leq \zeta(G/H_k)$, on a $[h, x] \in H_k$, d'où $[h, x] \in \zeta_k(G)$. En d'autres termes, la classe de h modulo $\zeta_k(G)$ est dans $\zeta(G/\zeta_k(G)) = \zeta_{k+1}(G)/\zeta_k(G)$, d'où $h \in \zeta_{k+1}(G)$, ce qui prouve l'inclusion $H_{k+1} \subseteq \zeta_{k+1}(G)$. □

Si A et B sont deux parties d'un groupe G, on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[a, b]$, avec $a \in A$, $b \in B$. On définit une suite $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ de sous-groupes de G par $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_{k+1}(G) = [\gamma_k(G), G]$ pour tout entier $k \geq 1$.
Vérifions par récurrence que les sous-groupes $\gamma_k(G)$ $(k \geq 1)$ sont normaux dans G :

le résultat étant clair pour $k = 1$, supposons que $\gamma_k(G)$ soit normal dans G pour un entier $k \geq 1$ donné. Le sous-groupe $\gamma_{k+1}(G)$ étant engendré par les éléments de la forme $[y, x]$ ($x \in G$, $y \in \gamma_k(G)$), il suffit de montrer que $z^{-1}[y, x]z \in \gamma_{k+1}(G)$ ($z \in G$) pour prouver que $\gamma_{k+1}(G)$ est normal dans G. On a $z^{-1}[y, x]z = [z^{-1}yz, z^{-1}xz] \in \gamma_{k+1}(G)$ car $z^{-1}yz \in \gamma_k(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où le résultat.
De plus, la suite $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ est décroissante pour la relation d'inclusion car pour $x \in G$ et $y \in \gamma_k(G)$, on a $[y, x] = y^{-1}(x^{-1}yx) \in \gamma_k(G)$ d'où $\gamma_{k+1}(G) \leq \gamma_k(G)$. Par définition, la suite $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ est appelée la *suite centrale descendante* de G.

Proposition 1.2 *Un groupe G est nilpotent si et seulement si la suite $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ atteint le sous-groupe réduit à l'unité. Le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\gamma_{n+1}(G) = \{1\}$ est égal à la classe de nilpotence de G.*

Démonstration. Supposons d'abord que G est nilpotent de classe n et montrons à l'aide d'une récurrence sur k l'inclusion $\gamma_k(G) \leq \zeta_{n-k+1}(G)$ ($1 \leq k \leq n + 1$). Pour $k = 1$, on a $\gamma_1(G) = G = \zeta_n(G)$, d'où l'inclusion. Supposons que $\gamma_k(G)$ est inclus dans $\zeta_{n-k+1}(G)$ pour un entier k fixé ; pour établir l'inclusion $\gamma_{k+1}(G) \leq \zeta_{n-k}(G)$, il suffit de montrer que $[y, x]$ est dans $\zeta_{n-k}(G)$ pour tout $x \in G$, $y \in \gamma_k(G)$. Or, $\zeta_{n-k+1}(G)/\zeta_{n-k}(G) \leq \zeta(G/\zeta_{n-k}(G))$ et $y \in \zeta_{n-k+1}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence d'où $[y, x] \in \zeta_{n-k}(G)$. Pour $k = n + 1$, l'inclusion qui vient d'être montré donne $\gamma_{n+1}(G) \leq \zeta_0(G)$, d'où $\gamma_{n+1}(G) = \{1\}$ car $\zeta_0(G) = \{1\}$. De plus, si $m \geq 0$ est le plus petit entier tel que $\gamma_{m+1}(G) = \{1\}$, on a $m \leq n$.
Supposons maintenant que la suite $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ atteint le sous-groupe réduit à l'unité et notons m le plus petit entier tel que $\gamma_{m+1}(G) = \{1\}$. La suite $(H_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ définie par $H_k = \gamma_{m-k+1}(G)$ est constituée de sous-groupes normaux de G tels que

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots H_{m-1} \leq H_m = G.$$

De plus, pour $x \in G$, $y \in H_{k+1}$ (*i.e.* $y \in \gamma_{m-k}(G)$) on a $[y, x] \in \gamma_{m-k+1}(G)$ (*i.e.* $[y, x] \in H_k$). En d'autres termes, on a établi l'inclusion $H_{k+1}/H_k \leq \zeta(G/H_k)$ pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$. D'après la Proposition 1.1, G est nilpotent de classe $n \leq m$, d'où le résultat. □

Exemple. On se propose ici de construire une certaine classe de groupes nilpotents, tout en établissant un lien entre les anneaux nilpotents et les groupes nilpotents.
Dans ce qui suit, on conviendra d'appeler *anneau* un ensemble muni de deux opérations (nommées *addition* et *multiplication*) satisfaisant aux axiomes habituels des anneaux, à l'exception de celui assurant l'existence d'un élément neutre pour la multiplication.
Soit A un tel anneau. Pour $n > 0$, on note A^n le sous-anneau de A engendré par les éléments de la forme $a_1 \ldots a_n$, avec $a_1, \ldots, a_n \in A$. La suite de sous-anneaux $(A^n)_{n>0}$ est clairement décroissante pour la relation d'inclusion. S'il existe un entier $n > 0$ tel que $A^n = \{0\}$, on dit que A est nilpotent. Un élément $a \in A$ est dit nilpotent si le sous-anneau engendré par a est nilpotent ; il est facile de voir que cela équivaut à l'existence d'un entier $n > 0$ tel que $a^n = 0$. Tous les éléments d'un anneau nilpotent sont eux-mêmes nilpotents.
Considérons maintenant un anneau unitaire R et A un sous-anneau nilpotent. Notons $1 + A$ l'ensemble des éléments de R de la forme $1 + a$, avec $a \in A$. Cet ensemble est non vide ($1 = 1 + 0 \in 1 + A$), stable pour la multiplication : pour $a, a' \in A$, on a $(1 + a)(1 + a') = 1 + (a + a' + aa') \in 1 + A$. De plus, tout élément de $1 + A$ a un inverse

multiplicatif dans $1+A$: si a est un élément de A et $n>0$ est un entier tel que $a^n=0$, les égalités

$$(1+a)(1-a+a^2-\ldots+(-a)^{n-1})=(1-a+a^2-\ldots+(-a)^{n-1})(1+a)=1-(-a)^n=1$$

montrent que $1+a$ a pour inverse $(1-a+a^2-\ldots+(-a)^{n-1})$. On a donc prouvé que $1+A$ est un groupe pour la multiplication. Plus généralement il en est de même pour $1+A^k$ $(k>0)$ car A^k est aussi un sous-anneau nilpotent de R. A l'aide d'une récurrence sur k, montrons maintenant l'inclusion $\gamma_k(1+A)\leq 1+A^k$ $(k>0)$. Le résultat étant trivial pour $k=1$, supposons le résultat établi pour un entier $k>0$. Par définition, $\gamma_{k+1}(1+A)$ est engendré par les éléments de la forme $[x,y]$, avec $x\in\gamma_k(1+A)$ et $y\in 1+A$. Pour prouver l'inclusion $\gamma_{k+1}(1+A)\leq 1+A^{k+1}$, il suffit donc de vérifier que $[x,y]$ est dans $1+A^{k+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, x est dans $1+A^k$; posons $x=1+a$, $y=1+b$ $(a\in A^k,\ b\in A)$. On a

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy=1+x^{-1}y^{-1}(xy-yx)=1+x^{-1}y^{-1}(ab-ba),$$

d'où, en posant $x^{-1}y^{-1}=1+c$ $(c\in A)$:

$$[x,y]=1+(1+c)(ab-ba)=1+(ab-ba+cab-cba).$$

Clairement, $ab-ba+cab-cba$ est dans A^{k+1}, donc $[x,y]$ est dans $1+A^{k+1}$.
Soit enfin $n>0$ tel que $A^n=\{0\}$. L'inclusion que l'on vient de prouver entraîne l'égalité $\gamma_n(1+A)=\{1\}$, ce qui montre que $1+A$ est nilpotent, de classe $<n$.

A chaque sous-anneau nilpotent d'un anneau unitaire, on peut donc associer un groupe nilpotent. Prenons par exemple pour R l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un anneau (unitaire) K. Soit A l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de R dont tous les coefficients de la diagonale sont nuls. Il est facile de montrer que A est un sous-anneau nilpotent de R $(A^n=\{0\})$. On en déduit la nilpotence du groupe $1+A$; ce groupe est constitué des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1.

Si $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 1)$ sont des éléments d'un groupe, on généralise la notion de commutateur en définissant $[x_1,\ldots,x_n]$ par la formule récurrente $[x_1,\ldots,x_n]=[[x_1,\ldots,x_{n-1}],x_n]$ (on pose $[x_1]=x_1$). Si x et y sont des éléments d'un groupe, on utilisera aussi la notation : $y^x=x^{-1}yx$. Il est facile de vérifier les relations : $(yz)^x=y^xz^x$, $(y^x)^{x'}=y^{xx'}$ et $[y,z]^x=[y^x,z^x]$.

De même, on vérifie par un calcul direct la

Proposition 1.3 *Pour tout x,y,z dans un groupe, on a les relations :*

$$[x^\alpha,y^\beta]=x^{(1-\alpha)/2}y^{(1-\beta)/2}[x,y]^{\alpha\beta}y^{(\beta-1)/2}x^{(\alpha-1)/2}\quad(\alpha,\ \beta\in\{-1,1\})\tag{1}$$

$$[x,yz]=[x,z][x,y]^z\tag{2}$$

$$[xy,z]=[x,z]^y[y,z]\tag{3}$$

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1\tag{4}$$

Proposition 1.4 *Si un groupe G est engendré par une partie $S\subseteq G$, $\gamma_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a_1,\ldots,a_n]x$ $(a_1,\ldots,a_n\in S,\ x\in G)$.*

Lemme 1.1 *Soient H et K deux sous-groupes normaux d'un groupe G, engendrés respectivement par $R \subseteq H$ et $S \subseteq K$. Alors, $[H, K]$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a, b]x$ ($a \in R,\ b \in S,\ x \in G$).*

Démonstration. Notons L le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a, b]x$ ($a \in R,\ \ b \in S,\ x \in G$). La relation $x^{-1}[a, b]x = [x^{-1}ax, x^{-1}bx]$ montre que L est inclus dans $[H, K]$. Pour établir l'inclusion $[H, K] \leq L$, il suffit de montrer que les éléments de la forme $[a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}]$ ($a_1, \dots, a_r \in R,\ b_1, \dots, b_s \in S,\ \alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1, \beta_s \in \{-1, 1\}$) sont dans L. A l'aide des relations (2) et (3) de la Proposition 1.3 et d'une récurrence sur $r + s$, il est facile de voir que $[a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}]$ s'écrit comme un produit de conjugués d'éléments de la forme $[a_i^{\alpha_i}, b_j^{\beta_j}]$; mais la relation (1) de la Proposition 1.3 montre que $[a_i^{\alpha_i}, b_j^{\beta_j}]$ est égal à un conjugué de $[a_i, b_j]$. Donc l'élément $[a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}]$ peut s'écrire comme un produit de conjugués d'éléments de la forme $[a_i, b_j]$ ce qui prouve qu'il est dans L. □

Démonstration de la Proposition 1.4. Soit H_n le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a_1, \dots, a_n]x$ ($a_1, \dots, a_n \in S,\ x \in G$). Notons que H_n est normal dans G.
Vérifions à l'aide d'une récurrence sur n l'égalité $H_n = \gamma_n(G)$. Si $n = 1$, on a $H_1 = \gamma_1(G) = G$. Supposons que l'on ait $H_n = \gamma_n(G)$ pour un entier $n \geq 1$ fixé. Nous allons montrer l'égalité $H_{n+1} = \gamma_{n+1}(G)$ par une double inclusion.
Pour établir l'inclusion $H_{n+1} \leq \gamma_{n+1}(G)$, il suffit de montrer que $x^{-1}[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]x$ est dans $\gamma_{n+1}(G)$. Or, $x^{-1}[a_1, \dots, a_n]x$ est dans $\gamma_n(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence ; donc

$$x^{-1}[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]x = [x^{-1}[a_1, \dots, a_n]x, x^{-1}a_{n+1}x]$$

est dans $[\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$, d'où l'inclusion $H_{n+1} \leq \gamma_{n+1}(G)$.
Montrons maintenant l'inclusion $\gamma_{n+1}(G) \leq H_{n+1}$. On peut se contenter de vérifier que les éléments de la forme $z^{-1}[x^{-1}[a_1, \dots, a_n]x, b]z$ ($x, z \in G,\ a_1, \dots, a_n, b \in S$) sont dans H_{n+1} car ces éléments engendrent $[H_n, G] = [\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$ d'après le lemme précédent. Or, l'égalité

$$z^{-1}[x^{-1}[a_1, \dots, a_n]x, b]z = z^{-1}x^{-1}[[a_1, \dots, a_n], xbx^{-1}]xz$$

montre qu'il suffit de vérifier que $[[a_1, \dots, a_n], t]$ ($t \in G$) est dans H_{n+1} pour pouvoir conclure (car H_{n+1} est normal dans G). On peut écrire t sous la forme

$$t = b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k} \quad (b_1, \dots, b_k \in S,\ \beta_1, \dots, \beta_k \in \{-1, 1\}).$$

Pour $k = 1$, on a

$$[[a_1, \dots, a_n], t] = [[a_1, \dots, a_n], b_1^{\beta_1}].$$

Clairement, si $\beta_1 = 1$, cet élément est dans H_{n+1}. Mais c'est encore le cas si $\beta_1 = -1$ car d'après la relation (1) de la Proposition 1.3 :

$$[[a_1, \dots, a_n], b_1^{-1}] = b_1[[a_1, \dots, a_n], b_1]^{-1}b_1^{-1}.$$

Pour $k > 1$, en utilisant la relation (2) de la Proposition 1.3, on peut écrire :

$$[[a_1, \dots, a_n], b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k}] = [[a_1, \dots, a_n], b_k^{\beta_k}][[a_1, \dots, a_n], b_1^{\beta_1} \dots b_{k-1}^{\beta_{k-1}}]^{b_k^{\beta_k}}.$$

Il est alors facile de montrer par une récurrence sur k que $[[a_1, \dots, a_n], b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k}]$ est dans H_{n+1} pour tout entier $k \geq 1$, d'où le résultat. □

Corollaire 1.1 *Soit G un groupe engendré par une partie $S \subseteq G$. Supposons que pour un entier fixé $n > 0$, on ait $[a_1, \ldots, a_n] = 1$ pour tout $a_1, \ldots, a_n \in S$. Alors G est nilpotent, de classe $< n$.*

Appliquons la Proposition 1.4 en prenant $S = G$. On en déduit que $\gamma_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a_1, \ldots, a_n]x$ $(a_1, \ldots, a_n \in G,\ x \in G)$. Mais $x^{-1}[a_1, \ldots, a_n]x = [x^{-1}a_1x, \ldots, x^{-1}a_nx]$, d'où la

Proposition 1.5 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $[x_1, \ldots, x_n]$ $(x_1, \ldots, x_n \in G)$.*

Les propositions 1.2 et 1.5 conduisent une nouvelle caractérisation des groupes nilpotents :

Corollaire 1.2 *Un groupe G est nilpotent si et seulement si il existe un entier $n \geq 1$ tel que $[x_1, \ldots, x_n] = 1$ quel que soit $x_1, \ldots, x_n \in G$. Si n est le plus petit entier vérifiant cette condition, la classe de nilpotence de G est égale à $n - 1$.*

De cette caractérisation, on déduit immédiatemment les corollaires :

Corollaire 1.3 *Soient G est un groupe nilpotent de classe n et H un sous-groupe de G. Alors :*

(i) H est nilpotent de classe $\leq n$;

(ii) si H est normal dans G, G/H est nilpotent de classe $\leq n$.

