

Interactions électrofaibles et introduction à la supersymétrie

Aldo Deandrea

▶ **To cite this version:**

Aldo Deandrea. Interactions électrofaibles et introduction à la supersymétrie. DEA. Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2007, pp.210. cel-00171836

HAL Id: cel-00171836
https://cel.hal.science/cel-00171836

Submitted on 13 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commentaires/corrections
par e-mail à deandrea@ipnl.in2p3.fr

Interactions électrofaibles et introduction à la supersymétrie

Aldo Deandrea

Institut de Physique Nucléaire de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1,

bâtiment Dirac, 4 rue Enrico Fermi, 69622 Villeurbanne, France

Mes remerciements vont en particulier à Maurice Giffon et Maurice Kibler pour les conseils et la lecture critique du cours qui m'a permis d'améliorer le texte initial. Je remercie aussi Pierre-Antoine Delsart, Sonia Fleck et Céline Pujol pour la lecture d'une partie du texte.

http://deandrea.home.cern.ch/deandrea/

Préface

Cette introduction aux interactions électrofaibles est la version écrite d'un cours de Master de Sciences de la matière (2ème année) "Interactions électrofaibles et introduction à la supersymétrie" que j'ai donné à l'École Normale Supérieure de Lyon, option Champs et Particules, en janvier-mars 2007. Le cours, d'une durée d'une vingtaine d'heures, ne permet pas de donner un panorama complet du sujet. Pour cette raison à la fin de chaque chapitre une bibliographie donne des suggestions pour des lectures ultérieures. J'ai donné la préférence aux notes disponibles sur le réseau et à quelque livre qu'on peut trouver facilement dans les bibliothèques. La notation utilisée pour les spineurs est celle de la supersymétrie, en termes des spineurs de Weyl à deux composantes. Dans les applications du modèle standard cette notation est peu courante et souvent peu pratique. Pour cette raison j'utilise la notation de Dirac avec les spineurs à quatre composantes dans les applications du modèle standard. Ce choix est fait délibérément pour familiariser l'étudiant avec les deux notations. L'appendice traite en détail les spineurs et les règles de Feynman. La lecture de l'appendice est conseillée avant celle du texte pour le lecteur peu familier avec le sujet. Le traitement du modèle standard avec les spineurs de Weyl est inspiré du livre de Pierre Ramond "Journeys beyond the standard model", un "voyage" que je conseille à tous.

La supersymétrie est traitée sans faire référence au formalisme des superchamps pour d'une part garantir une continuité par rapport au traitement du modèle standard et d'autre part à cause des limites de temps imposées par la durée du cours.

La métrique de l'espace–temps plat utilisée dans ces notes est celle de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Table des matières

1 Vers le modèle standard 1
- 1.1 La théorie $V-A$ . . . 1
  - 1.1.1 Exemple : $\nu e \to \nu e$ dans la théorie de Fermi . . . 4
  - 1.1.2 Exemple : La constante de Fermi et $\mu \to \nu_\mu e \bar{\nu}_e$ . . . 7
- 1.2 Théories de jauge . . . 9
  - 1.2.1 Invariance de jauge globale . . . 9
  - 1.2.2 La symétrie $U(1)$ . . . 9
  - 1.2.3 La symétrie $SU(2)$ . . . 10
  - 1.2.4 Invariance de jauge locale . . . 11
  - 1.2.5 Électromagnétisme . . . 11
  - 1.2.6 Théorie de Yang-Mills . . . 14
  - 1.2.7 Quantification d'une théorie de jauge . . . 16
- 1.3 Renormalisabilité . . . 18
  - 1.3.1 Masses et champs de jauge . . . 19
  - 1.3.2 Exemple : $\nu e \to \nu e$ avec un boson de jauge massif . . . 20
  - 1.3.3 Masse et renormalisabilité . . . 21
  - 1.3.4 Exercice A . . . 23
- 1.4 Solution des exercices . . . 24
- 1.5 Bibliographie . . . 25

2 Brisure spontanée de symétrie 26
- 2.1 Brisure de symétrie et taille d'un système . . . 26
- 2.2 Brisure spontanée d'une symétrie discrète . . . 29
- 2.3 Brisure spontanée d'une symétrie continue . . . 31
  - 2.3.1 Exemple : $O(3)$ . . . 31
  - 2.3.2 Exercice A . . . 34
- 2.4 Théorème de Goldstone . . . 34
  - 2.4.1 Brisure spontanée d'une symétrie interne . . . 35

2.4.2 Brisure spontanée d'une symétrie de l'espace–temps . . 38
2.4.3 Exercice B 39
2.5 Mécanisme de Higgs 40
2.5.1 Exemple : $O(2)$ 40
2.5.2 Exercice C 43
2.6 Brisure dynamique de symétrie 44
2.7 Solution des exercices 45
2.8 Bibliographie 47

3 Lagrangien du modèle standard 48
3.1 Secteur de jauge 48
3.2 Secteur de Dirac 49
3.3 Secteur de Yukawa 51
3.3.1 Hypercharge et anomalies 51
3.3.2 Interactions de Yukawa 53
3.4 Secteur de Higgs 56
3.4.1 Exercice A 57
3.4.2 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible 57
3.4.3 Exercice B 60
3.4.4 Couplages du boson de Higgs 60
3.4.5 Symétrie custodiale 63
3.5 Solution des exercices 66
3.6 Bibliographie 66

4 Le modèle standard au niveau de l'arbre 68
4.1 Lagrangien et règles de Feynman 69
4.1.1 Exemple : $W^- \to e^- \bar{\nu}_e$ 72
4.1.2 Exemple : $Z \to f\bar{f}$ 74
4.1.3 Exemple : $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ 76
4.2 Le théorème d'équivalence 78
4.2.1 Exercice A 80
4.2.2 Exercice B 81
4.3 Solution des exercices 82
4.4 Bibliographie 85

5 Le modèle standard à une boucle 93
5.1 Les transformations BRS 94
5.1.1 Exemple : $SU(2)$ avec un doublet de fermions 95

5.1.2 Charges BRS et états physiques 96
5.1.3 Identités de Slavnov–Taylor 97
5.1.4 Exercice A 98
5.2 Renormalisation et contre–termes 98
5.2.1 Self–énergies des bosons de jauge 99
5.2.2 Self–énergies des fermions 100
5.2.3 Corrections aux vertex 101
5.3 Conditions de renormalisation on–shell 102
5.3.1 Renormalisation de la charge 104
5.3.2 Renormalisation de $\sin^2\theta_w$ 104
5.4 Régularisation dimensionnelle 104
5.4.1 Fonctions à un et deux points 106
5.4.2 Fonctions à trois points 107
5.4.3 Exemple : self–énergie du fermion 109
5.5 Solution des exercices 111
5.6 Bibliographie 112

6 Supersymétrie 113
6.1 L'algèbre supersymétrique 115
6.1.1 Supermultiplets 118
6.1.2 Supersymétrie étendue 121
6.2 Le multiplet chiral 122
6.2.1 Lagrangien du multiplet chiral 122
6.2.2 Interactions du multiplet chiral 125
6.2.3 Exercice A : Le modèle de Wess–Zumino 128
6.3 Le multiplet vecteur 129
6.3.1 Lagrangien du multiplet vecteur 129
6.3.2 Interactions de jauge supersymétriques 130
6.4 La supersymétrie comme théorie de jauge 131
6.4.1 Supergravité globale 131
6.4.2 Supergravité locale 133
6.4.3 Théories non renormalisables 133
6.5 Solution des exercices 134
6.6 Bibliographie 135

7 Brisure de la supersymétrie 138
7.1 Brisure souple 138
7.2 Brisure spontanée de la supersymétrie 139

7.2.1 Mécanisme de Fayet–Iliopoulos . . . 140
7.2.2 Mécanisme de O'Raifeartaigh . . . 141
7.3 Les fermions de Goldstone . . . 142
7.4 Le supercourant . . . 143
7.5 Mécanisme de super–Higgs . . . 144
7.6 Brisure avec un secteur caché . . . 145
7.6.1 Médiation par la gravité . . . 146
7.6.2 Médiation par les interactions de jauge . . . 147
7.7 Bibliographie . . . 149

8 Le modèle standard supersymétrique 151
8.1 Les particules . . . 152
8.2 Le superpotentiel . . . 153
8.3 Brisure souple de la supersymétrie . . . 154
8.4 Le secteur de Higgs . . . 155
8.5 Le spectre de masse . . . 159
8.5.1 Charginos et neutralinos . . . 159
8.5.2 Le gluino . . . 161
8.5.3 Sfermions . . . 162
8.6 Bibliographie . . . 162

9 Les modèles de grande unification 164
9.1 Introduction . . . 164
9.1.1 Le choix du groupe d'unification . . . 165
9.2 $SU(5)$ . . . 167
9.2.1 Exercice A . . . 168
9.2.2 Fermions . . . 168
9.2.3 Quantification de la charge et angle de Weinberg . . . 169
9.2.4 Exercice B . . . 173
9.2.5 Bosons de jauge . . . 173
9.2.6 Secteur de Higgs et brisure spontanée de symétrie . . . 174
9.2.7 Désintégration du proton . . . 175
9.3 Solution des exercices . . . 177
9.4 Bibliographie . . . 179

10 Appendice 180
10.1 Spin 1/2 . . . 180
10.1.1 Weyl . . . 180

10.1.2 Dirac 182
10.1.3 Majorana 184
10.2 Équation de Dirac 185
10.2.1 Matrices de Dirac 186
10.2.2 Solutions de l'équation de Dirac 188
10.2.3 Hélicité 189
10.2.4 Particules de masse nulle 189
10.3 Règles de Feynman et amplitudes de transition 190
10.3.1 QED 190
10.3.2 Exemple : $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 191
10.3.3 Exemple : $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 194
10.4 Largeur de désintégration 198
10.4.1 Désintégration à deux corps 198
10.5 Section efficace de diffusion à deux corps 198

Chapitre 1

Vers le modèle standard

1.1 La théorie $V - A$

En 1930 Pauli postula l'existence du neutrino, pour expliquer le spectre de l'électron dans la désintégration β. La raison en était que l'énergie de l'électron émis était variable et qu'une partie de l'énergie totale de la réaction était "perdue" dans la désintégration. Le principe de conservation de l'énergie ne pouvait être respecté qu'en considérant l'existence d'une nouvelle particule, le neutrino, suffisamment légère et peu interagissante avec les autres particules pour pouvoir passer inaperçue des détecteurs de l'époque. Mais la désintégration β ne pourra être comprise qu'avec la découverte d'une autre particule : le neutron (Chadwick 1932 [1]).

Avec ces ingrédients Fermi proposa en 1934 une théorie des interactions faibles [2], en utilisant la désintégration $n \to pe\nu$ du neutron en proton, électron et neutrino. Pour construire le hamiltonien d'interaction Fermi utilisa une analogie avec l'électromagnétisme. Le courant électromagnétique, en notation de Dirac est

$$J_\mu(x) = \bar{e}(x)\gamma_\mu e(x) \tag{1.1}$$

où $e(x)$ est le champ de l'électron (spineur de Dirac à 4 composantes), $\bar{e} = e^\dagger\gamma_0$ son conjugué de Dirac et J_μ se transforme comme un vecteur sous le groupe de Lorentz. Cette analogie amena Fermi à écrire

$$H = g \int d^3x\, \bar{p}(x)\gamma^\mu n(x)\bar{e}(x)\gamma_\mu \nu(x) \tag{1.2}$$

avec g une constante de couplage. Dans la désintégration β les nucléons p,

n peuvent se considérer non relativistes. La limite non relativiste va nous permettre de découvrir que la théorie de Fermi est incomplète.

Pour faire la limite non relativiste il est nécessaire d'écrire sous forme explicite le spineur $u(p)$ de Dirac qui décrit une particule de masse m, d'impulsion $\vec{p}$ et d'énergie $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$u(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

avec χ le spineur à deux composantes, par exemple

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{1.4}$$

Dans la limite $|\vec{p}| \ll m$, E les deux composantes basses sont négligeables par rapport aux deux composantes hautes. En utilisant les propriétés des matrices γ données dans l'appendice on peut vérifier que γ_1, γ_2, γ_3 mélangent les composantes hautes et basses du spineur de Dirac. Seule la partie en $\bar{p}\gamma_0 n = p^\dagger n$ est importante dans la limite non relativiste.

L'interaction $p^\dagger n$ (considérée avec des spineurs à deux composantes) change un neutron en un proton sans changer la position, le spin, la parité et le moment cinétique orbital. On a donc des règles de sélection semblables à celles qu'on établit en physique atomique.

En réalité certaines désintégrations β n'obéissent pas à ces règles de sélection. On est donc amené à considérer d'autres interactions avec différentes propriétés de transformation sous le groupe de Lorentz et la parité:

$$\bar{p}n \qquad S \ \text{(scalaire)} \tag{1.5}$$
$$\bar{p}\gamma_5 n \qquad P \ \text{(pseudo} - \text{scalaire)} \tag{1.6}$$
$$\bar{p}\gamma^\mu n \qquad V \ \text{(vecteur)} \tag{1.7}$$
$$\bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 n \qquad A \ \text{(axial} - \text{vecteur)} \tag{1.8}$$
$$\bar{p}\sigma^{\mu\nu} n \qquad T \ \text{(tenseur)} \tag{1.9}$$

avec

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right] . \tag{1.10}$$

En 1956 T.D. Lee et C.N. Yang, à partir de l'analyse des désintégrations des particules τ et θ, proposèrent la violation de la parité dans les interactions faibles [3]. Cette hypothèse fut confirmée par C.S. Wu et ses collaborateurs

en 1957 [4] par l'analyse des désintégrations du ^{60}Co. L'expérience consistait à mesurer la corrélation entre le spin $\vec{J}$ d'un noyau de ^{60}Co polarisé et la direction $\vec{n}$ de l'électron sortant. La corrélation $\vec{J} \cdot \vec{n}$ mesure la violation de la parité parce que le spin ne change pas de signe sous la parité P (il s'agit d'un vecteur–axial) mais $\vec{n}$ change de signe.

L'interaction de Fermi fut modifiée par Feynman et Gell-Mann [5] et par Marshak et Sudarshan [6] en théorie $V - A$ (V pour le couplage vecteur, A pour le couplage axial–vecteur):

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x \bar{p}(x)\gamma^\mu(g_v + g_a\gamma_5)n(x)\ \bar{e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu(x) \tag{1.11}$$

où G_F est la constante de Fermi $G_F = 1{,}166 \cdot 10^{-5}$ GeV^{-2} et g_v, g_a sont les couplages aux nucléons (avec $g_v/g_a \simeq -1.26$). Beaucoup d'expériences contribuèrent à établir la nature $V - A$ des interactions faibles. Une des plus intéressantes fut la détermination de l'hélicité du neutrino par Goldhaber et ses collaborateurs [7] en 1957 à partir de la polarisation longitudinale du noyau ^{152} Sm dans la réaction de capture électronique

$$\begin{array}{rcl} e^- + {}^{152}\,\mathrm{Eu}^m(J=0) & \rightarrow & {}^{152}\,\mathrm{Sm}^*(J=1) + \nu_e \\ & & \quad \big\lfloor \hookrightarrow \gamma + {}^{152}\,\mathrm{Sm}\ . \end{array} \tag{1.12}$$

Le neutrino a une hélicité gauche (impulsion anti–parallèle au spin), ce qui permet d'établir que le courant faible est de type $V - A$ plutôt que $V + A$. Seule la partie gauche du spineur de Dirac pour les fermions participe aux interactions faibles (on peut facilement vérifier que $(1 \pm \gamma_5)/2$ sont des projecteurs sur la partie droite/gauche du spineur de Dirac). La raison pour un tel choix est l'observation expérimentale que dans les interactions faibles il y a une violation maximale de la parité.

La théorie phénoménologique des interactions faibles peut s'écrire comme une interaction de courants :

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\lambda J^\dagger_\lambda \tag{1.13}$$

où J^λ est le courant

$$J^\lambda = J^\lambda_{lepton} + J^\lambda_{quark} \tag{1.14}$$

avec pour le courant leptonique

$$J^\lambda_{lepton} = \bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)e + \bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\mu + \ldots \tag{1.15}$$

seules deux générations de fermions sont incluses afin de garder pour l'instant une notation simple. On sait aujourd'hui que trois générations existent.

Pour la partie hadronique on va utiliser la description moderne en termes de quarks plutôt que celle en termes de nucléons de la formule (1.11). Ceci permet de traiter l'interaction en termes des champs fondamentaux et d'éliminer les paramètres g_v, g_a. On s'attend donc à ce que le courant pour les quarks soit de la même forme que celui des leptons. En réalité pour les quarks le courant a une forme plus compliquée :

$$J^{\lambda}_{quark} = \cos\theta_c J^{\lambda}_{\Delta S=0} + \sin\theta_c J^{\lambda}_{\Delta S=1} \tag{1.16}$$

où $\theta_c \simeq 13^o$ est l'angle de Cabibbo [8]. La raison en est l'observation que la force de l'interaction n'est pas la même suivant qu'il y a destruction (ou création) d'un quark s "strange" ($\Delta S = 1$, par exemple dans le processus $K \to \mu\nu$) ou pas ($\Delta S = 0$, par exemple $n \to pe^-\nu$). Aujourd'hui on écrit le courant pour les quarks comme suit:

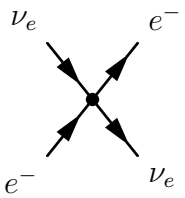
$$\begin{aligned} J^{\lambda}_{quark} &= \bar{u}\gamma^{\lambda}(1-\gamma_5)(d\cos\theta_c + s\sin\theta_c) + \bar{c}\gamma^{\lambda}(1-\gamma_5)(-d\sin\theta_c + s\cos\theta_c) \\ &= (\bar{u} \quad \bar{c})\,\gamma^{\lambda}(1-\gamma_5) \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Cette notation implique un grand pas en avant, en particulier elle "explique" l'angle de Cabibbo en termes d'une rotation, un mélange du quark d et du quark s (ou de façon équivalente, du quark u et du quark c). L'autre idée est l'introduction d'un quatrième quark c "charm", proposé par Bjorken et Glashow [9] en 1964 et par Glashow, Iliopoulos et Maiani [10] en 1970 et mis en évidence expérimentalement pour la première fois en 1974 avec la découverte de la particule J/Ψ[11], un état lié de type $c\bar{c}$.

1.1.1 Exemple : $\nu e \to \nu e$ dans la théorie de Fermi

Le lagrangien de Fermi (1.13) constitue une théorie effective. Cette théorie n'est valable qu'à basse énergie (par rapport à l'échelle de masse des bosons de jauge de l'interaction faible ~ 100 GeV qui seront introduits dans la suite) et son développement perturbatif au delà du niveau de l'arbre est divergent (la théorie est dite non renormalisable). Un autre problème (lié au précédent) est la violation de l'unitarité, même au niveau de l'arbre. Pour comprendre le problème considérons le processus $\nu e \to \nu e$. À partir du lagrangien (1.13)

on obtient:



$$iM = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)\right]\left[\bar{u}(k')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(p)\right] \tag{1.18}$$

pour l'élément de matrice au niveau de l'arbre. Le carré du module avec somme sur les spins va nous permettre de calculer la section efficace qui peut être mesurée dans un collisionneur:

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \sum_{spin}\frac{G_F^2}{2}\left[\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)\right]\left[\bar{u}(k)\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(p')\right] \\ &\quad \left[\bar{u}(k')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(p)\right]\left[\bar{u}(p)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(k')\right] \end{aligned} \tag{1.19}$$

en utilisant les formules

$$\sum_{spin} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m \tag{1.20}$$

$$\sum_{spin} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{1.21}$$

où $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$ et m la masse de la particule. On trouve:

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2}Tr\left[(\not{p}'+m)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma_5)\right] \\ &\quad Tr\left[\not{k}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p}+m)\gamma_\nu(1-\gamma_5)\right] \end{aligned} \tag{1.22}$$

en utilisant les propriétés des matrices γ on peut écrire

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= 2G_F^2Tr\left[(\not{p}'+m)\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu(1-\gamma_5)\right] \\ &\quad Tr\left[\not{k}'\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\nu(1-\gamma_5)\right] \end{aligned} \tag{1.23}$$

Les traces des matrices γ sont

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{1.24}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \tag{1.25}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.26}$$

qui permettent d'obtenir les relations suivantes

$$\begin{aligned} Tr(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\gamma^\nu)\; Tr(\not{c}\gamma_\mu \not{d}\gamma_\nu) &= 32\,[(a\cdot c)\,(b\cdot d) + (a\cdot d)\,(b\cdot c)] \quad (1.27)\\ Tr(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\gamma^\nu\gamma_5)\; Tr(\not{c}\gamma_\mu \not{d}\gamma_\nu\gamma_5) &= 32\,[(a\cdot c)\,(b\cdot d) - (a\cdot d)\,(b\cdot c)] \quad (1.28)\\ Tr(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\gamma^\nu)\; Tr(\not{c}\gamma_\mu \not{d}\gamma_\nu\gamma_5) &= 0 \quad (1.29) \end{aligned}$$

on en déduit le résultat

$$|\bar{M}|^2 = 128\,G_F^2\,(k\cdot p)\,(k'\cdot p') = 32\,G_F^2\,(s-m^2)^2 \quad (1.30)$$

où m est la masse de l'électron et s une des variables de Mandelstam définies comme suit:

$$s=(k+p)^2 \qquad t=(k-k')^2 \qquad u=(k-p')^2 \qquad s+t+u=\sum_{i=1}^{4} m_i^2\ . \quad (1.31)$$

L'avantage d'écrire le résultat en fonction des variables de Mandelstam est que ces variables sont des invariants sous les transformations de Lorentz. En particulier la variable s est le carré de l'énergie dans le centre de masse de la collision. La section efficace différentielle $d\sigma$ par rapport à l'élément infinitésimal d'angle solide $d\Omega$ s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{|\bar{M}|^2}{s}\frac{|\vec{p'}_{cm}|}{|\vec{p}_{cm}|} \quad (1.32)$$

comme $|\vec{p'}_{cm}| = |\vec{p}_{cm}|$ pour une diffusion élastique (c'est à dire avec les mêmes particules dans l'état initial et final),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2}\frac{(s-m^2)^2}{s}\ . \quad (1.33)$$

Pour obtenir la section efficace totale il suffit d'intégrer sur les angles, ce qui donne seulement un facteur 4π parce que $d\sigma/d\Omega$ ne dépend pas des angles:

$$\sigma(\nu e\to\nu e) = \frac{G_F^2}{\pi}\frac{(s-m^2)^2}{s}\ . \quad (1.34)$$

Pour $s \gg m^2$, c'est à dire pour une énergie élevée dans le centre de masse de la collision

$$\sigma(\nu e\to\nu e) \simeq \frac{G_F^2}{\pi}\,s \simeq 1.7 s[\mathrm{GeV}^2]\times 10^{-38}\mathrm{cm}^2 \quad (1.35)$$

et donc $\sigma(\nu e \to \nu e)$ augmente de façon linéaire avec s. A basse énergie le résultat est en accord avec les données expérimentales, mais ce comportement à haute énergie n'est pas physique et donne une violation de l'unitarité de la théorie. On parle de violation de l'unitarité parce que la section efficace fait intervenir le carré du module de l'amplitude, laquelle amplitude est liée à la matrice S de diffusion, qui est une matrice unitaire. L'unitarité de la matrice S impose des contraintes sur le comportement de la section efficace. Un exemple de ce genre de contraintes peut s'obtenir par un développement en ondes partielles de la section efficace (comme somme de termes avec moment cinétique total J défini), par exemple

$$\sigma^{(J)}(s) \leq (2J+1)\frac{16\pi}{s} \tag{1.36}$$

pour la limite de haute énergie de la composante J d'une section efficace élastique. Pour plus de détails voir [12, 13]

1.1.2 Exemple : La constante de Fermi et $\mu \to \nu_\mu\, e\, \bar{\nu}_e$

La transition $\mu(p_1) \to \nu_\mu(p_2)\, e(p_3)\, \bar{\nu}_e(p_4)$ est le mode de désintégration dominant pour le muon et la comparaison entre la formule théorique et les données donnent une mesure de la constante de Fermi G_F. Dans le modèle standard ce processus est dû à l'échange d'un boson vecteur W, mais vu que l'énergie échangée dans la désintégration est petite par rapport à la masse du W, la théorie de Fermi de basse énergie constitue une bonne approximation :

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\mu\ \bar{e}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e \tag{1.37}$$

où l'on a indiqué les spineurs de Dirac avec le nom des particules correspondantes. L'élément de matrice s'écrit

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}(p_2,s_2)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(p_1,s_1)\ \bar{u}(p_3,s_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)v(p_4,s_4) \tag{1.38}$$

les s_i étant les polarisations des particules. On considère la désintégration d'un muon dans l'état final $\nu_\mu\, e\, \bar{\nu}_e$ sans mesurer la polarisation de spin des particules. Le module carré de l'élément de matrice est

$$\sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = 64\, G_F^2\, (p_1 \cdot p_4\, p_2 \cdot p_3)\ . \tag{1.39}$$

La formule pour la largeur de désintégration est donnée par

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5\, 2E_1} \int \prod_{i=2}^{4} \frac{d^3p_i}{2E_i}\, \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 \tag{1.40}$$

et l'intégration sur l'espace de phases des neutrinos s'écrit

$$\int \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_4}{2E_4} \delta^{(4)}(P - p_2 - p_4) p_2^\alpha p_4^\beta = \frac{\pi}{24} \left(g^{\alpha\beta} P^2 + 2P^\alpha P^\beta\right) , \tag{1.41}$$

avec $P = p_1 - p_3$. Il ne reste ensuite que l'intégration sur l'espace de phases de l'électron pour obtenir le résultat final

$$\Gamma(\mu \to \nu_\mu\, e\, \bar{\nu}_e) = \frac{1}{\tau(\mu \to \nu_\mu\, e\, \bar{\nu}_e)} = \frac{G_F^2\, m_\mu^5}{192\pi^3} . \tag{1.42}$$

La largeur $\Gamma(\mu \to \nu_\mu\, e\, \bar{\nu}_e)$ est avec très bonne approximation la largeur totale. Le temps de vie mesuré du muon est

$$\tau = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} \text{ s} . \tag{1.43}$$

En utilisant $\hbar = 6.582 \times 10^{-25}$ GeV s comme facteur de conversion

$$\Gamma = 2.996 \times 10^{-19} \text{ GeV} \tag{1.44}$$

en bon accord avec la valeur qu'on peut calculer avec la formule (1.42) et les valeurs numériques

$$m_\mu = 0.10566 \text{ GeV} \qquad G_F = 1.16639 \times 10^5 \text{ GeV}^{-2} . \tag{1.45}$$

En mesurant la masse et le temps de vie du muon on peut donc extraire la valeur de la constante de Fermi G_F. Pour déterminer avec une plus grande précision cette constante il est nécessaire de calculer les corrections de QED et celles des effets de masse :

$$\Gamma = \frac{G_F^2\, m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right) - 8\frac{m_e^2}{m_\mu^2} + \frac{3m_\mu^2}{5m_W^2} + \ldots\right) . \tag{1.46}$$

La correction plus importante est celle de QED, par contre la correction due à la masse du W est très petite et à la limite des possibilités de détection actuelles.

1.2 Théories de jauge

1.2.1 Invariance de jauge globale

On va étudier des symétries internes, c'est à dire des transformations qui ne dépendent pas de l'espace-temps. Considérons des matrices de transformation unitaires $U(\theta^a)$ et supposons que l'on ait une théorie décrite par un multiplet de champs $\phi_i(x)$ avec $i = 1,\ldots,n$. Le multiplet se transforme avec la matrice de transformation de dimension d :

$$\phi_i'(x) = U(\theta^a)_{ij}\phi_j(x) \quad (a = 1,2\ldots,d) \; . \tag{1.47}$$

avec une somme sur les indices répétés. On va pour l'instant se limiter au cas où le lagrangien est aussi invariant:

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\phi',\partial_\mu\phi') = \mathcal{L}(U\phi,U\partial_\mu\phi) \; . \tag{1.48}$$

La matrice unitaire peut s'écrire en fonction d'une matrice Hermitienne T : $U = e^{iT}$. Dans le cas d'une transformation infinitésimale

$$U(\theta^a) = 1 + i\theta^a T^a \tag{1.49}$$

la transformation du champ $\phi_i(x)$ s'écrit :

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + i\theta^a T^a_{ij}\phi_j(x) \tag{1.50}$$

où les θ^a sont des paramètres petits et les T^a les générateurs du groupe de transformations. Les matrices T^a forment une algèbre de Lie

$$\left[T^a,T^b\right] = iC^{abc}T^c \tag{1.51}$$

les C^{abc} sont les constantes de structure du groupe de transformations.

1.2.2 La symétrie $U(1)$

Comme exemple on peut considérer la symétrie Abélienne $U(1)$, ce qui revient à choisir des matrices 1×1, qui ne sont rien d'autre que des phases complexes $e^{i\alpha}$. On parle de symétrie Abélienne quand le groupe de transformations est commutatif. Un exemple de lagrangien invariant sous $U(1)$ est

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \tag{1.52}$$

comme on peut facilement le vérifier par la substitution

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi \tag{1.53}$$

ou avec la transformation infinitésimale au premier ordre en α

$$\phi \to \phi' = (1 + i\alpha)\phi \; . \tag{1.54}$$

Le théorème de Noether permet à partir d'une symétrie interne continue du lagrangien (ou plus généralement de l'action) d'obtenir un courant J^a_μ conservé ($\partial^\mu J^a_\mu = 0$), de la forme

$$J^a_\mu = -i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\phi_i)}T^a_{ij}\phi_j \; . \tag{1.55}$$

Dans le cas du lagrangien (1.52) le courant conservé est

$$J_\mu = i\left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^*\right] \; . \tag{1.56}$$

1.2.3 La symétrie $SU(2)$

Un autre exemple est la symétrie $SU(2)$, avec comme matrices de $SU(2)$ les matrices 2×2 de Pauli. Le champ complexe ϕ est un doublet

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

et un exemple de lagrangien invariant ($\phi^\dagger = (\phi^t)^*$; t est la transposition) est

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{2}\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \; , \tag{1.58}$$

sous la transformation infinitésimale

$$\phi_i \to \phi'_i = \phi_i + i\theta^a\frac{\sigma^a_{ij}}{2}\phi_j \tag{1.59}$$

ou la transformation finie

$$\phi_i \to \phi'_i = e^{i\theta^a\sigma^a_{ij}/2}\phi_j \tag{1.60}$$

lesσ^a étant les matrices de Pauli. Le courant conservé qui dérive de l'invariance du lagrangien en utilisant le théorème de Noether est

$$J^a_\mu = -\frac{i}{2}\left(\partial_\mu \phi^\dagger_i \sigma^a_{ij}\phi_j - \phi^\dagger_i \sigma^a_{ij}\partial_\mu \phi_j\right) \ . \tag{1.61}$$

Les matrices de Pauli forment une algèbre de Lie

$$\left[\sigma^a,\sigma^b\right] = 2i\epsilon^{abc}\sigma^c \tag{1.62}$$

avec ϵ^{abc} le tenseur antisymétrique.

1.2.4 Invariance de jauge locale

Jusqu'à présent on a discuté des symétries globales, avec des paramètres θ^a qui ne dépendent pas des coordonnées de l'espace–temps. On va considérer maintenant des transformations qui dépendent des coordonnées ($\theta^a = \theta^a(x)$). On parle dans ce cas de symétries locales ou de jauge (Weyl 1929). L'intérêt des symétries de jauge est qu'à partir d'une théorie libre invariante sous transformations globales il est possible de construire une théorie invariante sous les transformations locales (transformations de jauge) en ajoutant des termes d'interaction et un ou plusieurs champs vectoriels (champs de jauge). La façon d'introduire ces termes n'est pas arbitraire et a une explication géométrique comme on le verra dans les paragraphes suivants. Imposer l'invariance du lagrangien sous transformation de jauge permet donc de "générer" des interactions et d'introduire des champs vectoriels qui sont les médiateurs des forces dans le langage de la théorie des champs.

1.2.5 Électromagnétisme

On considère comme point de départ l'équation de Dirac pour un électron libre

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{1.63}$$

qui est invariante sous transformation d'un élément de la symétrie $U(1)$ globale :

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x) \tag{1.64}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x) \ . \tag{1.65}$$

La symétrie locale correspondante est:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \tag{1.66}$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)\ . \tag{1.67}$$

Le terme de masse du lagrangien (1.63) reste invariant sous la transformation locale, mais le terme avec la dérivée ne l'est pas:

$$\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)[\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x)\ . \tag{1.68}$$

Pour compenser ce terme supplémentaire on peut introduire une dérivée covariante possédant la propriété :

$$D_\mu\psi(x) \to e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \tag{1.69}$$

qui permet d'obtenir un terme invariant $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ dans le lagrangien. La dérivée covariante est obtenue avec l'introduction d'un champ vecteur (champ de jauge) $a_\mu(x)$:

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + iea_\mu)\psi(x) \tag{1.70}$$

où le champ de jauge se transforme sous $U(1)$ selon :

$$a_\mu(x) \to a'_\mu(x) = a_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\ . \tag{1.71}$$

Le champ de jauge n'est pas pour l'instant un champ dynamique, il peut être éliminé en utilisant l'équation du mouvement. Pour le rendre physique il faut ajouter un terme cinétique. Le terme invariant de jauge avec des dérivées du champ a_μ et renormalisable est nécessairement du type $f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x)$ avec

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x)\ . \tag{1.72}$$

Avec la normalisation usuelle pour le terme cinétique, le lagrangien déduit du lagrangien de Dirac avec la demande d'invariance locale est

$$\mathcal{L}_{\rm QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x) \tag{1.73}$$

qui est le lagrangien de l'électrodynamique quantique (QED). On peut noter l'absence d'un terme de masse pour le champ a_μ. La raison en est que le terme de masse $ma_\mu a^\mu$ n'est pas invariant de jauge. Le photon est donc sans masse.

La dérivation de la QED a partir du lagrangien de Dirac peut sembler ad hoc, en particulier on peut se demander qu'elles sont l'origine et la raison pour introduire D_μ, $a_\mu(x)$ et $f_{\mu\nu}(x)$. La raison est à rechercher dans l'analogie avec la relativité générale d'Einstein et la géométrie dans un espace non Euclidien. Le langage mathématique à utiliser est celui de la géométrie différentielle. L'idée est qu'on peut comparer deux objets seulement s'ils sont dans le même système de coordonnées et qu'il faut d'abord les déplacer au même point (transport parallèle). Considérons par exemple deux vecteurs $a^\mu(x)$ et $b^\mu(x)$, leur différence Dc^μ est

$$Dc^\mu = \delta c^\mu + dc^\mu \tag{1.74}$$

où δc^μ est la différence apparente due au déplacement des vecteurs au même point et dc^μ est leur différence mesurée dans le même système de coordonnées. Pour un espace Euclidien $\delta c^\mu = 0$.

Pour comparer deux phases à des endroits différents x_μ et $x_\mu + dx_\mu$ on introduit un champ $a_\mu(x)$ et on considère les deux phases comme "parallèles" si leur différence est $a_\mu(x)dx_\mu$. On veut garder cette différence fixe si on fait une rotation (transformation de jauge) de $\theta(x)$. Au point x_μ on a:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\theta(x)}\psi(x) \tag{1.75}$$

et au point $x_\mu + dx_\mu$:

$$\psi(x+dx) \to \psi'(x+dx) = e^{ie\theta(x+dx)}\psi(x+dx)\ . \tag{1.76}$$

Pour une distance infinitésimale dx_μ entre les deux points on peut écrire

$$\theta(x+dx) = \theta(x) + \partial_\mu\theta(x)dx_\mu\ . \tag{1.77}$$

On peut vérifier que pour pouvoir continuer à garder la même notion de transport parallèle entre les deux phases après la transformation de jauge, il faut que le champ a_μ se transforme de la façon suivante:

$$a_\mu(x) \to a'_\mu(x) = a_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x) \tag{1.78}$$

qui est précisément la loi de transformation d'un champ de jauge. Pour un transport fini entre deux points a et b le long du chemin Γ le changement de phase est

$$e\int_{a\ (\Gamma)}^{b} a_\mu(x)dx^\mu\ . \tag{1.79}$$

Si on considère un parcours fermé

$$e\int_{a\ (\Gamma_2)}^{b} a_\mu(x)dx^\mu - e\int_{b\ (\Gamma_1)}^{a} a_\mu(x)dx^\mu = e\oint a_\mu(x)dx^\mu = -e\int\int f_{\mu\nu}(x)d\sigma^{\mu\nu} \tag{1.80}$$

en utilisant le théorème de Stokes. Le tenseur $f_{\mu\nu}$ est défini comme suit

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu a_\mu(x) - \partial_\mu a_\nu(x) \tag{1.81}$$

il est invariant sous transformation de jauge dans le cas de l'électromagnétisme (il s'agit de la différence de phase pour un parcours qui revient au même point). Dans le cas plus général la phase n'est pas forcément un nombre complexe mais peut être une matrice et alors l'équivalent du tenseur $f_{\mu\nu}$ est covariant comme on le verra dans la suite. Le champ $a_\mu(x)$ est le potentiel de jauge. En physique classique le tenseur électromagnétique est introduit sans référence aux phases, mais en rapport avec une force par l'équation de Lorentz et $a_\mu(x)$ est une quantité auxiliaire sans signification physique. $a_\mu(x)$ a par contre un rôle physique dans la théorie quantique (Aharonov-Bohm 1959, Chambers 1960). Dans l'électromagnétisme le tenseur électromagnétique n'est pas suffisant pour décrire complètement la physique, tandis que le potentiel a_μ est redondant à cause de l'invariance de jauge (il y a en général plusieurs, voir un nombre infini, de choix différents de potentiels a_μ qui décrivent la même physique). Une possibilité pour éviter d'avoir des variables redondantes est d'utiliser le facteur de phase de Dirac:

$$\varphi(\Gamma) = e^{ie\oint_\Gamma a_\mu(x)dx^\mu} \tag{1.82}$$

qui est invariant de jauge.

1.2.6 Théorie de Yang-Mills

L'électromagnétisme peut se généraliser (Yang et Mills 1954) à des rotations de phase où la phase est une matrice:

$$\psi \to S\psi \tag{1.83}$$

avec S matrice spéciale unitaire, par exemple $S \in SU(2)$ et ψ un doublet, comme dans (1.57). On demande l'invariance de la physique par rapport aux rotations locales de $SU(2)$

$$S(x) = e^{-i\theta^a(x)\sigma^a/2} \qquad a = 1,2,3 \tag{1.84}$$

les σ^a étant les matrices de Pauli. Si on considère une transformation infinitésimale de $SU(2)$

$$S(x) \simeq 1 - i\frac{\theta^a(x)\sigma^a}{2} \tag{1.85}$$

la transformation du champ vectoriel $A_\mu(x)$ est

$$A^i_\mu(x) \to A^i_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i + \epsilon^{ijk}\theta^j(x)A^k_\mu(x)\ . \tag{1.86}$$

Par rapport au cas Abélien on a un terme en ϵ^{ijk} et A^i_μ se transforme comme un triplet de la représentation adjointe de $SU(2)$. Donc les champs A^i_μ sont chargés par rapport à la charge de $SU(2)$, tandis que pour $U(1)$ on avait un champ neutre (le photon) par rapport à la charge de $U(1)$ (charge électrique). Le tenseur $F_{\mu\nu}(x)$:

$$F^i_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A^i_\mu(x) - \partial_\mu A^i_\nu(x) + g\epsilon^{ijk}A^j_\mu(x)A^k_\nu(x) \tag{1.87}$$

est un triplet sous la transformation de jauge de $SU(2)$:

$$F^i_{\mu\nu}(x) \to F^i_{\mu\nu}(x) + \epsilon^{ijk}\theta^j(x)F^k_{\mu\nu}\ . \tag{1.88}$$

Ce tenseur $F^i_{\mu\nu}(x)$ n'est donc pas invariant de jauge. Par contre le produit

$$Tr\left[(\sigma^a F^a_{\mu\nu}(x))(\sigma^b F^{b\mu\nu}(x))\right] \propto F^i_{\mu\nu}(x)F^{i\mu\nu}(x) \tag{1.89}$$

qui entre dans le lagrangien est invariant. En termes d'interactions la différence avec la théorie Abélienne est la présence de termes d'auto–interaction pour les champs de jauge dans le terme cinétique.

La transformation sur un parcours fini ne peut pas s'écrire

$$e^{ig\int_\Gamma A_\mu(x)dx^\mu} \tag{1.90}$$

parce que pour des matrices $e^A\ e^B \neq e^{A+B}$ et il faut donc indiquer l'ordre du produit des exposants des transformations infinitésimales. Le produit ordonnée est indiqué par un $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}\ e^{ig\int_\Gamma A_\mu(x)dx^\mu} \tag{1.91}$$

et sous les transformations de jauge:

$$\mathcal{P}\ e^{ig\int_{x_1}^{x_2} A_\mu(x)dx^\mu} \to S(x_2)\left(\mathcal{P}\ e^{ig\int_{x_1}^{x_2} A_\mu(x)dx^\mu}\right)S^{-1}(x_1)\ . \tag{1.92}$$

L'équivalent du facteur de phase de Dirac est

$$\varphi(\Gamma) = \mathcal{P}\ e^{ig \oint_\Gamma A_\mu(x) dx^\mu} \tag{1.93}$$

appelé la boucle de Wilson et n'est pas une quantité invariante de jauge. Pour la rendre invariante il faut en prendre la trace.

1.2.7 Quantification d'une théorie de jauge

D'habitude on utilise le formalisme canonique pour la quantification d'un champ classique. Les champs sont considérés comme des opérateurs et on impose des relations de commutation entre eux. Les fonctions de Green sont calculées en fonction de valeurs sur le vide de produits [1] d'opérateurs:

$$\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)]|0\rangle\ . \tag{1.94}$$

D'autres méthodes existent. En particulier pour la quantification d'une théorie de jauge on considérera la méthode de l'intégrale fonctionnelle. Les champs sont des fonctions et les fonctions de Green s'obtiennent en intégrant le produit des champs sur toutes les formes fonctionnelles possibles avec un poids donné par l'action. L'avantage de ce formalisme est la présence du lagrangien classique dans l'intégrale. Ceci permet de traiter plus facilement les symétries de jauge, qui sont des symétries du lagrangien classique. Dans le formalisme fonctionnel les fonctions de Green sont données par

$$G_n = \langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle = \frac{\int[d\phi]\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\ e^{iS}}{\int[d\phi]e^{iS}} \tag{1.95}$$

avec S l'action classique

$$S = \int d^4x\mathcal{L} \tag{1.96}$$

et $[d\phi]$ la mesure d'intégration. L'équation (1.95) peut s'écrire sous une forme plus compacte en utilisant le concept de dérivée fonctionnelle par rapport à une source externe $J(x)$. On introduit la fonctionnelle génératrice

$$Z[J] = \int[d\phi]e^{i\int(\mathcal{L}+\phi J)d^4x} \tag{1.97}$$

1. Le produit chronologique T de Dyson est défini pour deux champs par

$$T\,\phi(x)\phi(y) = \theta(x_0-y_0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y_0-x_0)\phi(y)\phi(x)\ .$$

Pour plus de détails faire référence à un livre de théorie des champs.

et on définit la différentiation fonctionnelle

$$\frac{\delta Z[J(x)]}{\delta J(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{Z[J(x) + \epsilon\, \delta(x-y)] - Z[J(x)]}{\epsilon} \,. \tag{1.98}$$

Les fonctions de Green peuvent s'obtenir de la façon suivante

$$G_n = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \ldots \delta J(x_n)} \,. \tag{1.99}$$

Dans le cas d'une théorie de jauge le choix de la mesure d'intégration pose un problème. Pour l'illustrer de façon simple on se limite à l'examen de Z pour une théorie de Yang–Mills:

$$Z[0] = \int [dA]\; e^{iS} \,, \qquad S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \right) \,. \tag{1.100}$$

Le champ de jauge A^a_μ est équivalent, par une transformation de jauge, à une infinité d'autres configurations A'^a_μ :

$$T^a A'^a_\mu = U (T^a A^a_\mu - \frac{i}{g} U^{-1} \partial_\mu U)\; U^{-1} \tag{1.101}$$

Sous cette transformation l'action S reste constante (il s'agit d'une quantité invariante de jauge). Donc l'intégrale dans la région des A^a_μ reliés par une transformation de jauge diverge.

La solution est d'intégrer une seule fois pour chaque configuration de jauge indépendante. Pour le faire on peut imposer une contrainte ("fixer la jauge")

$$G^\mu A^{(\theta)a}_\mu = B^a \tag{1.102}$$

avec G^μ et B^a choisis de façon appropriée [2]. Pour introduire cette contrainte dans l'intégrale on peut écrire

$$Z[J] = \int [dA]\, \det M_G \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (G^\mu A^a_\mu)^2 + A^a_\mu J^{a\mu}) \right] \tag{1.103}$$

avec

$$[M_G(x,y)]^{ab} = \frac{\delta (G^\mu A^{(\theta)^a}_\mu (x))}{\delta \theta^b(y)} \,. \tag{1.104}$$

2. En réalité des configurations équivalentes, qui ne sont pas reliées par une transformation de jauge infinitésimale ne sont pas éliminées par cette méthode (ambiguïté de Gribov).

Pour un groupe de jauge Abélien $\det M_G$ est une constante et le calcul ne pose pas de problème. Pour un groupe de jauge non Abélien avec un choix de jauge covariant, $\det M_G$ dépend de A^a_μ. Il faut donc écrire le déterminant sous forme exponentielle pour en tenir compte dans le lagrangien. Ceci est possible avec l'introduction de nouveaux champs $\chi^a(x)$ dans la représentation adjointe du groupe de jauge, appelés champs de Faddeev–Popov ("ghosts"):

$$\det M_G = \int [d\chi][d\chi^*] e^{-i\int d^4x d^4y\, \chi^a(x)^* [M_G(x,y)]^{ab} \chi^b(y)} \,. \tag{1.105}$$

Le terme de fixation de jauge et celui de Faddeev–Popov vont intervenir dans le lagrangien quantique. Les "ghosts" de Faddeev–Popov sont donc à inclure dans les calculs avec les règles de Feynman même s'il s'agit de particules fictives. Il faut se rappeler que leur présence est due à notre choix de jauge covariant. On aurait pu éliminer le problème du $\det M_G$ avec un choix de jauge non covariant qui donne un déterminant constant. La contrepartie de l'élimination des "ghosts" est d'avoir des règles de Feynman beaucoup plus compliquées. Dans la suite on va utiliser une fixation de jauge covariante et donc on aura des termes de Faddeev–Popov dans le lagrangien.

1.3 Renormalisabilité

Dans la construction de l'électrodynamique quantique donnée dans la section 1.2.5 on a limité le nombre de termes d'interaction en s'appuyant sur le "principe" de renormalisabilité de la théorie. On définit un terme de lagrangien d'une théorie en 4 dimensions comme renormalisable si

$$\Delta = 4 - d - \sum_i n_i (s_i + 1) \geq 0 \tag{1.106}$$

où d est le nombre de dérivées, n_i le nombre de champs de type i dans le terme d'interaction et s_i leur spin (pour les champs vectoriels couplés à un courant conservé, comme le photon et les bosons de jauge de l'interaction faible il faut prendre $s_i = 0$). Il est facile de voir que Δ devient négatif si le terme d'interaction contient un nombre trop grand de champs ou de dérivées ou si le spin est trop élevé.

Si on se limite aux termes renormalisables la théorie perturbative sera finie après renormalisation: les divergences qui peuvent apparaître dans le calcul des diagrammes de Feynman ne seront pas physiques, le calcul de quantités mesurables donnera toujours des résultats finis.

En réalité la renormalisabilité d'une théorie n'est pas un critère physique fondamental, pour une théorie comme la QED (et aussi le Modèle Standard) qui est en réalité une théorie effective de basse énergie. La raison du succès de la prescription de renormalisabilité est à rechercher dans le fait que les termes non renormalisables sont proportionnels à l'inverse d'une échelle de masse qui est grande par rapport aux énergies du processus qu'on mesure. Un exemple en QED est le terme de lagrangien (invariant de jauge, de Lorentz et qui conserve la charge et la parité) :

$$i\frac{e}{2M}\bar{\psi}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\psi f^{\mu\nu} \tag{1.107}$$

donnant une contribution $4e/M$ au moment magnétique de l'électron. A noter que l'action doit être adimensionnelle, donc chaque terme du lagrangien doit avoir une dimension de masse égale à 4; l'introduction d'un coefficient de masse M au dénominateur de (1.107) est donc obligatoire pour conserver l'adimensionalité de l'action. La mesure du moment magnétique de l'électron permet de dire que cette contribution, si elle est présente, est petite et que l'échelle de masse M est élevé, $M > 10^7$ GeV.

1.3.1 Masses et champs de jauge

Le lagrangien de Fermi (1.13) décrit une interaction ponctuelle et la dimension du produit de courants est 6 en termes de masse (la constante de Fermi a donc dimension -2 en termes de masse) et ceci implique que l'interaction est non renormalisable. On a vu par un calcul explicite de section efficace que cette théorie diverge, même au niveau de l'arbre, à haute énergie. Les deux aspects de non renormalisabilité et de divergence à haute énergie sont liés. Une possibilité pour essayer de transformer l'interaction de Fermi en théorie renormalisable consiste à introduire, en analogie avec l'électromagnétisme, un boson de jauge médiateur de l'interaction. Pour conserver la charge électrique au vertex d'interaction avec le courant chargé il faut considérer un boson vecteur chargé :

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(J^+_\mu(x)W^{+\mu}(x) + J^-_\mu(x)W^{-\mu}(x)\right) \tag{1.108}$$

avec

$$J^+_\mu(x) = \frac{1}{2}\left(\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e\right) \ . \tag{1.109}$$

Le boson de jauge $W^{\pm}$ est le médiateur de l'interaction faible, c'est à dire que plutôt que coupler directement les deux courants, on les couple entre eux par l'intermédiaire de l'échange d'un boson de jauge. L'avantage est qu'on a remplacé le couplage dimensionnel G_F par le couplage adimensionnel g.

1.3.2 Exemple : $\nu e \to \nu e$ avec un boson de jauge massif

Pour expliquer la validité de la théorie de Fermi à basse énergie il faut prendre un boson de jauge W massif. On va donc considérer un lagrangien de type Yang-Mills avec un terme de masse explicite pour le W:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2}(\partial_\mu W^\dagger_\nu - \partial_\nu W^\dagger_\mu)(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + m_W^2 W^\dagger_\mu W^\mu \tag{1.110}$$

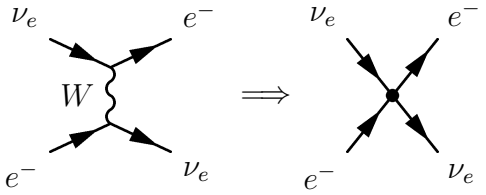
qui donne un propagateur (en termes de l'impulsion k)

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / m_W^2}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} \tag{1.111}$$

La limite de basse énergie $k \ll m_W$ donne

$$\Delta^{\mu\nu}_{\text{Fermi}}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{m_W^2} \tag{1.112}$$

et la comparaison avec le lagrangien de Fermi (1.13) et le courant (1.15)



(1.113)

$$\frac{g}{2\sqrt{2}} J_\mu(x) W^{\mu\dagger}(x) \frac{g}{2\sqrt{2}} J_\nu(x)^\dagger W^\nu(x) \to -\frac{g^2}{8} J_\mu(x) J_\nu(x)^\dagger \frac{g^{\mu\nu}}{m_W^2} \propto -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J^\dagger_\mu \tag{1.114}$$

nous donne

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2} \, . \tag{1.115}$$

La constante de Fermi $G_F \sim 10^{-5}$ GeV^{-2} est donc le résultat de basse énergie de l'échange d'un boson lourd de l'ordre de 100 GeV.

