



**HAL**  
open science

## Quelques éléments de topologie

Emmanuel Moulay

► **To cite this version:**

| Emmanuel Moulay. Quelques éléments de topologie. DEA. 2007, pp.29. <cel-00168663>

**HAL Id: cel-00168663**

**<https://cel.hal.science/cel-00168663v1>**

Submitted on 29 Aug 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Quelques éléments de topologie

Moulay Emmanuel



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Divers théorèmes</b>	<b>5</b>
1.1	Notations . . . . .	5
1.2	Théorème de Sard-Brown . . . . .	5
1.3	Théorème d'Hurewicz . . . . .	8
1.4	Le lemme des 5 . . . . .	10
1.5	Commutativité de $\pi_n$ . . . . .	12
1.6	Théorème de Jordan pour les courbes . . . . .	13
1.7	Lemme de Nakayama . . . . .	14
1.8	Variétés de dimension 1 . . . . .	15
1.9	Le lemme de Morse . . . . .	18
1.10	Familles de courbes réelles . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Exercices</b>	<b>21</b>
2.1	Homologie . . . . .	21
2.2	Singularités . . . . .	28



# Chapitre 1

## Divers théorèmes

### 1.1 Notations

On note

$$\begin{aligned} S^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}, \\ D^n &= \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}, \\ D_+^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_n \geq 0\}, \\ D_-^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_n \leq 0\}. \end{aligned}$$

$\simeq$  signifie isomorphe,  $\sim$  signifie homologue et  $\approx$  signifie homotope.

### 1.2 Théorème de Sard-Brown

**Définition 1** Soit  $K$  un ensemble inclus dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  est dit de mesure nulle si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\{Q_i\}_{i \in I}$  famille de cubes ouverts telle que

1.  $K \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ ,
2.  $\sum_{i \in I} \text{vol}(Q_i) < \epsilon$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on note

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

On dit qu'une fonction est lisse si elle est de classe  $C^\infty$ .

**Proposition 2** *Si chaque point  $x \in K \subset \mathbb{R}^n$  possède un voisinage  $N$  qui vérifie  $K \cap N$  de mesure nulle, alors  $K$  est de mesure nulle.*

**Proposition 3** *Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est un espace compact dont l'intersection avec chaque hyperplan  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$  est de mesure nulle dans l'hyperplan, alors  $K$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^n$ .*

On peut maintenant énoncer le théorème de Sard-Brown donné par exemple dans [1].

**Théorème 4 (Théorème de Sard-Brown)** *Soit  $M^n$  une variété lisse,  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application lisse et  $C = \text{crit}(f) \subset M^n$  l'ensemble des points critiques de  $f$ , alors  $f(C)$ , qui est l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ , est de mesure nulle.*

**Preuve.** On pose  $f = (f_1, \dots, f_k)$ . Nous allons montrer le résultat par récurrence sur  $n$ .

Le cas  $n = 0$  est vrai.

Supposons le résultat vrai à l'ordre  $n - 1$ . Soit

$$D = \{x \in M^n; D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| = 1\} \subset C$$

l'ensemble des points où la dérivée de  $f$  s'annule. Nous allons scinder la preuve en deux parties :

1<sup>ère</sup> partie : Montrons que  $f(D)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^k$ . Si la dérivée de  $f$  s'annule en  $x$ , il en est de même de la dérivée de  $f_1$ . Si  $E$  est l'ensemble des points critiques de  $f_1$ , alors

$$f(D) \subset f_1(E) \times \mathbb{R}^{k-1}.$$

Comme  $\mathbb{R}^{k-1}$  peut être recouvert par un ensemble dénombrable de cubes de volume inférieur à 1,  $f_1(E) \times \mathbb{R}^{k-1}$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^k$  si  $f_1(E)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi, il suffit de prouver le résultat pour  $k = 1$ , i.e. pour  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit

$$D_i = \{x \in U : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| \leq i\}$$

alors on a

$$D = D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n$$

et tous les  $D_i$  sont fermés.

Montrons que  $f(D_n)$  est de mesure nulle. Il suffit de montrer que  $f(D_n \cap Q)$  est de mesure nulle pour tout cube  $Q \subset U$ , d'après la Proposition 2. Soit  $Q$  un cube de côté  $s$ . On partitionne  $Q$  en  $m^n$  petits cubes de côté  $\frac{s}{m}$  de diamètre  $\frac{s\sqrt{n}}{m}$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $x_0 \in Q \cap D_n$  et soit  $Q'$  un des petits cubes contenant  $x_0$ . Comme les dérivées partielles de  $f$  d'ordre  $n + 1$  sont bornées sur  $Q$ , on en

déduit d'après la formule de Taylor, qu'il existe une constante  $c$ , indépendante de  $m$ , telle que

$$x \in Q' \implies |f(x) - f(x_0)| \leq c \|x - x_0\|^{n+1} \leq c \left( s \frac{\sqrt{n}}{m} \right)^{n+1}.$$

Ainsi  $f(Q')$  est contenu dans un intervalle de longueur  $\frac{a}{m^{n+1}}$  où  $a$  est une constante indépendante de  $m$ . Par conséquent,  $f(D_n \cap Q)$  est contenu dans une réunion d'intervalles de longueur

$$L \leq a \frac{m^n}{m^{n+1}} = \frac{a}{m}.$$

Comme  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a}{m} = 0$ ,  $f(D_n \cap Q)$  est de mesure nulle.

Montrons que  $f(D_i \setminus D_{i+1})$  est de mesure nulle pour  $i < n$ . Soit  $x_0 \in D_i \setminus D_{i+1}$ . Toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à  $i$  de  $f$  sont nulles en  $x_0$ , et il existe une dérivée partielle de  $f$  d'ordre  $i + 1$  qui ne s'annule pas en  $x_0$ . Soit  $g$  une dérivée partielle d'ordre  $i$  de  $f$  telle que sa dérivée en  $x_0$  soit non nulle. Ainsi par continuité, on en déduit que la dérivée de  $g$  est non nulle dans un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$ . Comme  $g = 0$  sur  $D_i \setminus D_{i+1}$ , on a  $g(x_0) = 0$  et d'après ce qui précède,  $x_0$  est un point régulier de  $g$ . On en déduit que  $0$  est une valeur régulière de  $g$  (i.e.  $0$  n'est pas une valeur critique de  $g$ ). Posons

$$V^{n-1} = g^{-1}(0)$$

qui est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$ . Comme  $g(x_0) = 0$ , on en déduit que la dérivée de  $f|_{V^{n-1}}$  s'annule en  $x_0$ . Ainsi on a  $x_0 \in \text{crit}(f|_{V^{n-1}})$  et

$$((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) \subset \text{crit}(f|_{V^{n-1}}).$$

Par conséquent,

$$f((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) = f|_{V^{n-1}}((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) \subset f|_{V^{n-1}}(\text{crit}(f|_{V^{n-1}}))$$

et comme  $f|_{V^{n-1}}(\text{crit}(f|_{V^{n-1}}))$  est de mesure nulle d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$f((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V)$$

est de mesure nulle. Enfin, on applique la Proposition 2, et il vient que  $f(D_i \setminus D_{i+1})$  est de mesure nulle.