Corollaire 1.4 *Soient $G_1, \ldots, G_k$ des groupes nilpotents de classes respectives $n_1, \ldots, n_k$. Alors, le produit direct $G_1 \times \ldots \times G_k$ est nilpotent, de classe $\max(n_1, \ldots, n_k)$.*

Corollaire 1.5 *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G inclus dans $\zeta(G)$ (H est donc normal dans G). Si G/H est nilpotent de classe n, alors G est nilpotent, de classe $\leq n + 1$.*

Démonstration. Pour tout $x_1, \ldots, x_n \in G$, on a $[x_1, \ldots, x_n] \in H$, d'où, pour tout $x_{n+1} \in G$, $[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = 1$ car $H \leq \zeta(G)$. □

Remarque. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Le fait que H et G/H soient nilpotents n'entraîne pas la nilpotence de G. Par exemple, le sous-groupe alterné A_3 est un sous-groupe normal du groupe symétrique S_3. Les groupes A_3 et S_3/A_3 sont nilpotents (ils sont en fait commutatifs) mais S_3 n'est pas nilpotent puisque son centre est réduit à l'unité.

Proposition 1.6 *Pour tout groupe G, pour tout entier $r, s \geq 1$, on a l'inclusion*

$$[\gamma_r(G), \gamma_s(G)] \leq \gamma_{r+s}(G).$$

Démonstration. Effectuons une récurrence sur s. Pour tout entier $r \geq 1$, on a

$$[\gamma_r(G), \gamma_1(G)] = [\gamma_r(G), G] = \gamma_{r+1}(G),$$

d'où l'inclusion pour $s = 1$. Supposons maintenant que pour un entier $s \geq 1$ fixé, on ait l'inclusion $[\gamma_r(G), \gamma_s(G)] \leq \gamma_{r+s}(G)$ (pour tout entier $r \geq 1$). D'après le Lemme 1.1 et la Proposition 1.5, $[\gamma_r(G), \gamma_{s+1}(G)]$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[u, [v, z]]x$ $(x, z \in G)$, où u est de la forme $u = [y_1, \ldots, y_r]$ $(y_i \in G)$ et v est de la forme $v = [z_1, \ldots, z_s]$ $(z_i \in G)$. La relation (4) de la Proposition 1.3 permet d'écrire

$$[v, (z^{-1})^{-1}, u]^{z^{-1}}[z^{-1}, u^{-1}, v]^u[u, v^{-1}, z^{-1}]^v = 1,$$

ce qui équivaut à

$$[v, z, u][z^{-1}, u^{-1}, v]^{uz}[u, v^{-1}, z^{-1}]^{vz} = 1,$$

d'où

$$[v, z, u]^{-1} = [u, [v, z]] = [z^{-1}, u^{-1}, v]^{uz}[u, v^{-1}, z^{-1}]^{vz}.$$

On obtient donc l'égalité :

$$x^{-1}[u, [v, z]]x = [z^{-1}, u^{-1}, v]^{uzx}[u, v^{-1}, z^{-1}]^{vzx}.$$

L'élément $[z^{-1}, u^{-1}] = [u^{-1}, z^{-1}]^{-1}$ est dans $[\gamma_r(G), G] = \gamma_{r+1}(G)$ et v est dans $\gamma_s(G)$, d'où $[z^{-1}, u^{-1}, v] \in [\gamma_{r+1}(G), \gamma_s(G)]$. D'après l'hypothèse de récurrence, il vient $[z^{-1}, u^{-1}, v] \in \gamma_{r+s+1}(G)$; mais $\gamma_{r+s+1}(G)$ est normal, donc $[z^{-1}, u^{-1}, v]^{uzx} \in \gamma_{r+s+1}(G)$.
De même, $[u, v^{-1}]$ est dans $\gamma_{r+s}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il en résulte que $[u, v^{-1}, z^{-1}]$ est dans $[\gamma_{r+s}(G), G] = \gamma_{r+s+1}(G)$, d'où $[u, v^{-1}, z^{-1}]^{vzx} \in \gamma_{r+s+1}(G)$. On en déduit que $x^{-1}[u, [v, z]]x$ est dans $\gamma_{r+s+1}(G)$, d'où l'inclusion $[\gamma_r(G), \gamma_{s+1}(G)] \leq \gamma_{r+s+1}(G)$. $\square$

Chapitre 2

Nilpotence et résolubilité

Soit G un groupe. Par définition, le sous-groupe $\gamma_2(G) = [G, G]$ est appelé le sous-groupe *dérivé* de G ; il est le plus souvent noté G'.

Proposition 2.1 *Si H est un sous-groupe de G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) H est normal dans G et G/H est abélien ;

(ii) $G' \leq H$.

Démonstration. (i)→(ii). Si G/H est abélien, on a $[x, y] \in H$ pour tout $x, y \in G$, d'où l'inclusion $G' \leq H$.
(ii)→(i). Pour $x \in G, h \in H$, on a $x^{-1}hx = h[h, x] \in H$ car $[h, x] \in H$; donc H est normal dans G. De plus, $[x, y]$ est dans H pour tout $x, y \in G$, donc G/H est abélien. □

La suite dérivé de G est la suite $(G^{(k)})_{k\geq 0}$ de sous-groupes de G définie par $G^{(0)} = G$ et $G^{(k+1)} = G^{(k)\prime}$ pour tout entier $k \geq 0$.

Définition 2.1 *S'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $G^{(n)} = 1$, on dit que G est résoluble. Le plus petit entier $n \geq 0$ vérifiant $G^{(n)} = \{1\}$ est appelé la classe de résolubilité de G.*

Les deux lemmes suivants se montrent facilement par récurrence :

Lemme 2.1 *Si H est un sous-groupe de G, on a $H^{(k)} \leq G^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 0$.*

Lemme 2.2 *Si $f : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupe, on a $f(G^{(k)}) = f(G)^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 0$.*

Proposition 2.2 *Soient G un groupe résoluble de classe r et H est un sous-groupe. Alors :*

(i) H est résoluble de classe $\leq r$;

(ii) si H est normal dans G, G/H est résoluble de classe $\leq r$.

Démonstration. (i). C'est une conséquence immédiate du Lemme 2.1.
(ii). Si π est la projection canonique de G sur G/H, on a $\pi(G^{(r)}) = \pi(\{1\}) = \{1\}$; mais d'après le Lemme 2.2, $\pi(G^{(r)}) = \pi(G)^{(r)} = (G/H)^{(r)}$, d'où $(G/H)^{(r)} = \{1\}$. □

Proposition 2.3 *Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Alors, si H et G/H sont résolubles (de classes respectives r et s), le groupe G est résoluble (de classe $\leq r+s$).*

Démonstration. Soit π est la projection canonique de G sur G/H. En utilisant le Lemme 2.2, on peut écrire : $\pi(G^{(s)}) = \pi(G)^{(s)} = (G/H)^{(s)} = \{1\}$, donc $G^{(s)} \leq H$. D'après le Lemme 2.1, $(G^{(s)})^{(r)} = G^{(s+r)} \leq H^{(r)}$ d'où $G^{(s+r)} = \{1\}$ car $H^{(r)} = \{1\}$. □

Proposition 2.4 *Pour un groupe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G est résoluble ;

(ii) il existe une suite décroissante finie $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de sous-groupes de G telle que

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G,$$

les quotients H_k/H_{k+1} étant abéliens (pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Démonstration. (i)→(ii). Si G est résoluble de classe n, la suite définie par $H_k = G^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ convient.
(ii)→(i). Il suffit de montrer par récurrence que $G^{(k)} \leq H_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. L'inclusion étant triviale pour $k = 0$, supposons que l'on ait $G^{(k)} \leq H_k$. On en déduit que $G^{(k)\prime} = G^{(k+1)} \leq H'_k$. Or, H_k/H_{k+1} est abélien, donc d'après la Proposition 2.1, on a $H'_k \leq H_{k+1}$. Par transitivité de l'inclusion, on obtient $G^{(k+1)} \leq H_{k+1}$. □

Soit G un groupe quelconque. Une suite $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de sous-groupes de G telle que

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

est appelée une *série* de G, de longueur n. Les groupes H_k/H_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont les *quotients* (ou les *facteurs*) de la série. L'entier n est la *longueur* de la série. Bien qu'il soit fait ici un autre choix, il faut noter que la longueur d'une série $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ est souvent définie comme le nombre de quotients H_k/H_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ non réduits à l'unité. Il est clair que ces définitions ne sont pas équivalentes.

La proposition précédente peut alors se formuler en ces termes : un groupe est résoluble si et seulement si il possède une série à quotients abéliens.

Proposition 2.5 *Tout groupe nilpotent est résoluble.*

Démonstration. C'est une conséquence du résultat suivant : pour tout groupe G et pour tout entier $k \geq 0$, on a l'inclusion $G^{(k)} \leq \gamma_{2^k}(G)$. En effet, si G est nilpotent de classe c, en choisissant k tel que $2^k > c$, on aura $G^{(k)} = \{1\}$. Montrons donc par récurrence l'inclusion précédente. Pour $k = 0$, le résultat est trivial. Supposons que $G^{(k)} \leq \gamma_{2^k}(G)$. On a alors $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] \leq [\gamma_{2^k}(G), \gamma_{2^k}(G)]$. Mais $[\gamma_{2^k}(G), \gamma_{2^k}(G)] \leq \gamma_{2^k+2^k}(G) = \gamma_{2^{k+1}}(G)$ d'après la proposition 1.6, d'où l'inclusion $G^{(k+1)} \leq \gamma_{2^{k+1}}(G)$. □

Remarque. On dit qu'un groupe G est une extension d'un groupe A par un groupe B s'il existe un sous-groupe $H \triangleleft G$ tel que H et G/H soient respectivement isomorphes à A et B. La Proposition 2.3 énonce qu'une extension d'un groupe résoluble par un groupe résoluble est résoluble. On résume cela en disant que la propriété de résolubilité est stable par extension. Par contre, la nilpotence n'est pas stable par extension : comme on l'a déjà noté (*cf.* remarque suivant le Corollaire 1.5), le groupe symétrique S_3 est une extension du groupe abélien A_3 par le groupe $S_3/A_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais S_3 n'est pas nilpotent. Notons que S_3 est résoluble (de classe 2) : un groupe résoluble n'est donc pas nécessairement nilpotent.

Chapitre 3

Quelques propriétés des groupes nilpotents

Proposition 3.1 *Soient G un groupe nilpotent et H un sous-groupe normal de G. Alors, si H est distinct de $\{1\}$, $H \cap \zeta(G)$ est aussi distinct de $\{1\}$.*

Démonstration. Soit $h \in H \setminus \{1\}$. Considérons l'ensemble E des entiers $n > 0$ vérifiant :

$$[h, x_1, \ldots, x_n] = 1 \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad x_1, \ldots, x_n \in G.$$

Cet ensemble étant non vide (il contient tout entier supérieur ou égal à la classe de nilpotence de G), notons k son plus petit élément. L'entier $k-1$ n'est pas dans E : il existe donc des éléments $a_1, \ldots, a_{k-1}$ dans G tels que $u = [h, a_1, \ldots, a_{k-1}] \neq 1$ ($u = h$ si $k = 1$). Par contre k est dans E, d'où l'égalité $[u, x_k] = [h, a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k] = 1$ pour tout $x_k \in G$. En d'autres termes, l'élément u est dans $\zeta(G)$. Mais il est aussi dans H ($h \in H$ et $H \trianglelefteq G$), d'où l'existence d'un élément distinct de 1 dans $H \cap \zeta(G)$. □

Proposition 3.2 *Soient G un groupe nilpotent et H un sous-groupe de G. Alors :*

(i) il existe une suite croissante finie $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de sous-groupes de G telle que

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

(on dit que H est sous-normal dans G) ;

(ii) si $H \neq G$, le normalisateur de H dans G est distinct de H (on dit que G vérifie la condition du normalisateur).

Démonstration. (i). Si n désigne la classe de nilpotence de G, vérifions que la suite définie par $H_k = H\zeta_k(G)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) convient. Les inclusions

$$\{1\} = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \cdots \trianglelefteq \zeta_{n-1}(G) \leq \zeta_n(G) = G$$

entraînent

$$H = H\zeta_0(G) \leq H\zeta_1(G) \leq \cdots \trianglelefteq H\zeta_{n-1}(G) \leq H\zeta_n(G) = G.$$

Clairement, H normalise H et $\zeta_k(G)$, donc H normalise $H\zeta_k(G)$. De plus, $\zeta_{k+1}(G)$ normalise aussi $H\zeta_k(G)$: en effet, l'égalité $\zeta_{k+1}(G)/\zeta_k(G) = \zeta(G/\zeta_k(G)$ entraîne que pour

tout $x \in H\zeta_k(G)$, $z \in \zeta_{k+1}(G)$, on a $[x, z] = y \in \zeta_k(G)$, d'où $z^{-1}xz = xy \in H\zeta_k(G)$. On en déduit que $H\zeta_{k+1}(G)$ normalise $H\zeta_k(G)$, d'où le résultat.
(ii). Si k est le plus grand entier tel que $H\zeta_k(G) = H$, $H\zeta_{k+1}(G)$ contient strictement le sous-groupe $H = H\zeta_k(G)$, en même temps qu'il le normalise. □

Corollaire 3.1 *Dans un groupe nilpotent, les sous-groupes maximaux (s'il en existe) sont normaux.*

Si G un groupe quelconque, on définit son *sous-groupe de Frattini* $\phi(G)$ de la manière suivante : si G ne possède pas de sous-groupes maximaux, on pose $\phi(G) = G$. Sinon, $\phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G. Il est clair que $\phi(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G. Le résultat suivant montre que ce sous-groupe est constitué des éléments qui peuvent être retirés de toute partie génératrice de G sans que cette partie cesse d'engendrer G :

Proposition 3.3 *Soit G un groupe. Pour un élément $a \in G$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $a \in \phi(G)$ *;*

(ii) pour toute partie $S \subseteq G$ telle que $\langle S, a\rangle = G$, on a $\langle S\rangle = G$.

