

Application des Lignes TEM à la Réalisation des Fonctions Passives

2	Application des Lignes TEM à la Réalisation des Fonctions Passives.....	2
2.1	Matrice de Répartition	2
2.1.1	Matrice de Répartition d'un Réseau à 1 Port	2
2.1.2	Matrice de Répartition d'un Réseau à 2 Ports	5
2.1.3	Matrice de Répartition d'un Réseau à N Ports.....	6
2.1.4	Paramètres S d'un Réseau Passif Non Dissipatif.....	7
2.1.5	Matrice de Transmission.....	8
2.1.6	Déplacement du Plan de Référence	10
2.1.7	Relations entre les paramètres S, Z, Y et H.	11
2.2	Diviseurs de Puissance	12
2.2.1	Diviseur de Wilkinson	12
2.2.2	Coupleur à Branches	22
2.2.3	Coupleur à Lignes Couplées	30
2.2.4	Coupleur de Lange	31
2.2.5	Coupleur directif	33
2.2.6	Anneau Hybride	34
2.2.7	Diviseur résistif adapté	35
2.3	Abaque de Smith	36
2.4	Adaptation d'impédance.....	39
2.4.1	Réseaux en L.....	40
2.4.2	Adaptation avec Un Stub	43
2.4.3	Adaptation avec Deux Stubs	47
2.4.4	Equivalences Série-Parallèle.....	50
2.4.5	Facteur de Qualité sur Abaque de Smith	55
2.4.6	Critère de Bode-Fano	56

2 Application des Lignes TEM à la Réalisation des Fonctions Passives

2.1 Matrice de Répartition

Un réseau hyperfréquence linéaire peut être caractérisé par une matrice particulière, appelée matrice de répartition ou encore matrice $[S]$. Cette matrice s'obtient en décomposant la tension et le courant aux ports d'accès du réseau en ondes incidentes et réfléchies.

La popularité de la matrice de répartition pour la caractérisation des réseaux linéaires provient du fait que les termes de cette matrice sont plus facilement mesurables aux hyperfréquences. Cette matrice donne aussi des informations plus directes sur des paramètres utiles, tel le niveau d'adaptation des divers ports d'accès et les diverses fonctions de transfert du réseau, tel le gain et le niveau d'isolation.

2.1.1 Matrice de Répartition d'un Réseau à 1 Port

Pour introduire le concept de matrice de répartition, on considère tout d'abord le cas d'un réseau à un seul port d'accès:

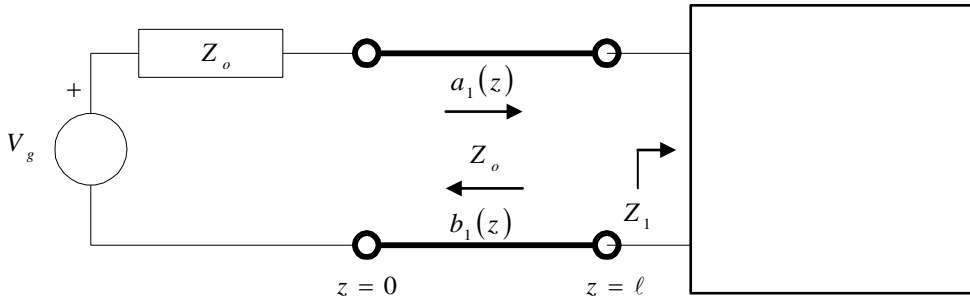


Figure 2-1: Paramètre S d'un réseau à un port

Où Z_o est l'impédance interne de la source, V_{+1} est la tension incidente au port, V_{-1} est la tension réfléchie au port, I_{+1} est le courant incident au port, et I_{-1} est le courant réfléchi au port.

Par analogie avec les équations 1-54 et 1-55, la tension V_1 et le courant I_1 , au port 1, sont exprimés comme la superposition d'ondes incidentes et réfléchies:

$$V_1(z) = V_{+1} e^{-\gamma \cdot z} + V_{-1} \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

$$I_1(z) = I_{+1} \cdot e^{-\gamma \cdot z} + I_{-1} \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

Puisque la source est adaptée, c'est-à-dire que l'impédance du générateur Z_g correspond à l'impédance caractéristique de la ligne de transmission Z_o reliant la source au réseau à un port, alors:

$$Z_g = Z_o \quad \Rightarrow \quad \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = 0 .$$

Et par conséquent, les équations 1-59 et 1-30 nous donne:

$$V_{+1} = \frac{1}{1 - \Gamma_c \cdot \Gamma_g \cdot e^{-2\gamma \cdot \ell_1}} \cdot V_g \cdot \frac{Z_o}{Z_o + Z_g} = \frac{V_g}{2} \quad \text{Equation 2-1}$$

$$I_{+1} = \frac{V_{+1}}{Z_o} = \frac{V_g}{2 \cdot Z_o} \quad \text{Equation 2-2}$$

Quant aux composantes réfléchies, nous avons d'après les équations 1-60 et 1-31:

$$V_{-1} = \Gamma_c \cdot e^{-2\gamma \cdot \ell_1} \cdot V_{+1} = \frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o} \cdot e^{-2\gamma \cdot \ell_1} \cdot V_{+1} \quad \text{Equation 2-3}$$

$$I_{-1} = -\frac{V_{-1}}{Z_o} = -\frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o} \cdot e^{-2\gamma \cdot \ell_1} \cdot \frac{V_{+1}}{Z_o} \quad \text{Equation 2-4}$$

Comme il s'agit d'un réseau linéaire, la réponse du circuit devrait être proportionnelle à l'excitation et par conséquent le rapport entre l'excitation et la réponse est suffisant pour caractériser le réseau. Dans le cas des paramètres S, le rapport de l'onde réfléchie sur l'onde incidente est suffisant pour caractériser le dispositif.

Aux bornes du réseau à un port d'accès, c'est-à-dire en $z = \ell_1$:

$$\frac{V_{-1}(\ell_1)}{V_{+1}(\ell_1)} = \frac{V_{-1} \cdot e^{+\gamma \cdot \ell_1}}{V_{+1} \cdot e^{-\gamma \cdot \ell_1}} = \frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o}$$

$$\frac{I_{-1}(\ell_1)}{I_{+1}(\ell_1)} = -\frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o}$$

Nous introduisons maintenant la notation normalisée:

$$v(z) = \frac{V(z)}{\sqrt{Z_o}} \quad i(z) = \sqrt{Z_o} \cdot I(z) \quad \text{Equation 2-5}$$

$$a(z) = \frac{V_{+}(z)}{\sqrt{Z_o}} \quad b(z) = \frac{V_{-}(z)}{\sqrt{Z_o}} \quad \text{Equation 2-6}$$

Nous avons alors:

$$v(z) = a(z) + b(z) \qquad i(z) = a(z) - b(z) \qquad \text{Equation 2-7}$$

$$b(z) = \Gamma(z) \cdot a(z) \qquad \text{Equation 2-8}$$

Si nous exprimons maintenant les ondes normalisées incidentes et réfléchies $a(z)$ et $b(z)$ en fonction des tensions et courants:

$$a(z) = \frac{1}{2} \cdot [v(z) + i(z)] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{Z_o}} \cdot [V(z) + Z_o \cdot I(z)]$$

$$b(z) = \frac{1}{2} \cdot [v(z) - i(z)] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{Z_o}} \cdot [V(z) - Z_o \cdot I(z)]$$

Dans le cas d'un réseau à un port d'accès, nous définissons le paramètre S_{11} tel que:

$$b_1(\ell_1) = S_{11} \cdot a_1(\ell_1) \qquad \text{Equation 2-9}$$

En fait, S_{11} correspond au rapport de la tension réfléchie sur la tension incidente aux bornes du réseau à un port d'accès, c'est-à-dire en $z = \ell_1$:

$$S_{11} = \frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o} \qquad \text{Equation 2-10}$$

S_{11} correspond donc au coefficient de réflexion de l'impédance équivalente du réseau à un port.

2.1.2 Matrice de Répartition d'un Réseau à 2 Ports

Dans le cas d'un réseau à deux ports d'accès, nous avons une onde incidente $a_1(\ell_1)$ et une onde réfléchie $b_1(\ell_1)$ au port 1, de même qu'une onde incidente $a_2(\ell_2)$ et une onde réfléchie $b_2(\ell_2)$ au port 2:

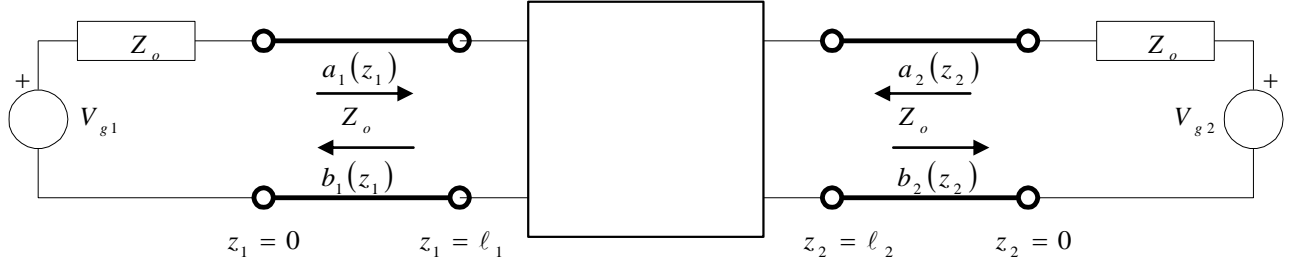


Figure 2-2: Paramètres S d'un réseau à deux ports

En généralisant l'équation 2-9, nous avons:

$$\begin{bmatrix} b_1(\ell_1) \\ b_2(\ell_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(\ell_1) \\ a_2(\ell_2) \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-11}$$

Il est important de noter que $a_1(\ell_1)$, $a_2(\ell_2)$, $b_1(\ell_1)$, et $b_2(\ell_2)$ correspondent aux valeurs des ondes incidentes et réfléchies aux bornes d'accès du réseau à deux ports. Les coefficients S_{11} , S_{12} , S_{21} et S_{22} , qui représentent les coefficients de réflexion et de transmission, sont appelés paramètres S.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-12}$$

Chacun de ces paramètres est un nombre complexe.

Dans le cas d'un réseau à deux ports d'accès, l'interprétation de chacun des quatre paramètres S se définit comme suit:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1(\ell_1)}{a_1(\ell_1)} \right|_{a_2(\ell_2)=0} \quad \text{Coefficient de réflexion à l'entrée lorsque la sortie est adaptée}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2(\ell_2)}{a_1(\ell_1)} \right|_{a_2(\ell_2)=0} \quad \text{Coefficient de transmission lorsque la sortie est adaptée}$$

$$S_{12} = \left. \frac{b_1(\ell_1)}{a_2(\ell_2)} \right|_{a_1(\ell_1)=0} \quad \text{Coefficient de transmission inverse lorsque l'entrée est adaptée}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2(\ell_2)}{a_2(\ell_2)} \right|_{a_1(\ell_1)=0} \quad \text{Coefficient de réflexion à la sortie lorsque l'entrée est adaptée}$$

Ces quatre paramètres S suffisent donc pour caractériser le comportement d'un réseau linéaire à deux ports d'accès à une fréquence spécifique. Comme les paramètres S d'un dispositif hyperfréquence varient avec la fréquence, il est nécessaire de connaître les quatre paramètres S à chaque fréquence d'intérêt.

L'avantage des paramètres S aux hyperfréquences provient du fait que leur mesure s'effectue à l'aide de source et de charge adaptées. Ainsi, pour mesurer les coefficients S_{11} et S_{21} , on dispose le générateur d'impédance interne Z_o (c'est-à-dire de même impédance que l'impédance caractéristique de la ligne de transmission reliant le générateur au port 1 du dispositif) au port 1 du dispositif, et une charge adaptée Z_o au port 2. Comme la charge est adaptée, on est assuré de la condition $a_2(\ell_2) = 0$ puisque toute onde se propageant vers la charge ne sera pas réfléchiée. Pour mesurer les coefficients S_{12} et S_{22} , on dispose le générateur au port 2, et la charge au port 1.

On remarquera également que les variables a et b représentant les ondes incidentes et réfléchies ont comme dimension une racine carrée de puissance. Il n'est donc pas surprenant de constater que ces variables sont liées aux puissances incidentes et réfléchies des ports 1 et 2 comme suit:

$$\begin{aligned} P_{+1} &= |a_1|^2 & P_{-1} &= |b_1|^2 \\ P_{+2} &= |a_2|^2 & P_{-2} &= |b_2|^2 \end{aligned} \quad \text{Equation 2-13}$$

2.1.3 Matrice de Répartition d'un Réseau à N Ports

Les résultats obtenus dans le cas d'un réseau à deux ports peuvent se généraliser à un réseau à N ports. La matrice \bar{S} obtenue est carrée, de dimension $N \times N$ et chacun de ses coefficients se définit comme suit:

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i(\ell_i)}{a_j(\ell_j)} \right|_{a_{k \neq j}(\ell_k)=0} \quad \text{Equation 2-14}$$

2.1.4 Paramètres S d'un Réseau Passif Non Dissipatif

Considérons le cas d'un réseau à 2 ports caractérisé par les équations:

$$b_1 = S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2$$

$$b_2 = S_{21} \cdot a_1 + S_{22} \cdot a_2$$

Ces équations proviennent de l'équation matricielle 2-11, où une écriture abrégée est utilisée pour les coefficients a_i et b_i .

En multipliant chaque équation par son complexe conjugué, on a:

$$|b_1|^2 = (S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2) \cdot (S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2)^*$$

$$|b_1|^2 = |S_{11}|^2 \cdot |a_1|^2 + S_{11} \cdot S_{12}^* \cdot a_1 \cdot a_2^* + |S_{12}|^2 \cdot |a_2|^2 + S_{12} \cdot S_{11}^* \cdot a_2 \cdot a_1^*$$

et

$$|b_2|^2 = (S_{21} \cdot a_1 + S_{22} \cdot a_2) \cdot (S_{21} \cdot a_1 + S_{22} \cdot a_2)^*$$

$$|b_2|^2 = |S_{21}|^2 \cdot |a_1|^2 + S_{21} \cdot S_{22}^* \cdot a_1 \cdot a_2^* + |S_{22}|^2 \cdot |a_2|^2 + S_{22} \cdot S_{21}^* \cdot a_2 \cdot a_1^*$$

Pour un réseau non dissipatif, la somme des puissances incidentes aux ports 1 et 2 doit être égale à la somme des puissances réfléchies à ces mêmes ports (équation 1-13):

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2$$

D'où, d'après les expressions de $|b_1|^2$ et de $|b_2|^2$ ci-dessus, il vient, tout calculs faits:

$$(1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2) \cdot |a_1|^2 + (1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2) \cdot |a_2|^2 + (S_{11} \cdot S_{12}^* + S_{21} \cdot S_{22}^*) \cdot a_1 \cdot a_2^* + (S_{12} \cdot S_{11}^* + S_{22} \cdot S_{21}^*) \cdot a_2 \cdot a_1^* = 0$$

Cette équation ne peut être satisfaite que si les termes entre parenthèse sont identiquement nuls, ce qui conduit aux relations suivantes:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1$$

Equation 2-15

$$S_{11} \cdot S_{12}^* + S_{21} \cdot S_{22}^* = 0$$

$$S_{12} \cdot S_{11}^* + S_{22} \cdot S_{21}^* = 0$$

Si le réseau est réciproque:

$$S_{12} = S_{21}$$

Et alors il en résulte:

$$|S_{22}| = |S_{11}|$$

Les équations 2-14 sont équivalentes à écrire sous forme matricielle:

$$(\bar{S}^*)^T \cdot \bar{S} = \bar{1}$$

Cette relation est générale et applicable à tout réseau non dissipatif à N ports.