2<sup>ème</sup> partie : Montrons que  $f(C \setminus D)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^k$ . Soit  $x_0 \in C$ , comme la dérivée de  $f$  ne s'annule pas en  $x_0$ , il existe une application dite de projection de la dernière coordonnée

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_k) &\mapsto t_k \end{aligned}$$

telle que la dérivée de  $g \circ f$  ne s'annule pas en  $x_0$ . Ainsi, il existe un voisinage de  $U$  de  $x_0$  où la dérivée de  $g \circ f$  ne s'annule pas, i.e. où  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$  n'a que des valeurs régulières. Pour  $t \in R$ ,

$$V_t^{n-1} = (g \circ f)^{-1}(t)$$

est alors une sous-variété lisse de dimension  $n - 1$ . Soit

$$f_t = f|_{V_t^{n-1}} : V_t^{n-1} \rightarrow g^{-1}(t) = \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}.$$

On voit que si  $x_0$  est un point critique pour  $f$ , alors  $x_0$  est un point critique pour  $f_t$ . D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de  $f_t$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}$  pour tout  $t$ . Ainsi

$$(f((C \setminus D) \cap U \cap Q)) \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\})$$

est de mesure nulle pour tout  $t$  et pour tout cube  $Q$ . D'après les Propositions 2 et 3, on en déduit que  $f(C \setminus D)$  est de mesure nulle. ■

### 1.3 Théorème d'Hurewicz

Rappelons le théorème de Hurewicz que l'on peut trouver dans [1].

**Théorème 5 (Théorème d'Hurewicz)** *Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs,  $x_0 \in X$ ,*

$$\widetilde{\pi}_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) / [\pi_1, \pi_1]$$

*et soit  $\Phi$  le morphisme défini par*

$$\begin{array}{ccc} \Phi : (\pi_1(X, x_0), *) & \rightarrow & (H_1(X), +) \\ [[f]] & \mapsto & [f]. \end{array}$$

$\Phi_*$  définie par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H_1(X) \\ \downarrow pr & \searrow \Phi_* & \\ \widetilde{\pi}_1(X, x_0) & & \end{array}$$

*est un isomorphisme.*

**Preuve.** D'abord, on définit l'application qui sera l'inverse de  $\Phi_*$ . Soit  $f \in \Delta_1(X)$ , posons

$$\widehat{f} = \lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1}$$

où  $\lambda_x$  désigne un chemin allant de  $x_0$  à  $x$ . Ainsi,  $\widehat{f}$  est un lacet en  $x_0$ . Notons

$$\begin{array}{ccc} \psi : \Delta_1(X) & \rightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ f & \mapsto & [[\widehat{f}]] \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \psi(f + g - f - g) \\ &= \left[ \widehat{[f]} \right] * \widehat{[[g]]} * \left[ \widehat{[f]} \right]^{-1} * \widehat{[[g]]}^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent,  $\psi$  s'étend à un morphisme

$$\Psi : \Delta_1(X) \rightarrow \widetilde{\pi}_1(X, x_0)$$

et l'on note  $\widetilde{[[f]]}$  la classe de  $[[f]]$  dans  $\widetilde{\pi}_1(X, x_0)$ .

Montrons que  $\Psi$  envoie  $B_1(X)$  sur  $1_{\widetilde{\pi}_1(X, x_0)}$ . Soit

$$\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$$

un 2-simplexe, posons  $\sigma(e_i) = y_i$ ,  $f = \sigma^{(2)}$ ,  $g = \sigma^{(1)}$ ,  $h = \sigma^{(0)}$ . On a

$$\begin{aligned}\Psi(\partial\sigma) &= \Psi(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \\ &= \Psi(g - h^{-1} + f) = \Psi(f + g - h^{-1}) \\ &= \Psi(f) * \Psi(g) * \Psi(h^{-1})^{-1} \\ &= \widetilde{\left[ \widehat{[f]} \right] * \widehat{[[g]]} * \left[ \widehat{(h^{-1})^{-1}} \right]} \\ &= \widetilde{\left[ \widehat{[f * g * (h^{-1})^{-1}} \right]} \\ &= \widetilde{\left[ \lambda_{y_0} * f * \lambda_{y_1}^{-1} * \lambda_{y_1} * g * \lambda_{y_2}^{-1} * (\lambda_{y_0} * h^{-1} * \lambda_{y_2}^{-1})^{-1} \right]} \\ &= \widetilde{\left[ \lambda_{y_0} * f * \lambda_{y_1}^{-1} * \lambda_{y_1} * g * \lambda_{y_2}^{-1} * \lambda_{y_2} * h * \lambda_{y_0}^{-1} \right]} \\ &= \widetilde{\left[ \lambda_{y_0} * f * g * h * \lambda_{y_0}^{-1} \right]} \\ &= \widetilde{[constante]} \\ &= 1_{\widetilde{\pi}_1(X, x_0)} \text{ car } f * g * h \stackrel{\text{homotope}}{\approx} \text{constante}.\end{aligned}$$

On sait que  $\Psi$  induit un morphisme

$$\Psi_* : H_1(X) \rightarrow \widetilde{\pi}_1(X, x_0).$$

Si  $f$  est un lacet et si  $\lambda_{x_0}$  est le chemin constant égal à  $x_0$ , alors

$$\Psi_* \circ \Phi_* \widetilde{[[f]]} = \Psi_* [f] = \widetilde{[[\lambda_{x_0} * f * \lambda_{x_0}^{-1}]]} = \widetilde{[[f]]}.$$

On a donc montré que  $\Psi_* \circ \Phi_* = 1_{\widetilde{\pi}_1(X, x_0)}$ .

Soit  $\sigma$  un 1-simplexe dans  $X$ , alors on a

$$\begin{aligned}\Phi_* \circ \Psi(\sigma) &= \Phi_* \left[ \widetilde{\left[ \lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1} \right]} \right] \\ &= \left[ \lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1} \right] \\ &= \left[ \lambda_{\sigma(0)} + \sigma + \lambda_{\sigma(1)}^{-1} \right]\end{aligned}$$

et ceci est possible car si  $f$  et  $g$  sont deux chemins tels que  $f(1) = g(0)$ . Alors  $f * g - f - g = 0$  en homologie, ainsi

$$\Phi_* \circ \Psi(\sigma) = [\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}]$$

car si  $f$  est un chemin, alors  $f^{-1} + f = 0$  en homologie. D'où, il vient

$$\Phi_* \circ \Psi(\sigma) = [\sigma - \lambda_{\partial\sigma}]$$

Ainsi, si  $c$  est un 1-cycle alors

$$\Phi_* \circ \Psi(c) = [c]$$

d'où  $\Phi_* \circ \Psi_*(c) = [c]$ , ce qui termine la preuve. ■

## 1.4 Le lemme des 5

Non allons maintenant énoncer et démontrer le lemme des 5 que l'on peut trouver par exemple dans [1].