Démonstration. (i)→(ii). Soit $a \in \phi(G)$. Supposons qu'il existe une partie $S \subseteq G$ telle que $\langle S, a\rangle = G$ et $\langle S\rangle \neq G$. L'ensemble des sous-groupes de G contenant $\langle S\rangle$ mais ne contenant pas a est non vide, ordonné inductif pour l'inclusion ; il contient donc un élément maximal M d'après le lemme de Zorn. Mais M est en fait un sous-groupe maximal de G car tout sous-groupe H qui contient strictement M contient S et a, donc $H = G$. Or, $a \notin M$, d'où une contradiction.
(ii)→(i). Soit a un élément de G vérifiant la propriété (ii). Si G ne possède pas de sous-groupes maximaux, l'implication est triviale. Sinon, soit M un sous-groupe maximal quelconque de G. Si $a \notin M$, on a $\langle M, a\rangle = G$, d'où $\langle M\rangle = G$, ce qui est faux. On en déduit que $a \in M$ pour tout sous-groupe maximal M, d'où $a \in \phi(G)$. □

Proposition 3.4 *Soit G un groupe dont tous les sous-groupes maximaux (s'il en existe) sont normaux. Alors, on a l'inclusion $G' \leq \phi(G)$.*

Démonstration. La proposition est triviale si G ne possède pas de sous-groupes maximaux. Sinon, soit M un sous-groupe maximal quelconque. Le groupe quotient G/M ne possédant pas de sous-groupe propre distinct de l'unité, il est cyclique d'ordre premier ; en particulier, il est abélien, d'où l'inclusion $G' \leq M$, qui entraîne $G' \leq \phi(G)$. □

D'après le Corollaire 3.1, un groupe nilpotent vérifie l'hypothèse de la proposition précédente, d'où :

Corollaire 3.2 *Dans un groupe nilpotent, on a l'inclusion $G' \leq \phi(G)$.*

Proposition 3.5 *Dans un groupe nilpotent, si deux éléments sont d'ordres finis premiers entre eux, ces éléments commutent.*

Démonstration. Le résultat est trivial pour les groupes abéliens. Considérons un groupe nilpotent G de classe $c > 1$ et supposons la proposition établie pour les groupes de classe $c-1$. Soient $x, y \in G$ d'ordres finis premiers entre eux. Cette propriété est conservée pour les classes de x, y dans $G/\zeta(G)$. De plus, la classe de nilpotence de $G/\zeta(G)$ est égale à $c-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, les classes de x et y commutent dans $G/\zeta(G)$. En d'autres termes, on a $[x, y] \in \zeta(G)$. Si n est un entier positif, en utlisant la relation (3) de la Proposition 1.3, on peut alors écrire :

$$[x^{n+1}, y] = [xx^n, y] = [x, y]^{x^n}[x^n, y] = [x, y][x^n, y].$$

Par une récurrence sur n, on en déduit l'égalité $[x^n, y] = [x, y]^n$. Notons a l'ordre de x. En faisant $n = a$ dans l'égalité précédente, on obtient $[x, y]^a = 1$. Il en résulte que $[x, y]$ est un élément d'ordre fini, diviseur de a. Si b est l'ordre de y, un calcul analogue montre que $[x, y]$ est d'ordre fini, diviseur de b. Mais a et b sont premiers entre eux, donc $[x, y]$ est d'ordre 1, d'où $[x, y] = 1$. □

Proposition 3.6 *Soient x et y deux éléments d'ordres finis dans un groupe nilpotent de classe $\leq c$. Alors, si $e > 0$ est un entier tel que $x^e = y^e = 1$, on a $(xy)^{e^c} = 1$.*

Démonstration. Le résultat est clair pour les groupes abéliens. Considérons un groupe nilpotent G de classe $c > 1$ et supposons la proposition établie pour les groupes de classe $< c$. Si H désigne le sous-groupe de G engendré par x et y, $H/\gamma_c(H)$ est de classe $< c$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $H/\gamma_c(H)$ entraîne que $(xy)^{e^{c-1}}$ est dans $\gamma_c(H)$. Il suffit donc de montrer que tout élément z de $\gamma_c(H)$ vérifie $z^e = 1$ pour pouvoir conclure. Or, $\gamma_c(H)$ est engendré par les éléments de la forme $u^{-1}[z_1, \ldots, z_c]u$ ($u \in H,\ z_1, \ldots, z_c \in \{x, y\}$) d'après la Proposition 1.4. De plus, $\gamma_c(H)$ est abélien (en fait, $\gamma_c(H) \leq \zeta(H)$) car $\gamma_{c+1}(H) = [\gamma_c(H), H] = \{1\}$. On peut donc se contenter de vérifier l'égalité $[z_1, \ldots, z_c]^e = 1$, où $z_1, \ldots, z_c$ sont choisis dans $\{x, y\}$. Soit n est un entier positif. D'après la relation (2) de la Proposition 1.3, on a

$$[z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c^{n+1}] = [z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c][z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c^n]^{z_c},$$

d'où, puisque $\gamma_c(H)$ est dans le centre de H :

$$[z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c^{n+1}] = [z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c][z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c^n].$$

Par une récurrence sur n, on en déduit l'égalité

$$[z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c^n] = [z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c]^n.$$

Si $n = e$, on a $z_c^e = 1$, d'où la relation

$$1 = [z_1, \ldots, z_{c-1}, z_c]^e$$

qui permet de conclure. □

Dans un groupe quelconque, le produit de deux éléments d'ordres finis n'est pas nécessairement d'ordre fini. En particulier, l'ensemble des éléments d'ordres finis ne constitue pas nécessairement un sous-groupe. Par contre, dans un groupe nilpotent, le produit de deux éléments d'ordres finis est d'ordre fini : c'est une conséquence de la proposition précédente, en prenant pour e le plus petit multiple commun des ordres de chaque élément. De plus, l'élément neutre est d'ordre fini égal à 1 et clairement l'inverse d'un élément d'ordre fini est d'ordre fini. Une conséquence de la Proposition 3.6 est donc le

Corollaire 3.3 *Dans un groupe nilpotent G, l'ensemble des éléments d'ordres finis est un sous-groupe.*

Ce sous-groupe est appelé le *sous-groupe de torsion* de G et il est sera noté ici $T(G)$. Il est clair que $T(G)$ est normal dans G et que dans $G/T(G)$, l'élément neutre est le seul élément d'ordre fini (on dit qu'un tel groupe est *sans torsion*).

Proposition 3.7 *(Théorème de Fitting). Soient $H_1, \ldots, H_k$ des sous-groupes normaux d'un groupe G. Si ces sous-groupes sont nilpotents de classes respectives $c_1, \ldots, c_k$, alors $H_1 \ldots H_k$ est nilpotent de classe au plus $c_1 + \cdots + c_k$.*

Démonstration. Il suffit de prouver cette proposition pour $k = 2$; le cas général résulte ensuite d'une récurrence sur k. Pour cela, il faut montrer que pour $n = 1 + c_1 + c_2$, on a $[a_1, \ldots, a_n] = 1$ pour tout $a_1, \ldots, a_n \in H_1 \cup H_2$. Notons n_1 (resp. n_2) le cardinal de l'ensemble des indices i tels que a_i soit dans H_1 (resp. H_2). On ne peut donc pas avoir simultanément les inégalités $n_1 \leq c_1$ et $n_2 \leq c_2$ car $n_1 + n_2 \geq 1 + c_1 + c_2$; supposons par exemple que l'on ait $n_1 > c_1$, c'est à dire $n_1 \geq 1 + c_1$. Soit i_0 le plus petit indice tel que a_{i_0} soit dans H_0. A l'aide d'une récurrence sur m ($i_0 \leq m \leq n$), il est facile de voir que $[a_1, \ldots, a_m] \in \gamma_{m'}(H_1)$, où m' est le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que a_i soit dans H_1. Il en résulte que $[a_1, \ldots, a_n]$ est dans $\gamma_{n_1}(H_1) = \{1\}$, d'où $[a_1, \ldots, a_n] = 1$. $\square$

Par définition, le *sous-groupe de Fitting* d'un groupe G est le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes normaux nilpotents de G. Ce sous-groupe est normal (et même caractéristique) dans G mais il n'est pas nécessairement nilpotent. Cependant, si G ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes normaux nilpotents, son sous-groupe de Fitting est nilpotent d'après le résultat précédent ; c'est par exemple le cas si G est fini.

Chapitre 4

Groupes nilpotents finis

Dans un groupe G, la relation "a et b sont conjugués" (*i.e.* il existe $x \in G$ tel que $b = x^{-1}ax$) est une relation d'équivalence. Soient a un élément fixé de G et f l'application de G dans la classe d'équivalence de a qui à x associe $x^{-1}ax$. Clairement, f est surjective. De plus, $f(x) = f(x')$ équivaut à $x'x^{-1}axx'^{-1} = a$, d'où $x'x^{-1} \in C_G(a)$, en désignant par $C_G(a)$ le centralisateur de a dans G ($C_G(a) = \{x \in G \mid [a, x] = 1\}$; c'est un sous-groupe de G). La classe d'équivalence de a est donc en bijection avec l'ensemble quotient $G/C_G(a)$.

Supposons maintenant que G soit un p-groupe fini distinct de $\{1\}$ (p premier). Soit $|G| = p^\alpha$ son ordre. Pour la relation de conjugaison, les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble G ; il existe donc $a_1, \ldots, a_k \in G$ tels que les classes de $a_1, \ldots, a_k$ soient deux à deux disjointes, la réunion de ces classes étant égale à G. La classe de a_i étant de cardinal $[G : C_G(a_i)]$, ce cardinal divise l'ordre de G ; posons $[G : C_G(a_i)] = p^{\alpha_i}$. On a donc l'égalité :

$$p^\alpha = p^{\alpha_1} + \ldots + p^{\alpha_k}.$$

On va en déduire que le centre de G n'est pas réduit à $\{1\}$. Pour cela, remarquons que $[G : C_G(a_i)] = 1$ équivaut à $C_G(a_i) = G$, c'est à dire $a_i \in \zeta(G)$. Si $\zeta(G) = \{1\}$, tous les termes de la somme dans l'égalité précédente seraient donc divisibles par p, sauf un, correspondant à la classe de l'unité, égal à 1. On en déduirait alors que p divise 1, ce qui est absurde. On a donc prouvé :

Proposition 4.1 *Le centre d'un p-groupe fini $G \neq \{1\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.*

Corollaire 4.1 *Un p-groupe fini est nilpotent.*

Démonstration. Soit G un p-groupe d'ordre p^n ($n \geq 0$). Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 0$, G est nilpotent ($G = \{1\}$). Considérons maintenant un entier $n > 0$ et supposons que tous les p-groupes d'ordre $p^{n'}$ sont nilpotents (pour tout entier $n' < n$). D'après la proposition précédente, $\zeta(G) \neq \{1\}$, donc $G/\zeta(G)$ est d'ordre $p^{n'}$ ($n' < n$) ; le groupe $G/\zeta(G)$ est donc nilpotent. Le Corollaire 1.5 montre qu'il en est de même pour G. □

Il existe de nombreuses caractérisations des groupes nilpotents finis. Avant d'en donner les principales, établissons un

Lemme 4.1 *("Argument de Frattini"). Soit H un sous-groupe normal fini d'un groupe G. Si P un p-sous-groupe de Sylow* [1] *de H, on a $G = HN_G(P)$.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Px$ est un p-sous-groupe de Sylow de H ; donc P et $x^{-1}Px$ sont conjugués dans H. Soit $h \in H$ tel que $P = h^{-1}x^{-1}Pxh$; on a donc $xh = k \in N_G(P)$, d'où $x = kh^{-1} = (kh^{-1}k^{-1})k \in HN_G(P)$. □

Proposition 4.2 *Si G est un groupe fini, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G est nilpotent ;

(ii) chaque sous-groupe de G est sous-normal ;

(iii) G satisfait la condition du normalisateur ;

(iv) chaque sous-groupe maximal de G est normal ;

(v) $G' \leq \phi(G)$;

(vi) chaque sous-groupe de Sylow de G est normal ;

(vii) G est isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

Démonstration. (i)→(ii). Proposition 3.2.
(ii)→(iii). Immédiat.
(iii)→(iv). Immédiat.
(iv)→(v). Proposition 3.4.
(v)→(vi). Soient P un sous-groupe de Sylow de G et $N_G(P)$ le normalisateur de P dans G. Supposons que P ne soit pas normal dans G. Le normalisateur $N_G(P)$ est donc un sous-groupe propre de G ; soit M un sous-groupe maximal de G contenant $N_G(P)$. Par hypothèse, on a $G' \leq M$, donc M est normal. D'après le lemme précédent, on a $G = MN_G(P)$; mais $N_G(P)$ est inclus dans M, d'où $G = M$, ce qui est contradictoire.
(vi)→(vii). Soit $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, \dots, p_k$ premiers distincts) la décomposition de l'ordre de G en produit de facteurs premiers. Pour chaque premier p_i, G ne possède qu'un seul p_i-sous-groupe de Sylow. Notons le P_i et définissons l'application ϕ du produit direct $P_1 \times \dots \times P_k$ dans le groupe G par $\phi(x_1, \dots, x_k) = x_1 \dots x_k$. Cette application est un homomorphisme de groupes :

$$\phi((x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k)) = \phi(x_1y_1, \dots, x_ky_k) = x_1y_1 \dots x_ky_k.$$

Pour $i \neq j$, les éléments de P_i commutent avec les éléments de P_j : en effet, si $z_i \in P_i$, $z_i \in P_j$, la normalité de P_i et P_j entraîne que $[z_i, z_j] = z_i^{-1}z_j^{-1}z_iz_j$ est dans $P_i \cap P_j = \{1\}$, d'où $[z_i, z_j] = 1$. Cela permet d'écrire :

$$\phi((x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k) = x_1 \dots x_ky_1 \dots y_k = \phi(x_1, \dots, x_k)\phi(y_1, \dots, y_k).$$