2.1.5 Matrice de Transmission

La caractérisation d'un réseau linéaire à deux ports, par une matrice de transmission, consiste à prendre, dans les équations 2-11, a_1 et b_1 comme variables dépendantes, et b_2 et a_2 comme variables indépendantes.

En d'autres termes:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-16}$$

Où $\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ est la matrice de transmission du réseau.

La correspondance entre les matrices \bar{T} et \bar{S} s'obtient facilement:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{21}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & S_{12} - \frac{S_{11} \cdot S_{22}}{S_{21}} \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-17}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{21}}{T_{11}} & T_{22} - \frac{T_{21} \cdot T_{12}}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{11}} & -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-18}$$

Considérons maintenant deux réseaux linéaires à deux ports, caractérisés par leur matrice de répartition \bar{S}_a et \bar{S}_b , et connectés en chaîne.

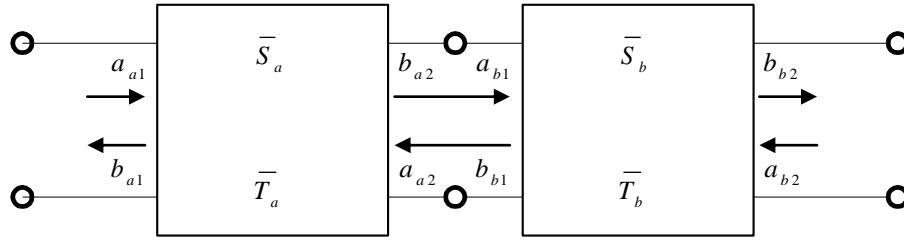


Figure 2-3: Chaîne de deux réseaux à deux ports

Après avoir déterminé les matrices de transmission \bar{T}_a et \bar{T}_b , on peut écrire pour ces deux réseaux:

$$\begin{bmatrix} a_{a1} \\ b_{a1} \end{bmatrix} = \bar{T}_a \cdot \begin{bmatrix} b_{a2} \\ a_{a2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{b1} \\ b_{b1} \end{bmatrix} = \bar{T}_b \cdot \begin{bmatrix} b_{b2} \\ a_{b2} \end{bmatrix}$$

D'après la connexion en chaîne des deux réseaux, nous avons:

$$\begin{bmatrix} b_{a2} \\ a_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{b1} \\ b_{b1} \end{bmatrix}$$

Ce qui entraîne:

$$\begin{bmatrix} a_{a1} \\ b_{a1} \end{bmatrix} = \bar{T}_a \cdot \bar{T}_b \cdot \begin{bmatrix} b_{b2} \\ a_{b2} \end{bmatrix}$$

C'est à dire:

$$\bar{T}_{chaîne} = \bar{T}_a \cdot \bar{T}_b \quad \text{Equation 2-19}$$

La matrice de transmission de réseau résultant est donc égale au produit des matrices de transmission des réseaux individuels. Cette propriété se généralise directement à une chaîne constituée d'un nombre quelconque de réseaux à 2 ports. Une fois la matrice de transmission résultante obtenue, il est facile de calculer la matrice de répartition résultante.

2.1.6 Déplacement du Plan de Référence

A la section 2.1.2, nous avons défini les paramètres S aux bornes du dispositif, soit en $z_1 = \ell_1$ et $z_2 = \ell_2$. En effet, lors de la définition de paramètres S, il est important de spécifier les positions de définition. Ces positions sont appelées plans de référence. Lors de la mesure des paramètres S d'un dispositif, des lignes de transmission sont requises pour relier le dispositif sous test à l'appareil de mesure. Par conséquent, l'appareil mesure les paramètres S aux positions $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$ alors que nous désirons caractériser notre dispositif aux plans de référence $z_1 = \ell_1$ et $z_2 = \ell_2$.

$$\begin{bmatrix} b_1(\ell_1) \\ b_2(\ell_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(\ell_1) \\ a_2(\ell_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix}$$

La relation entre les variables a_i b_i en différentes positions le long de l'axe z_i est définie par un déphasage sous la forme $e^{\mp \gamma \cdot \ell_i}$.

$$b_1(\ell_1) = b_1(0) \cdot e^{\gamma \cdot \ell_1} \qquad a_1(\ell_1) = a_1(0) \cdot e^{-\gamma \cdot \ell_1}$$

$$b_2(\ell_2) = b_2(0) \cdot e^{\gamma \cdot \ell_2} \qquad a_2(\ell_2) = a_2(0) \cdot e^{-\gamma \cdot \ell_2}$$

D'où:

$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \ell_1} & S_{12} \cdot e^{-\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} \\ S_{21} \cdot e^{-\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} & S_{22} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \ell_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \ell_1} & S_{12} \cdot e^{-\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} \\ S_{21} \cdot e^{-\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} & S_{22} \cdot e^{-2 \cdot \gamma \cdot \ell_2} \end{bmatrix}$$

Equation 2-20

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} \cdot e^{2 \cdot \gamma \cdot \ell_1} & S'_{12} \cdot e^{\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} \\ S'_{21} \cdot e^{\gamma \cdot (\ell_1 + \ell_2)} & S'_{22} \cdot e^{2 \cdot \gamma \cdot \ell_2} \end{bmatrix}$$

Equation 2-21

2.1.7 Relations entre les paramètres S, Z, Y et H.

	S	Z	Y	ABCD
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11} - Z_o) \cdot (Z_{22} + Z_o) - Z_{12} Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_o - Y_{11}) \cdot (Y_o + Y_{22}) + Y_{12} Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{A + \frac{B}{Z_o} - CZ_o - D}{A + \frac{B}{Z_o} + CZ_o + D}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2 \cdot Z_{12} Z_o}{\Delta Z}$	$\frac{-2 \cdot Y_{12} Y_o}{\Delta Y}$	$\frac{2 \cdot (AD - BC)}{A + \frac{B}{Z_o} + CZ_o + D}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2 \cdot Z_{21} Z_o}{\Delta Z}$	$\frac{-2 \cdot Y_{21} Y_o}{\Delta Y}$	$\frac{2}{A + \frac{B}{Z_o} + CZ_o + D}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11} + Z_o) \cdot (Z_{22} - Z_o) - Z_{12} Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_o + Y_{11}) \cdot (Y_o - Y_{22}) + Y_{12} Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{A + \frac{B}{Z_o} + CZ_o + D}{-A + \frac{B}{Z_o} - CZ_o + D}$
Z_{11}	$Z_o \cdot \frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) + S_{12} S_{21}}{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{ Y }$	$\frac{A}{C}$
Z_{12}	$Z_o \cdot \frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}{2 \cdot S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{ Y }$	$\frac{AD - BC}{C}$
Z_{21}	$Z_o \cdot \frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}{(1 - S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) + S_{12} S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{ Y }$	$\frac{1}{C}$
Z_{22}	$Z_o \cdot \frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{D}{C}$
Y_{11}	$Y_o \cdot \frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) + S_{12} S_{21}}{(1 + S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) - S_{12} S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{ Z }$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$
Y_{12}	$Y_o \cdot \frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) - S_{12} S_{21}}{-2 \cdot S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{ Z }$	Y_{12}	$\frac{BC - AD}{B}$
Y_{21}	$Y_o \cdot \frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) - S_{12} S_{21}}{(1 + S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) + S_{12} S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{ Z }$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$
Y_{22}	$Y_o \cdot \frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) + S_{12} S_{21}}{(1 + S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) - S_{12} S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{ Z }$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$
A	$\frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) + S_{12} S_{21}}{2 \cdot S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A
B	$Z_o \cdot \frac{(1 + S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) - S_{12} S_{21}}{2 \cdot S_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B
C	$\frac{1}{Z_o} \cdot \frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 - S_{22}) - S_{12} S_{21}}{2 \cdot S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{- Y }{Y_{21}}$	C
D	$\frac{(1 - S_{11}) \cdot (1 + S_{22}) + S_{12} S_{21}}{2 \cdot S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D
$ Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} \quad Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} \quad \Delta Y = (Y_{11} + Y_o) \cdot (Y_{22} + Y_o) - Y_{12} Y_{21} \quad \Delta Z = (Z_{11} + Z_o) \cdot (Z_{22} + Z_o) - Z_{12} Z_{21} \quad Y_o = 1/Z_o$				

Equation 2-22

2.2 Diviseurs de Puissance

Les lignes TEM permettent de réaliser plusieurs types de diviseurs de puissance aux hyperfréquences. En général, ces diviseurs se distinguent par le nombre des ports de sortie et par la relation d'amplitude et de phase qui existe entre les signaux de sortie.

2.2.1 Diviseur de Wilkinson

Le diviseur de Wilkinson est réalisé à l'aide de deux tronçons de ligne TEM connectés en parallèle à l'entrée, et interconnectés à la sortie par une impédance d'équilibre $2Z$.

Le diviseur de Wilkinson est un réseau à trois ports et est généralement conçu pour fonctionner avec la même impédance caractéristique sur chacun des ports.

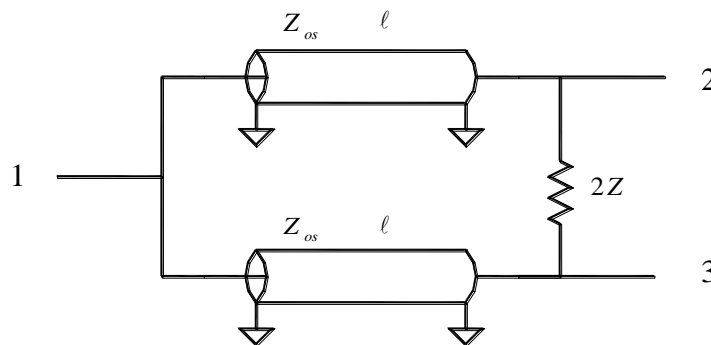


Figure 2-4: Diviseur de Wilkinson

On se propose de calculer la matrice de répartition du diviseur de Wilkinson.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Equation 2-23

Comme le réseau est passif et réciproque, $S_{ij} = S_{ji}$ et seuls les paramètres S situés sur la diagonale et en dessous doivent être déterminés.

De plus, comme le diviseur est symétrique, nous avons également:

$$S_{31} = S_{21}$$

$$S_{33} = S_{22}$$

Equation 2-24

Donc, la matrice de répartition du diviseur de Wilkinson entièrement définie par les 4 paramètres suivants:

$$S_{11} \quad S_{21} \quad S_{22} \quad S_{32}$$

D'après l'équation 2-14, nous devons disposer une source de tension d'impédance Z_o au port 1, et des impédances Z_o aux ports 2 et 3 afin de déterminer les paramètres S_{11} et S_{21} , tel qu'illustré ci-dessous.

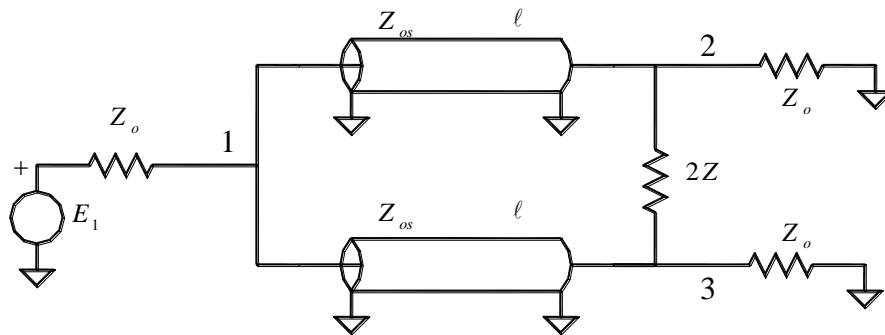


Figure 2-5: Calcul de S_{11} et S_{21}

Comme le réseau est parfaitement symétrique entre les ports 2 et 3, lorsque la source de tension E_1 est active, la tension au port 1 se propage uniformément sur chaque tronçon de ligne et les tensions aux ports 2 et 3 sont égales en amplitude et en phase. Par conséquent, l'impédance $2Z$ n'est parcourue par aucun courant, et tout se passe comme si elle était inexistante. Le schéma du circuit se réduit alors au circuit ci-dessous.

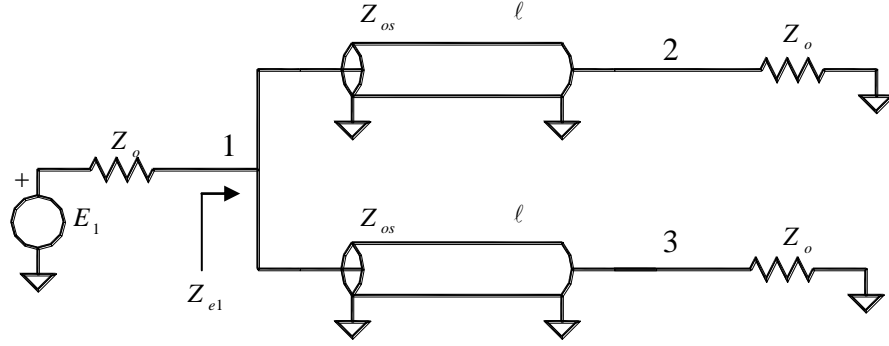


Figure 2-6: Simplification pour S_{11} et S_{21}

D'après l'équation 2-10, nous avons:

$$S_{11} = \frac{Z_{e1} - Z_o}{Z_{e1} + Z_o} \quad \text{Equation 2-25}$$

Z_{e1} étant l'impédance d'entrée des deux tronçons de lignes disposés en parallèle et terminés par l'impédance de référence Z_o . En utilisant l'équation 1-72, nous avons donc:

$$Z_{e1} = \frac{Z_{os}}{2} \cdot \frac{Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} \quad \text{Equation 2-26}$$

Après substitution dans l'équation 2-25, on obtient:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\frac{Z_{os}}{2} \cdot \frac{Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} - Z_o}{\frac{Z_{os}}{2} \cdot \frac{Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} + Z_o} \\ S_{11} &= \frac{Z_{os} \cdot [Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)] - 2 \cdot Z_o \cdot [Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)]}{Z_{os} \cdot [Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)] + 2 \cdot Z_o \cdot [Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)]} \\ S_{11} &= \frac{Z_{os} Z_o + j \cdot Z_{os}^2 \cdot \tan(\beta \cdot \ell) - 2 \cdot Z_{os} Z_o - j 2 \cdot Z_o^2 \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} Z_o + j \cdot Z_{os}^2 \cdot \tan(\beta \cdot \ell) + 2 \cdot Z_{os} Z_o + j 2 \cdot Z_o^2 \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} \\ S_{11} &= \frac{-Z_{os} Z_o + j \cdot (Z_{os}^2 - 2 \cdot Z_o^2) \cdot \frac{\sin(\beta \cdot \ell)}{\cos(\beta \cdot \ell)}}{3 \cdot Z_{os} Z_o + j \cdot (Z_{os}^2 + 2 \cdot Z_o^2) \cdot \frac{\sin(\beta \cdot \ell)}{\cos(\beta \cdot \ell)}} \end{aligned}$$

$$S_{11} = \frac{-Z_{os} Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot (Z_{os}^2 - 2Z_o^2) \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}{3Z_{os} Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot (Z_{os}^2 + 2Z_o^2) \cdot \sin(\beta \cdot \ell)} \quad \text{Equation 2-27}$$