Pour rendre cette affirmation plus précise on va calculer le même processus que dans la section 1.1.1 avec l'échange d'un boson W. L'élément de matrice est

$$iM = i^3 g^2 \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(k)\right]\left[\bar{u}(k')\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(p)\right]\frac{g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/m_W^2}{q^2 - m_W^2 + i\epsilon} \tag{1.116}$$

avec $q = k - p'$ impulsion échangé par le boson W. Le module carré en termes de variables de Mandelstam est:

$$|\bar{M}|^2 = \frac{g^4}{2}\frac{s^2}{(u - m_W^2)^2} \tag{1.117}$$

où $\bar{M}$ est l'élément de matrice moyenné sur les spins. Par rapport au calcul dans la théorie de Fermi on a ici une dépendance de l'élément de matrice sur les angles: $u \simeq -s(1-x)$ (si on néglige la masse de l'électron) avec $x = (1-\cos\theta)/2$ où θ est l'angle du neutrino sortant par rapport aux particules entrantes dans le centre de masse de la réaction (θ varie entre 0 et π, donc x varie entre 0 et 1). La section efficace différentielle par rapport à x est

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{16\pi\, s}|\bar{M}|^2 \tag{1.118}$$

et la section efficace intégrée est

$$\sigma(\nu e \to \nu e) = \int_0^1 dx \frac{d\sigma}{dx} = \frac{G_F^2}{\pi} m_W^2 \frac{s}{s + m_W^2}\ . \tag{1.119}$$

Pour $s \to \infty$, σ ne diverge pas et se comporte comme une constante.

L'idée d'introduire un boson de jauge médiateur est un grand pas en avant, mais les problèmes posés par l'unitarité et la renormalisabilité ne sont pas résolus. En particulier pour l'unitarité des problèmes restent si on considère d'autres processus que $\nu e \to \nu e$, par exemple $e^+e^- \to W^+W^-$.

1.3.3 Masse et renormalisabilité

Le lagrangien (1.110) est non renormalisable selon la formule (1.106). Le terme cinétique a pour dimension $\Delta = -2$. Ce résultat n'est pourtant pas évident. En électrodynamique, si on ajoute un terme de masse pour le photon, la théorie reste renormalisable. La raison en est que si on sépare les

composantes longitudinales et transverses du champ de jauge, la partie longitudinale, proportionnelle à $p_\mu p_\nu/m^2$ qui donne lieu au comportement non renormalisable, ne contribue pas à la matrice S, donc aux quantités physiques. Les composantes longitudinales et transverses du champ n'interagissent pas parce que le champ est couplé à un courant conservé.

On peut examiner le cas d'un photon libre avec masse (lagrangien de Stückelberg pour l'électrodynamique) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \tag{1.120}$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \,, \tag{1.121}$$

si on la dérive par rapport à ∂_ν on obtient une contrainte

$$m^2\, \partial_\nu A^\nu = 0 \tag{1.122}$$

qui élimine une des quatre composantes du vecteur A^ν. On obtient un champ avec trois composantes physiques, la forme usuelle d'un champ de spin 1 avec masse. Les trois composantes de A^ν satisfont l'équation de champ massive

$$(\partial^2 + m^2)\, A^\nu = 0 \tag{1.123}$$

qu'a pour solutions

$$A^\nu = \epsilon^\nu(p)\; e^{-ip\cdot x} \tag{1.124}$$

avec $p^2 = m^2$ et $\epsilon^\nu(p)$ le vecteur de polarisation. L'équation (1.122) impose $p \cdot \epsilon(p) = 0$. Les solutions qui sont en accord avec cette contrainte sont les polarisations $\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3$. Jusqu'ici notre analyse est purement classique. Dans la théorie quantique on peut montrer que la composante avec polarisation ϵ^0 est éliminée puisque le courant de la symétrie de jauge est conservé. L'élément de matrice pour l'émission d'un photon peut s'interpréter comme dû au courant j^μ de la symétrie :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^\mu(p)\; \epsilon_\mu(p) = -e j^\mu(p)\; \epsilon_\mu(p) \tag{1.125}$$

et la conservation du courant est donnée par

$$p_\mu\; j^\mu(p) = 0 \,. \tag{1.126}$$

Le vecteur p est du type $p^2 = m^2$, par exemple on peut prendre le repère $p = (m, 0, 0, 0)$, ce qui implique que la composante de type temps est nulle : $\mathcal{M}^0 = 0$. On a trois composantes physiques du champ : A^1, A^2, A^3. Supposons que le photon massif soit émis dans la direction 3. Si le photon est émis au repos le vecteur de polarisation est $\epsilon^\mu(p) = (0, 0, 0, 1)$. Un boost de Lorentz d'impulsion p donne le vecteur de polarisation longitudinal

$$\epsilon_L^\mu(p) = \left(\frac{p}{m}, 0, 0, \frac{E}{m}\right) \tag{1.127}$$

avec $E^2 = p^2 + m^2$. Dans la limite de haute énergie, les composantes de ce vecteur deviennent grandes et provoquent la violation de l'unitarité de la théorie et sa non renormalisabilité. Dans le cas de l'électrodynamique les composantes longitudinales et transverses du champ n'interagissent pas parce que le champ est couplé à un courant conservé[3].

Dans le cas d'une théorie non Abélienne les parties longitudinales et transverses interagissent, le courant n'est pas conservé et la stratégie de Stückelberg ne marche pas. Pour construire des théories de jauge non Abéliennes avec des bosons de jauge massifs il faut faire appel à un mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de jauge.

1.3.4 Exercice A

Calculez la section efficace du processus $\bar{\nu}e \to \bar{\nu}e$ et vérifiez que si on néglige la masse de l'électron $s \gg m^2$:

$$\sigma(\bar{\nu}e \to \bar{\nu}e) = \frac{1}{3}\sigma(\nu e \to \nu e) \; . \tag{1.128}$$

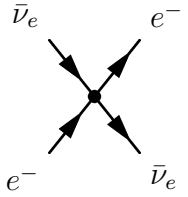
Quelle est la raison du facteur $1/3$ entre les deux sections efficaces?

3. Pour plus de détails voir [13] chapitre 8 et section 12-5.

1.4 Solution des exercices

Exercice A

L'élément de matrice à calculer est le suivant



$$iM = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{v}(p')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k)\right]\left[\bar{u}(k')\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(p)\right] \tag{1.129}$$

et le résultat s'obtient de façon similaire à celui de $\nu_e e \to \nu_e e$. La section efficace différentielle est:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2}\frac{(u-m^2)^2}{s} \ . \tag{1.130}$$

Pour obtenir la section efficace totale il suffit d'intégrer sur les angles, $u \simeq -s(1-x)$ comme dans la discussion avant la formule (1.118)

$$\sigma(\bar{\nu}e \to \bar{\nu}e) = \frac{G_F^2}{3\pi}(s-m^2)\left(1-\frac{m^6}{s^3}\right) \ . \tag{1.131}$$

Dans la limite $s \gg m^2$

$$\sigma(\bar{\nu}e \to \bar{\nu}e) \simeq \frac{G_F^2}{3\pi}\ s \ . \tag{1.132}$$

Le facteur $1/3$ est dû à l'hélicité du neutrino. Supposons que l'on prenne l'axe z selon la direction des particules incidentes (par exemple avec un signe positif dans la direction de l'impulsion de l'électron entrant). Dans $\nu_e e \to \nu_e e$, l'état initial est un état de spin $J_z = 0$ parce que les deux particules entrantes sont d'hélicité gauche (et d'impulsion opposée). Il n'y a pas de restriction sur la direction des particules sortantes de la collision élastique du point de vue de la conservation du spin total.

$$\begin{array}{lll} \text{entrant :} \quad J_z = 0 & \text{sortant } (\theta = \pi) : & J_z = 0 \\ e \xrightarrow{\Leftarrow}\xleftarrow{\Rightarrow} \nu_e & & e \xleftarrow{\Rightarrow}\xrightarrow{\Leftarrow} \nu_e \end{array} \tag{1.133}$$

En particulier les particules entrantes peuvent revenir en arrière après la collision ($\theta = \pi$). Par contre dans $\bar{\nu}_e e \to \bar{\nu}_e e$ l'anti–neutrino est une particule

d'hélicité droite.

$$\begin{array}{lll} \text{entrant :} \quad J_z = -1 & \quad \text{sortant } (\theta = \pi) : & \quad J_z = +1 \\ e \xrightarrow{\Leftarrow} \xleftarrow{\Leftarrow} \bar{\nu}_e & & e \xleftarrow{\Rightarrow} \xrightarrow{\Rightarrow} \bar{\nu}_e \end{array} \tag{1.134}$$

Le spin total du système initial est $J_z = -1$; pour $\theta = \pi$, l'état final de spin total $J_z = +1$, qui est interdit par la conservation du moment cinétique.

1.5 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

D.P. Roy
Basic Constituents of Matter and their Interactions
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9912523

P. Aurenche
The Standard Model of particle physics
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9712342

M.J. Herrero
The Standard Model
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9812242

Livres :

J. Horejsi
Introduction to electroweak unification - standard model from tree unitarity
World Scientific

Chapitre 2

Brisure spontanée de symétrie

2.1 Brisure de symétrie et taille d'un système

En mécanique quantique une symétrie T exacte (non brisée) a la propriété de transformer les états d'un système en eux mêmes:

$$T : \phi \rightarrow \phi' \tag{2.1}$$

de façon à ne pas changer les probabilités de transition

$$|\langle\phi,\psi\rangle|^2 = |\langle\phi',\psi'\rangle|^2 \ . \tag{2.2}$$

L'opérateur U de la transformation est unitaire ou anti–unitaire et en termes d'observables

$$T : A \rightarrow A' = UAU^{-1} \ . \tag{2.3}$$

Une telle transformation préserve les relations de commutation et plus généralement les relations algébriques, en particulier les équations du mouvement de la théorie ne changent pas sous la transformation T.

A l'inverse on peut se poser la question de savoir si une symétrie des équations du mouvement de la théorie implique une symétrie exacte. La réponse est affirmative pour un système avec un nombre fini de degrés de liberté.

Si le nombre de degrés de liberté de la théorie est infini (comme en théorie des champs) la réponse est négative. La raison en est la présence de représentations non équivalentes des relations de commutation canoniques. Une

symétrie des équations du mouvement peut ne pas donner lieu à des transformations des états du système qui préservent les probabilités de transition. On parle dans ce cas de symétrie brisée spontanément.

Comme exemple on va considérer un système non relativiste et on va faire la limite de volume infini (qui permet d'obtenir un nombre infini de degrés de liberté). Le lagrangien d'un champ scalaire ϕ est

$$\mathcal{L} = i\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \ . \tag{2.4}$$

L'équation du mouvement correspondante est l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \phi = 0 \ . \tag{2.5}$$

Le lagrangien et l'équation du mouvement sont invariants sous la transformation $U(1)$

$$\phi \to e^{-i\theta}\phi \qquad\qquad \phi^\dagger \to e^{i\theta}\phi^\dagger \ . \tag{2.6}$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger (2.5) est

$$\phi(\mathrm{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathrm{k}} a_{\mathrm{k}} e^{-i(\epsilon(k)t - i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x})} \tag{2.7}$$

avec

$$\epsilon(k) = \frac{\mathrm{k}^2}{2m} \quad \text{et} \quad \left[a_{\mathrm{k}}, a^\dagger_{\mathrm{k}'}\right] = \delta_{\mathrm{k}\mathrm{k}'} \ . \tag{2.8}$$

La formule pour $\epsilon(k)$ est la relation de dispersion pour l'équation d'onde. Le hamiltonien et l'opérateur nombre sont

$$H = \sum_{\mathrm{k}} \frac{\mathrm{k}^2}{2m} a^\dagger_{\mathrm{k}} a_{\mathrm{k}} \qquad N = \sum_{\mathrm{k}} a^\dagger_{\mathrm{k}} a_{\mathrm{k}} \tag{2.9}$$

avec $[H,N] = 0$ qui exprime la conservation du nombre de particules. L'état fondamental à n particules (le vide de notre théorie) est

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger_0)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{2.10}$$

où $a^\dagger_0 = a^\dagger_{\mathrm{k}=0}$ et $|0\rangle$ est le vide à zéro particules $a_{\mathrm{k}}|0\rangle = 0$. Le vide $|n\rangle$ est unique, c'est un vecteur propre de l'opérateur N. Le vide a la symétrie $U(1)$ explicite.

Maintenant on considère la limite $V \to \infty$ avec densité constante de particules $\rho = n/V$. On verra que la symétrie $U(1)$ est spontanément brisée dans cette limite. Pour le prouver il suffit de considérer les états de vide pour le système.

L'état fondamental $|n\rangle$ qu'on a considéré dans le cas du volume fini n'est pas un vide avec les propriétés requises par la théorie des champs parce qu'il n'a pas la propriété de "clustering" (pour des détails voir [14]). Sans entrer dans des détails techniques on peut dire que la signification physique de cette propriété est d'éviter des corrélations instantanées à longue distance dans le système.

Un vide dans la limite de volume infini est

$$|\theta\rangle = \exp(-n/2)\ \exp(\sqrt{n}e^{i\theta}a_0^\dagger)|0\rangle \tag{2.11}$$

et sous la symétrie $U(1)$ il n'est pas invariant

$$|\theta\rangle \to U(\alpha)|\theta\rangle = |\theta + \alpha\rangle \tag{2.12}$$

où l'opérateur unitaire de la transformation est

$$U(\alpha) = e^{i\alpha N}\ . \tag{2.13}$$

Pour se convaincre que (2.11) représente un vide de la théorie il suffit de vérifier quelques propriétés. D'abord à cause de la relation $H|\theta\rangle = 0$ pour n'importe quel $|\theta\rangle$, tous ces états ont la même énergie $E = 0$. Par contre, il ne sont pas vecteurs propres de l'opérateur N, mais le nombre moyen de particules correspond bien à n:

$$\langle\theta|N|\theta\rangle = n \tag{2.14}$$

tous ces états $|\theta\rangle$ sont orthogonaux et normalisés dans la limite de volume infini (pour garder la densité ρ constante n doit aussi tendre à l'infini):

$$\langle\alpha|\theta\rangle = \exp\{n[\cos(\theta - \alpha) - 1 + i\sin(\theta - \alpha)]\} \to \delta_{\theta\alpha} \tag{2.15}$$

quand $n \to \infty$.

La présence de vides dégénérés implique l'existence d'excitations à énergie zéro dans le système, un résultat lié à la relation de dispersion: $\epsilon(k) \to 0$ quand $k \to 0$. Dans la physique d'un système relativiste, la relation de dispersion est déterminé par les transformations de Poincaré

$$\epsilon(k) = \sqrt{k^2 + m^2} \tag{2.16}$$

et le comportement $\epsilon(k) \to 0$ quand $k \to 0$ est possible seulement avec une particule de masse nulle. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Goldstone.

2.2 Brisure spontanée d'une symétrie discrète

On a vu qu'à la base de la brisure spontanée de la symétrie on a une invariance de la théorie (du lagrangien) par rapport à un groupe de symétrie et un état fondamental de la théorie (le vide) qui est dégénéré et se transforme sous le groupe de symétrie de façon non invariante. Un des exemples les plus simples est celui du lagrangien pour un champ scalaire réel ϕ invariant sous transformation de parité:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi^2) \tag{2.17}$$

avec

$$P: \quad \phi \to -\phi \qquad\qquad P^2 = 1. \tag{2.18}$$

Pour le potentiel $V(\phi^2)$ on va choisir la forme:

$$V(\phi^2) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{2.19}$$

Afin d'avoir un potentiel limité inférieurement (c'est à dire une énergie minimale pour le système) la constante λ doit être positive. Si μ^2 est positif le potentiel a son minimum en $\phi = 0$ et à cause du fait que le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + V(\phi^2) \tag{2.20}$$

commute avec l'opérateur de parité

$$P|0\rangle = |0\rangle \tag{2.21}$$

par conséquence $P|0\rangle$ et $|0\rangle$ ont la même énergie et coïncident. De plus la valeur dans le vide du champ scalaire est nulle:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \langle 0|P^{-1}P\phi P^{-1}P|0\rangle = \langle 0|P\phi P^{-1}|0\rangle = -\langle 0|\phi|0\rangle \tag{2.22}$$

la seule solution possible est $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$.

Si $\mu^2 < 0$ le potentiel V a deux minima pour

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v \tag{2.23}$$

Si on appelle $|D\rangle$ $|G\rangle$ les deux états quantiques qui correspondent à la configuration classique $\phi = \pm v$, la parité permet de passer de l'un à l'autre

$$P|D\rangle = |G\rangle \neq |D\rangle \ . \tag{2.24}$$

La valeur dans le vide droit $|D\rangle$ ou gauche $|G\rangle$ du champ scalaire :

$$\langle D|\phi|D\rangle = \langle D|P^{-1}P\phi P^{-1}P|D\rangle = -\langle G|\phi|G\rangle \tag{2.25}$$

n'est plus forcément nulle. On a donc un lagrangien symétrique et deux vides dégénérés qui ne le sont pas; la parité est spontanément brisée.

Notre système a un potentiel qui est celui d'un double puits. On peut s'étonner d'obtenir deux vides dégénérés quand en mécanique quantique on a l'effet tunnel qui élimine cette dégénérescence. La différence entre le résultat de la mécanique quantique et celui de la théorie des champs est dû au nombre infini de degrés de liberté dans le deuxième cas. Pour voir en détail ce comportement on va considérer le double puits de potentiel en mécanique quantique et prendre la limite de volume infini. L'effet tunnel donne une probabilité de transition non nulle entre $|D\rangle$ et $|G\rangle$. Le hamiltonien a la forme

$$\begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & E \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

et les deux valeurs propres sont

$$\lambda_1 = E - \epsilon \qquad \lambda_2 = E + \epsilon \tag{2.27}$$

correspondant aux vecteurs propres

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D\rangle - |G\rangle\right) \tag{2.28}$$

et

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D\rangle + |G\rangle\right) \tag{2.29}$$

respectivement. La dégénérescence est éliminée et le vide de la théorie est $|1\rangle$ avec énergie λ_1.

Si au temps $t = 0$ on est dans le minimum du puits de droite, l'évolution au temps t donnée par la mécanique quantique est

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\lambda_2 t} \left(|2\rangle + e^{2it\epsilon} |1\rangle \right) \tag{2.30}$$

et la période d'oscillation entre les deux minima du potentiel est $T = \pi/\epsilon$. Pour notre potentiel scalaire la largeur de la barrière de potentiel est fixe et vaut $2v$, la distance entre les deux minima. La hauteur de la barrière est la différence d'énergie entre le maximum du potentiel en $\phi = 0$ et un des minima en $\phi = \pm v$:

$$H(\phi = 0) - H(\phi = v) = -\int_{\text{Vol}} d^3x \, \left(\frac{\mu^2}{2} v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 \right) = \frac{\mu^4}{4\lambda} \int_{\text{Vol}} d^3x = \frac{\mu^4}{4\lambda} \text{Vol} \, . \tag{2.31}$$

H est le hamiltonien du champ scalaire, qu'on obtient par intégration de la densité du hamiltonien de la formule (2.20). Dans la limite de volume infini la hauteur du potentiel est infinie et la différence d'énergie $2\epsilon \to 0$ (on n'a pas donné ici une preuve détaillée de ce résultat, mais il suffit de prendre le cas plus simple d'un double puits rectangulaire en mécanique quantique et de faire varier la hauteur de la barrière en gardant fixe sa largeur pour s'en convaincre). La transition entre les deux états $|D\rangle$ et $|G\rangle$ est impossible dans la limite de volume infini et ceci permet d'avoir la brisure spontanée de la symétrie.

2.3 Brisure spontanée d'une symétrie continue

Dans une théorie de champs locale, covariante et avec un espace de Hilbert avec norme positive, la brisure spontanée d'une symétrie continue donne lieu à des particules sans masse. Le théorème de Goldstone et ses résultats sont à la base du mécanisme de génération des masses pour les bosons de jauge qu'on examinera dans la section 2.5.

2.3.1 Exemple : $O(3)$

On va examiner ce théorème sur un exemple, celui d'une théorie scalaire avec une symétrie continue $O(3)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \, . \tag{2.32}$$

La notation est compacte, $\phi \equiv (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est un vecteur de $O(3)$ et ϕ^2 est un produit scalaire $\phi \cdot \phi$, la quatrième puissance de ϕ signifie $\phi^4 = (\phi \cdot \phi)^2$.

Une rotation infinitésimale d'angle θ selon la direction du vecteur n (avec $|n|^2 = 1$) peut s'écrire

$$\phi \to \phi + \theta\ \phi \wedge n\ . \tag{2.33}$$

Puisqu'une rotation laisse invariante la longueur d'un vecteur, pour une rotation infinitésimale on peut écrire

$$|\phi|^2 \to |\phi + \delta\phi|^2 = |\phi|^2 + 2\phi \cdot \delta\phi + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \tag{2.34}$$

et conclure que ϕ et $\delta\phi$ sont orthogonaux

$$\phi \cdot \delta\phi = 0 \tag{2.35}$$

pour garder invariante la norme du vecteur. Par définition du produit vectoriel de la formule (2.33), pour une rotation autour de la direction n, $\delta\phi$ doit être aussi orthogonal à n comme il suit en comparant les formules précédentes

$$\delta\phi = \theta\ \phi \wedge n\ . \tag{2.36}$$

Si par exemple $n \equiv (0, 0, 1)$ on trouve

$$\delta\phi_1 = \theta\ \phi_2 \qquad \delta\phi_2 = -\theta\ \phi_1 \qquad \delta\phi_3 = 0\ . \tag{2.37}$$

Le minimum du potentiel est donné par

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = \mu^2 \phi_i + \lambda \phi_i |\phi|^2 = 0 \tag{2.38}$$

avec deux solutions possibles

$$\phi_i = 0, \qquad \text{ou} \qquad |\phi|^2 = v^2 \tag{2.39}$$

avec

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\ . \tag{2.40}$$

Le minimum se trouve en examinant la dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \delta_{ij}(\mu^2 + \lambda|\phi|^2) + 2\lambda \phi_i \phi_j\ . \tag{2.41}$$

Selon le signe de μ^2 on a les deux possibilités suivantes:

$$\mu^2 > 0 \qquad \phi = 0 \tag{2.42}$$
$$\mu^2 < 0 \qquad |\phi|^2 = v^2 \tag{2.43}$$

Dans le cas $\mu^2 > 0$ on a un seul minimum réel $\phi = 0$. Dans le cas $\mu^2 < 0$ on a un nombre infini de minima dégénérés, les points sur la sphère $|\phi|^2 = v^2$. En choisissant un de ces points, par exemple $\phi_i = \delta_{i3} v$ on peut faire un développement autour du minimum

$$V(\phi) = V|_{min} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}|_{min} (\phi_i - \delta_{i3}\, v)\, (\phi_j - \delta_{j3}\, v) \tag{2.44}$$

et utiliser les différences $(\phi_i - \delta_{i3} v)$ comme nouveaux champs pour traiter la physique autour de ce minimum. La formule précédente indique la masse des champs après la brisure de la symétrie $O(3)$:

$$M^2_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}|_{min} = -2\mu^2 \delta_{i3} \delta_{j3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu^2 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Donc les masses des champs ϕ_1 et ϕ_2 sont nulles, par contre la masse du champ $\chi = \phi_3 - v$ est différente de zéro

$$m^2_{\phi_1} = m^2_{\phi_2} = 0\,, \qquad m^2_{\chi} = -2\mu^2\,. \tag{2.46}$$

Le potentiel en termes des nouveaux champs montre explicitement la brisure de la symétrie $O(3)$:

$$V = -\frac{m^4_\chi}{16\lambda} + \frac{1}{2} m^2_\chi \chi^2 + \sqrt{\frac{m^2_\chi \lambda}{2}} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2\right) \chi + \frac{\lambda}{4} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2\right)^2\,. \tag{2.47}$$

On peut noter que le lagrangien a une symétrie résiduelle $O(2)$, parce que V dépend seulement de la combinaison $\phi_1^2 + \phi_2^2$ qui est invariante par rotation autour de l'axe $(0, 0, v)$. Ce potentiel n'est pas le plus général possible avec symétrie $O(2)$, la brisure spontanée de la symétrie $O(3)$ nous impose des contraintes sur la forme du lagrangien. On a aussi montré qu'on obtient une théorie avec deux bosons scalaires sans masse qui correspondent à la brisure

de la symétrie selon les deux axes 1 et 2. Ceci a une correspondance en termes des générateurs de $O(3)$:

$$T_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad T_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad T_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

par rapport à leur action sur le vide (l'état de minimum qu'on a choisi)

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} . \tag{2.49}$$

Le vide n'est pas invariant par rapport à des rotations autour des axes 1 et 2, par contre il reste une invariance $O(2)$ par rapport aux rotations autour de l'axe 3 :

$$T_1|0\rangle \neq 0 \qquad T_2|0\rangle \neq 0 \qquad T_3|0\rangle = 0 . \tag{2.50}$$

2.3.2 Exercice A

Obtenir les matrices (2.48) à partir de la transformation infinitésimale de $O(3)$:

$$\phi_j \to (\delta_{jk} + \epsilon_{ijk}\theta\, n_i)\, \phi_k = (1 + i\theta\, T_i\, n_i)_{jk}\, \phi_k . \tag{2.51}$$

2.4 Théorème de Goldstone

En général si le groupe de la symétrie interne continue G est brisé spontanément à un groupe $H \subset G$ qui correspond à la symétrie de l'état de vide, le nombre de bosons de Goldstone correspond au nombre de générateurs [1] de G moins le nombre de générateurs de H. Vu que la dimension d'un groupe est donnée par le nombre de ses générateurs on peut écrire que le nombre de bosons de Goldstone est donné par

$$\dim(G) - \dim(H) = \dim(G/H) \tag{2.52}$$

1. Il y a une particularité dans le cas des bosons de Goldstone dans une théorie à deux dimensions, que l'on ne va pas examiner ici, le théorème de Coleman–Mermin–Wagner.

où G/H est appelé le groupe quotient. L'origine physique de ces particules sans masse est due au fait que les générateurs brisés permettent des transitions entre les états de vide (qui ont la même énergie) et ces transitions ne coûtent aucune énergie au système.

2.4.1 Brisure spontanée d'une symétrie interne

On va examiner une simple démonstration du théorème de Goldstone pour une symétrie continue interne. On parle de symétrie interne quand l'opération de symétrie ne concerne pas l'espace–temps, c'est le cas par exemple du spin.

Considérons une théorie avec des champs scalaires $\phi_i(x)$ et soit ϕ_0 le champ constant qui minimise le potentiel $V(\phi)$. Par définition de minimum on a

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i}|_{\phi_i(x)=\phi_0} = 0 \tag{2.53}$$

et avec un développement autour du minimum

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)_i\,(\phi-\phi_0)_j\,\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right)_{\phi_0} + \dots \tag{2.54}$$

Le coefficient du terme quadratique est une matrice symétrique

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right)_{\phi_0} = m_{ij}^2 \tag{2.55}$$

ses valeurs propres donnent les masses des champs. Pour prouver le théorème de Goldstone il faut montrer que chaque symétrie continue du lagrangien qui n'est pas une symétrie de ϕ_0 donne une valeur propre nulle à la matrice de masse. Les générateurs T^A de la symétrie G spontanément brisée se séparent en deux classes, un nombre $\dim(H)$ de générateurs T^α non brisés :

$$T^\alpha\,\phi_0 = 0 \tag{2.56}$$

dans le groupe résiduel H, et un nombre $\dim(G) - \dim(H)$ de générateurs T^a brisés :

$$T^a\,\phi_0 \neq 0 \tag{2.57}$$

dans le quotient G/H. La transformation de symétrie est donnée par

$$\delta\phi(x) = c_A T^A \phi_0 = c_a T^a \phi_0\ . \tag{2.58}$$

L'indice A a les valeurs (α, a), les $c_A = (c_a, c_\alpha)$ sont fonctions des champs. L'invariance du potentiel sous la transformation de symétrie s'écrit

$$V(\phi_A) = V(\phi_A + c_A T^A \phi_0) \tag{2.59}$$

ou sous la forme

$$c_A T^A \frac{\partial V}{\partial \phi_A} = 0 \tag{2.60}$$

par différentiation par rapport à ϕ_B avec $\phi = \phi_0$ on obtient

$$0 = \left(\frac{\partial c_A T^A}{\partial \phi_B}\right)_{\phi_0} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_A}\right)_{\phi_0} + c_A T^A \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_A \partial \phi_B}\right)_{\phi_0} . \tag{2.61}$$

Le premier terme est nul parce que ϕ_0 est un minimum de V. Le deuxième doit donc aussi s'annuler. Pour $c_\alpha T^\alpha = 0$ l'équation (2.61) est satisfaite sans restrictions sur la dérivée seconde de V. Pour $c_a(x) T^a \neq 0$, la dérivée seconde de V doit être nulle. Ceci implique des valeurs propres zéro pour la matrice de masse en nombre égal au nombre des générateurs brisés et démontre le théorème de Goldstone.

Une autre possibilité pour démontrer le théorème de Goldstone consiste à examiner les fonctions de Green de la théorie. La transformation de symétrie sur les champs est donnée par

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\epsilon^A Q^A} \phi(x)\, e^{-i\epsilon_A Q^A} \tag{2.62}$$

ou de manière équivalente par

$$\delta^A \phi(x) = [iQ^A, \phi(x)] \tag{2.63}$$

Q^A étant la charge conservée[2]. Sous la transformation de symétrie, une fonction de Green se transforme selon

$$\begin{aligned} G_n \to G'_n &= \langle 0|T\phi'_1(x_1)\phi'_2(x_2)\ldots\phi'_n(x_n)|0\rangle \\ &= \langle 0'|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\ldots\phi_n(x_n)|0'\rangle \end{aligned} \tag{2.65}$$

2. La charge conservée n'est pas en général bien définie du point de vue mathématique en théorie des champs, mais pour la démonstration du théorème seulement son commutateur avec les champs intervient

$$[iQ^A, \phi(x)] \equiv i \int d^4z\, [J_0^A(z), \phi(x)]\ \delta(z_0 - x_0) \tag{2.64}$$

et celui-ci est bien défini.

où l'on a utilisé la formule (2.62) et

$$|0'\rangle = e^{-i\epsilon^A Q^A}|0\rangle \ . \tag{2.66}$$

Si $|0\rangle \to |0'\rangle = |0\rangle$ la symétrie est aussi une symétrie du vide et $\delta^A G_n = G'_n - G_n = 0$. Dans le cas contraire au moins pour une des fonctions de Green $\delta^A G_n \neq 0$ et la symétrie est spontanément brisée.

La variation $\delta^A G_n$ est le paramètre d'ordre de la brisure de symétrie. Pour $n = 1$ on a un paramètre d'ordre élémentaire, si $n \geq 2$ le paramètre d'ordre est composé. Un paramètre d'ordre composé est en général non local, avec des champs évalués à des points différents. Dans le cas particulier $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ le paramètre d'ordre composé est local est s'appelle condensat. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\delta^A G_n(x_1,\ldots,x_n) &= \langle 0|[iQ^A, T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\ldots\phi_n(x_n)]|0\rangle \\
&= \langle 0|T[iQ^A,\phi_1(x_1)]\,\phi_2(x_2)\ldots\phi_n(x_n)|0\rangle \\
&\quad +\langle 0|T\phi_1(x_1)\,[iQ^A,\phi_2(x_2)]\ \ldots\phi_n(x_n)|0\rangle \\
&\quad +\ldots+\langle 0|T\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\ldots[iQ^A,\phi_n(x_n)]\,|0\rangle \ .
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Pour prouver le théorème de Goldstone on considère la quantité

$$M^A_\mu(q,x_1,\ \ldots,x_n) \equiv \int d^4z\, e^{iqz}\langle 0|T\, J^A_\mu \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\ldots\phi_n(x_n)|0\rangle \tag{2.68}$$

La conservation du courant associé à la symétrie par le théorème de Noether $\partial^\mu J^A_\mu = 0$ donne l'identité de Ward–Takahashi

$$\begin{aligned}
\lim_{q_\mu\to 0} q^\mu M^A_\mu &= \lim_{q_\mu\to 0}\int d^4z\, e^{iqz}(i\partial^\mu_z)\langle 0|T\, J^A_\mu(z)\,\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\ldots\phi_n(x_n)|0\rangle \\
&= \delta^A G_n(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

où l'on a utilisé la formule (2.68) et

$$\partial^\mu_z T J^A_\mu(z)\,\phi(x) = [J^A_0,\phi(x)]\,\delta(z_0 - x_0) \ . \tag{2.70}$$

Si $\delta^A G_n \neq 0$ pour au moins une des fonctions de Green, le M^A_μ correspondant a un pôle à $q^2 = 0$:

$$M^A_\mu(x_1,\ldots,x_n) \sim \frac{q_\mu}{q^2}\,\delta^A G_n(x_1,\ldots,x_n) \tag{2.71}$$

l'indice de Lorentz de q_μ implique que cette particule sans masse a spin zéro. Le théorème établit une correspondance biunivoque entre les générateurs spontanément brisés et les bosons de Goldstone.

2.4.2 Brisure spontanée d'une symétrie de l'espace–temps

Le résultat précédent ne se généralise pas au cas de la brisure spontanée d'une symétrie de l'espace–temps. Un exemple est la brisure spontanée de l'invariance conforme au groupe de Poincaré en quatre dimensions. La symétrie conforme G a 15 générateurs, le groupe de Poincaré H en a 10. Naïvement on s'attend à $\dim(G) - \dim(H) = 5$ bosons de Goldstone. En réalité il y a seulement un boson de Goldstone, appelé dilaton.

Un autre exemple est une théorie non invariante de Lorentz : le nombre de bosons de Goldstone peut être inférieur à celui prédit par le théorème de Goldstone même dans le cas d'une symétrie interne.

On va se limiter au cas d'une théorie avec brisure spontanée d'une symétrie de l'espace–temps. Dans ce cas il est facile d'adapter notre première démonstration de la section 2.4.1. A partir de

$$c_A T^A \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_A \partial \phi_B} \right)_{\phi_0} = 0 \tag{2.72}$$

dans la formule (2.61) on avait conclu que la matrice de masse avait des valeurs propres zéro en correspondance des générateurs brisés. Dans le cas d'une symétrie de l'espace–temps les générateurs T_A sont fonctions des coordonnées comme les c_A et on peut avoir des relations de dépendance linéaire

$$c_a(x)\, T^a(x)\, \phi_0 = 0 \; . \tag{2.73}$$

même si les générateurs sont linéairement indépendants. Si n sont les solutions non banales de l'équation (2.73), le nombre de bosons de Goldstone est donné par

$$\dim(G) - \dim(H) - n = \dim(G/H) - n \; . \tag{2.74}$$

Les générateurs restent indépendants, mais les fluctuations qu'il génèrent ne le sont pas forcement. Dans l'exemple de la symétrie conforme brisée spontanément au groupe de Poincaré on peut examiner directement l'algèbre conforme

$$\begin{aligned}
[P_\mu, D] &= iP_\mu & (2.75)\\
[K_\mu, D] &= iK_\mu & (2.76)\\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i(-g_{\mu\nu} D + J_{\mu\nu}) & (2.77)\\
[J_{\mu\nu}, K_\rho] &= i(g_{\mu\rho} K_\nu - g_{\nu\rho} K_\mu) & (2.78)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu) && (2.79)\\
[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] &= -i(g_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}J_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu}J_{\mu\beta} - g_{\beta\nu}J_{\mu\alpha}) && (2.80)\\
[J_{\mu\nu}, D] &= [P_\mu, P_\nu] = [K_\mu, K_\nu] = [D, D] = 0 && (2.81)
\end{aligned}
$$

où D est le générateur des dilatations et la brisure spontanée de la symétrie implique pour la formule (2.77) que

$$[K_\mu, P_\nu]\ \phi_0 = -2i\, g_{\mu\nu} D\, \phi_0 \tag{2.82}$$

donc les modes pour K_μ (transformations conformes spéciales) peuvent être exprimés en termes de ceux des dilatations D.

2.4.3 Exercice B

Considérons un champ scalaire complexe ϕ_i dans la représentation vectorielle de $SU(n)$, qui transforme de la façon suivante sous transformations infinitésimales de $SU(n)$

$$
\begin{aligned}
\phi_i &\rightarrow \phi_i + i\epsilon_i^j \phi_j && (2.83)\\
\phi^i &\rightarrow \phi^i - i\epsilon_k^i \phi^k && (2.84)
\end{aligned}
$$

avec $\phi_i^* = \phi^i$. Trouver une expression invariante sous les transformations de $SU(n)$ et construire le potentiel scalaire renormalisable le plus général dans une théorie à 4 dimensions.

Choisir une valeur dans le vide pour le champ scalaire de la forme

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

et se placer à ce minimum avec une translation du champ pour étudier les propriétés des composantes du champ scalaire. Combien de bosons de Goldstone sans masse restent dans le spectre de la théorie? Quel est le groupe résiduel d'invariance de la théorie?

Faire le même exercice avec deux champs scalaires complexes ϕ_{1i} et ϕ_{2i} dans la représentation vectorielle de $SU(n)$, qui se transforment de la même façon que le ϕ_i précédemment utilisé. Pour construire le potentiel scalaire

n'oubliez pas de considérer aussi les termes mixtes qui font intervenir les deux champs.

Choisir des valeurs dans le vide

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad \langle 0|\phi_2|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

et étudier la brisure de symétrie.

2.5 Mécanisme de Higgs

Le théorème de Goldstone constitue un problème plutôt qu'une solution pour la génération des masses. On a obtenu des particules sans masse dans la brisure spontanée de la symétrie. Quand on brise spontanément une théorie de jauge les résultats sont très différents. La raison en est que le théorème de Goldstone ne s'applique pas à une symétrie de jauge parce qu'il est impossible de quantifier une théorie de jauge en gardant en même temps la covariance de la théorie et un espace de Hilbert à norme positive. Dans le cas de la brisure spontanée d'une théorie de jauge les bosons de jauge qui correspondent aux symétries brisées ont une masse et les bosons de Goldstone correspondants disparaissent. On appelle ce phénomène mécanisme de Higgs.

2.5.1 Exemple : $O(2)$

On peut considérer l'exemple d'une théorie avec symétrie $O(2)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \ . \tag{2.87}$$

avec ϕ un vecteur de champs réels à deux composantes. La symétrie $O(2)$ n'est pas une symétrie de jauge et on peut répéter l'analyse de la section précédente. Si $\mu^2 < 0$ on peut choisir le vide

$$\phi = (v,0) \ , \qquad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{2.88}$$

et faire une translation du champ ϕ_1 pour se placer au minimum, $\phi_1 = \chi + v$, avec potentiel

$$V = -\frac{m_\chi^4}{16\lambda} + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + \sqrt{\frac{m_\chi^2 \lambda}{2}} \left(\phi_2^2 + \chi^2\right) \chi + \frac{\lambda}{4} \left(\phi_2^2 + \chi^2\right)^2 . \tag{2.89}$$

Le boson de Goldstone est donc ϕ_2 qui reste sans masse et la symétrie continue $O(2)$ est complètement brisée (à part une symétrie discrète $\phi_2 \to -\phi_2$). La transformation infinitésimale sous $O(2)$ du champ ϕ est donnée par

$$\delta\phi_1 = -\alpha\phi_2 , \qquad \delta\phi_2 = \alpha\phi_1 \tag{2.90}$$

et en termes des nouveaux champs

$$\delta\chi = -\alpha\phi_2 , \qquad \delta\phi_2 = \alpha\chi + \alpha v \tag{2.91}$$

donc le boson de Goldstone, en termes des nouvelles variables, se transforme avec une rotation plus une translation. Pour avoir invariance par rapport à la translation d'un champ, le potentiel V doit être plat dans cette direction et ceci signifie à son tour que la translation ne coûte aucune énergie et la particule est donc sans masse.

On va maintenant analyser le même modèle dans le cas d'une symétrie locale (symétrie de jauge). L'invariance sous transformations du champ du boson de Goldstone devient

$$\delta\phi_2(x) = \alpha(x)\chi(x) + \alpha(x)v \tag{2.92}$$

et puisque $\alpha(x)$ est une fonction arbitraire de l'espace–temps on peut la choisir de façon à faire disparaître ϕ_2. Pour le voir en détail on peut passer en coordonnés polaires :

$$\rho = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} , \qquad \theta = \arcsin \frac{\phi_2}{\rho} \tag{2.93}$$

la transformation sous rotations finies étant

$$\rho \to \rho , \qquad \theta \to \theta + \alpha . \tag{2.94}$$

Dans le cas infinitésimal les deux systèmes de coordonnés coïncident :

$$\rho = \sqrt{\phi_2^2 + \chi^2 + 2v\chi + v^2} \sim v + \chi , \qquad \theta \sim \frac{\phi_2}{\chi + v} \sim \frac{\phi_2}{v} . \tag{2.95}$$

Pour rendre la théorie invariante sous les transformations locales

$$\theta(x) \to \theta(x) + \alpha(x) \tag{2.96}$$

et avec le choix $\alpha(x) = -\theta(x)$ on peut éliminer complètement le champ $\theta(x)$ de la théorie.

Pour construire explicitement la théorie avec invariance locale il faut introduire un champ de jauge et des dérivés covariantes. Il est plus simple de changer encore une fois de notation et d'écrire le doublet de champs scalaires réels en termes d'un champ complexe

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \;, \qquad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{2.97}$$

et la rotation de $O(2)$ devient une transformation de phase pour le champ complexe ϕ

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi \;. \tag{2.98}$$

Le lagrangien du modèle (2.87) s'écrit dans les nouvelles variables

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \;. \tag{2.99}$$

Pour rendre le lagrangien invariant sous la transformation locale il faut introduire des dérivés covariantes

$$\partial_\mu\phi \to (\partial_\mu - igA_\mu)\,\phi = D_\mu\phi \tag{2.100}$$

et le terme cinétique pour le champ de jauge A_μ, on a donc

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu + igA_\mu)\,\phi^\dagger\,(\partial^\mu - igA^\mu)\,\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \;. \tag{2.101}$$

Il est difficile de lire directement les masses des particules à partir de ce lagrangien parce qu'on a un terme de mélange $A_\mu\partial^\mu\theta$ entre le boson de Goldstone θ et le boson de jauge A_μ. On peut par une transformation de jauge éliminer ce terme de mélange parce qu'on a vu qu'on peut éliminer totalement le boson de Goldstone du lagrangien. En coordonnés polaires

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\rho\,e^{i\theta} \;, \qquad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\rho\,e^{-i\theta} \;. \tag{2.102}$$

La transformation de jauge qui élimine θ est

$$\phi \to \phi\,e^{-i\theta} \tag{2.103}$$

pour le champ scalaire et

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta \tag{2.104}$$

pour le champ de jauge. Le lagrangien devient

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu + igA_\mu)\rho(\partial^\mu - igA^\mu)\rho - \frac{\mu^2}{2}\rho^2 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 \ . \tag{2.105}$$

Il nous reste à faire la translation pour se placer autour du minimum $\rho = \chi + v$ et on peut voir que le terme de dérivée covariante génère un terme de masse pour le champ de jauge

$$\frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu \tag{2.106}$$

donc le champ de jauge a une masse

$$m_A^2 = g^2v^2 \tag{2.107}$$

et le boson de Goldstone a disparu de la théorie. Le choix de jauge où le boson de Goldstone n'apparaît pas est appelé la jauge unitaire. Il faut noter que le nombre de degrés de liberté de la théorie n'a pas changé : au départ on avait deux champs scalaires réels et les deux composantes d'un boson de jauge sans masse. Après la transformation de jauge on a un seul champ scalaire réel et les trois composantes d'un boson de jauge avec masse.

En général, si le groupe global de la symétrie du lagrangien est G, $H \subset G$ le groupe d'invariance du vide et $G_W \subset G$ le groupe des symétries de jauge locales (avec $K = H \cap G_W \neq 0$), on peut séparer les générateurs brisés de G en deux catégories : $T_K \in K$ sont les générateurs associés aux bosons de jauge avec masse, les autres générateurs brisés correspondent à des bosons de Goldstone sans masse. Les générateurs de G_W non brisés correspondent à des bosons de jauge sans masse.

2.5.2 Exercice C

Considérer le lagrangien de la symétrie $O(3)$ locale

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu)_{ij}\phi_j(D^\mu)_{ik}\phi_k - \frac{\mu^2}{2}\phi_i\phi_i - \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2 \tag{2.108}$$

avec dérivée covariante

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - ig\,(T_a)_{ij}\,W_\mu^a \tag{2.109}$$

et $(T_a)_{ij} = -i\epsilon_{aij}$. Choisir la solution avec brisure spontanée de la symétrie ($\mu^2 < 0$) et le vide de la théorie selon la direction 3 :

$$\phi_i = v\,\delta_{i3} \tag{2.110}$$

et montrer que les deux champs de jauge W_1^μ et W_2^μ associés aux générateurs brisés T_1 et T_2 ont une masse g^2v^2. Montrer aussi que W_3^μ a masse nulle.

2.6 Brisure dynamique de symétrie

La brisure dynamique de symétrie est une brisure spontanée avec un paramètre d'ordre qui est donné par la valeur moyenne sur le vide d'un opérateur composé plutôt qu'élémentaire. On a utilisé dans les sections précédentes un champ scalaire comme opérateur élémentaire, mais on peut se demander si cette option est vraiment celle utilisée par la nature pour la brisure de la symétrie électrofaible. Pour l'instant la recherche du boson de Higgs est en cours et on ne peut pas répondre à cette question, mais on peut essayer de trouver d'autres mécanismes. On verra dans les extensions du modèle standard, à des énergies plus élevées que l'échelle électrofaible, que l'existence d'un secteur scalaire pose aussi des problèmes théoriques et n'est pas complètement satisfaisante dans le cadre du modèle standard.

On a plusieurs exemples de brisure dynamique de symétrie. Un des plus connus est le modèle de la supraconductivité. Historiquement la première explication a été donnée en termes d'un champ scalaire (modèle de Ginzburg–Landau), mais ensuite l'étude microscopique de la théorie a montré que ce champ scalaire était en réalité un champ composé, un état lié de deux fermions (théorie BCS de la supraconductivité). De cette façon on a obtenu une explication microscopique détaillée du phénomène qui n'était pas possible avec l'approximation d'un champ scalaire. D'autre exemples existent dans le cas des interactions fortes, où les condensats des quarks jouent le rôle de paramètre d'ordre.

Dans le cas des interactions électrofaibles plusieurs modèles dynamiques ont été proposés. Les plus simples, basés sur une dynamique de type QCD (les modèles de technicouleur) ne sont pas en accord avec les résultats des mesures de précision en physique électrofaible, mais d'autres dynamiques ont été étudiées, avec des succès partiels. La difficulté pour trouver un modèle dynamique par rapport aux modèles avec des scalaires élémentaires est due à la nécessité d'expliquer l'origine de la masse des particules. Dans le modèle

standard le boson de Higgs est responsable à la fois des masses des bosons de jauge et des masses des fermions. Mais la masse des fermions est obtenue en choisissant des paramètres, les couplages de Yukawa. Dans un modèle dynamique ces problèmes demandent une explication plus fondamentale.

2.7 Solution des exercices

Exercice A

Il suffit de noter que

$$(T_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{2.111}$$

pour pouvoir écrire explicitement les matrices (2.48).

Exercice B

Une expression invariante sous les transformations de $SU(n)$ est donnée par le produit scalaire dans l'espace vectoriel complexe

$$\phi_i\phi^i \to (\phi_i + i\epsilon^j_i\phi_j)\,(\phi^i - i\epsilon^i_k\phi^k) = \phi_i\phi^i \ . \tag{2.112}$$

Le potentiel invariant renormalisable peut se construire à partir de cette combinaison invariante

$$V(\phi) = \mu^2\phi_i\phi^i + \frac{\lambda}{2}\left(\phi_i\phi^i\right)^2 \ . \tag{2.113}$$

Pour $\mu^2 < 0$ le minimum du potentiel est donné par

$$\phi_i\phi^i = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv v \ . \tag{2.114}$$

La valeur dans le vide pour le champ scalaire est choisie dans la direction n du potentiel

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = \delta_{in}\, v \tag{2.115}$$

selon les indications données par l'exercice. La symétrie est brisée de la façon suivante

$$SU(n) \to SU(n-1) \ . \tag{2.116}$$

Le nombre de bosons de Goldstone est donné par le nombre de générateurs brisés de la théorie, à son tour donné par la différence entre le nombre de générateurs de $SU(n)$, n^2-1 et de $SU(n-1)$, $[(n-1)^2-1]$

$$(n^2-1)-[(n-1)^2-1]=2n-1\ . \tag{2.117}$$

Pour étudier plus en détail la brisure de la symétrie on peut se placer au minimum par une translation du champ

$$\phi_i=+\delta_{in}\,v \tag{2.118}$$

et écrire le potentiel en termes des nouveaux champs. La partie quadratique du potentiel donne les termes de masse

$$\mu^2\,(\phi_i'\phi'^i)+\frac{\lambda}{2}\left[v^2(\phi_n+\phi^n)^2+2v^2(\phi_i'\phi'^i)\right]=-\frac{\mu^2}{2}(\phi_n+\phi^n)^2\ . \tag{2.119}$$

Les champs ϕ_i sont complexes (deux dégrés de liberté pour chaque champ) et $\phi^i=\phi_i^*$. Seulement la partie réelle de ϕ_n a une masse. Les autres $2n-1$ champs sont les bosons de Goldstone sans masse.

Avec deux multiplets de champs scalaires complexes on a quatre combinaisons invariantes

$$\phi_{1i}\phi^{1i}\ ,\qquad \phi_{2i}\phi^{2i}\ ,\qquad \phi_{1i}\phi^{2i}\ ,\qquad \phi_{2i}\phi^{1i} \tag{2.120}$$

pour construire le potentiel invariant. Le schéma de brisure de la symétrie est le suivant

$$SU(n)\to SU(n-2) \tag{2.121}$$

avec

$$(n^2-1)-[(n-2)^2-1]=4n-4 \tag{2.122}$$

bosons de Goldstone.

Exercice C

Le terme de masse pour les champs de jauge dans le lagrangien est

$$-\frac{1}{2}g^2v^2(T_a)_{i3}(T_b)_{i3}W_\mu^aW^{a\mu} \tag{2.123}$$

et la matrice de masse

$$(M_W^2)_{ab}=-g^2v^2(T_a)_{i3}(T_b)_{i3}\ . \tag{2.124}$$

En utilisant $(T_a)_{ij} = -i\epsilon_{aij}$ on obtient

$$(T_a)_{i3}(T_b)_{i3} = -\epsilon_{ai3}\epsilon_{bi3} = -(\delta_{ab} - \delta_{a3}\delta_{b3}) \tag{2.125}$$

et la forme explicite de la matrice de masse :

$$(M_W^2)_{ab} = g^2v^2(\delta_{ab} - \delta_{a3}\delta_{b3}) = g^2v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

donc les deux champs W_1^μ et W_2^μ associés aux générateurs brisés T_1 et T_2 ont une masse g^2v^2 tandis que W_3^μ a masse nulle puisqu'il est associé à la symétrie non brisée $O(2)$.

2.8 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

R.D. Peccei
Exact and Broken Symmetries in Particle Physics
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0002225

S. Dawson
Introduction to Electroweak Symmetry Breaking
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9901280

Livres :

F. Strocchi
Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems
Part C - Symmetry Breaking Phenomena
World Scientific

Chapitre 3

Lagrangien du modèle standard

Le lagrangien du modèle standard est donné par

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} + \mathcal{L}_{\mathrm{D}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}} \tag{3.1}$$

et on va examiner chaque partie du lagrangien et ses symétries.

3.1 Secteur de jauge

Le premier terme de droite de l'équation (3.1) est la partie cinétique des champs de jauge :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4g_1^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4g_2^2} W^a_{\mu\nu} W^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4g_3^2} G^A_{\mu\nu} G^{A\,\mu\nu} \tag{3.2}$$

avec g_1, g_2, g_3, les couplages respectivement de l'hypercharge, du spin isotopique (isospin) faible et de la couleur. Pour les tenseurs de l'équation précédente on a

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{3.3}$$

pour l'hypercharge, avec B_μ le champ du boson vecteur de $U(1)$ d'hypercharge. Pour l'isospin :

$$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - \epsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu \tag{3.4}$$

avec W^a_μ (a = 1,2,3) les bosons vecteurs de $SU(2)$ de l'isospin faible et ϵ^{abc} la constante de structure antisymétrique de $SU(2)$. Pour le groupe $SU(3)$ de couleur

$$G^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu \tag{3.5}$$

A^A_μ ($A = 1, \ldots 8$) les champs des gluons, f^{ABC} la constante de structure antisymétrique de $SU(3)$.