Montrons maintenant que ϕ est surjective ; pour simplifier, $p_i^{\alpha_i}$ sera noté q_i. Posons $\pi_i = (q_1 \dots q_k)/q_i$. Les entiers $\pi_1, \dots, \pi_k$ étant premiers dans leur ensemble, il existe des entiers $a_1, \dots, a_k$ tels que $a_1\pi_1 + \dots + a_k\pi_k = 1$. Tout élément $x \in G$ peut s'écrire

[1] Rappel (*Théorèmes de Sylow*) : si G est un groupe fini, si p est un nombre premier et si p^α est la plus grande puissance de p divisant l'ordre de G, alors il existe au moins un sous-groupe d'ordre p^α, appelé *p-sous-groupe de Sylow* de G. De plus, tous ces sous-groupes sont conjugués et leur nombre est congru à 1 modulo p.

sous la forme $x = x^{a_1\pi_1+\cdots+a_k\pi_k} = x^{a_1\pi_1}\dots x^{a_k\pi_k}$. Chaque élément $x^{a_i\pi_i}$ est d'ordre une puissance de p_i car $(x^{a_i\pi_i})^{q_i} = x^{a_iq_1\cdots q_k} = 1$. En d'autres termes, $x^{a_i\pi_i}$ est dans P_i. On peut alors écrire $x = \phi(x^{a_1\pi_1}, \dots, x^{a_k\pi_k})$, donc ϕ est surjective. Les groupes $P_1 \times \cdots \times P_k$ et G étant de même ordre, ϕ est un isomorphisme.
(vii)→(i). Si un groupe fini est isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow, il est donc isomorphe au produit direct d'un nombre fini de groupes nilpotents, d'où le résultat. □

Proposition 4.3 *Si un groupe G possède un sous-groupe de Frattini $\phi(G)$ fini, alors $\phi(G)$ est nilpotent (en particulier, le sous-groupe de Frattini d'un groupe fini est toujours nilpotent).*

Démonstration. Si P un sous-groupe de Sylow de $\phi(G)$, on a $G = \phi(G)N_G(P)$ (Lemme de Frattini). D'après la Proposition 3.3, l'égalité $G = \langle\phi(G), N_G(P)\rangle$ entraîne $G = \langle N_G(P)\rangle = N_G(P)$; donc tous les sous-groupes de Sylow de $\phi(G)$ sont normaux dans G (et *a fortiori* dans $\phi(G)$), ce qui prouve le résultat. □

Le résultat suivant est très utile pour établir la nilpotence de certaines classes de groupes finis (il permet de se ramener à des groupes résolubles) :

Proposition 4.4 *(Théorème de Schmidt). Soit G un groupe fini dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents. Alors, G est résoluble.*

Lemme 4.2 *Soit G un groupe fini. Si chaque paire de sous-groupes maximaux de G est d'intersection triviale, alors au moins un de ces sous-groupes maximaux est normal dans G.*

Démonstration. Supposons que G ne contienne pas de sous-groupe maximal qui soit normal. Si M est un sous-groupe maximal de G, son normalisateur dans G est donc égal à M. Notons g et m les ordres respectifs des groupes G et M et posons $g/m = h$. Soient $M_1 = M, M_2, \dots, M_h$ les différents conjugués de M (ces sous-groupes sont bien entendu maximaux). Tous les éléments de $G \setminus \{1\}$ ne sont pas dans $\bigcup_{i=1,\dots,h} M_i \setminus \{1\}$ car cette réunion ne contient que $h(m-1) = g-h$ éléments. De plus, l'ensemble de tous les sous-groupes maximaux forme un recouvrement de G (G n'est pas cyclique car sinon, tout les sous-groupes maximaux seraient normaux). Il existe donc un sous-groupe maximal N distinct de $M_1 = M, M_2, \dots, M_h$. Posons $|N| = n$, $g/n = k$ et notons $N_1 = N, N_2, \dots, N_k$ les différents conjugués de N. Les ensembles $\bigcup_{i=1,\dots,h} M_i \setminus \{1\}$ et $\bigcup_{i=1,\dots,k} N_i \setminus \{1\}$ sont disjoints et inclus dans $G \setminus \{1\}$; ils contiennent respectivement $g-h$ et $g-k$ éléments. On en déduit l'inégalité $g-h+g-k \leq g-1$ d'où $g+1 \leq h+k$, ce qui est contradictoire car h et k sont au plus égaux à $g/2$. □

Démonstration de la Proposition 4.4. La proposition est triviale pour un groupe réduit à l'unité. Considérons un groupe G d'ordre $g > 1$ dont les sous-groupes propres sont nilpotents et supposons la proposition établie pour les groupes d'ordre $< g$. Si l'un des sous-groupes maximaux de G est normal, G est résoluble : en effet, M et G/M sont résolubles (M est nilpotent et G/M est un groupe cyclique d'ordre premier). Supposons maintenant que G ne contienne pas de sous-groupe maximal qui soit normal. D'après le lemme précédent, il existe deux sous-groupes maximaux M et N tels que l'intersection

$I = M \cap N$ soit non triviale. Supposons M et N choisis tels que cette intersection soit d'ordre maximal. Il existe un élément $x \in M \setminus I$ qui normalise I car I est un sous-groupe propre du groupe nilpotent M. De même, il existe un élément $y \in N \setminus I$ qui normalise I. Le sous-groupe $\langle I, x, y\rangle$ coïncide avec G. En effet, dans le cas contraire, un sous-groupe maximal R contenant $\langle I, x, y\rangle$ serait distinct de M ($y \in R,\ y \notin M$) et $M \cap R$ serait d'ordre strictement supérieur à l'ordre de I ($I \cup \{x\} \subseteq M \cap R$). Le sous-groupe I est donc normal dans G car x et y normalisent I. Il est clair que les sous-groupes propres de I et G/I sont nilpotents. De plus, I est distinct de $\{1\}$ et G, donc I et G/I sont d'ordre $< g$. D'après l'hypothèse de récurrence, I et G/I sont résolubles, d'où la résolubilité de G. □

Pour x et y éléments d'un groupe arbitraire et pour n entier naturel, on définit le symbole $[y,\ {}_n x]$ par $[y,\ {}_0 x] = y$ et $[y,\ {}_n x] = [[y,\ {}_{n-1} x], x]$ pour $n > 0$. En d'autres termes, $[y,\ {}_n x] = [y, x, \ldots, x]$, où x intervient n fois. Avant de donner une application du théorème de Schmidt, commençons par la

Définition 4.1 *On dit qu'un groupe G (fini ou infini) est un groupe d'Engel si pour tout $x, y \in G$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $[y,\ {}_n x] = 1$. Si n peut être choisi indépendant de x et y (i.e. il existe $n \geq 0$ tel que l'on ait $[y,\ {}_n x] = 1$ quel que soit $x, y \in G$), on dit que G vérifie la n-ième condition d'Engel.*

Il est clair qu'un groupe d'Engel fini vérifie la n-ième condition d'Engel pour un entier n assez grand.

Proposition 4.5 *Un groupe d'Engel fini est nilpotent.*

Démonstration. La proposition est triviale pour un groupe réduit à l'unité. Considérons un groupe d'Engel fini G d'ordre $g > 1$ et supposons la proposition établie pour les groupes d'ordre $< g$. D'après l'hypothèse de récurrence, les sous-groupes propres de G sont nilpotents. Le théorème de Schmidt permet d'en déduire que G est résoluble. Soit M un sous-groupe maximal de G contenant G' (ce qui entraîne que M est normal dans G). Si $M = \{1\}$, on a $G' = \{1\}$, donc G est nilpotent. Sinon, le centre de M est non trivial car M est nilpotent. Choisissons un élément $z \neq 1$ dans $\zeta(M)$. Soit x est un élément de $G \setminus M$ et soit n le plus petit entier naturel tel que $[z,\ {}_n x] = 1$. Notons que $n > 0$ car $z \neq 1$. Remarquons que $\zeta(M)$ est normal dans G ($\zeta(M)$ est un sous-groupe caractéristique de M et M est normal dans G), donc $[z,\ {}_{n-1} x] \in \zeta(M)$. De plus, $[z,\ {}_{n-1} x]$ commute avec x et $\langle M, x\rangle = G$, donc $[z,\ {}_{n-1} x] \in \zeta(G)$, ce qui montre que $\zeta(G)$ est non trivial car $[z,\ {}_{n-1} x] \neq 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $G/\zeta(G)$ est nilpotent, d'où la nilpotence de G. □

On étendra par la suite la proposition précédente à une classe de groupes plus vaste que la classe des groupes finis.

Chapitre 5

La condition maximale

Définition 5.1 *On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale si chaque ensemble non vide de sous-groupes de G possède un élément maximal (pour l'inclusion).*

Cette condition peut se formuler de diverses façons :

Proposition 5.1 *Dans un groupe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G vérifie la condition maximale ;

(ii) chaque sous-groupe de G est de type fini ;

(iii) chaque suite croissante de sous-groupes de G est stationnaire (en d'autres termes, il n'existe pas de suite infinie de sous-groupes strictement croissante).

Démonstration. (i)→(ii). Soient H un sous-groupe de G et M un élément maximal de l'ensemble des sous-groupes de type fini de H. Supposons que M soit distinct de H et considérons un élément $x \in H \setminus M$; mais $\langle M, x\rangle$ est un sous-groupe de type fini de H et $M < \langle M, x\rangle$, d'où une contradiction. On en déduit que $M = H$, donc H est de type fini.
(ii)→(iii). Si $(H_i)_{i\geq 0}$ est une suite croissante de sous-groupes de G, il est clair que $H = \bigcup_{i\geq 0}(H_i)$ est un sous-groupe de G. Si H est engendré par les éléments $x_1 \in H_{i_1}, \ldots, x_k \in H_{i_k}$, on a $x_1, \ldots, x_k \in H_j$ pour $j = \max(i_1, \ldots, i_k)$, d'où $H = H_j$. Il en résulte l'égalité $H_i = H_j$ pour tout $i \geq j$.
(iii)→(i). Montrons que s'il existe un ensemble non vide $\mathcal{E}$ de sous-groupes de G sans élément maximal, on peut construire une suite infinie de sous-groupes de G strictement croissante. Il est clair que la suite $(H_i)_{i\geq 0}$ $(H_i \in \mathcal{E})$ définie par récurrence ci-après convient : choisissons H_0 arbitrairement dans $\mathcal{E}$. Supposons définis les sous-groupes $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{E}$ et notons que H_n n'est pas un élément maximal de $\mathcal{E}$. On choisit alors H_{n+1} égal à un élément de $\mathcal{E}$ tel que $H_n < H_{n+1}$. □

Soit G un groupe vérifiant la condition maximale et H un sous-groupe de G. Sous ces hypothèses, Il est clair que H vérifie la condition maximale. De même, si H est normal, il est facile de voir que G/H vérifie aussi la condition maximale. Inversement, nous allons démontrer le résultat :

Proposition 5.2 *Si H un sous-groupe normal d'un groupe G, supposons que H et G/H vérifient la condition maximale. Alors G vérifie la condition maximale (en d'autres termes, la condition maximale est stable par extension).*

Démonstration. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de sous-groupes de G. Si π est la projection canonique de G sur G/H, $(\pi(A_n))_{n\geq 0}$ une suite croissante de sous-groupes de G/H ; cette suite est donc constante à partir d'un certain rang, disons r. De même, la suite $(A_n \cap H)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de sous-groupes de H ; elle est donc constante à partir d'un certain rang, disons s. Montrons que $(A_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir du rang $t = \max(r, s)$. Il suffit d'établir l'inclusion $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour tout entier $n \geq t$. Soit $x \in A_{n+1}$. L'égalité $\pi(A_{n+1}) = \pi(A_n)$ entraîne que $\pi(x)$ est dans $\pi(A_n)$. En d'autres termes, x peut s'écrire sous la forme $x = ah$, avec $a \in A_n,\ h \in H$. Mais $h = a^{-1}x \in A_{n+1}$, donc h est dans $A_{n+1} \cap H = A_n \cap H$. Il en résulte que x est dans A_n, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 5.3 *Un groupe nilpotent vérifie la condition maximale si et seulement si il est de type fini.*

Il est clair qu'il suffit d'établir qu'un groupe nilpotent de type fini vérifie la condition maximale, la réciproque étant immédiate. On va d'abord montrer cette propriété dans un cas particulier :

Lemme 5.1 *Un groupe abélien de type fini vérifie la condition maximale.*

Démonstration. Un groupe cyclique vérifie la condition maximale (il est bien connu que ses sous-groupes sont cycliques). Supposons maintenant le lemme établi pour les groupes abéliens engendrés par $k-1$ éléments et considérons un groupe abélien G engendré par k éléments $x_1, \ldots, x_k$. D'après l'hypothèse de récurrence, le sous-groupe H engendré par $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vérifie la condition maximale. Il en est de même pour le groupe cyclique G/H. Donc G vérifie la condition maximale (Proposition 5.2). □

Démonstration de la Proposition 5.3. Soit G un groupe nilpotent de type fini, de classe de nilpotence égale à c. Si $c = 1$, la proposition se ramène au lemme précédent. Supposons la proposition démontrée pour les groupes nilpotents de classe $c-1$. Donc $G/\gamma_c(G)$ (de classe $c-1$) vérifie la condition maximale. D'après la Proposition 1.4, si G est engendré par S, $\gamma_c(G)$ est engendré par les éléments de la forme

$$x^{-1}[a_1, \ldots, a_c]x = [a_1, \ldots, a_c] \quad (a_1, \ldots, a_c \in S,\ x \in G).$$

Le sous-groupe $\gamma_c(G)$ vérifie donc la condition maximale car il est abélien de type fini. On en déduit que G vérifie la condition maximale (Proposition 5.2). □

Il a été montré qu'un groupe d'Engel fini est nilpotent (Proposition 4.5). Plus généralement, nous allons prouver le résultat suivant :

Proposition 5.4 *Si G est un groupe d'Engel vérifiant la condition maximale, alors G est nilpotent.*

Lemme 5.2 *Soient G est un groupe d'Engel et H un sous-groupe normal nilpotent de type fini tel que G/H soit cyclique. Alors G est nilpotent.*