Pour ce qui est de S_{21} , nous avons:

$$V(0) = E_1 \cdot \frac{Z_{e1}}{Z_o + Z_{e1}} \quad I(0) = \frac{E_1}{2 \cdot (Z_o + Z_{e1})} \quad I(\ell) = \frac{V(\ell)}{Z_o}$$

De l'équation 1-84:

$$V(\ell) = -j \cdot \frac{Z_{os}}{\sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \frac{E_1}{2 \cdot (Z_o + Z_{e1})} + j \cdot Z_{os} \cdot \cot(\beta \cdot \ell) \cdot \frac{V(\ell)}{Z_o}$$

$$V(\ell) \cdot \left[1 - j \cdot \frac{Z_{os}}{Z_o} \cdot \cot(\beta \cdot \ell) \right] = -j \cdot \frac{Z_{os}}{\sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \frac{E_1}{2 \cdot (Z_o + Z_{e1})}$$

$$\frac{V(\ell)}{Z_o} \cdot [Z_o - j \cdot Z_{os} \cdot \cot(\beta \cdot \ell)] = -j \cdot \frac{Z_{os}}{\sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \frac{E_1}{2 \cdot (Z_o + Z_{e1})}$$

$$\frac{V(\ell)}{Z_o} \cdot \frac{[Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)]}{\sin(\beta \cdot \ell)} = -j \cdot \frac{Z_{os}}{\sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \frac{E_1}{2 \cdot (Z_o + Z_{e1})}$$

$$\frac{V(\ell)}{E_1} = \frac{-j \cdot Z_{os} \cdot Z_o}{2 \cdot [Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)] \cdot \left[Z_o + \frac{Z_{os}}{2} \cdot \frac{Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} + j \cdot Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} \right]}$$

$$\frac{V(\ell)}{E_1} = \frac{-j \cdot Z_{os} \cdot Z_o}{2[Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)] \cdot \left[Z_o + \frac{Z_{os}}{2} \cdot \frac{Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot Z_{os} \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell)} \right]}$$

$$\frac{V(\ell)}{E_1} = \frac{-j \cdot Z_{os} \cdot Z_o}{\frac{Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \{2Z_o \cdot [Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot Z_o \cdot \sin(\beta \cdot \ell)] + Z_{os} \cdot [Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot Z_{os} \cdot \sin(\beta \cdot \ell)]\}}$$

$$\frac{V(\ell)}{E_1} = \frac{-j \cdot Z_{os} \cdot Z_o}{-j \cdot \frac{Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot \sin(\beta \cdot \ell)} \cdot \{3Z_o Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot [2Z_o^2 + Z_{os}^2] \cdot \sin(\beta \cdot \ell)\}}$$

$$\frac{V(\ell)}{E_1} = \frac{-j \cdot Z_{os} \cdot Z_o}{[2Z_o^2 + Z_{os}^2] \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot 3Z_o Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)}$$

Comme la charge au port 2 est adaptée par rapport à l'impédance caractéristique, nous avons d'après les équations 2-1 et 2-3 et 2-5:

$$S_{21} = 2 \cdot \frac{V(\ell)}{E_1}$$

$$S_{21} = \frac{-j \cdot 2Z_o Z_{os}}{[Z_{os}^2 + 2Z_o^2] \cdot \sin(\beta \cdot \ell) - j \cdot 3Z_o Z_{os} \cdot \cos(\beta \cdot \ell)} \quad \text{Equation 2-28}$$

Maintenant, pour le calcul de S_{22} et S_{32} , nous disposons deux sources de tensions aux ports 2 et 3 alors que le port 1 est terminé par l'impédance caractéristique Z_o , tel qu'illustré ci-dessous.

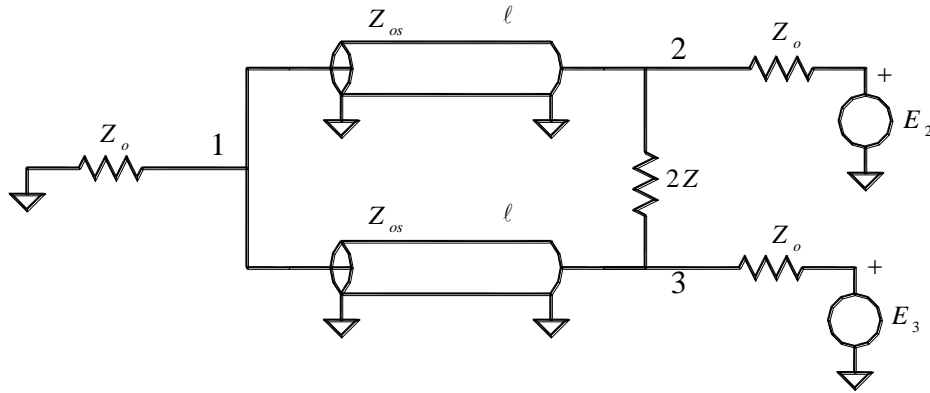


Figure 2-7: Calcul de S_{22} et S_{32}

Pour simplifier le calcul, on utilise le principe de décomposition d'un signal en composantes paire et impaire. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_p + E_I \\ E_3 &= E_p - E_I \end{aligned} \quad \text{Equation 2-29}$$

Cela nous permet maintenant de déterminer séparément l'influence des modes pair et impair. Ainsi dans le cas du mode pair, nous avons la même source de tension appliquée aux ports 2 et 3 simultanément, et de la symétrie de la structure, il en résulte qu'aucun courant ne circule dans l'impédance $2Z$, et par conséquent, le circuit se simplifie comme illustré ci-dessous:

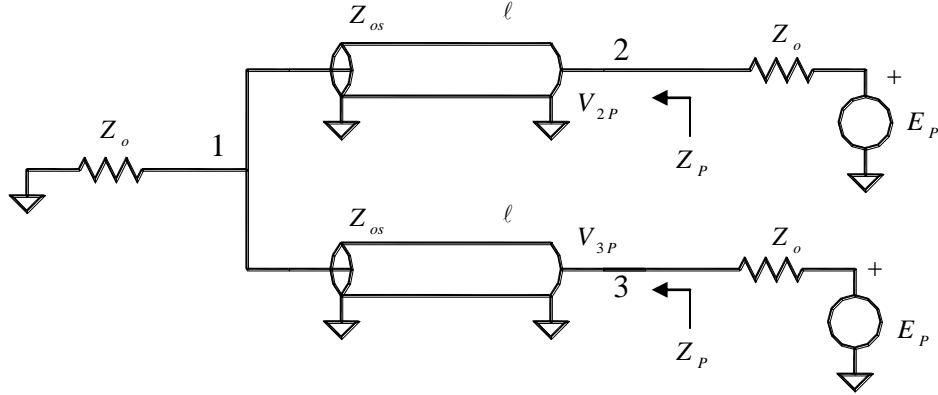


Figure 2-8: Simplification en mode pair

En désignant par Z_P l'impédance d'entrée pour le mode pair aux ports 2 et 3, nous avons:

$$V_{P2} = V_{P3} = \frac{Z_P}{Z_P + Z_o} \cdot E_P \quad \text{Equation 2-30}$$

Avec

$$Z_P = Z_{os} \cdot \frac{2Z_o + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z_{os} + j \cdot 2Z_o \cdot \tan(\beta \cdot \ell)} \quad \text{Equation 2-31}$$

Il est à noter que dans cette dernière équation, nous avons $2Z_o$ plutôt que Z_o puisqu'il y a deux sources de tension de même amplitude qui se partagent le courant circulant dans l'impédance de charge au port 1.

Considérons maintenant l'effet du mode impair, où nous retrouvons le circuit équivalent de la Figure 2-10. Le mode impair a pour effet d'introduire une masse virtuelle au port 1, et au centre de l'impédance $2Z_o$.

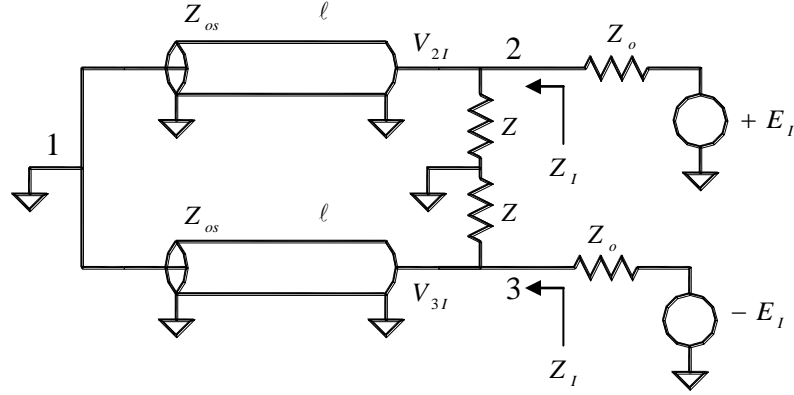


Figure 2-9: Simplification du mode impair

En désignant par Z_I l'impédance d'entrée pour le mode impair aux ports 2 et 3, on a :

$$V_{2I} = \frac{Z_I}{Z_I + Z_o} \cdot E_I$$

Equation 2-32

$$V_{3I} = -\frac{Z_I}{Z_I + Z_o} \cdot E_I$$

Et Z_I résulte de la mise en parallèle de Z avec l'impédance d'un tronçon de ligne terminé par un court-circuit, tel que définie par l'équation 1-74 :

$$Z_I = \frac{j \cdot Z \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}{Z + j \cdot Z_{os} \cdot \tan(\beta \cdot \ell)}$$

Equation 2-33

Les tensions résultantes aux ports 2 et 3 se calculent par superposition des modes pair et impair :

$$V_2 = V_{2P} + V_{2I}$$

$$V_3 = V_{3P} + V_{3I}$$

Equation 2-34

En substituant les équations 2-30 et 2-32 dans l'équation 2-34 :

$$V_2 = \frac{Z_P}{Z_P + Z_o} \cdot E_P + \frac{Z_I}{Z_I + Z_o} \cdot E_I$$

$$V_3 = \frac{Z_P}{Z_P + Z_o} \cdot E_P - \frac{Z_I}{Z_I + Z_o} \cdot E_I$$

Réolvons maintenant l'équation 2-29 par rapport à E_p et E_l :

$$E_p = \frac{E_2 + E_3}{2}$$
$$E_l = \frac{E_2 - E_3}{2}$$

Après substitution dans les équations précédentes:

$$V_2 = \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} + \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot \frac{E_2}{2} + \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} - \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot \frac{E_3}{2}$$
$$V_3 = \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} - \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot \frac{E_2}{2} + \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} + \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot \frac{E_3}{2}$$

Exprimons maintenant V_2 et V_3 en fonction des tensions incidentes et réfléchies aux ports 2 et 3:

$$V_2 = V_{i2} + V_{r2} = \frac{V_2}{2} + V_{r2}$$
$$V_3 = V_{i3} + V_{r3} = \frac{V_3}{2} + V_{r3}$$

Ce qui donne, après substitution dans les équations précédentes:

$$V_{r2} = \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} + \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} - 1 \right] \cdot V_{i2} + \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} - \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot V_{i3}$$
$$V_{r3} = \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} - \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} \right] \cdot V_{i2} + \left[\frac{Z_p}{Z_p + Z_o} + \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} - 1 \right] \cdot V_{i3}$$

On reconnaît ici une équation de la forme:

$$V_{r2} = S_{22} \cdot V_{i2} + S_{23} \cdot V_{i3}$$
$$V_{r3} = S_{32} \cdot V_{i2} + S_{33} \cdot V_{i3}$$

Les paramètres S_{22} et S_{32} recherchés sont donc:

$$S_{22} = \frac{Z_p}{Z_p + Z_o} + \frac{Z_l}{Z_l + Z_o} - 1$$
$$S_{32} = \frac{Z_p}{Z_p + Z_o} - \frac{Z_l}{Z_l + Z_o}$$

On peut écrire:

$$S_{22} = \frac{Z_P}{Z_P + Z_o} + \frac{Z_I}{Z_I + Z_o} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_P + Z_o}{Z_P + Z_o} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_I + Z_o}{Z_I + Z_o}$$

$$S_{22} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_P - Z_o}{Z_P + Z_o}}_{S_{P22}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_I - Z_o}{Z_I + Z_o}}_{S_{I22}}$$

Equation 2-35

Et:

$$S_{32} = \frac{Z_P}{Z_P + Z_o} - \frac{Z_I}{Z_I + Z_o} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_P + Z_o}{Z_P + Z_o} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_I + Z_o}{Z_I + Z_o}$$

$$S_{32} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_P - Z_o}{Z_P + Z_o}}_{S_{P22}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_I - Z_o}{Z_I + Z_o}}_{S_{I22}}$$

Equation 2-36

En substituant les valeurs de Z_P et Z_I (équations 2-31 et 2-33) dans les équations 2-35 et 2-36 :

$$S_{P22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{os} \cdot Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot [Z_{os}^2 - 2Z_o^2] \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}{3Z_{os} \cdot Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot [Z_{os}^2 + 2Z_o^2] \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}$$

Equation 2-37

$$S_{I22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-Z \cdot Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot [Z - Z_o] \cdot Z_{os} \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}{Z \cdot Z_o \cdot \cos(\beta \cdot \ell) + j \cdot [Z + Z_o] \cdot Z_{os} \cdot \sin(\beta \cdot \ell)}$$

Equation 2-38

Les équations 2-27, 2-28, 2-35, 2-36, 2-37 et 2-38 définissent entièrement le fonctionnement du diviseur en fonction de la fréquence et pour des valeurs quelconques de Z_{os} et ℓ . Comme ce sont les deux seuls paramètres, il n'existe que deux degrés de liberté dans le choix de ces variables, qui sera établie de façon à obtenir un comportement s'apparentant le plus à un diviseur de puissance idéal.

Un diviseur de puissance idéal présente une adaptation simultanée à ces trois ports d'accès, c'est-à-dire que l'on a $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$. De plus, dans le cas d'une structure symétrique comme le diviseur de Wilkinson, on s'attend à ce que la puissance au port 1 soit divisée également entre les ports 2 et 3.

Prenons le cas particulier où $\ell = \lambda/4$, ce qui équivaut à $\beta \cdot \ell = \pi/2$. Les équations régissant le comportement du diviseur de Wilkinson se simplifient alors comme suit:

$$S_{11} = \frac{Z_{os}^2 - 2Z_o^2}{Z_{os}^2 + 2Z_o^2} \qquad S_{21} = \frac{-j2 \cdot Z_o \cdot Z_{os}}{Z_{os}^2 + 2Z_o^2}$$

Pour obtenir une adaptation au port 1, c'est-à-dire $S_{11} = 0$, on doit avoir:

$$Z_{os}^2 - 2Z_o^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{os} = Z_o \cdot \sqrt{2}$$

Et alors S_{21} devient:

$$S_{21} = \frac{-j2 \cdot Z_o \cdot Z_{os}}{Z_{os}^2 + 2Z_o^2} = \frac{-j2\sqrt{2} \cdot Z_o^2}{4 \cdot Z_o^2} = \frac{-j}{\sqrt{2}}$$

Dans ces conditions, nous avons également:

$$S_{P22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{os}^2 - 2Z_o^2}{Z_{os}^2 + 2Z_o^2} = 0$$

Et

$$S_{I22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o}$$

Comme il est également nécessaire d'avoir une adaptation aux ports 2 et 3, c'est-à-dire $S_{22} = S_{33} = 0$ on a:

$$S_{22} = S_{33} = S_{P22} + S_{I22} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = Z_o$$

Donc, sous les conditions:

$$\ell = \lambda/4 \quad \quad \quad Z_{os} = Z_o \cdot \sqrt{2} \quad \quad \quad Z = Z_o \quad \quad \quad \textbf{Equation 2-39}$$

La matrice des paramètres de répartition du diviseur de Wilkinson devient:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \quad \quad \textbf{Equation 2-40}$$

La puissance appliquée au port 1 se divise donc également entre les ports 2 et 3, et il y a parfaite isolation entre les ports 2 et 3.