3.2 Secteur de Dirac

Le terme $\mathcal{L}_\mathrm{D}$ de l'équation (3.1) est la partie de Dirac pour les fermions, qui décrit la partie libre du lagrangien fermionique plus les interactions des fermions avec les bosons de jauge.

On a vu dans le chapitre 1 que les interactions faibles ne respectent pas la parité. On va décrire les fermions de Dirac à quatre composantes en termes de spineurs de Weyl à deux composantes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

pour rendre ce fait explicite. De plus cette notation sera utile ensuite pour l'étude de la supersymétrie. Pour plus de détails faire référence à la section 10.1. Une façon intuitive de comprendre cette notation est en termes de l'algèbre des transformations de Lorentz. Dans le cas des transformations à quatre dimensions de l'espace–temps, le groupe de Lorentz est généré par deux facteurs $SU(2)$, $\vec{J}+i\vec{K}$ et $\vec{J}-i\vec{K}$ où $\vec{J}$ est le moment angulaire et $\vec{K}$ le vecteur des boosts[1]. Il est facile de voir que les deux $SU(2)$ sont liés par la conjugaison C ou par une transformation de parité P ($\vec{J} \to \vec{J}$ et $\vec{K} \to -\vec{K}$). Ils sont donc invariants sous une transformation de CP. On peut exploiter la conjugaison C pour écrire les deux types de fermions à deux composantes en termes d'un seul type:

$$\bar{\psi}_L \equiv \sigma_2 \psi^*_R \qquad\qquad \bar{\psi}_R \equiv \sigma_2 \psi^*_L \tag{3.7}$$

(σ_2 matrice de Pauli). On a

$$C: \quad \psi_L \to \sigma_2 \psi^*_R \qquad\qquad \psi_R \to \sigma_2 \psi^*_L \tag{3.8}$$

$$P: \quad \psi_L \to \psi_R \qquad\qquad \psi_R \to \psi_L \tag{3.9}$$

1. La possibilité d'individuer deux facteurs $SU(2)$ n'implique pas que le groupe de Lorentz soit le produit (ou la somme directe dans le langage des mathématiciens) de ce deux groupes $SU(2)$. On peut montrer que le groupe de Lorentz $SO(3,1) \neq SU(2) \otimes SU(2)$.

Les quarks et leptons du modèle standard en termes de multiplets de $(SU(3)_c$, $SU(2)_w$, $U(1)_y)$ s'écrivent, en utilisant seulement des spineurs à deux composantes de type L :

$$
\begin{aligned}
L_i &= \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L \sim (1,2,y_1) && (3.10)\\
\bar{e}_{iL} &\sim (1,1,y_2) && (3.11)\\
Q_i &= \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \sim (3,2,y_3) && (3.12)\\
\bar{u}_{iL} &\sim (\bar{3},1,y_4) && (3.13)\\
\bar{d}_{iL} &\sim (\bar{3},1,y_5) && (3.14)
\end{aligned}
$$

où (a,b,c) réfère à la notation des multiplets $(SU(3)_c, SU(2)_w, U(1)_y)$, i étant l'indice qui indique la famille. Pour l'instant les valeurs $y_1 \ldots y_5$ de l'hypercharge restent à déterminer. Le couplage des fermions aux champs de jauge est fait avec des dérivées covariantes. Pour les champs de jauge on va utiliser une notation en termes de matrices

$$
\tilde{W}_\mu = \frac{1}{2} W_\mu^a \tau^a \qquad\qquad \tilde{A}_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^A \lambda^A \tag{3.15}
$$

avec τ^a les matrices de $SU(2)_w$ (matrices de Pauli) et λ^A celles de $SU(3)_c$ (matrices de Gell-Mann). Dans la suite on va indiquer les matrices de Pauli avec τ^i quand on fait référence aux matrices de $SU(2)_w$ et avec σ^i pour le spin.

Les dérivées covariantes sont définies par

$$
\begin{aligned}
D_\mu L_i &= \left(\partial_\mu + i\tilde{W}_\mu + i\frac{y_1}{2} B_\mu\right) L_i && (3.16)\\
D_\mu \bar{e}_i &= \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} y_2 B_\mu\right) \bar{e}_i && (3.17)\\
D_\mu Q_i &= \left(\partial_\mu + i\tilde{A}_\mu + i\tilde{W}_\mu + \frac{i}{2} y_3 B_\mu\right) Q_i && (3.18)\\
D_\mu \bar{u}_i &= \left(\partial_\mu - i\tilde{A}_\mu^* + \frac{i}{2} y_4 B_\mu\right) \bar{u}_i && (3.19)\\
D_\mu \bar{d}_i &= \left(\partial_\mu - i\tilde{A}_\mu^* + \frac{i}{2} y_5 B_\mu\right) \bar{d}_i \ . && (3.20)
\end{aligned}
$$

La partie de Dirac du lagrangien du modèle standard est

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = \sum_{i=1}^{3} \left(L_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu L_i + \bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{e}_i + Q_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu Q_i + \bar{u}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{u}_i + \bar{d}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{d}_i \right) . \tag{3.21}$$

3.3 Secteur de Yukawa

Le lagrangien $\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{\mathrm{D}}$ a une symétrie plus grande que le lagrangien complet du modèle standard. Pour les multiplets M_i des formules (3.10-3.14) une transformation par une matrice unitaire 3×3

$$M_i \to M_i' = U_{ij} M_j \tag{3.22}$$

laisse $\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{\mathrm{D}}$ invariant. Vu qu'on a 5 types de fermions dans les formules (3.10-3.14) la symétrie globale semble être

$$[U(3)]^5 \ . \tag{3.23}$$

En réalité on verra que la symétrie de cette partie du lagrangien est plus petite à cause des anomalies. En tout cas la symétrie (3.23) n'est pas respectée par la partie restante du lagrangien du Modèle standard puisque les interactions de Yukawa brisent explicitement cette symétrie. L'interaction d'un champ scalaire (doublet de $SU(2)_w$) avec les fermions est donné par

$$\phi \bar{\psi}_1 \psi_2 = \phi \psi_{1R}^\dagger \psi_{2L} + \phi \psi_{1L}^\dagger \psi_{2R} \tag{3.24}$$

où l'on a explicité les spineurs à 4 composantes en termes de spineurs à 2 composantes et $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. La formule (3.24) montre que les interactions de Yukawa mélangent des spineurs avec chiralité différente pour former des singulets de couleur et doublets d'isospin qui sont ensuite couplés aux scalaires.

3.3.1 Hypercharge et anomalies

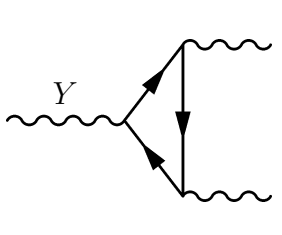
Les valeurs de l'hypercharge restent à déterminer. Une façon de les déterminer est de s'assurer que le choix de l'hypercharge soit en accord avec les contraintes de renormalisabilité et de symétrie de la théorie. Les relations de symétrie entre les fonctions de Green sont appelés identités de Ward. La renormalisabilité d'une théorie dépend de façon critique de la compensation

de divergences entre secteurs différents de la théorie, donc des identités de Ward. Les corrections quantiques ne respectent pas forcement les symétries de départ et dans ce cas on parle d'anomalie pour les identités de Ward.

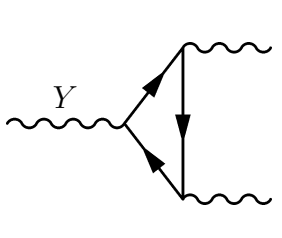
Au niveau quantique il faut s'assurer de l'absence d'anomalies pour les identités de Ward car elles empêchent la conservation d'un courant de jauge (la renormalisabilité de la théorie serait détruite).

Pour vérifier l'absence d'anomalies il faut calculer des diagrammes à boucles. Par la suite on va se limiter à l'examen des diagrammes à triangle, puisque les contributions d'ordre supérieur ou avec un nombre plus élevé de lignes extérieures sont nulles si le diagramme triangle est nul. Il est possible de voir de façon générale que les constantes de structure symétriques du groupe interviennent dans le terme anormal lorsqu'on calcule les diagrammes triangles. Ceci permet de limiter le nombre de diagrammes à considérer. Le groupe $SU(3)$ de couleur a des constantes de structure symétriques mais il n'a pas d'anomalies parce que le nombre de quarks et anti–quarks gauches est le même et ceci garanti que chaque contribution d'un fermion dans la boucle est effacée par la contribution de l'anti–fermion correspondant. Le groupe $SU(2)$ a seulement des constantes de structure anti–symétriques, il ne donne donc pas de contributions à l'anomalie. Le groupe $U(1)$ de l'hypercharge peut par contre donner lieu à des anomalies. On va donc examiner les diagrammes avec au moins un boson Y de $U(1)_y$. On peut noter que les diagrammes qui contiennent une seule ligne avec un boson de $SU(3)_c$ ou $SU(2)_w$ sont nuls parce que les traces sur une seule matrice de ces groupes sont nulles.

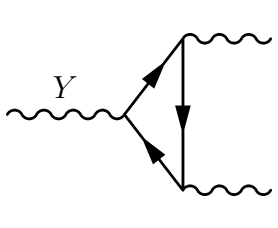
On a donc les contraintes suivantes sur l'hypercharge pour éliminer les diagrammes triangles :



$$2\,y_3 + y_4 + y_5 = 0 \tag{3.25}$$



$$2\,y_1 + 2 \cdot 3\,y_3 = 0 \tag{3.26}$$



$$2\,y_1^3 + y_2^3 + 3\,(2\,y_3^3 + y_4^3 + y_5^3) = 0 \quad (3.27)$$

Dans la boucle fermionique du diagramme (3.25) seuls les quarks peuvent circuler parce que les lignes externes $SU(3)$ du diagramme sont des gluons A_μ^A (les bosons de jauge de $SU(3)$) et seuls les fermions colorés sont couplés aux gluons. Le facteur 2 devant y_3 est dû au fait que Q_i est un doublet. Pour le diagramme (3.26) seuls les fermions avec une charge de $SU(2)$ interviennent. Le facteur 3 devant y_3 est dû à la couleur. Dans le diagramme (3.27) tous les fermions interviennent avec leur charge par rapport à $U(1)_y$. Les hypercharges interviennent de façon linéaire dans les équations obtenues à partir des diagrammes (3.25) et (3.26) puisque un seul champ Y est présent dans le diagramme. Dans le cas de la formule (3.27) les hypercharges interviennent au cube à cause de la présence de trois champs Y.

Ces conditions sont nécessaires mais pas suffisantes pour déterminer les valeurs de l'hypercharge. On pourra sélectionner les valeurs de l'hypercharge après avoir examiné les interactions de Yukawa du modèle standard.

3.3.2 Interactions de Yukawa

La nécessité d'introduire des termes de Yukawa (termes de dimension 4 avec deux spineurs et un champ scalaire) est due à l'impossibilité d'écrire des termes de masse qui sont invariants et renormalisables :

$$L^T\sigma_2\bar{e}_L\ , \qquad Q^T\sigma_2\bar{u}_L\ , \qquad Q^T\sigma_2\bar{d}_L \quad (3.28)$$

qui ne sont pas invariants par rapport à l'isospin faible. Une possibilité pour construire des termes de masse invariants est d'introduire un champ scalaire doublet d'isospin, le champ de Higgs :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \sim (1, 2, y_h) \quad (3.29)$$

et de construire des termes d'interaction scalaire–fermion–fermion, les termes de Yukawa :

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = iY_{ij}^e L_i^T\sigma_2\bar{e}_{jL}H^* + iY_{ij}^u Q_i^T\sigma_2\bar{u}_{jL}\tau_2 H + iY_{ij}^d Q_i^T\sigma_2\bar{d}_{jL}H^* + \text{c.}c. \quad (3.30)$$

avec Y_{ij} des matrices complexes 3×3 des couplages de Yukawa. Comme remarqué précédemment, τ_i désigne les matrices de Pauli de $SU(2)_w$ et σ_i les mêmes matrices de Pauli pour le spin. On verra dans la section suivante qu'après la brisure spontanée de la symétrie les termes de Yukawa donnent lieu à des termes d'interaction avec le champ scalaire mais aussi à des termes de masse.

La conservation de l'hypercharge impose les relations suivantes :

$$y_h = y_1 + y_2 = -(y_3 + y_4) = y_3 + y_5 \tag{3.31}$$

et si on fixe $y_h = 1$, un choix compatible avec les équations (3.25-3.27) est

$$y_1 = -1 \ , \qquad y_2 = +2 \ , \qquad y_3 = +1/3 \ , \qquad y_4 = -4/3 \ , \qquad y_5 = 2/3 \ . \tag{3.32}$$

Les couplages de Yukawa Y_{ij} ne sont pas tous indépendants parce que des redéfinitions des champs sont possibles en utilisant les symétries globales de $\mathcal{L}_{\rm YM} + \mathcal{L}_{\rm D}$. Toute matrice complexe peut s'écrire sous la forme :

$$Y^e = U^{e\,T} M^e V^e \tag{3.33}$$

avec $U^e U^{e\dagger} = V^e V^{e\dagger} = 1$ (U^e et V^e matrices unitaires) et M^e matrice réelle diagonale. Les matrices unitaires peuvent être absorbées par une redéfinition des champs:

$$L' = U^e L \qquad\qquad \bar{e}'_L = V^e \bar{e}_L \tag{3.34}$$

sans modifier $\mathcal{L}_{\rm YM} + \mathcal{L}_{\rm D}$. Pour les leptons cette redéfinition rend $\mathcal{L}_{\rm Yukawa}$ diagonal :

$$i y^e_{ii} L_i^T \sigma_2 \bar{e}_i H^* + \text{c.}c. \tag{3.35}$$

avec

$$M^e = \begin{pmatrix} y^e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y^e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & y^e_{33} \end{pmatrix} \ . \tag{3.36}$$

Les termes de Yukawa brisent la symétrie globale $U(3)\times U(3)$ et ont seulement une invariance $U(1)$ de phase

$$L_i \to e^{i\alpha_i} L_i \qquad\qquad \bar{e}_i \to e^{-i\alpha_i} \bar{e}_i \tag{3.37}$$

les α_i s'interprétant comme les trois nombres leptoniques.

Pour les quarks la redéfinition des champs de type up et down ne peut pas être faite de façon indépendante parce que les deux types d'interaction

de Yukawa des quarks contiennent toujours Q_i. Écrivons comme pour les leptons :

$$Y^u = U^{uT} M^u V^u \qquad Y^d = U^{dT} M^d V^d \tag{3.38}$$

et les champs de quarks

$$\bar{u} \to V^u \bar{u} \qquad \bar{d} \to V^d \bar{d}\,, \tag{3.39}$$

le doublet Q_i peut être redéfini pour éliminer la matrice U restante dans un des deux termes d'interaction de Yukawa seulement au prix de faire apparaître une matrice dans l'autre couplage :

$$i y^d_{ii} Q_i^T \sigma_2 \bar{d}_i H^* + i y^u_{jj} Q_i^T \sigma_2 \mathcal{V}_{ji} \bar{u}_j \tau_2 H \tag{3.40}$$

avec $\mathcal{V} = U^u U^{d\dagger}$. La matrice $\mathcal{V}$ est unitaire et a donc 9 paramètres indépendants au lieu de 18 à cause de la relation $\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V} = 1$. Une simplification ultérieure est possible en utilisant la décomposition d'Euler

$$\mathcal{V} = P^T \mathcal{U} P' \tag{3.41}$$

P, P' étant des matrices diagonales de phase et $\mathcal{U}$ une matrice avec les paramètres restants. Avec une redéfinition de phase des trois u_i et des trois d_i on peut penser éliminer complètement les 6 paramètres des matrices P, P' mais en réalité on ne peut en déterminer que 5 (en général pour des matrices $n \times n$ on peut éliminer $n^2 - 1$ phases). On peut toujours mettre en facteur une phase commune :

$$\bar{u}'_L = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)} \end{pmatrix} \bar{u}_L \tag{3.42}$$

$$\bar{d}'_L = e^{i\beta} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\beta_1+\beta_2)} \end{pmatrix} \bar{d}_L \tag{3.43}$$

La matrice $\mathcal{V}$ devient

$$\mathcal{V}' = e^{-i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \end{pmatrix} \mathcal{V} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\beta_1+\beta_2)} \end{pmatrix} e^{i\beta} \tag{3.44}$$

donc une redéfinition des phases des champs des quarks peut éliminer les 4 phases dans les deux matrices de l'équation précédente et la combinaison $\alpha - \beta$. Par contre la phase $\alpha + \beta$ n'apparaît pas. On a donc montré qu'il reste une phase même après redéfinition des champs. Cette phase plus les trois paramètres (angles) de la matrice $\mathcal{U}$ sont physiques.

La seule symétrie restante dans le secteur des quarks de la symétrie globale d'origine est une phase $U(1)$ commune à tous les quarks

$$Q_i \to e^{i\delta} Q_i \qquad \bar{u}_i \to e^{-i\delta} \bar{u}_i \qquad \bar{d}_i \to e^{-i\delta} \bar{d}_i \tag{3.45}$$

qui correspond à un nombre quantique conservé, le nombre baryonique.

3.4 Secteur de Higgs

Le secteur de Higgs du lagrangien est utilisé pour la brisure spontanée de la symétrie électrofaible. La discussion du chapitre 2 nous indique qu'il nous faut trois générateurs brisés pour donner une masse aux trois bosons de jauge W_i^μ. Le groupe de jauge $SU(2)_w \otimes U(1)_y$ a quatre générateurs, donc le vide doit laisser un générateur non brisé qu'on fera correspondre au groupe $U(1)_{\rm em} \subset SU(2)_w \otimes U(1)_y$ et qui nous donnera un boson de jauge sans masse, le photon. On a vu dans la section précédente que la construction des termes de Yukawa nous a suggéré d'introduire un champ scalaire complexe doublet de $SU(2)_w$. La partie de Higgs du lagrangien est

$$\mathcal{L}_{\rm Higgs} = (D_\mu H)^\dagger \, (D^\mu H) - V(H) \tag{3.46}$$

avec

$$D_\mu H = \left(\partial_\mu + i\tilde{W}_\mu + \frac{i}{2} y_h B_\mu \right) H \tag{3.47}$$

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 \, . \tag{3.48}$$

Le potentiel V est le plus général possible renormalisable et invariant sous la symétrie $SU(2)_w \otimes U(1)_y$. Le doublet de Higgs est donné par

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, 1) \tag{3.49}$$

où $(1, 2, 1)$ se réfère à la notation des multiplets $(SU(3)_c, SU(2)_w, U(1)_y)$. L'invariance du vide est celle de $U(1)_{\rm em}$ donc une des composantes de ce

doublet doit être un champ scalaire neutre pour la charge électrique. On peut vérifier que notre choix de la section précédente $y_h = 1$ est en accord avec cette remarque. La relation entre la charge électrique, l'hypercharge et l'isospin est

$$Q_{\rm em} = I_{3w} + \frac{1}{2}y \ . \tag{3.50}$$

Pour les deux composantes du doublet de Higgs on a

$$Q_{\rm em}(\phi^+) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_h = 1 \tag{3.51}$$

$$Q_{\rm em}(\phi^0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_h = 0 \tag{3.52}$$

on trouve donc la composante ϕ^0 avec charge électrique zéro.

3.4.1 Exercice A

Trouver la valeur de la charge électrique pour les leptons dans le doublet Q_L.

3.4.2 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible

Avec le choix des paramètres $\mu^2 < 0$ et $\lambda > 0$ le potentiel de Higgs a ses minima sur la surface

$$|H|^2_{\rm min} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} \tag{3.53}$$

avec $v^2 = -\mu^2/\lambda$. On va choisir le vide

$$\langle 0|H|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

et paramétrer les champs autour de ce vide avec

$$H = \exp\left(\frac{i}{v}\xi_i(x)\sigma_i\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv U(x)H_0 \tag{3.55}$$

où l'on a introduit les champs $\xi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ et $h(x)$ qui s'annulent dans le vide. La matrice unitaire de phase $U(x)$ est une transformation de jauge de $SU(2)$ qui nous donne les résultats directement dans la jauge unitaire. La

transformation de jauge correspondante sur les champs de jauge de $SU(2)$ se trouve en étudiant la dérivée covariante

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \left(\partial_\mu + i\tilde{W}_\mu + \frac{i}{2}B_\mu\right) U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= U(x)\,U(x)^\dagger \left(\partial_\mu + i\tilde{W}_\mu + \frac{i}{2}B_\mu\right) U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= U(x) \left(\partial_\mu + i\tilde{W}'_\mu + \frac{i}{2}B_\mu\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.56}$$

où la dernière égalité s'obtient en prenant

$$\tilde{W}'_\mu = -iU(x)^\dagger \partial_\mu U(x) + U(x)^\dagger \tilde{W}_\mu U(x)\ . \tag{3.57}$$

De cette façon la matrice $U(x)$ disparaît complètement du lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\,\partial^\mu h + \frac{1}{8}\left(B_\mu - W_{3\mu}\right)\left(B^\mu - W_3^\mu\right)(v+h)^2 \\ &+ \frac{1}{8}\left(W_{1\mu} - iW_{2\mu}\right)\left(W_1^\mu + iW_2^\mu\right)(v+h)^2 \\ &+ \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4}h^4 - \lambda\frac{v^2}{4}\ . \end{aligned} \tag{3.58}$$

On peut lire le terme de masse pour le boson de Higgs

$$\lambda v^2 h^2 = \frac{1}{2}2\lambda v^2 h^2 = \frac{1}{2}m_h^2 h^2 \tag{3.59}$$

on a donc

$$m_h^2 = 2\lambda v^2\ , \tag{3.60}$$

mais il est difficile de lire les termes de masse pour les bosons de jauge à cause des termes de mélange. Il faut définir des combinaisons linéaires appropriés des champs pour éliminer les termes de mélange entre bosons de jauge. Avant, on va réintroduire les constantes de couplage qui étaient cachées dans les champs

$$B_\mu \to g_1 B_\mu\ , \qquad \tilde{W}_\mu \to g_2 \tilde{W}_\mu\ , \qquad \tilde{A}_\mu^A \to g_3 \tilde{A}_\mu^A\ . \tag{3.61}$$

On peut vérifier qu'avec cette définition les termes cinétiques des champs de jauge de l'équation (3.2) prennent la forme usuelle

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}G^A_{\mu\nu}G^{A\,\mu\nu}\ . \tag{3.62}$$

Pour trouver la forme diagonale des masses on va imposer dans le secteur chargé :

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \equiv \frac{g_2^2 v^2}{8} \left(W_{1\mu} - iW_{2\mu}\right) \left(W_1^\mu + iW_2^\mu\right) \tag{3.63}$$

et on a

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_{1\mu} \mp iW_{2\mu}\right) \tag{3.64}$$

la masse des deux bosons de jauge chargés est

$$m_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{4} \ . \tag{3.65}$$

Pour les bosons de jauge neutres par rapport à la charge électrique on doit trouver une combinaison linéaire sans masse qui correspond au photon

$$\frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}\, 0\, A_\mu A^\mu \equiv \frac{v^2}{8} \left(g_1 B_\mu - g_2 W_{3\mu}\right) \left(g_1 B^\mu - g_2 W_3^\mu\right) \ . \tag{3.66}$$

L'équation précédente peut s'écrire en fonction d'une matrice de masse

$$\frac{1}{2}(Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \equiv \frac{v^2}{8}(W_{3\mu}, B_\mu) \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

et le lien entre les deux descriptions se fait par une transformation orthogonale

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

avec

$$\cos\theta_w \equiv \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \qquad \sin\theta_w \equiv \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{3.69}$$

où θ_w est l'angle de Weinberg. La masse du photon est nulle et celle du boson Z^0 est égale à

$$m_Z^2 = \frac{v^2}{4}(g_1^2 + g_2^2) \ . \tag{3.70}$$

La comparaison entre les formules (3.65) et (3.70) donne la relation, valable au niveau de l'arbre

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2\theta_w \ . \tag{3.71}$$

Les couplages des fermions aux champs de jauge sont donnés par les dérivés covariantes. Pour les états de masse des quarks une matrice de mélange

physique est présente dans l'interaction et une discussion détaillée est donnée dans la section 3.4.4. Dans le cas des leptons on obtient, pour les termes trilinéaires, des interactions électromagnétiques

$$\mathcal{L}_{\rm em} = -ieA_\mu \left(e_L^\dagger \sigma^\mu e_L + e_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_R\right) , \tag{3.72}$$

des interactions de courants faibles chargées

$$\mathcal{L}_{\rm cc} = i\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^- \nu_{eL}^\dagger \sigma^\mu e_L + W_\mu^+ e_L^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL}\right) , \tag{3.73}$$

et des courants faibles neutres

$$\mathcal{L}_{\rm cn} = i\frac{g_2}{\cos\theta_w} Z_\mu \left[\frac{1}{2}\nu_{eL}^\dagger \sigma^\mu \nu_{eL} - \frac{1}{2} e_L^\dagger \sigma^\mu e_L + \sin^2\theta_w \left(e_L^\dagger \sigma^\mu e_L + e_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_R\right)\right] . \tag{3.74}$$

La formule précédente et la formule (3.71) permettent de voir que les interactions des courants chargés et neutres ont la même force d'interaction. Dans la section 3.4.5 on verra que cette égalité du couplage est la manifestation d'une symétrie.

3.4.3 Exercice B

Définir les champs scalaires par rapport au vide de la façon suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{h+i\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv H_0 + H' . \tag{3.75}$$

et trouver le spectre de masses des bosons de Goldstone et du champ de Higgs physique de la théorie.

3.4.4 Couplages du boson de Higgs

Le lagrangien de Higgs s'écrit en termes des nouveaux champs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm Higgs} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &+ \left(\frac{2h}{v} + \frac{h^2}{v^2}\right)\left(\frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\right) + V \end{aligned} \tag{3.76}$$

ce qui montre que le champ scalaire de Higgs ne se couple pas au photon et que le couplage aux bosons de jauge massifs est proportionnel aux carrés des masses de ces bosons.

Les couplages aux fermions s'obtiennent dans la jauge unitaire à partir des termes de Yukawa. Par exemple dans le cas des leptons

$$\mathcal{L}^e_{\text{Yukawa}} = iy^e_{ii} L_i^T \sigma_2 \bar{e}_i H^* + \text{c.c.} = iy^e_{ii} L_i^T \sigma_2 \bar{e}_i U^*(x) H_0 + \text{c.c.} \tag{3.77}$$

En utilisant l'hermiticité de la matrice $U^* = (U^\dagger)^T$ on peut définir des nouveaux champs $L'_i = U^\dagger L_i$ et la matrice U disparaît du lagrangien (on peut vérifier que ceci est valable aussi pour la partie cinétique des fermions)

$$\mathcal{L}^e_{\text{Yukawa}} = iy^e_{ii} L'^T_i \sigma_2 \bar{e}_i H_0 + \text{c.c.} = iy^e_{ii} L'^T_{2i} \sigma_2 \bar{e}_i \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) + \text{c.c.} \tag{3.78}$$

En utilisant $\bar{e}_{Li} = -\sigma_2 e^*_{Ri}$ et les définitions

$$e_{Ri} = (e_R, \mu_R, \tau_R)\,, \qquad L'_{2iL} = (e_L, \mu_L, \tau_L) \tag{3.79}$$

pour les noms des leptons chargés on a

$$\mathcal{L}^e_{\text{Yukawa}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(v+h) \left(y^e_{11} e^\dagger_R e_L + y^e_{22} \mu^\dagger_R \mu_L + y^e_{33} \tau^\dagger_R \tau_L \right) + \text{c.c.} \tag{3.80}$$

On peut lire les masses des leptons chargés

$$\frac{v}{\sqrt{2}} y^e_{ii} = (m_e, m_\mu, m_\tau)\,. \tag{3.81}$$

La notation de Dirac à quatre dimensions pour les spineurs permet d'écrire les couplages de Yukawa sous la forme

$$\mathcal{L}^e_{\text{Yukawa}} = i \frac{v+h}{v} \left(m_e \bar{e} e + m_\mu \bar{\mu} \mu + m_\tau \bar{\tau} \tau \right)\,. \tag{3.82}$$

Pour les quarks de type up

$$\mathcal{L}^u_{\text{Yukawa}} = iy^u_{jj} Q_i^T \sigma_2 \mathcal{V}_{ji} \bar{u}'_j \tau_2 H + \text{c.c.} = iy^u_{jj} Q_i^T \sigma_2 \mathcal{V}_{ji} \bar{u}_j \tau_2 U H_0 + \text{c.c.} \tag{3.83}$$

et avec $\tau_2 \tau_i \tau_2 = -\tau_i^*$

$$\tau_2 U = U^* \tau_2 = (U^\dagger)^T \tau_2 \tag{3.84}$$

on peut donc faire disparaître U dans une redéfinition du champ $Q'_i = U^\dagger Q_i$:

$$\mathcal{L}^u_{\text{Yukawa}} = iy^u_{jj} Q'^T_i \sigma_2 \mathcal{V}_{ji} \bar{u}'_j \tau_2 H_0 + \text{c.c.} = \frac{i}{\sqrt{2}} y^u_{jj} Q'^T_{1i} \sigma_2 \mathcal{V}_{ji} \bar{u}'_j (v+h) + \text{c.c.} \tag{3.85}$$

avec $\mathcal{V}$ la matrice unitaire de mélange de de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) :

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

Si on définit les états propres de masse

$$u_L = \mathcal{V}_{1i} Q'_{1i}\,, \quad c_L = \mathcal{V}_{2i} Q'_{1i}\,, \quad t_L = \mathcal{V}_{3i} Q'_{1i} \tag{3.87}$$

$$\bar{u}_1 = i\sigma_2 u_R^*\,, \quad \bar{u}_2 = i\sigma_2 c_R^*\,, \quad \bar{u}_3 = i\sigma_2 t_R^*\,, \tag{3.88}$$

on peut écrire les couplages de Yukawa avec la notation des spineurs de Dirac à 4 composantes :

$$\mathcal{L}^u_{\text{Yukawa}} = i\frac{v+h}{v}\left(m_u \bar{u}u + m_c \bar{c}c + m_t \bar{t}t\right) \tag{3.89}$$

avec les masses

$$y^u_{jj}\,\frac{v}{\sqrt{2}} = (m_u, m_c, m_t)\ . \tag{3.90}$$

La matrice CKM a été éliminée des termes de masse par une redéfinition des champs, mais elle ne peut pas être complètement éliminée du lagrangien et va donc intervenir dans les termes d'interaction.

Pour les quarks de type down on n'a pas la complication de la matrice $\mathcal{V}$ puisqu'on l'a associée aux quarks de type up :

$$\mathcal{L}^d_{\text{Yukawa}} = i y^u_{jj} {Q'}_i^T \sigma_2 \bar{d}_i H^* + \text{c.c.} \tag{3.91}$$

En notation de Dirac à quatre composantes pour les spineurs on obtient

$$\mathcal{L}^d_{\text{Yukawa}} = i\frac{v+h}{v}\left(m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s + m_b \bar{b}b\right) \tag{3.92}$$

avec les masses

$$y^d_{jj}\,\frac{v}{\sqrt{2}} = (m_d, m_s, m_b)\ . \tag{3.93}$$

Le résultat de cette analyse des couplages montre que le boson de Higgs est couplé de façon universelle avec un couplage qui est proportionnel aux masses.

3.4.5 Symétrie custodiale

La partie de Higgs $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ du lagrangien du modèle standard a une symétrie $SU(2)_R$ qui n'est pas respectée par les autres termes du lagrangien. Néanmoins cette symétrie a des conséquences importantes. Pour mettre en évidence cette symétrie on va écrire le doublet de champs scalaires complexes H en termes de quatre champs réels :

$$H = \begin{pmatrix} h_1 + ih_2 \\ h_3 + ih_4 \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

et on va utiliser la même description pour le doublet avec hypercharge opposée

$$\bar{H} = -i\tau_2 H^* = \begin{pmatrix} -h_3 + ih_4 \\ h_1 - ih_2 \end{pmatrix} . \tag{3.95}$$

On peut former une matrice à partir de ces deux doublets

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 + ih_2 & -h_3 + ih_4 \\ h_3 + ih_4 & h_1 - ih_2 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

laquelle se transforme de la façon suivante :

$$\mathcal{H} \to U_L \mathcal{H} U_R \tag{3.97}$$

sous des transformations U_L du groupe de jauge $SU(2)_L$ et U_R du groupe global $SU(2)_R$. Ces deux transformations de $SU(2)$ sur la matrice se combinent pour donner une symétrie $SO(4)$ qui agit sur les quatre composantes réelles du champ de Higgs. Il suffit de remarquer que le potentiel de Higgs contient seulement la combinaison des champs qui est invariante sous $SO(4)$:

$$H^\dagger H = \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}) = \det \mathcal{H} = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 . \tag{3.98}$$

Les deux colonnes de la matrice (3.96) sont d'hypercharge opposée et donc la symétrie $SU(2)_R$ (qui s'applique aux colonnes de la matrice) n'est pas respectée par les interactions d'hypercharge. Le modèle standard respecte la symétrie $SU(2)_R$ seulement dans la limite où l'on néglige l'électromagnétisme ($g_1 = 0$) et les interactions de Yukawa ($Y^e = 0$, $Y^u - Y^d = 0$). Même si on néglige cette brisure explicite, la brisure spontanée de la symétrie électrofaible donne $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \to SU(2)_{L+R}$ en termes des doublets complexes de Higgs ou $SO(4) \to SO(3)$ en termes de la notation avec les champs réels.

Cette symétrie résiduelle est appelé custodiale puisque elle garantit l'égalité, au niveau de l'arbre, de la force d'interaction pour les courants chargés et neutres.

On a vu que la théorie de Fermi était donnée par des interactions à quatre fermions, qu'on peut maintenant écrire (avec la notation des spineurs à quatre composantes de Dirac) comme une théorie effective due à l'échange d'un boson de jauge

$$\mathcal{L}_W = \frac{g_2^2}{m_W^2} J_W^{\mu-} J^+_{\mu W} = \frac{g_2^2}{2m_W^2}(\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L)\ . \quad (3.99)$$

Ce lagrangien effectif s'obtient dans la limite $m_W, m_Z \to 0$ qui correspond aux interactions à des énergies beaucoup plus petites que la masse des bosons de jauge, par le produit des courants (3.73) :

$$\mathcal{L}_W \sim \frac{1}{2}\int \mathcal{L}_{\rm cc} \otimes \mathcal{L}_{\rm cc} \quad (3.100)$$

où le propagateur du boson W devient dans la limite un δ de Dirac qui élimine l'intégrale et introduit un coefficient $1/m_W^2$. Le modèle standard prédit aussi l'existence des courants neutres

$$\mathcal{L}_Z = \frac{g_2^2}{m_Z^2} J_Z^\mu J_{\mu Z} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}\left(\sum_f \bar{f}\gamma^\mu(T^3 - Q\sin^2\theta_w)f\right)^2 \quad (3.101)$$

avec la constante de Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8m_W^2}\ . \quad (3.102)$$

Si on définit les courants en fonction des générateurs de $SU(2)_w$

$$J_a^\mu = \sum_f \bar{f}\gamma^\mu T_a f \quad (3.103)$$

avec

$$J_W^{\mu\pm} = J_1^\mu \mp i J_2^\mu \quad (3.104)$$

on peut écrire

$$\mathcal{L}_W + \mathcal{L}_Z = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}\left(J_1^{\mu 2} + J_2^{\mu 2} + (J_3^\mu - \sin^2\theta_w\, J_{em}^\mu)^2\right)\ . \quad (3.105)$$

Dans la limite $g_1 \to 0$ ou $\sin^2\theta_w \to 0$ on voit bien la symétrie résiduelle $O(3)$ (ou $SU(2)_{L+R}$) qui montre aussi que les bosons de jauge W^a se transforment

comme un triplet de la symétrie custodiale et ont dans cette limite la même masse. Si on réintroduit l'hypercharge ($g_1 \neq 0$) la symétrie est explicitement brisée mais le coefficient devant les courants reste le même

$$\frac{g_2^2}{m_W^2} = \frac{g_2^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_w} \,. \tag{3.106}$$

On introduit un paramètre ρ

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_w} \tag{3.107}$$

qui vaut 1 au niveau de l'arbre, mais qui est modifié par les corrections quantiques à cause des termes d'interaction qui ne respectent pas la symétrie custodiale. La relation (3.107) est une conséquence du choix du champ de Higgs comme doublet de $SU(2)_w$. Si le champ de Higgs appartient à une représentation de spin r de $SU(2)_w$ ($T^a T^a = r(r+1)$) les masses des bosons vecteurs sont

$$m_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{2}\left[r(r+1) - T_3^2\right] \tag{3.108}$$

$$m_Z^2 = (g_1^2 + g_2^2)\, v^2\, T_3^2 \,. \tag{3.109}$$

Ce résultat peut se généraliser au cas de plusieurs multiplets. Si les champs de Higgs sont dans des doublets de $SU(2)$ ($r = 1/2$, $T_3^2 = 1/4$) la relation $\rho = 1$ au niveau de l'arbre est respectée. Une mesure précise de ρ et le calcul détaillé des corrections à boucles permettent d'avoir des informations sur la représentation du secteur de Higgs.

Le plus grand effet de brisure de la symétrie custodiale est dû à la différence de masse entre les quarks t et b. On peut le voir avec le terme d'interaction de Yukawa sous la forme

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{(u,d)} = Q^T \sigma_2 \left(\frac{Y^u + Y^d}{2}(\bar{u}H + \bar{d}\bar{H}) + \frac{Y^u - Y^d}{2}(\bar{u}H - \bar{d}\bar{H}) \right) \,. \tag{3.110}$$

Le premier terme est invariant, par contre le deuxième brise $SU(2)_R$. Dans la brisure de la symétrie électrofaible on aura des termes de masse et la différence de masse la plus grande donnera la contribution la plus importante à la brisure explicite de $SU(2)_R$.

3.5 Solution des exercices

Exercice A

En utilisant la formule

$$Q_{\rm em} = I_{3w} + \frac{1}{2} y \ . \tag{3.111}$$

on trouve

$$Q_{\rm em} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \left[\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}_L \ . \tag{3.112}$$

Donc le neutrino a une charge électrique nulle et l'électron a une charge -1.

Exercice B

On obtient

$$|H|^2 = \frac{v^2}{2} + vh + |\phi^+|^2 \frac{h^2 + \eta^2}{2} \tag{3.113}$$

et le potentiel de Higgs devient

$$V = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \lambda v^2 h^2 + 2\lambda v h \left(|\phi^+|^2 + \frac{h^2 + \eta^2}{2} \right) + \lambda \left(|\phi^+|^2 + \frac{h^2 + \eta^2}{2} \right)^2 \tag{3.114}$$

ce qui nous permet de lire les masses

$$m_\eta^2 = m_{\phi^+} = m_{\phi^-} = 0 \tag{3.115}$$

$$m_h^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2 \tag{3.116}$$

avec $\phi^- = \phi^{+\dagger}$. On a donc un scalaire physique h avec masse (le champ de Higgs) et trois bosons de Goldstone sans masse qui peuvent être éliminés par une transformation de jauge.

3.6 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

G. Altarelli
The Standard Electroweak Theory and Beyond
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0011078

R. Casalbuoni
The Standard Model of Electroweak Interactions
http://arturo.fi.infn.it/casalbuoni/corso.pdf

Livres :

P. Ramond
Journeys Beyond the Standard Model
Perseus Books

Chapitre 4

Le modèle standard au niveau de l'arbre

Le modèle standard explique les résultats des mesures de la physique électrofaible en termes d'un nombre limité de paramètres. Dans le secteur de jauge on a les deux constantes de couplage g_1 et g_2, dans le potentiel de Higgs μ et λ, qu'on peut exprimer en termes des deux paramètres plus physiques $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ et $m_h = \sqrt{-2\mu^2}$. Dans le secteur de Yukawa on a les matrices de couplages qui donnent lieu aux masses et aux paramètres de mélange. Si on néglige la masse des neutrinos, on a 3 masses pour les leptons chargés, 6 masses pour les quarks et 4 angles de mélange. On a au total 17 paramètres (on ne prend pas en compte ici la chromodynamique quantique des interactions fortes).

Les masses des particules du modèle standard sont toutes mesurées à l'exception de celle du boson de Higgs. Pour les neutrinos on sait que leur masse n'est pas nulle puisque des phénomènes d'oscillation on été mis en évidence, mais la masse des neutrinos est très petite et on va la négliger pour l'instant. Par contre il ne faut pas oublier l'importance de cette découverte du point de vue théorique : c'est le premier indice d'une physique au delà du modèle standard.

Les paramètres les plus importants pour mesurer la structure du modèle standard sont ceux du secteur de jauge et de Higgs

$$g_1, \qquad g_2, \qquad v\ . \tag{4.1}$$

Le choix de ces paramètres plutôt que d'autres reliés à ces derniers n'a aucune importance en principe. En pratique le choix est fait par rapport aux

paramètres les mieux mesurés, qui sont utilisés pour prédire théoriquement d'autres paramètres et les comparer aux résultats expérimentaux. Avant les résultats de LEP les paramètres (4.1) étaient exprimés en termes des paramètres mesurés à basse énergie

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.03599976(50)}\,, \tag{4.2}$$

$$G_F = 1.16639(1) \times 10^{-5}\ \text{GeV}\,, \tag{4.3}$$

$$\sin^2\theta_w = 0.23143(15) \tag{4.4}$$

avec α la constante de structure fine et $\sin^2\theta_w$ l'angle de Weinberg effectif (les valeurs données ici sont celles de 2002 [15]). Avec les résultats de ces dernières années les masses des bosons Z et W ont été mesurées avec une très grande précision

$$m_W = 80.423(39)\ \text{GeV} \qquad m_Z = 91.1876(21)\ \text{GeV} \tag{4.5}$$

et les trois paramètres souvent choisis comme input sont (α, G_F, m_Z) ou (e, m_W, m_Z). La grande précision des mesures implique que les effets venant des corrections dues aux boucles du modèle standard sont aussi à prendre en considération.

4.1 Lagrangien et règles de Feynman

On va écrire à nouveau le lagrangien du modèle standard en utilisant les fermions de Dirac à quatre composantes dans le cas d'une seule famille de fermions. On a vu qu'avec le choix de la jauge unitaire on peut travailler avec seulement les particules physiques. Par contre pour traiter les effets quantiques il vaut mieux utiliser une jauge renormalisable. Pour cette raison on aura des particules non physiques dans le lagrangien et les règles de Feynman. Le lagrangien du modèle standard est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{D}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{ghosts}}\,. \tag{4.6}$$

Pour les champs de jauge on a

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\,\mu\nu} \tag{4.7}$$

et pour les fermions :

$$\mathcal{L}_{\rm D} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R \tag{4.8}$$

avec dérivées covariantes

$$D_\mu \psi_L = \left(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + ig_1 \frac{y}{2} B_\mu\right) \psi_L \tag{4.9}$$

$$D_\mu \psi_R = \left(\partial_\mu + ig_1 \frac{y}{2} B_\mu\right) \psi_R \, . \tag{4.10}$$

La partie de Higgs s'écrit

$$\mathcal{L}_{\rm Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \tag{4.11}$$

avec

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

et la dérivée covariante

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + ig_1 \frac{y}{2} B_\mu\right) \Phi \, . \tag{4.13}$$

Les interactions de Yukawa dans le cas d'une seule famille sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm Yukawa} &= -g_l \left(\bar{\nu}_L \phi^+ l_R + \bar{l}_R \phi^- \nu_L + \bar{l}_L \phi^0 l_R + \bar{l}_R \phi^{0*} l_L\right) \\ &- g_d \left(\bar{u}_L \phi^+ d_R + \bar{d}_R \phi^- u_L + \bar{d}_L \phi^0 d_R + \bar{d}_R \phi^{0*} d_L\right) \\ &- g_u \left(\bar{u}_R \phi^+ d_L + \bar{d}_L \phi^- u_R + \bar{u}_R \phi^0 u_L + \bar{u}_L \phi^{0*} u_R\right) . \end{aligned} \tag{4.14}$$

et après la brisure spontanée de la symétrie électrofaible, dans la jauge unitaire, on a

$$\mathcal{L}_{\rm Yukawa} = -m_f \bar{\psi}_f \psi_f - \frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi_f \phi^0 \tag{4.15}$$

où le couplage de Yukawa g_f est lié à la masse du fermion par la relation

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \, . \tag{4.16}$$

On va écrire les règles de Feynman en termes des champs physiques

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm i W_\mu^2) \tag{4.17}$$

$$Z_\mu = \cos\theta_w \, W_\mu^3 + \sin\theta_w \, B_\mu \tag{4.18}$$

$$A_\mu = -\sin\theta_w W_\mu^3 + \cos\theta_w \, B_\mu \tag{4.19}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ (v + H(x) + i\chi(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

au niveau de l'arbre l'angle de mélange de Weinberg est

$$\cos\theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} = \frac{m_W}{m_Z} \tag{4.21}$$

et les masses de ces champs sont

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{1}{2} g_2 v & (4.22)\\ m_Z &= \frac{1}{2}\sqrt{g_1^2+g_2^2}\, v & (4.23)\\ m_A &= 0 & (4.24)\\ m_H &= \sqrt{2}\,\mu\ . & (4.25) \end{aligned}$$

La charge électrique peut s'exprimer en fonction des couplages de jauge

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \tag{4.26}$$

où

$$g_1 = \frac{e}{\cos\theta_w} \qquad\qquad g_2 = \frac{e}{\sin\theta_w}\ . \tag{4.27}$$

La limite de basse énergie du modèle standard donne la relation avec la constante de Fermi

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8\sin^2\theta_w m_W^2} \tag{4.28}$$

Pour la partie de fixation de la jauge

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi_W}\left(\partial^\mu W_\mu^+ - i m_W \xi_W \phi^+\right)\left(\partial^\mu W_\mu^- + i m_W \xi_W \phi^-\right)\\ &- \frac{1}{2\xi_Z}\left(\partial^\mu Z_\mu - m_Z \xi_Z \chi\right)^2 - \frac{1}{2\xi_\gamma}(\partial^\mu A_\mu)^2\\ &= -\frac{1}{2}\left(F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2F_+F_-\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

où $\phi^\pm$ et χ sont les bosons de Goldstone qu'on peut éliminer dans le cas de la jauge unitaire, mais non avec le choix de jauge renormalisable qu'on a fait (jauge de 't Hooft).

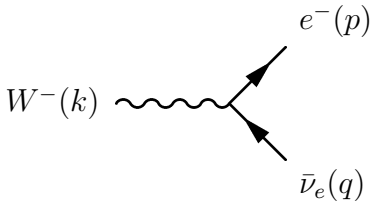
Pour compenser les effets non physiques introduits avec les termes de fixation de jauge on utilise les champs des ghosts

$$\mathcal{L}_{\text{ghosts}} = \bar\omega^\alpha(x)\frac{\delta F^\alpha}{\delta\theta^\beta(x)}\omega^\beta(x) \tag{4.30}$$

où $\omega^{\pm}$, ω_Z, ω_γ sont les ghosts, F les fonctions définies dans la formule (4.29) et θ les transformations de jauge infinitésimales.

4.1.1 Exemple : $W^- \to e^- \bar{\nu}_e$

Un exemple de calcul au niveau de l'arbre avec le lagrangien du modèle standard est la désintégration du boson W en électron et antineutrino électronique. À partir des règles de Feynman qui sont données dans les tables de ce chapitre on peut calculer l'amplitude :



$$\mathcal{M} = \bar{u}(p)\,\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,v(q)\,\epsilon^\mu(k) \tag{4.31}$$

dont le module carré est

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{8}\bar{u}(p)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,v(q)\bar{v}(q)\,(1+\gamma_5)\gamma_\rho\,u(p)\,\epsilon^\mu(k)\epsilon^{*\rho}(k)\;. \tag{4.32}$$

Si on ne mesure pas les spins et les polarisations on peut faire la moyenne sur les états initiaux et la somme sur les états finals

$$\sum_s v(q,s)\,\bar{v}(q,s) \;=\; \not{q} - m_{\nu_e} \tag{4.33}$$

$$\sum_s u(p,s)\,\bar{u}(p,s) \;=\; \not{p} + m_e \tag{4.34}$$

$$\sum_\lambda \epsilon^*_\mu(k,\lambda)\,\epsilon_\rho(k,\lambda) \;=\; -\left(g_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{m_W^2}\right)\;. \tag{4.35}$$

On a une trace à calculer

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p}+m_e)\gamma_\rho(1-\gamma_5)\not{q}] = \mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho\not{q}(1+\gamma_5)] \tag{4.36}$$

où l'on a pris $m_{\nu_e} = 0$. La trace donne le résultat

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho\not{q}(1+\gamma_5)] = 4\,(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma})\;p^\nu q^\sigma\;. \tag{4.37}$$

Dans le repère où le W est au repos

$$p\cdot k = m_e^2 + p\cdot q, \qquad q\cdot k = p\cdot q, \qquad p\cdot q = \frac{1}{2}(m_W^2 - m_e^2)\;. \tag{4.38}$$

La largeur différentielle est

$$d\Gamma = \frac{g_2^2 m_W}{24\,(2\pi)^2}\left(1-\frac{m_e^2}{m_W^2}\right)\left(1+\frac{m_e^2}{2m_W^2}\right)\delta^{(4)}(k-p-q)\frac{d^3p}{E_e}\frac{d^3q}{E_{\nu_e}}\ . \qquad (4.39)$$

L'intégrale sur les impulsions

$$\int \frac{d^3p}{E_e}\frac{d^3q}{E_{\nu_e}}\delta^{(4)}(k-p-q) = \frac{2\pi}{k^2}\,(k^2-m_e^2) \qquad (4.40)$$

ce qui donne pour la largeur totale $W \to e\bar{\nu}_e$

$$\Gamma(W^- \to e\bar{\nu}_e) = \frac{G_F m_W^3}{6\pi\sqrt{2}}\left(1-\frac{m_e^2}{m_W^2}\right)^2\left(1+\frac{m_e^2}{2m_W^2}\right) \simeq \frac{G_F m_W^3}{6\pi\sqrt{2}}\ . \qquad (4.41)$$

Pour la désintégration du W en quarks, si on néglige les masses des fermions dans l'état final, il suffit de considérer le facteur de couleur et l'élément correspondant de la matrice de mélange CKM, par exemple

$$\Gamma(W^- \to \bar{u}d) \simeq 3|V_{ud}|^2\,\Gamma(W^- \to e\bar{\nu}_e)\ . \qquad (4.42)$$

En sachant que $m_W < m_t$, la désintégration $W^- \to \bar{t}b$ est interdite et la largeur totale en hadrons du W est donnée par

$$\Gamma(W^- \to \text{hadrons}) = \Gamma(W^- \to \bar{u}d) + \Gamma(W^- \to \bar{c}s) = 6\,\Gamma(W^- \to e\bar{\nu}_e) \qquad (4.43)$$

où on a utilisé l'unitarité de la matrice CKM. La largeur totale du W est donnée par (somme sur les trois désintégrations leptoniques et les deux désintégrations en quarks)

$$\Gamma_W = 9\,\Gamma(W^- \to e\bar{\nu}_e)\ . \qquad (4.44)$$

En utilisant les valeurs numériques de la constante de Fermi et de la masse du W on obtient

$$\Gamma_W = 2.09\ \text{GeV} \qquad BR(W^- \to e\bar{\nu}_e) = \frac{\Gamma(W^- \to e\bar{\nu}_e)}{\Gamma_W} = 11.1\%\ . \qquad (4.45)$$

Les corrections de QCD modifient légèrement ce résultat

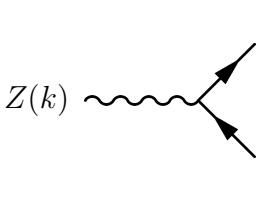
$$\Gamma_W^{\text{QCD}} = 2.14\ \text{GeV} \qquad BR^{\text{QCD}}(W^- \to e\bar{\nu}_e) = 10.8\%\ . \qquad (4.46)$$

On peut le comparer avec les données

$$\Gamma_W^{\text{exp}} = 2.118 \pm 0.042\ \text{GeV} \qquad BR^{\text{exp}}(W^- \to e\bar{\nu}_e) = (10.68 \pm 0.12)\%\ . \qquad (4.47)$$

4.1.2 Exemple : $Z \to f\bar{f}$

La désintégration du boson Z se calcule de façon semblable à celle du W. Pour $Z \to \nu\bar{\nu}$ on peut calculer l'amplitude :



$$\mathcal{M} = \bar{u}(p)\,\frac{ig}{4\cos\theta_w}\gamma_\mu\,(1-\gamma_5)\;v(q)\,\epsilon^\mu(k)\;, \qquad (4.48)$$

et utiliser les calculs de la section précédente pour obtenir

$$\Gamma(Z \to \nu_e\bar{\nu}_e) = \frac{G_F\,m_Z^3}{12\pi\sqrt{2}} = 165.9\text{ MeV} \qquad (4.49)$$

qui est appelée la largeur invisible du Z puisqu'on ne peut pas mesurer directement la désintégration en neutrinos (on l'obtient par différence entre la largeur totale, déterminée à partir du profil de la section efficace en fonction de l'énergie dans le centre de masse, et les largeurs partielles de désintégration en particules visibles). Si on considère qu'on a trois types de neutrinos on obtient $\Gamma_{\rm inv} = 497.7$ MeV à comparer avec la valeur expérimentale $\Gamma_{\rm inv}^{\rm exp} = 499.0 \pm 1.5$ MeV. Cette mesure a permis d'obtenir une vérification expérimentale du nombre de neutrinos légers (avec $m_\nu < m_Z/2$) :

$$\frac{\Gamma_{\rm inv}^{\rm exp}}{\Gamma(Z \to \nu_e\bar{\nu}_e)} = 2.994 \pm 0.012 \qquad (4.50)$$

avec inclusion des corrections radiatives et fit des données du LEP.