**Lemme 6 (Lemme des 5)** *Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq 5}$  et  $(B_i)_{1 \leq i \leq 5}$  deux familles d'espaces topologiques, on considère le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

*dont chaque carré commute, et dont les 2 suites horizontales sont exactes. Si  $f_1, f_2, f_4$ , et  $f_5$  sont des isomorphismes, alors  $f_3$  est un isomorphisme.*

**Preuve.** On note

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_3 & \xrightarrow{g_3} & A_4 & \xrightarrow{g_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_3 & \xrightarrow{h_3} & B_4 & \xrightarrow{h_4} & B_5 \end{array}$$

Soit  $a_3 \in \ker(f_3)$ , alors  $f_3(a_3) = 0$ . Or on a que

$$f_4(g_3(a_3)) = h_3(f_3(a_3)) = h_3(0) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$g_3(a_3) = a_4 \in \ker(f_4) = \{0\}.$$

Ainsi, on a  $g_3(a_3) = 0$ , et donc

$$a_3 \in \ker(g_3).$$

La suite étant exacte, il vient  $a_3 \in \text{Im}(g_2)$ . Il existe alors  $a_2 \in A_2$  tel que  $a_3 = g_2(a_2)$ . On a

$$f_2(a_2) = b_2 \in B_2$$

de plus

$$h_2(f_2(a_2)) = h_2(b_2) = f_3(g_2(a_2)) = f_3(a_3) = 0$$

ainsi

$$b_2 \in \ker(h_2) = \text{Im}(h_1).$$

Par conséquent, il existe  $b_1 \in B_1$  tel que  $b_2 = h_1(b_1)$ .  $f_1$  étant un isomorphisme, il existe  $a_1 \in A_1$  tel que  $b_1 = f_1(a_1)$ . Les carrés étant commutatifs, on a que

$$b_2 = h_1(f_1(a_1)) = f_2(g_1(a_1)).$$

Ainsi

$$b_2 = f_2(g_1(a_1)) = f_2(a_2)$$

et comme  $f_2$  est un isomorphisme, on a  $g_1(a_1) = a_2$ . Par suite, on a

$$a_2 \in \text{Im}(g_1) = \ker(g_2).$$

Donc

$$g_2(a_2) = g_2(g_1(a_1)) = a_3 = 0$$

ce qui entraîne que  $f_3$  est injective.

Soit  $b_3 \in B_3$ , on pose  $h_3(b_3) = b_4$ . On note alors

$$f_4^{-1}(h_3(b_3)) = f_4^{-1}(b_4) = a_4 \in A_4,$$

$$h_4(b_4) = b_5 \in \text{Im}(h_4) = \{0\}.$$

Ainsi, on en déduit que  $b_5 = 0$ , d'où

$$g_4(a_4) = a_5 = f_5^{-1}(h_4(b_4)) = f_5^{-1}(0) = 0$$

car  $f_5$  est un isomorphisme. Donc, d'après l'exactitude de la suite supérieure, il existe  $a_3 \in A_3$  tel que  $g_3(a_3) = a_4$ . On a

$$h_3(f_3(a_3) - b_3) = 0$$

car

$$h_3(f_3(a_3)) = f_4(g_3(a_3)) = f_4(a_4) = b_4 = h_3(b_3).$$

Ainsi d'après l'exactitude de la suite inférieure, il existe  $b_2 \in B_2$  tel que

$$h_2(b_2) = f_3(a_3) - b_3.$$

On pose  $f_2^{-1}(b_2) = a_2$ , et  $g_2(a_2) = a'_3$ . On a

$$f_3(g_2(a_2)) = h_2(f_2(a_2))$$

d'où

$$f_3(a'_3) = h_2(b_2) = f_3(a_3) - b_3.$$

Par conséquent

$$f_3(a_3 - a'_3) = b_3$$

ce qui montre que  $f_3$  est surjective. ■

## 1.5 Commutativité de $\pi_n$

Donnons un résultat sur la commutativité de  $\pi_n$  que l'on peut trouver dans [5].

**Théorème 7** *Soit  $X$  un espace topologique,  $x_0 \in X$  ; pour  $n \geq 2$ , le groupe  $\pi_n(X, x_0)$  est commutatif.*

**Preuve.** Nous allons faire la preuve dans le cas  $n = 2$ , le cas général étant identique. Soit

$$\phi, \psi : (S^2, N) \rightarrow (X, x_0)$$

deux applications continues, où  $N$  est le pôle nord de la sphère. On définit le produit dans  $\pi_2(X, x_0)$  par

$$[[\phi]] * [[\psi]] = [[\phi\psi]]$$

où

$$\phi\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \text{ est sur la calotte nord} \\ \psi(x) & \text{si } x \text{ est sur la calotte sud} \\ \phi(x) = \psi(x) = x_0 & \text{si } x \text{ est sur l'équateur} \end{cases}$$

$S^n$  étant homéomorphe  $D^n/S^{n-1}$ ,  $\phi$  et  $\psi$  peuvent être représentées par

$$\tilde{\phi}, \tilde{\psi} : (D^2, \tilde{N}) \rightarrow (X, x_0)$$

où  $\tilde{N}$  est le pôle nord du disque.  $\tilde{\phi}\tilde{\psi}$  est définie par

$$\tilde{\phi}\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}(x) & \text{si } x \text{ est dans le semi disque supérieur} \\ \tilde{\psi}(x) & \text{si } x \text{ est dans le semi disque inférieur} \\ \tilde{\phi}(x) = \tilde{\psi}(x) = x_0 & \text{si } x \text{ est sur le bord de chaque semi disque} \end{cases}$$

On réalise une rotation du diamètre de l'équateur de  $D^2$  autour du centre de  $D^2$ . Pour un angle  $\alpha \in [0, \pi]$ , on note

$$L_\alpha : D^2 \rightarrow D^2$$

l'application continue définie par la rotation d'angle  $\alpha$  autour du centre. On note par  $\tilde{\phi}\tilde{\psi}_\alpha$  l'application continue définie par

$$\tilde{\phi}\tilde{\psi}_\alpha(x) = \tilde{\phi}\tilde{\psi} \circ L_\alpha(x).$$

On a  $\tilde{\phi}\tilde{\psi}_0 = \tilde{\psi}\tilde{\phi}_\pi$ , d'où  $\phi\psi_0 = \psi\phi_\pi$ . Par conséquent

$$[[\phi\psi]] = [[\phi\psi_0]] = [[\psi\phi_\pi]] = [[\psi\phi]].$$

■

## 1.6 Théorème de Jordan pour les courbes

**Définition 8** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,

$$f : X \rightarrow Y$$

est un plongement si  $f : X \rightarrow f(X)$  est un homéomorphisme.

