



**HAL**  
open science

## Cours de géométrie différentielle

Azzouz Awane

► **To cite this version:**

Azzouz Awane. Cours de géométrie différentielle. DEA. 2001-2005 à la Faculté des Sciences Ben M'sik. Casablanca. Maroc, 2005, pp.214. cel-00277648

**HAL Id: cel-00277648**

**<https://cel.hal.science/cel-00277648>**

Submitted on 6 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

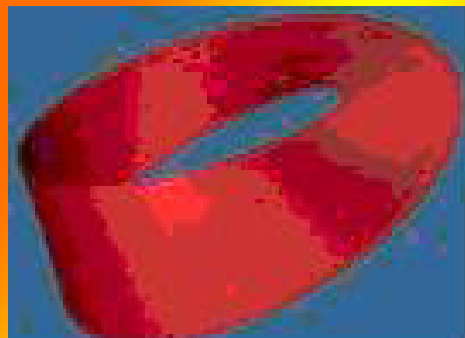
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université Hassan II - Mohammedia**

**Faculté des Sciences Ben M'sik**

**Casablanca**

**UFR de Géométrie Différentielle  
et Applications**



**Cours de Géométrie Différentielle**

**DESA Géométrie Différentielle et**

**Applications**

**2001 - 2003 ; 2003 - 2005**

**Par : Azzouz AWANE**

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE  
DESA : 2001-2003; 2003-2005

A. AWANE



# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Éléments du calcul tensoriel</b>	<b>1</b>
1.1 Dualité . . . . .	1
1.1.1 Espace dual . . . . .	1
1.1.2 Orthogonalité . . . . .	3
1.1.3 Transposition . . . . .	6
1.2 Produits tensoriels d'espaces vectoriels . . . . .	7
1.2.1 Combinaisons linéaires formelles . . . . .	8
1.2.2 Propriété fondamentale des produits tensoriels . . . . .	9
1.2.3 Propriétés du produit tensoriel . . . . .	12
1.2.4 Tenseurs . . . . .	22
1.2.5 Contraction d'un tenseur mixte . . . . .	24
1.3 Formes extérieures . . . . .	25
1.3.1 L'algèbre des tenseurs contravariants . . . . .	25
1.3.2 L'algèbre graduée $\bigwedge E^*$ . . . . .	32
1.3.3 Le produit intérieur . . . . .	32
1.3.4 Dérivations. Antidérivations . . . . .	33
1.3.5 Sur la structure de l'algèbre associative $\bigwedge E^*$ . . . . .	34
1.3.6 Les idéaux gradués de $\bigwedge E^*$ . . . . .	34
1.3.7 Système linéaire associé à une $p$ -forme extérieure . . . . .	35
1.3.8 Espace associé et rang d'une $p$ -forme extérieure . . . . .	36
1.3.9 L'espace $A(\alpha)$ . . . . .	36
1.3.10 Formes monômes . . . . .	37
1.4 Exercices . . . . .	38
<b>2 Espaces vectoriels symplectiques</b>	<b>41</b>
2.1 Étude des 2-formes extérieures . . . . .	41
2.2 Orthogonalité symplectique . . . . .	42

2.3	Classification des 2–formes extérieures . . . . .	44
2.4	Espaces vectoriels symplectiques . . . . .	48
2.4.1	Définitions . . . . .	48
2.4.2	Exemples . . . . .	49
2.4.3	Sous espaces d’un espace vectoriel symplectique . . . . .	49
2.4.4	Endomorphisme adjoint . . . . .	51
2.5	Les groupes $S_p(E, \theta)$ et $Sp(1, n : E)$ . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Variétés différentiables</b> . . . . .	<b>57</b>
3.1	Variétés différentiables . . . . .	58
3.2	Exemples de variétés différentiables . . . . .	61
3.2.1	<b>L’espace <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	61
3.2.2	Surface régulière de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	61
3.2.3	<b>La sphère <math>S^n</math></b> . . . . .	62
3.2.4	<b>Espace projectif réel <math>\mathbb{R}P(n)</math></b> . . . . .	64
3.3	Fonctions différentiables . . . . .	64
3.3.1	Définitions . . . . .	64
3.3.2	Fonctions plateau. Partition de l’unité . . . . .	67
3.3.3	Sous variétés d’une variété différentiable . . . . .	69
3.3.4	Première approche des groupes et algèbres de Lie . . . . .	73
3.3.5	Quelques procédés de construction de variétés. . . . .	81
3.4	Espace tangent. Fibré tangent . . . . .	81
3.4.1	Germe d’une application . . . . .	81
3.4.2	Vecteurs tangents à une variété . . . . .	82
3.4.3	Application tangente . . . . .	87
3.4.4	Vecteur tangent à une courbe . . . . .	89
3.4.5	Application cotangente . . . . .	89
3.4.6	Fibré tangent et fibré cotangent . . . . .	92
3.4.7	Dérivée de Lie d’un champ de vecteurs . . . . .	105
3.4.8	Image d’un champ de vecteurs par un morphisme . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Formes différentielles</b> . . . . .	<b>113</b>
4.1	L’espace fibré $\Lambda^p(T^*M)$ . . . . .	113
4.2	Formes différentielles de degré $p$ . . . . .	114
4.3	Image réciproque d’une forme extérieure . . . . .	116
4.4	Produit intérieur . . . . .	117
4.5	Différentiation extérieure . . . . .	118
4.6	Lemme de Poincaré . . . . .	120
4.7	Dérivée de Lie d’une $p$ –forme . . . . .	123
4.8	Intégrale d’une forme différentielle . . . . .	124