En général, en négligeant les masses des fermions, on a

$$\Gamma(Z \to f\bar{f}) = \frac{G_F m_Z^3}{24\pi\sqrt{2}}\left(|g_V^f|^2 + |g_A^f|^2\right) \qquad (4.51)$$

avec

$$\begin{array}{ll} g_V^e = g_V^\mu = g_V^\tau = -1 + 4\sin^2\theta_w & g_A^e = g_A^\mu = g_A^\tau = -1 \\ g_V^u = g_V^c = g_V^t = 1 - 8/3\,\sin^2\theta_w & g_A^u = g_A^c = g_A^t = 1 \\ g_V^d = g_V^s = g_V^b = -1 + 4/3\,\sin^2\theta_w & g_A^d = g_A^s = g_A^b = -1 \end{array} \qquad (4.52)$$

et $g_V^\nu = g_A^\nu = 1$ pour tous les neutrinos. La largeur en électrons est

$$\Gamma(Z \to e^+e^-) = \frac{G_F m_Z^3}{6\pi\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = 84.8\text{ MeV} \qquad (4.53)$$

à comparer avec la valeur expérimentale

$$\Gamma^{\rm exp}(Z \to l^+ l^-) = 83.984 \pm 0.086 \text{ MeV} . \tag{4.54}$$

Les largeurs en quarks, en négligeant les masses, sont :

$$\Gamma(Z \to u\bar{u}) = \frac{G_F m_Z^3 N_c}{6\pi\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w \right)^2 + \frac{1}{4} \right] = 295.8 \text{ MeV} \tag{4.55}$$

$$\Gamma(Z \to d\bar{d}) = \frac{G_F m_Z^3 N_c}{6\pi\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w \right)^2 + \frac{1}{4} \right] = 376.8 \text{ MeV} \tag{4.56}$$

Ces formules permettent d'obtenir la largeur en hadrons

$$\Gamma(Z \to \text{hadrons}) \simeq 2\Gamma(Z \to u\bar{u}) + 3\Gamma(Z \to d\bar{d}) = 1722 \text{ MeV} \tag{4.57}$$

et avec les corrections de QCD

$$\Gamma^{\rm QCD}(Z \to \text{hadrons}) = 1787.8 \text{ MeV} \tag{4.58}$$

à comparer avec le résultat expérimental

$$\Gamma^{\rm exp}(Z \to \text{hadrons}) = 1744.4 \pm 2.0 \text{ MeV} . \tag{4.59}$$

Les plus grandes différences entre les valeurs calculées et mesurées sont au niveau des quantités hadroniques, ceci à cause principalement des corrections électromagnétiques qui modifient la valeur de $\sin^2\theta_w$. Les largeurs hadroniques sont sensibles aux variations de $\sin^2\theta_w$ par la partie vectorielle du couplage (voir la formule (4.52) ou les tables des diagrammes de Feynman) :

$$\gamma_\mu \left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_w \right) \qquad \text{pour les quarks de type up} \tag{4.60}$$

$$\gamma_\mu \left(-1 + \frac{4}{3}\sin^2\theta_w \right) \qquad \text{pour les quarks de type down.} \tag{4.61}$$

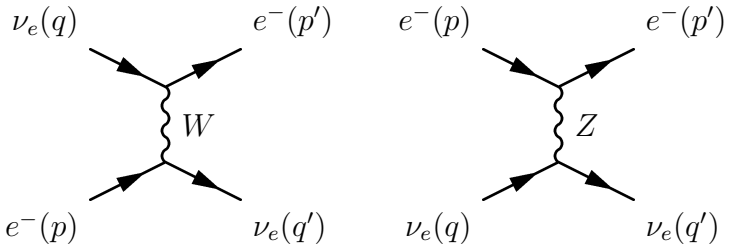
Les leptons en dépendent aussi

$$\gamma_\mu \left(-1 + 4\sin^2\theta_w \right) \tag{4.62}$$

mais $\sin^2\theta_w \simeq 1/4$ et le couplage est moins sensible aux variations de $\sin^2\theta_w$. Le couplage du neutrino ne dépend pas de $\sin^2\theta_w$.

4.1.3 Exemple : $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$

On a étudié la réaction $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$ dans la théorie effective de Fermi et avec un boson vecteur massif. Dans le cadre du modèle standard on a deux diagrammes de Feynman qui contribuent : un diagramme avec l'échange du courant chargé par l'intermédiaire d'un boson de jauge chargé W et un deuxième diagramme avec l'échange du courant neutre dû au boson de jauge Z :



(4.63)

Avec le choix de jauge $\xi = 1$, l'amplitude est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W &= -\frac{g^2}{8}[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,u(q)]\,[\bar{u}(q')\,\gamma_\nu(1-\gamma_5)\,u(p)]\times \\ &\quad \frac{-ig^{\mu\nu}}{(q-p')^2-m_W^2} \qquad (4.64) \\ \mathcal{M}_Z &= -\frac{g^2}{16\cos^2\theta_w}[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu[(-1+4\sin^2\theta_w)-\gamma_5]\,u(p)]\times \\ &\quad [\bar{u}(q')\,\gamma_\nu(1-\gamma_5)\,u(q)]\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-p')^2-m_Z^2}\,. \qquad (4.65) \end{aligned}$$

On va se limiter à des énergie petites par rapport aux masses de W et Z

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W &\simeq -i\frac{g^2}{8m_W^2}[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,u(q)]\,[\bar{u}(q')\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u(p)] \qquad (4.66) \\ \mathcal{M}_Z &\simeq -i\frac{g^2}{16\cos^2\theta_w\,m_Z^2}[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu[(-1+4\sin^2\theta_w)-\gamma_5]\,u(p)]\times \\ &\quad [\bar{u}(q')\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u(q)]\,. \qquad (4.67) \end{aligned}$$

Les transformations de Fierz permettent d'écrire l'amplitude sous une forme plus simple. Les transformations de Fierz sont donnés par

$$\sum_i f_i\,(\Gamma_i)_{\alpha\beta}(\Gamma_i)_{\gamma\delta} = \sum_j \hat{f}_j\,(\Gamma_j)_{\alpha\delta}(\Gamma_j)_{\gamma\beta} \qquad (4.68)$$

où $\Gamma_S = 1$, $\Gamma_V = \gamma_\mu$, $\Gamma_A = \gamma_\mu\gamma_5$, $\Gamma_P = \gamma_5$, $\Gamma_T = \sigma_{\mu\nu}$ et les coefficients f sont reliés aux coefficients $\hat{f}$ par

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_S \\ \hat{f}_V \\ \hat{f}_T \\ \hat{f}_A \\ \hat{f}_P \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -2 & 0 & 1/2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_S \\ f_V \\ f_T \\ f_A \\ f_P \end{pmatrix} . \tag{4.69}$$

Une autre possibilité pour relier les deux éléments de matrice par la transformation de Fierz sans faire référence à la formule précédente consiste à utiliser la décomposition d'une matrice 4×4 sur la base des matrices γ

$$M = aI + a_5\gamma_5 + a_\alpha\gamma^\alpha + a^5_\alpha\gamma^\alpha\gamma_5 + a_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \tag{4.70}$$

où

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha\right) \tag{4.71}$$

et

$$\begin{array}{ll} a = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[M\right] & a_\alpha = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha M\right] \\ a_5 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_5 M\right] & a^5_\alpha = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\gamma_\alpha M\right] \\ a_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{\alpha\beta} M\right] & \end{array} \tag{4.72}$$

Le produit des deux spineurs $u(q)\bar{u}(q')$ de la formule (4.64) est un produit colonne $\times$ ligne de deux vecteurs à quatre composantes, donc une matrice 4×4. Avec $M = u(q)\bar{u}(q')$ les coefficients de la formule (4.70) sont

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[u(q)\bar{u}(q')\right] = \frac{1}{4}\bar{u}(q')u(q) \\ a_5 &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_5 u(q)\bar{u}(q')\right] = \frac{1}{4}\bar{u}(q')\gamma_5 u(q) \\ a_\alpha &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha u(q)\bar{u}(q')\right] = \frac{1}{4}\bar{u}(q')\gamma_\alpha u(q) \\ a^5_\alpha &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\gamma_\alpha u(q)\bar{u}(q')\right] = \frac{1}{4}\bar{u}(q')\gamma_5\gamma_\alpha u(q) \\ a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{\alpha\beta} u(q)\bar{u}(q')\right] = \frac{1}{4}\bar{u}(q')\sigma_{\alpha\beta} u(q) \end{aligned} \tag{4.73}$$

La quantité à calculer est donc

$$\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,M\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u(p) = \bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,M\,(1+\gamma_5)\gamma^\mu\,u(p) \tag{4.74}$$

mais

$$(1-\gamma_5)\,X\,(1+\gamma_5)=0 \qquad \text{si} \quad X=I,\gamma_5,\sigma_{\alpha\beta} \tag{4.75}$$

seulement a_α et a^5_α restent à calculer explicitement:

$$a_\alpha\gamma^\alpha + a^5_\alpha\gamma^\alpha\gamma_5 = \frac{1}{2}(a_\alpha + a^5_\alpha)\gamma^\alpha(1+\gamma_5) + \frac{1}{2}(a_\alpha - a^5_\alpha)\gamma^\alpha(1-\gamma_5) \tag{4.76}$$

et pour la même raison le dernier terme à droite ne contribue pas. Le coefficient de la transformation est

$$\frac{1}{2}(a_\alpha + a^5_\alpha) = \frac{1}{8}\left[\bar{u}(q')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(q)\right] \tag{4.77}$$

où $\gamma_5\gamma_\alpha = -\gamma_\alpha\gamma_5$. La transformation de Fierz est

$$\begin{aligned}
&[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,u(q)][\bar{u}(q')\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u(p)] \\
&= \frac{1}{2}(a_\alpha + a^5_\alpha)\,\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\,(1+\gamma_5)\gamma^\mu\,u(p) \\
&= 2(a_\alpha + a^5_\alpha)\,\bar{u}(p')\,(1+\gamma_5)\,\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu\,u(p)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

et en utilisant $\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$ on obtient

$$-\,\bar{u}(q')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(q)\,\bar{u}(p')\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(p)\;. \tag{4.79}$$

Ces transformations permettent de combiner les deux éléments de matrice

$$\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_Z = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}(p')\,\gamma_\mu(a+b\gamma_5)\,u(p)]\,[\bar{u}(q')\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u(q)]\;. \tag{4.80}$$

avec

$$a = 2\sin^2\theta_w - \frac{3}{2} \qquad b = \frac{1}{2}\;. \tag{4.81}$$

Sans évaluer la section efficace on peut comparer ce résultat avec la théorie $V-A$ qui prédit $|a|=1$ et $|b|=1$.

4.2 Le théorème d'équivalence

Avec le mécanisme de Higgs on a construit des particules de spin 1 avec masse à partir de bosons de jauge sans masse grâce à la brisure spontanée de la symétrie de jauge. On peut essayer d'analyser le mécanisme de Higgs en

fonction des composantes du boson vectoriel. Dans la suite on va travailler dans une jauge covariante.

Un boson vecteur est décrit par un vecteur à quatre composantes. Dans le cas d'un boson vecteur sans masse, comme le photon en électrodynamique, seulement deux composantes sont physiques. Ceci est possible puisque la composante non-physique à norme négative est effacée par la contribution opposée d'une des trois composantes à norme positive. Cette compensation exacte des termes non-physiques de la théorie est garantie par l'invariance de jauge. Pour une théorie non–abélienne le mécanisme est le même, mais on a des paires supplémentaires d'états à considérer, les ghosts de la quantification de la théorie non–abélienne.

Pour un boson vectoriel avec masse, trois composantes sont physiques, donc la composante à norme négative doit être compensée par un nouveau terme, le boson de Goldstone. De façon schématique on peut écrire la probabilité d'émission d'un boson vectoriel massif en fonction de ses deux polarisations transverses, de sa polarisation longitudinale, de la polarisation de la composante à norme négative (la polarisation time–like) et de la probabilité d'émission d'un boson de Goldstone

$$|\epsilon_{T1}\cdot\mathcal{M}|^2+|\epsilon_{T2}\cdot\mathcal{M}|^2+|\epsilon_L\cdot\mathcal{M}|^2-|\epsilon_t\cdot\mathcal{M}|^2+|\mathcal{M}_\pi|^2\ . \tag{4.82}$$

Le courant pour l'émission d'un boson de jauge avec masse est donné par

$$J^\mu(q)=\mathcal{M}^\mu-igv\,q^\mu\,\frac{i\mathcal{M}}{q^2}\ . \tag{4.83}$$

La première contribution est l'émission directe d'un boson de jauge, la deuxième est le couplage d'un boson de Goldstone au courant [1]. Pour un courant spontanément brisé, l'équation du mouvement $\partial_\mu J^\mu=0$ reste valable et implique

$$q_\mu\mathcal{M}^\mu+gv\mathcal{M}_\pi=0 \tag{4.84}$$

Cette équation, en sachant que la polarisation $\epsilon_t^\mu=q^\mu/m$ avec $m=gv$, donne la relation nécessaire pour éliminer l'état à norme négative

$$|\epsilon_t\cdot\mathcal{M}|^2=|\mathcal{M}_\pi|^2\ . \tag{4.85}$$

1. Le courant peut créer ou détruire un boson de Goldstone sans avoir besoin de la présence d'autres particules. Il s'agit d'une propriété caractéristique des bosons de Goldstone.

Si maintenant on reconsidère la formule (1.127) pour le vecteur de polarisation longitudinale on peut voir qu'il est du type

$$\epsilon_L^\mu = \frac{q^\mu}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{q}\right) \ . \tag{4.86}$$

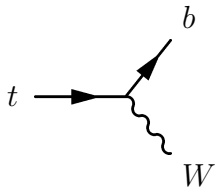
Les composantes de ce vecteur augmentent avec l'énergie, mais on peut aussi remarquer que

$$\epsilon_L \cdot \mathcal{M} \simeq \epsilon_t \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M}_\pi \ . \tag{4.87}$$

Cette formule constitue le théorème d'équivalence : à haute énergie la brisure spontanée de la symétrie devient insignifiante et montre que les bosons avec masse sont la combinaison d'un boson de spin 1 sans masse (partie transverse) et d'un boson de Goldstone (partie longitudinale). Puisque à haute énergie la partie longitudinale domine, on peut utiliser directement les bosons de Goldstone pour faire des calculs simplifiés qui donnent le résultat à l'ordre dominant dans un développement en énergie.

4.2.1 Exercice A

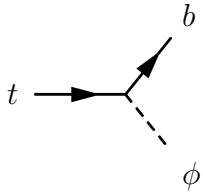
Calculer la largeur de désintégration $t \to Wb$ donnée par le diagramme de Feynman



(4.88)

en supposant que l'on prenne pas en considération la couleur et que l'on détermine pas le spin des particules (moyenne sur les états initiaux et somme sur les états finals) et de négliger la masse du quark b par rapport à la masse du boson W et du quark t.

Faire ensuite le calcul en remplaçant le boson $W^\pm$ par sa partie longitudinale, le boson de Goldstone $\phi^\pm$



(4.89)

et vérifier que le résultat est le même à l'ordre dominant du développement en série en m_W/m_t, comme prévu par le théorème d'équivalence.

4.2.2 Exercice B

Le lagrangien pour un doublet scalaire complexe ϕ est donné par

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{4.90}$$

avec

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} . \tag{4.91}$$

Montrer que si on écrit les champs complexes en fonction des composantes réelles

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} . \tag{4.92}$$

le lagrangien est explicitement invariant sous transformations de $O(4)$.

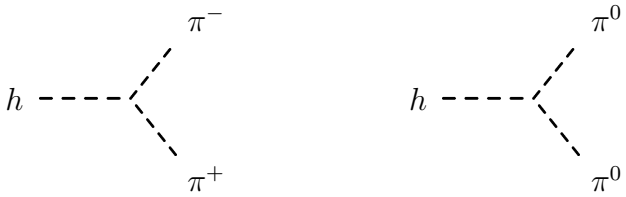
Écrire ensuite le lagrangien en fonction de

$$\pi = (\phi_1, \phi_2, \phi_4), \qquad \sigma = \phi_3 \tag{4.93}$$

et dans la brisure spontanée de symétrie

$$\sigma = v + h \tag{4.94}$$

où $v^2 = \mu^2/\lambda$ est la valeur dans le vide du champ σ. Utiliser le lagrangien en fonction des champs h et π pour calculer les largeurs de désintégration $h \to \pi^+\pi^-$, $h \to \pi^0\pi^0$

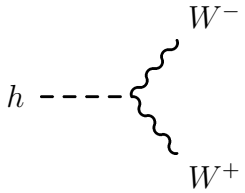


(4.95)

où

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2) , \qquad \pi^0 = \pi_3 . \tag{4.96}$$

Montrer que le calcul de la largeur de désintégration du modèle standard $h \to W^+W^-$



(4.97)

dans la limite $M_h \gg M_W$ donne le même résultat que le calcul précédent pour $h \to \pi^+\pi^-$ en accord avec le théorème d'équivalence.

4.3 Solution des exercices

Exercice A

L'élément de matrice pour la désintégration du quark top est

$$M = \frac{ig}{2\sqrt{2}}\,\bar{u}(q)\,\gamma^{\mu}\,(1-\gamma_5)\,u(p)\,\epsilon^{*}_{\mu}(k)\,V_{tb} \tag{4.98}$$

où p est l'impulsion du quark top, q celle du quark b et k celle du boson W de polarisation $\epsilon^{*}(k)$. Par la suite on ne va pas indiquer le mélange V_{tb} puisque sa valeur numérique est $\simeq 1$. Le module carré de l'élément de matrice M avec somme sur les états finals et moyenne sur les états initiaux donne

$$|\bar{M}|^2 = \frac{g^2}{2}\,(q^{\mu}p^{\nu} + q^{\nu}p^{\mu} - g^{\mu\nu}p\cdot q)\,\sum_{\text{pol}}\epsilon^{*}_{\mu}(k)\,\epsilon_{\nu}(k) \tag{4.99}$$

où

$$\sum_{\text{pol}}\epsilon^{*}_{\mu}(k)\,\epsilon_{\nu}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m_W^2}\,. \tag{4.100}$$

Le résultat des contractions des indices est

$$|\bar{M}|^2 = \frac{g^2}{2}\left(p\cdot q + \frac{2\,k\cdot q\;k\cdot p}{m_W^2}\right)\,. \tag{4.101}$$

Dans la limite $m_b = 0$ les produits scalaires donnent

$$2\,q\cdot p = 2\,q\cdot k = m_t^2 - m_W^2 \tag{4.102}$$

$$2\,k\cdot p = m_t^2 + m_W^2 \tag{4.103}$$

et

$$|\bar{M}|^2 = \frac{g^2}{4}\frac{m_t^4}{m_W^2}\left(1-\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)\left(1+2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)\,. \tag{4.104}$$

La largeur de désintégration peut se calculer à l'aide des formules de l'appendice

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2}\,|\bar{M}|^2\,\frac{|p_1|}{m_t^2} \tag{4.105}$$

$$|p_1| = \frac{1}{2m_t}\,\sqrt{[m_t^2-(m_W+m_b)^2]\,[m_t^2-(m_W-m_b)^2]}$$

$$\simeq \frac{m_t}{2}\left(1-\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)\,. \tag{4.106}$$

La largeur totale s'obtient en intégrant la largeur différentielle

$$\Gamma = \frac{g^2}{64\pi}\frac{m_t^3}{m_W^2}\left(1-\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)^2\left(1+2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right) \ . \tag{4.107}$$

Le calcul avec la partie longitudinale $\phi^\pm$ donne

$$M = -i\frac{g\,m_t}{2\sqrt{2}\,m_W}\,\bar{u}(q)\,(1+\gamma_5)\,u(p) \tag{4.108}$$

dont le module carré est

$$|\bar{M}|^2 = \frac{g^2\,m_t^2}{2\,m_W^2}\,q\cdot p\ . \tag{4.109}$$

La largeur totale est

$$\Gamma = \frac{g^2}{64\pi}\frac{m_t^3}{m_W^2} \tag{4.110}$$

à comparer avec le résultat exact. On peut voir que le résultat à l'ordre dominant du développement en série de m_W/m_t est le même.

Exercice B

La formule (4.92) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\phi^\dagger\phi &= \frac{1}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_4^2\right) = \frac{1}{2}\,(\phi\cdot\phi)\\ \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi\cdot\partial^\mu\phi)\end{aligned} \tag{4.111}$$

où $\phi = (\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)$ est un vecteur de $O(4)$. Le lagrangien peut s'écrire en fonction du produit scalaire de ce vecteur et de ses dérivées

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\cdot\partial^\mu\phi + \frac{\mu^2}{2}\,(\phi\cdot\phi) - \frac{\lambda}{4}\,(\phi\cdot\phi)^2\ . \tag{4.112}$$

Il est donc invariant sous transformations de $O(4)$.

Dans les nouvelles variables π et σ on a

$$\phi\cdot\phi = \pi^2+\sigma^2 \tag{4.113}$$

et le lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2\right] + \frac{\mu^2}{2}\left(\pi^2+\sigma^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\pi^2+\sigma^2\right)^2 \ . \tag{4.114}$$

Dans la brisure spontanée de symétrie $\sigma = v + h$ le potentiel scalaire a la forme

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mu^2}{2}\left(\pi^2+\sigma^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\pi^2+\sigma^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\,2\lambda v^2\, h^2 + \lambda v\, h\,\left(\pi^2+h^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\pi^2+h^2\right)^2 \end{aligned} \tag{4.115}$$

et on peut lire directement du lagrangien la masse du boson de Higgs

$$m_h^2 = 2\lambda v^2 \ . \tag{4.116}$$

Les trois champs π restent à masse nulle. Le lagrangien, en utilisant la masse du Higgs de la formule précédente, est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu h)^2\right] - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \frac{m_h^2}{2v}\, h\,\left(\pi^2+h^2\right) - \frac{m_h^2}{8v^2}\left(\pi^2+h^2\right)^2 \ . \tag{4.117}$$

Les couplages du boson de Higgs à π^+, π^- et π^0 s'obtiennent en utilisant les formules (4.96) qui donnent $\pi^2 = 2\pi^+\pi^- + \pi^0\pi^0$ et pour les couplages au boson de Higgs $h\pi^+\pi^-$ et $h\pi^0\pi^0$ on obtient im_h^2/v. Le calcul des largeurs correspondantes donne

$$\begin{aligned} \Gamma(h \to \pi^+\pi^-) &= \frac{m_h^3 G_F}{8\sqrt{2}\,\pi} \\ \Gamma(h \to \pi^0\pi^0) &= \frac{m_h^3 G_F}{16\sqrt{2}\,\pi} \ . \end{aligned} \tag{4.118}$$

L'amplitude hW^+W^- dans le modèle standard est

$$M = -igm_W\,(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \tag{4.119}$$

et le module carré de l'amplitude avec somme sur les polarisations des W

$$\begin{aligned} \sum |M|^2 &= g^2 m_W^2 \sum (\epsilon_1\cdot\epsilon_2)^2 = g^2 m_W^2 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}\right)\,\left(-g^{\mu\nu} + \frac{k'^\mu k'^\nu}{m_W^2}\right) \\ &= g^2 m_W^2 \left(2 + \frac{(k\cdot k')^2}{m_W^4}\right) \end{aligned} \tag{4.120}$$

où k et k' sont les impulsions des deux W. En utilisant $m_h^2 = (k+k')^2$ on peut calculer le produit scalaire

$$k \cdot k' = \frac{1}{2}\left(m_h^2 - 2m_W^2\right) \tag{4.121}$$

et le module carré de l'amplitude est

$$\sum |M|^2 = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} m_h^2 \left(1 - 4\frac{m_W^2}{m_h^2} + 12\frac{m_W^4}{m_h^4}\right) . \tag{4.122}$$

La largeur peut se calculer en utilisant les formules de l'appendice

$$\Gamma(h \to W^+W^-) = \frac{m_h^3 G_F}{8\sqrt{2}\,\pi} \left(1 - 4\frac{m_W^2}{m_h^2} + 12\frac{m_W^4}{m_h^4}\right) \left(1 - 4\frac{m_W^2}{m_h^2}\right)^{1/2} . \tag{4.123}$$

Ces résultat, dans la limite $m_h \gg m_W$, est en accord avec le résultat dans la théorie scalaire, comme prévu par le théorème d'équivalence.

4.4 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

H. Spiesberger, M. Spira, P.M. Zerwas
The Standard Model: Physical Basis and Scattering Experiments
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0011255

Z. Kunszt
Bread and Butter Standard Model
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0004103

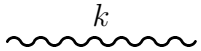
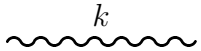
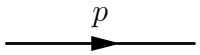
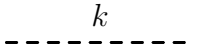
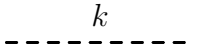
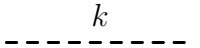
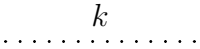
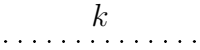
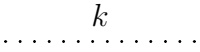
Livres :

T.P. Cheng, L.F. Li
Gauge Theory of Elementary Particle Physics
Oxford

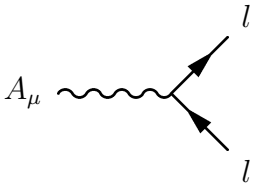
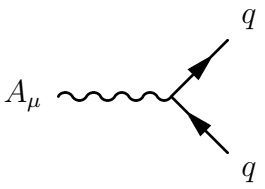
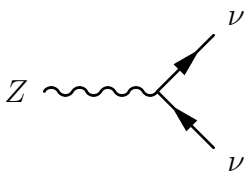
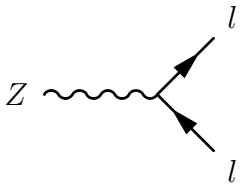
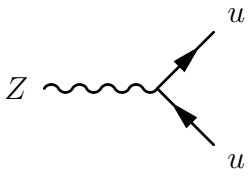
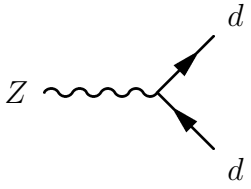
M.E. Peskin, D.V. Schroeder
An Introduction to Quantum Field Theory
Addison Wesley

		couleur SU(3)	isospin SU(2)	hypercharge $U(1)_Y$	charge el. $U(1)_{em}$
quarks	$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	1/3	2/3 -1/3
(spin 1/2)	u_R	$\bar{3}$	1	-4/3	-2/3
	d_R	$\bar{3}$	1	2/3	1/3
leptons	$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	1	2	-1	0 -1
(spin 1/2)	e_R	1	1	2	1
Higgs (spin 0)	H	1	2	-1	0
bosons de jauge (spin 1)	g	8	1	0	0
	$W^{1,2,3}$	1	3	0	0, ± 1
	B	1	1	0	0

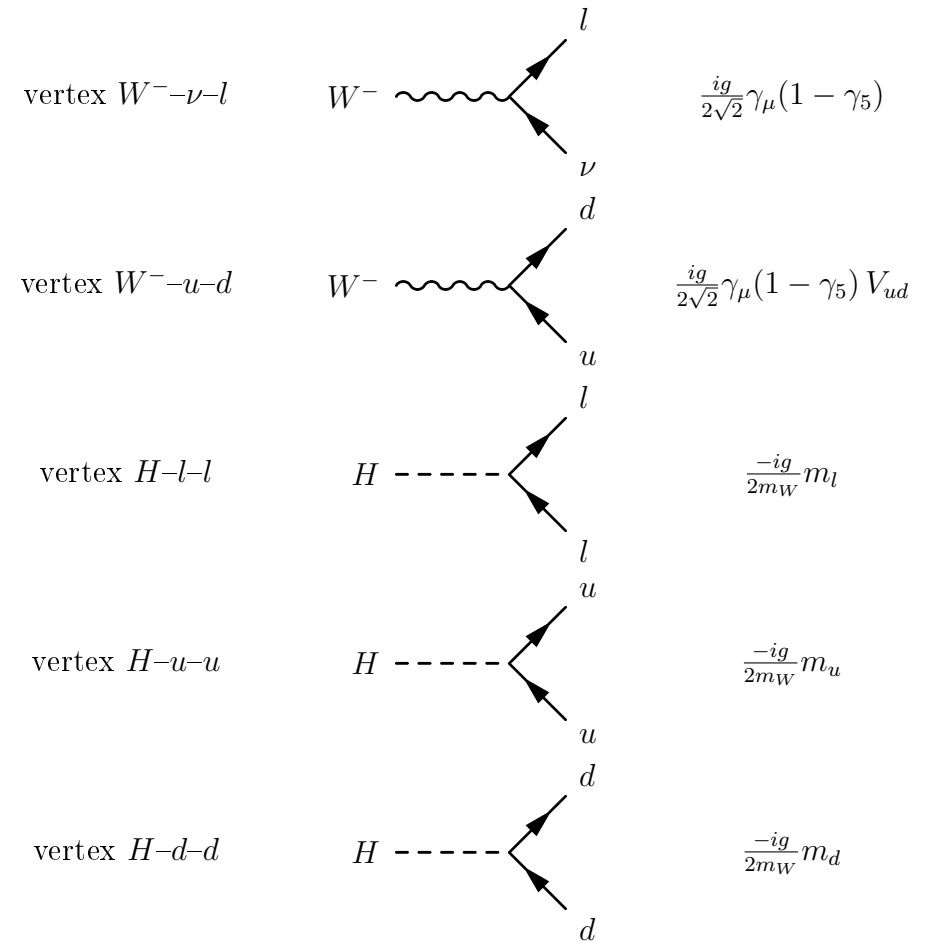
Tab. 4.1 – Nombres quantiques des particules dans le spectre physique du modèle standard. La charge électrique est définie par la relation $Q_{em} = T^3_{SU(2)} + Q_Y/2$. Les nombres en caractère gras indiquent les multiplets, par exemple 3 signifie triplet, 1 singulet etc. Pour les bosons de jauge, à cause de la diagonalisation des matrices de masse, les particules observées expérimentalement sont des combinaisons linéaires de celles dans la table: le photon γ et le boson Z^0 sont une combinaison linéaire de W^3 et B, les bosons $W^\pm$ une combinaison de W^1 et W^2. Pour le champ de Higgs, seul le boson de Higgs dans le spectre physique est indiqué, même s'il fait partie d'un doublet 2 de SU(2).

$W^{\pm}$	μ  ν	$\frac{-i}{k^2-m_W^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi m_W^2}\right]$
Z	μ  ν	$\frac{-i}{k^2-m_Z^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi m_Z^2}\right]$
γ	μ  ν	$\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$
fermion		$\frac{i}{\not{p}-m_f+i\epsilon}$
H		$\frac{i}{k^2-m_H^2+i\epsilon}$
$\phi^{\pm}$		$\frac{i}{k^2-\xi m_W^2+i\epsilon}$
χ		$\frac{i}{k^2-\xi m_Z^2+i\epsilon}$
$\omega^{\pm}$		$\frac{-i}{k^2-\xi m_W^2+i\epsilon}$
ω_Z		$\frac{-i}{k^2-\xi m_Z^2+i\epsilon}$
ω_γ		$\frac{-i}{k^2+i\epsilon}$

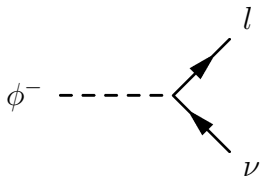
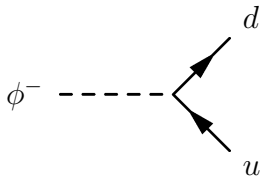
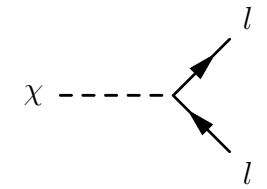
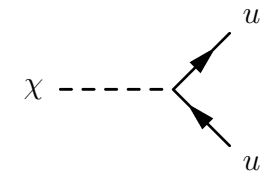
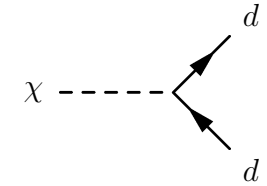
Tab. 4.2 – Les propagateurs des particules du modèle standard. Les fermions, $W^{\pm}$, Z, γ et H sont les particules physiques; $\phi^{\pm}$ et χ sont les bosons de Goldstone qui peuvent être éliminés par un choix de jauge unitaire et qui constituent la partie longitudinale des bosons de jauge $W^{\pm}$, Z; les particules ω sont les ghosts qui interviennent dans les calculs à boucles avec notre choix de jauge covariante. Les propagateurs sont simples avec le choix $\xi = 1$ (jauge de 't Hooft–Feynman). On peut éliminer les bosons de Goldstone avec la jauge unitaire ($\xi = \infty$).

vertex γ–l–l		$-ie\gamma_\mu$
vertex γ–q–q		$ieQ_q\gamma_\mu$
vertex Z–ν–ν		$\frac{ig}{4\cos\theta_w}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$
vertex Z–l–l		$\frac{ig}{4\cos\theta_w}\gamma_\mu[(-1+4\sin^2\theta_w)-\gamma_5]$
vertex Z–u–u		$\frac{ig}{4\cos\theta_w}\gamma_\mu\left[\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w\right)+\gamma_5\right]$
vertex Z–d–d		$\frac{ig}{4\cos\theta_w}\gamma_\mu\left[\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_w\right)-\gamma_5\right]$

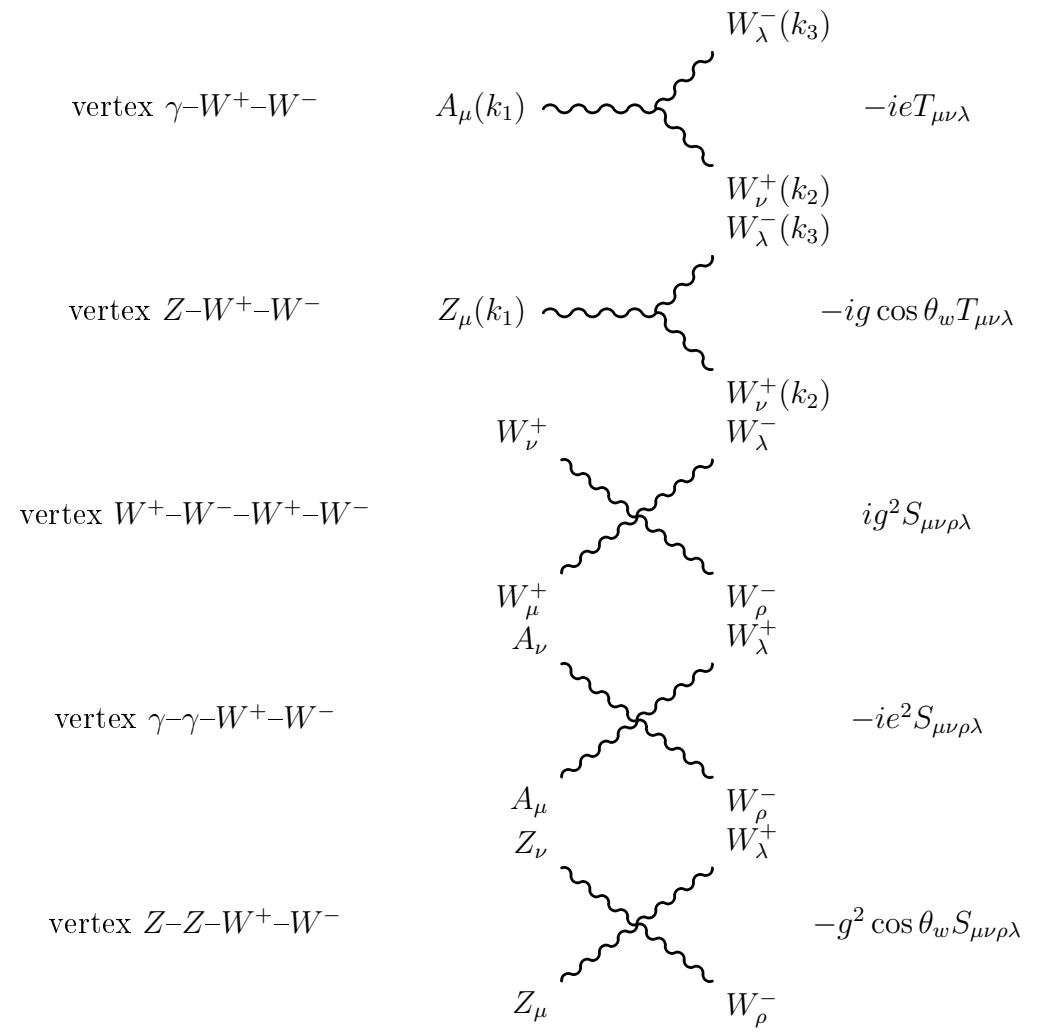
Tab. 4.3 – Les couplages trilinéaires du photon et du boson Z aux fermions. l indique un lepton, q un quark, u un quark de type up (u, c, t), d un quark de type down (d, s, b) et ν le neutrino.



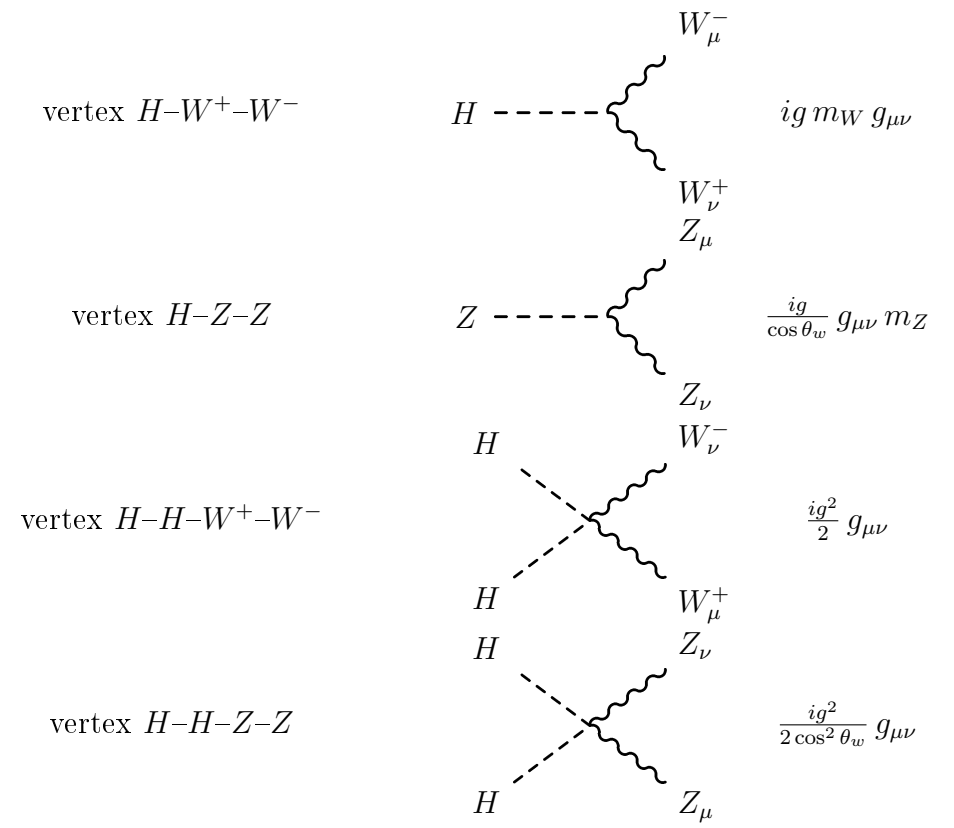
Tab. 4.4 – Les couplages trilinéaires du boson de Higgs et du boson $W^\pm$ aux fermions. La ligne du boson vecteur chargé W^- est entrante dans le vertex. V_{ud} est l'élément de la matrice CKM pour les quarks de type u et d. Les vertex pour les deux autres familles sont semblables. Pour le boson de Higgs H le couplage est proportionnel à la masse de la particule avec laquelle il interagit.

vertex ϕ^-–ν–l		$\frac{-ig}{2\sqrt{2}m_W}\, m_l\,(1-\gamma_5)$
vertex ϕ^-–u–d		$\frac{-ig}{2\sqrt{2}m_W}[m_d(1-\gamma_5) - m_u(1+\gamma_5)]$
vertex χ–l–l		$\frac{g}{2m_W}\, m_l\, \gamma_5$
vertex χ–u–u		$\frac{-g}{2m_W}\, m_u\, \gamma_5$
vertex χ–d–d		$\frac{g}{2m_W}\, m_d\, \gamma_5$

Tab. 4.5 – Les couplages trilinéaires des bosons de Goldstone $\phi^{\pm}$, χ aux fermions.



Tab. 4.6 – Les couplages trilinéaires et quadrilinéaires des bosons de jauge. Les impulsions des bosons sont entrantes dans les vertex. Les structures tensorielles sont $T_{\mu\nu\lambda} = (k_1 - k_2)_\lambda\, g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu\, g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu\, g_{\lambda\mu}$ et $S_{\mu\nu\lambda\rho} = 2\, g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}$.



Tab. 4.7 – Les couplages trilinéaires et quadrilinéaires du boson de Higgs. Les impulsions des bosons sont entrantes dans les vertex. D'autres diagrammes existent pour les couplages des bosons de Goldstone $\phi^\pm$, χ et pour les couplages des ghosts avec les bosons de jauge.

Chapitre 5

Le modèle standard à une boucle

Le lagrangien du modèle standard au niveau de l'arbre contient des paramètres qui ne sont pas déterminés par la théorie. La définition de ces paramètres et leur relation avec les quantités mesurables sont déterminées par la renormalisation. Au niveau des boucles les relations entre les paramètres du lagrangien et les quantités mesurables sont différentes de celles au niveau de l'arbre. Les intégrales des calculs à boucles sont en général divergentes et il est nécessaire de trouver une méthode de régularisation, par exemple avec un cut-off ou régularisation dimensionnelle. La conséquence de la régularisation est que les relations entre les paramètres et les quantités mesurables dépendent du cut-off. Les paramètres du lagrangien de départ (paramètres nus ou bare) n'ont donc aucune signification physique. Pour pouvoir vérifier les prédictions de la théorie il faut examiner les relations entre les quantités mesurables.

Pour une étude détaillée de la renormalisation il faut introduire le groupe de renormalisation. En théorie des champs les échelles sont couplées et on peut écrire des équations d'évolution qui relient la renormalisation et les transformations d'échelle. L'évolution des couplages prédite par le groupe de renormalisation et mesurée dans les expériences de haute énergie est le signe du non découplage de la structure à courte distance de la théorie. Dans la suite on va se limiter au minimum indispensable pour les calculs sans entrer dans ce sujet en détail.

Une possibilité pour travailler avec des quantités finies consiste à remplacer les paramètres du lagrangien (paramètres nus) par des paramètres renormalisés. Dans la renormalisation chaque paramètre nu g_0 est remplacé

par un paramètre renormalisé g

$$g_0 = Z_g\, g = g + \delta g \tag{5.1}$$

où la constante de renormalisation Z_g diffère de l'unité par des contributions à une boucle. La décomposition (5.1) est arbitraire puisque seulement la partie divergente est déterminée par la structure à une boucle de la théorie. Quelle partie finie reste dans g dépend du choix de la procédure de renormalisation. Si on écrit chaque constante de renormalisation sous la forme

$$Z_i = 1 + \delta Z_i \tag{5.2}$$

le lagrangien peut s'écrire comme la somme d'une partie renormalisée et d'une partie de contre–termes :

$$\mathcal{L}(\phi_0, g_0) = \mathcal{L}(\phi, g) + \delta\mathcal{L}(\phi, g, \delta Z_\phi, \delta g) \tag{5.3}$$

où ϕ_0, g_0 caractérisent respectivement le champ et le couplage nus. Il est nécessaire de redéfinir aussi les champs pour avoir des fonctions de Green finies hors de la couche de masse. Pour le choix de la procédure de renormalisation on a plusieurs possibilités qui sont utilisées dans la littérature. Dans le cas de la QED il y a une procédure de renormalisation qui est plus utilisée que les autres, la renormalisation on-shell puisque à basse énergie les masses des particules donnent une échelle naturelle pour déterminer les paramètres. Les parties finies des contre–termes sont déterminées par la contrainte que les propagateurs des fermions aient des pôles en correspondance des masses physiques des particules et que la charge électrique soit celle mesurée à basse énergie dans la diffusion Compton. On va utiliser une généralisation de cette renormalisation on-shell pour la théorie électrofaible. Cette procédure n'est pas toujours la plus efficace, par exemple la masse des quarks légers ne peut pas être déterminée avec grande précision puisque les quarks sont confinés et donc on peut au mieux parler d'un paramètre effectif.

5.1 Les transformations BRS

L'invariance de jauge de la théorie classique est en partie détruite par l'introduction des termes de fixation de jauge et des ghosts. Le lagrangien quantique est invariant sous des transformations de jauge résiduelles, les

transformations de Becchi–Rouet–Stora (BRS). Ces transformations de symétrie donnent lieu à des identités entre les fonctions de Green (identités de Slavnov-Taylor) qui sont nécessaires pour vérifier l'unitarité de la théorie et pour formuler les conditions de renormalisation. On va examiner la transformation BRS avec un exemple.

5.1.1 Exemple : $SU(2)$ avec un doublet de fermions

On considère une théorie $SU(2)$ avec un doublet de fermions

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{5.4}$$

avec

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &= \partial_\mu\psi - igA^a_\mu T^a\psi & (5.5)\\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu & (5.6) \end{aligned}$$

et $T^a = \tau^a/2$ $(a = 1, 2, 3)$. Ce lagrangien classique est invariant sous la transformation de jauge locale

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -iT^a\theta^a\psi & (5.7)\\ \delta A^a_\mu &= \epsilon^{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a\ . & (5.8) \end{aligned}$$

Le lagrangien quantique est donné par le lagrangien classique (5.4) plus les termes de fixation de jauge et les ghosts :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 & (5.9)\\ \mathcal{L}_{\text{ghost}} &= i\omega^\dagger_a\partial^\mu(\delta_{ab}\partial_\mu - g\epsilon_{abc}A^c_\mu)\omega_b & (5.10) \end{aligned}$$

ω étant les champs de Grassmann complexes des ghosts (voir l'appendice). En termes de champs réels σ et ρ on a

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{\rho_a + i\sigma_a}{\sqrt{2}} & (5.11)\\ \omega^\dagger_a &= \frac{\rho_a - i\sigma_a}{\sqrt{2}}\ . & (5.12) \end{aligned}$$

Les propriétés d'anticommutation des variables de Grassmann $\rho^2 = \sigma^2 = 0$, $\rho\sigma = -\sigma\rho$ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost}} &= -i\partial^\mu \rho_a (D_\mu \sigma_a) && (5.13) \\ D_\mu \sigma^a &= \partial_\mu \sigma^a - g\epsilon^{abc}\sigma^b A^c_\mu \,. && (5.14) \end{aligned}$$

L'action quantique est invariante sous des transformations de jauge avec un choix particulier du paramètre $\theta = -gc\,\sigma^a$ avec c une variable de Grassmann indépendante de l'espace–temps. Cette transformation de jauge qui laisse l'action invariante est donnée par

$$\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= c\, D_\mu \sigma^a && (5.15) \\ \delta\psi &= igc\,(T^a\sigma^a)\psi && (5.16) \\ \delta\sigma^a &= -\frac{g}{2} c\,\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c && (5.17) \\ \delta\rho^a &= -i\frac{c}{\xi}\,\partial^\mu A^a_\mu && (5.18) \end{aligned}$$

avec ξ comme paramètre de jauge. À partir des transformations (5.15-5.18) on peut définir des charges Q

$$\delta\phi = c\,Q\phi \tag{5.19}$$

pour chaque champ

$$\begin{aligned} QA^a_\mu &= D_\mu \sigma^a && (5.20) \\ Q\psi &= ig\,(T^a\sigma^a)\psi && (5.21) \\ Q\sigma^a &= -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c && (5.22) \\ Q\rho^a &= -\frac{i}{\xi}\partial^\mu A^a_\mu && (5.23) \end{aligned}$$

5.1.2 Charges BRS et états physiques

On peut montrer que les charges BRS sont nilpotentes $Q^2\phi = 0$ et commutent avec le hamiltonien H. Ce fait a des conséquences physiques importantes. Les états propres $|\psi\rangle$ de H peuvent être classifiés par rapport à Q en trois sous–espaces :

$$\begin{aligned} \{|\psi_1\rangle\} \mid Q|\psi_1\rangle &\neq 0 && (5.24) \\ \{|\psi_2\rangle\} \mid Q|\psi_2\rangle &= 0 \quad \& \quad |\psi_2\rangle = Q|\psi_1\rangle && (5.25) \\ \{|\psi_3\rangle\} \mid Q|\psi_3\rangle &= 0 \quad \& \quad |\psi_3\rangle \neq Q|\psi_1\rangle && (5.26) \end{aligned}$$

Si on sélectionne les états physiques par la condition

$$Q|\psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \tag{5.27}$$

on aura en général

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = |\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle \tag{5.28}$$

mais on peut montrer facilement que

$$\langle\psi_2'|\psi_2\rangle = 0 \qquad \langle\psi_2|\psi_3\rangle = 0 \tag{5.29}$$

donc

$$\langle\psi_{\text{phys}}'|\psi_{\text{phys}}\rangle = \langle\psi_3'|\psi_3\rangle \ . \tag{5.30}$$

Ce résultat implique que les états à norme zéro ne contribuent pas aux éléments de matrice physiques même si leur présence est nécessaire pour l'invariance de jauge et de Lorentz.