**Proposition 9** Soit  $Y$  un espace topologique compact tel que pour tout plongement  $f$ , on ait

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(Y)) = 0$$

alors pour  $I = [0, 1]$ , on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times Y)) = 0.$$

**Corollaire 10** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , si

$$f : D^r \rightarrow S^n$$

est un plongement alors

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(D^r)) = 0$$

et en particulier  $S^n \setminus f(D^r)$  est connexe.

**Preuve.** On montre le résultat par récurrence. Le résultat est clair pour  $r = 0$  d'après le résultat (2.2).

On suppose le résultat vrai à l'ordre  $r - 1$ . D'après la Proposition 9, on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times D^{r-1})) = 0.$$

Or  $D^r \simeq I \times D^{r-1}$ , ainsi on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times D^{r-1})) = \widetilde{H}_*(S^n \setminus f(D^r)) = 0.$$

Ceci montre en particulier que

$$H_0(S^n \setminus f(D^{r-1})) = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\#\{\text{composantes connexes de } S^n \setminus f(D^{r-1})\}}$$

et donc que  $S^n \setminus f(D^{r-1})$  est connexe. ■

**Théorème 11** Si  $f : S^r \rightarrow S^n$  est un plongement, alors

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - r - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est à dire que  $\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) \simeq \widetilde{H}_i(S^{n-r-1})$ .

**Preuve.** On va montrer le résultat par récurrence sur  $r$ .

Pour  $r = 0$ , on a

$$S^n \setminus f(0) \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx S^{n-1}$$

donc  $S^n \setminus f(0)$  et  $S^{n-1}$  ont la même homologie.

On suppose le résultat vrai à l'ordre  $r - 1$ , i.e.

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^{r-1})) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, pour un plongement  $f$  de  $S^r$  dans  $S^n$ , on pose

$$U_+ = S^n \setminus f(D_+^r)$$

et

$$U_- = S^n \setminus f(D_-^r).$$

On a

$$U_+ \cap U_- = S^n \setminus f(S^r)$$

et

$$U_+ \cup U_- = S^n \setminus f(S^{r-1}).$$

On applique le théorème de Mayer-Vietoris à  $U_+$  et  $U_-$  et on a la suite exacte longue suivante

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{i+1}(U_+) \oplus \widetilde{H}_{i+1}(U_-)}_0 &\rightarrow \widetilde{H}_{i+1}(S^n \setminus f(S^{r-1})) \rightarrow \widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) \\ &\rightarrow \underbrace{\widetilde{H}_i(U_+) \oplus \widetilde{H}_i(U_-)}_0 \cdots \end{aligned}$$

Or, d'après le Corollaire 10, les termes en somme directe sont nuls, ce qui montre que les termes intermédiaires sont isomorphes, d'où le résultat. ■

## 1.7 Lemme de Nakayama

**Proposition 12** Soit  $A$  un anneau unitaire commutatif. Si  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(A)$ , alors

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

**Théorème 13 (Lemme de Nakayama)** Soit  $A$  un anneau local et  $\underline{m}$  son idéal maximal,  $M$  un  $A$ -module finiment engendré et  $N$  un sous-module de  $M$  tel que

$$M \subset N + \underline{m}M$$

alors  $M = N$ .

**Preuve.** Soit  $M' = M/N$  et  $m_1, \dots, m_p$  des générateurs de  $M$ . On voit alors que

1. les classes d'équivalence  $\dot{m}_1, \dots, \dot{m}_p$  engendrent  $M'$
2.  $M = N + \underline{m}M \Rightarrow M' = \underline{m}M'$ .

En particulier, d'après le point 2., on a

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = a_{11}\dot{m}_1 + \dots + a_{1p}\dot{m}_p \\ \vdots \\ \dot{m}_p = a_{p1}\dot{m}_1 + \dots + a_{pp}\dot{m}_p \end{cases}$$

où  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in \underline{m}$ .

On écrit le système sous forme matricielle et il vient

$$(I - A) \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  et  $I$  est la matrice identité. On multiplie par la transposée de la matrice des cofacteurs et on obtient

$$\det(I - A) = \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 12, on a

$$\det(I - A) = 1 + a, \quad a \in \underline{m}.$$

$1 + a$  est inversible dans  $A$ , car sinon  $1 \in \underline{m}$  et on aurait  $\underline{m} = A$ !! D'où

$$(1 + a) \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que  $\dot{m}_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Comme

$$M' = (\dot{m}_1, \dots, \dot{m}_p) A$$

on conclut que  $M' = \{0\}$ , ce qui signifie que  $M = N$ . ■

## 1.8 Variétés de dimension 1

On s'intéresse ici aux variétés de dimension 1 dont voici l'un des principaux résultats que l'on peut trouver dans [2].

**Théorème 14** Une variété lisse connexe et dénombrable à l'infini de dimension 1 est difféomorphe à  $S^1$  si elle est compacte et à  $\mathbb{R}$  si elle n'est pas compacte.

La démonstration du résultat repose sur le fait qu'on sait qu'une telle variété admet un plongement dans  $\mathbb{R}^3$ . Donnons un résultat préliminaire.

**Définition 15** Soit  $C$  une sous-variété de dimension 1 d'un espace euclidien et

$$\varphi : ]a, b[ \rightarrow C$$

une paramétrisation de  $C$ , on dit que  $\varphi$  est une paramétrisation par longueur d'arc de  $C$  si pour tout  $t \in ]a, b[$ ,  $\|\varphi'(t)\| = 1$ .

**Lemme 16** Soit  $C$  une sous-variété de dimension 1 d'un espace euclidien,  $J$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et

$$\varphi : J \rightarrow C$$

une paramétrisation de  $C$  alors

- (i) il existe une paramétrisation par longueur d'arc de  $C$  de même image  $\varphi(J)$ .
- (ii) si  $\varphi_1 : J_1 \rightarrow C$  et  $\varphi_2 : J_2 \rightarrow C$  sont deux paramétrisations par longueur d'arc de  $C$ , alors il existe  $c \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $t \in J_2$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(c + t)$$

ou bien

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(c - t).$$

**Preuve.** (i) Soit  $t_0 \in J$ , on pose

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| du.$$

La fonction  $S$  est lisse, et sa dérivée est partout non nulle. Si  $I = S(J)$ , la fonction

$$\varphi \circ S^{-1} : I \rightarrow C$$

donne une paramétrisation par longueur d'arc de  $C$ .