2.2.2 Coupleur à Branches

Le coupleur à branche est réalisé à l'aide de quatre tronçons de ligne TEM de même longueur, mais d'impédance caractéristique différente et formant une structure en anneau. C'est un réseau à 4 ports d'accès conçu pour fonctionner sur des impédances caractéristiques égales sur chaque port.

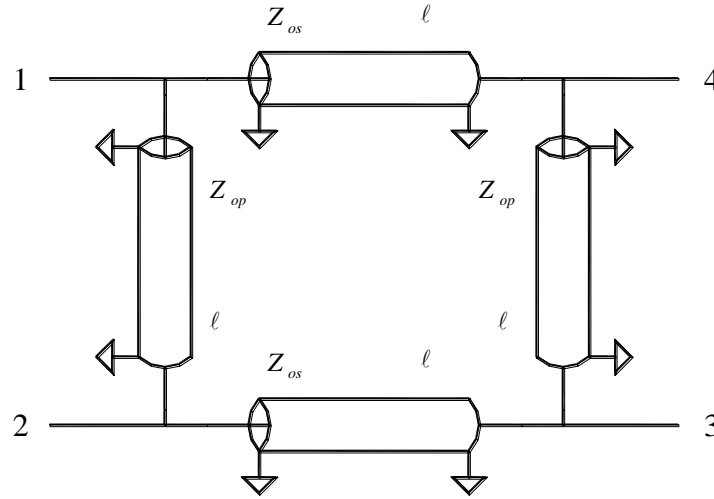


Figure 2-10: Coupleur à branches

Le calcul de la matrice de répartition du coupleur à branches se fait en tirant profit de la symétrie naturelle de la structure.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-41}$$

Comme le réseau est passif et réciproque, $S_{ij} = S_{ji}$ et seuls les paramètres situés sur la diagonale principale et en dessous doivent être déterminés. De plus, puisque la structure est symétrique, nous avons:

$$S_{34} = S_{21}$$

$$S_{24} = S_{31}$$

$$S_{11} = S_{22}$$

$$S_{22} = S_{44}$$

Ce qui conduit aux équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = S_{44} \\ S_{21} &= S_{12} = S_{43} = S_{34} \\ S_{31} &= S_{13} = S_{42} = S_{24} \\ S_{41} &= S_{14} = S_{32} = S_{23} \end{aligned}$$

Equation 2-42

La matrice de répartition du coupleur est donc complètement déterminée par les éléments de la première colonne, et peut s'écrire:

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{11} & S_{21} \\ S_{41} & S_{31} & S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

Equation 2-43

Autrement dit, le calcul de la matrice de répartition se réduit au calcul des quatre paramètres S_{11} , S_{21} , S_{31} et S_{41} .

Comme nous l'avons fait pour le diviseur de Wilkinson, il est de nouveau possible de déterminer ces paramètres en se servant du concept de décomposition d'un signal quelconque en composantes paire et impaire. Pour ce faire, on place deux sources de tension E_1 et E_2 d'impédance interne Z_o aux ports 1 et 2, alors que les ports 3 et 4 sont terminés en Z_o .

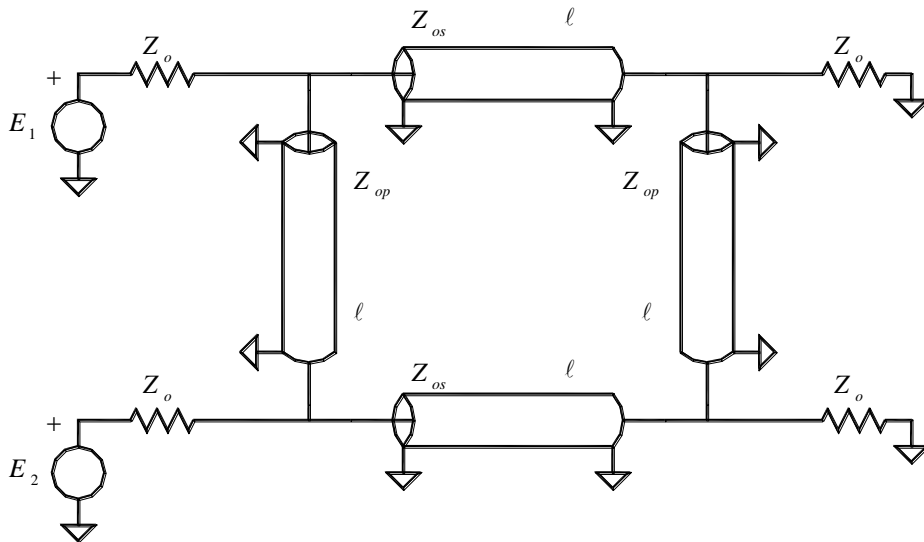


Figure 2-11: Principe de calcul

Posons alors:

$$E_1 = E_p + E_I$$

$$E_2 = E_p - E_I$$

Equation 2-44

L'application d'un mode pair aux ports 1 et 2 a pour effet de créer un nœud de courant au centre des lignes TEM verticales et le circuit équivalent devient alors:

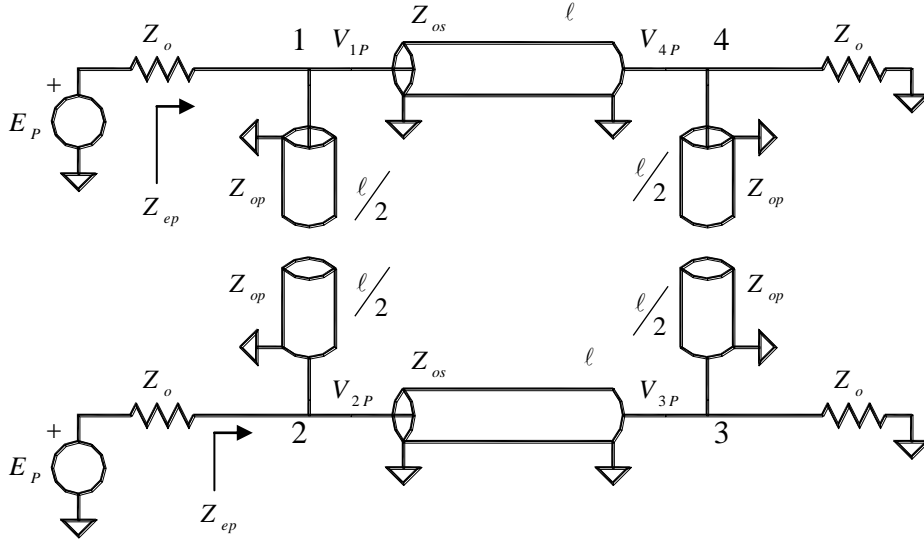


Figure 2-12: Simplification en mode pair

Comme les deux moitiés du circuit sont découplées et identiques, il suffit de ne considérer que l'une d'entre elles pour effectuer le calcul des tensions paires V_{1P} , V_{2P} , V_{3P} et V_{4P} . Ces tensions peuvent s'exprimer en fonction de l'impédance d'entrée paire Z_{ep} et du gain en tension G_{ip} de chaque demi-réseau par rapport à E_p :

$$V_{1P} = \frac{Z_{ep}}{Z_{ep} + Z_o} \cdot E_p$$

$$V_{2P} = \frac{Z_{ep}}{Z_{ep} + Z_o} \cdot E_p$$

$$V_{3P} = G_{ip} \cdot E_p$$

$$V_{4P} = G_{ip} \cdot E_p$$

Equation 2-45

En posant:

$$t = \tan\left(\frac{\beta \cdot \ell}{2}\right)$$

$$a = \frac{Z_o}{Z_{op}}$$

$$b = \frac{Z_o}{Z_{os}}$$

Equation 2-46

On obtient après calculs:

$$\frac{Z_{ep}}{Z_o} = \frac{2t + j \cdot [(2a + b) \cdot t^2 - b]}{2 \cdot (a + b) \cdot (bt - at^3) + j \cdot [(2a + b) \cdot t^2 - b]} \quad \text{Equation 2-47}$$

$$2 \cdot G_{ip} = \frac{-jb \cdot (1 + t^2)}{(a + b) \cdot (bt - at^3) + t + j \cdot [(2a + b) \cdot t^2 - b]} \quad \text{Equation 2-48}$$

L'application d'un mode impair aux ports 1 et 2 a pour effet de créer un nœud de tension au centre des lignes TEM verticales, et le circuit équivalent devient alors:

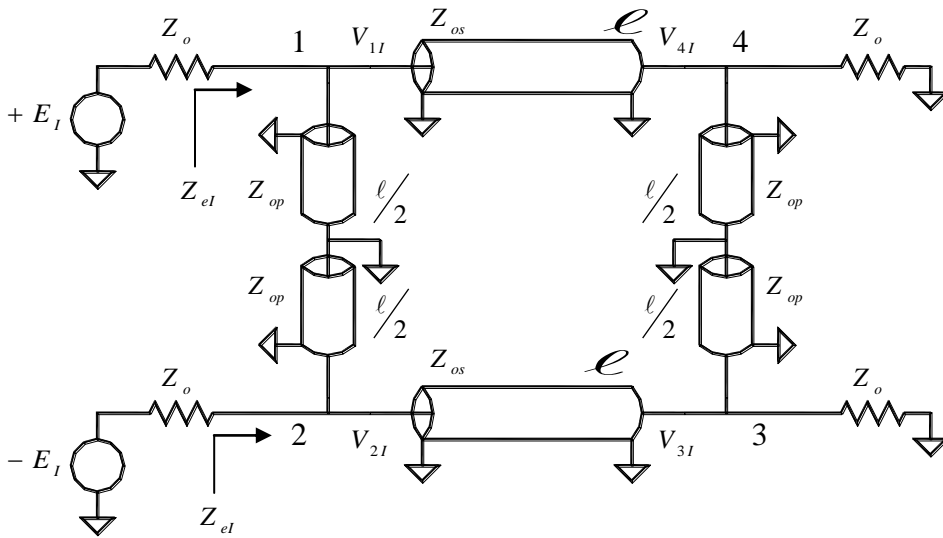


Figure 2-13: Simplification du mode impair

Comme les deux moitiés du circuit sont découplées et identiques, il suffit de ne considérer que l'une d'entre elles pour effectuer le calcul des tensions impaires V_{1I} , V_{2I} , V_{3I} et V_{4I} . Ces tensions peuvent s'exprimer en fonction de l'impédance d'entrée impaire Z_{el} et du gain en tension impair G_{il} de chaque demi-réseau par rapport à E_I . On a donc:

$$\begin{aligned} V_{1I} &= \frac{Z_{el}}{Z_{el} + Z_o} \cdot E_I \\ V_{2I} &= -\frac{Z_{el}}{Z_{el} + Z_o} \cdot E_I \\ V_{3I} &= -G_{il} \cdot E_I \\ V_{4I} &= G_{il} \cdot E_I \end{aligned} \quad \text{Equation 2-49}$$

En posant les trois paramètres définis par l'équation 2-47, il vient après calculs:

$$\frac{Z_{el}}{Z_o} = \frac{2t^2 + j \cdot [bt^2 - (2a + b)] \cdot t}{2 \cdot (a + b) \cdot (bt^2 - a) + j \cdot [bt^2 - (2a + b)] \cdot t} \quad \text{Equation 2-50}$$

$$2 \cdot G_H = \frac{-jb \cdot (1 + t^2) \cdot t}{(a + b) \cdot (bt^2 - a) + t^2 + j \cdot [bt^2 - (2a + b)] \cdot t} \quad \text{Equation 2-51}$$

Le cas qui nous intéresse est celui où seule la source de tension appliquée au port 1 n'est pas nulle. Dans ce cas, en vertu de l'équation 2-44:

$$E_P = \frac{E_1}{2} \qquad E_I = \frac{E_1}{2} \quad \text{Equation 2-52}$$

Les tensions résultantes aux ports 1, 2, 3 et 4 s'obtiennent en superposant les équations 2-45 et 2-49:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\frac{Z_{eP}}{Z_{eP} + Z_o} + \frac{Z_{eI}}{Z_{eI} + Z_o} \right] \cdot \frac{E_1}{2} \\ V_2 &= \left[\frac{Z_{eP}}{Z_{eP} + Z_o} - \frac{Z_{eI}}{Z_{eI} + Z_o} \right] \cdot \frac{E_1}{2} \\ V_3 &= (G_{IP} - G_H) \cdot \frac{E_1}{2} \\ V_4 &= (G_{IP} + G_H) \cdot \frac{E_1}{2} \end{aligned} \quad \text{Equation 2-53}$$

Par définition, la tension réfléchie au port 1 est:

$$V_{r1} = V_1 - V_{i1} = V_1 - \frac{E_1}{2}$$

Ou encore en remplaçant V_1 par son expression dans l'équation 2-53:

$$V_{r1} = \left[\frac{Z_{eP}}{Z_{eP} + Z_o} + \frac{Z_{eI}}{Z_{eI} + Z_o} - 1 \right] \cdot V_{i1}$$

D'où l'on tire:

$$S_{11} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{eP} - Z_o}{Z_{eP} + Z_o}}_{S_{11P}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{eI} - Z_o}{Z_{eI} + Z_o}}_{S_{11I}} \quad \text{Equation 2-54}$$

Par définition, la tension réfléchie au port 2 est:

$$V_{r2} = V_2$$

Ou encore en remplaçant V_2 par son expression d'après l'équation 2-53:

$$V_{r2} = \left[\frac{Z_{eP}}{Z_{eP} + Z_o} - \frac{Z_{eI}}{Z_{eI} + Z_o} \right] \cdot V_{i1}$$

D'où l'on tire:

$$S_{21} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{eP} - Z_o}{Z_{eP} + Z_o}}_{S_{11P}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{eI} - Z_o}{Z_{eI} + Z_o}}_{S_{11I}} \quad \text{Equation 2-55}$$

Par définition, la tension réfléchie au port 3 est:

$$V_{r3} = V_3$$

Ou encore en remplaçant V_3 par son expression d'après l'équation 2-53:

$$V_{r3} = (G_{iP} - G_{iI}) \cdot V_{i1}$$

D'où l'on tire:

$$S_{31} = G_{iP} - G_{iI} = \frac{1}{2} \cdot (S_{31P} - S_{31I}) \quad \text{Equation 2-56}$$

Par définition, la tension réfléchie au port 4 est:

$$V_{r4} = V_4$$

Ou encore en remplaçant V_4 par son expression d'après l'équation 2-53:

$$V_{r4} = (G_{iP} + G_{iI}) \cdot V_{i1}$$

D'où l'on tire:

$$S_{41} = G_{iP} + G_{iI} = \frac{1}{2} \cdot (S_{31P} + S_{31I}) \quad \text{Equation 2-57}$$

Considérons maintenant le cas spécifique d'un coupleur 3dB optimal qui divise le signal d'entrée en parts égales. La fréquence centrale f_o du coupleur correspond à $\ell = \lambda/4$ ou encore $\beta \cdot \ell = \pi/2$, ce qui entraîne, d'après l'équation 2-46, $t_o = 1$ dans les équations 2-47, 2-48, 2-50 et 2-51, qui deviennent alors:

$$\left. \frac{Z_{eP}}{Z_o} \right|_{f=f_o} = \frac{2 + j \cdot 2a}{2 \cdot (b^2 - a^2) + j \cdot 2a}$$

$$2 \cdot G_{uP} \Big|_{f=f_o} = \frac{-j \cdot 2b}{(b^2 - a^2 + 1) + j \cdot 2a}$$

Equation 2-58

$$\left. \frac{Z_{eI}}{Z_o} \right|_{f=f_o} = \frac{2 - j \cdot 2a}{2 \cdot (b^2 - a^2) - j \cdot 2a}$$

$$2 \cdot G_{uI} \Big|_{f=f_o} = \frac{-j \cdot 2b}{(b^2 - a^2 + 1) - j \cdot 2a}$$

La condition d'adaptation au port d'entrée 1 nous donne, d'après l'équation 2-54:

$$\frac{Z_{eP} - Z_o}{Z_{eP} + Z_o} = - \frac{Z_{eI} - Z_o}{Z_{eI} + Z_o}$$

Equation 2-59

C'est-à-dire après réduction:

$$Z_{eP} \cdot Z_{eI} = Z_o^2$$

Equation 2-60

Ou encore, en tenant compte des équations 2-59:

$$a^2 - b^2 = 1$$

Equation 2-61

En portant la condition 2-60 à l'équation 2-57, on peut vérifier qu'à la fréquence f_o nous avons $S_{41} = 0$, ce qui signifie que les ports 1 et 4 sont parfaitement isolés à la fréquence centrale.