5.1.3 Identités de Slavnov–Taylor

L'invariance sous les transformations BRS implique l'existence d'identités entre les fonctions de Green. Du point de vue formel on peut regrouper les champs du modèle standard sous le nom Φ_s et leur variation BRS

$$\delta\Phi_s = (\Delta_s^\alpha + g^\alpha T_{st}^\alpha \Phi_t)\, \delta\theta^\alpha \tag{5.31}$$

où le terme non–homogène Δ_s^α est présent seulement pour les champs de jauge, les T^α sont les matrices des générateurs de $SU(2) \otimes U(1)$, $\delta\theta^\alpha$ est la transformation BRS. En termes de la variation BRS de la fonctionnelle génératrice W on a l'identité de Slavnov–Taylor

$$\left[iF^\alpha \frac{\delta}{i\delta J} + J_t \left(\Delta_t^\beta + g T_{tt'}^\beta \frac{\delta}{i\delta J_{t'}} \right) \frac{\delta^2}{iu^\alpha i\bar{u}^\beta} \right] W[J,u,\bar{u}]|_{u=\bar{u}=0} = 0 \tag{5.32}$$

où u, $\bar{u}$ sont les sources pour les ghosts, J_s les sources pour les champs Φ_s. Les F^α sont les fonctions de fixation de jauge de la formule (4.29). Les relations entre les fonctions de Green s'obtiennent par dérivation par rapport aux sources J_s avant de mettre les sources à zéro : $J_s = 0$. Ces relations sont la généralisation des identités de Ward–Takahashi pour l'électrodynamique.

Un exemple des relations qu'on peut en déduire est

$$k^\mu k^\nu \Delta_{\mu\nu}^\gamma = -i \tag{5.33}$$

pour le propagateur du photon. Pour extraire des relations entre les self–énergies Σ on peut séparer les parties transverses et longitudinale du propagateur du champ de jauge

$$\Delta^{\gamma}_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \Delta^{\gamma}_{T}(k^2) - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Delta^{\gamma}_{L}(k^2) \tag{5.34}$$

en extrayant la partie libre du propagateur

$$\Delta^{\gamma}_{T,L}(k^2) = \frac{i}{k^2}\left(1 - \Sigma^{\gamma}_{T,L}\frac{1}{k^2}\right) \tag{5.35}$$

on obtient

$$k^2\Sigma^{\gamma}_{L} = 0 \tag{5.36}$$

qui garantit, en conséquence de l'invariance de jauge $U(1)_{\rm em}$, que la partie longitudinale de la self–énergie du photon est nulle comme en électrodynamique.

En général ces relations réduisent le nombre de conditions de renormalisation indépendantes à considérer et garantissent l'élimination des singularités non physiques, comme les parties longitudinales des champs de jauge et des ghosts, dans les amplitudes physiques.

5.1.4 Exercice A

Montrer que les charges BRS (5.20-5.23) sont nilpotentes : $Q^2\phi = 0$.

5.2 Renormalisation et contre–termes

Le traitement de la renormalisation à une boucle du modèle standard demande aussi une analyse complète du secteur non physique de la théorie. Dans la suite on va se limiter aux amplitudes physiques à une boucle pour les fermions légers et notre discussion peut se faire sans référence au secteur non physique. La renormalisation multiplicative pour les champs est

$$\begin{aligned}
g_1 &= Z_1^B (Z_2^B)^{-3/2}\, g_{1\,0} && (5.37)\\
g_2 &= Z_1^W (Z_2^W)^{-3/2}\, g_{2\,0} && (5.38)\\
v &= \sqrt{Z^\Phi}\,(v_0 - \delta v_0) && (5.39)\\
\mu^2 &= (Z^\Phi)^{-1}\,(\mu_0^2 - \delta\mu_0^2) && (5.40)
\end{aligned}$$

$$\lambda = (Z^\Phi)^{-2}\, Z_\lambda\, \lambda_0 \tag{5.41}$$
$$g_f^i = (Z^\Phi)^{-1/2}\, Z_1^i\, g_{f\,0}^i \tag{5.42}$$
$$W_\mu^a = \sqrt{Z_2^W}\, W_{\mu\,0}^a \tag{5.43}$$
$$B_\mu = \sqrt{Z_2^B}\, B_{\mu\,0} \tag{5.44}$$
$$\psi_L^i = \sqrt{Z_L^i}\, \psi_{L\,0}^i \tag{5.45}$$
$$\psi_R^i = \sqrt{Z_R^i}\, \psi_{R\,0}^i \tag{5.46}$$
$$\Phi = \sqrt{Z^\Phi}\, \Phi_0\ . \tag{5.47}$$

Cette renormalisation multiplicative est choisie de façon à respecter l'invariance de jauge avec le nombre minimal de constantes de renormalisation pour les champs. Les fonctions de Green renormalisées et les contre–termes sont aussi invariants de jauge. La renormalisation indépendante de la valeur dans le vide v absorbe le terme linéaire dans le potentiel de Higgs de façon à respecter à une boucle la relation

$$v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.48}$$

pour les paramètres renormalisés. Une conséquence pratique de cette renormalisation est l'élimination de certains diagrammes (tadpoles) dans les amplitudes et les fonctions de Green renormalisées.

Pour calculer les amplitudes physiques à une boucle il faut écrire le lagrangien en termes des paramètres physiques et le séparer en une partie renormalisée et une partie des contre–termes. Le calcul en termes de diagrammes de Feynman doit prendre en compte ces deux parties. Les constantes Z sont déterminés par les conditions de renormalisation choisies. Les résultats sont des fonctions de Green finies en termes des paramètres physiques. Pour la renormalisation des champs et des masses il faut considérer les propagateurs des bosons de jauge et des fermions avec les contributions des self–énergies.

5.2.1 Self–énergies des bosons de jauge

Les self–énergies Σ^{ij} contribuent à la partie transverse des propagateurs $D_{\mu\nu}$

$$D_{\mu\nu}^V(k) = -ig_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2-m_V^2} - \frac{1}{k^2-m_V^2}\Sigma^{VV}(k^2)\frac{1}{k^2-m_V^2}\right) \tag{5.49}$$

$$D^{\gamma Z}_{\mu\nu}(k) \;=\; +ig_{\mu\nu}\frac{1}{k^2-m_Z^2}\Sigma^{\gamma Z}(k^2)\frac{1}{k^2} \tag{5.50}$$

où $V=\gamma,Z,W$ et où on a éliminé la partie longitudinale $\sim k_\mu k_n u$ qui donne des termes m_f^2/m_V^2 dans les amplitudes qu'on va calculer. Σ est la somme de tous les termes à une boucle. Pour les self–énergies renormalisées on peut introduire des constantes de renormalisation en termes des champs physiques

$$\begin{pmatrix} \delta Z_i^\gamma \\ \delta Z_i^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta_w & \cos^2\theta_w \\ \cos^2\theta_w & \sin^2\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Z_i^W \\ \delta Z_i^B \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

et indiquer les self–énergies renormalisées avec $\hat\Sigma$

$$\begin{aligned}
\hat\Sigma^{\gamma\gamma}(k^2) &= \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2)+\delta Z_2^\gamma\, k^2 && (5.52)\\
\hat\Sigma^{ZZ}(k^2) &= \Sigma^{ZZ}(k^2)-\delta m_Z^2+\delta Z_2^Z(k^2-m_Z^2) && (5.53)\\
\hat\Sigma^{WW}(k^2) &= \Sigma^{WW}(k^2)-\delta m_W^2+\delta Z_2^W(k^2-m_W^2) && (5.54)\\
\hat\Sigma^{\gamma Z}(k^2) &= \Sigma^{\gamma Z}(k^2)-\delta Z_2^{\gamma Z}\,k^2+(\delta Z_1^{\gamma Z}-\delta Z_2^{\gamma Z})\,m_Z^2\;. && (5.55)
\end{aligned}$$

Les contre–termes de masse peuvent s'écrire en termes des constantes Z_i en utilisant les expressions des masses en termes des couplages et les relations de renormalisation multiplicative (5.37-5.47)

$$\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2}-\frac{\delta m_W^2}{m_W^2}=\frac{\sin\theta_w}{\cos\theta_w}\left(3\,\delta Z_2^{\gamma Z}-2\,\delta Z_1^{\gamma Z}\right) \tag{5.56}$$

où

$$\delta Z_i^{\gamma Z}=\frac{\sin\theta_w\cos\theta_w}{\cos^2\theta_w-\sin^2\theta_w}\left(\delta Z_i^Z-\delta Z_i^\gamma\right)\;. \tag{5.57}$$

5.2.2 Self–énergies des fermions

La self–énergie du fermion Σ^f est donnée par

$$S_F^f(k)=\frac{i}{\not k-m_f}-\frac{i}{\not k-m_f}\Sigma^f(k)\frac{i}{\not k-m_f}\;. \tag{5.58}$$

En termes des fonctions scalaires

$$\begin{aligned}
\Sigma^f(k) &= \not k\Sigma_V^f(k^2)+\not k\gamma_5\Sigma_A^f(k^2)+m_f\Sigma_S^f(k^2) && (5.59)\\
&= \not k\frac{1-\gamma_5}{2}\Sigma_L^f(k^2)+\not k\frac{1+\gamma_5}{2}\Sigma_R^f(k^2)+m_f\Sigma_S^f(k^2)
\end{aligned}$$

où

$$\Sigma_L = \Sigma_V - \Sigma_A \qquad \Sigma_R = \Sigma_V + \Sigma_A \; . \tag{5.60}$$

Avec les contre–termes obtenus à partir des transformations (5.37-5.47) on a les self–énergies renormalisées

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^f(k) &= \not{k}\left(\Sigma_V^f(k^2) + \delta Z_V^f\right) + \not{k}\gamma_5\left(\Sigma_A^f(k^2) + \delta Z_A^f\right) \\ &+ m_f\left(\Sigma_S^f(k^2) - \delta Z_V^f - \frac{\delta m_f}{m_f}\right) \end{aligned} \tag{5.61}$$

où

$$\delta Z_V^f = \frac{\delta Z_L + \delta Z_R^f}{2}\,, \qquad \delta Z_A^f = \frac{\delta Z_L - \delta Z_R^f}{2} \tag{5.62}$$

δZ_L étant la constante de renormalisation commune aux deux membres du doublet gauche. Pour la masse on a

$$\frac{\delta m_f}{m_f} = \delta Z_1^f - \frac{\delta v}{v}\; . \tag{5.63}$$

La renormalisation de la masse détermine celle de la constante de Yukawa par la constante δZ_1^f.

5.2.3 Corrections aux vertex

Pour la renormalisation des constantes de couplage il faut examiner les vertex d'interaction. Pour le vertex électromagnétique non renormalisé on a

$$\Gamma_\mu^{\gamma ff} = -ieQ_f\gamma_\mu + ie\Lambda_\mu^{\gamma f} \tag{5.64}$$

où les $\Lambda_\mu^{\gamma f}$ sont les corrections à une boucle au vertex. Pour le vertex renormalisé on utilise les relations (5.37-5.47)

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_\mu^{\gamma ff} &= \Gamma_\mu^{\gamma ff} - ieQ_f\gamma_\mu\left(\delta Z_1^\gamma - \delta Z_2^\gamma + \delta Z_V^f - \delta Z_A^f\gamma_5\right) \\ &- i\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\gamma_\mu(v_f - a_f\gamma_5)\left(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}\right)\; . \end{aligned} \tag{5.65}$$

Pour les courants faibles neutres et chargés on a des expressions analogues aux précédentes

$$\Gamma_\mu^{Zff} = i\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\gamma_\mu(v_f - a_f\gamma_5) + ie\Lambda_\mu^{Zf} \tag{5.66}$$

$$\Gamma_\mu^{CC} = i\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_w}\gamma_\mu(1-\gamma_5) + ie\Lambda_\mu^{CC} \tag{5.67}$$

et pour les vertex renormalisés

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{Zff}_{\mu} &= \Gamma^{Zff}_{\mu} + i\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\gamma_\mu(v_f - a_f\gamma_5)\left(\delta Z_1^Z - \delta Z_2^Z\right) \\
&+ ieQ_f\gamma_\mu\left(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}\right) \\
&+ i\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\gamma_\mu\left(v_f\delta Z_V^f + a_f\delta Z_A^f\right) \\
&- i\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\gamma_\mu\gamma_5\left(v_f\delta Z_A^f + a_f\delta Z_V^f\right) \qquad (5.68) \\
\hat{\Gamma}^{CC}_{\mu} &= \Gamma^{CC}_{\mu} + i\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_w}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\left(1 + \delta Z_1^W - \delta Z_2^W + \delta Z_L\right) \qquad (5.69)
\end{aligned}$$

5.3 Conditions de renormalisation on–shell

Dans les sections précédentes on a introduit plus de constantes de renormalisation que de paramètres physiques. On peut imposer des contraintes pour spécifier ces paramètres supplémentaires. Pour garder la même procédure de renormalisation qu'en QED on va imposer ces contraintes sur le propagateur du photon et des leptons chargés. On ne va pas traiter ici la renormalisation on-shell du Higgs puisqu'on ne va pas l'utiliser dans la suite.

La condition de renormalisation on–shell est donnée par

$$\Re\,\hat{\Sigma}^{WW}(m_W^2) = \Re\,\hat{\Sigma}^{ZZ}(m_Z^2) = \Re\,\hat{\Sigma}^{f}(\not{p} = m_f) = 0 \qquad (5.70)$$

et les conditions de type QED

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(0) &= 0 \qquad (5.71) \\
\frac{\partial\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(0)}{\partial k^2} &= 0 \qquad (5.72) \\
\lim_{\not{k}\to m}\frac{1}{\not{k} - m}\,\hat{\Sigma}^{f}(k)\,u_-(k) &= 0 \qquad (5.73) \\
\hat{\Gamma}^{\gamma ee}_{\mu}(k^2 = 0, \not{p} = \not{q} = m_e) &= ie\gamma_\mu \qquad (5.74)
\end{aligned}$$

où u_- est la fonction d'onde d'un quark ou d'un lepton chargé de type down ($I_3 = -1/2$). La formule (5.73) est une contrainte pour les constantes de renormalisation Z_L et Z_R^- des fermions de type gauche et droit. Z_L détermine aussi la renormalisation du champ du neutrino. Pour les quarks de type up ($I_3 = +1/2$) on a une constante supplémentaire Z_R^+.

Le terme de renormalisation de la masse d'un fermion est donné par

$$\frac{\delta m_f}{m_f} = \Sigma_V^f(m_f^2) + \Sigma_S^f(m_f^2) \tag{5.75}$$

et pour les constantes δZ_L pour le doublet et δZ_R^- pour le singulet on a

$$\begin{aligned}
\delta Z_L &= -\Sigma_L(m^2) - m^2\left(\Sigma_L'(m^2) + \Sigma_R'(m^2) + 2\Sigma_S'(m^2)\right) &(5.76)\\
\delta Z_R^- &= -\Sigma_R(m^2) - m^2\left(\Sigma_L'(m^2) + \Sigma_R'(m^2) + 2\Sigma_S'(m^2)\right) &(5.77)
\end{aligned}$$

où Σ' est la dérivée par rapport à k^2 de Σ.

Les équations (5.52-5.55) et (5.70) donnent les contre–termes de masse pour les bosons de jauge W et Z

$$\begin{aligned}
\delta m_W^2 &= \Re\,\Sigma^{WW}(m_W^2) &(5.78)\\
\delta m_Z^2 &= \Re\,\Sigma^{ZZ}(m_Z^2)\,. &(5.79)
\end{aligned}$$

La dépendance des fonctions Z dans la formule (5.56) et (5.71-5.74) conduit à

$$\begin{aligned}
\delta Z_2^\gamma &= -\Pi^\gamma(0) \equiv -\frac{\partial\Sigma^\gamma(0)}{\partial k^2}\\
\delta Z_1^\gamma &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{\sin\theta_w}{\cos\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}\\
\delta Z_2^Z &= -\Pi^\gamma(0) - 2\frac{\cos^2\theta_w - \sin^2\theta_w}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}\\
&+ \frac{\cos^2\theta_w - \sin^2\theta_w}{\sin^2\theta_w}\left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right)\\
\delta Z_1^Z &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{3\cos^2\theta_w - 2\sin^2\theta_w}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}\\
&+ \frac{\cos^2\theta_w - \sin^2\theta_w}{\sin^2\theta_w}\left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right) &(5.80)\\
\delta Z_2^W &= -\Pi^\gamma(0) - 2\frac{\cos\theta_w}{\sin\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2} + \frac{\cos^2\theta_w}{\sin^2\theta_w}\left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right)\\
\delta Z_1^W &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{3 - 2\sin^2\theta_w}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2} + \frac{\cos^2\theta_w}{\sin^2\theta_w}\left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

5.3.1 Renormalisation de la charge

La renormalisation de la charge s'obtient à partir des équations (5.37-5.37), (5.80) et de la définition de la charge électrique (4.26) :

$$e^2 = \frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} \longrightarrow \frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2}(1 + 2\delta Z_1^\gamma - 3\delta Z_2^\gamma) \equiv e^2 \left(1 + 2\frac{\delta e}{e}\right) \tag{5.81}$$

avec

$$\frac{\delta e}{e} = \delta Z_1^\gamma - \frac{3}{2}\delta Z_2^\gamma = \frac{1}{2}\Pi^\gamma(0) - \frac{\sin\theta_w}{\cos\theta_w}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{m_Z^2} \tag{5.82}$$

où l'on a utilisé l'identité de Ward

$$\delta Z_1^B = \delta Z_2^B \tag{5.83}$$

entre les constantes de renormalisation du champ et du couplage de $U(1)_Y$. La formule (5.82) montre que la correction à la valeur de la charge électrique est indépendante du fermion considéré.

5.3.2 Renormalisation de $\sin^2\theta_w$

Le contre–terme pour l'angle de Weinberg se calcule de façon semblable à δe :

$$\sin^2\theta_w = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} \longrightarrow \sin^2\theta_w + \cos^2\theta_w \left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right) \equiv \sin^2\theta_w + \delta\sin^2\theta_w \tag{5.84}$$

où

$$\sin^2\theta_w = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\,. \tag{5.85}$$

La même relation peut s'obtenir à partir du développement à une boucle de la relation entre quantités nues :

$$\sin^2\theta_{w\,0} = 1 - \frac{m_{W\,0}^2}{m_{Z\,0}^2} = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} + \frac{m_W^2}{m_Z^2}\left(\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2}\right)\,. \tag{5.86}$$

5.4 Régularisation dimensionnelle

Pour les calculs à une boucle on va utiliser la régularisation dimensionnelle. Une intégrale divergente à 4 dimensions peut devenir finie si le nombre

de dimensions de l'espace–temps est plus petit. On travaille donc à D dimensions et on calcule l'intégrale convergente. Ensuite on utilise la continuation analytique en D de l'expression obtenue. Les divergences de l'intégrale originelle à $D = 4$ sont des pôles dans l'expression analytique obtenue. Cette régularisation est utilisée pour les théories de jauge parce qu'elle préserve l'invariance de jauge et de Lorentz. Les vecteurs sont modifiés de la façon suivante :

$$p^\mu = (p^0, p^1, \ldots, p^{D-1}) \tag{5.87}$$

et le tenseur métrique

$$g^\mu_\mu = g_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} = D\ . \tag{5.88}$$

L'algèbre des matrices de Dirac est généralisée[1] à D dimensions

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = D \tag{5.89}$$
$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (2-D)\,\gamma_\nu \tag{5.90}$$
$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\rho = 4g_{\mu\nu} - (4-D)\gamma_\mu\gamma_\nu \tag{5.91}$$
$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma^\rho = -2\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu + (4-D)\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma \tag{5.92}$$
$$Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}\ , \qquad \{\gamma_5,\gamma^\mu\} = 0 \tag{5.93}$$

et la mesure d'intégration est

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \mu^{4-D} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\ . \tag{5.94}$$

avec μ un paramètre de masse, pour garder la dimension du couplage en facteur de l'intégrale indépendante de la dimension D.

Pour traiter les pôles à 4 dimensions de l'expression analytique on introduit le paramètre ϵ :

$$\epsilon = 4 - D \tag{5.95}$$

et on développe l'expression analytique en série de Laurent autour de $\epsilon = 0$. Les formules suivantes sont utiles pour le développement en série :

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{5.96}$$
$$\Gamma(-1+\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{5.97}$$

1. Pour γ_5 avec un nombre impair de dimensions la régularisation dimensionnelle pose des problèmes dans les théories avec anomalies. Ce problème ne concerne pas le modèle standard qui est une théorie sans anomalie.

avec $\gamma = 0.5772157\ldots$ la constante d'Euler, $\Gamma(x)$ la fonction d'Euler

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx \tag{5.98}$$

5.4.1 Fonctions à un et deux points

Pour les calculs des self–énergies les intégrales suivantes sont utiles

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \equiv \frac{i}{16\pi^2} A(m) \tag{5.99}$$

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)\,[(k+q)^2 - m_2^2]} \equiv \frac{i}{16\pi^2} B_0(q^2, m_1, m_2) \tag{5.100}$$

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k^2 - m_1^2)\,[(k+q)^2 - m_2^2]} \equiv \frac{i}{16\pi^2} B_\mu(q^2, m_1, m_2) \tag{5.101}$$

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_1^2)\,[(k+q)^2 - m_2^2]} \equiv \frac{i}{16\pi^2} B_{\mu\nu}(q^2, m_1, m_2) \tag{5.102}$$

Les intégrales B_μ et $B_{\mu\nu}$ peuvent s'exprimer en termes d'intégrales scalaires

$$B_\mu = q_\mu B_1(q^2, m_1, m_2) \tag{5.103}$$

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} B_{22}(q^2, m_1, m_2) + q_\mu q_\nu B_{21}(q^2, m_1, m_2)\,. \tag{5.104}$$

Les contractions des formules (5.101) avec q^μ et (5.102) avec $q^\mu q^\nu$ et $g^{\mu\nu}$ donnent des intégrales qui peuvent être écrites en termes des intégrales A et B_0 :

$$B_1(q^2, m_1, m_2) = \frac{1}{2q^2}\Big[A(m_1) - A(m_2) - (q^2 + m_1^2 - m_2^2) B_0(q^2, m_1, m_2)\Big] \tag{5.105}$$

$$B_{22}(q^2, m_1, m_2) = \frac{1}{6}\Big[A(m_2) + 2m_1^2\, B_0(q^2, m_1, m_2) + (q^2 + m_1^2 - m_2^2)\, B_1(q^2, m_1, m_2) + m_1^2 + m_2^2 - \frac{q^2}{3}\Big] \tag{5.106}$$

$$B_{21}(q^2, m_1, m_2) = \frac{1}{3q^2}\Big[A(m_2) - m_1^2\, B_0(q^2, m_1, m_2) - 2(q^2 + m_1^2 - m_2^2)\, B_1(q^2, m_1, m_2) - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{q^2}{6}\Big] \tag{5.107}$$

il ne reste qu'à calculer les intégrales scalaires A et B_0

$$A(m) = -\frac{\mu^\epsilon}{(4\pi)^{-\epsilon/2}}\frac{\Gamma(-1+\epsilon/2)}{\Gamma(1)}m^{2-\epsilon} \quad (5.108)$$

$$= m^2\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log\frac{m^2}{\mu^2} + 1\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.109)$$

$$B_0(q^2, m_1, m_2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \quad (5.110)$$

$$- \int_0^1 dx \log\frac{x^2q^2 - x(q^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\epsilon}{\mu^2}$$

et cette intégrale peut s'écrire explicitement en termes de logarithmes et d'arctangentes.

5.4.2 Fonctions à trois points

Pour le calcul des vertex on a des intégrales à trois points

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)\left[(k+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2\right]} \equiv \frac{i}{16\pi^2}C_0$$

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 - m_1^2)\left[(k+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2\right]} \equiv \frac{i}{16\pi^2}C^\mu$$

$$\mu^\epsilon \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m_1^2)\left[(k+p_1)^2 - m_2^2\right]\left[(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2\right]} \equiv \frac{i}{16\pi^2}C^{\mu\nu}$$

et en termes de structures covariantes de Lorentz

$$C^\mu = p_1^\mu\, C_{11} + p_2^\mu\, C_{12} \quad (5.111)$$

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\, C_{20} + p_1^\mu p_1^\nu\, C_{21} + p_2^\mu p_2^\nu\, C_{22} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu)\, C_{23}\ . \quad (5.112)$$

Par contractions avec les vecteurs et tenseurs disponibles on peut écrire ces intégrales en termes des fonctions à deux points et de C_0. Les coefficients vectoriels sont

$$C_{11} = \frac{1}{K}\left(p_2^2\, F_1 - p_1 \cdot p_2\, F_2\right) \quad (5.113)$$

$$C_{12} = \frac{1}{K}\left(p_1^2\, F_2 - p_1 \cdot p_2\, F_1\right) \quad (5.114)$$

avec

$$
\begin{aligned}
K &= p_1^2\, p_2^2 - (p_1 \cdot p_2)^2 && (5.115)\\
F_1 &= \frac{1}{2}\Big[B_0(p_3^2, m_1, m_3) - B_0(p_2^2, m_2, m_3) \\
&- (p_1^2 + m_1^2 - m_2^2)\, C_0\Big] && (5.116)\\
F_2 &= \frac{1}{2}\Big[B_0(p_1^2, m_1, m_2) - B_0(p_3^2, m_1, m_3) \\
&+ (p_1^2 - p_3^2 - m_2^2 - m_3^2)\, C_0\Big] && (5.117)
\end{aligned}
$$

et $p_3^2 = (p_1 + p_2)^2$. Les coefficients tensoriels sont

$$
\begin{aligned}
C_{20} &= \frac{1}{4}\Big[B_0(p_2^2, m_2, m_3) + K_1\, C_{11} + K_2\, C_{12} + 2m_1^2\, C_0 + 1\Big] && (5.118)\\
C_{21} &= \frac{1}{K}\,(p_2^2\, F_3 - p_1 \cdot p_2\, F_5) && (5.119)\\
C_{22} &= \frac{1}{K}\,(p_1^2\, F_6 - p_1 \cdot p_2\, F_4) && (5.120)\\
C_{23} &= \frac{1}{K}\,(p_1^2\, F_5 - p_1 \cdot p_2\, F_3) && (5.121)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
K_1 &= p_1^2 + m_1^2 - m_2^2 && (5.122)\\
K_2 &= p_3^2 - p_1^2 + m_2^2 - m_3^2 && (5.123)\\
F_3 &= -C_{20} - \frac{1}{2}\Big[K_1\, C_{11} - B_1(p_3^2, m_1, m_3) - B_0(p_2^2, m_2, m_3)\Big] && (5.124)\\
F_4 &= -\frac{1}{2}\Big[K_1\, C_{12} - B_1(p_3^2, m_1, m_3) + B_1(p_2^2, m_2, m_3)\Big] && (5.125)\\
F_5 &= -\frac{1}{2}\Big[K_2\, C_{11} - B_1(p_1^2, m_1, m_2) + B_1(p_3^2, m_1, m_3)\Big] && (5.126)\\
F_6 &= -C_{20} - \frac{1}{2}\Big[K_2\, C_{12} + B_1(p_3^2, m_1, m_3)\Big]\ . && (5.127)
\end{aligned}
$$

La seule intégrale nouvelle est donc C_0 qui peut s'écrire comme intégrale double

$$
C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) = -\int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} \qquad (5.128)
$$

où

$$
\begin{aligned}
a &= p_3^2 && (5.129)\\
b &= p_2^2 && (5.130)\\
c &= p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 && (5.131)\\
d &= m_3^2 - m_1^2 - p_3^2 && (5.132)\\
e &= m_2^2 - m_1^2 + p_3^2 - p_1^2 && (5.133)\\
f &= m_1^2 - i\epsilon\ . && (5.134)
\end{aligned}
$$

Pour des solutions réelles α de l'équation $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$ l'intégrale peut s'écrire comme somme sur les dilogarithmes

$$C_0 = \frac{1}{c + 2\alpha b} \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (-1)^l \left[\mathrm{Li}_2 \left(\frac{x_l}{x_l - y_{lj}} \right) - \mathrm{Li}_2 \left(\frac{x_l - 1}{x_l - y_{lj}} \right) \right] \qquad (5.135)$$

avec

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{2a + c\alpha + d}{c + 2\alpha b} && (5.136)\\
x_2 &= -\frac{d}{(1-\alpha)(c + 2\alpha b)} && (5.137)\\
x_3 &= \frac{d}{\alpha(c + 2\alpha b)} && (5.138)\\
y_{1j} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4b\,(a + d + f)}}{2b} && (5.139)\\
y_{2j} &= y_{3j} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4f\,(a + b + c)}}{2a} && (5.140)
\end{aligned}
$$

et

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \int_z^0 dt \frac{\ln(1-t)}{t} \qquad (5.141)$$

Pour plus de détails sur les dilogarimes voir par exemple
http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html

5.4.3 Exemple : self–énergie du fermion

Les intégrales calculées dans les sections précédentes permettent d'obtenir facilement la renormalisation à une boucle du modèle standard. Pour la

self–énergie du fermion on peut séparer les contributions en termes de leur structure chirale

$$-i\Sigma^f(k^2) = -i(\Sigma_V^f \not{p} + \Sigma_A^f \gamma_5 \not{p} + m\Sigma_S) = -i\left(\Sigma_L^f \not{p}\frac{1-\gamma_5}{2} + \Sigma_R^f \not{p}\frac{1-\gamma_5}{2} + m\Sigma_S\right) . \tag{5.142}$$

Deux types de contributions sont possibles, celles avec un boson de jauge et celles avec un boson scalaire :



(5.143)

Pour la contribution d'un boson de jauge on a

$$\begin{aligned} -i\Sigma^f(p^2)_{\text{vecteur}} &= g_{\mu\nu}\,\mu^\epsilon \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{i}{(k+p)^2-m^2}\frac{i}{k^2-M^2} \\ &\times \gamma^\mu(v-a\gamma_5)(\not{k}+\not{p}+m)\gamma^\nu(v-a\gamma_5) . \end{aligned} \tag{5.144}$$

En utilisant les formules de la section précédente on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma^f(p^2)_{\text{vecteur}} &= \frac{1}{16\pi^2p^2}\Big(A(M)-A(m)+(p^2+m^2-M^2)\,B_0(p^2,m,M)\Big) \\ &\times \not{p}\left[(v+a)^2\frac{1-\gamma_5}{2}+(v-a)^2\frac{1+\gamma_5}{2}\right] \\ &- 4m(v^2-a^2)B_0(p^2,m,M) . \end{aligned} \tag{5.145}$$

Par exemple en utilisant la formule générale (5.145) dans le cas des corrections de $W^\pm$ et Z à la self–énergie de l'électron, dans la limite $m_e \ll m_W, m_Z$ on trouve

$$\begin{aligned} \Sigma_L^e(0) &= \frac{\alpha}{4\pi}\Big[\frac{1}{2\sin^2\theta_w}\left(\frac{1}{2}+\log\frac{m_W^2}{\mu^2}\right) \\ &+ \frac{(1-2\sin^2\theta_w)^2}{4\sin^2\theta_w\cos^2\theta_w}\left(\frac{1}{2}+\log\frac{m_Z^2}{\mu^2}\right)\Big] \end{aligned} \tag{5.146}$$

$$\Sigma_R^e(0) = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\sin^2\theta_w}{\cos^2\theta_w}\left(\frac{1}{2}+\log\frac{m_Z^2}{\mu^2}\right) . \tag{5.147}$$

5.5 Solution des exercices

Exercice A

Il faut utiliser les propriétés d'anticommutation des variables de Grassmann et l'antisymétrie de la constante de structure ϵ^{abc} de $SU(2)$. Pour le champ de jauge :

$$\begin{aligned} Q^2 A^a_\mu &= Q\left(Q A^a_\mu\right) = Q\left(\partial_\mu \sigma^a - g\epsilon^{abc}\sigma^b A^c_\mu\right) \\ &= \partial_\mu\left(Q\sigma^a\right) - g\epsilon^{abc}\left(Q\sigma^b\right)A^c_\mu + g\epsilon^{abc}\sigma^b\left(Q A^c_\mu\right) \end{aligned} \tag{5.148}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu\left(Q\sigma^a\right) &= \partial_\mu\left(-\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c\right) = -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}[(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c + \sigma^b\partial_\mu\sigma^c] \\ &= -g\epsilon^{abc}(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c \end{aligned} \tag{5.149}$$

$$-g\epsilon^{abc}\left(Q\sigma^b\right)A^c_\mu = g\epsilon^{abc}\left(\frac{g}{2}\epsilon^{bef}\sigma^e\sigma^f\right)A^c_\mu \tag{5.150}$$

$$g\epsilon^{abc}\sigma^b\left(Q A^c_\mu\right) = g\epsilon^{abc}\sigma^b\left(\partial_\mu\sigma^c - g\epsilon^{cef}\sigma^e A^f_\mu\right) . \tag{5.151}$$

La somme des termes des équations (5.149-5.151) donne

$$Q^2 A^a_\mu = \frac{g^2}{2}\epsilon^{abc}\epsilon^{bef}\sigma^e\sigma^f A^c_\mu - g^2\epsilon^{abc}\epsilon^{cef}\sigma^b\sigma^e A^f_\mu . \tag{5.152}$$

Le deuxième terme de l'équation précédente peut s'écrire, après changement des noms des indices

$$\begin{aligned} g^2\epsilon^{aec}\epsilon^{cbf}\sigma^e\sigma^b A^f_\mu &= \frac{g^2}{2}\left(\epsilon^{abc}\epsilon^{cef} - \epsilon^{aec}\epsilon^{cbf}\right)\sigma^b\sigma^e A^f_\mu \\ &= -\frac{g^2}{2}\epsilon^{bec}\epsilon^{acf}\sigma^b\sigma^e A^f_\mu = -\frac{g^2}{2}\epsilon^{feb}\epsilon^{abc}\sigma^f\sigma^e A^c_\mu \end{aligned} \tag{5.153}$$

où l'on a utilisé l'identité de Jacobi

$$\epsilon^{abc}\epsilon^{cef} - \epsilon^{aec}\epsilon^{cbf} = -\epsilon^{bec}\epsilon^{acf} . \tag{5.154}$$

L'équation (5.152) peut s'écrire avec (5.153)

$$Q^2 A^a_\mu = 0 . \tag{5.155}$$

Pour le fermion

$$\begin{aligned} Q^2\psi &= Q\left(igT^a\sigma^a\psi\right) = igT^a(Q\sigma^a)\psi - igT^a\sigma^a Q\psi \\ &= igT^a\left(-\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c\right)\psi - igT^a\sigma^a(igT^b\sigma^b\psi) \end{aligned} \tag{5.156}$$

et le deuxième terme de l'équation précédente peut s'écrire

$$g^2T^aT^b\sigma^a\sigma^b\psi = \frac{g^2}{2}\left[T^a,T^b\right]\sigma^a\sigma^b\psi = i\frac{g^2}{2}T^c\sigma^a\sigma^b\psi \tag{5.157}$$

ce qui montre que $Q^2\psi = 0$. Pour le ghost σ

$$\begin{aligned} Q^2\sigma^a &= Q\left(-\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c\right) = -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\left[(Q\sigma^b)\,\sigma^c - \sigma^b\,(Q\sigma^c)\right] \\ &= -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\left[\left(-\frac{g}{2}\epsilon^{bef}\sigma^e\sigma^f\right)\sigma^c - \sigma^b\,\left(-\frac{g}{2}\epsilon^{cef}\sigma^e\sigma^f\right)\right] \\ &= \frac{g^2}{4}\epsilon^{abc}\epsilon^{bef}\left(\sigma^e\sigma^f\sigma^c - \sigma^c\sigma^e\sigma^f\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{5.158}$$

Pour le ghost ρ il est nécessaire d'utiliser l'équation du mouvement pour σ

$$\partial^\mu\partial_\mu\sigma^a = g\epsilon^{abc}\partial^\mu(\sigma^b A^c_\mu) \tag{5.159}$$

qu'on peut obtenir à partir du lagrangien. On a

$$Q^2\rho^a = Q\left(-\frac{i}{\xi}\partial^\mu A^a_\mu\right) = -\frac{i}{\xi}\partial^\mu(QA^a_\mu) = -\frac{i}{\xi}\partial^\mu(\partial_\mu\sigma^a - g\epsilon^{abc}\sigma^b A^c_\mu) = 0\,. \tag{5.160}$$

5.6 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

W. Hollik
Standard Model Theory
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9811313

Livres :

J.C. Collins
Renormalization
Cambridge

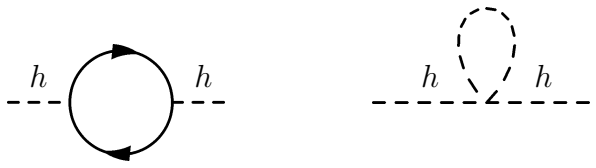
Chapitre 6

Supersymétrie

Le modèle standard constitue une description remarquable des phénomènes physiques jusqu'à l'échelle de 100 GeV environ. Si on se pose la question d'aller au delà de cette description de "basse" énergie un problème se pose. Le modèle standard est bien sûr consistant, mais si on essaye de l'étendre à haute énergie, par exemple jusqu'à échelle de Planck $M_P = (8\pi G_{Newton})^{-1/2} = 2.4 \times 10^{18}$ GeV où les effets quantiques de la gravitation deviennent importants, les corrections quantiques au secteur scalaire de la théorie sont très grandes. Vu que la masse du boson de Higgs est un paramètre libre dans le modèle standard le problème peut être résolu par un choix très précis de ce paramètre ("fine–tuning" en anglais). Mais un tel choix n'est pas "naturel" et représente un aspect de la difficulté d'expliquer le problème de la hiérarchie entre des masses très différentes, M_W et M_P, séparées par 16 ordres de grandeur. Plusieurs solutions au problème ont été proposées. Une solution partielle consiste à éliminer le secteur scalaire qui pose problème et à le remplacer par une brisure dynamique de la symétrie électrofaible. Dans ce cas les scalaires sont en général des états liés de fermions et à haute énergie les corrections quantiques sont modifiées par rapport à un scalaire fondamental par des facteurs de forme. Ces modèles sont souvent à couplage fort et une étude détaillée en théorie des perturbations n'est pas possible; de plus il n'y a pas pour l'instant un modèle dynamique complet mais une multitude de modèles.

Une autre option consiste à compenser les corrections dues aux boucles du

secteur scalaire de façon systématique par la contribution d'autres particules.



(6.1)

La contribution de la boucle fermionique de la formule (6.1) à la masse du boson de Higgs, en supposant un couplage usuel du scalaire aux fermions $y_f h\bar{\psi}\psi$, est

$$\Delta m_h^2 = -\frac{y_f^2}{16\pi^2}\left(2\Lambda^2 + 6m_f^2\log(\Lambda/m_f) + \ldots\right) \tag{6.2}$$

avec Λ un cut–off ultraviolet de l'ordre de l'échelle de la nouvelle physique au delà du modèle standard. La contribution de la boucle avec un champ scalaire est

$$\Delta m_h^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2}\left(\Lambda^2 - 2m_S^2\log(\Lambda/m_S) + \ldots\right) . \tag{6.3}$$

Dans les deux cas si l'échelle de la nouvelle physique n'est pas proche de l'échelle électrofaible les corrections sont plus grandes que la masse de départ. Par exemple si on suppose le modèle standard valable jusqu'à l'échelle de Planck ces corrections sont 10^{30} fois plus grandes que l'échelle électrofaible qui constitue une valeur raisonnable pour la masse du boson de Higgs ($m_h^2 \sim (100\text{GeV})^2$). Pour éliminer ces contributions Δm_h^2, l'idée de base est d'utiliser des fermions qui donnent un signe négatif aux contributions dues aux boucles. Pour rendre systématique cette compensation on doit introduire une symétrie qui relie les bosons et les fermions, la supersymétrie. Si chaque fermion a deux partenaires scalaires avec $\lambda_S = y_f^2$ les contributions en Λ^2 à Δm_h^2 se compensent.

Une transformation de supersymétrie transforme un boson $|s\rangle$ en fermion $|f\rangle$ et vice versa :

$$Q\,|s\rangle = |f\rangle \qquad\qquad Q\,|f\rangle = |s\rangle\ . \tag{6.4}$$

Les générateurs Q et $Q^\dagger$ sont des opérateurs fermioniques avec spin $1/2$ et donc les transformations de supersymétrie sont forcément des symétries de l'espace–temps. L'algèbre de la supersymétrie fera donc intervenir aussi les générateurs de l'algèbre de Poincaré.

En réalité le problème de la hiérarchie entre M_W et M_P va se poser en supersymétrie sous d'autres formes. Une solution possible consiste à considérer des théories à $D > 4$ dimensions avec des dimensions supplémentaires compactifiées. $M_P(D)$ peut dans ce cas être proche de M_W même si $M_P(4)$ reste séparé par 16 ordres de grandeur, mais ici aussi on n'a pas pour l'instant une théorie complètement satisfaisante.

Dans ce chapitre on se limitera à une introduction à la supersymétrie dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM). Ce modèle est souvent considéré comme le paradigme de la supersymétrie, mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'un modèle possible parmi beaucoup d'autres. L'importance de la supersymétrie est due pour l'instant à des motivations purement théoriques puisqu'aucune particule supersymétrique a été observée. La raison pour l'étudier en détail est que la supersymétrie a un rôle fondamental dans la plupart des modèles de physique au delà du modèle standard (supergravité, théorie des cordes, etc.)

6.1 L'algèbre supersymétrique

En théorie des champs les symétries continues globales sont générées par des transformations vérifiant

$$\delta_a \phi = i\theta \, [Q_a, \phi] \tag{6.5}$$

où θ est un paramètre infinitésimal, Q_a est la charge obtenue avec le théorème de Noether et les générateurs forment une algèbre de Lie

$$[Q_a, Q_b] = i c_{abc} Q_c \; . \tag{6.6}$$

Le théorème de Coleman et Mandula prouve que tous les générateurs, à l'exclusion des générateurs du groupe de Poincaré, pour une symétrie qui forme un groupe de Lie avec paramètres réels doivent avoir spin zéro. Ce résultat semble exclure la possibilité d'introduire dans l'algèbre de Poincaré d'autres générateurs avec spin, comme les générateurs des transformations de supersymétrie, puisque le théorème implique que les nouveaux générateurs commutent avec le groupe de Poincaré.

Une possibilité pour construire des multiplets irréductibles avec des spins différents est de généraliser l'algèbre de Lie avec des relations d'anticommutation. On parle dans ce cas d'une algèbre de Lie graduée ou superalgèbre.

On introduit une charge de spin 1/2

$$Q = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{Q} = \left(Q^\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right) \tag{6.7}$$

avec Q_α un spineur de Weyl ($\alpha = 1, 2$) et $\bar{Q} = Q^\dagger \gamma^0$, $Q^\dagger_\alpha = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Les relations de commutation avec les éléments de l'algèbre de Poincaré sont

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta & (6.8)\\
\left[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} & (6.9)\\
[Q_\alpha, P_\mu] &= 0 & (6.10)\\
\left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu\right] &= 0 & (6.11)
\end{aligned}$$

et celles d'anticommutation pour les générateurs de spin 1/2 ont la forme

$$\begin{aligned}
\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu & (6.12)\\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0\,. & (6.13)
\end{aligned}$$

Cette superalgèbre contient l'algèbre de Poincaré comme sous–algèbre. Si on introduit les opérateurs de Casimir pour le groupe de Poincaré, la masse $P^2 = P_\mu P^\mu$ et l'opérateur de spin $W^2 = W_\mu W^\mu$ avec

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \tag{6.14}$$

le vecteur de Pauli–Lubanski, on peut vérifier que

$$\begin{aligned}
\left[Q_\alpha, P^2\right] &= 0 & (6.15)\\
\left[Q_\alpha, W^2\right] &\neq 0 & (6.16)
\end{aligned}$$

c'est–à–dire que les multiplets de la supersymétrie contiennent des particules de spins différents mais de la même masse.

Une première remarque importante est qu'on n'observe pas cette dégénérescence en masse entre particules de spins différents. Si la supersymétrie est présente, elle doit être une symétrie brisée. Une deuxième conséquence des propriétés de l'algèbre concerne le spectre en énergie. La formule (6.12) implique

$$(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 4P^\nu \tag{6.17}$$

où l'on a utilisé la relation

$$\mathrm{tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu} \tag{6.18}$$

La composante $\nu = 0$ de la formule (6.17) permet d'écrire

$$\begin{aligned} 4\langle\psi|P^0|\psi\rangle &= \langle\psi|Q_1\bar{Q}_{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 + Q_2\bar{Q}_{\dot{2}} + \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|Q_\alpha(Q_\alpha)^* + (Q_\alpha)^*Q_\alpha|\psi\rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

avec

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv \psi^*_\alpha \qquad \chi^\alpha \equiv (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^* \; . \tag{6.20}$$

L'équation (6.19) implique que dans une théorie supersymétrique l'énergie d'un état qui n'est pas le vide est positive. La structure du vide est aussi affecté par ce résultat. Pour un état supersymétrique invariant

$$Q_\alpha|0\rangle = 0 \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle = 0 \tag{6.21}$$

l'énergie est

$$E_{vide} = 0 \tag{6.22}$$

et constitue un minimum absolu. Donc si un tel état supersymétrique existe, il est l'état de vide. La supersymétrie est une symétrie exacte si et seulement si $E_{vide} = 0$.

Par contre si un tel état invariant n'existe pas

$$Q_\alpha|0\rangle \neq 0 \quad \text{et/ou} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle \neq 0 \tag{6.23}$$

on a

$$E_{vide} > 0 \tag{6.24}$$

et la supersymétrie est spontanément brisée si et seulement si l'énergie du vide est plus grande que zéro. Ceci implique que si un vide invariant sous supersymétrie existe comme minimum local, ce minimum est aussi le minimum global.

Une valeur dans le vide non nulle pour un champ scalaire n'implique pas forcément la brisure de la supersymétrie. Une symétrie interne est brisée par cette condition mais si la valeur de l'énergie du vide est zéro la supersymétrie ne peut pas être brisée.

La formule (6.12) a une autre conséquence importante, les représentations irréductibles de l'algèbre supersymétrique contiennent un nombre de degrés

de liberté fermioniques égal à celui des degrés de liberté bosoniques. Les charges Q_α changent le nombre fermionique d'une unité. On peut écrire

$$(-1)^{N_F}\, Q_\alpha = -Q_\alpha\, (-1)^{N_F} \tag{6.25}$$

où N_F est l'opérateur nombre fermionique. Pour une représentation R de dimension finie de l'algèbre on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,[(-1)^{N_F}\,\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}] = \mathrm{tr}\,[-Q_\alpha\,(-1)^{N_F}\,\bar{Q}_{\dot\beta} + (-1)^{N_F}\,\bar{Q}_{\dot\beta}\,Q_\alpha] \\ &= \mathrm{tr}\,[-Q_\alpha\,(-1)^{N_F}\,\bar{Q}_{\dot\beta} + Q_\alpha\,(-1)^{N_F}\,\bar{Q}_{\dot\beta}] = 0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

et l'équation (6.12) implique

$$2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,\mathrm{tr}[(-1)^{N_F}\,P_\mu] = 0 \tag{6.27}$$

d'où

$$\mathrm{tr}(-1)^{N_F} = 0 \tag{6.28}$$

pour P_μ non nul. Puisque $(-1)^{N_F}$ vaut -1 sur un état fermionique et $+1$ sur un état bosonique, on a

$$n_B(R) - n_F(R) = 0 \tag{6.29}$$

avec $n_{B(F)}(R)$ le nombre de bosons (fermions) dans la représentation R. On a donc le même nombre de degrés de liberté fermioniques et bosoniques.

6.1.1 Supermultiplets

Pour construire des théories supersymétriques il est nécessaire d'examiner les multiplets de champs qui sont des représentations de l'algèbre supersymétrique.

Pour des particules sans masse $W^2 = P^2 = 0$ et on peut décrire les particules en termes de l'hélicité λ et de l'impulsion $p^\mu = (E, 0, 0, E)$. On peut choisir l'état $|\lambda, p\rangle$ tel que

$$Q_\alpha|\lambda, p\rangle = 0 \qquad (\alpha = 1, 2)\ . \tag{6.30}$$

Si cette relation n'est pas satisfaite on peut toujours construire l'état

$$|\lambda', p\rangle \equiv Q_\alpha\,|\lambda, p\rangle \tag{6.31}$$

tel que

$$Q_\alpha|\lambda', p\rangle = 0 \tag{6.32}$$

à cause de la relation $Q_\alpha Q_\alpha = 0$ (sans somme sur α) qu'on peut déduire de la formule (6.13). La construction des état du multiplet à partir de l'état "maximal" $|\lambda, p\rangle$ peut se faire à l'aide des charges Q de manière semblable aux multiplets de spin avec l'opérateur de moment cinétique. Les seuls états possibles sont

$$\bar{Q}_{\dot\alpha}|\lambda, p\rangle \qquad (\dot\alpha = 1, 2)\ . \tag{6.33}$$

L'état $\bar{Q}_{\dot 1}|\lambda, p\rangle$ n'est pas acceptable parce que sa norme est zéro. Pour le prouver servions nous de (6.12)

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}|\lambda, p\rangle = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\, p_\mu|\lambda, p\rangle \tag{6.34}$$

avec $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ on a

$$\sigma^\mu p_\mu = E(\sigma^0 - \sigma^3) = 2E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ . \tag{6.35}$$

La formule (6.34) implique donc

$$\langle\lambda, P|Q_1\bar{Q}_{\dot 1}|\lambda, p\rangle = 0 \tag{6.36}$$

et

$$\bar{Q}_{\dot 1}|\lambda, p\rangle = 0\ . \tag{6.37}$$

L'autre état qu'on peut construire est

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}}\,\bar{Q}_{\dot 2}|\lambda, p\rangle = -\frac{1}{\sqrt{4E}}\,\bar{Q}^{\dot 1}|\lambda, p\rangle\ . \tag{6.38}$$

Cet état est normalisé et correspond à une hélicité $\lambda - 1/2$. Pour le prouver on considère l'action du vecteur de Pauli–Lubanski (6.14)

$$[W_\mu, \bar{Q}^{\dot\alpha}] = -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu(\bar\sigma^{\rho\sigma})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\bar{Q}^{\dot\beta} \tag{6.39}$$

sur $|\lambda, p\rangle$

$$[W_0, \bar{Q}^{\dot\alpha}]\,|\lambda, p\rangle = -\frac{1}{2}p_0\,(\sigma^3\bar{Q})^{\dot\alpha}\,|\lambda, p\rangle \tag{6.40}$$

et puisque pour une particule de masse nulle

$$W_\mu|\lambda, p\rangle = \lambda p_\mu\,|\lambda, p\rangle \tag{6.41}$$

on trouve

$$W_0\left(\bar{Q}^{\dot{1}}|\lambda,p\rangle\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) p_0\left(\bar{Q}^{\dot{1}}|\lambda,p\rangle\right) \tag{6.42}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\sqrt{4E}}\,\bar{Q}_{\dot{2}}|\lambda,p\rangle \equiv |\lambda - 1/2, p\rangle\ . \tag{6.43}$$

On a donc seulement deux états, un fermion et un boson. Dans le cas $\lambda = 1/2$ on a un fermion de Weyl et un scalaire. Pour construire une théorie invariante de Lorentz on doit inclure aussi la représentation conjuguée de CPT, avec un autre scalaire et un fermion de Weyl avec hélicité $\lambda = -1/2$. Ces deux représentations peuvent s'écrire sous la forme d'un spineur de Majorana et deux scalaires. Ce supermultiplet chiral sera utilisé dans la construction du modèle standard supersymétrique. D'autres supermultiplets qu'on va rencontrer dans les applications sont ceux avec $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. De façon semblable

Particule	Hélicité	Hélicité CPT	Supermultiplet
fermion, higgsino	1/2	-1/2	chiral
sfermion, Higgs	0	0	
Boson de jauge	1	-1	vecteur
gaugino	1/2	-1/2	
graviton	2	-2	gravité
gravitino	3/2	-3/2	

Tab. 6.1 – Les supermultiplets de la supersymétrie avec un seul générateur fermionique ($N = 1$) et $\lambda = 1/2, 1, 2$.

on peut construire des multiplets avec masse. Pour une particule avec masse on ne peut plus utiliser l'hélicité mais on doit considérer le spin et une de ses projections.