(ii) Soit maintenant  $\varphi_1 : J_1 \rightarrow C$  et  $\varphi_2 : J_2 \rightarrow C$  deux paramétrisations par longueur d'arc de  $C$  d'image  $\varphi(J)$ . La fonction

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : J_2 \rightarrow J_1$$

est un difféomorphisme. De plus, en dérivant la relation

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)$$

on voit que  $\left|(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)'(t)\right| = 1$ . Donc la dérivée  $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)'(t)$  est égale à 1 ou  $-1$ . ■

**Preuve.** (du Théorème 14) Soit  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow C$  une paramétrisation par longueur d'arc. On peut la supposer maximale (éventuellement  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ ).

$\varphi(]a, b[)$  est ouvert car  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow C$  est un difféomorphisme local. Soit  $x \in \varphi(]a, b[) \setminus \varphi(]a, b[)$ , on a

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n)$$

où  $(t_n)_{n \geq 0}$  est une suite de points de  $]a, b[$ . Après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que  $(t_n)_{n \geq 0}$  converge. Sa limite est soit un point de  $]a, b[$ , soit  $a$ , soit  $b$ . Le premier cas est exclu, car on a supposé que  $x \notin \text{Im}(\varphi)$ . Supposons par exemple que la limite soit  $b$ . Soit

$$\psi : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow C$$

une paramétrisation par longueur d'arc de  $x$  dans  $C$ , telle que  $\psi(0) = x$ . Alors  $\varphi(t_n) \in \psi(J)$  pour  $n$  assez grand. Plus précisément, on a  $\varphi(t_n) = \psi(\eta_n)$ , pour un unique  $\eta_n$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ . D'après le Lemme 16, on a

$$\varphi(t) = \psi(\eta_n \pm (t - t_n)).$$

Pour  $n$  assez grand,  $\psi(\eta_n \pm (t - t_n))$  fournit un prolongement de  $\varphi$  au delà de  $b$ , ce qui contredit l'hypothèse de maximalité. Ceci montre que  $\varphi(]a, b[)$  est fermé. Donc  $\varphi(]a, b[)$  est fermé et ouvert dans  $C$ , ce qui montre par connexité que  $\varphi$  est surjective.

- Si  $\varphi$  est injective, on a une immersion bijective qui est un plongement, et donc  $\varphi$  réalise un difféomorphisme entre  $]a, b[$  et  $C$ . Ceci prouve que  $C$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ .
- Si  $\varphi$  n'est pas injective, prenons  $t_1, t_2 \in ]a, b[$  tels que

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

On peut supposer que  $t_1 = 0$  et  $t_2 = c > 0$ . Les vecteurs  $\varphi'(0)$  et  $\varphi'(c)$  sont de norme 1 et tangents à  $C$  en un même point, donc

$$\varphi'(0) = \pm \varphi'(c).$$

Le cas  $\varphi'(0) = -\varphi'(c)$  est exclu car le Lemme 16 appliqué aux paramétrisations  $\varphi(t)$  et  $\varphi(c - t)$  sur  $[0, c]$ , donnerait

$$\varphi(t) = \varphi(c - t)$$

soit en dérivant  $\varphi'(t) = -\varphi'(c - t)$ , puis  $\varphi'(\frac{c}{2}) = 0$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $\varphi'(0) = \varphi'(c)$ , et le Lemme 16 donne

$$\varphi(t) = \varphi(c + t), \quad c + t \in ]a, b[.$$

Mais, si  $]a, b[ \neq \mathbb{R}$ , cette relation donne aussi un prolongement de  $\varphi$  au delà de  $]a, b[$ , donc  $]a, b[ = \mathbb{R}$  et  $\varphi$  est périodique. Soit  $T$  sa plus petite période, si  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ , d'après le raisonnement précédent

$$\varphi(t) = \varphi(t_2 - t_1 + t) \quad \forall t, \forall (t_2 - t_1) \in T\mathbb{Z}.$$

Ainsi, par passage au quotient  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ,  $\varphi$  donne une immersion injective de  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  sur  $C$ , donc un plongement.

■

## 1.9 Le lemme de Morse

On énonce le lemme de Morse dont la preuve se trouve dans [3].

**Théorème 17 (Lemme de Morse)** *Soit  $p_0 \in M$  un point critique non dégénéré d'une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors il existe une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $U$  est un voisinage de  $p_0$  tel que  $\phi(p_0) = 0$  et pour tout  $x \in U$*

$$(f \circ \phi^{-1})(x) = f(p_0) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

$k$  s'appelle l'indice de  $f$  en  $p_0$  et il ne dépend pas du choix de la carte.

## 1.10 Familles de courbes réelles

**Notation 18** *Soit  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  une famille de courbes réelles  $C^\infty$  telle que*

$$X = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t \subseteq \mathbb{R}^n$$

*soit une surface algébrique  $C^\infty$  non compacte. On pose*

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

*la restriction d'une fonction polynomiale*

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Définition 19** *On dit que  $s \in f(X)$  est typique si l'application  $f$  est une  $C^\infty$  fibration triviale en  $s$  (i.e. de fibre  $f^{-1}(s)$ ); sinon  $s$  est dite atypique.*

L'ensemble des valeurs atypiques de  $f$  est noté  $\Lambda_f$ .

**Définition 20** *Soit  $a \leq b$  deux réels tels que  $]a, b[ \subset f(X) \setminus \Lambda_f$ ,  $\mathcal{Y}$  une composante connexe de  $f^{-1}(]a, b[)$ ,  $Y_t = X_t \cap \mathcal{Y}$ , on dit que  $p \in X$  est limite quand  $t$  tend vers  $a$  de la famille  $\{Y_t\}_{t \in ]a, b[}$  s'il existe une famille  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de points de  $\mathcal{Y}$  telle que  $p_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p$  et  $f(p_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$ .*

On note alors

$$\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t = \left\{ p \in X \mid p \text{ est limite quand } t \text{ tend vers } a \text{ de la famille } \{Y_t\}_{t \in ]a, b[} \right\}$$

On définit de manière analogue,  $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t$ .

**Remarque 21** On voit que  $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t \subseteq f^{-1}(a)$  et que  $\lim_{t \rightarrow b, t < b} Y_t \subseteq f^{-1}(b)$ .  $Y_t$  est connexe pour tout  $t \in ]a, b[$ .