La condition 2-59 entraîne pour S_{21} l'expression suivante à la fréquence centrale f_o :

$$S_{21} = \frac{Z_{eP} - Z_o}{Z_{eP} + Z_o}$$

Ce qui donne, en tenant compte des équations 2-47 et 2-61 :

$$S_{21} = -j \cdot \frac{1}{a} \quad \text{Equation 2-62}$$

Déterminons maintenant le couplage au port 3. La relation $S_{41} = 0$ à la fréquence centrale entraîne, en vertu de l'équation 2-57:

$$G_{IP} = -G_{II}$$

Ce qui donne pour l'équation 2-56:

$$S_{31} = 2 \cdot G_{IP}$$

C'est-à-dire, en tenant compte de l'équation 2-48:

$$S_{31} = -\frac{b}{a} \quad \text{Equation 2-63}$$

Dans le cas d'un coupleur 3dB, la puissance d'entrée est divisée uniformément entre les ports 2 et 3, ce qui entraîne la condition:

$$|S_{21}|^2 = |S_{31}|^2$$

Ou encore, d'après les équations 2-62 et 2-63:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \\ b &= 1 \end{aligned} \quad \text{Equation 2-64}$$

C'est-à-dire:

$$\begin{aligned} Z_{op} &= \frac{Z_o}{\sqrt{2}} \\ Z_{os} &= Z_o \end{aligned} \quad \text{Equation 2-65}$$

En résumé, les conditions de l'équation 2-65 combinées à la condition $\ell = \lambda/4$ nous donne la matrice de paramètres de répartition suivante pour le coupleur à branche:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -j/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-66}$$

2.2.3 Coupleur à Lignes Couplées

On peut réaliser un coupleur ayant les mêmes propriétés à la fréquence centrale f_o que le coupleur à branches, en couplant deux sections parallèles de ligne TEM micro-ruban, comme illustré ci-dessous.

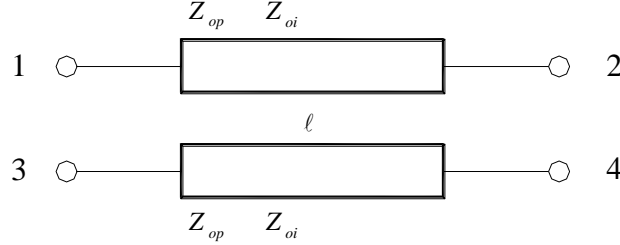


Figure 2-14: Coupleur à lignes couplées

Comme la structure est symétrique, la matrice de répartition de ce type de coupleur est encore parfaitement déterminée par les quatre paramètres S_{11} , S_{21} , S_{31} et S_{41} . Le calcul de ces paramètres s'effectue, comme dans le cas du coupleur à branches, en utilisant le concept de décomposition d'un signal quelconque en composantes paire et impaire.

Il peut être démontré que les conditions d'obtention d'un couplage de 3dB sur les ports 2 et 3 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} Z_{op} &= Z_o \cdot (\sqrt{2} + 1) \\ Z_{oi} &= Z_o \cdot (\sqrt{2} - 1) \end{aligned} \quad \text{Equation 2-67}$$

Dans ce cas, on obtient, à la fréquence centrale f_o qui correspond à $\ell = \lambda/4$:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -j/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-68}$$

2.2.4 Coupleur de Lange

Afin d'obtenir un couplage de 3dB sur une large plage de fréquence, J. Lange a proposé une structure interdigitale dans laquelle la différence des vitesses de phase (mode pair et impair) est compensée.

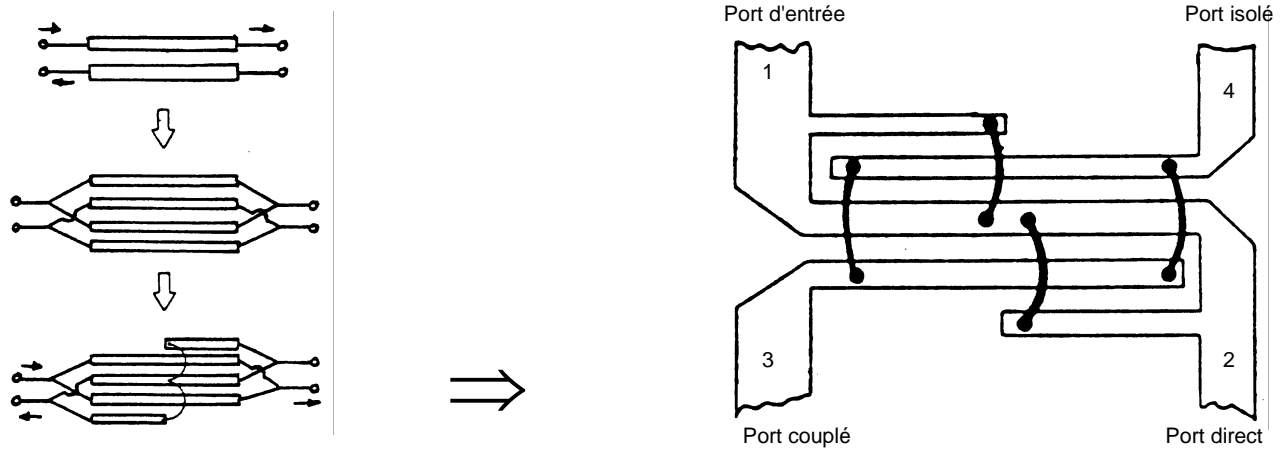


Figure 2-15: Coupleur de Lange

Les fils de thermocompression permettent d'égaliser les potentiels sur les lignes. Les impédances de mode pair et impair de chaque paire de lignes adjacentes peuvent être calculées d'après les formules:

$$Z_{oi} = Z_o \cdot \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \frac{(n-1) \cdot (1+q)}{(k+q) + (n-1) \cdot (1-k)} \quad \text{Equation 2-69}$$

$$Z_{op} = Z_{oi} \cdot \frac{(k+q)}{(n-1) \cdot (1-k)} \quad \text{Equation 2-70}$$

Où n est le nombre pair de doigts ($n = 4, 6, 8$), Z_o est l'impédance caractéristique de terminaison, k est le coefficient de couplage en tension.

$$k = 10^{\frac{-C(dB)}{20}} \quad \text{Equation 2-71}$$

Où $C(dB)$ est une valeur positive correspondant au couplage désiré en dB.

Les doigts plus courts sont de longueur $\lambda/4$ à la fréquence maximale de la bande de fréquence, alors que la longueur de la section centrale correspond à $\lambda/4$ à la fréquence inférieure de la bande.

Tout comme le coupleur à lignes couplées, le coupleur de Lange présente un déphasage de 90° entre le port direct et le port couplé à la fréquence centrale. Ainsi, un coupleur de Lange ayant un facteur de couplage de 3dB, aura la matrice de répartition suivante à la fréquence centrale:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -j/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Equation 2-72}$$

Le coupleur de Lange permet de maintenir un couplage et un déphasage quasi constants de même qu'une bonne adaptation sur une plage de fréquence appréciable, typiquement d'une octave.

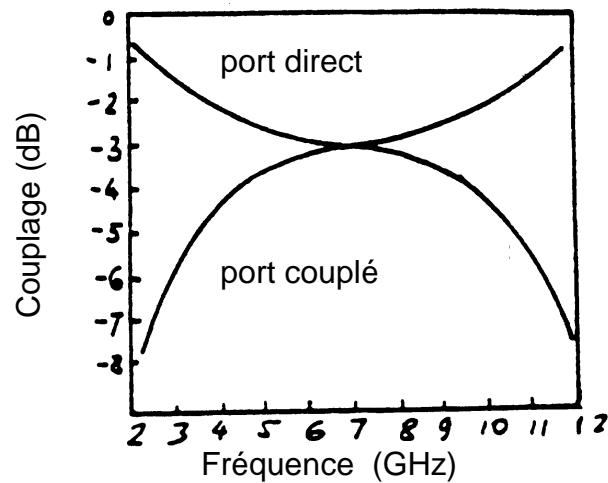


Figure 2-16: Réponse en fréquence d'un coupleur de Lange

2.2.5 Coupleur directif

De façon plus générale, un coupleur directif est un quadripôle réciproque ($S_{ij} = S_{ji}$), adapté ($S_{ii} = 0$) et idéalement sans pertes.

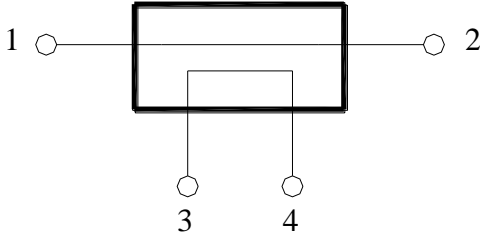


Figure 2-18: Coupleur directif

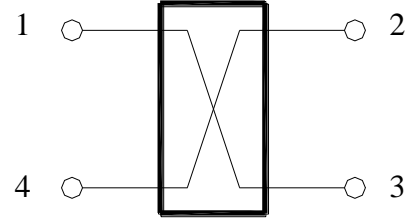


Figure 2-17: Coupleur Hybride 90°

Les paramètres d'un coupleur directif réel sont:

Le couplage:

$$C(dB) = 10 \cdot \log \left[\frac{P_3}{P_1} \right] \quad \text{Equation 2-73}$$

L'isolation:

$$I(dB) = 10 \cdot \log \left[\frac{P_4}{P_1} \right] \quad \text{Equation 2-74}$$

La directivité:

$$D(dB) = 10 \cdot \log \left[\frac{P_4}{P_3} \right] = 10 \cdot \log \left[\frac{P_4}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_3} \right] = I(dB) - C(dB) \quad \text{Equation 2-75}$$

La directivité mesure la qualité du coupleur et joue un rôle très important dans la précision des mesures par réflectométrie.

Le fonctionnement des coupleurs directifs est fondé sur le principe d'interférence constructive et destructive de deux ondes. En effet, le signal entrant est divisé en deux ondes qui arrivent à la porte isolée en opposition de phase et par conséquent s'annulent. Par contre, les deux ondes arrivent en phase à la porte couplée et par conséquent, ils s'additionnent.

2.2.6 Anneau Hybride

L'anneau hybride, grâce à sa structure symétrique, peut être analysé par la méthode des excitations en mode pair et impair.

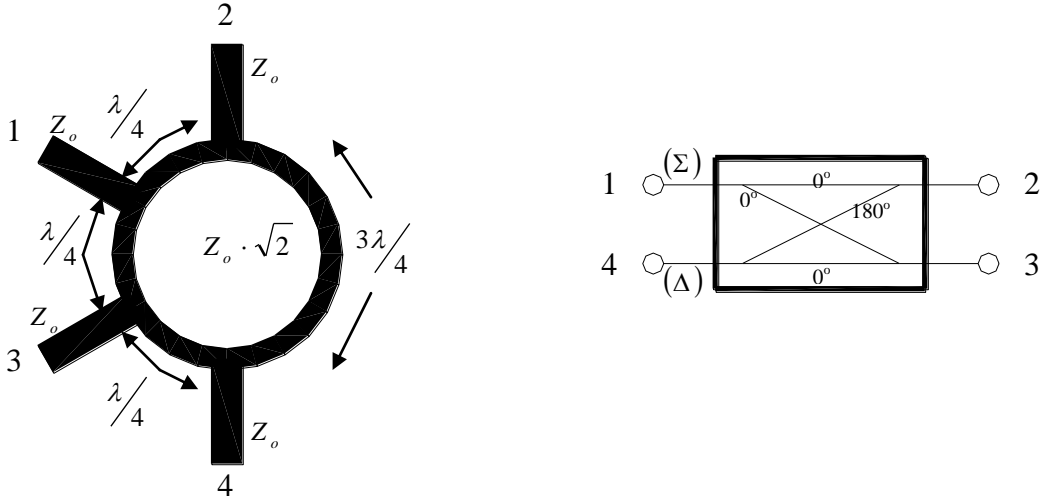


Figure 2-19: Anneau Hybride

Lorsque l'impédance caractéristique des segments de ligne de transmission est de $Z_o \cdot \sqrt{2}$, et que les longueurs des segments de l'anneau sont telles qu'indiquées ci-dessus, la matrice de répartition du dispositif devient:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & -j/\sqrt{2} \\ 0 & j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Equation 2-76

2.2.7 Diviseur résistif adapté

Un diviseur résistif adapté est réalisé en plaçant des résistances dans les trois accès:

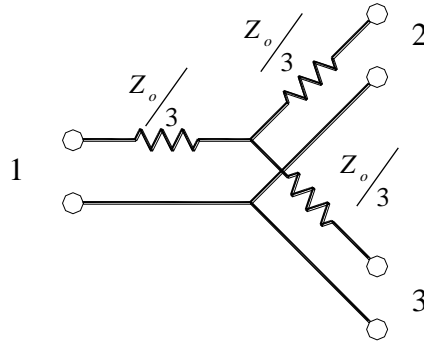


Figure 2-20: Diviseur résistif adapté

La matrice de répartition est alors:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Equation 2-77

Ce diviseur peut être réalisé pour couvrir une très grande largeur de bande puisqu'il n'y a pas de longueur de ligne de transmission qui soit fonction de la fréquence. Toutefois, ce coupleur présente une perte d'insertion de 6dB au lieu du 3dB typique au diviseur de Wilkinson ou au coupleur hybride. De plus, l'isolation entre les ports 2 et 3 est à toute fin pratique inexistante, puisqu'une désadaptation au port 2 par exemple, affectera directement l'adaptation au deux autres ports.