6.1.2 Supersymétrie étendue

On a étudié les conséquences de l'extension supersymétrique la plus simple de l'algèbre de Poincaré, avec un seul générateur fermionique Q_α. On peut facilement généraliser notre étude au cas de plusieurs charges supersymétriques Q^A_α avec $A = 1, \dots N$ un indice d'un groupe de symétrie interne. L'algèbre ne se modifie pas, sauf par la présence de l'indice A, au niveau des commutateurs avec les générateurs de l'algèbre de Poincaré

$$\begin{aligned}
\left[M_{\mu\nu}, Q^A_\alpha\right] &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \, Q^A_\beta && (6.44)\\
\left[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^A_{\dot\alpha}\right] &= -\frac{1}{2}(\bar\sigma_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \, \bar{Q}^A_{\dot\beta} && (6.45)\\
\left[Q^A_\alpha, P_\mu\right] &= 0 && (6.46)\\
\left[\bar{Q}^A_{\dot\alpha}, P_\mu\right] &= 0\,. && (6.47)
\end{aligned}$$

Par contre les relations d'anticommutation pour les générateurs de spin 1/2 sont modifiées

$$\begin{aligned}
\left\{Q^A_\alpha, \bar{Q}^B_{\dot\beta}\right\} &= 2\delta^{AB}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \, P_\mu && (6.48)\\
\left\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\right\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{AB}\,, && (6.49)
\end{aligned}$$

où $Z^{AB} = -Z^{BA}$ est une combinaison linéaire des générateurs de la symétrie interne appelée la charge centrale puisqu'elle commute avec tous les autres générateurs (Z^{AB} appartient à la sous–algèbre Abélienne du groupe interne de la symétrie).

Si la charge centrale est absente, le groupe de symétrie interne est $U(N)$ puisque l'algèbre est invariante par rotation avec une matrice unitaire. La présence des charges centrales réduit cette symétrie. Dans le cas $N = 1$ on ne peut pas avoir une charge centrale à cause de la propriété d'antisymétrie $Z^{AB} = -Z^{BA}$.

La présence de plusieurs supersymétries à comme effet d'augmenter le nombre de champs dans les multiplets, par exemple en l'absence des charges centrales si on commence avec une particule sans masse d'hélicité λ on obtient N états d'hélicité $\lambda - 1/2$ parce que l'analyse faite pour $N = 1$ s'applique pour chacune de N charges. Des exemples de multiplets sans masse pour $N = 2$ sont donnés dans la table. On peut remarquer que pour $N = 2$ (mais ceci reste vrai en général pour $N \geq 2$) on n'a pas de multiplets chiraux,

λ	Hélicité	Hélicité CPT	Multiplicité	Supermultiplet
1/2	1/2	–	1	
	0	–	2	hypermultiplet
	-1/2	–	1	
1	1	-1	1	
	1/2	-1/2	2	vecteur
	0	0	1	
2	2	-2	1	
	3/2	-3/2	2	gravité
	1	-1	1	

Tab. 6.2 – Les supermultiplets $N = 2$ sans charge centrale et avec $\lambda = 1/2, 1, 2$.

mais on a un hypermultiplet qui est son propre conjugué sous CPT, avec un fermion de Majorana (les deux fermions de Weyl) et deux scalaires. Le fait d'avoir dans le même multiplet une structure invariante de Lorentz est un désavantage du point de vue de la phénoménologie puisqu'on est obligé de faire transformer ces champs de la même façon par rapport à une symétrie de jauge. Les interactions faibles ne sont par contre pas les mêmes pour les composantes gauches et droites des fermions. Pour cette raison seule la supersymétrie $N = 1$ joue un rôle dans les modèles à basse énergie.

6.2 Le multiplet chiral

6.2.1 Lagrangien du multiplet chiral

La plus simple théorie supersymétrique qu'on peut construire consiste en un fermion de Weyl à deux composantes et, pour avoir le même nombre de

degrés de liberté bosoniques[1], un champ scalaire complexe

$$\mathcal{L} = -i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi \; . \tag{6.50}$$

Sous transformation de supersymétrie le scalaire devient un fermion

$$\delta\phi = \epsilon\psi \, , \qquad\qquad \delta\phi^* = \epsilon^\dagger \psi^\dagger \tag{6.51}$$

ϵ étant un paramètre infinitésimal, anticommutant avec deux composantes de Weyl. Avec les transformations (6.51), la variation de la partie scalaire du lagrangien (6.50) est

$$\delta\mathcal{L}_{\rm s} = -\epsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* - \epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi \; . \tag{6.52}$$

La transformation du champ fermionique doit permettre de compenser la variation du lagrangien scalaire. Il nous faut une variation $\delta\psi$ linéaire en ϕ, $\epsilon^\dagger$ et la dérivée :

$$\delta\psi_\alpha = i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi \, , \qquad\qquad \delta\psi^\dagger_{\dot\alpha} = -i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha} \partial_\mu \phi^* \; . \tag{6.53}$$

La variation correspondante du lagrangien fermionique est

$$\delta\mathcal{L}_{\rm f} = \psi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \partial_\nu \phi - \epsilon \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu \phi^* \tag{6.54}$$

et avec les identités pour les matrices de Pauli

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\beta_\alpha = -2g^{\mu\nu}\delta^\beta_\alpha \, , \qquad\qquad (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot\beta}_{\dot\alpha} = -2g^{\mu\nu}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \tag{6.55}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\rm f} &= \epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi + \epsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* \\ &- \partial_\mu \left(\epsilon \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi \partial_\nu \phi + \epsilon \psi \partial^\mu \phi^* + \epsilon^\dagger \psi^\dagger \partial^\mu \phi \right) \end{aligned} \tag{6.56}$$

et conclure que

$$\delta S = \int d^4x \; (\delta\mathcal{L}_{\rm f} + \delta\mathcal{L}_{\rm s}) = 0 \; . \tag{6.57}$$

1. Un fermion de Weyl a deux polarisations de spin et donc deux degrés de liberté sur sa couche de masse (on–shell). En général, si on n'impose pas la condition on–shell, le fermion de Weyl est un objet avec deux composantes complexes et donc 4 degrés de liberté.

Il reste à vérifier que l'algèbre des transformations (6.51) et (6.53) soit fermée, c'est à dire que le commutateur de deux transformations de symétrie appartienne à la superalgèbre. Pour les scalaires :

$$[\delta_1, \delta_2]\,\phi = i(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)\partial_\mu\phi \tag{6.58}$$

le commutateur étant proportionnel à la dérivée et donc à l'impulsion, un élément de l'algèbre. Pour les fermions

$$[\delta_1, \delta_2]\,\psi_\alpha = i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\epsilon_2\partial_\mu\psi - i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_\alpha\epsilon_1\partial_\mu\psi\ . \tag{6.59}$$

Les identités de Fierz

$$\chi_\alpha(\xi\eta) = -\xi_\alpha(\eta\chi) - \eta_\alpha(\chi\xi) \tag{6.60}$$

avec $\chi = \sigma^\mu\epsilon_1^\dagger$, $\eta = \partial_\mu\psi$, $\xi = \epsilon_2$ et $\chi = \sigma^\mu\epsilon_2^\dagger$, $\eta = \partial_\mu\psi$, $\xi = \epsilon_1$ suivies de l'utilisation des identités

$$\begin{aligned} \xi\chi &\equiv \xi^\alpha\chi_\alpha = \xi^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}\chi_\beta = -\chi_\beta\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \chi_\beta\epsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha = \chi^\beta\xi_\beta \equiv \chi\xi \\ \xi^\dagger\bar\sigma^\mu\chi &= -\chi\sigma^\mu\xi^\dagger = (\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\xi)^* = -(\xi\sigma^\mu\chi^\dagger)^* \end{aligned} \tag{6.61}$$

permettent d'écrire

$$[\delta_1, \delta_2]\,\psi_\alpha = i(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)\,\partial_\mu\psi_\alpha + i\epsilon_{1\alpha}\epsilon_2^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - i\epsilon_{2\alpha}\epsilon_1^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi\ . \tag{6.62}$$

Les deux premier termes à droite sont de la forme requise par les transformations de supersymétrie, les deux termes restants sont zéro sur la couche de masse (on–shell) à cause des équations du mouvement

$$\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi = 0\ . \tag{6.63}$$

La supersymétrie est donc valable seulement on–shell et la raison en est la non correspondance off–shell entre le nombre des bosons et celui des fermions. Pour avoir une supersymétrie valable aussi off–shell on peut introduire dans le lagrangien un champ scalaire complexe F sans terme cinétique (champ auxiliaire) :

$$\mathcal{L}_{\rm aux} = F^*F \tag{6.64}$$

avec des transformations de supersymétrie

$$\delta F = i\epsilon^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi\,, \qquad \delta F^* = -i\partial_\mu\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\epsilon \tag{6.65}$$

qui donnent pour le lagrangien

$$\delta\mathcal{L}_{\rm aux} = i\epsilon^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi F^* - i\partial_\mu\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\epsilon F\ . \tag{6.66}$$

Cette variation est nulle on–shell à cause des équations du mouvement $F = F^* = 0$. Off–shell on peut exploiter cette variation pour construire un lagrangien invariant, avec une modification des transformations sous supersymétrie pour les fermions

$$\delta\psi_\alpha = i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\partial_\mu\phi + \epsilon_\alpha F\,, \qquad \delta\psi^\dagger_{\dot\alpha} = -i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu\phi^* + \epsilon^\dagger_{\dot\alpha}F^*\ . \tag{6.67}$$

On peut vérifier que ces transformations, pour les champs $\Phi = \phi$, ϕ^*, ψ, $\psi^\dagger$, F, F^* donnent

$$[\delta_1, \delta_2]\,\Phi = i(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)\partial_\mu\Phi \tag{6.68}$$

sans faire référence aux équations du mouvement. L'utilisation des champs auxiliaires sera importante dans la discussion de la brisure de la supersymétrie.

6.2.2 Interactions du multiplet chiral

Le supermultiplet chiral est à la base de la construction du modèle standard supersymétrique. Dans la section précédente on a écrit la partie libre du lagrangien. En général on utilisera plusieurs de ces multiplets et on ajoutera des termes d'interaction.

On a un lagrangien libre de la forme

$$\mathcal{L}_{\rm libre} = -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i - i\psi^{\dagger i}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i + F^{*i}F_i \tag{6.69}$$

où i est un indice sur les degrés de liberté de jauge et de la saveur. Les transformations supersymétrique qui laissent invariant ce lagrangien sont

$$\begin{array}{ll} \delta\phi_i = \epsilon\psi_i & \delta\phi^{*i} = \epsilon^\dagger\psi^{i\dagger} \\ \delta(\psi_i)_\alpha = i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\partial_\mu\phi_i + \epsilon_\alpha F_i & \delta(\psi^{i\dagger})_{\dot\alpha} = -i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu\phi^{*i} + \epsilon^\dagger_{\dot\alpha}F^{*i} \\ \delta F_i = i\epsilon^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_i & \delta F^{*i} = -i\partial_\mu\psi^{i\dagger}\bar\sigma^\mu\epsilon\ . \end{array} \tag{6.70}$$

On va maintenant montrer que le terme d'interaction invariant sous les transformations de supersymétrie et renormalisable est de la forme

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -\frac{1}{2}W^{ij}\psi_i\psi_j + W^iF_i + \text{c.c.} \tag{6.71}$$

avec W^{ij} et W^i des fonctions des champs bosoniques ayant respectivement une dimension de masse et de masse au carré. La propriété $\xi\chi = \chi\xi$ pour les spineurs implique que W^{ij} doit être symétrique par rapport à ses indices. W^{ij} et W^i ne sont pas fonctions des champs fermioniques afin de limiter la dimension de masse à 4. On ne peut pas non plus introduire des termes d'interaction purement bosoniques dans les champs ϕ_i et ϕ^{*i} parce qu'il serait impossible de compenser leur variation sous une transformation de supersymétrie. Le lagrangien d'interaction (6.71) est le plus général possible, mais il reste à imposer l'invariance de ce terme par rapport aux transformations de supersymétrie. On peut analyser séparément les différentes parties de ce lagrangien. La transformation de la partie qui contient quatre spineurs est

$$\delta\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi_k}(\epsilon\psi_k)(\psi_i\psi_j) - \frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi^{*k}}(\epsilon^\dagger\psi^{k\dagger})(\psi_i\psi_j) + \text{c.c.} \tag{6.72}$$

Pour le premier terme de droite on peut utiliser l'identité de Fierz

$$(\epsilon\psi_i)(\psi_j\psi_k) + (\epsilon\psi_j)(\psi_k\psi_i) + (\epsilon\psi_k)(\psi_i\psi_j) = 0 \tag{6.73}$$

qui implique qu'on peut avoir une variation nulle si $\delta W^{ij}/\delta\phi_k$ est symétrique dans les indices i, j, k. Pour le deuxième terme de droite une identité semblable n'est pas disponible et la seule possibilité pour avoir une interaction invariante est d'éliminer complètement les champs ϕ^{*k} du terme W^{ij}, qui est donc analytique (holomorphe) dans le champ complexe ϕ_k. On peut écrire

$$W^{ij} = m^{ij} + y^{ijk}\phi_k \tag{6.74}$$

m^{ij} étant la matrice symétrique de masse et y^{ijk} les couplages de Yukawa.

La partie du lagrangien d'interaction qui contient des dérivées a une variation sous les transformations de supersymétrie telle que

$$\delta\mathcal{L}_{\text{der}} = -iW^{ij}\partial_\mu\phi_j\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger - iW^i\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger + \text{c.c.} \tag{6.75}$$

Si on définit

$$W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_i\delta\phi_j}\,, \qquad W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i} \tag{6.76}$$

en observant que

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right) \tag{6.77}$$

on peut vérifier que la variation (6.75) est une dérivée totale à condition que

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i} = m^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k \; . \tag{6.78}$$

Les relations (6.74) et (6.78) nous amène à définir le superpotentiel[2]

$$W = \frac{1}{2}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \tag{6.79}$$

qui est une fonction analytique des champs complexes ϕ_i. Les variations restantes de $\mathcal{L}_{\rm int}$ sont linéaires en F_i ou F^{*i} et s'annulent. Les équations du mouvement pour le lagrangien avec les termes d'interaction sont

$$F_i = -W_i^* \, , \qquad\qquad F^{*i} = -W^i \; . \tag{6.80}$$

On peut les utiliser pour écrire le lagrangien sans employer les champs auxiliaires

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i - i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}\left(W^{ij}\psi_i\psi_j + W^*_{ij}\psi^{i\dagger}\psi^{j\dagger}\right) - W^iW_i^* \tag{6.81}$$

où le potentiel scalaire de la théorie est donné par

$$\begin{aligned} V &= W^iW_i^* = F_iF^{*i} = m^*_{ik}m^{kj}\phi^{*i}\phi_j + \frac{1}{2}m^{il}y^*_{jkl}\phi_i\phi^{*j}\phi^{*k} + \frac{1}{2}m^*_{il}y^{jkl}\phi^{*i}\phi_j\phi_k \\ &+ \frac{1}{4}y^{ijl}y^*_{kml}\phi_i\phi_j\phi^{*k}\phi^{*m} \; . \end{aligned} \tag{6.82}$$

Il est toujours non négatif (carré de la valeur absolue de W^i). En utilisant la forme explicite du superpotentiel (6.79) on peut écrire le lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i - i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}m^{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}m^*_{ij}\psi^{i\dagger}\psi^{j\dagger} \\ &- V - \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_i\psi_j\psi_k - \frac{1}{2}y^*_{ijk}\phi^{*i}\psi^{j\dagger}\psi^{k\dagger} \; . \end{aligned} \tag{6.83}$$

2. Une possibilité qu'on n'a pas considéré est la présence d'un terme linéaire $k\phi_i$ qui est compatible avec la symétrie de jauge seulement si le champ est un singulet de jauge.

6.2.3 Exercice A : Le modèle de Wess–Zumino

Considérer un spineur de Majorana

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{6.84}$$

et montrer l'identité

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 2\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{6.85}$$

en termes des spineurs de Weyl à deux composantes. Pour la démonstration éliminer une dérivée totale et utiliser les relations

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi\sigma^\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi \tag{6.86}$$

où ψ et χ sont deux spineurs de Weyl, $\sigma^\mu \equiv (I, \sigma_i)$ et $\bar{\sigma}^\mu \equiv (I, -\sigma_i)$ sont les matrices de Pauli.

Considérer ensuite le lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{6.87}$$

avec ϕ un champ scalaire complexe, ψ un spineur de Weyl à deux composantes. Ce lagrangien est invariant sous les transformations globales de supersymétrie sur la couche de masse

$$\delta\phi = \sqrt{2}\xi_W \psi \tag{6.88}$$

$$\delta\psi = -i\sqrt{2}\partial_\mu \phi \sigma^\mu \bar{\xi}_W \tag{6.89}$$

Écrire le lagrangien (6.87) en termes d'un champ de Majorana Ψ et de deux champs réels A et B :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + iB) \tag{6.90}$$

Les transformations de supersymétrie (6.88-6.89) en termes des nouveaux champs sont

$$\delta A = \bar{\xi}\Psi \tag{6.91}$$

$$\delta B = i\bar{\xi}\gamma_5 \Psi \tag{6.92}$$

$$\delta\Psi = -i\gamma^\mu \partial_\mu (A + i\gamma_5 B)\xi \tag{6.93}$$

où

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_W \\ \bar{\xi}_W \end{pmatrix} \tag{6.94}$$

est le paramètre spinoriel de la transformation. Vérifier que les nouvelles transformations de supersymétrie (6.91-6.93) sont équivalentes à (6.88-6.89). Les propriétés suivantes peuvent être utilisées sans démonstration :

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{6.95}$$

6.3 Le multiplet vecteur

6.3.1 Lagrangien du multiplet vecteur

Le supermultiplet vecteur de jauge contient un boson de jauge sans masse A^a_μ et un fermion de Weyl, le gaugino λ^a. Les transformations de jauge du supermultiplet vecteur sont

$$\delta_{\text{jauge}} A^a_\mu = -\partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \Lambda^c \tag{6.96}$$

$$\delta_{\text{jauge}} \lambda^a = g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c \tag{6.97}$$

où g est le couplage de jauge, f^{abc} les constantes de structure antisymétriques du groupe de jauge et Λ^a un paramètre infinitésimal de la transformation de jauge. Sur la couche de masse on a deux polarisations pour le champ vectoriel et deux composantes pour le spineur de Weyl. Par contre off–shell le champ vectoriel a trois composantes et le spineur de Weyl quatre. Pour que la supersymétrie soit respectée off–shell il faut ajouter un champ scalaire réel D^a. Le lagrangien correspondant est

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - i\lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a \tag{6.98}$$

avec

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{6.99}$$

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a - g f^{abc} A^b_\mu \lambda^c . \tag{6.100}$$

Les transformations de supersymétrie pour les champs sont

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}_\mu \epsilon \right) \tag{6.101}$$

$$\delta \lambda^a_\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a \tag{6.102}$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a - D_\mu \lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu \epsilon \right) . \tag{6.103}$$

Comme dans le cas du lagrangien pour le multiplet chiral, on peut montrer que le lagrangien (6.98) est invariant sous les transformations de supersymétrie et que l'algèbre se ferme.

6.3.2 Interactions de jauge supersymétriques

Le premier pas pour construire un lagrangien invariant de jauge avec les multiplets chiraux et vecteurs consiste à introduire des dérivées covariantes pour les champs des multiplets chiraux

$$D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i + igA^a_\mu (T^a \psi)_i \tag{6.104}$$
$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + igA^a_\mu (T^a \phi)_i \tag{6.105}$$
$$D_\mu \phi^{*i} = \partial_\mu \phi^{*i} - igA^a_\mu (\phi^* T^a)^i \; . \tag{6.106}$$

Le lagrangien complet doit aussi contenir tous les autres termes invariants de jauge, renormalisables et compatibles avec la transformation de supersymétrie :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{chiral}} + g(\phi^* T^a \phi) D^a - \sqrt{2} g \left[(\phi^* T^a \psi)\lambda^a + \lambda^{a\dagger} (\psi^\dagger T^a \phi) \right] \tag{6.107}$$

où les T^a sont les générateurs de la transformation de jauge, $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ le lagrangien pour le multiplet chiral avec les dérivées covariantes. Les transformations de supersymétrie sont aussi modifiés par les dérivées covariantes :

$$\delta(\psi_i)_\alpha = i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha D_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i \tag{6.108}$$
$$\delta F_i = i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + \sqrt{2} g (T^a \phi)_i \epsilon^\dagger \lambda^{a\dagger} \; . \tag{6.109}$$

L'équation du mouvement pour le champ auxiliaire est

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi) \tag{6.110}$$

on peut l'utiliser pour éliminer le champ auxiliaire du lagrangien. Le potentiel scalaire complet est

$$V = F^{*i} F_i + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a = W^*_i W^i + \frac{1}{2} \sum_a g_a^2 (\phi^* T^a \phi)^2 \tag{6.111}$$

où la somme sur a fait référence à la possibilité d'avoir différents facteurs dans le groupe de jauge avec des couplages différents. On parle de termes F et D pour le potentiel scalaire. Le potentiel scalaire est complètement déterminé par les autres interactions dans la théorie : les termes de type F sont déterminés par les couplages de Yukawa et les termes de type D par les interactions de jauge.

6.4 La supersymétrie comme théorie de jauge

Dans l'étude du modèle standard on a décrit les données en termes d'une théorie avec des symétries locales plutôt que globales. Pour la supersymétrie on peut aussi se poser la question de la traiter comme symétrie locale. La supersymétrie à quatre dimensions contient comme sous–algèbre l'algèbre de Poincaré (ou celle de de Sitter) et la version locale de cette sous–algèbre est la théorie de la gravité d'Einstein. Pour cette raison la version locale de la supersymétrie est aussi une théorie de la supergravité. Pour la supersymétrie $N = 1$ on doit donc inclure un multiplet avec le graviton de spin 2 et son partenaire supersymétrique, le gravitino, un fermion de spin $3/2$. L'introduction d'un champ de spin 2 rend la théorie non renormalisable, on doit donc penser ces théories comme effectives.

Un autre point important dans l'analyse d'une théorie locale de la supersymétrie est le rôle du vide. On a vu que dans une théorie supersymétrique globale le vide est une quantité positive ou nulle, mais jamais négative. En particulier un vide invariant sous transformations de supersymétrie a une énergie nulle et un vide qui brise la supersymétrie, une énergie positive. Dans le cas local ceci n'est plus vrai puisque le potentiel est modifié et le vide supersymétrique a une énergie négative. On n'est donc pas obligés de prendre un vide brisé à énergie positive. Ce point est important parce que l'énergie du vide contribue à la valeur de la constante cosmologique Λ dans les équations de la relativité générale et intervient donc dans les modèles cosmologiques et dans les mesures astrophysiques (supernovae, radiation à 3 K) par des effets sur la géométrie et l'accélération de l'univers.

6.4.1 Supergravité globale

Avant d'étudier la théorie locale pour la supergravité, on va considérer le lagrangien du multiplet de la supergravité globale. Pour garder une notation compacte le spineur vectoriel de Weyl ψ_α de spin $3/2$ sera écrit en notation a quatre composantes avec un spineur vectoriel de Majorana

$$\Psi_\mu = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}_\mu \tag{6.112}$$

L'action du multiplet de la supergravité globale est donné pour la partie de spin 3/2 (action de Rarita–Schwinger) par

$$S_{\rm RS} = -\frac{1}{2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\Psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\Psi_\sigma \tag{6.113}$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur antisymétrique de Levi–Civita avec $\epsilon^{0123} = 1$. Pour le graviton de spin 2 on utilise un tenseur symétrique à trace nulle $g_{\mu\nu}$ linéarisé

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{6.114}$$

$\eta_{\mu\nu}$ étant le tenseur métrique de Minkowski et

$$\kappa^2 = 8\pi G_N \tag{6.115}$$

où G_N est la constante de Newton. Le champ bosonique $h_{\mu\nu}$ a la dimension d'une masse. L'action d'Einstein linéarisée constitue la partie bosonique de l'action pour le supermultiplet

$$S_{\rm E} = -\frac{1}{2}\int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R\right)h^{\mu\nu} \tag{6.116}$$

où le tenseur de Ricci linéarisé est

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x_\rho} + \frac{\partial^2 h^\rho{}_\nu}{\partial x^\mu \partial x_\rho} + \frac{\partial^2 h^\rho{}_\mu}{\partial x^\nu \partial x_\rho} - \frac{\partial^2 h^\rho{}_\rho}{\partial x^\mu \partial x_\nu}\right) \tag{6.117}$$

et la courbure

$$R \equiv \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\ . \tag{6.118}$$

La raison pour considérer ici la théorie d'Einstein linéarisée est due à l'invariance globale qu'on cherche à obtenir. En réalité la théorie d'Einstein est locale dans sa forme standard. L'action

$$S = S_{\rm RS} + S_{\rm E} \tag{6.119}$$

est invariante sous les transformations globales de supersymétrie $e^{i\bar{\xi}Q}$, avec ξ paramètre spinoriel de Majorana :

$$\delta h_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\bar{\xi}(\gamma_\mu\Psi_\nu + \gamma_\nu\Psi_\mu) \tag{6.120}$$

$$\delta\Psi_\mu = -i\sigma^{\nu\rho}\partial_\nu h_{\rho\mu}\xi \tag{6.121}$$

où

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\ . \tag{6.122}$$

Ces transformations laissent l'action invariante sur la couche de masse. Comme d'habitude l'invariance off–shell s'obtient avec des champs auxiliaires.

6.4.2 Supergravité locale

Dans une transformation locale le paramètre spinoriel de la transformation dépend du point de l'espace–temps

$$e^{i\bar{\xi}(x)Q} \; . \tag{6.123}$$

On ne va pas discuter les méthodes pour obtenir le lagrangien avec invariance locale mais on se limitera aux résultats. Pour la partie bosonique de l'action on va utiliser l'équation d'Einstein standard qui est invariante sous les transformations locales. Il faut introduire la tétrade vierbein $e_\mu{}^m$ avec m indice local de Lorentz et

$$h_{\mu\nu} = e_\mu{}^m e_\nu{}^n \eta_{mn} \; . \tag{6.124}$$

L'action invariante sous les transformations locales de supersymétrie est

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x |\mathrm{det} e| R - \frac{1}{2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\Psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\tilde{D}_\rho\Psi_\sigma \tag{6.125}$$

où la dérivée covariante a une forme non minimale

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{4}\bar{\omega}_{\mu mn}\sigma^{mn} \tag{6.126}$$

$$\bar{\omega}_{\mu mn} = \omega_{\mu mn} + \frac{i}{4}\kappa^2(\bar{\Psi}_\mu\gamma_m\Psi_n + \bar{\Psi}_m\gamma_\mu\Psi_n - \bar{\Psi}_\mu\gamma_n\Psi_m) \tag{6.127}$$

$$\omega_{\mu mn} = \frac{1}{2}e_m{}^\nu(\partial_\mu e_{n\nu} - \partial_\nu e_{n\mu}) + \frac{1}{2}e_m{}^\tau e_n{}^\sigma \partial_\sigma e_{\tau q} e_\mu{}^q - (m \leftrightarrow n) \tag{6.128}$$

$\omega_{\mu mn}$ étant la connection de spin. Les transformations locales de supersymétrie sont

$$\delta e_\mu{}^m = -i\kappa\bar{\xi}\gamma^m\Psi_\mu \tag{6.129}$$

$$\delta\Psi_\mu = \frac{2}{\kappa}\tilde{D}_\mu\xi \; . \tag{6.130}$$

6.4.3 Théories non renormalisables

On ne va pas discuter en détail les interactions dans une théorie locale de la supergravité. Une théorie des champs qui contient la relativité générale est non renormalisable. Il s'agit donc d'une théorie effective qui demande une explication plus fondamentale. Néanmoins ces théories effectives non renormalisables ont un rôle important à "basse" énergie, un peu comme la

théorie de Fermi par rapport aux interactions faibles ou la théorie chirale pour l'étude de la physique hadronique.

Une différence importante dans le cas d'une théorie non renormalisable est la présence du potentiel de Kähler $K(\phi_i, \phi^{*i})$ en plus du superpotentiel. Il s'agit d'une fonction réelle de ϕ_i et ϕ^{*i} avec les dimensions d'une masse au carré. On n'a pas discuté de ce terme dans le cas renormalisable puisque la seule possibilité était $K = \phi^{*i}\phi_i$. Dans le cas de la supergravité on a une échelle de masse, la masse de Planck, qui entre dans la construction du lagrangien. On peut définir une quantité sans dimension, la fonction de Kähler

$$G = \frac{K}{m_P^2} + \ln \frac{W}{m_P^3} + \ln \frac{W^*}{m_P^3} \tag{6.131}$$

et ses dérivées

$$G^i = \frac{\partial G}{\partial \phi_i}\,, \qquad G_i = \frac{\partial G}{\partial \phi^{*i}}\,, \qquad G_i^j = \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^{*i} \partial \phi_j}\,. \tag{6.132}$$

avec pour la matrice G_i^j une matrice inverse

$$(G^{-1})_i^j G_j^k = (G^{-1})_j^k G_i^j = \delta_i^k\,. \tag{6.133}$$

Ces fonctions permettent de généraliser la contribution au potentiel scalaire du terme F

$$V = m_P^4 e^G \left(G^i (G^{-1})_i^j G_j - 3 \right) \tag{6.134}$$

où l'analogue du champ auxiliaire F est donné par

$$F_i = -m_P^2 e^{G/2} (G^{-1})_i^j G_j \tag{6.135}$$

dans le cas de la supergravité. La supersymétrie est spontanément brisée si au moins un des F_i a une valeur dans le vide non nulle. Avec le terme -3 dans le potentiel (6.134) on peut comprendre pourquoi la brisure de la supersymétrie locale peut se faire avec une valeur dans le vide qui est zéro, positive ou négative.

6.5 Solution des exercices

Exercice A

Le terme cinétique des spineurs de Majorana peut s'écrire en fonction des spineurs de Weyl

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \bar{\psi}_\alpha \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\alpha - \psi_{\dot{\alpha}} \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} = 2 \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\,. \tag{6.136}$$

Le lagrangien en termes des nouveaux champs est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A \partial^\mu A + \partial_\mu B \partial^\mu B\right) + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi \ . \tag{6.137}$$

Les transformations de supersymétrie en fonction des deux descriptions sont équivalentes. Pour δA

$$\delta A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\phi + \delta\phi^*) = \bar{\xi}\Psi \tag{6.138}$$

on procède de manière analogue pour δB. Inversement on peut montrer la transformation de $\delta\phi$ à partir de celles de δA et δB

$$\delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta A + i\delta B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\xi}\Psi - \bar{\xi}\gamma_5\Psi\right) = \sqrt{2}\xi_W\psi \ . \tag{6.139}$$

Pour montrer la transformation de $\delta\psi$ on peut partir de la transformation de $\delta\Psi$

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= -i\gamma^\mu\partial_\mu(A + i\gamma_5 B)\xi = -i\gamma^\mu\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi + \phi^* + \gamma_5(\phi - \phi^*)\right] \\ &= -i\sqrt{2}\gamma^\mu\partial_\mu\left[\phi\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,\xi + \phi^*\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,\xi\right] \ . \end{aligned} \tag{6.140}$$

En utilisant les propriétés des projecteurs données dans l'exercice on a, par exemple pour la composante haute du bispineur

$$\delta\psi = -i\sqrt{2}\partial_\mu\phi\sigma^\mu\bar{\xi}_W \tag{6.141}$$

et une formule analogue pour la partie basse $\delta\bar{\psi}$. On peut aussi partir de $\delta\psi$ et $\delta\bar{\psi}$ pour obtenir $\delta\Psi$.

6.6 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

J. Bagger
Weak scale supersymmetry: Theory and practice.
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9604232

H. Murayama
Supersymmetry Phenomenology
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0002232

S.P. Martin
A Supersymmetry Primer
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356

Livres disponibles sur Internet:

S.J. Gates Jr, M.T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel
Superspace, or One thousand and one lessons in supersymmetry
http://arxiv.org/abs/hep-th/0108200

N. Polonsky
Supersymmetry : Structure and Phenomena
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0108236

Livres

J. Wess and J. Bagger
Supersymmetry and Supergravity
Princeton

D. Bailin, A. Love
Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory
IOP

P. West
Introduction to Supersymmetry and Supergravity
World Scientific

P. Binetruy
Supersymmetry. Theory, Experiment, and Cosmology
Oxford University Press

I.L. Buchbinder, S.M. Kuzenko
Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity
IOP

Chapitre 7

Brisure de la supersymétrie

Pour construire un modèle phénoménologique de la supersymétrie pour la physique électrofaible il faut inclure un mécanisme de brisure. On va analyser des modèles de brisure spontanée de la supersymétrie. Tous ont en commun l'extension du modèle à haute énergie. De ce point de vue il ne s'agit pas seulement de construire une version supersymétrique du modèle standard, mais d'aller à des échelles d'énergie beaucoup plus grandes. Une autre possibilité, moins ambitieuse, consiste à décrire de façon effective cette brisure seulement par l'introduction de termes de brisure explicite. Dans le cas du modèle standard supersymétrique minimal on va se limiter à cette approche effective.

7.1 Brisure souple

On a utilisé la supersymétrie pour éliminer les divergences quadratiques dans le problème de la hiérarchie entre l'échelle électrofaible et l'échelle de Planck. L'introduction de termes de brisure explicite ne doit pas introduire à nouveau ce problème. La relation entre les couplages sans dimension qui interviennent dans la compensation des divergences quadratiques doit être préservé. Ces considérations nous amènent à considérer des termes de brisure de la supersymétrie par des termes ayant des couplages avec une dimension de masse positive, comme par exemple des termes de masse. On parle dans ce cas de termes de brisure souple de la supersymétrie. Cette approche effective de basse énergie est justifiée par des modèles de haute énergie avec une brisure spontanée qui génèrent précisément ce type de termes. Les termes de

brisure souple vont donner des masses différentes aux particules du modèle standard et à leurs partenaires supersymétriques. En pratique si on ne veut pas introduire un nouveau problème d'échelle, la différence de masse ne peut pas être trop grande par rapport à la valeur de l'échelle électrofaible. Dans le cadre d'une théorie renormalisable les termes de brisure explicite souple de la supersymétrie sont [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{souple}} &= -\frac{1}{2}m_\lambda\lambda^a\lambda^a - \frac{1}{6}a^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k - \frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + \text{c.c.} \\ &- (m^2)^i_j\phi^{j*}\phi_i \ . \end{aligned} \tag{7.1}$$

La formule (7.1) ne contient pas des termes souples dans les champs chiraux parce que l'on peut toujours redéfinir le superpotentiel et les constantes pour les éliminer. On peut prouver que la brisure souple de la supersymétrie générée par (7.1) garantit l'absence à tous les ordres de la théorie des perturbations des divergences quadratiques pour les champs scalaires. La présence ou l'absence d'un terme du lagrangien de brisure souple (7.1) dépend des autres symétries de la théorie. Les paramètres de masse $(m^2)^i_j$ pour les champs scalaires sont toujours présents parce qu'il suffit de choisir les champs ϕ_i et ϕ^{j*} dans deux représentations conjuguées des groupes de jauge. Les termes a^{ijk} et b^{ij} ont la même forme que les termes y^{ijk} et m^{ij} du superpotentiel, donc ils sont présents si le terme correspondant du superpotentiel est permis par les symétries de la théorie.

7.2 Brisure spontanée de la supersymétrie

On a vu que si la supersymétrie n'est pas brisée dans l'état de vide de la théorie, le vide a l'énergie zéro. Si par contre la supersymétrie est spontanément brisée dans l'état de vide, le vide a une énergie positive. Le potentiel scalaire (6.111) permet de briser spontanément la supersymétrie si F_i ou D^a ne sont pas nuls dans l'état de vide, par exemple en ajoutant des termes au

1. On ne va pas considérer ici la possibilité d'un terme

$$-\frac{1}{2}c^{jk}_i\phi^{*i}\phi_j\phi_k + \text{c.c.}$$

qui est souple (il ne génère pas des divergences quadratiques) sous certaines conditions. La raison pour ne pas l'inclure est que ce terme est complètement négligeable dans les modèles de brisure spontanée de la supersymétrie qu'on va étudier.

lagrangien qui ne permettent pas aux équations du mouvement $F_i = 0$ et $D^a = 0$ d'être simultanément satisfaites.

7.2.1 Mécanisme de Fayet–Iliopoulos

La première possibilité est de considérer le mécanisme de Fayet–Iliopoulos. Si la symétrie de jauge de la théorie contient un facteur $U(1)$, le champ auxiliaire du multiplet de jauge est à lui seul invariant de jauge et de supersymétrie :

$$\mathcal{L}_{\text{F-I}} = \kappa D \tag{7.2}$$

où κ est une constante avec la dimension d'une masse au carré. Cette possibilité existe seulement pour une symétrie de jauge Abélienne parce que pour des groupes non Abéliens l'équivalent du terme de Fayet–Iliopoulos n'est pas invariant de jauge. Dans le cas du groupe $U(1)$ la transformation δD de la formule (6.103) est une dérivée totale. Le terme (7.2) peut donner une valeur non nulle dans le vide à cause des autres interactions du champ scalaire qui sont chargées sous la transformation du groupe de jauge $U(1)$. Le potentiel prend la forme

$$V = \frac{1}{2}D^2 - \kappa D + gD\sum_i Q_i \phi^{*i}\phi_i \tag{7.3}$$

où Q_i sont les charges des champs ϕ_i sous le groupe de jauge $U(1)$. L'équation du mouvement pour le champ D devient

$$D = \kappa - g\sum_i Q_i \phi^{*i}\phi_i \tag{7.4}$$

Si les champs ϕ_i ont une valeur dans le vide nulle, le champ auxiliaire obtient une valeur dans le vide

$$\langle D \rangle = \kappa \tag{7.5}$$

et la supersymétrie est spontanément brisée. Dans le cas d'une extension supersymétrique du modèle standard l'utilisation du groupe $U(1)_Y$ implique la brisure de la couleur et de l'électromagnétisme pour certaines particules supersymétriques, donc on ne va pas utiliser cette méthode dans la suite. Il est possible par contre d'ajouter des nouveaux groupes $U(1)$, mais dans le cadre du modèle standard supersymétrique il est difficile de donner une masse compatible avec les limites expérimentales à toutes les particules.

7.2.2 Mécanisme de O'Raifeartaigh

Une deuxième possibilité est la brisure spontanée de la supersymétrie avec un terme de type F non nul. L'idée consiste à choisir des supermultiplets chiraux et le superpotentiel W (modèle de O'Raifeartaigh) de façon à ne pas avoir des solutions simultanées pour les équations

$$F_i = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\delta W^*}{\delta \phi^{*i}} = 0 \,. \tag{7.6}$$

Le potentiel V sera donc

$$V = \sum_i |F_i|^2 \tag{7.7}$$

avec un minimum positif pour assurer la brisure spontanée de la supersymétrie. L'exemple le plus simple consiste de trois supermultiplets chiraux $\Phi_i \equiv (\phi_i, \psi_i, F_i)$ avec un superpotentiel

$$W = -k\Phi_1 + m\Phi_2\Phi_3 + \frac{y}{2}\Phi_1\Phi_3^2 \tag{7.8}$$

qui contient un terme linéaire qui est compatible avec l'invariance de la théorie seulement s'il est un singulet de jauge. Le potentiel scalaire qu'on obtient à partir de la formule précédente est

$$V = |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 \tag{7.9}$$

avec

$$F_1 = k - \frac{y}{2}\phi_3^{*2} \,, \qquad F_2 = -m\phi_3^* \,, \qquad F_3 = -m\phi_2^* - y\phi_1^*\phi_3^* \tag{7.10}$$

Le terme linéaire du superpotentiel est nécessaire dans la brisure de la supersymétrie parce qu'il élimine la possibilité d'avoir un vide d'énergie nulle (qui ne brise pas la supersymétrie) avec le choix $\phi_i = 0$. Les F_i de l'équation (7.10) permettent de vérifier que les conditions $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont incompatibles et donc que la supersymétrie doit être brisée. En prenant $m^2 > yk$ on peut montrer que le minimum absolu du potentiel est donné par $\phi_2 = \phi_3 = 0$ avec ϕ_1 quelconque. On a donc toute une vallée de minima équivalents, qu'on appelle une direction plate du potentiel. Un développement autour du minimum du potentiel avec le choix $\phi_1 = 0$ donne 6 scalaires avec les masses au niveau de l'arbre

$$0 \,, \quad 0 \,, \quad m \,, \quad m \,, \quad \sqrt{m^2 - yk} \,, \quad \sqrt{m^2 + yk} \,. \tag{7.11}$$

Les trois fermions de Weyl ont les masses

$$0\,, \quad m\,, \quad m\,. \tag{7.12}$$

Le fermion sans masse est le goldstino, la particule sans masse du théorème de Goldstone. Dans le cas de la supersymétrie le générateur brisé est fermionique et on a donc un fermion de Goldstone. Les deux scalaires réels sans masse sont les composantes du scalaire complexe ϕ_1. Leur masse est nulle à cause de la direction plate du potentiel. Ce résultat est modifié par les corrections quantiques. Un calcul de ces corrections avec le potentiel effectif à une boucle donne

$$m_{\phi_1}^2 = \frac{1}{32\pi^2}\left\{\left(\frac{ym^4}{k}+y^3k\right)\ln\left(\frac{m^2+yk}{m^2-yk}\right)+2y^2m^2\left[\ln\left(1-\frac{y^2k^2}{m^4}\right)-1\right]\right\} \tag{7.13}$$

L'échelle de masse de la brisure de la supersymétrie est donnée par $\sqrt{k}$. Dans le modèle standard supersymétrique cette échelle est beaucoup plus petite que l'échelle de Planck pour donner les masses des particules. Pour résoudre le problème de générer de façon naturelle l'échelle électrofaible à partir de l'échelle de Planck il faut utiliser d'autres méthodes. Une possibilité est la brisure dynamique de la supersymétrie. On peut penser à l'analogie avec la QCD, qui génère une échelle de basse énergie $\Lambda \sim e^{-1/g_3^2}M_P$ (g_3 étant la constante de couplage du groupe $SU(3)$ de couleur) parce que la théorie est libre asymptotiquement et perturbative à l'échelle de Planck. Il est clair, sur les exemples qu'on a examiné, qu'un modèle de brisure de la supersymétrie ne peut pas être seulement une version supersymétrique du modèle standard, mais doit inclure d'autres ingrédients.

7.3 Les fermions de Goldstone

On a vu que dans le cas de la supersymétrie le générateur brisé est fermionique et on a un fermion de Goldstone, le goldstino. En général on peut considérer un modèle avec des multiplets chiraux et vecteurs. Les fermions de la théorie sont des gauginos λ^a et des fermions chiraux ψ_i. Quand certains des scalaires de la théorie prennent une valeur dans le vide non nulles, dans la base (λ^a, ψ_i) la matrice de masse des fermions a la forme

$$m_{\text{fermions}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g_a(T^a\langle\phi^*\rangle)^i \\ \sqrt{2}g_a(T^a\langle\phi^*\rangle)^j & \langle W^{ij}\rangle \end{pmatrix}\,. \tag{7.14}$$

On peut vérifier que l'action de la matrice fermionique sur le vecteur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\langle D^a \rangle \\ \langle F_i \rangle \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

donne zéro. Pour le prouver pour la première ligne de la matrice de masse on peut utiliser l'identité

$$W^i (T^a)^j_i \phi_j = 0 \,, \tag{7.16}$$

pour la deuxième ligne on peut utiliser la condition

$$\langle \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \rangle = 0 \tag{7.17}$$

qui est valable au minimum du potentiel scalaire. Le vecteur (7.15) est proportionnel à la fonction d'onde du goldstino. Si au moins un des champs auxiliaires a une valeur dans le vide non nulle, la fonction d'onde est non banale et sa masse est zéro. On a ainsi démontré le théorème de Goldstone dans le cas supersymétrique.

7.4 Le supercourant

Le théorème de Noether indique que l'invariance par rapport à une symétrie implique l'existence d'un courant conservé. Dans le cas de la supersymétrie, la variation par rapport aux champs $\Phi = \phi$, ϕ^*, ψ, $\psi^\dagger$, F, F^* donne

$$\epsilon J_\mu + \epsilon^\dagger J^\dagger_\mu = \sum_\Phi \delta\Phi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \Phi)} - K_\mu \tag{7.18}$$

où $\partial^\mu K_\mu = \delta\mathcal{L}$. Les courants supersymétriques sont conservées

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = 0 \qquad\qquad \partial_\mu J^{\mu\dagger}_{\dot\alpha} = 0 \tag{7.19}$$

les charges correspondantes étant

$$Q_\alpha = \sqrt{2}\int d^3x J^0_\alpha \qquad\qquad Q^\dagger_{\dot\alpha} = \sqrt{2}\int d^3x J^{0\dagger}_{\dot\alpha} \,. \tag{7.20}$$

L'expression explicite du supercourant conservé avec des multiplets chiraux et vecteurs s'écrit

$$J^\mu_\alpha = (\sigma^\nu \bar\sigma^\mu \psi_i)_\alpha D_\nu \phi^{*i} - i(\sigma^\mu \psi^{i\dagger})_\alpha W^*_i - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma^\nu \bar\sigma^\rho \sigma^\mu \lambda^{a\dagger})_\alpha F^a_{\nu\rho} - \frac{i}{\sqrt{2}} g\phi^* T^a \phi (\sigma^\mu \lambda^{a\dagger})_\alpha \,. \tag{7.21}$$

L'équation précédente permet d'obtenir d'autres propriétés importantes pour le goldstino. Supposons que la brisure spontanée de la supersymétrie soit due à une valeur non nulle dans le vide du champ auxiliaire F. La conservation du supercourant est

$$0 = \partial_\mu J^\mu_\alpha = i\langle F\rangle(\sigma^\mu\partial_\mu\tilde{G}^\dagger)_\alpha + \dots \tag{7.22}$$

où la partie qu'on a indiquée explicitement est due au deuxième terme de l'équation (7.21) en utilisant l'équation du mouvement $F_i = -W_i^*$. Pour le goldstino on peut écrire un lagrangien effectif

$$\mathcal{L}_{\text{goldstino}} = -i\tilde{G}^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{G} - \frac{1}{\langle F\rangle}(\tilde{G}\partial_\mu j^\mu + \text{c.c.}) \tag{7.23}$$

où j^μ est la partie du supercourant qui concerne tous les autres supermultiplets :

$$j^\mu_\alpha = (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi_i)_\alpha\partial_\nu\phi^{*i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^\nu\bar{\sigma}^\rho\sigma^\mu\lambda^{a\dagger}F^a_{\nu\rho} + \dots \tag{7.24}$$

Le goldstino interagit avec les autres particules par des vertex avec un scalaire et un fermion ou avec un gaugino et un boson de jauge. L'équation (7.23) diverge en apparence dans la limite $\langle F\rangle \to 0$. En réalité la limite est zéro à cause des deux dérivées dans ce terme qui sont proportionnelles à des différences de masses qui sont nulles dans la limite de supersymétrie non brisée. Ces résultats dépendent seulement de la conservation du supercourant et sont donc valables en général indépendamment des détails du mécanisme de transmission de la brisure de la supersymétrie au secteur visible de la théorie.

7.5 Mécanisme de super–Higgs

Le théorème de Goldstone s'applique dans le cas d'une symétrie globale. Quand on considère la gravité, la supersymétrie est une symétrie locale. Les paramètres ϵ^α de la transformation de la supersymétrie sont des fonctions de l'espace–temps. Le multiplet qui contient le graviton (spin 2) contient aussi une particule fermionique de spin 3/2, le gravitino. Quand la supersymétrie n'est pas brisée, ces deux particules ont une masse nulle. Dans la brisure spontanée de la supersymétrie on a l'analogue du mécanisme de Higgs et le gravitino obtient une masse en absorbant les degrés de liberté du goldstino.

Dans le cas de la supergravité et de la brisure spontanée par les termes F_i des formules (6.134) et (6.135) la masse du gravitino est

$$m_{3/2}^2 = \frac{1}{3m_p^2} \langle K_j^i F_i F^{*j} \rangle \ . \tag{7.25}$$

La valeur de $m_{3/2}$ dépend en général du modèle de brisure considéré. La valeur du potentiel scalaire au minimum n'est pas forcément plus grande que zéro dans le cas de la brisure de la supersymétrie locale. Souvent on impose $\langle V \rangle = 0$ même s'il n'est pas clair si ce choix particulier a ou non une importance phénoménologique et la masse du gravitino a une forme plus simple

$$m_{3/2}^2 = m_P^2 \, e^{\langle G \rangle} \ . \tag{7.26}$$

7.6 Brisure avec un secteur caché

Une contrainte à considérer dans la construction d'un modèle supersymétrique est l'existence de règles de somme pour les masses qui sont valables non seulement si la supersymétrie est exacte, mais aussi si la supersymétrie est spontanément brisée quand on néglige les corrections dues aux boucles

$$\mathrm{Tr}[m^2(\text{scalaires complexes})] = \mathrm{Tr}[m^2(\text{fermions de Weyl})] \ . \tag{7.27}$$

L'équation précédente est vérifiée par exemple dans le modèle de O'Raifeartaigh avec la brisure spontanée induite par les termes F. Du point de vue de la phénoménologie les fermions chiraux ont des masses petites (sauf le quark top et les higgsinos) et on aurait déjà dû observer des scalaires supersymétriques légers. Cette remarque indique que les masses doivent leur origine plutôt aux corrections radiatives ou à des méthodes indirectes. Dans cette deuxième hypothèse on parle d'un secteur visible de la supersymétrie et d'un secteur caché qui est là pour donner la brisure spontanée de la symétrie. La formule (7.27) ne s'applique pas au secteur visible mais au spectre complet et des masses en accord avec la phénoménologie peuvent être ainsi générées. Des interactions entre les deux secteurs sont nécessaires pour communiquer la brisure de la supersymétrie à la partie visible. Les interactions entre les deux secteurs peuvent être de différentes sortes. Les deux modèles les plus utilisés considèrent des interactions gravitationnelles ou de jauge pour communiquer la brisure de la supersymétrie entre les deux secteurs.

7.6.1 Médiation par la gravité

Une possibilité pour communiquer la brisure de la supersymétrie au secteur visible consiste à utiliser les interactions gravitationnelles. On va considérer une forme particulière pour le superpotentiel et le potentiel de Kähler, avec une partie visible et une partie cachée

$$W = W_v(\phi_i) + W_c(X) \tag{7.28}$$
$$K = \phi^{*i}\phi_i + X^*X \tag{7.29}$$

avec des valeurs dans le vide

$$\langle W_c\rangle = xm_P^2\,, \qquad \langle\frac{\partial W_c}{\partial X}\rangle = x'm_P\,, \qquad \langle X\rangle = wm_P\,. \tag{7.30}$$

Si on impose $\langle V\rangle = 0$ on obtient

$$|x' + xw^*|^2 = 3|x|^2 \tag{7.31}$$
$$m_{3/2} = \frac{|\langle F_X\rangle|}{\sqrt{3}m_P} = |x|e^{|w|^2/2}\,. \tag{7.32}$$

Ce calcul peut se faire comme cas particulier des formules (6.134), (6.135) et (7.25). A l'ordre le plus bas en $1/m_P$ et avec une redéfinition $W_v \to W_v e^{-|w|^2/2}$ pour garder la normalisation usuelle, on obtient le potentiel

$$V = (W_v^*)_i(W_v)^i + m_{3/2}^2\phi^{*i}\phi_i \tag{7.33}$$
$$+ \; e^{|w|^2/2}\left[x^*\phi_i(W_v)^i + (x'^*w^* + |w|^2x^* - 3x^*)W_v + \text{c.c.}\right]\,.$$

Le premier terme est la contribution usuelle de la supersymétrie globale, le deuxième est un terme scalaire souple

$$m_0^2 = \frac{|\langle F_X\rangle|^2}{3m_P^2} = m_{3/2}^2\,. \tag{7.34}$$

Les termes suivants sont de la forme

$$A_0 = -\frac{\langle F_X\rangle}{m_P}w^*\,, \qquad B_0 = \frac{\langle F_X\rangle}{m_P}\left(-w^* + \frac{1}{x'^*/x^* + w}\right) \tag{7.35}$$

puisque pour la partie cubique $\phi_i W_v = 3W_v$ et pour la partie quadratique $\phi_i W_v = 2W_v$. À l'ordre le plus bas en $1/m_P$, la masse du gravitino est

$$m_{\lambda_a} = \frac{1}{2m_P}\Re(f_a^i)\langle F_i\rangle \tag{7.36}$$

où les f_a^i sont des paramètres sans dimension pour les gauginos.