**Définition 22** Soit  $s \in ]a, b[$  et  $Y_s$  une composante connexe de  $f^{-1}(s)$ , on dit que la famille  $\{Y_t\}_{t \in ]a, b[}$  disparaît à l'infini quand  $t$  tend vers  $a$ ,  $t > a$  si

$$\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t = \emptyset.$$

On définit de manière analogue, la notion de disparaître à l'infini quand  $t$  tend vers  $b$ ,  $t < b$ .

**Lemme 23** Soit  $a \in f(X)$  une valeur régulière de  $f$ , alors avec les notations précédentes on a

- (i)  $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \text{réunion de certaines composantes connexes de } f^{-1}(a) \end{array} \right.$   
(ii) si  $\{Y'_t\}_{t \in ]a, b[}$  est une famille de courbes de certaines composantes connexes de  $\mathcal{Y}'$  et si

$$\left( \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t \right) \cap \left( \lim_{t \rightarrow a, t > a} Y'_t \right) \neq \emptyset$$

alors  $\{Y_t\}_{t \in ]a, b[} = \{Y'_t\}_{t \in ]a, b[}$ .

**Preuve.** (i) Comme  $a$  est une valeur régulière, on peut montrer que  $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t$  est un ouvert en utilisant des coordonnées locales de  $f^{-1}(a)$ . Mais cette limite est aussi un fermé, ce qui montre le résultat.

(ii) Evident ■

**Définition 24** On dit que la famille  $\{Y_t\}_{t \in ]a, b[}$  se partage quand  $t$  tend vers  $a$ ,  $t > a$  si  $\lim_{t \rightarrow a, t > a} Y_t$  contient au moins deux composantes connexes non vides de  $f^{-1}(a)$ .

**Notation 25** On note les conditions

(B) : le nombre de Betti de la fibre  $X_t$  est constant pour  $t$  dans un voisinage de 0.

(E) : La caractéristique d'Euler  $\chi(X_t)$  est constante pour  $t$  dans un voisinage de 0.

(nV) : Il n'existe pas de composantes connexes de  $X_t$  qui disparaissent à l'infini quand  $t$  tend vers 0,  $t > 0$  ou  $t < 0$ .

(nS) : Il n'existe pas de composantes connexes de  $X_t$  qui se partagent à l'infini quand  $t$  tend vers 0,  $t > 0$  ou  $t < 0$ .

Donnons le principal résultat dont la preuve se trouve dans [4].

**Théorème 26** *Supposons que  $0 \in f(X)$  soit une valeur régulière de  $f$ , alors on a les équivalences suivantes :*

- (i)  $0$  est une valeur typique de  $f$
- (ii)  $(\mathbf{B})$  et  $(\mathbf{nV})$
- (iii)  $(\mathbf{E})$  et  $(\mathbf{nV})$
- (iv)  $(\mathbf{B})$  et  $(\mathbf{nS})$

# Chapitre 2

## Exercices

### 2.1 Homologie

**Exercice 1** Soit  $\mathbb{P}^n(R) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  où

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*; y = \lambda x$$

et

$$U_i = \{[x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R) : x_i \neq 0\}.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}^n(R) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

**Solution 1** (C) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $U_i \subset \mathbb{P}^n(R)$ . Ainsi on a que

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subset \mathbb{P}^n(R).$$

(D) Soit  $[x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R)$ , posons

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n(R) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto [x_1 : \dots : x_{n+1}] \end{aligned}$$

$(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ . Il existe  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  tel que  $x_i \neq 0$ . Ainsi

$$\Pi(x_1, \dots, x_{n+1}) \in U_i$$

ce qui montre que

$$[x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Donc on a que

$$\mathbb{P}^n(R) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

**Exercice 2** Soit  $U_i = \{[x] = [x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R) : x_i \neq 0\}$  et

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [x] &\mapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Montrer que  $\varphi_i$  est bijective.

**Solution 2** Soit  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  alors

$$\varphi_i(y_1 y_i, \dots, y_{i-1} y_i, y_i, y_i^2, y_{i+1} y_i, \dots, y_n y_i) = (y_1, \dots, y_n)$$

si  $(y_1 y_i, \dots, y_{i-1} y_i, y_i, y_i^2, y_{i+1} y_i, \dots, y_n y_i) \in U_i$ , c'est-à-dire si  $y_i \neq 0$ . Ainsi  $\varphi_i$  est surjective.

Soit  $[x]$  et  $[y]$  dans  $U_i$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{x_i} = \frac{y_1}{y_i} \\ \vdots \\ \frac{x_{i-1}}{x_i} = \frac{y_{i-1}}{y_i} \\ \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{y_{i+1}}{y_i} \\ \vdots \\ \frac{x_{n+1}}{x_i} = \frac{y_{n+1}}{y_i} \end{array} \right.$$

Si  $\lambda = \frac{x_i}{y_i}$  alors il vient  $[x] = [\lambda y]$ . Or on a  $[y] = [\lambda y]$ , ainsi  $[x] = [y]$  et  $\varphi_i$  est injective.

**Exercice 3** Calculer  $H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

**Solution 3** D'après l'Exercice 1, on a

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \amalg \mathbb{C}^{n-1} \amalg \dots \amalg \mathbb{C}^1 \amalg \mathbb{C}^0$$

où  $\mathbb{C}^i = \mathbb{R}^{2i} \xrightarrow{\text{homeo}} D^{2i}$ . On sait que la suite en homologie

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+2}} P_{n+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} P_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\delta_n} \dots \xrightarrow{\delta_1} P_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\delta_0} 0$$

nous donne

$$H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \ker \delta_* / \text{Im } \delta_*$$

Or

$$\begin{aligned} P_i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &= \mathbb{Z} \# \{\text{cellules de dimensions } i \text{ de } \mathbb{C}\mathbb{P}^n\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est pair et } 0 \leq i \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi la suite en homologie devient

$$\dots 0 \xrightarrow{\delta_{2n+2}} 0 \xrightarrow{\delta_{2n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_{2n}} 0 \xrightarrow{\delta_{2n-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_{2n-2}} \dots \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_0} 0$$

d'où

$$\begin{cases} \text{Im } \delta_{2k} = 0 & \text{pour } 0 \leq k \leq n \\ \ker \delta_{2k} = \mathbb{Z} & \text{pour } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \text{Im } \delta_{2k-1} = \delta_{2k-1}(0) & \text{pour } 1 \leq k \leq n \\ \ker \delta_{2k-1} = 0 & \text{pour } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Donc, il vient

$$\begin{aligned} H_i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &= \mathbb{Z} && \text{pour } i \text{ pair et } 0 \leq i \leq 2n \\ &= 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

**Exercice 4** Soit  $A \subset X$  deux espaces topologiques et  $i : A \hookrightarrow X$  une  $A$  rétracte de  $X$ .