2.3 Abaque de Smith

L'abaque de Smith établit une correspondance graphique entre le plan complexe des impédances et le plan complexe des coefficients de réflexion.

$$\Gamma_c = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} = |\rho| \cdot e^{j\phi} = u + j \cdot v \quad \text{Equation 2-78}$$

$$\Gamma(z) = \Gamma_c \cdot e^{-2\gamma \cdot (\ell - z)} = \Gamma_x + j \cdot \Gamma_y \quad \text{Equation 2-79}$$

$$Zn(z) = \frac{Z(z)}{Z_o} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad \text{Equation 2-80}$$

Des équations 2-79 et 2-80, on obtient:

$$Zn(z) = \frac{1 + \Gamma_x + j \cdot \Gamma_y}{1 - \Gamma_x - j \cdot \Gamma_y} = r + j \cdot x$$

D'où:

$$\frac{(1 + \Gamma_x + j \cdot \Gamma_y) \cdot (1 - \Gamma_x + j \cdot \Gamma_y)}{(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2} = r + j \cdot x$$

$$r + j \cdot x = \frac{1 - \Gamma_x^2 - \Gamma_y^2}{(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2} + j2 \cdot \frac{\Gamma_y}{(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2} \quad \text{Equation 2-81}$$

En identifiant terme à terme:

$$r = \frac{1 - \Gamma_x^2 - \Gamma_y^2}{(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2} \quad \text{Equation 2-82}$$

$$x = \frac{2 \cdot \Gamma_y}{(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2} \quad \text{Equation 2-83}$$

Pour déterminer les coordonnées de résistance constante dans le plan des coefficients de réflexion, développons l'équation 2-82:

$$r \cdot (1 - \Gamma_x)^2 + r \cdot \Gamma_y^2 = 1 - \Gamma_x^2 - \Gamma_y^2$$

$$r \cdot (1 - 2 \cdot \Gamma_x + \Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) = 1 - \Gamma_x^2 - \Gamma_y^2$$

$$(1 + r) \cdot \Gamma_y^2 + (1 + r) \cdot \Gamma_x^2 - 2r \cdot \Gamma_x = 1 - r$$

$$\Gamma_y^2 + \Gamma_x^2 - \frac{2r \cdot \Gamma_x}{1 + r} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

$$\Gamma_y^2 + \Gamma_x^2 - \frac{2r \cdot \Gamma_x}{1 + r} + \frac{r^2}{(1 + r)^2} = \frac{1 - r}{1 + r} + \frac{r^2}{(1 + r)^2}$$

$$\Gamma_y^2 + \left(\Gamma_x - \frac{r}{1 + r} \right)^2 = \frac{(1 - r) \cdot (1 + r) + r^2}{(1 + r)^2}$$

$$\Gamma_y^2 + \left(\Gamma_x - \frac{r}{1 + r} \right)^2 = \frac{1 - r^2 + r^2}{(1 + r)^2}$$

$$\left(\Gamma_x - \frac{r}{1 + r} \right)^2 + \Gamma_y^2 = \frac{1}{(1 + r)^2}$$

Equation 2-84

C'est l'équation d'une famille de cercles ayant comme rayon $\frac{1}{1 + r}$, centrés à la coordonnée

$$\left(\Gamma_x = \frac{r}{1 + r} \quad \Gamma_y = 0 \right).$$

Tous les centres des cercles de résistance constante se trouvent sur l'axe $\Gamma_y = 0$.

Pour déterminer les coordonnées de réactance constante dans le plan des coefficients de réflexion, développons l'équation 2-83:

$$\left[(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2\right] \cdot x = 2 \cdot \Gamma_y$$

$$(1 - \Gamma_x)^2 + \Gamma_y^2 = \frac{2 \cdot \Gamma_y}{x}$$

$$(\Gamma_x - 1)^2 + \Gamma_y^2 - \frac{2 \cdot \Gamma_y}{x} = 0$$

$$(\Gamma_x - 1)^2 + \Gamma_y^2 - \frac{2 \cdot \Gamma_y}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$(\Gamma_x - 1)^2 + \left(\Gamma_y - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Equation 2-85

C'est l'équation d'une famille de cercles ayant comme rayon $\frac{1}{x}$, centrés à la coordonnée

$$\left(\Gamma_x = 1 \quad \Gamma_y = \frac{1}{x}\right).$$

Tous les centres des cercles de réactance constante se trouvent sur l'axe $\Gamma_x = 1$.

2.4 Adaptation d'impédance

L'adaptation d'impédance est une des tâches courantes de l'exercice de conception de circuits aux hyperfréquences. Le concept est illustré ci-dessous, où l'on retrouve un réseau à deux ports intercalé entre une charge quelconque Z_c et une ligne de transmission d'impédance caractéristique Z_o . Le circuit d'adaptation d'impédance est généralement sans perte de façon à éviter des pertes en puissance entre la charge et la ligne de transmission. Le circuit d'adaptation est conçu de façon à ce que l'impédance vue à gauche du circuit d'adaptation corresponde à l'impédance caractéristique de la ligne, Z_o . De cette façon, on élimine les réflexions sur la ligne de transmission.

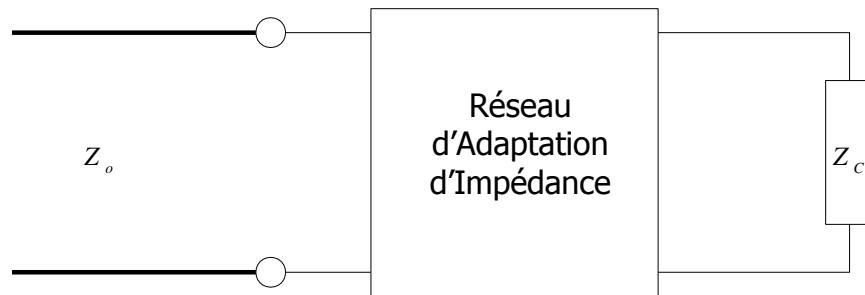


Figure 2-21: Adaptation d'impédance

L'adaptation d'impédance est importante pour les raisons suivantes:

- ❑ On obtient un transfert de puissance maximale lorsque la charge est adaptée à la ligne de transmission.
- ❑ En améliorant le transfert de puissance, on maximise également le rapport signal à bruit dans les systèmes de réception.
- ❑ L'adaptation d'impédance dans un réseau de distribution minimise les erreurs d'amplitude et de phase.

Plusieurs solutions sont possible pour réaliser un circuit d'adaptation d'impédance. Les facteurs important dans la sélection d'un circuit d'adaptation d'impédance sont:

- ❑ La complexité,
- ❑ La largeur de bande,
- ❑ L'implémentation,
- ❑ La facilité d'ajustement.

2.4.1 Réseaux en L

Un des réseaux d'adaptation les plus simples est le réseau en L, tel qu'illustré ci-dessous. Ce réseau utilise deux éléments réactifs pour adapter une impédance de charge Z_c à l'impédance caractéristique Z_o d'une ligne de transmission. Il y a deux configurations possibles pour ce réseau, si $\Re\{Z_c\} > Z_o$ alors on utilise le circuit de la Figure 2-23. Dans le cas contraire, on utilise le circuit de la Figure 2-24.

Dans ces deux circuits, chacune des composantes réactives peut être capacitive ou inductive selon l'impédance de la charge à adapter. Il y a donc huit réseaux en L distincts.

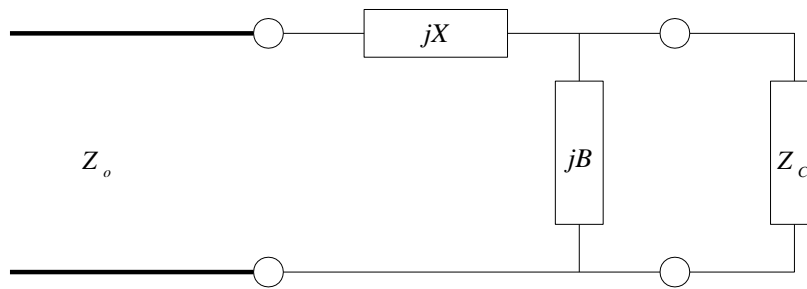


Figure 2-23: Réseau d'adaptation en L pour $R_c > R_o$

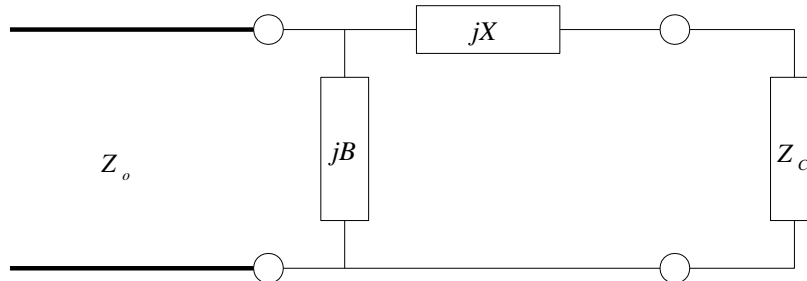


Figure 2-24: Réseau d'adaptation en L pour $R_c < R_o$

Considérons tout d'abord le circuit de la Figure 2-23, et posons $Z_c = R_c + jX_c$. Comme indiqué précédemment, ce circuit peut être utilisé lorsque $R_c > Z_o$. L'impédance vue à l'entrée du réseau d'adaptation d'impédance doit correspondre à Z_o :

$$Z_o = jX + \frac{1}{jB + 1/(R_c + jX_c)}$$

Equation 2-86

En réarrangeant cette équation et en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient:

$$B \cdot (X \cdot R_C - X_C \cdot Z_o) = R_C - Z_o \quad \text{Equation 2-87}$$

$$X \cdot (1 - B \cdot X_C) = B \cdot Z_o \cdot R_C - X_C \quad \text{Equation 2-88}$$

En résolvant X dans l'équation 2-87 et en substituant dans l'équation 2-88, on obtient:

$$B = \frac{X_C \pm \sqrt{R_C / Z_o} \cdot \sqrt{R_C^2 + X_C^2 - Z_o \cdot R_C}}{R_C^2 + X_C^2} \quad \text{Equation 2-89}$$

Il est à noter que puisque $R_C > Z_o$, l'argument de la seconde racine carrée est toujours positif. La réactance série est alors:

$$X = \frac{1}{B} + \frac{X_C \cdot Z_o}{R_C} - \frac{Z_o}{B \cdot R_C} \quad \text{Equation 2-90}$$

Il est à noter que les équations 2-89 et 2-90 indiquent que deux solutions sont possible pour B et X . Ces deux solutions sont réalisable, puisque des valeurs positives aussi bien que négatives sont possible pour B et X . En effet, une valeur positive pour X correspond à une inductance, alors qu'une valeur négative correspond à une capacité, et c'est l'inverse pour B . Toutefois, une des deux solutions peut résulter en des valeurs plus petites pour les composantes réactives, et cette solution offrira donc une meilleure performance en terme de largeur de bande.

Considérons maintenant le circuit de la Figure 2-24. Ce circuit est utilisé lorsque $R_C < Z_o$. L'admittance vue à l'entrée du réseau d'adaptation d'impédance doit correspondre à $1/Z_o$.

$$\frac{1}{Z_o} = jB + \frac{1}{R_C + j \cdot (X + X_C)}$$

En réarrangeant et en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient:

$$B \cdot Z_o \cdot (X + X_C) = Z_o - R_C$$

$$(X + X_C) = B \cdot Z_o \cdot R_C$$

En résolvant pour X et B , on obtient:

$$X = \pm \sqrt{R_c \cdot (Z_o - R_c)} - X_c$$

Equation 2-91

$$B = \pm \frac{\sqrt{(Z_o - R_c)/R_c}}{Z_o}$$

Equation 2-92

On remarque encore une fois que deux solutions sont possible.

Pour adapter une charge complexe arbitraire dans une impédance Z_o , la partie réelle de l'impédance à l'entrée du réseau d'adaptation doit être Z_o , alors que la partie imaginaire doit être nulle. Il est donc nécessaire d'avoir un minimum de deux degrés de liberté, ce que permet de réaliser le réseau en L qui utilise deux valeurs de réactance.

2.4.2 Adaptation avec Un Stub

Soit à considérer la technique d'adaptation d'impédance qui utilise un stub en circuit ouvert ou court-circuité de longueur ℓ , connecté en shunt (Figure 2-25) ou en série (Figure 2-26) avec la ligne de transmission, à une distance d de la charge. Ce type d'adaptation d'impédance est très pratique puisqu'il n'utilise pas d'éléments localisés. La configuration avec stub disposé en shunt est particulièrement facile à réaliser avec les lignes microruban.

Dans cette configuration, les deux paramètres ajustables sont la distance d entre la charge et le stub, et la susceptance ou la réactance produite par le stub. Pour la configuration du stub en shunt, le principe d'adaptation consiste à choisir d de façon à ce que l'admittance vue à cette distance de la charge soit de la forme $Y_o + jB$. Alors, la susceptance du stub est choisie comme étant $-jB$, annulant ainsi la partie réactive. Pour la configuration du stub en série, la distance d est choisie de façon à ce que l'impédance vue à la distance d soit de la forme $Z_o + jX$. La réactance du stub est alors choisie comme étant $-jX$.

2.4.2.1 Stub en shunt

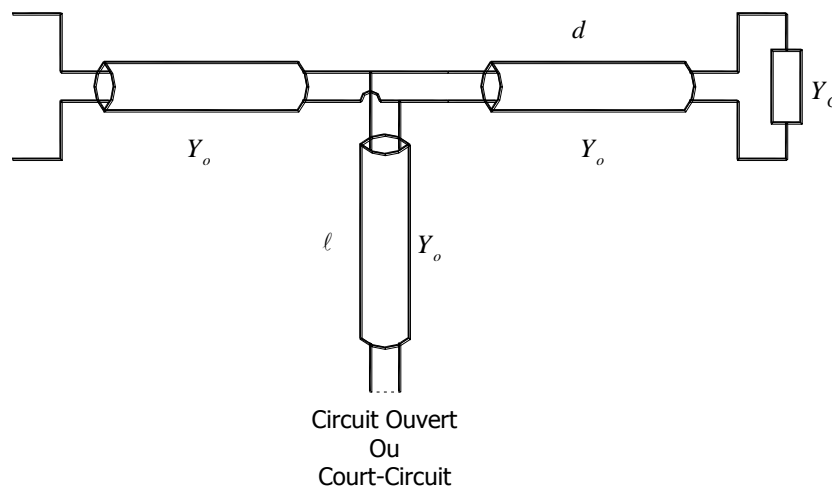


Figure 2-25: Adaptation d'impédance avec un stub en shunt

Pour obtenir les expressions pour d et ℓ , posons $Z_c = 1/Y_c = R_c + jX_c$. Nous pouvons alors utiliser l'équation 1-72 pour calculer l'impédance Z obtenu à une distance d le long de la ligne de transmission:

$$Z = Z_o \cdot \frac{(R_c + jX_c) + jZ_o \cdot t}{Z_o + j \cdot (R_c + jX_c) \cdot t}$$

Où $t = \tan(\beta \cdot d)$. L'admittance à ce point est:

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z}$$

Où:

$$G = \frac{R_c \cdot (1 + t^2)}{R_c + (X_c + Z_o \cdot t)^2} \quad \text{Equation 2-93}$$

et

$$B = \frac{R_c^2 \cdot t - (Z_o - X_c \cdot t) \cdot (X_c + Z_o \cdot t)}{Z_o \cdot [R_c^2 + (X_c + Z_o \cdot t)^2]} \quad \text{Equation 2-94}$$

Maintenant, d (et par conséquent t) est choisi de sorte que $G = Y_o = 1/Z_o$. Il en résulte une équation quadratique selon t :

$$Z_o \cdot (R_c - Z_o) \cdot t^2 - 2 \cdot X_c \cdot Z_o \cdot t + (R_c \cdot Z_o - R_c^2 - X_c^2) = 0$$

En résolvant par rapport à t , nous obtenons:

$$t = \frac{X_c \pm \sqrt{R_c \cdot [(Z_o - R_c)^2 + X_c^2]} / Z_o}{R_c - Z_o}$$

pour $R_c \neq Z_o$.