4.8.1	Variété orientable . . . . .	124
4.8.2	Intégrale d'une $n$ -forme différentielle. . . . .	125
4.8.3	Intégrale d'une $n$ -forme différentielle. . . . .	125
<b>5</b>	<b>Distributions. Notion de feuilletage</b>	<b>129</b>
5.1	Variétés riemanniennes . . . . .	137
5.1.1	Définitions . . . . .	137
5.1.2	Distance géodésique . . . . .	138
5.2	Dérivation covariante . . . . .	140
5.2.1	Courbure. Torsion d'une connexion . . . . .	142
5.2.2	Transport parallèle . . . . .	142
5.3	Espaces vectoriels symplectiques . . . . .	142
5.3.1	Étude des 2-formes extérieures . . . . .	142
5.3.2	Orthogonalité symplectique . . . . .	143
5.4	Classification des 2-formes extérieures . . . . .	145
5.4.1	Définitions . . . . .	148
5.4.2	Sous espaces d'un espace vectoriel symplectique . . . . .	149
5.4.3	Endomorphisme adjoint . . . . .	151
5.5	Les groupes $S_p(E, \theta)$ et $Sp(1, n : E)$ . . . . .	152
5.6	VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES . . . . .	154
5.6.1	Structures symplectiques . . . . .	154
5.6.2	Exemples . . . . .	154
5.6.3	Forme de Liouville sur un fibré cotangent $T^*B$ . . . . .	155
5.6.4	Sous variétés d'une variété symplectique . . . . .	156
5.6.5	Systèmes hamiltoniens . . . . .	156
5.6.6	Crochet de Poisson . . . . .	158
5.6.7	Variétés de Poisson . . . . .	159
5.6.8	Propriétés des variétés de Poisson . . . . .	166
5.6.9	Quotient d'une variété symplectique ou de Poisson . . . . .	168
<b>6</b>	<b>Espaces fibrés</b>	<b>175</b>
6.1	Espace fibré localement trivial . . . . .	175
6.2	Fibré vectoriel . . . . .	175
6.3	Fibré différentiel . . . . .	176
6.4	Espaces fibrés principaux . . . . .	176
6.4.1	Homomorphisme de fibrés principaux . . . . .	178
6.4.2	Fibré trivialisable . . . . .	178
6.4.3	Espace vertical et connexion . . . . .	179
6.5	Variétés complexes et presque complexes . . . . .	184
6.5.1	Variétés complexes . . . . .	184

6.5.2	Variétés presque complexes . . . . .	189
6.6	Géométrie des $G$ -structures . . . . .	191
6.6.1	Espaces de repères. $G$ -structures. . . . .	191
6.6.2	$G$ -structures définies par un tenseur . . . . .	192
6.6.3	$G$ -structures équivalentes . . . . .	193
6.6.4	Connexions adaptées à une $G$ -structure . . . . .	195
6.6.5	Tenseur de structure d'une $G$ -structure . . . . .	196



# Introduction

La géométrie différentielle est une continuité du calcul infinitésimal, elle permet d'étudier grâce aux techniques du calcul différentiel une nouvelle famille d'espaces topologiques appelées "variétés différentiables", permettant la rénovation de la vieille géométrie des courbes et des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  à la Gauss-Darboux, et en la plaçant selon un esprit actuel dans un cadre contemporain.

Le calcul différentiel permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au voisinage d'un instant donné (sa vitesse, son accélération) lorsque celui-ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé.