(i) Montrer que la suite exacte longue de la paire  $(A, X)$  se décompose en suite exactes courtes

$$0 \rightarrow H_k(A) \xrightarrow{(i_k)_*} H_k(X) \xrightarrow{(j_k)_*} H_k(X, A) \rightarrow 0$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$

(ii) En déduire que  $H_k(X) \simeq H_k(A) \oplus H_k(X, A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Solution 4** (i) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a la suite exacte longue de la paire suivante

$$\cdots \rightarrow H_{k-1}(X, A) \xrightarrow{(\delta_{k-1})_*} H_k(A) \xrightarrow{(i_k)_*} H_k(X) \xrightarrow{(j_k)_*} H_k(X, A) \xrightarrow{(\delta_k)_*} H_{k-1}(A) \rightarrow \cdots$$

On en déduit que  $\text{Im}(i_k)_* = \ker(j_k)_*$ .

Il existe  $r : X \rightarrow A$  tel que  $r \circ i = \text{id}_A$ , ainsi

$$((r \circ i)_k)_* = (r_k)_* \circ (i_k)_* = \text{id}_{H_k(A)}$$

d'où  $(i_k)_*$  est injective.

On a

$$(j_k)_\Delta : \Delta_k(X) \rightarrow \Delta_k(X, A) = \Delta_k(X)/\Delta_k(A)$$

qui est surjective et comme

$$\begin{aligned} (j_k)_* : H_k(X) &\rightarrow H_k(X, A) \\ [c] &\mapsto [(j_k)_\Delta(c)] \end{aligned}$$

on en déduit que  $(j_k)_*$  est surjective.

(ii) D'après (i), on en déduit que

$$H_k(X)/\ker(j_k)_* \simeq \text{Im}(j_k)_*.$$

Or, on sait que  $\text{Im}(j_k)_* = H_k(X, A)$  et que  $\ker(j_k)_* = \text{Im}(i_k)_*$ . De plus, on a que  $\text{Im}(i_k)_* \simeq H_k(A)$ . Par conséquent,

$$H_k(X)/H_k(A) \simeq H_k(X, A)$$

ce qui montre que

$$H_k(X) \simeq H_k(A) \oplus H_k(X, A).$$

**Exercice 5** Soit  $(X, Y, Z)$  un triplet topologique (i.e.,  $Y \subset X$  et  $Z \subset Y$ ) et  $(\Delta_*(X), \partial_*^X)$ ,  $(\Delta_*(Y), \partial_*^Y)$  et  $(\Delta_*(Z), \partial_*^Z)$  les complexes de chaînes respectifs.

(i) Montrer que la suite

$$0 \rightarrow \Delta_k(Y, Z) \xrightarrow{(i_{\Delta'})_k} \Delta_k(X, Z) \xrightarrow{(j_{\Delta'})_k} \Delta_k(X, Y) \rightarrow 0$$

est exacte pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(ii) En déduire pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la suite exacte longue d'homologie du triplet :

$$\dots \rightarrow H_k(Y, Z) \xrightarrow{(i_k)_*} H_k(X, Z) \xrightarrow{(j_k)_*} H_k(X, Y) \xrightarrow{(\partial_k)_*} H_{k-1}(Y, Z) \xrightarrow{(\delta_k)_*} \dots$$

**Solution 5** (i) Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  l'inclusion, on note  $c + \Delta_k(Z)$  un élément de  $\Delta_k(Y, Z) = \Delta_k(Y)/\Delta_k(Z)$ . On pose

$$(i_{\Delta})_k : \begin{array}{l} \Delta_k(Y) \hookrightarrow \Delta_k(X) \\ c \mapsto c \end{array}$$

l'inclusion. On a alors

$$(i_{\Delta'})_k : \begin{array}{l} \Delta_k(Y, Z) \hookrightarrow \Delta_k(X, Z) \\ c + \Delta_k(Z) \mapsto c + \Delta_k(Z) \end{array}$$

l'inclusion qui est injective.

On pose

$$(j_{\Delta'})_k : \begin{array}{l} \Delta_k(X, Z) \rightarrow \Delta_k(X, Y) \\ c + \Delta_k(Z) \mapsto c + \Delta_k(Y) \end{array}$$

qui existe car  $Z \subset Y \subset X$  et est surjective.

( $\subset$ ) Soit  $c + \Delta_k(Z) \in \Delta_k(Y, Z)$ , on a

$$\begin{aligned} (j_{\Delta'})_k \circ (i_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z)) &= (j_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z)) \\ &= c + \Delta_k(Y) \\ &= \Delta_k(Y) \text{ car } c \in \Delta_k(Y). \end{aligned}$$

( $\supset$ ) Soit  $c + \Delta_k(Z) \in \ker(j_{\Delta'})_k$ , c'est à dire que  $c \in \Delta_k(Y)$  alors

$$c + \Delta_k(Z) = (i_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z))$$

via l'inclusion  $(i_{\Delta'})_k$ , ce qui montre que

$$\ker(j_{\Delta'})_k \subset \text{Im}(i_{\Delta'})_k.$$

(ii) Ce résultat vient du théorème suivant [1, Theorem 5.6].

**Exercice 6** Montrer que  $S^{n-1}$  n'est pas une rétracte de  $D^n$ .

**Solution 6** Supposons que  $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  soit une  $S^{n-1}$  rétracte de  $D^n$ , alors il existe

$$r : D^n \rightarrow S^{n-1}$$

tel que  $r \circ i = id_{S^{n-1}}$ . On a alors

$$((r \circ i)_{k-1})_* = (r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_* = id_{\widetilde{H}_{k-1}(S^{k-1})} \quad (2.1)$$

où

$$\widetilde{H}_{k-1}(S^{k-1}) \xrightarrow{(i_{k-1})_*} \widetilde{H}_{k-1}(D^k) \xrightarrow{(r_{k-1})_*} \widetilde{H}_{k-1}(S^{k-1}).$$

Or on sait que

$$\widetilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ainsi, les égalités (2.1) donnent la suite

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{(i_{k-1})_*} 0 \xrightarrow{(r_{k-1})_*} \mathbb{Z}.$$

Soit  $z \in \mathbb{Z}$ , d'après (2.1) on a

$$(r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_*(z) = (r_{k-1})_*(0) = z. \quad (2.3)$$

Soit  $z' \in \mathbb{Z} \setminus \{z\}$ , alors

$$(r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_*(z') = (r_{k-1})_*(0) = z$$

d'après (2.3), ce qui contredit (2.1)!

**Exercice 7** (Théorème de Brouwer) Montrer que toute application continue

$$f : D^n \rightarrow D^n$$

possède un point fixe.