On va utiliser cet exemple simplifié pour justifier l'introduction d'un lagrangien effectif non renormalisable de basse énergie qui n'est même pas supersymétrique (il faut le considérer comme une partie d'un lagrangien supersymétrique) :

$$\mathcal{L}_{nr} = -\frac{1}{m_P} F_X \frac{1}{2} \sum_a f_a \lambda^a \lambda^a + \text{c.c.} - \frac{1}{m_P^2} F_X F_X^* k_j^i \phi_i \phi^{*j} \tag{7.37}$$

$$- \frac{1}{m_P} F_X \left(\frac{1}{6} y'^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{2} \mu'^{ij} \phi_i \phi_j \right) + \text{c.c.} \tag{7.38}$$

où F_X est le champ auxiliaire d'un supermultiplet chiral dans la partie cachée de la théorie. Si $\langle F_X \rangle \sim 10^{10}$ GeV le lagrangien effectif va produire des termes souples de l'ordre de quelques centaines de GeV. Les paramètres du lagrangien peuvent être déterminés à partir d'une théorie plus fondamentale. Notre exemple pour cette théorie nous indique que des simplifications sont possibles, notamment celles des paramètres $f_a = f$, $k_j^i = k\delta_j^i$. Pour les autres couplages on peut aussi considérer la proportionnalité avec les paramètres correspondants du superpotentiel : $y'^{ijk} = \alpha y^{ijk}$ et $\mu'^{ij} = \beta \mu^{ij}$.

Ce choix particulier va nous permettre de traiter tous les termes souples avec quatre paramètres

$$m_{1/2} = f \frac{\langle F_X \rangle}{m_P}, \quad m_0 = k \frac{|\langle F_X \rangle|^2}{m_P^2}, \quad A_0 = \alpha \frac{\langle F_X \rangle}{m_P}, \quad B_0 = \beta \frac{\langle F_X \rangle}{m_P}. \tag{7.39}$$

Cette réduction du nombre des paramètres a une justification principalement phénoménologique et constitue une paramétrisation simple pour traiter le mécanisme de brisure de la supersymétrie dont on ne connaît pas les détails.

7.6.2 Médiation par les interactions de jauge

Une alternative pour le mécanisme de brisure de la supersymétrie est donnée par les interactions de jauge. Il faut faire appel à de nouveaux multiplets chiraux, les messagers, qui communiquent la brisure de la supersymétrie au secteur visible par les interactions de jauge. De cette façon les interactions de jauge génèrent les termes souples de basse énergie. Un modèle simple consiste en un ensemble de multiplets chiraux chargés sous les interactions de jauge du modèle standard $(SU(3), SU(2), U(1))$:

$$q \sim (3, 1, -1/3), \quad \bar{q} \sim (\bar{3}, 1, 1/3), \quad \ell \sim (1, 2, 1/2), \quad \bar{\ell} \sim (1, 2, -1/2). \tag{7.40}$$

Ces nouveaux fermions (et sfermions) doivent être de masse élevée pour ne pas donner des effets visibles à basse énergie. On peut introduire un terme de couplage avec un multiplet chiral singulet de jauge S dans le superpotentiel pour leur donner une masse

$$W_m = y_\ell S \ell \bar{\ell} + y_q S q \bar{q} \tag{7.41}$$

où S et son champ auxiliaire F_S ont une valeur dans le vide non nulle. On suppose aussi que S participe dans un autre terme du superpotentiel à la brisure de la supersymétrie. Comme résultat on obtient des termes de masse pour les fermions messagers ψ_q, $\psi_{\bar{q}}$, ψ_ℓ, $\psi_{\bar{\ell}}$

$$\mathcal{L}_m = -y_\ell \langle S \rangle \psi_\ell \psi_{\bar{\ell}} - y_q \langle S \rangle \psi_q \psi_{\bar{q}} + \text{c.c.} \tag{7.42}$$

et pour les scalaires messagers q, $\bar{q}$, ℓ, $\bar{\ell}$

$$\begin{aligned} V_m &= |y_\ell \langle S \rangle|^2 \left(|\ell|^2 + |\bar{\ell}|^2 \right) + |y_q \langle S \rangle|^2 \left(|q|^2 + |\bar{q}|^2 \right) \\ &- \left(y_\ell \langle F_S \rangle \ell \bar{\ell} + y_q \langle F_S \rangle q \bar{q} + \text{c.c.} \right) . \end{aligned} \tag{7.43}$$

La deuxième ligne de l'équation (7.43) représente des termes souples qui donnent une différence de masse dans le multiplet chiral. Pour les sleptons et les squarks on a des matrices de masse

$$M_\ell = \begin{pmatrix} |y_\ell \langle S \rangle|^2 & -y_\ell^* \langle F_S^* \rangle \\ -y_\ell \langle F_S \rangle & |y_\ell \langle S \rangle|^2 \end{pmatrix} \qquad M_q = \begin{pmatrix} |y_q \langle S \rangle|^2 & -y_q^* \langle F_S^* \rangle \\ -y_q \langle F_S \rangle & |y_q \langle S \rangle|^2 \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

avec des valeurs propres

$$m^2_{\text{sleptons}} = |y_\ell \langle S \rangle|^2 \pm |y_\ell \langle F_S \rangle| , \qquad m^2_{\text{squarks}} = |y_q \langle S \rangle|^2 \pm |y_q \langle F_S \rangle| , \tag{7.45}$$

pour les masses des scalaires du multiplet chiral, à comparer avec les masses des fermions du même multiplet

$$m^2_{\text{leptons}} = |y_\ell \langle S \rangle|^2 , \qquad m^2_{\text{quarks}} = |y_q \langle S \rangle|^2 . \tag{7.46}$$

Cette brisure de la supersymétrie, dans le spectre du multiplet messager, est communiquée aux particules usuelles par des corrections dues aux boucles qui font intervenir les couplages de jauge. Les masses des gauginos sont

$$m_a = \frac{\alpha_a}{4\pi} \frac{\langle F_S \rangle}{\langle S \rangle} , \tag{7.47}$$

par contre les scalaires du secteur visible n'ont aucune correction à une boucle et la première contribution aux masses est à deux boucles. Le calcul des diagrammes à deux boucles donne le résultat suivant

$$m_\phi^2 = 2\left(\frac{\langle F_S\rangle}{\langle S\rangle}\right)^2 \left[\left(\frac{\alpha_1}{4\pi}\right)^2 C_1^\phi + \left(\frac{\alpha_2}{4\pi}\right)^2 C_2^\phi + \left(\frac{\alpha_3}{4\pi}\right)^2 C_3^\phi\right] \tag{7.48}$$

où

$$C_a^\phi \delta_j^i = (T^a T^a)_j^i \tag{7.49}$$

sont les invariants de Casimir du groupe de jauge considéré et T^a les générateurs correspondants. Le modèle minimal qu'on a considéré peut se généraliser au cas de plusieurs superchamps chiraux Φ_i avec $\bar{\Phi}_i$ dans la représentation complexe conjuguée :

$$W_m = \sum_i y_i S \Phi_i \bar{\Phi}_i \ . \tag{7.50}$$

D'autres généralisations sont possibles, mais le point fondamental pour la phénoménologie est que la masse des squarks et des sleptons dépend uniquement de leurs nombres quantiques de jauge et les dégénérescences en masse que cela implique donnent automatiquement une suppression des effets indésirables comme la présence de courants neutres qui changent la saveur. Une autre implication générale de ces modèles est que les particules avec interactions fortes (squarks, gluinos) sont plus lourdes que les particules avec interactions faibles (sleptons, higgsinos).

7.7 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

G.L. Kane
The Supersymmetry Soft-breaking Lagrangian
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0008190

R.S. Chivukula
Models of Electroweak Symmetry Breaking
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9803219

J.F. Gunion

Searching for Low-Energy Supersymmetry
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9801417

Chapitre 8

Le modèle standard supersymétrique

L'idée d'une version supersymétrique du modèle standard à été motivée par des considérations de "naturalité" de l'échelle électrofaible par rapport à l'échelle de Planck dans une théorie des champs à quatre dimensions de l'espace–temps lors de l'introduction de la supersymétrie. L'étude de la brisure spontanée de la supersymétrie montre que de nouveaux ingrédients sont nécessaires pour une description détaillée et qu'un modèle minimal ne peut être qu'une description effective. Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM) constitue cette description effective. Chaque particule du modèle standard a un partenaire supersymétrique puisque l'élément fondamental de construction du lagrangien est le supermultiplet.

Une bonne partie des ingrédients pour la construction du MSSM sont dans le modèle standard. On a aussi des différences importantes. La première est que les bosons de jauge de spin 1 ont des partenaires fermioniques de spin 1/2 qui sont des spineurs de Weyl (ou de Majorana dans une notation à quatre composantes), tandis que le modèle standard contenait seulement des spineurs de Dirac. Une autre différence est que le contenu scalaire de la théorie se trouve élargi non seulement à cause des partenaires scalaires des fermions mais aussi dans sa partie de Higgs. Une analyse des anomalies par les diagrammes triangles (comme déjà vu dans le cas du modèle standard) montre que deux doublets de Higgs (et deux doublets de higgsinos) d'hypercharges opposées sont nécessaires pour construire une théorie sans anomalie. La conséquence de ce secteur de Higgs élargi est la présence dans le spectre physique de la théorie de 5 bosons de Higgs, trois neutres et deux chargés. Deux doublets de Higgs sont aussi nécessaires pour donner une masse aux quarks. Dans le modèle standard le doublet de Higgs est utilisé pour donner

une masse aux fermions chargés et aux quarks de type down. Les quarks de type up obtiennent leur masse en utilisant le conjugué de charge du même doublet. Dans le cas supersymétrique le conjugué de charge ne peut pas être utilisé dans le superpotentiel, qui est une fonction holomorphe des supermultiplets Φ_i. La solution la plus simple est donc d'introduire un deuxième doublet avec hypercharge opposée.

8.1 Les particules

Les fermions du modèle standard ont la propriété que la partie gauche et la partie droite se transforment différemment sous le groupe de jauge. Seuls les multiplets chiraux ont la propriété de contenir des fermions avec des composantes gauches et droites qui peuvent se transformer différemment sous le groupe de jauge. Les partenaires scalaires des fermions sont les sfermions (squarks, sleptons). Les parties gauches et droites des fermions sont des spineurs de Weyl différents avec chacun un partenaire scalaire complexe. On va les désigner avec un tilde et un indice L ou R qui indique la chiralité de son partenaire fermionique (les sfermions sont des scalaires et il n'ont pas d'hélicité).

Multiplet	scalaire	fermion	$(SU(3), SU(2), U(1))$
L	$(\tilde{\nu}\ \tilde{e}_L)$	$(\nu\ e_L)$	$(1, 2, -1/2)$
$\bar{e}$	$\tilde{e}^*_R$	$e^\dagger_R$	$(1, 1, 1)$
Q	$(\tilde{u}_L\ \tilde{d}_L)$	$(u_L\ d_L)$	$(3, 2, 1/6)$
$\bar{u}$	$\tilde{u}^*_R$	$u^\dagger_R$	$(\bar{3}, 1, -2/3)$
$\bar{d}$	$\tilde{d}^*_R$	$d^\dagger_R$	$(\bar{3}, 1, 1/3)$
H_u	$(H^+_u\ H^0_u)$	$(\tilde{H}^+_u\ \tilde{H}^0_u)$	$(1, 2, 1/2)$
H_d	$(H^0_d\ H^-_d)$	$(\tilde{H}^0_d\ \tilde{H}^-_d)$	$(1, 2, -1/2)$

Tab. 8.1 – Multiplets chiraux du MSSM.

Pour le secteur de Higgs on a discuté la nécessité d'introduire deux doublets avec leurs partenaires fermioniques, dans deux multiplets chiraux. On va indiquer les deux doublets avec H_u et H_d et les higgsinos correspondants par $\tilde{H}_u$ et $\tilde{H}_d$.

Pour les bosons vecteurs on utilise des multiplets vecteurs et les partenaires fermioniques correspondants sont les gauginos.

Particules	fermion	vecteur	$(SU(3), SU(2), U(1))$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	g	$(8,1,0)$
winos, W^i	$\tilde{W}^{\pm}$ $\tilde{W}^0$	$W^{\pm}$ W^0	$(1,3,0)$
bino, B	$\tilde{B}^0$	B^0	$(1,1,0)$

Tab. 8.2 – Multiplets vecteurs du MSSM.

Les particules indiqués dans les tables (8.1) et (8.1) constituent le spectre du MSSM mais ne sont pas les états propres de masse de la théorie. Après brisure de la symétrie électrofaible et de la supersymétrie on a des mélanges entre les gauginos et les higgsinos et entre les scalaires de Higgs et les sfermions.

8.2 Le superpotentiel

Le superpotentiel du MSSM fait intervenir les multiplets chiraux

$$W_{\text{MSSM}} = \mu H_u H_d - y_e \bar{e} L H_d - y_d \bar{d} Q H_d + y_u \bar{u} Q H_u \ . \tag{8.1}$$

Les paramètres de Yukawa y_e, y_d, y_u sont des matrices 3×3. On a éliminé tous les indices de jauge et de famille dans l'équation précédente. Par exemple $\mu H_u H_d$ signifie $\mu (H_u)_\alpha (H_d)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$ avec $\alpha, \beta = 1, 2$ indices de $SU(2)_L$ d'isospin faible; $y_d \bar{d} Q H_d$ signifie $(y_d)_i{}^j \bar{d}^i_a Q^a_{j\alpha} (H_d)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$ avec $i = 1, 2, 3$ indices de famille et $a = 1, 2, 3$ indices de couleur de $SU(3)_c$.

La formule (8.1) ne contient pas de termes avec H_d^* ou H_u^* en accord avec le fait que le superpotentiel est une fonction holomorphe des supermultiplets Φ_i. Des termes de Yukawa du type $\bar{u} Q H_d^*$ qui seraient présents en général dans un modèle non supersymétrique, sont exclus par l'invariance sous la transformation de supersymétrie. Pour cette raison deux doublets de Higgs sont nécessaires dans les modèles supersymétriques pour donner une masse aux fermions.

Le paramètre μ a la dimension d'une masse au carré, c'est l'équivalent supersymétrique d'un terme de masse pour le boson de Higgs dans le modèle standard. D'autres termes de dimension de masse deux sont donnés par les termes de brisure souple de la supersymétrie.

8.3 Brisure souple de la supersymétrie

Dans le MSSM on traite la brisure de la supersymétrie de façon effective avec des termes souples. Dans le cas du MSSM on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{souple}} &= -\frac{1}{2}\left(m_1\tilde{B}\tilde{B} + m_2\tilde{W}\tilde{W} + m_3\tilde{g}\tilde{g}\right) + \text{c.c.} \\
&+ \left(m_e\tilde{\bar{e}}\tilde{L}H_d + m_d\tilde{\bar{d}}\tilde{Q}H_d - m_u\tilde{\bar{u}}\tilde{Q}H_u\right) + \text{c.c.} \\
&- \tilde{Q}^\dagger m_Q^2\tilde{Q} - \tilde{L}^\dagger m_L^2\tilde{L} - \tilde{\bar{u}}m_{\bar{u}}^2\tilde{\bar{u}}^\dagger - \tilde{\bar{d}}m_{\bar{d}}^2\tilde{\bar{d}}^\dagger - \tilde{\bar{e}}m_{\bar{e}}^2\tilde{\bar{e}}^\dagger \\
&- m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (bH_uH_d + \text{c.c.}) \,.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Les paramètres m_e, m_u, m_d, m_Q^2, m_L^2, $m_{\bar{u}}^2$, $m_{\bar{d}}^2$, $m_{\bar{e}}^2$ sont des matrices 3×3 dans l'espace des familles. Les paramètres dans les deux premières lignes de la formule précédente ont une dimension de masse $\sim m_{\text{souple}}$, les deux dernières lignes contiennent des paramètres avec une dimension $\sim m_{\text{souple}}^2$. La masse m_{souple} ne peut pas être beaucoup plus grande que ~ 1000 GeV. La formule (8.2) est la plus générale pour des termes souples dans le MSSM qui soit renormalisable et compatible avec l'invariance de jauge. Cette description effective de la brisure de la supersymétrie nous oblige à introduire un nombre élevé de nouveaux paramètres par rapport au modèle standard. Après redéfinition des champs par des rotations de phase, on reste avec 105 paramètres de masses, phases et angles de mélange. Avec un modèle plus fondamental de la brisure spontanée de la supersymétrie, le nombre de paramètres indépendants peut se réduire énormément. Une autre possibilité consiste à utiliser les données expérimentales disponibles pour déterminer des relations et des hiérarchies entre les paramètres du lagrangien effectif.

Un exemple est la conservation du nombre leptonique, qui est vérifiée expérimentalement avec une grande précision, surtout pour la première et la deuxième famille. La désintégration $\mu \to e\gamma$ est

$$BR(\mu \to e\gamma) < 1.2 \times 10^{-11} \tag{8.3}$$

et cette limite donne une contrainte sur les mélanges des sleptons qui interviennent dans les diagrammes à boucles pour cette désintégration. Si les éléments des matrices m_L^2 ou $m_{\bar{e}}^2$ sont pris tous du même ordre, la prédiction théorique serait environ 6 ordres de grandeur plus grande que la limite expérimentale.

Pour les quarks on a des contraintes similaires. En général on peut éliminer les contributions dues à la violation des nombres leptoniques et aux

courants neutres qui modifient la saveur par un choix diagonal des matrices m_Q^2, m_L^2, $m_{\bar{u}}^2$, $m_{\bar{d}}^2$, $m_{\bar{e}}^2$:

$$m_i^2 = \begin{pmatrix} m_{i1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{i2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{i3}^2 \end{pmatrix} . \tag{8.4}$$

Une simplification supplémentaire s'obtient en prenant les matrices m_e, m_u, m_d proportionnelles aux matrices des couplages de Yukawa

$$m_e = a_e y_e \, , \qquad m_u = a_u y_u \, , \qquad m_d = a_d y_d \, . \tag{8.5}$$

De cette façon on reproduit pour les squarks et sleptons la même hiérarchie des couplages que pour les quarks et leptons avec des couplages grands pour la troisième famille. Pour éliminer des violations de CP supplémentaires par rapport au modèle standard on peut choisir des phases réelles

$$\arg(m_1) = \arg(m_2) = \arg(m_3) = \arg(a_u) = \arg(a_d) = \arg(a_e) = 0, \pi \, . \tag{8.6}$$

Ces contraintes sont appelées brisure souple universelle. Des versions plus ou moins fortes de ce genre de contraintes sont souvent utilisées dans les modèles supersymétriques à une échelle d'énergie élevée et les couplages à basse énergie sont obtenus par évolution avec le groupe de renormalisation. À l'échelle électrofaible les relations (8.4-8.6) ne sont pas respectées à cause de l'évolution entre l'échelle de haute énergie et l'échelle électrofaible, mais les corrections à ces relations sont en général petites à part les couplages de la troisième famille. En tout cas les contributions à la violation de CP et aux courants faibles qui changent la saveur restent petites.

8.4 Le secteur de Higgs

Le secteur de Higgs du MSSM est constitué par deux doublets complexes avec des couplages déterminés par la supersymétrie (modèle à deux doublets de type II). Le potentiel scalaire classique est

$$\begin{aligned} V &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)\,(|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)\,(|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) \\ &+ b\,(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{c.c.} + \frac{1}{2}\, g_2^2\, |H_u^+ H_d^{0*} + H_u^0 H_d^{-*}|^2 \\ &+ \frac{1}{8}\,(g_2^2 + g_1^2)\,(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 \, . \end{aligned} \tag{8.7}$$

Les termes proportionnels à $|\mu|^2$ ont leur origine dans les termes F, par contre les termes proportionnels aux couplages de jauges g_1 de $U(1)$ et g_2 de $SU(2)$ proviennent des termes D. Le potentiel (8.7) n'est pas complet, il faudrait écrire aussi les contributions des sfermions, qu'on va négliger ici puisque leur valeur dans le vide reste nulle. Une transformation de $SU(2)$ permet de mettre une composante à zéro sans perdre de généralité. On va choisir $H_u^+ = 0$ au minimum : $\partial V/\partial H_u^+ = 0$ ce qui entraîne aussi $H_d^- = 0$. Ces conditions impliquent qu'on a un vide qui est électriquement neutre et qui ne brise donc pas l'électromagnétisme. Avec ce choix $H_u^+ = H_d^- = 0$, on a

$$\begin{aligned} V &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)\,|H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)\,|H_d^0|^2 - b\,(H_u^0 H_d^0 + \text{c.c.}) \\ &+ \frac{1}{8}\,(g_2^2 + g_1^2)\,(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2 \,. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Le seul terme qui peut contenir une phase est b. Cette phase peut s'éliminer par une redéfinition des champs H_u et H_d. Les valeurs dans le vide des champs de Higgs peuvent être choisies réelles et positives et donc la symétrie CP n'est pas brisée par le potentiel de Higgs. Pour la brisure spontanée de la symétrie électrofaible on doit obtenir une combinaison linéaire des champs de Higgs neutres avec une masse carrée négative. Cette condition est vérifiée si

$$b^2 > (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)\,(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) \,. \tag{8.9}$$

On peut noter que $m_{H_u}^2 < 0$ n'est pas une condition suffisante pour la brisure spontanée de la symétrie si $|\mu|$ est trop grand ou si b est trop petit. Il faut aussi s'assurer que le potentiel est limité inférieurement puisqu'on a introduit des termes de brisure de la supersymétrie et que les résultats de positivité du potentiel dans le cas supersymétrique ne sont plus valables. La condition correspondante est

$$2b < 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 \,. \tag{8.10}$$

Par exemple le choix $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$ n'est pas compatible simultanément avec les conditions (8.9) et (8.10). Dans les modèles minimaux de supergravité ou avec médiation de jauge, la condition $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$ est valable au niveau de l'arbre à haute énergie mais l'évolution à l'échelle électrofaible (basse énergie) modifie cette relation et permet de satisfaire aux deux conditions (8.9) et (8.10). L'étude de la brisure de la symétrie électrofaible dans le MSSM est un cas particulier de l'étude d'un modèle à deux doublets de Higgs. On a

deux valeurs dans le vide

$$\langle H_u^0 \rangle = v_u \qquad \langle H_d^0 \rangle = v_d \tag{8.11}$$

avec la relation suivante entre ces valeurs et la valeur v du modèle standard

$$v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2}\,. \tag{8.12}$$

La contribution relative des deux valeurs dans le vide est donnée en termes d'un angle

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d}\,, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\,. \tag{8.13}$$

On peut écrire

$$|\mu|^2 + m_{H_d}^2 = b\tan\beta - \frac{m_Z}{2}\cos 2\beta \tag{8.14}$$

$$|\mu|^2 + m_{H_u}^2 = b\cot\beta + \frac{m_Z}{2}\cos 2\beta\,, \tag{8.15}$$

qui satisfont les conditions (8.9) et (8.10). On peut noter que les paramètres b, $m_{H_d}^2$, $m_{H_u}^2$ ont une origine liée à l'échelle de brisure de la supersymétrie, par contre μ a son origine dans un terme qui respecte la supersymétrie et qui en principe peut être d'une échelle plus grande. Par contre les équations (8.14) et (8.15) indiquent des paramètres de l'ordre de la masse du boson Z. C'est l'origine du problème du terme μ qui, dans un modèle plus fondamental que le MSSM, doit être lié à l'échelle de brisure de la supersymétrie.

Les deux doublet complexes donnent 8 dégrées de liberté scalaires réels. La brisure de la symétrie électrofaible, avec le mécanisme de Higgs en utilise trois, G^0 et $G^\pm$ pour donner une masse à Z et $W^\pm$. Cinq bosons de Higgs restent dans le spectre physique du MSSM : deux bosons neutres et pairs sous transformations de CP, h^0 et H^0; un scalaire neutre et impair sous CP, A^0; deux scalaires chargés $H^\pm$. La relation entre les états de masse et les champs des deux doublets est donnée en termes de deux angles, un angle de mélange pour le secteur neutre

$$\begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Re H_u^0 - v_u \\ \Re H_d^0 - v_d \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

et un angle de mélange β lié par l'équation (8.13) aux valeurs dans le vide

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Im H_u^0 \\ \Im H_d^0 \end{pmatrix}\,, \tag{8.17}$$

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ \Im H_d^{-*} \end{pmatrix} , \tag{8.18}$$

avec $G^- = G^{+*}$ et $H^- = H^{+*}$. Un développement du lagrangien autour du minimum donne les masses au niveau de l'arbre

$$m^2_{h^0,\,H^0} = \frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} + m^2_Z \mp \sqrt{(m^2_{A^0} + m^2_Z)^2 - 4m^2_{A^0} m^2_Z \cos^2 2\beta}\right) \tag{8.19}$$

$$m^2_{A^0} = \frac{2b}{\sin 2\beta} \tag{8.20}$$

$$m^2_{H^\pm} = m^2_{A^0} + m^2_W \ . \tag{8.21}$$

L'angle de mélange α peut s'écrire au niveau de l'arbre en termes des masses $m^2_{A^0}$, m^2_Z et de β

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \, \frac{m^2_{A^0} + m^2_Z}{m^2_{A^0} - m^2_Z} \ . \tag{8.22}$$

La masse du h^0 est limitée supérieurement au niveau de l'arbre par

$$m_{h^0} < |\cos 2\beta| \, m_Z \ ; . \tag{8.23}$$

Les corrections radiatives modifient ce résultat. En particulier en supposant que les masses des sparticules sont plus petites que 1 TeV et que les couplages restent dans la région perturbative jusqu'à l'échelle de l'unification ($\sim 10^5$ GeV) on obtient

$$m_{h^0} < 150 \text{ GeV} \ . \tag{8.24}$$

Cette limite peut être modifiée par des masses souples plus grandes que un TeV, mais la variation est logarithmique, donc la prédiction d'un boson de Higgs léger et accessible aux collisionneurs des particules comme le TeVatron, le LHC ou un collisionneur linéaire e^+e^- est un test fondamental de la supersymétrie à basse énergie. Les propriétés de ce boson de Higgs dépendent du choix des paramètres du modèle et dans plusieurs cas sont semblables à celles du boson de Higgs du modèle standard. Il faut donc dans ce cas trouver d'autres déviations par rapport au modèle standard dans les données pour vérifier l'hypothèse d'un modèle supersymétrique minimal.

Le paramètre $\tan\beta$ est un paramètre libre du MSSM, mais les recherches directes de la supersymétrie aux collisionneurs ont exclu une partie des valeurs à petit $\tan\beta$. Les modèles d'unification avec un groupe $SO(10)$ prédisent une valeur de $\tan\beta$ grand et de l'ordre de m_t/m_b.

8.5 Le spectre de masse

Un point essentiel pour l'étude du spectre de masse réside dans les hypothèses à haute énergie sur les couplages et leur évolution jusqu'à l'échelle électrofaible. L'outil pour étudier cette évolution est le groupe de renormalisation. Au niveau des équations d'évolution à une boucle pour les constantes de couplage[1] $\sqrt{5/3}g_1$, g_2, g_3

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{1}{16\pi^2} b_i g_i^3 \tag{8.25}$$

où $t = \ln(Q/Q_0)$ on a une différence importante par rapport au modèle standard. Les coefficients b_i sont $b_i^{\rm MS} = (41/10, -19/6, -7)$ pour le modèle standard et des valeurs plus grandes dans le MSSM à cause des particules supersymétriques dans les boucles : $b_i^{\rm MSSM} = (33/5, 1, -3)$. Avec les coefficients b_i du modèle standard les trois couplages n'ont jamais la même valeur. Par contre dans le MSSM ils s'unifient à une échelle de l'ordre de 2×10^6 GeV. Ce résultat est souvent considéré comme une évidence partielle en faveur des modèles supersymétriques d'unification.

Les masses des particules ont aussi une évolution avec l'échelle. Par exemple dans les cas des gauginos les mêmes coefficients que pour les couplages interviennent dans l'évolution des masses

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{1}{8\pi^2} b_i g_i^2 m_i \ . \tag{8.26}$$

8.5.1 Charginos et neutralinos

La brisure de la symétrie électrofaible mélange les higgsinos et les gauginos. Dans la partie neutre les higgsinos $\tilde{H}_u^0$ et $\tilde{H}_d^0$ et les gauginos $\tilde{B}$ et $\tilde{W}^0$ se combinent pour former quatre états de masse qu'on appelle les neutralinos $\tilde{\chi}_i^0$ avec $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dans le secteur chargé les higgsinos $\tilde{H}_u^+$ et $\tilde{H}_d^-$ et les gauginos $\tilde{W}^+$ et $\tilde{W}^-$ se combinent pour former les charginos $\tilde{\chi}_i^\pm$ avec $(i = 1, 2)$. D'habitude les charginos et neutralinos sont indiqués en ordre de masse croissante avec l'indice i.

Dans le MSSM on suppose l'existence d'une parité discrète R

$$R = (-1)^{3(B-L)+2s} \tag{8.27}$$

1. Cette normalisation de g_1 est choisie pour être en accord avec celle des théories d'unification

B étant le nombre baryonique, L le nombre leptonique et s le spin. On peut vérifier que toutes les particules du modèle standard ont la parité $R = +1$ et les partenaires supersymétriques la parité $R = -1$. La parité R impose aux particules supersymétriques d'être en nombre pair dans un vertex d'interaction. La première conséquence de cette règle est que dans les collisions des particules "usuelles" ($R = +1$) les particules supersymétriques sont produites par couples. L'autre conséquence est que la désintégration d'une particule supersymétrique ($R = -1$) contient toujours un nombre impair de particules supersymétriques et donc la particule supersymétrique la plus légère est stable.

Souvent dans le spectre des particules du MSSM le neutralino le plus léger est la particule supersymétrique stable comme indiqué par la discussion sur la parité R et constitue un candidat idéal pour la matière noire non baryonique. Le lagrangien du MSSM contient un terme de masse pour les neutralinos

$$-\frac{1}{2}N^T M_{\tilde{\chi}^0} N + \text{c.c.} \tag{8.28}$$

avec $N = (\tilde{b}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0)$ et la matrice de masse

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & -\cos\beta\sin\theta_w m_Z & \sin\beta\sin\theta_w m_Z \\ 0 & m_2 & \cos\beta\cos\theta_w m_Z & -\sin\beta\cos\theta_w m_Z \\ -\cos\beta\sin\theta_w m_Z & \cos\beta\cos\theta_w m_Z & 0 & -\mu \\ \sin\beta\sin\theta_w m_Z & -\sin\beta\cos\theta_w m_Z & -\mu & 0 \end{pmatrix} . \tag{8.29}$$

La matrice de masse se diagonalise par une transformation unitaire et on peut extraire les valeurs et vecteurs propres de masse. Les formules sont compliquées et pour cette raison on va considérer la limite dans laquelle les effets de la brisure de la symétrie électrofaible donnent de petites perturbations de la masse des neutralinos

$$m_Z \ll |\mu \pm m_1|, |\mu \pm m_2| \, . \tag{8.30}$$

Dans cette limite on obtient les valeurs propres

$$m_{\tilde{\chi}_1^0} \simeq m_1 - \frac{m_Z^2 \sin^2\theta_w (m_1 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - m_1^2} \tag{8.31}$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^0} \simeq m_2 - \frac{m_W^2 (m_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - m_2^2} \tag{8.32}$$

$$m_{\tilde{\chi}_3^0} \simeq |\mu| + \frac{m_Z^2(1-\epsilon\sin 2\beta)(|\mu| + m_1\cos^2\theta_w + m_2\sin^2\theta_w)}{2(|\mu|+m_1)\,(|\mu|+m_2)} \quad (8.33)$$

$$m_{\tilde{\chi}_4^0} \simeq |\mu| + \frac{m_Z^2(1+\epsilon\sin 2\beta)(|\mu| - m_1\cos^2\theta_w - m_2\sin^2\theta_w)}{2(|\mu|-m_1)\,(|\mu|-m_2)} \quad (8.34)$$

où on a pris μ réel avec $\epsilon = \pm 1$. On a aussi considéré les masses $m_1 < m_2 < |\mu|$ pour mettre les neutralinos dans l'ordre de masse croissante. Cet ordre peut être modifié si les paramètres sont choisis différemment.

Pour les charginos le terme de masse dans le lagrangien est donné par

$$-\frac{1}{2}C^T M_{\tilde{\chi}^\pm} C + \text{c.c.} \quad (8.35)$$

avec $C = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)$ et la matrice de masse

$$M_{\tilde{\chi}^\pm} = \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} m_2 & \sqrt{2}\sin\beta m_W \\ \sqrt{2}\cos\beta m_W & \mu \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Les valeurs propres de masse, dans la limite de l'équation (8.30), sont

$$m_{\tilde{\chi}_1^\pm} = m_2 - \frac{m_W^2(m_2 + \mu\sin 2\beta)}{\mu^2 - m_2^2} + \ldots \quad (8.37)$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^\pm} = |\mu| + \frac{m_W^2(|\mu| + \epsilon m_2\sin 2\beta)}{\mu^2 - m_2^2} + \ldots \quad (8.38)$$

où pour l'ordre croissant des masses on a supposé $m_2 < |\mu|$.

8.5.2 Le gluino

Le gluino est un fermion octet de couleur (le gaugino de $SU(3)_c$). L'équation d'évolution pour les masses des gauginos est donnée par la formule (8.26). Cette équation montre que le rapport m_i/g_i^2 est constant et indépendant de l'échelle (à part de petites corrections à deux boucles). Dans les modèles de supergravité les masses m_i à l'échelle de Planck Q_P sont données par $m_{1/2}$. On peut donc écrire

$$\frac{m_i(Q)}{g_i^2(Q)} = \frac{m_{1/2}}{g_i^2(Q_P)} \quad (8.39)$$

ce qui implique

$$\frac{m_1(Q)}{g_1^2(Q)} = \frac{m_2(Q)}{g_2^2(Q)} = \frac{m_3(Q)}{g_3^2(Q)}\,. \quad (8.40)$$

Avec les valeurs des couplages mesurés à l'échelle électrofaible on a la prédiction

$$m_1 \ : \ m_2 \ : \ m_3 \simeq \ 1 \ : \ 2 \ : \ 7 \, . \tag{8.41}$$

8.5.3 Sfermions

Si on néglige les couplages de Yukawa des deux premières familles par rapport à la troisième, les squarks et sleptons des ces familles ont seulement des interactions de jauge. Si donc on suppose des matrices de masse diagonales à échelle élevée, elles vont rester diagonales après évolution à une autre échelle. Les équations d'évolution pour les squarks et sleptons des deux premières familles sont

$$16\pi^2 \frac{dm_\phi^2}{dt} = -\sum_i 8 g_i^2 C_i^\phi |m_i|^2 \tag{8.42}$$

où les m_i sont les masses des gauginos et les C_i^ϕ les invariants de Casimir du groupe de jauge correspondant. On peut noter le signe dans l'équation d'évolution qui implique que les masses augmentent quand l'échelle diminue. Même si à échelle élevée les masses sont petites ou nulles, les masses sont larges et positives à l'échelle électrofaible à cause des masses des gauginos. Pour la troisième famille l'effet des couplages de Yukawa ne peut pas être négligé.

Pour calculer le spectre de masse il faut en principe considérer tous les mélanges possibles entre les scalaires avec les mêmes charges et parité R si les termes souples sont complètement arbitraires. L'hypothèse des termes souples diagonaux dans la saveur simplifie énormément cette tâche, puisque la majorité des angles de mélange sont très petits.

8.6 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

H.E. Haber
Introductory Low-Energy Supersymmetry
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9306207

M.E. Peskin
Supersymmetry: the Next Spectroscopy
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0212204

Livres:

M. Drees, R. Godbole, P. Roy
Theory and Phenomenology of Sparticles
World Scientific 2004

Chapitre 9

Les modèles de grande unification

9.1 Introduction

La structure des fermions du modèle standard n'est pas symétrique, en particulier les chiralités gauches et droites ont des lois de transformations différentes sous les symétries de jauge. Dans le cadre du modèle standard cette propriété implique l'absence des termes de masse de Dirac dans le lagrangien (qui ne seraient pas invariants de jauge). La masse des fermions n'est pas donnée par des termes du lagrangien mais par le mécanisme de Higgs. Dans le cadre d'une théorie capable d'inclure tous les interactions ceci est un avantage, puisque l'échelle de masse des fermions est liée à celle de la brisure de la symétrie électrofaible plutôt qu'à l'échelle de l'unification ou à celle de Planck pour la gravitation.

D'autre part cette particularité des interactions du modèle standard ne semble pas indiquer, à première vue, une régularité sous-jacente. Pourtant d'autres indices, comme la compensation des anomalies (qui est imposée par un choix ad hoc des valeurs de l'hypercharge dans le cadre du modèle standard) ou la quantification de la charge, laissent supposer qu'une organisation plus simple, capable de mettre en valeur les analogies entre quarks et leptons, soit possible.

Un autre point insatisfaisant dans le modèle standard est l'existence de trois couplages de jauge indépendants. Pour avoir une théorie unifiée il faudrait avoir un seul couplage à haute énergie et obtenir les forces à basse énergie, avec leurs intensités différentes, comme conséquence de ce couplage unique. Un couplage unique peut s'obtenir à partir d'un groupe de jauge

simple capable d'inclure les groupes de jauge $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ du modèle standard. On peut espérer d'obtenir l'unification sans inclure la gravité si l'échelle de l'unification est beaucoup plus petite que l'échelle de Planck. Pour avoir une idée de l'échelle de grande unification on peut considérer l'évolution des couplages de jauge α_3 et α_2 du modèle standard à une boucle:

$$\alpha_2(Q) = \frac{12\pi}{(22 - 2n_q - n_H/2)} \log(Q^2/\Lambda_2^2) \tag{9.1}$$

$$\alpha_3(Q) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_q)} \log(Q^2/\Lambda_{\rm QCD}^2) \tag{9.2}$$

où n_H est le nombre de doublets de Higgs et on a supposé d'avoir un nombre égal de quarks et leptons. On peut calculer la différence

$$\frac{1}{\alpha_3(Q)} - \frac{1}{\alpha_2(Q)} = \left(\frac{11 + n_H/2}{12\pi}\right) \log\left(\frac{Q^2}{M_X^2}\right) \tag{9.3}$$

en utilisant la relation $\alpha_3(M_X) = \alpha_2(M_X)$ à l'échelle M_X de l'unification. À l'échelle électrofaible $\alpha_3(M_W) \gg \alpha_2(M_W)$ et la formule (9.3) donne

$$\frac{M_X}{M_W} \simeq \exp\left(\alpha_2^{-1}\right) \ . \tag{9.4}$$

Cette dépendance exponentielle de l'échelle de grande unification donne une valeur de l'ordre de 10^{14} GeV pour l'échelle M_X. Cette estimation ne garantit pas l'unification, il faudra vérifier en détail l'unification des trois couplages. L'échelle calculée indique la possibilité d'obtenir une unification des forces fortes, faibles et électromagnétiques sans inclure la gravité.

9.1.1 Le choix du groupe d'unification

Dans une théorie de jauge unifiée, le choix du groupe de jauge est contraint par la nécessité d'avoir un seul couplage à l'échelle d'unification. Le groupe de jauge doit être simple (un seul couplage) ou le produit de groupes simples identiques (avec le même couplage à cause d'une symétrie discrète) et compact [1] (pour garantir aux bosons de jauge une énergie cinétique positive).

1. D'importance particulière pour les applications qu'on va considérer sont les groupes de Lie. Un groupe de Lie est un groupe continu (ses éléments dépendent d'un ensemble continu de paramètres). Si l'ensemble de ces paramètres est compact, le groupe est dit compact. Un groupe de Lie est dit simple s'il n'a pas de sous–groupe de Lie invariant.

Le groupe doit contenir le groupe du modèle standard comme sous–groupe, donc son rang doit être 4 ou plus élevé. Le rang est le nombre de générateurs qui peuvent être simultanément diagonalisés, dans le cas du modèle standard on a deux générateurs diagonaux dans $SU(3)$ de couleur et deux dans $SU(2) \otimes U(1)$, la troisième composante de l'isospin faible et l'hypercharge. Une liste complète des groupes de Lie de rang r est donnée dans la table. Si on se limite au choix minimal de rang 4 on a seulement deux

algèbre	groupe	dimension	rang
A_n	$SU(r+1)$	$r(r+2)$	r
B_n	$SO(2r+1)$	$r(2r+1)$	r
C_n	$Sp(2r)$	$r(2r+1)$	r
D_n	$SO(2r)$	$r(2r-1)$	r
E_6	E_6	78	6
E_7	E_7	133	7
E_8	E_8	248	8
F_4	F_4	52	4
G_2	G_2	14	2

Tab. 9.1 – Liste des groupes de Lie. Le première partie de la table est constitué par des familles infinies. La deuxième partie : E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 sont les 5 groupes de Lie exceptionnels.

groupes avec des représentations complexes : $SU(5)$ et $SU(3) \otimes SU(3)$. Les représentations complexes sont nécessaires puisque dans le modèle standard les fermions ne sont pas équivalents à leur conjugués complexes. Les représentations complexes permettent d'obtenir des fermions gauches et droits qui transforment différemment sous le groupe de jauge.

Le groupe $SU(3) \otimes SU(3)$ ne permet pas d'introduire simultanément des fermions de charge entière (leptons) et fractionnaire (quarks). Le choix minimal est donc unique, le groupe $SU(5)$. L'inclusion du modèle standard dans $SU(5)$ peut se faire avec une représentation en termes des matrices 5×5 diagonales à blocs :

$$\begin{pmatrix} SU(3) & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & SU(2) \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

On obtient ainsi les $3 \times 8 = 24$ générateurs de $SU(5)$, les matrices de Gell–Mann généralisées, qui sont par construction hermitiennes et à trace nulle

(puisque les sous matrices de $SU(3)$ et $SU(2)$ qu'on utilise ont ces propriétés).

9.2 $SU(5)$

Pour construire un modèle de grande unification basé sur le groupe $SU(5)$ il faut examiner les représentations du groupe et leur faire correspondre les multiplets des fermions. Les multiplets de $SU(5)$ sont identifiés par 4 valeurs entières non négatives : $(\lambda_1\,,\lambda_2\,,\lambda_3\,,\lambda_4)$. La dimension N de ces multiplets (le nombre de particules qu'ils peuvent contenir) est donnée par

$$\begin{aligned} N &= (1+\lambda_1)\,(1+\lambda_2)\,(1+\lambda_3)\,(1+\lambda_4)\,\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \\ &\times \left(1+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3}\right) \\ &\times \left(1+\frac{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{3}\right)\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{4}\right) \end{aligned} \tag{9.6}$$

Une étude détaillée demande l'utilisation des méthodes tensoriels, ici on va se limiter à une correspondance graphique en termes des tableaux de Young. Un tableau de Young est constitué par des lignes de carrés alignés à gauche. Un diagramme de $SU(5)$ a au plus 5 lignes. La première ligne a λ_1 carrés de plus que la deuxième. La deuxième ligne a λ_2 carrés de plus que la troisième et ainsi de suite. Pour $SU(5)$ on a la correspondance suivante pour les plus petits multiplets :

$(1,0,0,0) \equiv 5$ $(0,0,0,1) \equiv \bar{5}$ $(0,1,0,0) \equiv 10$ $(0,0,1,0) \equiv \overline{10}$



La représentation 5 est la fondamentale. Pour placer les fermions dans les multiplets de $SU(5)$ il faut rappeler le contenu de $SU(3)\otimes SU(2)$ pour chaque multiplet

$$5 = (3,1)+(1,2) \tag{9.7}$$
$$\bar{5} = (\bar{3},1)+(1,\bar{2}) \tag{9.8}$$
$$10 = (\bar{3},1)+(3,2)+(1,1)\,. \tag{9.9}$$

9.2.1 Exercice A

Le contenu $SU(3) \times SU(2)$ de la représentation 5 de $SU(5)$

$$5 = (3,1) + (1,2) \tag{9.10}$$

peut se comprendre facilement comme un vecteur à 5 composantes dont les trois premières sont un vecteur de $SU(3)$ et les autres deux constituent un vecteur de $SU(2)$. Le contenu $SU(3) \times SU(2)$ des autres représentations de $SU(5)$ peut se calculer à partir de la précédente par un produit comme indiqué dans la suite.

Montrer que pour la représentation 10

$$10 = (\bar{3},1) + (3,2) + (1,1) \tag{9.11}$$

en utilisant les identités suivantes

$$\begin{aligned} 10 &= (5 \times 5)_A \\ \bar{3} &= (3 \times 3)_A \\ 1 &= (2 \times 2)_A \end{aligned} \tag{9.12}$$

où A indique la partie antisymétrique du tenseur.

9.2.2 Fermions

Dans le modèle standard, pour une génération et en fonction des chiralités gauches, on a :

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L : (1,2) \qquad \bar{e_{iL}} : (1,1) \tag{9.13}$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L : (3,2) \qquad \bar{u_{iL}} : (\bar{3},1) \qquad \bar{d}_{iL} : (\bar{3},1) \tag{9.14}$$

Une famille de fermions peut prendre place dans les multiplets de $SU(5)$ de la façon suivante

$$5 : (\psi_i)_R = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^+ \\ -\bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R \qquad \bar{5} : (\psi^i)_L = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \tag{9.15}$$

$$10 \quad : \quad (\psi_{ij})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & u_1 & d_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & u_2 & d_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

où les premiers 3 indices indiquent la couleur et les 2 derniers sont des indices de $SU(2)$. On a une famille complète de fermions dans la représentation réductible de $SU(5)$ dans les multiplets $\bar{5}$ et 10. Le choix des phases (signes) des fermions est en accord avec le choix du modèle standard et avec la conjugaison complexe des antiparticules. Dans l'unification avec le groupe $SU(5)$ les différentes familles de fermions sont des copies des multiplets pour la première famille. En conséquence on ne peut pas donner une explication de la présence de trois familles dans $SU(5)$.

9.2.3 Quantification de la charge et angle de Weinberg

Une conséquence importante de l'unification est la quantification de la charge Q. Pour un groupe non–abélien simple les valeurs propres des générateurs sont discrets. Puisque la charge électrique est un nombre quantique additif, elle s'obtient comme combinaison linéaire des générateurs diagonaux de $SU(5)$. Par conséquence ses valeurs propres sont discrets et la charge est donc quantifiée. Dans le modèle standard le groupe de l'électromagnétisme est un groupe $U(1)$ (groupe abélien) et les valeurs propres sont continus. $SU(5)$ à 4 générateurs diagonaux, mais 2 sont les générateurs de $SU(3)$ de couleur et Q ne peut pas contenir ces générateurs puisque la charge électrique doit commuter avec la couleur. La seule possibilité qui reste est une combinaison des générateurs de $SU(2)$ et $U(1)$ comme dans le modèle standard :

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + cT_0 \ . \tag{9.17}$$

Pour la représentation fondamentale de $SU(5)$ (seuls les éléments diagonaux des matrices diagonales sont indiqués, les éléments hors diagonale étant nuls)

$$T_3 \quad = \quad \frac{\lambda_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1/2 & \\ & & & & -1/2 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

$$T_0 \;=\; \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -3/2 & & \\ & & & & -3/2 & \end{pmatrix} . \tag{9.19}$$

Une comparaison avec les valeurs de l'hypercharge du multiplet 5, $Y(5) = (-2/3,\, -2/3,\, -2/3, 1, 1)$ permet de choisir le coefficient de la combinaison linéaire (9.17)

$$c = -\sqrt{\frac{5}{3}}\,. \tag{9.20}$$

L'action de l'opérateur Q sur le multiplet 5 donne les valeurs des charges du multiplet

$$Q(\psi_i)_R = \begin{pmatrix} -1/3 & & & & & \\ & -1/3 & & & & \\ & & -1/3 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix} . \tag{9.21}$$

L'aspect le plus intéressant de la quantification de la charge est la possibilité d'expliquer les charges des quarks. La condition de trace nulle pour l'opérateur Q implique, pour trois couleurs

$$3Q_d + Q_{e^+} = 0 \tag{9.22}$$

donc la charge $1/3$ des quarks de type down est due à la présence de trois couleurs.

Il reste a vérifier que le choix des multiplets des fermions ne donne pas d'anomalies. La formule pour les anomalies fait intervenir les constantes totalement symétriques d^{abc} de la représentation R

$$\mathrm{Tr}\left[\{T^a(R), T^b(R)\}\, T^c(R)\right] = \frac{1}{2} A(R)\, d^{abc} \tag{9.23}$$

la quantité $A(R)$ qui caractérise l'anomalie est indépendante des générateurs, donc il suffit de choisir un des générateurs pour la calculer, par exemple $T^a(R) = T^b(R) = T^c(R) = Q$. On peut facilement vérifier que l'anomalie s'annule entre les représentations fermioniques 10 et $\bar{5}$:

$$A(10) + A(\bar{5}) = \mathrm{Tr}\, Q^3(\psi_{ij}) + \mathrm{Tr}\, Q^3(\psi^i) = 0\,. \tag{9.24}$$

Une autre prédiction importante du modèle est l'angle de Weinberg à l'échelle d'unification M_X. Pour le calculer il faut comparer les constantes de couplages de $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ avec le couplage unique de $SU(5)$. On va considérer l'action de la dérivée covariante en $SU(5)$ sur la représentation fondamentale 5 :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \tag{9.25}$$

et dans $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=0}^{8} G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} + ig \sum_{m=1}^{3} W_\mu^m \frac{\tau^m}{2} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \, . \tag{9.26}$$

La définition des couplages dépende de la normalisation des générateurs. Pour les groupes non–abéliens la normalisation est fixée par les relations de commutations non-linéaires de l'algèbre de Lie:

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1 \quad \text{avec} \quad g_3 \equiv g_s \, , \quad g_2 \equiv g \tag{9.27}$$

Pour le groupe Abélien $U(1)$ la normalisation n'est pas fixée par l'algèbre et il faut comparer la normalisation de $U(1)$ à celle de $SU(5)$

$$ig_1 A_\mu^0 \frac{\lambda^0}{2} = ig' B_\mu \frac{Y}{2} \, . \tag{9.28}$$

Ceci est équivalent à déterminer le facteur c de l'équation (9.17). Le résultat de la formule (9.20) se traduit ici dans la relation suivante entre les couplages

$$Y = -\sqrt{\frac{5}{3}} \lambda^0 \, , \qquad g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \tag{9.29}$$

et la prédiction pour l'angle de Weinberg à l'échelle d'unification est

$$\sin^2 \theta_w \equiv \frac{g'^2}{g'^2 + g^2} = \frac{3/5 \; g_5^2}{3/5 \; g_5^2 + g_5^2} = \frac{3}{8} \, . \tag{9.30}$$

Pour déterminer la prédiction de l'angle de Weinberg à basse énergie il faut étudier l'évolution des couplages avec l'énergie. La théorie d'unification a deux échelles très différentes, l'échelle électrofaible $\mathcal{O}(m_W)$ et l'échelle d'unification $\mathcal{O}(m_X)$. Pour des valeurs d'énergie inférieurs à l'échelle d'unification il suffit de considérer la théorie effective de basse énergie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Si on néglige la contribution des scalaires, les équations de groupe de renormalisation pour les couplages sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\alpha_1^2}{2\pi}\left(\frac{2}{3}\,N_f\right) \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\alpha_2^2}{2\pi}\left(\frac{22}{3}-\frac{2}{3}\,N_f\right) \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -\frac{\alpha_3^2}{2\pi}\left(11-\frac{2}{3}\,N_f\right) \end{aligned} \tag{9.31}$$

où $t = \ln\mu$ avec μ échelle d'énergie et N_f le nombre de saveurs des quarks. La solution des ces équations est de la forme

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(m_X)} + \frac{b_i}{2\pi}\ln\frac{m_X}{\mu} \tag{9.32}$$

où b_i est le coefficient numérique entre parenthèses dans l'équation (9.31). À l'échelle d'unification on impose

$$\alpha_1(m_X) = \alpha_2(m_X) = \alpha_3(m_X)\ . \tag{9.33}$$

La différence entre les deux équations de type (9.32) pour α_1 et α_2 donne

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} - \frac{1}{\alpha_1(\mu)} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{22}{3}\ln\frac{m_X}{\mu}\ . \tag{9.34}$$

Si on prend comme échelle μ l'échelle électrofaible m_W et on utilise les relations

$$\frac{3}{5}\alpha_1(\mu) = \frac{g'^2(\mu)}{4\pi}\ , \qquad \alpha_2(\mu) = \frac{g^2(\mu)}{4\pi} \tag{9.35}$$

on peut calculer la valeur de l'angle de Weinberg à l'échelle électrofaible

$$\sin^2\theta_w(m_W) \simeq \frac{3}{8}\left(1 - \frac{55\,\alpha_1(m_W)}{24\pi}\,\ln\frac{m_X}{m_W}\right)\ . \tag{9.36}$$

Pour une valeur de l'échelle d'unification de l'ordre de $M_X \simeq 2.1\times10^{14}$ GeV (qu'on peut obtenir en utilisant les équations de groupe de renormalisation pour α_1 et $alpha_3$) et avec l'inclusion des contributions des scalaires on a

$$\sin^2\theta_w(m_W) = 0.214 \pm 0.003\ . \tag{9.37}$$

La valeur mesurée est

$$\sin^2\theta_w(m_W) = 0.23161 \pm 0.00018\ . \tag{9.38}$$

en désaccord avec le modèle. Si on procède de façon inverse à partir des données de basse énergie pour déterminer l'échelle d'unification on peut montrer que les trois couplages ne s'unifient pas dans le modèle $SU(5)$ minimal. D'autres ingrédients, comme la supersymétrie vont permettre d'obtenir des modèles en accord avec les données de précision et l'unification des couplages à haute énergie.