Démonstration. Effectuons une récurrence sur la classe de nilpotence c de H. Si $c = 0$ (*i.e.* $H = \{1\}$), le lemme est trivial. Supposons le lemme démontré jusqu'à $c-1$ ($c > 0$). Remarquons que $\zeta(H)$ est normal dans G (car $\zeta(H)$ est un sous groupe caractéristique de H) et que $H/\zeta(H)$ est nilpotent de classe $c-1$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $G/\zeta(H)$ montre que ce groupe est nilpotent. En d'autres termes, il existe un entier k tel que $\gamma_k(G) \leq \zeta(H)$. Soit $a \in G$ tel que la classe de a modulo H engendre G/H. L'application $f : \zeta(H) \to \zeta(H)$ définie par $f(z) = [z, a]$ est un homomorphisme de groupes :

$$f(zz') = [zz', a] = [z, a]^{z'}[z', a] = [z, a][z', a] = f(z)f(z').$$

De plus, H étant nilpotent de type fini, il en est de même pour $\zeta(H)$. Soit $\{z_1, \ldots, z_r\}$ une partie génératrice de $\zeta(H)$. Pour chaque entier $i = 1, \ldots, r$, on peut trouver un entier $n_i \geq 0$ tel que $[z_i,\ {}_{n_i}a] = 1$. Si $n = \max(n_1, \ldots, n_r)$, on obtient $[z_i,\ {}_n a] = f^n(z_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Mais f est un endomorphisme de $\zeta(H) = \langle z_1, \ldots, z_r \rangle$, donc $f^n(z) = [z,\ {}_n a] = 1$ pour tout $z \in \zeta(H)$.
Pour finir, montrons que $\gamma_{k+n}(G) = \{1\}$. Or G est engendré par H et a ; d'après le Corollaire 1.1, il suffit de vérifier l'égalité $[y_1, \ldots, y_{k+n}] = 1$ pour tout $y_1, \ldots, y_{k+n} \in H \cup \{a\}$. Notons que $[y_1, \ldots, y_k] \in \zeta(H)$ et envisageons deux cas. S'il existe $i \in \{k+1, \ldots, k+n\}$ tel que $y_i \in H$, l'égalité est vérifiée : $[y_1, \ldots, y_i] = 1$ car $[y_1, \ldots, y_{i-1}] \in \zeta(H)$. Mais il en est de même pour le deuxième cas : on a alors $y_{k+1} = \ldots = y_{k+n} = a$, d'où $[y_1, \ldots, y_{k+n}] = [y_1, \ldots, y_k,\ {}_n a] = 1$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Démonstration de la Proposition 5.4. Supposons G non nilpotent et considérons un sous-groupe nilpotent maximal $M < G$. Considérons l'ensemble des sous-groupes de la forme $M \cap H$, où H est un sous-groupe nilpotent de G non inclus dans M (de tel sous-groupes existent : on peut prendre par exemple $H = \langle a \rangle$, avec $a \in G \setminus M$). Choisissons H tel que $M \cap H$ soit maximal dans l'ensemble précédent. Il existe un élement $x \in M \setminus M \cap H$ qui normalise $M \cap H$ car ce sous-groupe est un sous-groupe propre du groupe nilpotent M. De même, il existe un élement $y \in H \setminus M \cap H$ qui normalise $M \cap H$. L'ensemble des entiers n tel que $[y,\ {}_n x]$ soit dans M est non vide car $[y,\ {}_n x] = 1 \in M$ pour n assez grand. Soit n le plus petit de ces entiers. On a $n > 0$ car $y \notin M$. Posons $z = [y,\ {}_{n-1}x]$ et $t = [y,\ {}_n x]$. On $t = [z, x] = z^{-1}x^{-1}zx \in M$, d'où $z^{-1}xz = xt^{-1} \in M$. Remarquons maintenant que zMz^{-1} est nilpotent (il est isomorphe à M). De plus, x et y normalisant $M \cap H$, il en est de même pour $z = [y,\ {}_{n-1}x]$; il en résulte que $M \cap zMz^{-1}$ contient $M \cap H$. Mais $M \cap H$ est une partie propre de $M \cap zMz^{-1}$ car $x = z(xt^{-1})z^{-1} \in M \cap zMz^{-1} \setminus M \cap H$. Par maximalité de l'intersection, on en déduit l'inclusion $zMz^{-1} \leq M$, d'où $M \leq z^{-1}Mz$. Or, $z^{-1}Mz$ est nilpotent, donc par maximalité de M, on obtient l'égalité $M = z^{-1}Mz$ (*i.e.* z normalise M). Le groupe $\langle M, z \rangle$ et son sous-groupe M vérifient les hypothèses du lemme précédent, donc $\langle M, z \rangle$ est nilpotent. Par maximalité de M, il vient $M = \langle M, z \rangle$, d'où $z \in M$, ce qui est contradictoire. □

Proposition 5.5 *Un groupe d'Engel résoluble de type fini est nilpotent.*

Lemme 5.3 *Un sous-groupe d'indice fini dans un groupe de type fini est lui-même de type fini.*

Démonstration. Soient G un groupe de type fini et B une partie génératrice finie de G. Quitte à remplacer B par $B \cup B^{-1}$, on peut supposer que $B = B^{-1}$. Soit H un sous-groupe

de G d'indice fini égal à s. Considérons s représentants $c_1 = 1, c_2, \ldots, c_s$ des différentes classes à droite modulo H ; on a donc $G = \bigcup_{i=1,\ldots,s} Hc_i$. Soit $f : G \to \{c_1, \ldots, c_s\}$ l'application qui à $x \in G$ associe l'unique élément $f(x) = c_i \in \{c_1, \ldots, c_s\}$ tel que $x \in Hc_i$. On va montrer que H est engendré par les éléments de la forme $cbf(cb)^{-1}$ ($c \in \{c_1, \ldots, c_s\},\ b \in B$). Ces éléments étant dans H (car $cb \in Hf(cb)$ par définition de f), ils engendrent un sous-groupe inclus dans H. Réciproquement, montrons que tout élément de H peut s'écrire comme un produit d'éléments de la forme $cbf(cb)^{-1}$ ou $(cbf(cb)^{-1})^{-1}$. Soit $x = b_1 \ldots b_n$ ($b_i \in B$) un élément de H. Pour $k = 1, \ldots, n+1$, posons $x_k = b_1 \ldots b_{k-1}$ (avec la convention $x_1 = 1$). On a l'égalité :

$$x = \{f(x_1)b_1f(x_1b_1)^{-1}\}\{f(x_2)b_2f(x_2b_2)^{-1}\}\ldots\{f(x_n)b_nf(x_nb_n)^{-1}\}.$$

En effet, la relation $f(x_kb_k)^{-1}f(x_{k+1}) = f(x_{k+1})^{-1}f(x_{k+1}) = 1$ ($k = 1, \ldots, n-1$) permet d'écrire le deuxième membre de l'égalité précédente sous la forme $f(x_1)b_1 \ldots b_nf(x_nb_n)^{-1} = f(x_1)xf(x)^{-1}$; or, $f(x_1) = f(x) = 1$ car $x_1 = 1$ et x sont dans H, d'où l'égalité.
Il reste à vérifier que pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_k)b_kf(x_kb_k)^{-1}$ est de la forme $cbf(cb)^{-1}$ ($c \in \{c_1, \ldots, c_s\},\ b \in B$). Pour cela, posons $f(x_k) = c$. On a $x_k = hc$ ($h \in H$), d'où $x_kb_k = hcb_k$. On en déduit que $f(x_kb_k) = f(cb_k)$, d'où $f(x_k)b_kf(x_kb_k)^{-1} = cb_kf(cb_k)^{-1}$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Lemme 5.4 *Soient G un groupe d'Engel et H un sous-groupe normal tel que G/H soit cyclique. Alors, si G est de type fini, il en est de même pour H.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si G/H est un groupe cyclique *fini*, H est de type fini d'après le lemme précédent. Nous supposerons donc dans la suite que G/H est un groupe cyclique infini. Soit a un élément de G dont la classe engendre G/H. Soit $\{b_1, \ldots, b_k\}$ une partie génératrice de G. Chaque générateur b_i peut s'écrire sous la forme $b_i = a^{\epsilon_i}c_i$, avec c_i dans H. Il est clair que les éléments $a, c_1, \ldots, c_k$ engendrent G. Soient $n > 0$ un entier tel que $[c_i,\ {}_na] = 1$ (pour $i = 1, \ldots, k$) et K le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $[c_i,\ {}_ma]$ ($i = 1, \ldots, k,\ m = 0, \ldots, n-1$). Nous allons montrer que $K = H$, ce qui prouvera le lemme. Clairement, on a l'inclusion $K \leq H$ car $c_i \in H$ et H est normal. Pour établir l'inclusion inverse, nous allons d'abord remarquer que pour tout $i = 1, \ldots, k,\ m = 0, \ldots, n-1$, les éléments $a^{-1}[c_i,\ {}_ma]a$ et $a[c_i,\ {}_ma]a^{-1}$ sont dans K (*i.e.* a normalise K). C'est clair pour les éléments du premier type car

$$a^{-1}[c_i,\ {}_ma]a = [c_i,\ {}_ma][c_i,\ {}_ma]^{-1}a^{-1}[c_i,\ {}_ma]a = [c_i,\ {}_ma][c_i,\ {}_{m+1}a] \in K.$$

Pour les éléments du deuxième type, notons d'abord que a et $[c_i,\ {}_{n-1}a]$ commutent (car $[c_i,\ {}_na] = 1$), d'où $a[c_i,\ {}_{n-1}a]a^{-1} = [c_i,\ {}_{n-1}a] \in K$. Supposons maintenant que l'on ait prouvé l'appartenance à K de tous éléments de la forme $a[c_i,\ {}_{n-r}a]a^{-1}$, où r est un entier donné ($1 \leq r < n$). On a :

$$\begin{aligned}
a[c_i,\ {}_{n-(r+1)}a]a^{-1} &= [c_i,\ {}_{n-(r+1)}a][c_i,\ {}_{n-(r+1)}a]^{-1}a[c_i,\ {}_{n-(r+1)}a]a^{-1} \\
&= [c_i,\ {}_{n-(r+1)}a][[c_i,\ {}_{n-(r+1)}a], a^{-1}] \\
&= [c_i,\ {}_{n-(r+1)}a]a[[c_i,\ {}_{n-(r+1)}a], a]^{-1}a^{-1} \\
&= [c_i,\ {}_{n-(r+1)}a]a[c_i,\ {}_{n-r}a]^{-1}a^{-1} \in K,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Pour finir, considérons un élément h de H. Un tel élément peut s'écrire sous la forme $h = a^{\alpha_1} c_{i_1}^{\gamma_1} \dots a^{\alpha_t} c_{i_t}^{\gamma_t}$ $(\alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{Z})$ d'où

$$h = (a^{\alpha_1} c_{i_1}^{\gamma_1} a^{-\alpha_1})(a^{\alpha_1+\alpha_2} c_{i_2}^{\gamma_2} a^{-(\alpha_1+\alpha_2)}) \dots (a^{\alpha_1+\dots\alpha_t} c_{i_t}^{\gamma_t} a^{-(\alpha_1+\dots\alpha_t)}) a^{\alpha_1+\dots\alpha_t}.$$

En particulier, $a^{\alpha_1+\dots\alpha_t}$ est dans H ; mais G/H est infini, donc $\alpha_1 + \dots \alpha_t = 0$. On a donc l'égalité

$$h = (a^{\alpha_1} c_{i_1} a^{-\alpha_1})^{\gamma_1} (a^{\alpha_1+\alpha_2} c_{i_2} a^{-(\alpha_1+\alpha_2)})^{\gamma_2} \dots (a^{\alpha_1+\dots\alpha_t} c_{i_t} a^{-(\alpha_1+\dots\alpha_t)})^{\gamma_t}.$$

Or, chaque c_i est dans K et a normalise K : on en déduit que h est dans K, d'où l'inclusion $H \leq K$, ce qui termine la démonstration. □

Démonstration de la Proposition 5.5. Soit G un groupe d'Engel de type fini, résoluble de classe r. Si $r \leq 1$, le résultat est immédiat. Considérons maintenant la proposition établie pour les groupes résolubles de classe $r-1$ et supposons que G' ne soit pas de type fini. Soit M un sous-groupe ($G' \leq M \leq G$) qui n'est pas de type fini, choisi maximal parmi ces sous-groupes (l'existence de M résulte du Lemme de Zorn, ou du fait que G/G' vérifie la condition maximale). Notons que $M \neq G$; soit $a \in G \setminus M$. Par maximalité de M, le groupe $\langle M, a \rangle$ est de type fini. Mais M est un sous-groupe normal de G car $G' \leq M$. Donc M est un sous-groupe normal de $\langle M, a \rangle$ et $\langle M, a \rangle / M$ est cyclique : d'après le Lemme 5.4, M serait de type fini, ce qui est contradictoire. On en déduit que G' est de type fini ; de plus, G' est de classe de résolubilité égale à $r-1$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, G' est nilpotent. En particulier, G' vérifient la condition maximale ; il en est de même pour le groupe G/G', qui est abélien de type fini. Il en résulte que G vérifie la condition maximale. La nilpotence de G est alors une conséquence de la Proposition 5.4. □

Chapitre 6

Groupes polycycliques

Par définition, si un groupe possède une série à quotients cycliques, on dit que ce groupe est *polycyclique*.
En d'autres termes, un groupe G est polycyclique s'il existe une suite décroissante finie $(H_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ de sous-groupes de G telle que

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G,$$

les quotients H_k/H_{k+1} étant cycliques (pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$) si n est strictement positif.
Il résulte directement de la définition que la polycyclicité est stable par extension. Plus précisément, si un groupe G possède un sous-groupe $H \triangleleft G$ tel que H et G/H soient polycycliques, alors G est polycyclique.

Proposition 6.1 *Pour un groupe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G est polycyclique ;

(ii) G est résoluble et il vérifie la condition maximale.

Démonstration. (i)→(ii). Soient

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

des sous-groupes de G tels que H_k/H_{k+1} soit cyclique pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En particulier, les quotients H_k/H_{k+1} sont résolubles et ils vérifient la condition maximale. Mais la résolubilité et la condition maximale sont des propriétés stables par extension, donc G est résoluble et il verifie la condition maximale.
(ii)→(i). Le groupe G étant résoluble, il possède une série

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

telle que H_k/H_{k+1} soit abélien pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. De plus, G vérifiant la condition maximale, H_k/H_{k+1} est de type fini. Or, suivant un résultat bien connu, un groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques. Supposons que pour un entier k donné ($k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$), H_k/H_{k+1} soit isomorphe au produit direct $A_1 \times \cdots \times A_t$, les groupes A_i étant cycliques. La série à quotients cycliques

$$\{1\} \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq A_1 \times A_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A_1 \times \cdots \times A_{t-1} \trianglelefteq A_1 \times \cdots \times A_t \simeq H_k/H_{k+1}$$

montre que H_k/H_{k+1} est polycyclique. La polycyclicité étant stable par extension, G est polycyclique. $\square$

Un groupe nilpotent est résoluble ; de plus, s'il est de type fini, il vérifie la condition maximale (Proposition 5.3). Le résultat précédent entraîne donc :

Corollaire 6.1 *Un groupe nilpotent de type fini est polycyclique.*

Nous dirons qu'un groupe est *poly-(cyclique infini)* s'il possède une série à quotients cycliques *infinis*. En particulier, un groupe poly-(cyclique infini) est nécessairement polycyclique. Inversement, le résultat suivant montre qu'un groupe polycyclique est "presque" poly-(cyclique infini) :

Proposition 6.2 *Un groupe polycyclique est une extension d'un groupe poly-(cyclique infini) par un groupe fini.*

On en déduit immédiatement le

Corollaire 6.2 *Si G est un groupe polycyclique, il existe une série*

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

et un entier $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tels que les quotients H_k/H_{k+1} soient cycliques infinis pour $k = 0, 1, \ldots, t-1$ et cycliques finis pour $k = t, \ldots, n-1$.