Si $R_c = Z_o$, alors $t = -X_c / 2Z_o$.

Par conséquent, les deux solutions principales pour d sont:

$$\frac{d}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}(t) & t \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot [\pi + \tan^{-1}(t)] & t < 0 \end{cases} \quad \text{Equation 2-95}$$

Pour trouver la longueur ℓ requise pour le stub, nous utilisons la valeur de t dans l'équation 2-94 pour trouver la susceptance du stub, $B_s = -B$. Alors, pour un stub en circuit ouvert, nous avons:

$$\frac{\ell_o}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{B_s}{Y_o} \right) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{B}{Y_o} \right) \quad \text{Equation 2-96}$$

Alors que pour un stub en court-circuit, nous avons:

$$\frac{\ell_c}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{Y_o}{B_s} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{Y_o}{B} \right) \quad \text{Equation 2-97}$$

2.4.2.2 Stub en Série

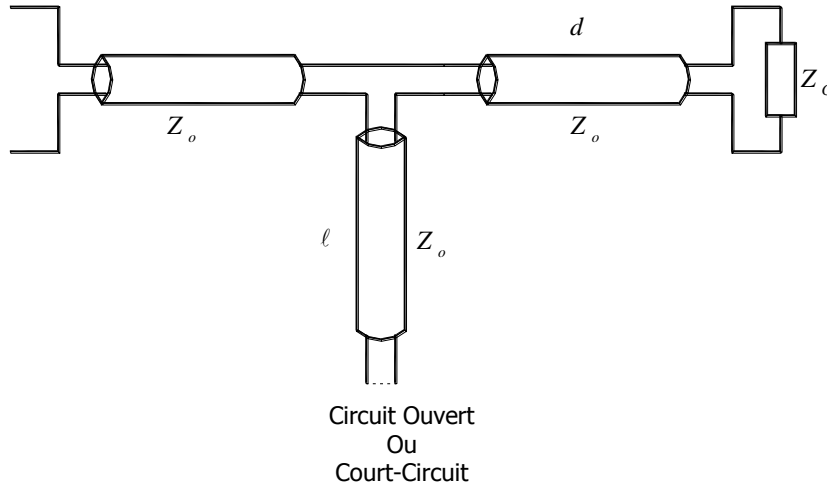


Figure 2-26: Adaptation d'impédance avec un stub en série

Pour déterminer les expressions de d et ℓ pour la configuration utilisant un stub en série, posons pour l'admittance de charge $Y_c = \frac{1}{Z_c} = G_c + jB_c$. Alors, l'admittance Y à une distance d le long de la ligne de transmission est:

$$Y = Y_o \cdot \frac{(G_c + jB_c) + jt \cdot Y_o}{Y_o + jt \cdot (G_c + jB_c)}$$

Où $t = \tan(\beta \cdot d)$. L'impédance à ce point est:

$$Z = R + jX = \frac{1}{Y}$$

Où:

$$R = \frac{G_c \cdot (1 + t^2)}{G_c^2 + (B_c + Y_o \cdot t)^2} \quad \text{Equation 2-98}$$

$$X = \frac{G_c^2 - (Y_o - t \cdot B_c) \cdot (B_c + t \cdot Y_o)}{Y_o \cdot [G_c^2 + (B_c + Y_o \cdot t)^2]} \quad \text{Equation 2-99}$$

Maintenant, d (et par conséquent t) est choisi de sorte que $R = Z_o = 1/Y_o$. Il en résulte une équation quadratique selon t :

$$Y_o \cdot (G_c - Y_o) \cdot t^2 - 2B_c \cdot Y_o \cdot t + (G_c \cdot Y_o - G_c^2 - B_c^2) = 0$$

En résolvant par rapport à t , nous obtenons:

$$t = \frac{B_c \pm \sqrt{G_c \cdot [(Y_o - G_c)^2 + B_c^2]}}{G_c - Y_o} \quad \text{---} Y_o$$

pour $G_c \neq Y_o$.

Si $G_c = Y_o$, alors $t = -B_c/2Y_o$. Les deux solutions principales pour d sont donc:

$$\frac{d}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}(t) & t \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot [\pi + \tan^{-1}(t)] & t < 0 \end{cases} \quad \text{Equation 2-100}$$

La longueur ℓ requise pour le stub série est déterminée en utilisant la valeur de t dans l'équation 2-99 pour trouver la réactance X . Cette réactance est l'opposé de la réactance nécessaire pour le stub, X_s . Par conséquent, pour un stub en court-circuit, nous avons:

$$\frac{\ell_c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{X_s}{Z_o}\right) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{X}{Z_o}\right) \quad \text{Equation 2-101}$$

Et pour un stub en circuit ouvert:

$$\frac{\ell_o}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{Z_o}{X_s}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{Z_o}{X}\right) \quad \text{Equation 2-102}$$

2.4.3 Adaptation avec Deux Stubs

Les réseaux d'adaptation d'impédance à un stub de la section précédente permettent d'adapter toute charge ayant une partie réelle non nulle. Toutefois, ils requièrent une longueur de ligne variable entre la charge et le stub. Bien que cela ne soit pas un problème pour une adaptation fixe, il peut être souhaitable de ne pas avoir cette contrainte lorsque l'on désire un dispositif permettant une adaptation à une charge variable. Dans ce cas, le réseau à deux stubs en positions fixes peut être utilisé. Toutefois, l'inconvénient de ce dispositif provient du fait qu'il ne peut adapter toutes les impédances.

Le réseau d'adaptation à deux stubs de la Figure 2-27 indique que la charge effective peut être située à une distance arbitraire du premier stub. En fait, cela revient à traiter le circuit plus simple de la Figure 2-28, où la charge Y_c' a été transformée à son admittance équivalente Y_c au premier stub.

Les stubs considérés ici sont des stubs en shunt, puisqu'ils sont, en pratique, plus faciles à implémenter. Les stubs peuvent être terminés en court-circuit ou en circuit ouvert.

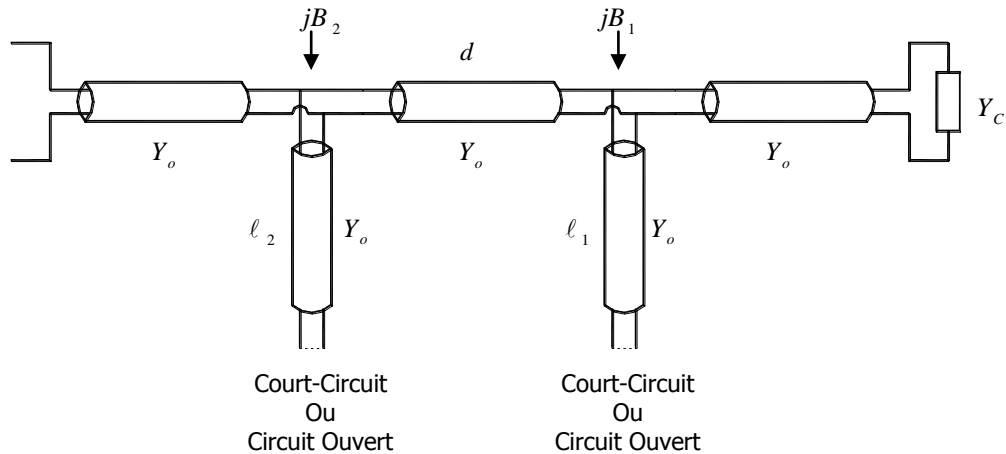


Figure 2-27: Adaptation avec deux stubs en shunt

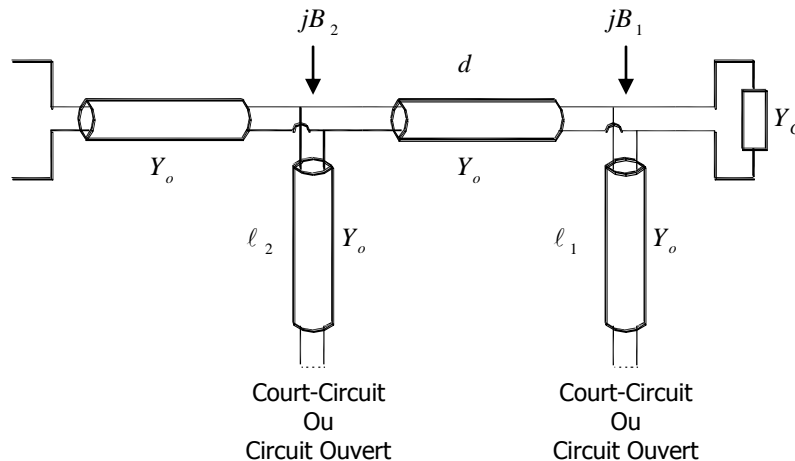


Figure 2-28: Circuit équivalent avec deux stubs en shunt

L'admittance juste à la gauche du premier stub est:

$$Y_1 = G_c + j \cdot (B_c + B_1)$$

Où $Y_c = G_c + jB_c$ est l'admittance de la charge et B_1 est la susceptance du premier stub. Après transformation à travers une longueur d d'une ligne de transmission, l'admittance juste à la droite du second stub est:

$$Y_2 = Y_o \cdot \frac{G_c + j \cdot (B_c + B_1 + Y_o \cdot t)}{Y_o + jt \cdot (G_c + jB_c + jB_1)} \quad \text{Equation 2-103}$$

Où $t = \tan(\beta \cdot d)$. A ce point, la partie réelle de Y_2 doit être égale à Y_o , ce qui nous donne:

$$G_c^2 - G_c \cdot Y_o \cdot \frac{1+t^2}{t^2} + \frac{(Y_o - B_c \cdot t - B_1 \cdot t)^2}{t^2} = 0 \quad \text{Equation 2-104}$$

En résolvant par rapport à G_c , nous obtenons:

$$G_c = Y_o \cdot \frac{1+t^2}{2t^2} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4t^2 \cdot (Y_o - B_c \cdot t - B_1 \cdot t)^2}{Y_o^2 \cdot (1+t^2)^2}} \right] \quad \text{Equation 2-105}$$

Puisque G_c est réelle, la quantité sous la racine carrée ne peut être négative, d'où:

$$0 \leq \frac{4t^2 \cdot (Y_o - B_c \cdot t - B_1 \cdot t)^2}{Y_o^2 \cdot (1+t^2)^2} \leq 1 \quad \text{Equation 2-106}$$

Ce qui implique que:

$$0 \leq G_c \leq Y_o \cdot \frac{1+t^2}{t^2} = \frac{Y_o}{\sin^2(\beta \cdot d)} \quad \text{Equation 2-107}$$

ce qui nous donne la plage des valeurs de G_c qui peuvent être adaptées pour une distance d donnée. Une fois que d est fixée, la susceptance du premier stub peut être déterminée à partir de

$$B_1 = -B_c + \frac{Y_o \pm \sqrt{(1+t^2) \cdot G_c \cdot Y_o - G_c^2 \cdot t^2}}{t}$$

l'équation 2-104:

Equation 2-108

Par la suite, la susceptance du second stub se calcule à partir de la négative de la partie imaginaire de l'équation 2-103:

$$B_2 = \frac{\pm Y_o \cdot \sqrt{Y_o \cdot G_c \cdot (1 + t^2) - G_c^2 \cdot t^2} + G_c \cdot Y_o}{G_c \cdot t} \quad \text{Equation 2-109}$$

Les signes \pm des équations 2-108 et 2-109 correspondent à la même solution. La longueur des stubs en circuit ouvert est donnée par:

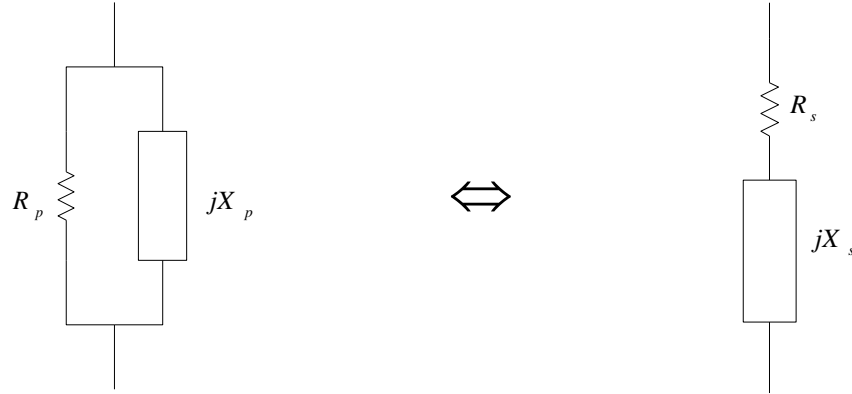
$$\frac{\ell_o}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{B}{Y_o} \right) \quad \text{Equation 2-110}$$

Alors que la longueur des stubs en court-circuit est donnée par :

$$\frac{\ell_c}{\lambda} = \frac{-1}{2\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{Y_o}{B} \right) \quad \text{Equation 2-111}$$

où $B = B_1, B_2$.

2.4.4 Equivalences Série-Parallèle



$$R_p = R_s \cdot (1 + Q^2) = \frac{X_s \cdot X_p}{R_s}$$

$$R_s = \frac{R_p}{1 + Q^2} = \frac{X_p \cdot X_s}{R_p}$$

$$X_p = R_s \cdot \frac{(1 + Q^2)}{Q} = \frac{R_p}{Q}$$

$$X_s = R_p \cdot \frac{Q}{1 + Q^2} = R_s \cdot Q$$

$$R_p = R_s \cdot \left[1 + \left(\frac{X_s}{R_s} \right)^2 \right]$$

$$R_s = \frac{R_p}{1 + \left(\frac{R_p}{X_p} \right)^2}$$

$$R_p = \frac{X_p}{\sqrt{\frac{X_p}{X_s} - 1}}$$

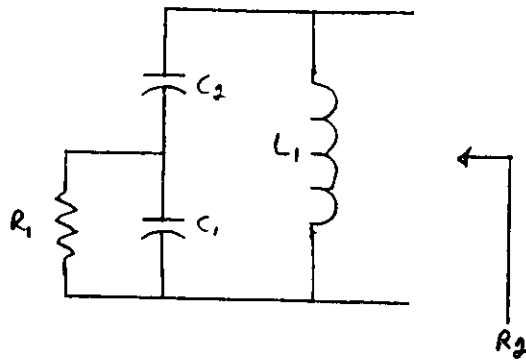
$$R_s = X_s \cdot \sqrt{\frac{X_p}{X_s} - 1}$$

$$X_p = X_s \cdot \left[1 + \left(\frac{R_s}{X_s} \right)^2 \right] = \frac{R_s \cdot R_p}{X_s}$$