**Solution 7** Supposons que  $f : D^n \rightarrow D^n$  continue, ne possède pas de point fixe.

On construit alors

$$\begin{aligned} r : D^n &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto [f(x), x] \cap S^{n-1} \end{aligned}$$

où  $[f(x), x]$  désigne la demi-droite d'origine  $f(x)$  passant par  $x$ .  $r$  est continue et elle définit une  $S^{n-1}$  rétracte de  $D^n$ , ce qui contredit l'Exercice 6.

**Exercice 8** Montrer que

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Solution 8** *Posons*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (S_n)$$

$$H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (D_n)$$

$$H_i(S^n, D_+^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (R_n)$$

Montrons ces 3 assertions par une récurrence “en cascade” sur  $n$ .  
D’abord, on a

$$H_i(S^0, D_+^0) \simeq H_i(\{\text{point}\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que  $(R_n) \Leftrightarrow (S_n)$ . Ceci vient de la suite exacte en homologie de la paire  $(S^n, D_+^n)$  et du fait que  $D_+^n$  soit contractible :

$$0 = \widetilde{H}_i(D_+^n) \rightarrow \widetilde{H}_i(S^n) \rightarrow H_i(S^n, D_+^n) \rightarrow \widetilde{H}_{i-1}(D_+^n) = 0$$

Montrons que  $(R_n) \Leftrightarrow (D_n)$ . Soit  $U$  un “petit” voisinage du pôle nord de  $S^n$ , d’après l’axiome d’excision, on a

$$\widetilde{H}_i(S^n, D_+^n) \simeq \widetilde{H}_i(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U).$$

Or  $(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U) \approx (D_-^n, S^{n-1})$ , on sait que

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U) \simeq \widetilde{H}_i(D_-^n, S^{n-1})$$

ce qui montre le résultat.

Montrons que  $(D_n) \Leftrightarrow (S_{n-1})$ . Ceci vient de la suite exacte en homologie de la paire  $(D^n, S^{n-1})$  et du fait que  $D^n$  soit contractible :

$$0 = \widetilde{H}_i(D^n) \rightarrow H_i(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow \widetilde{H}_{i-1}(D^n) = 0$$

Finalement, on a

$$(D_0) \Leftrightarrow (R_0) \Leftrightarrow (S_0) \Rightarrow (D_1) \Rightarrow (R_1) \Rightarrow (S_1) \Rightarrow (D_2) \Rightarrow \dots$$

**Exercice 9** Si  $f : S^n \rightarrow S^n$  est continue, on définit le degré de  $f$  comme l’entier  $\deg(f)$  vérifiant

$$(f_n)_*(x) = (\deg(f))x, \quad \forall x \in \widetilde{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

On remarque immédiatement que

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g) \quad (2.4)$$

et on suppose connu le fait que le degré de

$$\begin{aligned} f : S^n &\rightarrow S^n \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est  $-1$ . Montrer que le degré de l'application antipodale

$$\begin{aligned} g : S^n &\rightarrow S^n \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

est  $(-1)^{n+1}$ .

**Solution 9** L'application  $f$  n'est pas topologiquement différente des applications inversant une autre coordonnée. Ainsi toutes ces applications sont de degré  $-1$ . Comme  $g$  est la composée de ces  $n+1$  applications, on a d'après la remarque (2.4) que

$$\deg(g) = (-1)^{n+1}.$$

**Exercice 10** Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques.  $i : A \hookrightarrow X$  est une rétracte de déformation s'il existe

$$\phi_t : X \rightarrow X, \quad t \in [0, 1]$$

où

$$\begin{cases} \phi_0 = id_X \\ \phi_1(X) \subset A \\ \phi_1|_A = id_A \end{cases}$$

On a alors  $\phi_1 \circ i = id_A$ .

- (i) Montrer que  $\phi_1$  est une homotopie d'équivalence.
- (ii) Dédurre que  $H_k(X) \simeq H_k(A)$
- (iii) En déduire  $H_k(X, A)$ .

**Solution 10** (i) Posons

$$\begin{aligned} F : X \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (x, t) &\rightarrow \phi_t(x) \end{aligned}$$

alors  $F(x, 0) = id_X$  et  $F(x, 1) = i \circ \phi_1(x)$ . Ainsi,  $F$  est une homotopie. Donc on a

$$i \circ \phi_1 \approx id_X$$

Et comme  $\phi_1 \circ i = id_A$ , on en déduit que  $\phi_1$  est une homotopie d'équivalence.

- (ii) L'homotopie étant un invariant homologique, on a

$$H_k(X) \simeq H_k(A), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- (iii) Par théorème, on a la suite exacte longue suivante

$$\dots \rightarrow H_{k-1}(X, A) \rightarrow H_k(A) \xrightarrow{\simeq} H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow \dots$$

ce qui montre que

$$H_k(X, A) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

## 2.2 Singularités

**Exercice 11** Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , calculer le nombre de Milnor  $\mu(f)$  pour le germe en 0 de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x^n + y^m \end{aligned}$$

Puis généraliser.

**Solution 11** On pose  $I = (x^{n-1}, y^{n-1})\mathcal{O}$ . On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} a_{i,j} x^i y^j \\ &= \underbrace{\sum_{j \geq 0} a_{0,j} y^j + x \sum_{j \geq 0} a_{1,j} y^j + \cdots + x^{n-2} \sum_{j \geq 0} a_{n-2,j} y^j}_{n-1 \text{ termes}} + \underbrace{x^{n-1} \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} a_{i+n-1,j} x^i y^j}_{\in I} \end{aligned}$$

Considérons un des  $n-1$  termes  $x^k \sum_{j \geq 0} a_{k,j} y^j$ . Il vient

$$x^k \sum_{j \geq 0} a_{k,j} y^j = x^k \left[ \underbrace{a_{k,0} + a_{k,1}y + \cdots + a_{k,m-1}y^{m-2}}_{m-1 \text{ termes}} + y^{m-1} \underbrace{\left( \sum_{j \geq 0} a_{k,j+m-1} y^j \right)}_{\in I} \right]$$

On voit ainsi que l'on obtient une base de  $\mathcal{O}/I$  formée de  $(n-1)(m-1)$  termes ; donc

$$\mu(f) = (n-1)(m-1).$$

On montre de la même manière que pour

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1^{k_1} + \cdots + x_n^{k_n} \end{aligned}$$

$$\mu(g) = (k_1 - 1) \cdots (k_n - 1).$$

# Bibliographie

- [1] E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [2] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Presse Universitaires de Grenoble, EDP Sciences, 1996.
- [3] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1963.
- [4] M. Tibar and A. Zaharia. Asymptotic behavior of families of real curves. *Manuscripta Math.*, 99(3) :383–393, 1999.
- [5] V.A. Vassiliev. *Introduction to topology*, volume 14. Student Mathematical Library, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.