Avant de prouver la Proposition 6.2, on établit trois lemmes :

Lemme 6.1 *Un groupe périodique résoluble de type fini est fini.*

Démonstration. Soit G un groupe vérifiant les hypothèses du lemme ; soit r la classe de résolubilité de G. Si $r \leq 1$ (*i.e.* G est abélien), le résultat est immédiat. Supposons maintenant le résultat établi jusqu'à $r-1$ ($r > 1$). Le quotient G/G' étant abélien, périodique et de type fini, il est fini ; de plus, G est de type fini. On en déduit que G' est de type fini (Lemme 5.3). De plus, la classe de résolubilité de G' est égale à $r-1$, donc G' est fini d'après l'hypothèse de récurrence ; mais G/G' étant fini, il en est de même pour G. $\square$

Lemme 6.2 *Un sous-groupe d'un groupe poly-(cyclique infini) est lui-même poly-(cyclique infini).*

Démonstration. Soient G un groupe poly-(cyclique infini) et A un sous-groupe de G. Soit

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

une série de G, les quotients H_k/H_{k+1} étant cycliques infinis. On a clairement :

$$\{1\} = A \cap H_n \trianglelefteq A \cap H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A \cap H_1 \trianglelefteq A \cap H_0 = K.$$

Il suffit donc de montrer que les quotients $(A \cap H_k)/(A \cap H_{k+1})$ sont soit cycliques infinis, soit réduits à l'unité. Or, $H_{k+1}(A \cap H_k)/H_{k+1}$ est isomorphe à

$$(A \cap H_k)/(H_{k+1} \cap (A \cap H_k)) \;=\; (A \cap H_k)/(A \cap H_{k+1}).$$

De plus, $H_{k+1}(A \cap H_k)/H_{k+1}$ est soit cyclique infini, soit réduit à l'unité (c'est un sous-groupe du groupe cyclique infini H_k/H_{k+1}), d'où le résultat. $\square$

Lemme 6.3 *Soit A un sous-groupe normal fini d'un groupe G tel que G/A soit cyclique infini. Alors, G contient un sous-groupe normal cyclique infini B tel que G/B soit fini.*

Démonstration. Soit c un élément de G dont la classe modulo A engendre G/A. Il est clair que $\langle c\rangle$ est infini. Si x est un élément fixé de G, notons χ_x l'automorphisme intérieur de G défini par $\chi_x(z) = xzx^{-1}$ pour tout $z \in G$. On désigne par $\mathrm{Aut}(A)$ le groupe des automorphismes de A. Soit f l'endomorphisme de $\langle c\rangle$ dans $\mathrm{Aut}(A)$ qui à $x \in \langle c\rangle$ fait correspondre l'automorphisme induit sur A par χ_x. Le groupe quotient $\langle c\rangle/\ker(f)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A)$: il est donc fini. Considérons alors un entier $e > 0$ tel que $c^e \in \ker(f)$ et montrons que l'on peut prendre pour B le sous-groupe $\langle c^e\rangle$. En effet, il est clair que $\langle c^e\rangle$ est normal dans $G = \langle A, c\rangle$ (en fait, $\langle c^e\rangle$ est même un sous-groupe du centre de G). De plus, $\langle c^e\rangle$ est un sous-groupe de $\langle c\rangle$ non réduit à l'unité : il est donc cyclique infini. Enfin, tout élément de G s'écrit sous la forme ac^i ($a \in A$, $i \in \mathbb{Z}$) ; le quotient $G/\langle c^e\rangle$ est donc constitué des classes des éléments de la forme ac^i ($a \in A$, $i = 0, 1, \ldots, e-1$), ce qui prouve qu'il est fini. □

Démonstration de la Proposition 6.2. Soit G un groupe polycyclique, muni d'une série

$$\{1\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G,$$

à quotients cycliques. Effectuons une récurrence sur n. Si $n \leq 1$, G est cyclique et le résultat est trivial. Supposons maintenant $n > 1$ et appliquons l'hypothèse de récurrence à H_1 : on en déduit l'existence d'un sous-groupe $K \trianglelefteq H_1$ tel que K soit poly-(cyclique infini), avec H_1/K fini. Soit e l'exposant de H_1/K. Le sous-groupe H_1^e est normal dans G et inclus dans K ; d'après le Lemme 6.2, il est poly-(cyclique infini). De plus, H_1/H_1^e est fini par application du Lemme 6.1. Donc, si G/H_1 est fini, il en est de même pour G/H_1^e et le résultat est établi. Supposons maintenant que G/H_1 est cyclique infini. On peut appliquer le Lemme 6.3 au groupe G/H_1^e, en prenant pour A le sous-groupe H_1/H_1^e. On en déduit l'existence d'un sous-groupe L ($H_1^e \trianglelefteq L \trianglelefteq G$) tel que L/H_1^e soit cyclique infini et G/L fini. Clairement, L est poly-(cyclique infini), d'où le résultat. □

Donnons encore une conséquence de la Proposition 6.2 :

Corollaire 6.3 *Un groupe polycyclique infini possède un sous-groupe normal abélien infini sans torsion (qui est donc isomorphe à une somme directe finie de la forme $\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}$ puisque les sous-groupes de G sont de type fini).*

Démonstration. Si G est un groupe polycyclique, il possède un sous-groupe normal d'indice fini H qui est poly-(cyclique infini). Si de plus G est infini, H est distinct du sous-groupe unité. Soit r est la classe de résolubilité de H. Le sous-groupe $H^{(r-1)}$ est abélien, normal dans G ; de plus, il est infini (car H est sans torsion) ce qui permet de conclure. □

Soient $(A_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ et $(B_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ deux séries de G. Si l'ensemble des sous-groupes $A_0, A_1, \ldots, A_m$ est inclus dans l'ensemble des sous-groupes $B_0, B_1, \ldots, B_n$, on dit que la série $(B_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ est un *raffinement* de la série $(A_k)_{k=0,1,\ldots,m}$; en d'autres termes, on obtient $(B_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ en intercalant entre les sous-groupes de $(A_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ un certain nombre de sous-groupes supplémentaires.

Par définition, deux séries $(A_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ et $(B_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ sont *isomorphes* si elles ont la même longueur et si à l'ordre près, les facteurs respectifs sont deux à deux isomorphes.

Plus formellement : $m = n$, et il existe une permutation σ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que A_k/A_{k+1} soit isomorphe à $B_{\sigma(k)}/B_{1+\sigma(k)}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Le résultat suivant, donné sans preuve, est classique (on pourra en trouver une démonstration dans [2] ou [10] par exemple) :

Proposition 6.3 *(Théorème des raffinements isomorphes de Schreier). Dans un groupe, deux séries quelconques possèdent des raffinements isomorphes.*

Considérons maintenant un groupe polycyclique G ; soit $(A_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ une série de G à quotients cycliques. Raffinons cette série en intercalant entre A_{k+1} et A_k (pour un indice k donné) un sous-groupe H ($A_{k+1} \lhd H \lhd A_k$, $A_{k+1} \neq H$, $A_k \neq H$). La série reste à quotients cycliques. On peut aussi remarquer que ce raffinement n'a pas modifié le nombre de quotients cycliques infinis dans la série. C'est clair si A_k/A_{k+1} est fini ; si A_k/A_{k+1} est infini, A_k/H est cyclique fini, H/A_{k+1} est cyclique infini, d'où encore le résultat. Tout raffinement pouvant s'obtenir par adjonctions successives d'un sous-groupe, on en déduit que le nombre de quotients cycliques infinis ne change pas si l'on remplace une série par un de ses raffinement. De plus, deux séries isomorphes de G à quotients cycliques possèdent bien entendu le même nombre de quotients cycliques infinis. Il en résulte que deux séries quelconques de G à quotients cycliques possèdent le même nombre de quotients cycliques infinis : en effet, ce nombre étant conservé par raffinement et par isomorphisme, il suffit de considérer des raffinements isomorphes de ces deux séries. On peut donc énoncer :

Définition 6.1 *Dans un groupe polycyclique, le nombre de quotients cycliques infinis dans une série à quotients cycliques ne dépend pas de la série choisie ; ce nombre, noté $h(G)$, est appelé la longueur de Hirsch de G.*

Si G est un groupe polycyclique, il est clair que $h(G) = 0$ si et seulement si G est fini. De plus, si H est un sous-groupe normal de G, en considérant des séries à quotients cycliques de H et de G/H, on montre facilement l'égalité

$$h(H) + h(G/H) = h(G).$$

La longueur de Hirsch d'un groupe polycyclique est un paramètre souvent utilisé pour raisonner par récurrence. Le résultat qui suit en est une illustration.

Proposition 6.4 *Soit G un groupe polycyclique. Si chaque quotient fini G/H ($H \trianglelefteq G$) est nilpotent, alors G est nilpotent.*

Démonstration. Soit h la longueur de Hirsch de G. Si $h = 0$, G est fini et le résultat est immédiat. Si $h > 0$, supposons le résultat établi pour les groupes polycycliques de longueur de Hirsch au plus $h-1$ et utilisons le Corollaire 6.3 : G contient un sous-groupe normal abélien sans torsion infini $A \simeq \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (on notera k le nombre de termes de cette somme). Chaque quotient fini de G étant nilpotent, il en est de même pour G/A ; de plus $h(G/A) < h(G)$, donc G/A est nilpotent d'après l'hypothèses de récurrence. Par un raisonnement analogue, si p est un nombre premier quelconque, on vérifie que G/A^p est nilpotent. Si c désigne la classe de nilpotence de G/A, on a $[x_1, \ldots, x_{c+1}] \in A$ pour tout $x_1, \ldots, x_{c+1} \in G$ d'où l'inclusion $\gamma_{c+1}(G/A^p) \subseteq (A/A^p)$. Dans A/A^p, d'ordre p^k, toute

chaîne de sous-groupes est de longueur au plus k. Il en résulte que $\gamma_{c+k+1}(G/A^p) = \{1\}$; en d'autres termes, on a l'inclusion $\gamma_{c+k+1}(G) \subseteq A^p$ (notons que c et k ne dépendent pas de p). Or, si p décrit l'ensemble des nombres premiers, l'intersection des sous-groupes A^p est réduite à l'unité. On en déduit l'égalité $\gamma_{c+k+1}(G) = \{1\}$, ce qui prouve la nilpotence de G. □

Donnons une application de ce résultat :

Proposition 6.5 *Le sous-groupe de Frattini d'un groupe polycyclique est nilpotent.*

Démonstration. Soient $\Phi(G)$ le sous-groupe de Frattini d'un groupe polycyclique G et H un sous-groupe normal de $\Phi(G)$, d'indice fini dans $\Phi(G)$. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $\Phi(G)/H$ est nilpotent. Si $\Phi(G)/H$ est d'exposant e, posons $K = \Phi(G)^e$. Le sous-groupe K est caractéristique dans $\Phi(G)$ (donc normal dans G) et inclus dans H. Il est clair que $\Phi(G/K) = \Phi(G)/K$. De plus, le groupe $\Phi(G)/K$ étant périodique, résoluble et de type fini, il est fini d'après le Lemme 6.1. Le sous-groupe de Frattini de G/K étant fini, il est nilpotent (Proposition 4.3). La nilpotence de $\Phi(G)/K$ entraîne la nilpotence de $\Phi(G)/H$ (car K est inclus dans H), d'où le résultat. □

Chapitre 7

Propriétés résiduelles

Soit G un groupe quelconque. Par définition, si l'intersection des sous-groupes $H \trianglelefteq G$ tels que G/H soit fini est réduite à l'unité, on dit que G est *résiduellement* fini. Clairement, les groupes finis sont résiduellement finis ; on peut aussi facilement vérifier qu'il en est de même pour le groupe cyclique infini (*i.e.* le groupe additif $\mathbb{Z}$). Cette définition se généralise de la manière suivante :

Définition 7.1 *Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G est résiduellement dans $\mathcal{C}$ si l'intersection des sous-groupes $H \trianglelefteq G$ tels que G/H soit dans $\mathcal{C}$ est réduite à l'unité.*

Remarque. On montre aisément qu'un groupe G est résiduellement nilpotent si et seulement si $\bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(G) = \{1\}$.