Notre but est de montrer qu'on peut faire de l'analyse mathématique en dehors des espaces qui n'admettent pas de structure d'espace vectoriel normé.

Empiriquement, nous pouvons mesurer des portions de la terre, nous nous déplaçons entre les villes, les pays, on peut décrire presque toutes les régions du globe terrestre d'une manière adéquate, en utilisant un petit livre, appelé atlas, formé d'un ensemble de cartes, qui sont des ouverts du plan  $\mathbb{R}^2$ . Ici, chaque point du globe peut être représenté dans une carte. En s'inspirant de la cartographie, on définit une variété différentiable de dimension  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) par un atlas qui est un ensemble d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  appelés cartes. H. Poincaré a saisi l'importance du concept d'une variété différentiable, il s'est arrêté sur les changements de cartes d'un atlas. C'est Whitney (en 1944) qui a réglé définitivement ce problème; c'est dans les changements de cartes où réside la notion de variété différentiable.

Pour se déplacer entre divers villes de notre planète terre, on choisit assez souvent les chemins les plus courts (géodésiques), ces trajectoires ne sont pas des droites. La formulation géométrique de ces notions a conduit à introduire des métriques sur des variétés différentiables (variétés riemanniennes), et par la suite, à des modèles non euclidiens :

(1) **Modèle de Riemann.** La sphère  $S^2$  (munie de la métrique induite par le produit scalaire habituel de l'espace  $\mathbb{R}^3$ ) admet pour géodésiques les grands cercles, et il est clair que tous les grands cercles se coupent. Si nous appelons droites parallèles, des géodésiques qui ne se rencontrent pas, on voit que le cinquième postulat d'Euclide tombe en défaut; ici, par un point extérieur à une droite, il ne passe aucune parallèle à cette droite.

(2) **Modèle de Lobatchevski :** le demi-plan de Poincaré est défini par :

$$P = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

muni de la métrique  $ds^2 = y^{-2} (dx^2 + dy^2)$ . Ici, les géodésiques sont

- (a) les demi droites d'équation  $x = cte$ ,
- (b) les demi-cercles centrés sur l'axe  $Ox$ .

Ainsi, par deux points distincts du demi-plan de Poincaré, passe une géodésique et une seule, à savoir :

- (a) la parallèle à l'axe  $Oy$  si ces deux points ont même abscisse,
- (b) le demi cercle passant par ces deux points et centré à l'intersection de l'axe  $Ox$  et la médiatrice du segment joignant les deux points.

On déduit donc le résultat suivant :

*Par un point extérieur à une géodésique  $\gamma$  passe une infinité de géodésiques ne rencontrant pas  $\gamma$ .*

Ici aussi, le cinquième postulat tombe en défaut, et on aboutit à un modèle de géométrie non euclidienne.

Nous constatons ici la cohabitation entre géométries euclidienne et non euclidienne; en effet, la géométrie euclidienne coexiste avec divers édifices géométriques : géométrie différentielle, géométrie algébrique, géométrie projective, etc...

La géométrie différentielle utilise un arsenal très riche et varié de méthodes mathématiques faisant de cette branche des mathématiques, un carrefour des mathématiques, nécessitant l'utilisation de nombreuses théories structurées (calcul différentiel, intégration, algèbre linéaire, topologie générale et algébrique, etc,...), comme elle conduit à des directions importantes en mathématiques et aussi à des applications en physique :

1. Les groupes et algèbres de Lie sont très importants en mathématiques en raison de leurs applications fondamentales à la géométrie, à la mécanique, l'analyse, etc,...
2. La géométrie symplectique traite des objets qui issus de la mécanique
  - (a) La géométrie symplectique donne le formalisme géométrique de la mécanique hamiltonienne classique, il s'agit en fait d'une géométrie de l'espace de phase (fibré tangent  $TM$ , d'une variété différentiable  $M$ , muni de la forme de Liouville); les équations de Hamilton proviennent de la dualité entre les fibrés des repères et des corepères. elle permet de calculer aussi précisément que possible les trajectoires de planètes.
  - (b) La géométrie symplectique est utilisée en optique géométrique, en mécanique quantique etc,...
3. Le problème cosmologique : L'univers (espace-temps) est une variété différentiable de dimension 4. Le problème cosmologique consiste à déterminer la forme globale de cette variété, ainsi que les structures diverses exprimant la distribution et l'évolution de l'énergie.