9.2.4 Exercice B

Calculer les valeurs des charges pour les multiplets $\bar{5}$ et 10 de $SU(5)$.

9.2.5 Bosons de jauge

La représentation adjointe de $SU(5)$ a dimension 24 et en fonction de $(SU(3)_c,SU(2))$ sa décomposition est donnée par

$$24 = (8,1) + (1,3) + (1,1) + (3,2) + (\bar{3},2) \tag{9.39}$$

ce qui nous va permettre d'individuer les gluons G dans (8,1), les bosons de jauge W de $SU(2)$ dans (1,3), le boson B de $U(1)$ dans (1,1) et 12 bosons de jauge X, Y de (3,2) et $(\bar{3},2)$ chargés sous $SU(2)$ et $SU(3)$. En notation matricielle 5×5 les bosons de jauge du modèle $SU(5)$ sont

$$\begin{pmatrix} G^3+\frac{G^8}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{5}}B & G_1-iG_2 & G_4-iG_5 & X_1 & Y_1 \\ G^1+iG^2 & -G^3+\frac{G^8}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{5}}B & G_6-iG_7 & X_2 & Y_2 \\ G^4+iG^5 & G^6+iG^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}G^8-\sqrt{\frac{2}{5}}B & X_3 & Y_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{10}}B & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{10}}B \end{pmatrix}\ . \tag{9.40}$$

Les bosons X et Y ont une charge de couleur fractionnaire, $Q_X = 4/3$ et $Q_Y = 1/3$. Leur présence donne lieu à des couplages entre quarks et leptons et à la violation du nombre baryonique et leptonique. Les contraintes sur les désintégrations de ce type indiquent que l'échelle de masse de ces bosons est

de plusieurs ordres de grandeur plus large que l'échelle électrofaible. Il y a donc une hiérarchie de brisure de la symétrie

$$SU(5) \xrightarrow{v_1} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{v_2} SU(3) \otimes U(1)_{\text{em}} \tag{9.41}$$

avec $v_1 \gg v_2$.

9.2.6 Secteur de Higgs et brisure spontanée de symétrie

Le choix du secteur de Higgs doit se faire de façon à donner une brisure spontanée de symétrie qui respecte cette hiérarchie. Pour la première étape de brisure de la symétrie on utilise un multiplet de Higgs ϕ qui appartient à la représentation irréductible 24

$$\langle \phi \rangle = v_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \tag{9.42}$$

et qui brise $SU(5)$ à $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. La brisure à l'échelle électrofaible est réalisé par un multiplet de Higgs 5

$$\langle \varphi \rangle = v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \tag{9.43}$$

Si on suppose $v_1 \gg v_2$ on peut traiter les deux parties du potentiel de Higgs comme indépendantes, les minimiser séparément et déduire des valeurs rapprochés pour les masses des bosons de jauge

$$m_X^2 \simeq m_Y^2 \simeq \frac{25}{8} g^2 v_1^2 \tag{9.44}$$

$$m_W^2 \simeq \frac{g^2 v_2^2}{4} \tag{9.45}$$

$$m_Z^2 \simeq \frac{g^2 v_2^2}{4 \cos^2 \theta_w} . \tag{9.46}$$

En réalité un traitement exact de la brisure est nécessaire pour mettre en évidence les problèmes de hiérarchie de jauge du modèle. Le potentiel de Higgs complet avec les deux multiplets est

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}\mu^2 \mathrm{Tr}\Phi^2 + \frac{1}{4}a\left(\mathrm{Tr}\Phi^2\right)^2 + \frac{1}{2}b\mathrm{Tr}\Phi^4 - \frac{1}{2}\nu^2\varphi^\dagger\varphi + \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^\dagger\varphi\right)^2 \\ &+ \alpha\varphi^\dagger\varphi\mathrm{Tr}\Phi^2 + \beta\varphi^\dagger\Phi^2\varphi\ . \end{aligned} \tag{9.47}$$

et le minimum du potentiel complet est donné par $\langle\varphi\rangle$ de l'équation (9.43) et par

$$\langle\phi\rangle = v_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2-\epsilon/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2-\epsilon/2 \end{pmatrix} \tag{9.48}$$

avec

$$\epsilon \simeq \frac{3}{20b}\,\beta\,\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \tag{9.49}$$

si on se limite au premier ordre en $(v_2/v_1)^2$.

9.2.7 Désintégration du proton

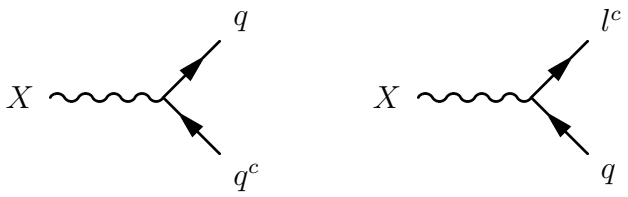
Une conséquence phénoménologique importante des modèles de grande unification est la désintégration du proton, due à la non–conservation du nombre baryonique. En particulier le modèle minimal $SU(5)$, mais aussi d'autres modèles de grande unification, sont exclus à cause d'une désintégration du proton trop rapide et incompatible avec les limites sur le temps de vie du proton.

La partie du Lagrangien du modèle qui est responsable de la désintégration du proton est celle qui contient les interactions des bosons lourds X et Y avec les fermions. Ces interactions sont contenues dans les dérivées covariantes des fermions

$$\begin{aligned} g &\quad \psi^i\gamma^\mu(A_i^j)_\mu^T\psi_j + \mathrm{Tr}\ g\psi^{ij}\gamma^\mu\{(A_i^k)_\mu\,,\psi_{jk}\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^\dagger\left(\bar\nu\gamma^\mu e + \bar u^\alpha\gamma^\mu d_\alpha\right) \\ &+ \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}gX_{\mu\,\alpha}^a\left[\epsilon^{\alpha\beta\delta}\bar u_\delta^c\gamma^\mu q_{\beta a} + \epsilon^{ab}\left(\bar q_{\alpha b}\gamma^\mu\bar e - \bar l_b\gamma^\mu d_\alpha^c + \ldots\right)\right] \end{aligned} \tag{9.50}$$

où A est la matrice (9.40) des bosons de jauge, g est le couplage de $SU(5)$, a, b des indices de $SU(2)$, $\alpha\beta\delta$ des indices de $SU(3)$. Par exemple le doublet

de $SU(2)$ $X^a_\alpha \equiv (X_\alpha, Y_\alpha)$. Dans la formule (9.50) nous avons considéré une seule famille de fermions. Le traitement complet des trois familles demande aussi une analyse des angles de mélange et de la violation de CP. Les masses



Tab. 9.2 – Exemples d'interactions qui changent le nombre baryonique et participent à la désintégration du proton au niveau de l'arbre

des bosons X et Y sont très grandes par rapport à celles des fermions et aux énergies dans la désintégration du proton. À basse énergie il est possible d'écrire une lagrangien effectif d'interaction à quatre fermions

$$\mathcal{L} = \frac{g^2}{2M_X^2}\epsilon^{\alpha\beta\delta}\left(\bar{u}^c_\delta\gamma^\mu q_{\beta a}\right)\epsilon^{ab}\left(\bar{d}^c_\alpha\gamma_\mu l_b + \bar{e}\gamma_\mu q_{\alpha b}\right) \ . \tag{9.51}$$

Ce lagrangien conserve la différence du nombre baryonique et leptonique $B-L$. Une désintégration qui conserve $B-L$ est $p \to e^+\pi^0$. Pour obtenir le temps de vie du proton il faut d'abord déterminer le corrections de QCD et faibles au lagrangien (9.51) dans l'évolution entre l'échelle d'unification M_X et l'échelle de basse énergie ~ 1 GeV du proton. Ensuite il faut passer de la description en fonction des champs des quarks aux mésons et baryons. Les calculs détaillés donnent

$$\tau_p \sim 10^{28} - 10^{30} \ \text{ ans} \tag{9.52}$$

à comparer avec le résultat expérimental

$$\tau_p > 6.1 \times 10^{33} \ \text{ ans} \ . \tag{9.53}$$

Le modèle $SU(5)$ minimal est donc exclu. Dans la formule (9.50) et (9.51) nous avons négligé l'interaction du secteur de Higgs avec les fermions, qui donne des termes effectifs à quatre fermions qui interviennent aussi dans la désintégration du proton. Si le secteur de Higgs est étendu on peut modifier la durée de vie du proton et obtenir un résultat compatible avec les limites

expérimentales. L'introduction d'un secteur de Higgs étendu a la conséquence d'affecter d'autres mesures, en particulier le nombre de triplets de Higgs modifient les moments dipolaires des fermions. Une solution réaliste au problème de la désintégration trop rapide du proton demande l'introduction de la supersymétrie et/ou des modèles non–minimaux de la grande unification.

9.3 Solution des exercices

Exercice A

On peut utiliser la représentation 5 de $SU(5)$

$$5 = (3,1) + (1,2) \tag{9.54}$$

pour construire le produit

$$\begin{aligned} 5 \times 5 &= [(3,1) + (1,2)] \times [(3,1) + (1,2)] \\ &= (3 \times 3, 1) + (3,2) + (1, 2 \times 2) \; . \end{aligned} \tag{9.55}$$

La partie antisymétrique de ce produit nous donne le résultat

$$\begin{aligned} 10 &= (5 \times 5)_A \\ &= (\bar{3},1) + (3,2) + (1,1) \end{aligned} \tag{9.56}$$

Exercice B

L'hypercharge des leptons et quarks de chiralité gauche est donnée par

$$Y(l_L) = -1, \qquad Y(q_L) = 1/3 \; , \tag{9.57}$$

la troisième composante de l'isospin faible par

$$T_3(u_L) = T_3(\nu_L) = 1/2 \qquad T_3(d_L) = T_3(e_L^-) = -1/2 \; . \tag{9.58}$$

Pour les antiparticules le signe de l'hypercharge est opposé et celui de la troisième composante de l'isospin faible aussi, par exemple:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L \longrightarrow \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu} \end{pmatrix}_L \; . \tag{9.59}$$

La charge électrique est donnée par la relation (9.17)

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \tag{9.60}$$

Pour le multiplet $\bar{5}$,

$$T_3(\bar{5}) = \begin{pmatrix} 1/2 & & & & \\ & 1/2 & & & \\ & & 1/2 & & \\ & & & -1/2 & \\ & & & & 1/2 \end{pmatrix} \tag{9.61}$$

$$Y(\bar{5}) = \begin{pmatrix} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \tag{9.62}$$

et les charges du multiplet sont

$$Q(\bar{5}) = \begin{pmatrix} 1/3 & & & & \\ & 1/3 & & & \\ & & 1/3 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.63}$$

Pour le multiplet 10,

$$T_3(10) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.64}$$

$$Y(10) = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.65}$$

et les charges du multiplet sont

$$Q(10) = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 0 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.66}$$

en accord avec les charges des quarks et leptons du modèle standard.

9.4 Bibliographie

Cours disponibles sur Internet:

E. Witten
Quest for Unification
http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/0207124

J. Ellis
Beyond the Standard Model for Hillwalkers
Chapitre 4 - Grand Unification
http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9812235

Livres:

R.N. Mohapatra
Unification and Supersymmetry
Third edition 2003
Springer

Chapitre 10

Appendice

10.1 Spin 1/2

10.1.1 Weyl

Pour les champs de spin 1/2 on a deux représentation non équivalentes de $SL(2,\mathcal{C})$:

$$\xi^a \in (1/2,0) \quad a = 1,2 \qquad \bar{\xi}^{\dot{a}} \in (0,1/2) \quad \dot{a} = 1,2 \tag{10.1}$$

Une représentation du groupe $SL(2,\mathcal{C})$ est donnée par les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathcal{C}) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{10.2}$$

avec α, β, γ, $\delta \in \mathcal{C}$ (les nombres complexes). Si ξ^1, ξ^2 sont les deux composantes d'un spineur (1/2,0) et $\bar{\xi}^{\dot{1}}$, $\bar{\xi}^{\dot{2}}$ les deux composantes[1] d'un spineur (0,1/2), les transformations sous $SL(2,\mathcal{C})$ sont données par

$$\begin{aligned} \xi'^1 &= \alpha\xi^1 + \beta\xi^2 & \bar{\xi}'^{\dot{1}} &= \alpha^*\bar{\xi}^{\dot{1}} + \beta^*\bar{\xi}^{\dot{2}} \\ \xi'^2 &= \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 & \bar{\xi}'^{\dot{2}} &= \gamma^*\bar{\xi}^{\dot{1}} + \delta^*\bar{\xi}^{\dot{2}} \end{aligned}$$

avec α^* complexe conjugué de α. On peut donc définir

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_\alpha)^* \qquad \chi^\alpha \equiv (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^* \tag{10.3}$$

1. La barre sur les spineurs (0,1/2) n'est pas en principe nécessaire, puisque le point sur l'indice du spineur permet déjà de distinguer les deux types de spineurs. Néanmoins en supersymétrie les indices des spineurs ne sont souvent pas explicitement indiqués et la barre reste le seul moyen de distinguer les deux types de spineurs.

La matrice

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.4}$$

avec $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ et $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\alpha\beta}$, relie les spineurs covariants ξ_a et contravariants ξ^a par les formules

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \qquad \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta \tag{10.5}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \qquad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{10.6}$$

L'équation de Dirac avec masse m en fonction des spineurs $\bar{\eta}_{\dot{b}} \in (0,1/2)$ et $\xi^a \in (1/2,0)$ est dans la représentation des impulsions

$$p^{a\dot{b}}\bar{\eta}_{\dot{b}} = m\xi^a \tag{10.7}$$

$$p_{\dot{b}a}\xi^a = m\bar{\eta}_{\dot{b}} \tag{10.8}$$

avec

$$p^{a\dot{b}} = (\vec{p}\cdot\vec{\sigma} + p_0\cdot\sigma_0)^{a\dot{b}} \qquad p_{\dot{b}a} = (-\vec{p}\cdot\vec{\sigma} + p_0\cdot\sigma_0)_{\dot{b}a} \tag{10.9}$$

où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

Si $m = 0$ les deux équations (10.7) et (10.8) se découplent. À l'aide des matrices de Pauli on peut définir des vecteurs de matrices

$$\sigma^\mu \equiv (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{10.11}$$

$$\bar{\sigma}^\mu \equiv (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) = \sigma_\mu \tag{10.12}$$

et des tenseurs

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) \tag{10.13}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\ . \tag{10.14}$$

Ces matrices sont liées aux transformations de Lorentz des spineurs et on peut montrer qu'elles ont des indices de $SL(2,C)$:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\alpha} \qquad (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} \qquad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \tag{10.15}$$

Les champs des spineurs anti–commutent entre eux (variables de Grassmann) et on peut par exemple vérifier que

$$\chi^\alpha\psi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \psi^\alpha\chi_\alpha \tag{10.16}$$
$$\bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = -\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha} = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha}\,. \tag{10.17}$$

Souvent en supersymétrie les indices sommés des spineurs ne sont pas indiqués et la définition utilisée est la suivante :

$$\chi\psi \equiv \chi^\alpha\psi_\alpha = \psi\chi \tag{10.18}$$
$$\bar\chi\bar\psi \equiv \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = \bar\psi\bar\chi\,. \tag{10.19}$$

Une conséquence de l'anti–commutation est que les polynômes complexes d'une variable de Grassmann η sont limités, puisque $\eta^2 = \bar\eta^2 = 0$ et $\eta\bar\eta = -\bar\eta\eta$:

$$P(\eta,\bar\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\bar\eta + a_3\eta\bar\eta \tag{10.20}$$

où a_i sont des coefficients complexes.

10.1.2 Dirac

En utilisant les matrices de Dirac, par exemple en représentation de Weyl [2] :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

et le spineur de Dirac à quatre composantes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\beta} \end{pmatrix} \in (1/2{,}0) \oplus (0{,}1/2) \tag{10.22}$$

de $SL(2,\mathcal{C})$ c'est à dire en utilisant une représentation réductible, on peut écrire les équations de Dirac comme

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0\,. \tag{10.23}$$

2. Les matrices de Dirac peuvent s'écrire sous différentes formes. La représentation de Weyl qu'on utilise ici va être utile pour mettre en évidence les propriétés de chiralité des spineurs.

L'équation (10.23) peut s'obtenir comme équation du mouvement à partir du lagrangien

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{10.24}$$

avec $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$. Le lagrangien est invariant sous les transformations de $U(1)$:

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}\ . \tag{10.25}$$

Le courant conservé qui correspond à cette invariance est

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{10.26}$$

qui implique la conservation du nombre fermionique. Seulement dans la représentation réductible ψ il est possible d'écrire un terme de masse qui conserve le nombre fermionique. Si on renonce à la conservation du nombre fermionique il est possible d'écrire le terme de masse de Majorana:

$$m\,\xi^\alpha\xi_\alpha + h.c. \tag{10.27}$$

invariant sous $SL(2,\mathcal{C})$.

Les spineurs de Dirac peuvent s'écrire en fonction des spineurs avec chiralité définie gauche L et droite R

$$\psi_D = \psi_L + \psi_R \tag{10.28}$$

où

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi_D \tag{10.29}$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_D\ . \tag{10.30}$$

Dans la représentation de Weyl des matrices de Dirac, les deux composantes supérieures du spineur de Dirac ont la chiralité gauche et les deux composantes inférieures ont la chiralité droite. On peut donc écrire

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{10.31}$$

Les spineurs de chiralité définie interviennent dans la construction du modèle standard. On peut facilement vérifier que la conjugaison complexe et la matrice σ_2 de Pauli permettent d'écrire une chiralité en termes de l'autre :

$$\bar{\psi}_L \sim \sigma_2\psi_R^* \qquad \bar{\psi}_R \sim \sigma_2\psi_L^*\ . \tag{10.32}$$

Cette propriété est utilisée dans les chapitres précédents pour écrire les spineurs droits en termes des spineurs gauches.

Avec les spineurs de Dirac on peut construire de formes bilinéaires covariantes. Ces formes bilinéaires peuvent s'écrire aussi en fonction de spineurs de Weyl. On va utiliser les deux spineurs de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{10.33}$$

Les bilinéaires sont :

$$\bar{\Psi}\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} + \chi\phi = (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger \tag{10.34}$$
$$\bar{\Psi}\gamma_5\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} - \chi\phi = -(\bar{\Phi}\gamma_5\Psi)^\dagger \tag{10.35}$$
$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Phi = \chi\sigma^\mu\bar{\eta} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = (\bar{\Phi}\gamma^\mu\Psi)^\dagger \tag{10.36}$$
$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Phi = \chi\sigma^\mu\bar{\eta} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = (\bar{\Phi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)^\dagger . \tag{10.37}$$

10.1.3 Majorana

La conjugaison de charge pour un spineur de Dirac est donnée par

$$\psi_D^c \equiv C\,\bar{\psi}_D^T . \tag{10.38}$$

La forme de la matrice de conjugaison de charge C dépend de la représentation. En fonction des spineurs de Weyl on a

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \qquad \psi_D^c = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} . \tag{10.39}$$

Un spineur de Majorana est défini comme le spineur à quatre composantes qui est égal à son conjugué de charge

$$\psi_M = \psi_M^c . \tag{10.40}$$

Ceci est possible seulement si

$$\psi_\alpha = \chi_\alpha \qquad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} . \tag{10.41}$$

On peut construire un spineur de Majorana à partir d'un spineur de Weyl

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{10.42}$$

Avec les spineurs de Majorana

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \Phi_M = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{10.43}$$

on peut construire des formes bilinéaires et les exprimer en termes des spineurs de Weyl :

$$\bar{\Psi}_M \Phi_M = \bar{\psi}\bar{\phi} + \psi\phi = \bar{\Phi}_M \Psi_M = (\bar{\Psi}_M \Phi_M)^\dagger \tag{10.44}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma_5 \Phi_M = \bar{\psi}\bar{\phi} - \psi\phi = \bar{\Phi}_M \gamma_5 \Psi_M = -(\bar{\Psi}_M \gamma_5 \Phi_M)^\dagger \tag{10.45}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\phi} + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = -\bar{\Phi}_M \gamma^\mu \Psi_M = -(\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \Phi_M)^\dagger \tag{10.46}$$

$$\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Phi_M = \psi\sigma^\mu\bar{\phi} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\phi = \bar{\Phi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_M = (\bar{\Psi}_M \gamma^\mu \gamma_5 \Phi_M)^\dagger \tag{10.47}$$

10.2 Équation de Dirac

L'équation de Dirac s'obtient en généralisant l'équation de Schrödinger dans le cas relativiste en imposant à l'équation d'être linéaire dans les dérivées

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\,\alpha\cdot\nabla\,\psi + \beta\, m\,\psi \tag{10.48}$$

ou (en termes de l'impulsion)

$$H\psi = (\alpha\cdot \mathrm{p} + \beta\, m)\,\psi \tag{10.49}$$

de satisfaire à la relation relativiste entre l'énergie et l'impulsion:

$$H^2\psi = (\mathrm{p}^2 + m^2)\,\psi\ . \tag{10.50}$$

On a

$$H^2\psi = (\alpha_i p_i + \beta\, m)\,(\alpha_j p_j + \beta\, m)\,\psi \tag{10.51}$$

$$= (\alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\,p_i p_j + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i\, m + \beta^2 m^2)\,\psi\ . \tag{10.52}$$

Les contraintes sur les α_i et β ne sont pas compatibles avec des nombres qui commutent et la solution la plus simple consiste à prendre des matrices 4×4. Une représentation possible est

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{10.53}$$

avec I la matrice identité 2×2 et $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ les matrices 2×2 de Pauli.

10.2.1 Matrices de Dirac

En multipliant l'équation (10.48) par β à gauche on peut écrire l'équation de Dirac sous forme covariante :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{10.54}$$

où γ^μ est un vecteur de Lorentz à 4 composantes avec comme éléments les matrices de Dirac :

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha^1, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3)\ . \tag{10.55}$$

L'équation de Dirac (10.54) est écrite en une notation compacte. Il s'agit en réalité de 4 équations différentielles couplées pour les 4 composantes du spineur ψ:

$$\sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{\mu} i(\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m\,\delta_{jk} \right) \psi_k = 0\ . \tag{10.56}$$

Une représentation des matrices γ^μ de Dirac est la suivante

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\ , \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{10.57}$$

avec $\gamma = (\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$. Pour simplifier la notation on introduit aussi la matrice

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ . \tag{10.58}$$

Les matrices de Dirac anticommutent

$$\{\gamma^\mu\,, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad\qquad \{\gamma^\mu\,, \gamma_5\} = 0 \tag{10.59}$$

Les propriétés des matrices de Dirac sont les suivantes

$$\begin{array}{ll} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 & (\gamma^0)^2 = I \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i & (\gamma^i)^2 = -I \\ \gamma_5^\dagger = \gamma_5 & \gamma_5^2 = I \end{array} \tag{10.60}$$

où l'indice $i = 1,2,3$. Les propriétés par rapport à la conjugaison Hermitienne peuvent se résumer

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\ , \qquad \gamma_5^\dagger = -\gamma^0\gamma_5\gamma^0\ . \tag{10.61}$$

Souvent dans le calcul de diagrammes de Feynman il est nécessaire d'évaluer des traces de produits de matrices de Dirac :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(I) &= 4 \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
\mathrm{Tr}(\gamma_5) &= 0 \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) &= 0 \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{10.62}$$

et la trace d'un nombre impair de matrices γ^μ est toujours zéro. Les contractions entre matrices de Dirac sont aussi souvent utiles

$$\begin{aligned}
\gamma^\lambda\gamma_\lambda &= 4 \\
\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\lambda &= -2\gamma^\mu \\
\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\lambda &= 4g^{\mu\nu} \\
\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\lambda &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu \\
\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\lambda &= 2(\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) \\
\gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu}\gamma_\lambda &= 0 \\
\gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\lambda &= 2\gamma^\rho\sigma^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{10.63}$$

L'équation pour le spineur adjoint $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ est

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{10.64}$$

Pour une particule libre les solutions de l'équation de Dirac sont de la forme

$$\psi = u(\mathrm{p},s)\, e^{-ip\cdot x} \qquad \psi = v(\mathrm{p},s)\, e^{ip\cdot x} \tag{10.65}$$

avec $v(\mathrm{p},s) \equiv u(-\mathrm{p},s)$ pour décrire les antiparticules. En introduisant ces solutions dans l'équation de Dirac on obtient

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\mathrm{p},s) = 0 \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m)\, v(\mathrm{p},s) = 0\ , \tag{10.66}$$

souvent la notation abrégée $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ est utilisée

$$(\not{p} - m)\, u = 0 \qquad (\not{p} + m)\, v = 0\ . \tag{10.67}$$

On donne sans démonstration les résultats suivants

$$\bar{u}(p,s)u(p,s') = 2m\delta_{s,s'} \qquad \bar{v}(p,s)v(p,s') = -2m\delta_{s,s'} \tag{10.68}$$

où $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$, $\bar{v} = v^\dagger\gamma^0$ et s vaut 1 ou 2 (indice de spin). La somme sur les spins est

$$\sum_{s=1,2} u_\alpha(p,s)\ \bar{u}_\beta(p,s) \;=\; (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \tag{10.69}$$

$$\sum_{s=1,2} v_\alpha(p,s)\ \bar{v}_\beta(p,s) \;=\; (\not{p} - m)_{\alpha\beta}\ . \tag{10.70}$$

10.2.2 Solutions de l'équation de Dirac

Les vecteurs propres de l'équation de Dirac sont plus faciles à trouver à partir de l'équation (10.49)

$$H\,u(p,s) = (\alpha\cdot \mathrm{p} + \beta\, m)\,u(p,s) = E\,u(p,s) \tag{10.71}$$

et en utilisant la forme explicite des matrices

$$H\,u(p,s) = \begin{pmatrix} m & \sigma\cdot\mathrm{p} \\ \sigma\cdot\mathrm{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a(p,s) \\ u_b(p,s) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_a(p,s) \\ u_b(p,s) \end{pmatrix} \tag{10.72}$$

où le spineur à 4 composantes u est écrit sous la forme $u = (u_a,u_b)$ en termes de spineurs à deux composantes. On a

$$\sigma\cdot\mathrm{p}\,u_b(p,s) \;=\; (E-m)\,u_a(p,s) \tag{10.73}$$

$$\sigma\cdot\mathrm{p}\,u_a(p,s) \;=\; (E+m)\,u_b(p,s) \tag{10.74}$$

Pour les deux solutions à énergie positive on peut choisir $u_a(p,s) = \chi^{(s)}$ avec

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ . \tag{10.75}$$

u_b peut se déterminer à partir de (10.74) :

$$u_b(p,s) = \frac{\sigma\cdot\mathrm{p}}{E+m}\,\chi^{(s)}\ . \tag{10.76}$$

Pour les deux solutions à énergie négative on peut choisir $u_b(p,s) = \chi^{(s)}$ et déterminer $u_a(p,s)$ avec (10.73) .

10.2.3 Hélicité

Pour une impulsion et une énergie données l'équation de Dirac a une dégénérescence de degré deux. Il reste donc à trouver un opérateur pour distinguer ces deux solutions.

L'équation (10.72) montre aussi qu'il y a une autre observable qui commute avec H et p

$$\Sigma \cdot \hat{\mathrm{p}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathrm{p} \\ \sigma \cdot \mathrm{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{10.77}$$

avec $\hat{\mathrm{p}} = \mathrm{p}/|\mathrm{p}|$ le vecteur unité dans la direction de p. $\sigma \cdot \hat{\mathrm{p}}$ est la composante du spin dans la direction de p et s'appelle hélicité. Les valeurs propres de l'opérateur $\sigma \cdot \hat{\mathrm{p}}$ sont $\lambda = \pm 1$:

$$\begin{array}{ll} \lambda = +1 & \lambda = -1 \\ p \xrightarrow{\Rightarrow} & p \xrightarrow{\Leftarrow} \end{array} \tag{10.78}$$

10.2.4 Particules de masse nulle

Dans le cas d'une particule de masse nulle, l'équation de Dirac (10.49) s'écrit :

$$H\psi = \alpha \cdot \mathrm{p}\, \psi \tag{10.79}$$

et la seule contrainte pour les coefficients α_i est

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \ , \qquad \alpha_i = \alpha_i^\dagger \ . \tag{10.80}$$

Dans ce cas particulier la solution la plus simple est donnée par des matrices 2×2, les matrices de Pauli, avec $\alpha_i = \mp \sigma_i$ et l'équation de Dirac peut s'écrire en termes de spineurs à deux composantes

$$E\chi = -\sigma \cdot \mathrm{p}\, \chi \tag{10.81}$$

$$E\phi = +\sigma \cdot \mathrm{p}\, \phi \ . \tag{10.82}$$

Dans le cas de masse nulle la relation énergie–impulsion est $E^2 = \mathrm{p}^2$. La solution à énergie positive a $E = |\mathrm{p}|$ et donc (10.81) devient

$$\sigma \cdot \hat{\mathrm{p}} \chi = -\chi \tag{10.83}$$

et χ décrit une particule d'hélicité $\lambda = -1$ (particule lévogyre ou "left"). L'équation (10.81) admet aussi une solution à énergie négative $-E$ et impulsion $-\mathrm{p}$:

$$\sigma \cdot (-\hat{\mathrm{p}})\, \chi = \chi \tag{10.84}$$

qui peut s'interpréter comme une anti–particule d'hélicité $\lambda = +1$ (anti–particule dextrogyre ou "right"). Pour (10.82) on peut montrer que l'équation décrit une particule d'hélicité $\lambda = +1$ et une anti–particule d'hélicité $\lambda = -1$. En termes du formalisme des spineurs à 4 composantes on peut écrire

$$u = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \tag{10.85}$$

10.3 Règles de Feynman et amplitudes de transition

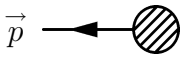
Le calcul des amplitudes de transition en théorie des perturbations peut se faire à l'aide des diagrammes de Feynman qui permettent d'avoir une aide visuelle pour les calculs des termes du développement perturbatif. Il est possible de déduire les règles de Feynman à partir de l'action pour une théorie donnée. On va voir en détail le cas de l'électrodynamique quantique (QED). Un diagramme est constitué de lignes et de vertex d'interaction. Les lignes externes d'un diagramme sont les particules initiales et finales qui interviennent dans la réaction. Dans le cas des fermions (spin 1/2) à chaque ligne externe correspond un spineur, pour les champs vectoriels (spin 1) un vecteur de polarisation comme indiqué dans la table:

10.3.1 QED

Le lagrangien de QED est

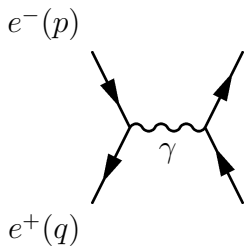
$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iQeA_\mu) - m \right] \psi \tag{10.86}$$

avec $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, ψ le fermion de charge Qe et masse m, ξ le paramètre de jauge. Les règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique sont données dans la table :

fermion sortant		$\bar{u}(p,s)$
anti–fermion sortant		$v(p,s)$
fermion entrant		$u(p,s)$
anti–fermion entrant		$\bar{v}(p,s)$
vecteur sortant		$\epsilon^{\mu}_{\lambda}(k)$
vecteur entrant		$\epsilon^{\mu}_{\lambda}(k)$

10.3.2 Exemple : $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

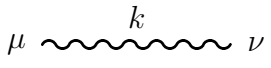
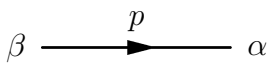
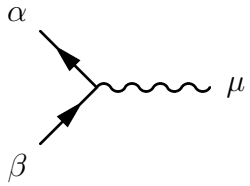
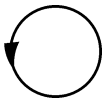
Pour comprendre comment utiliser les règles de Feynman on va considérer l'exemple de $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.



$$\Longrightarrow \quad M = e^2 \bar{v}_\alpha(q)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p) \frac{i}{k^2} \bar{u}_\lambda(p')(\gamma_\mu)_{\lambda\sigma} v_\sigma(q') \tag{10.87}$$

où les indices $\alpha\beta\lambda\sigma$ étiquettent les éléments de matrices et les vecteurs. Souvent ces indices ne sont pas indiqués dans les calculs, mais ils sont nécessaires pour les comprendre en détail. Dans la formule (10.87) on a déjà utilisé le $g^{\mu\nu}$ du propagateur pour faire la contraction des deux matrices γ. Pour simplifier ultérieurement la formule on a choisi le paramètre de jauge $\xi = 1$. Dans les dénominateurs des propagateurs la prescription de calcul $i\epsilon$ n'a pas été indiquée. Il est entendu qu'il faut l'utiliser pour les intégrales dans le plan complexe.

Pour obtenir une section efficace de diffusion, il faut calculer le module carré de M. Le conjugué complexe d'un spineur de Dirac peut s'exprimer

propagateur du photon		$i[g^{\mu\nu} - (1-\xi)\, k^\mu k^\nu / k^2]/k^2$
propagateur du fermion		$i/(\not{p} - m + i\epsilon)_{\alpha\beta}$
vertex fermion–photon		$-iQe(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$
boucle fermion–photon		$(2\pi)^{-4} \int d^4k$
boucle fermion		$-(2\pi)^{-4} \int d^4p$

comme conjugué de Dirac en utilisant les propriétés de la matrice γ_0, par exemple (se rappeler que pour des matrices $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ avec $A^\dagger$ le complexe conjugué transposé de A) :

$$\bar{v}(q)\gamma^\mu u(p) = v^\dagger(q)\gamma^0\gamma^\mu u(p) \xrightarrow{C} u^\dagger(p)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}v(q) \tag{10.88}$$

et en utilisant $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$, $\gamma^0\gamma^0 = 1$ on obtient

$$u^\dagger(p)\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 v(q) = \bar{u}(p)\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 v(q) = \bar{u}(p)\gamma^\mu v(q)\ . \tag{10.89}$$

On peut faire la même chose pour tous les termes et on a

$$M^* = e^2\bar{u}_{\beta'}(p)(\gamma^\nu)_{\beta'\alpha'}v_{\alpha'}(q)\frac{-i}{k^2}\bar{v}_{\sigma'}(q')(\gamma_\nu)_{\sigma'\lambda'}u_{\lambda'}(p') \tag{10.90}$$

ensuite on construit $|M|^2 = M\,M^*$ et on place les termes avec les mêmes indices les uns à coté des autres

$$\begin{aligned} |M|^2 \;\; = \;\; & \frac{e^4}{k^4}\bar{v}_\alpha(q)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}u_\beta(p)\bar{u}_{\beta'}(p)(\gamma^\nu)_{\beta'\alpha'}v_{\alpha'}(q) \\ & \bar{u}_\lambda(p')(\gamma_\mu)_{\lambda\sigma}v_\sigma(q')\bar{v}_{\sigma'}(q')(\gamma_\nu)_{\sigma'\lambda'}u_{\lambda'}(p') \end{aligned} \tag{10.91}$$

une séquence d'indices du type $\alpha\alpha\beta\beta\beta'\beta'\alpha'\alpha'$ constitue une trace Tr sur le produit de matrices concerné. On peut donc écrire

$$|M|^2 = \frac{e^4}{k^4} Tr[\bar{v}(q)\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(q)]\; Tr[\bar{u}(p')\gamma_\mu v(q')\bar{v}(q')\gamma_\nu u(p')] \; . \quad (10.92)$$

Il faut remarquer la propriété de cyclicité de la trace $Tr[abcd] = Tr[bcda] = Tr[cdab] = Tr[dabc]$ et que notre notation pour les spineurs est incomplète $u(p)$ signifie en réalité $u(p,s)$ avec s indice de spin. Si on ne mesure pas l'orientation du spin des particules finales et si on utilise au départ des particules non polarisées, il faut prendre la moyenne sur les spins initiaux et la somme des spin finals (la moyenne s'obtient en faisant la somme sur le spin et en divisant par 2 pour chaque particule avec spin dans l'état initial à cause des deux orientations possibles du spin). Donc dans notre notation abrégée :

$$u(p)\bar{u}(p) \to \sum_{s=1,2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m \quad (10.93)$$

et

$$v(q)\bar{v}(q) \to \sum_{s=1,2} v(q,s)\bar{v}(q,s) = \not{q} - m \quad (10.94)$$

où l'on a utilisé les formules (10.69) et (10.70). Pour notre exemple on va supposer les masses de l'électron et du muon nulles. Cette approximation est valable dans la limite de diffusion à très haute énergie. On a donc

$$|\bar{M}|^2 = \frac{1}{4}\frac{e^4}{k^4} Tr[\not{q}\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu]\; Tr[\not{p}'\gamma_\mu \not{q}'\gamma_\nu] \; . \quad (10.95)$$

où $\bar{M}$ indique qu'on moyenne sur les spins finals. Il ne reste qu'à calculer les traces à l'aide des formules (10.62):

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \frac{1}{4}\frac{e^4}{k^4} p_\alpha q_\beta q'^\sigma p'^\tau \; 4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}) \times \\ &\quad 4(g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + g_{\mu\tau}g_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{8e^4}{k^4}(p\cdot q'\, p'\cdot q + p\cdot p'\, q\cdot q') \; . \end{aligned} \quad (10.96)$$

On peut ensuite exprimer les produits scalaires des impulsions dans un référentiel particulier, par exemple celui du laboratoire, ou essayer de les exprimer en termes de quantités invariantes de Lorentz, comme les variables de Mandelstam (voir l'appendice sur le calcul de la section efficace). Cette

deuxième possibilité est particulièrement simple dans notre cas, puisqu'on est dans l'approximation de masse nulle:

$$\begin{aligned} s &= (p+q)^2 = (p'+q')^2 = k^2 = 2p\cdot q = 2p'\cdot q' && (10.97)\\ t &= (p-p')^2 = (q-q')^2 = -2p\cdot p' = -2q\cdot q' && (10.98)\\ u &= (p-q')^2 = (q-p')^2 = -2p\cdot q' = -2q\cdot p' && (10.99) \end{aligned}$$

on a donc

$$|\bar{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2}(u^2+t^2)\ , \tag{10.100}$$

la section efficace différentielle est

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s}\frac{|\bar{M}|^2}{|p_{1cm}|^2} \tag{10.101}$$

avec $p_{1cm} = \sqrt{s}/2$ dans la limite de masse nulle.

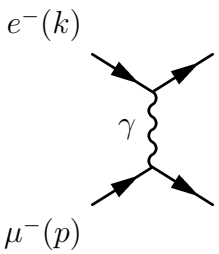
La section efficace différentielle dans la variable de Mandelstam t s'intègre entre les bornes $t_1 = -s$ et $t_0 = 0$:

$$\sigma = \frac{e^4}{8\pi}\int_{-s}^{0} dt\ \frac{u^2+t^2}{s^4} = \frac{e^4}{8\pi s^4}\int_{-s}^{0} dt\ (s^2+2st+2t^2) = \frac{e^4}{12\pi s} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \tag{10.102}$$

où $\alpha = e^2/(4\pi)$ est la constante de structure fine. Dans le calcul de la formule (10.102) on a exprimé une des variables de Mandelstam en fonction des autres $u = -s-t$. Ceci est nécessaire pour obtenir un résultat correct puisque les trois variables ne sont pas indépendantes à cause de la relation $s+t+u=0$ valable dans la limite de masse nulle.

10.3.3 Exemple : $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

De façon semblable on peut calculer la diffusion $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$



$$\Longrightarrow \quad \mathcal{M} = -e^2\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\frac{1}{q^2}\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\ . \tag{10.103}$$

Le résultat pour le module carré de l'élément de matrice est

$$|M|^2 = \frac{e^4}{(k-k')^4}\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\bar{u}(k)\gamma^\nu u(k')\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma_\nu u(p') \quad (10.104)$$

si on calcule les traces et la somme sur les spins comme dans le cas précédent :

$$|\bar{M}|^2 = \frac{8\,e^4}{(k-k')^4}(k\cdot p\; k'\cdot p' + k'\cdot p\; k\cdot p' - m_e^2 p'\cdot p - m_\mu^2 k\cdot k' + 2m_e^2 m_\mu^2) \quad (10.105)$$

où l'on a gardé aussi les termes qui contiennent la masse de l'électron et celle du muon. À haute énergie on peut négliger les termes de masse et obtenir en fonction des variables de Mandelstam

$$|\bar{M}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}(u^2 + s^2) \quad (10.106)$$

on peut remarquer que la formule précédente peut s'obtenir à partir de la formule (10.100) par échange de s avec t (symétrie de croisement ou "crossing").

Pour le calcul de la section efficace on va choisir le repère dans lequel le muon initial est au repos

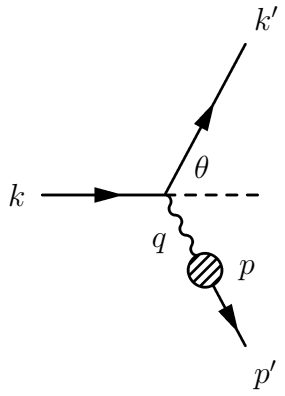
$$p = (m_\mu, 0), \quad k = (E, \mathrm{k}), \quad k' = (E', \mathrm{k}'), \quad q = k - k' = (\nu, \mathrm{q}) \quad (10.107)$$

en négligeant la masse de l'électron ($k^2 = k'^2 = 0$):

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \frac{8\,e^4}{(k-k')^4}(k\cdot p\;\; k'\cdot p' + k'\cdot p\;\; k\cdot p' - m_\mu^2 k\cdot k') \\ &= \frac{4\,e^4}{q^4}\left[-q^2(k\cdot p - k'\cdot p) + 4k\cdot p\;\; k'\cdot p + m_\mu^2 q^2\right] . \quad (10.108) \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à calculer les produits scalaires en utilisant l'angle θ entre la direction de k et celle de k' comme indiqué dans la figure

$$q^2 = -2k\cdot k' = -2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} \quad (10.109)$$



$$|\bar{M}|^2 = \frac{16\,e^4}{q^4} m_\mu^2 E' E \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \tag{10.110}$$

À partir de la formule (10.135) on obtient la section efficace différentielle

$$d\sigma = \frac{1}{4m_\mu E} \frac{|M|^2}{4\pi^2} \frac{E'}{2} dE' d\Omega \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + q - p') \tag{10.111}$$

après avoir utilisé les propriétés de la distribution δ de Dirac et intégré par rapport à E' on obtient la formule pour la section efficace différentielle dans le repère du muon initial au repos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) . \tag{10.112}$$

Le passage de la formule (10.111) à la formule (10.112) utilise les propriétés de la distribution δ de Dirac :

$$\begin{aligned} \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\ \delta(p_0'^2 - c^2) &= \frac{1}{2|c|} \left[\delta(p'_0 - c) + \delta(p'_0 + c) \right] \end{aligned} \tag{10.113}$$

où $p'^2 = p_0'^2 - \mathrm{p}'^2$. En utilisant les relations cinématiques (10.109) et les suivantes

$$q^2 = -2p \cdot q = -2\nu M \qquad \nu \equiv E - E' = -\frac{q^2}{2M} \tag{10.114}$$

on a aussi

$$\delta\left((p+q)^2 - M^2 \right) = \delta(2p \cdot q + q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right) . \tag{10.115}$$

Les propriétés (10.113) nous permettent d'obtenir l'identité:

$$\int dp'_0\ 2p'_0\ \theta(p'_0)\ \delta(p'^2 - M^2) = 1 \tag{10.116}$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heavyside égale à 1 si $x > 0$ et zéro autrement. En utilisant ces résultats on arrive à la formule :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p'}{2p'_0}\delta^{(4)}(p+q-p') &= \int d^3p'dp'_0\ \delta^{(4)}(p+q-p')\ \theta(p'_0)\ \delta(p'^2 - M^2) \\ &= \frac{1}{2M}\ \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)\ . \end{aligned} \tag{10.117}$$

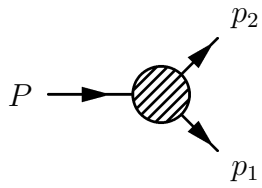
10.4 Largeur de désintégration

Une particule de masse M au repos qui se désintègre est caractérisée par un temps de vie moyenne $\tau = 1/\Gamma$, où Γ est appelée largeur de désintégration.

Dans le système d'unités $\hbar = c = 1$ on exprime τ en secondes et Γ en MeV (1 MeV $= 10^6$ electronVolts) en utilisant $\hbar = 6.582 \times 10^{-22}$ MeV s comme facteur de conversion. Par exemple les méson π^+ et π^- ont une vie moyenne de 2.6×10^{-8} s. La largeur est $\Gamma = 2.53 \times 10^{-14}$ MeV.

10.4.1 Désintégration à deux corps

La largeur d'une particule est calculée à partir d'un élément de matrice $\mathcal{M}$ invariant de Lorentz. Pour la désintégration d'une particule au repos, de masse M, en deux particules d'impulsion $p_1 = (m_1, \mathrm{p}_1)$ et $p_2 = (m_2, \mathrm{p}_2)$ (désintégration à deux corps) on a :



(10.118)

$$|\mathrm{p}_1| = |\mathrm{p}_2| = \frac{1}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 - m_2)^2][M^2 - (m_1 + m_2)^2]} \tag{10.119}$$

et la formule pour la largeur est:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2}|\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathrm{p}_1|}{M^2} d\Omega \tag{10.120}$$

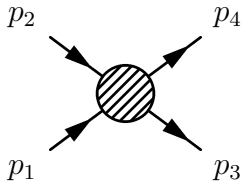
avec $d\Omega = d\phi_1 d\cos\theta_1$ l'angle solide de la particule 1. Si l'élément de matrice $\mathcal{M}$ est indépendant des angles la largeur différentielle (10.120) peut s'intégrer sur les angles sans connaître la forme explicite de $\mathcal{M}$:

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi}|\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathrm{p}_1|}{M^2} \tag{10.121}$$

10.5 Section efficace de diffusion à deux corps

Deux particules d'impulsion p_1 et p_2 et masses m_1 et m_2 interagissent et donnent lieu à deux particules d'impulsion p_3 et p_4 et masses m_3 et m_4

comme indiqué dans la figure :



(10.122)

On utilise des quantités invariantes sous les transformations de Lorentz, les variables de Mandelstam :

$$s = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 = m_1^2 + 2E_1E_2 - 2\mathrm{p}_1\cdot\mathrm{p}_2 + m_2^2 \quad (10.123)$$

$$t = (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2 = m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\mathrm{p}_1\cdot\mathrm{p}_3 + m_3^2 \quad (10.124)$$

$$u = (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2 = m_1^2 - 2E_1E_4 + 2\mathrm{p}_1\cdot\mathrm{p}_4 + m_4^2 \quad (10.125)$$

Ces variables ne sont pas indépendantes, il existe une relation entre elles

$$s+t+u = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\ . \quad (10.126)$$

La section efficace différentielle dans le centre de masse de la réaction est donnée par

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s}\frac{|M|^2}{|\mathrm{p}_{1cm}|^2} \quad (10.127)$$

par rapport à la variable de Mandelstam t et par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{|\mathrm{p}_{3cm}|^2}{|\mathrm{p}_{1cm}|^2}|M|^2 \quad (10.128)$$

par rapport à l'angle solide $d\Omega$ de la particule 3 par rapport à la direction de la particule 1 dans le centre de masse.

Dans le référentiel du centre de masse, la variable t est

$$t = (E_{1cm}-E_{3cm})^2 - (p_{1cm}-p_{3cm})^2 - 4p_{1cm}\,p_{3cm}\sin^2(\theta_{cm}/2) \quad (10.129)$$

où θ_{cm} est l'angle entre la particule 1 et la particule 3. Ici $p_{1cm} = |\mathrm{p}_{1cm}|$ et $p_{3cm} = |\mathrm{p}_{3cm}|$. Les valeurs des bornes pour l'intégrale dans la variable t sont t_1 ($\theta_{cm}=\pi$) et t_0 ($\theta_{cm}=0$):

$$t_1 = \left(\frac{m_1^2-m_2^2-m_3^2+m_4^2}{2\sqrt{s}}\right)^2 - (p_{1cm}+p_{3cm})^2 \quad (10.130)$$

$$t_0 = \left(\frac{m_1^2-m_2^2-m_3^2+m_4^2}{2\sqrt{s}}\right)^2 - (p_{1cm}-p_{3cm})^2 \quad (10.131)$$

avec

$$p_{i\,cm} = \sqrt{E_{i\,cm}^2 - m_i^2} \tag{10.132}$$

et

$$E_{1cm} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \qquad E_{2cm} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} \tag{10.133}$$

$$E_{3cm} = \frac{s + m_3^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}} \qquad E_{4cm} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}\ . \tag{10.134}$$

Plus généralement, sans référence à un repère particulier, la section efficace de diffusion différentielle, s'écrit

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1E_2|\mathrm{v}_1|}\frac{|M|^2}{(2\pi)^2}\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)\frac{d^3p_3}{2E_3}\frac{d^3p_4}{2E_4} \tag{10.135}$$

où $\mathrm{v}_1 = \mathrm{p}_1/E_1$.

Bibliographie

[1] J. Chadwick, "Possible Existence Of A Neutron," Nature 129 (1932) 312.

[2] E. Fermi, "An Attempt Of A Theory Of Beta Radiation. 1," Z. Phys. 88 (1934) 161.

[3] T. D. Lee and C. N. Yang, "Question Of Parity Conservation In Weak Interactions," Phys. Rev. 104 (1956) 254.

[4] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, "Experimental Test Of Parity Conservation In Beta Decay," Phys. Rev. 105 (1957) 1413.

[5] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, "Theory Of The Fermi Interaction," Phys. Rev. 109 (1958) 193.

[6] E. C. Sudarshan and R. E. Marshak, "Chirality Invariance And The Universal Fermi Interaction," Phys. Rev. 109 (1958) 1860.

[7] M. Goldhaber, L. Grodzins and A. W. Sunyar, "Helicity Of Neutrinos," Phys. Rev. 109 (1958) 1015.

[8] N. Cabibbo, "Unitary Symmetry And Leptonic Decays," Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.

[9] J. D. Bjorken and S. L. Glashow, "Elementary Particles And SU(4)," Phys. Lett. 11 (1964) 255.

[10] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, "Weak Interactions With Lepton - Hadron Symmetry," Phys. Rev. D 2 (1970) 1285.

[11] J. J. Aubert et al., "Experimental Observation Of A Heavy Particle J," Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1404; J. E. Augustin et al., "Discovery Of A Narrow Resonance In E+ E- Annihilation," Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1406.

[12] M. Jacob and G. C. Wick, Annals Phys. 7 (1959) 404 [Annals Phys. 281 (2000) 774].

[13] C. Itzykson and J. B. Zuber, "Quantum Field Theory," Mc Graw Hill (1980).

[14] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press.

[15] K. Hagiwara et al., Phys. Rev. D 66 (2002) 010001.