Proposition 7.1 *Les groupes polycycliques sont résiduellement finis.*

Démonstration. Soit G un groupe polycyclique de longueur de Hirsch $\mathrm{h}(G) = h$. Si $h = 0$, G est fini d'où le résultat. Si $h > 0$, supposons le résultat établi pour les groupes polycycliques de longueur de Hirsch au plus $h - 1$. D'après le Corollaire 6.3, G contient un sous-groupe normal abélien sans torsion infini $A \simeq \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n > 0$, le sous-groupe infini $A^n \simeq n\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus n\mathbb{Z}$ est caractéristique dans A, donc normal dans G. De plus, on a

$$h = \mathrm{h}(G) = \mathrm{h}(G/A^n) + \mathrm{h}(A^n) > \mathrm{h}(G/A^n),$$

donc G/A^n est résiduellement fini d'après l'hypothèse de récurrence. Les sous-groupes normaux d'indices de G/A^n sont de la forme H/A^n ($A^n \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, avec $(G/A^n)/(H/A^n)$ fini ; mais $(G/A^n)/(H/A^n) \simeq G/H$, donc $(G/A^n)/(H/A^n)$ fini équivaut à G/H fini. L'intersection des sous-groupes de G/A^n de la forme H/A^n étant réduite à l'unité, on en déduit que l'intersection des sous-groupes correspondants H est incluse dans A^n. *A fortiori*, l'intersection I des sous-groupes normaux d'indice fini de G est dans A^n (pour tout entier $n > 0$). Mais clairement, $\bigcap_{n>0} A^n \simeq \bigcap_{n>0} n\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus n\mathbb{Z}$ est réduit à l'unité, d'où $I = \{1\}$, ce qui prouve que G est résiduellement fini. $\square$

On sait que si chaque quotient fini d'un groupe polycyclique est nilpotent, alors ce groupe est nilpotent (*cf.* Proposition 6.4). Comme conséquence de la proposition précédente, on obtient un renseignement sur la classe de nilpotence :

Corollaire 7.1 *Soit G un groupe polycyclique. Si chaque quotient fini G/H ($H \trianglelefteq G$) est nilpotent, de classe inférieure ou égale à un entier c fixé, alors G est nilpotent de classe inférieure ou égale à c.*

Démonstration. Pour tout sous-groupe $H \trianglelefteq G$ d'indice fini et pour tout $x_1, \ldots, x_{c+1} \in G$, on a $[x_1, \ldots, x_{c+1}] \in H$. L'intersection des sous-groupes H étant réduite à l'unité, on en déduit que $[x_1, \ldots, x_{c+1}] = 1$, d'où le résultat. □

Un groupe nilpotent de type fini étant polycyclique (Corollaire 6.1), il est résiduellement fini ; mais si ce groupe est sans torsion, on va prouver un résultat plus précis :

Proposition 7.2 *Soit G un groupe nilpotent de type fini sans torsion. Pour chaque nombre premier p fixé, G est résiduellement un p-groupe fini.*

Lemme 7.1 *Soit G un groupe nilpotent, de centre $\zeta(G)$. Si G est sans torsion, il en est de même pour $G/\zeta(G)$.*

Démonstration. Soit T le sous-groupe normal de G tel que $T/\zeta(G)$ soit le sous-groupe de torsion de $G/\zeta(G)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que le groupe $T/\zeta(G)$ ne soit pas réduit à l'unité ; il en est alors de même pour le groupe $(T \cap \zeta_2(G))/\zeta(G)$ (Proposition 3.1 appliquée au groupe $G/\zeta(G)$). Soient x un élément de $(T \cap \zeta_2(G)) \setminus \zeta(G)$ et $e > 0$ un entier tel que $x^e \in \zeta(G)$. Pour tout $y \in G$, on a $[y, x^e] = 1$. Mais x étant dans $\zeta_2(G)$, il est facile de voir avec la relation (2) de la Proposition 1.3 que $[y, x^e] = [y, x]^e$, d'où l'égalité $[y, x]^e = 1$. Le groupe G étant sans torsion, on en déduit l'égalité $[y, x] = 1$ d'où $x \in \zeta(G)$, ce qui contredit le choix de x. □

Démonstration de la Proposition 7.2. Effectuons une récurrence sur la classe de nilpotence c de G.
Si $c = 1$, G est abélien, de type fini, sans torsion : il est donc isomorphe à un produit direct de la forme $\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. Clairement, pour tout entier $e > 0$, $(\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z})/(p^e\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus p^e\mathbb{Z})$ est un p-groupe fini et $\bigcap_{e>0}(p^e\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus p^e\mathbb{Z})$ est réduit à l'unité, d'où le résultat pour $c = 1$.
Supposons maintenant le résultat établi jusqu'à $c-1$ et considérons un élément arbitraire x dans $G \setminus \{1\}$. Il faut montrer l'existence d'un sous-groupe $H \triangleleft G$ ne contenant pas x et tel que G/H soit un p-groupe fini.
Supposons d'abord $x \notin \zeta(G)$. Le groupe quotient $G/\zeta(G)$ est nilpotent de classe $c - 1$, de type fini et sans torsion d'après le lemme précédent. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : la classe de x modulo $\zeta(G)$ n'étant pas égale à l'unité, il existe un sous-groupe $H \triangleleft G$ contenant $\zeta(G)$ tel que $H/\zeta(G)$ ne contiennent pas la classe de x, le quotient de $G/\zeta(G)$ par $H/\zeta(G)$ étant un p-groupe fini. On en déduit que H ne contient pas x et que G/H est un p-groupe fini, ce qui permet de conclure dans ce cas.
Supposons maintenant $x \in \zeta(G)$. Le sous-groupe $\zeta(G)$ est abélien, sans torsion ; il est de plus de type fini, car G étant nilpotent et de type fini, G vérifie la condition maximale (Proposition 5.3). Il existe donc un sous-groupe $H_0 \triangleleft \zeta(G)$ tel que $\zeta(G)/H_0$ soit un p-groupe fini, avec $x \notin H_0$. Soit H un sous-groupe normal de G, tel que $H_0 \leq H$ et $x \notin H$, maximal pour ces propriétés : un tel sous-groupe existe car G vérifie la condition maximale (l'existence de H peut aussi se déduire du lemme de Zorn). La classe de x modulo H n'est pas l'unité et G/H est résiduellement fini d'après la Proposition 7.1 : il

existe donc un sous-groupe $K \triangleleft G$ d'indice fini dans G et tel que $x \notin K$. Par maximalité de H, cela entraîne $H = K$, donc G/H est fini. De plus, G/H est nilpotent, donc isomorphe au produit direct de ses sous-groupes de Sylow. Soit q un nombre premier qui divise l'ordre de G/H ; il existe un sous-groupe $S(q) \triangleleft G$ contenant H tel que $S(q)/H$ soit le q-sous-groupe de Sylow de G/H. Par maximalité de H, $S(q)$ contient x, donc la classe de x dans G/H est d'ordre une puissance de q.
Soit p^e l'ordre de la classe de x dans $\zeta(G)/H_0$. On a $x^{p^e} \in H_0$, d'où *a fortiori* $x^{p^e} \in H$: il en résulte que la classe de x dans G/H est d'ordre une puissance de p. Si p et q étaient distincts, la classe de x dans G/H serait l'élément neutre ce qui est exclu ($x \notin H$). Donc $q = p$, ce qui montre que p est le seul nombre premier qui divise l'ordre de G/H, d'où la conclusion. □

Corollaire 7.2 *Soit G un groupe nilpotent sans torsion. Soient m et n deux entiers non nuls. Pour x et y dans G, on a les implications :*

(i) $[x^m, y^n] = 1 \Rightarrow [x, y] = 1$;

(ii) $x^n = y^n \Rightarrow x = y$.

Démonstration. (i). Soit p un nombre premier qui ne divise pas mn. Quitte à remplacer G par $\langle x, y\rangle$, on peut supposer G de type fini. D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que pour tout sous-groupe $H \trianglelefteq G$ tel que G/H soit un p-groupe fini, on a $[x, y] \in H$. Si H est un tel sous-groupe, supposons que G/H est d'exposant p^e. D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers a, b, c, d vérifiant $am + bp^e = 1$ et $cn + dp^e = 1$. L'hypothèse $[x^m, y^n] = 1$ est équivalente à la commutativité du sous-groupe $\langle x^m, y^n\rangle$; on en déduit que x^{am} et y^{cn} commutent. Mais $x^{am} = xx^{-bp^e}$ et $x^{-bp^e} \in H$, donc les classes de x^{am} et de x modulo H coïncident ; il en est de même pour les classes de y^{cn} et de y. Il en résulte que les classes de x et y dans G/H commutent, d'où $[x, y] \in H$.
(ii) Si $x^n = y^n$, alors $[x^n, y^n] = 1$, d'où $[x, y] = 1$ d'après (i). Or, si x et y commutent, on a $1 = x^n y^{-n} = (xy^{-1})^n$, d'où $xy^{-1} = 1$ puisque G est sans torsion. □

Les groupes libres [1] sont très éloignés des groupes finis ou des groupes nilpotents. Il sont pourtant résiduellement finis et résiduellement nilpotents comme on va le montrer.

Proposition 7.3 *Pour chaque premier p fixé, les groupes libres sont résiduellement des p-groupes finis.*

Démonstration. Soit F le groupe libre construit sur une famille non vide S d'indéterminées. Il faut montrer que pour tout élément X dans $F \setminus \{1\}$, il existe un sous-groupe $H \trianglelefteq F$ ne contenant pas X et tel que F/H soit un p-groupes fini.
Soient $X_1, \ldots, X_d \in S$ les indéterminées qui interviennent dans l'écriture réduite de X ; on a donc une égalité de la forme $X = X_{\varphi(1)}^{\epsilon(1)} \ldots X_{\varphi(n)}^{\epsilon(n)}$, où $\epsilon(1), \ldots, \epsilon(n)$ sont des entiers - positifs ou négatifs - non nuls et où $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ sont des éléments de $\{1, \ldots, c\}$ tels que $\varphi(j) \neq \varphi(j+1)$ pour $j = 1, \ldots, n-1$. Soit $e > 0$ un entier choisi assez grand pour que p^e ne divise pas le produit $\epsilon(1) \ldots \epsilon(n)$.
Notons $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ et G le groupe des matrices unitriangulaires supérieures de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ (*i.e.*

[1] Pour une définition et les principales propriétés de ces groupes, on pourra par exemple consulter [8] ou [10]

les matrices avec des $\overline{1}$ sur la diagonale, des $\overline{0}$ dans le triangle inférieur et des coefficients arbitraires dans le triangle supérieur). Ce groupe est d'ordre $p^{(1+2+\ldots+n)e}$; c'est donc un p-groupe fini. Si r et s sont des entiers compris entre 1 et $n+1$, $E_{r,s}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ dont le coefficient de la r-ième ligne et de la s-ième colonne est égal à $\overline{1}$, tous les autres coefficients étant nuls. Notons la relation $E_{r,s}E_{r',s'} = \delta_{s,r'}E_{r,s'}$, où $\delta_{s,r'}$ est le symbole de Kronecker ; il en résulte l'égalité $(I + E_{r,s})^t = I + tE_{r,s}$ si $r \neq s$.
Soit c un entier compris entre 1 et d. Considérons l'image réciproque de $\{c\}$ par l'application $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, d\}$; $\varphi^{-1}(c)$ est l'ensemble des "rangs" où apparaît l'indéterminée X_c dans l'écriture $X = X_{\varphi(1)}^{\epsilon(1)} \ldots X_{\varphi(n)}^{\epsilon(n)}$. L'écriture de X étant supposé réduite, $\varphi^{-1}(c)$ ne peut pas contenir deux entiers consécutifs. Le produit des matrices de la forme $I + E_{j,j+1}$ ($j \in \varphi^{-1}(c)$) ne dépend donc pas de l'ordre des facteurs et il est égal à $I + \sum_{j\in\varphi^{-1}(c)} E_{j,j+1}$; notons x_c ce produit.
Le groupe F est librement engendré par S ; il existe donc un homomorphisme de groupe $\Theta : F \to G$ tel que $\Theta(X_c) = x_c$ pour $c = 1, \ldots, d$, les images par Θ des autres éléments de S étant choisies arbitrairement dans G. Si l'on note H le noyau de Θ, F/H est isomorphe à un sous-groupe de G : c'est donc un p-groupe fini. Il suffit alors de montrer que X n'est pas dans H pour pouvoir conclure.
On a $\Theta(X) = I + M$, où M s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ des matrices de la forme $E_{r,s}$ ($r < s$) ; pour montrer que $\Theta(X) \neq I$, vérifions que le coefficient de $E_{1,n+1}$ est non nul. Si i est compris entre 1 et n, on a

$$\Theta(X_{\varphi(i)})^{\epsilon(i)} = x_{\varphi(i)}^{\epsilon(i)} = \left(\prod_{j\in\varphi^{-1}(\varphi(i))} (I + E_{j,j+1}) \right)^{\epsilon(i)},$$

d'où, puisque les facteurs commutent dans le produit,

$$\Theta(X_{\varphi(i)})^{\epsilon(i)} = \prod_{j\in\varphi^{-1}(\varphi(i))} (I + \epsilon(i)E_{j,j+1}) = I + \sum_{j\in\varphi^{-1}(\varphi(i))} \epsilon(i)E_{j,j+1}.$$

Il en résulte l'égalité :

$$\Theta(X) = \prod_{i=1}^{n} \Theta(X_{\varphi(i)})^{\epsilon(i)} = \prod_{i=1}^{n} \left(I + \sum_{j\in\varphi^{-1}(\varphi(i))} \epsilon(i)E_{j,j+1} \right).$$

La seule façon d'obtenir $E_{1,n+1}$ en développant ce produit est de multiplier le terme $\epsilon(1)E_{1,2}$ du premier facteur par le terme $\epsilon(2)E_{2,3}$ du deuxième facteur,..., jusqu'au terme $\epsilon(n)E_{n,n+1}$ du dernier facteur. Le coefficient de $E_{1,n+1}$ dans l'écriture de M comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ des matrices $E_{r,s}$ ($r < s$) est donc égal à $\overline{\epsilon(1)\ldots\epsilon(n)}$; d'après le choix de e, ce coefficient est non nul. On en déduit que la matrice M est non nulle d'où $\Theta(X) = I + M \neq I$. □

Corollaire 7.3 *Si F est un groupe libre, alors :*

(i) F est résiduellement fini ;

(ii) F est résiduellement nilpotent ;

(iii) $\bigcap_{n\geq 1} \gamma_n(F) = \{1\}$.

Par définition, on dit qu'un groupe G est *hopfien* si le seul sous-groupe $H \trianglelefteq G$ tel que G/H soit isomorphe à G est le sous-groupe unité. Il est facile de montrer que G est hopfien si et seulement si tout homomorphisme surjectif de G dans lui-même est nécessairement bijectif.
Un groupe fini est évidemment hopfien. Un groupe libre F construit sur une infinité d'indéterminées S n'est pas hopfien : en effet, si X_0 est un élément fixé de S, il existe une bijection σ de $S\backslash\{X_0\}$ sur S. L'homomorphisme $\varphi : F \to F$ défini par $\varphi(X) = \sigma(X)$ si $X \in S\backslash\{X_0\}$ et $\varphi(X_0) = 1$ est surjectif mais n'est pas injectif. Par contre, nous verrons qu'un groupe libre construit sur un nombre fini d'indéterminées est hopfien.