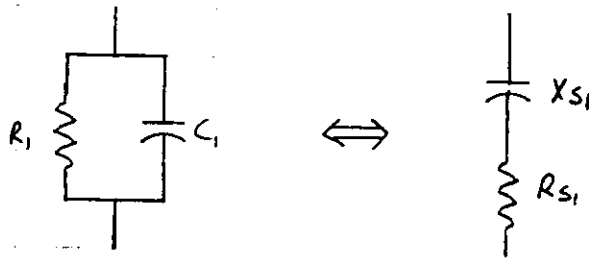
$$X_s = \frac{X_p}{1 + \left(\frac{X_p}{R_p} \right)^2} = \frac{R_s \cdot R_p}{X_p}$$

$$X_p = \frac{R_p}{\sqrt{\frac{R_p}{R_s} - 1}}$$

$$X_s = R_s \cdot \sqrt{\frac{R_p}{R_s} - 1}$$



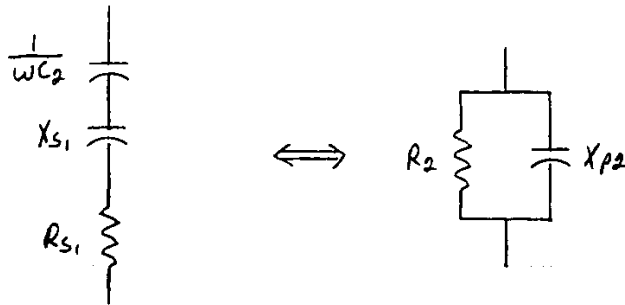
$$Q_1 = \omega R_1 C_1$$



$$R_s = \frac{R_p}{1 + \left(\frac{R_p}{X_p}\right)^2} \Rightarrow R_{s1} = \frac{R_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} = \frac{R_1}{1 + Q_1^2}$$

$$X_s = \frac{X_p}{1 + \left(\frac{X_p}{R_p}\right)^2} \Rightarrow X_{s1} = \frac{\frac{1}{\omega C_1}}{1 + \left(\frac{1}{\omega R_1 C_1}\right)^2} = \frac{1}{\omega C_1 \left(1 + \frac{1}{Q_1^2}\right)}$$

$$X_{s1} = \frac{Q_1^2}{\omega C_1 (Q_1^2 + 1)} = \frac{R_1 Q_1}{(Q_1^2 + 1)}$$



$$X_{S2} = X_{S1} + \frac{1}{\omega C_2} = \frac{R_1 \phi_1}{(\phi_1^2 + 1)} + \frac{1}{\omega C_2}$$

$$R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{X_s}{R_s} \right)^2 \right] \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{1 + \phi_1^2} \left[1 + \frac{\left(\frac{R_1 \phi_1}{(\phi_1^2 + 1)} + \frac{1}{\omega C_2} \right)^2}{\frac{R_1}{(1 + \phi_1^2)}} \right]$$

$$R_2 = \frac{R_1}{1 + \phi_1^2} \left[1 + \left(\phi_1 + \frac{(1 + \phi_1^2)}{\omega R_1 C_2} \right)^2 \right]$$

$$\sqrt{\frac{R_2(1 + \phi_1^2)}{R_1} - 1} = \phi_1 + \frac{(1 + \phi_1^2)}{\omega R_1 C_2} = \phi_1 + \frac{(1 + \phi_1^2) C_1}{\omega R_1 C_1 C_2} = \phi_1 + \frac{(1 + \phi_1^2) C_1}{\phi_1 C_2}$$

$$\frac{(1 + \phi_1^2)}{\phi_1} \frac{C_1}{C_2} = \sqrt{\frac{R_2(1 + \phi_1^2)}{R_1} - 1} - \phi_1$$

$$C_2 = \frac{C_1 (1 - \phi_1^2)}{\phi_1 \sqrt{\frac{R_2(1 + \phi_1^2)}{R_1} - 1} - \phi_1}$$

$$C_1 = \frac{Q_1}{\omega R_1}$$

$$X_p = \frac{R_s R_p}{X_s} \Rightarrow X_{p2} = \frac{R_{s1} R_2}{\frac{R_1 Q_1}{(Q_1^2 + 1)} + \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\frac{R_1 R_2}{1 + Q_1^2}}{\frac{R_1 Q_1}{(Q_1^2 + 1)} + \frac{1}{\omega C_2}}$$

$$X_{p2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 Q_1 + \frac{(1 + Q_1^2)}{\omega C_2}} = \frac{R_1 R_2 \omega C_2}{1 + Q_1^2 + R_1 Q_1 \omega C_2} = \frac{R_1 R_2 \omega C_2 C_1}{C_1 (1 + Q_1^2) + \omega R_1 C_2 Q_1}$$

$$X_{p2} = \frac{\omega R_1 R_2 C_2}{(1 + Q_1^2) + \frac{Q_1^2 C_2}{C_1}} = \omega L_1$$

$$L_1 = \frac{R_1 R_2 C_2}{(1 + Q_1^2) + \frac{Q_1^2 C_2}{C_1}}$$

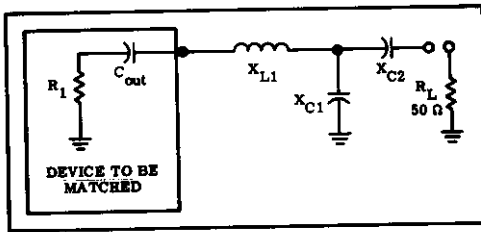


FIGURE 1 - NETWORK A

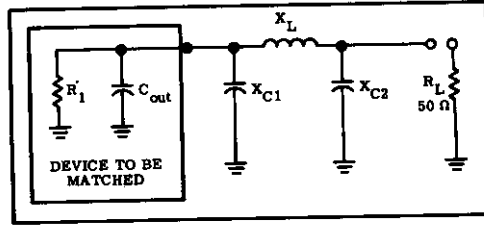


FIGURE 2 - NETWORK B

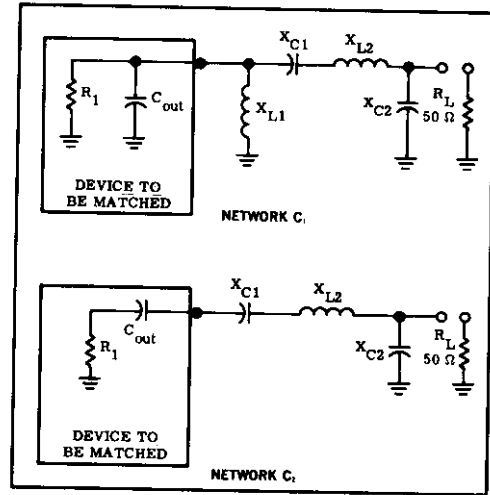


FIGURE 3

To convert a parallel resistance and reactance combination to series:

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (R_p/X_p)^2}$$

$$X_s = R_s \frac{R_p}{X_p}$$

To convert a series resistance and reactance combination to parallel:

$$R_p = R_s [1 + (X_s/R_s)^2]$$

$$X_p = \frac{R_p}{X_s/R_s}$$

To solve network A:

1. Select a Q

$$X_{L1} = QR_1 + X_{Cout}$$

$$X_{C2} = AR_L$$

$$X_{C1} = \frac{(B/A)(B/Q)}{(B/A) - (B/Q)} = \frac{B}{Q - A}$$

$$\text{where } A = \sqrt{\frac{R_1(1+Q^2)}{R_L}} - 1$$

$$B = R_1(1+Q^2)$$

To solve network B:

1. Select a Q

$$X_{C1} = R_1/Q$$

$$X_{C2} = R_L \sqrt{\frac{R_1/R_L}{(Q^2+1) - (R_1/R_L)}}$$

$$X_L = \frac{QR_1 + (R_1 R_L / X_{C2})}{Q^2 + 1}$$

To solve network C₁:

1. Select a Q

$$X_{L1} = X_{Cout}$$

$$X_{C1} = QR_1$$

$$X_{C2} = R_L \sqrt{\frac{R_1}{R_L - R_1}}$$

$$X_{L2} = X_{C1} + \left(\frac{R_1 R_L}{X_{C2}} \right)$$

To solve network C₂:

1. Select a Q

2. L₁ is not used in this network

$$X_{C1} = QR_1$$

$$X_{C2} = R_L \sqrt{\frac{R_1}{R_L - R_1}}$$

$$X_{L2} = X_{C1} + \left(\frac{R_1 R_L}{X_{C2}} \right) + X_{Cout}$$

To solve network D:

1. Select a Q

$$X_{L1} = (R_1 Q) + X_{Cout}$$

$$X_{L2} = R_L B$$

$$X_{C1} = \frac{(A/Q)(A/B)}{(A/Q) + (A/B)} = \frac{A}{Q + B}$$

$$\text{where } A = R_1(1+Q^2)$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{A}{R_L} \right) - 1}$$

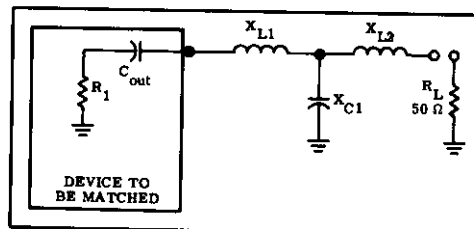


FIGURE 4 - NETWORK D

2.4.5 Facteur de Qualité sur Abaque de Smith

$$z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \qquad \Gamma = u + jv$$

$$z = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} \cdot \frac{(1 - u) + jv}{(1 - u) + jv} = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} + j \cdot \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$Q = \frac{|x|}{r} = \pm \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}$$

$$1 - u^2 - v^2 = \pm \frac{2v}{Q}$$

$$u^2 + v^2 \pm \frac{2v}{Q} = 1$$

$$u^2 + v^2 \pm \frac{2v}{Q} + \frac{1}{Q^2} = 1 + \frac{1}{Q^2}$$

$$u^2 + \left(v \pm \frac{1}{Q} \right)^2 = 1 + \frac{1}{Q^2}$$

Le signe + s'applique lorsque $x > 0$, et le signe – lorsque $x < 0$.

L'équation est celle d'un cercle de rayon $\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}$ et de centre $\Gamma = \begin{cases} \left(0, -1/Q \right) & x > 0 \\ \left(0, 1/Q \right) & x < 0 \end{cases}$.

2.4.6 Critère de Bode-Fano

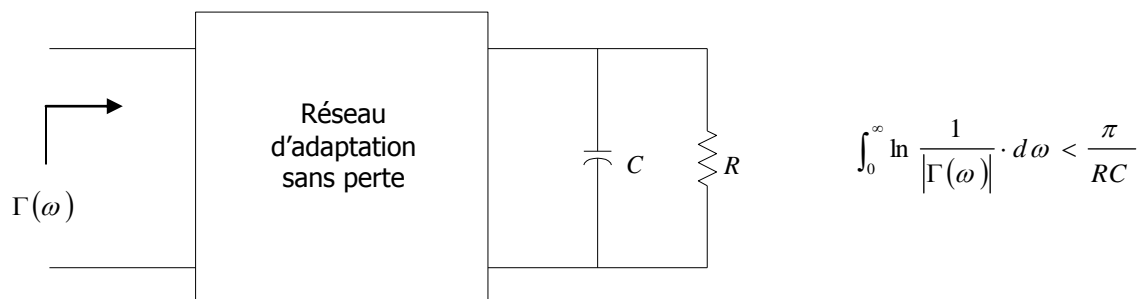


Figure 2-29: Critère de Bode-Fano pour un circuit RC parallèle

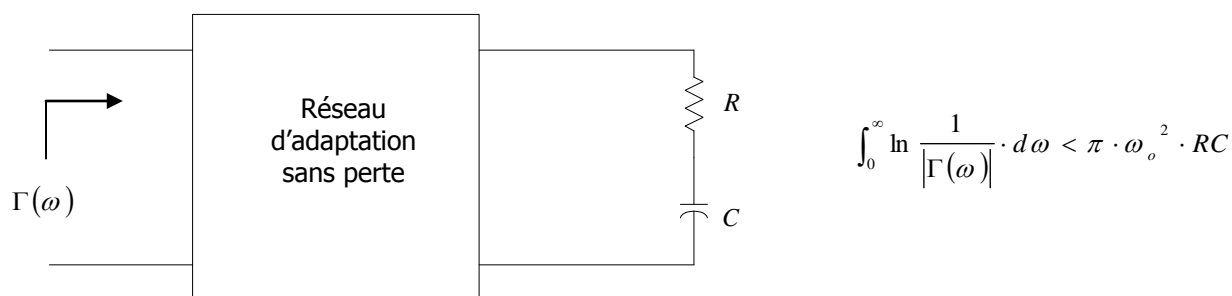


Figure 2-30: Critère de Bode-Fano pour un circuit RC série

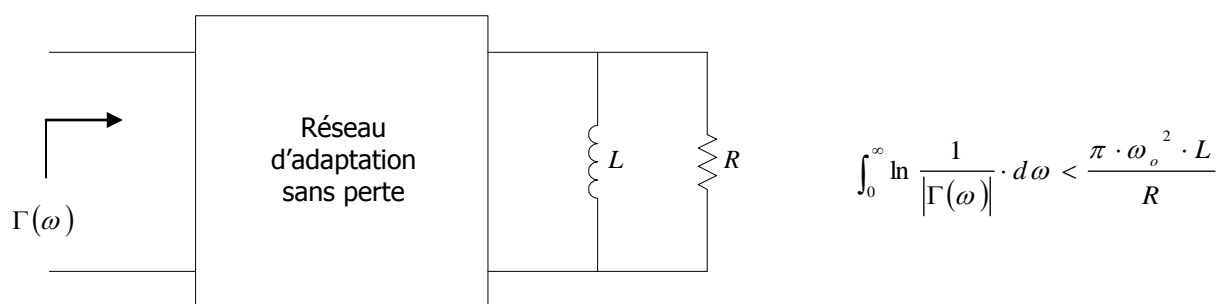


Figure 2-31: Critère de Bode-Fano pour un circuit RL parallèle

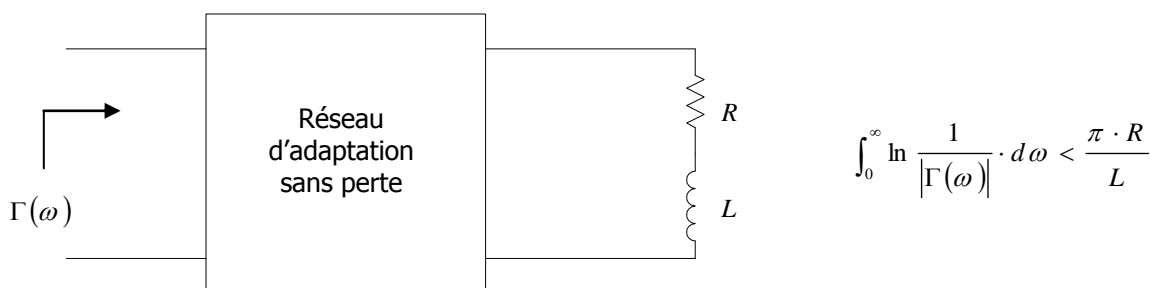


Figure 2-32: Critère de Bode-Fano pour un circuit RL série

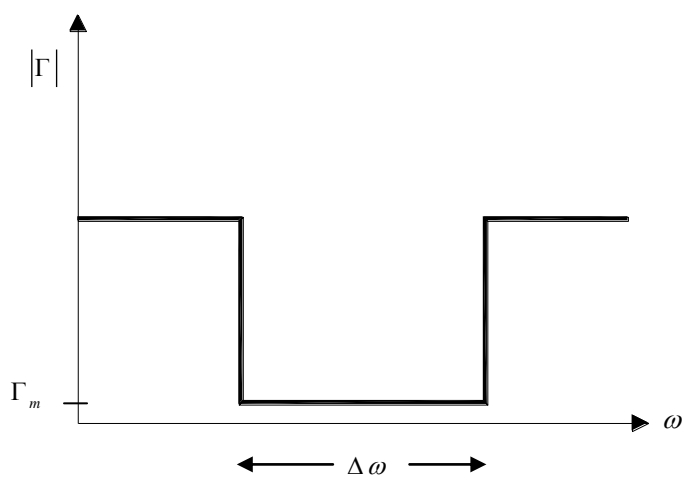


Figure 2-33: Illustration du critère de Bode-Fano