Proposition 7.4 *Un groupe résiduellement fini de type fini est hopfien.*

Démonstration. Soient G un groupe vérifiant les hypothèses de la proposition et $\varphi : G \to G$ un homomorphisme surjectif. Raisonnons par l'absurde en supposant φ non injectif. Soit $x \in \ker\varphi\backslash\{1\}$. Le groupe G étant résiduellement fini, il existe un sous-groupe $H \triangleleft G$ d'indice fini dans G tel que $x \notin H$.
Remarquons maintenant qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homomorphismes ψ de G dans G/H : en effet, si $a_1, \ldots, a_m$ engendre G, ψ est uniquement déterminé par les images $\psi(a_1), \ldots, \psi(a_m)$. Mais $\psi(a_i)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, d'où au plus $|G : H|^m$ homomorphismes. Soit $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ l'ensemble des homomorphismes de G dans G/H. Notons π la projection canonique de G sur $G/\ker\varphi$ et $\overline{\varphi}$ l'isomorphisme de $G/\ker\varphi$ sur G induit par φ. Les homomorphismes $\psi_i \circ \overline{\varphi} \circ \pi : G \to G/H$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont tous distincts car $\overline{\varphi} \circ \pi$ est surjectif ; on a donc ainsi tous les homomorphismes de G dans G/H. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\psi_k \circ \overline{\varphi} \circ \pi$ soit la projection canonique de G sur G/H. L'image de x par cette projection n'est pas égale à l'élément neutre de G/H car x n'est pas dans H. Cependant, $\pi(x)$ est l'élément neutre de $G/\ker\varphi$ car x est dans $\ker\varphi$; il en résulte que $\psi_k(\overline{\varphi}(\pi(x)))$ est égal à l'élément neutre de G/H, d'où une contradiction. $\square$

Un groupe libre étant résiduellement fini, on obtient :

Corollaire 7.4 *Un groupe libre construit sur un nombre fini d'indéterminées est hopfien.*

Chapitre 8

Nilpotence locale

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille infinie de groupes nilpotents. Si c_i désigne la classe de G_i, on suppose que la famille $(c_i)_{i\in I}$ n'est pas bornée. Dans ces conditions, le produit direct restreint des G_i (pour $i \in I$) n'est pas nilpotent (sinon, sa classe de nilpotence serait un majorant des c_i). Par contre, un sous-groupe de type fini du produit direct restreint des G_i est nécessairement nilpotent (un tel sous-groupe est isomorphe à un sous-groupe du produit direct d'une sous-famille finie de $(G_i)_{i\in I}$). Dans ces conditions, on dit que le produit direct restreint des G_i est *localement* nilpotent.

Définition 8.1 *Si tous les sous-groupes de type fini d'un groupe G sont nilpotents, on dit que G est localement nilpotent.*

Il est facile de voir que le produit direct restreint d'une famille quelconque de groupes localement nilpotents est encore localement nilpotent.
La définition précédente peut se généraliser de la façon suivante : si $\mathcal{C}$ est une classe de groupes, on dit qu'un groupe G est *localement* dans $\mathcal{C}$ si les sous-groupes de type fini de G sont dans $\mathcal{C}$. On parlera ainsi de groupes localement finis, localement résolubles,...
Notre premier résultat est à rapprocher du théorème de Fitting (*cf.* Proposition 3.7) :

Proposition 8.1 *(Théorème de Hirsch-Plotkin). Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes normaux d'un groupe G. Si ces sous-groupes sont localement nilpotents, alors $\langle (H_i)_{i\in I}\rangle$ est localement nilpotent.*

Précisons d'abord une notation : si S est une partie non vide d'un groupe G, on note S^G le sous-groupe de G engendré par tous les conjugués des éléments de S. Ce sous-groupe est appelé la *clôture normale* de S dans G. Il est clair qu'au sens de l'inclusion, S^G est le plus petit sous-groupe normal de G contenant S ; c'est aussi l'intersection des sous-groupes normaux de G contenant S.

Lemme 8.1 *Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G, respectivement engendrés par R et S. Soit T l'ensemble des éléments de la forme $[a, b]$ ($a \in R$, $b \in S$). On a alors l'inclusion $[A, B] \leq \langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'un élément de la forme $[a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\alpha_s}]$ ($a_i \in R$, $b_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in \{-1, 1\}$) est dans $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$.

Cas particulier : $r = 1$, $\alpha_1 = 1$. Dans ce cas, montrons à l'aide d'une récurrence sur s que $[a, b] = [a_1, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\alpha_s}]$ est dans $T^{\langle B,T\rangle}$. Pour $s = 1$,

$$[a_1, b_1^{\beta_1}] = b_1^{(1-\beta_1)/2}[a_1, b_1]^{\beta_1} b_1^{(\beta_1-1)/2}$$

est dans $T^{\langle B,T\rangle}$. Si maintenant l'on suppose que $[a_1, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}]$ est dans $T^{\langle B,T\rangle}$, l'égalité

$$[a_1, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s} b_{s+1}^{\beta_{s+1}}] = [a_1, b_{s+1}^{\beta_{s+1}}] b_{s+1}^{-\beta_{s+1}} [a_1, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}] b_{s+1}^{\beta_{s+1}}$$

montre qu'il en est de même pour $[a_1, b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s} b_{s+1}^{\beta_{s+1}}]$, ce qui termine la récurrence.

Cas général : posons $a = a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r}$ et $b = b_1^{\beta_1} \dots b_s^{\beta_s}$. On a

$$\begin{aligned}
[a, b] &= a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r} b \\
&= a^{-1}b^{-1}a_1^{\alpha_1} b \dots b^{-1}a_r^{\alpha_r} b \\
&= a^{-1}a_1^{\alpha_1}[a_1^{\alpha_1}, b] \dots a_r^{\alpha_r}[a_r^{\alpha_r}, b] \\
&= a^{-1}a_1^{\alpha_1} a_1^{(1-\alpha_1)/2}[a_1, b] a_1^{(\alpha_1-1)/2} \dots a_r^{\alpha_r} a_r^{(1-\alpha_r)/2}[a_r, b] a_r^{(\alpha_r-1)/2}.
\end{aligned}$$

Les éléments $[a_1, b], \dots, [a_1, b]$ sont dans $T^{\langle B,T\rangle}$, donc $[a, b]$ est dans $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$. □

Démonstration de la Proposition 8.1.

Cas particulier : I est fini. Dans ce cas, il suffit en fait de montrer que si deux sous-groupes normaux H et K sont localement nilpotents, il en est de même pour HK : par récurrence, il est ensuite facile de montrer que si $H_1, \dots, H_k$ sont des sous-groupes normaux localement nilpotents, alors $\langle H_1, \dots, H_k\rangle = H_1 \dots H_k$ est localement nilpotent. Pour établir que HK est localement nilpotent, considérons n éléments arbitraires $x_1, \dots, x_n \in HK$; pour $i = 1, \dots, n$, on a donc $x_i = a_i b_i$, avec $a_i \in H$, $b_i \in K$. Posons $A = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $B = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$ et montrons que $\langle A, B\rangle$ est nilpotent : en effet, si tel est le cas, l'inclusion $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \leq \langle A, B\rangle$ montre que $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ est nilpotent, ce qui permet de conclure. Soit T l'ensemble des éléments de la forme $[a_i, b_j]$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Clairement, T est contenu dans H et K car ces sous-groupes sont normaux dans G. En particulier, $\langle B, T\rangle$ est un sous-groupe de type fini de K ; il est donc nilpotent. On en déduit que le sous-groupe $T^{\langle B,T\rangle} \leq \langle B, T\rangle$ est de type fini (*cf.* Proposition 5.3), d'où il résulte que $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$ est lui aussi de type fini. De plus, $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$ est un sous-groupe de H, donc $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$ est nilpotent. Or, d'après le lemme précédent, $[A, B]$ est un sous-groupe de $\langle T^{\langle B,T\rangle}, A\rangle$, donc $[A, B]$ est de type fini (*cf.* Proposition 5.3). Il en est alors de même pour le sous-groupe $\langle A, [A, B]\rangle = A^{\langle A,B\rangle}$; de plus, $A^{\langle A,B\rangle} \leq H$, donc $A^{\langle A,B\rangle}$ est nilpotent. On montre de façon analogue que $B^{\langle A,B\rangle}$ est nilpotent. Mais $A^{\langle A,B\rangle}$ et $B^{\langle A,B\rangle}$ sont des sous-groupes normaux de $\langle A, B\rangle$, donc d'après le théorème de Fitting (Proposition 3.7), $A^{\langle A,B\rangle} B^{\langle A,B\rangle} = \langle A, B\rangle$ est nilpotent.

Cas général : considérons n éléments $x_1, \dots, x_n$ dans $\langle (H_i)_{i\in I}\rangle$. En fait, chaque x_j s'écrit comme le produit d'un nombre fini d'éléments choisis dans un des H_i. Il existe donc une partie finie $J \subseteq I$ telle que $\langle (H_i)_{i\in J}\rangle$ contienne tous les éléments $x_1, \dots, x_n$. On est ainsi ramené au cas particulier précédent : $\langle (H_i)_{i\in J}\rangle$ est localement nilpotent, d'où la nilpotence de $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. □

Une conséquence importante du théorème de Hirsch-Plotkin est la suivante : dans un groupe quelconque G, l'ensemble des sous-groupes normaux localement nilpotents possède un unique élément maximal. Cet élément est le sous-groupe engendré par tous les

sous-groupes normaux localement nilpotents de G ; il est appelé le *radical de Hirsch-Plotkin* du groupe G.

Certaines propriétés des groupes nilpotents s'étendent aux groupes localement nilpotents : par exemple, il est facile de voir qu'un tel groupe possède un sous-groupe de torsion (*i.e.* l'ensemble des éléments d'ordres finis forme un sous-groupe). Par contre, il existe des groupes localement nilpotents qui ne vérifient pas la condition du normalisateur (*cf.* [3] ou [10]). On a cependant :

Proposition 8.2 *Si M est un sous-groupe maximal d'un groupe localement nilpotent G, alors M est normal dans G.*

Démonstration. Supposons que M ne soit pas normal dans G. Les sous-groupes de G contenant G' sont tous normaux (Proposition 2.1), donc $G' \not\subseteq M$. Considérons un élément a dans $G' \setminus M$. On a l'égalité $\langle M, a\rangle = G$ car a n'est pas dans M. De plus, a étant dans G', il s'écrit comme un produit de commutateurs d'un certain nombre d'éléments de G ; en d'autres termes, si l'on note $x_1, \ldots, x_n$ ces éléments, a est dans le sous-groupe dérivé de $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Mais chaque élément x_i s'écrit sous la forme d'un produit où n'interviennent que a, a^{-1} et un nombre fini d'éléments de M. Soit $\{y_1, \ldots, y_m\}$ la réunion des éléments de M qui interviennent dans l'écriture de $x_1, \ldots, x_n$. On a l'inclusion $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \leq \langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$, donc a est dans $\langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle'$.
Remarquons maintenant que l'ensemble $\mathcal{E}$ des sous-groupes propres de $\langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$ contenant $\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$ est non vide : $\langle y_1, \ldots, y_m\rangle \neq \langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$ (car sinon $a \in \langle y_1, \ldots, y_m\rangle$, d'où $a \in M$, ce qui est exclu), donc $\langle y_1, \ldots, y_m\rangle \in \mathcal{E}$. De plus, il est facile de vérifier que $\mathcal{E}$ est ordonné inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ contient donc un élément maximal, noté N. En d'autres termes, N est un sous-groupe maximal de $\langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$ qui contient $\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$. Or, le sous-groupe $\langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$ est nilpotent car il est de type fini ; dans un groupe nilpotent, le sous-groupe dérivé est inclus dans le sous-groupe de Frattini (Corollaire 3.2), d'où *a fortiori* l'inclusion $\langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle' \leq N$. Il en résulte que N contient a ; mais N contient aussi $\{y_1, \ldots, y_m\}$, d'où $N = \langle y_1, \ldots, y_m, a\rangle$, ce qui est contradictoire. □

Terminons par une condition suffisante pour qu'un groupe soit localement nilpotent :

Proposition 8.3 *Si G est un groupe vérifiant la condition du normalisateur, alors G est localement nilpotent.*

Démonstration. Soit a un élément quelconque de G. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-groupes localement nilpotents de G qui contiennent a. Cet ensemble est non vide (il contient $\langle a\rangle$). Vérifions qu'il est ordonné inductif : si $(E_i)_{i\in I}$ est une chaîne d'éléments de $\mathcal{E}$, $\bigcup_{i\in I} E_i$ est un sous-groupe de G contenant a. Il reste à montrer que $\bigcup_{i\in I} E_i$ est localement nilpotent pour obtenir un majorant dans $\mathcal{E}$ de la chaîne $(E_i)_{i\in I}$. Pour cela, considérons des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $\bigcup_{i\in I} E_i$ et montrons que $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ est nilpotent. A chaque élément x_i $(i = 1, \ldots, n)$ on peut associer un élément E_{j_i} $(j_i \in I)$ tel que $x_i \in E_{j_i}$. Si E_j est le plus grand élément de la chaîne $\{E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\}$, E_j est localement nilpotent et il contient $\{x_1, \ldots, x_n\}$, d'où la nilpotence de $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.
En appliquant le lemme de Zorn à $\mathcal{E}$, on en déduit l'existence d'un sous-groupe localement nilpotent maximal M qui contient a. Si N_1 désigne le normalisateur de M dans G et N_2 le normalisateur de N_1 dans G, on a les inclusions $M \leq N_1 \leq N_2$. Il est clair que

pour tout $x \in N_2$, M et M^x sont des sous-groupes localement nilpotents normaux dans N_1 ; donc, d'après le théorème de Hirsch-Plotkin, MM^x est localement nilpotent, d'où $MM^x = M$ par maximalité de M. En d'autres termes, on a l'inclusion $M^x \leq M$ pour tout $x \in N_2$, ce qui entraîne l'égalité $N_1 = N_2$. D'après l'hypothèse, un sous-groupe propre de G est distinct de son normalisateur, donc $N_1 = G$ (*i.e.* M est normal dans G). En définitive, on a montré que tout élément $a \in G$ appartient à un sous-groupe localement nilpotent M, normal dans G. Il en résulte que G coïncide avec son radical de Hirsch-Plotkin, donc G est localement nilpotent. $\square$

Il a été signalé plus haut l'existence de groupes localement nilpotents ne satisfaisant pas la condition du normalisateur : la proposition précédente n'admet donc pas de réciproque.

Bibliographie

[1] G. Baumslag, *Lecture notes on nilpotent groups*, A.M.S., Providence, 1971.

[2] M. Hall, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959.

[3] M. Kargapolov, I. Merzliakov, *Eléments de la théorie des groupes*, Editions Mir, Moscou, 1985.

[4] O.H. Kegel, B.A.F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[5] E.I. Khukhro, V.D. Mazurov, *The Kourovka Notebook (Unsolved problems in group theory)*, Russian Acad. Sc., Novosibirsk, 1992.

[6] A.I. Kostrikin, *Around Burnside*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[7] A.G. Kurosh, *The theory of groups* (2 vol.), Chelsea, New York, 1960.

[8] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[9] D.J.S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups* (2 vol.), Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[10] D.J.S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[11] D. Segal, *Polycyclic groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[12] M.R. Vaughan-Lee, *The restricted Burnside problem*, London Math. Soc. Monographs, Oxford, 1990.

[13] R.B. Warfield, *Nilpotent groups*, Lect. Notes in Math. 513, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

On trouvera les bases de la théorie des groupes essentiellement dans [2], [3], [7] et [10].