Dans sa théorie de la relativité générale, A.Einstein représente le potentiel gravitationnel, donc les distributions des masses, par une métrique locale d'espace temps. La géométrie locale de l'espace-temps (en particulier les géodésiques, donc les rayons lumineux qui sont des géodésiques particulières) est ainsi déterminé par la distribution de masses, les  $\Gamma_{ij}^k$  de la connexion associée représentant la magnitude de la force gravitationnelle.

4. La covariance des lois de la physique : Les lois et grandeurs physiques sont covariantes par le groupe de relativité. Plus le groupe est gros,

plus les conditions de covariance sont restrictives, plus les lois et grandeurs physiques sont déterminées par la géométrie de l'espace.

En mécanique quantique, les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs d'un espace vectoriel et les grandeurs physiques par des opérateurs linéaires sur cet espace où opère naturellement le groupe de relativité (éventuellement grossi de toutes les symétries du système). Une particule élémentaire est un système physique irréductible, donc est associé à une représentation irréductible du groupe de relativité. Les paramètres servant à classer ces représentations irréductibles doivent donc classer les particules qui apparaissent ainsi comme des propriétés géométriques de l'Univers.

Les particules élémentaires sont classées par divers nombres quantiques. On ignore naturellement si les catalogues actuels de particules et de nombres quantiques sont complets. On n'a pas encore trouvé non plus un groupe de Lie tel que les paramètres classant ses représentations irréductibles correspondent exactement aux nombres quantiques connus.

On voit donc que la géométrie différentielle constitue un domaine très riche et très vaste, et comme elle reste la matière la plus négligée des programmes marocains, puisqu'on ne trouve pas de trace de la géométrie des surfaces, ni celle des courbes algébriques, ni des groupes de transformations, ni géométrie projective, etc,...

On se propose dans ce cours, qui est enrichi par des exposés, de combler les lacunes du programme d'enseignement marocain qui concernent cette discipline d'une part, et d'autre part, de donner les éléments de base et outils nécessaires pour l'étude la géométrie différentielle, et particulièrement les géométrie symplectique et multi-symplectique, les systèmes dynamiques et certaines applications.

Azzouz Awane  
Casablanca le 8 janvier 2002

# Chapitre 1

## Éléments du calcul tensoriel

### 1.1 Dualité

#### 1.1.1 Espace dual

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

On appelle *forme linéaire* sur  $E$ , ou covecteur de  $E$ , toute application linéaire de  $E$  à valeurs dans le corps  $\mathbb{K}$ , l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$  des formes linéaires sur  $E$  est appelé *dual* de l'espace  $E$ , et est noté  $E^*$ .

On appelle forme bilinéaire canonique, l'application bilinéaire

$$(x, \omega) \longmapsto \langle x, \omega \rangle = \omega(x)$$

,de  $E \times E^*$  dans  $\mathbb{K}$ , et le scalaire  $\langle x, \omega \rangle = \omega(x)$  est appelé produit scalaire du vecteur  $x \in E$  par le covecteur  $\omega$ .

Pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on a :

1. Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$  est un hyperplan de  $E$ , c'est-à-dire un sous espace vectoriel de  $E$  de codimension 1.
2. Pour tout hyperplan  $H$  de  $E$  et pour tout vecteur  $e$  de  $E$  n'appartenant pas à  $H$ , il existe une forme linéaire unique  $\omega$  sur  $E$  nulle sur  $H$ , telle que  $\omega(e) = 1$ , en particulier on a  $\text{Im } \omega = \mathbb{K}$ .
3. Deux formes linéaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur  $E$  ayant le même noyau si et seulement si elle sont proportionnelles, c'est-à-dire, il existe  $\lambda \in \mathbb{K} - (0)$  telle que  $\omega_1 = \lambda\omega_2$ .

Étant donné deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sur  $\mathbb{K}$ , alors pour toute base  $(e_i)_{i \in I}$  de l'espace vectoriel  $E$  et pour toute famille quelconque  $(f_i)_{i \in I}$

d'éléments de  $F$ , indexée par  $I$ , il existe une application linéaire unique de  $E$  dans  $F$ , telle que

$$u(e_i) = f_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Cette application est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si, la famille  $(f_i)_{i \in I}$  est libre (resp. génératrice, resp. base) de  $F$ .

En particulier, pour  $F = \mathbb{K}$ , alors pour toute famille de scalaires  $(\alpha_i)_{i \in I}$ , indexée par  $I$ , il existe une forme linéaire unique  $\omega$  sur  $E$ , telle que

$$\langle e_i, \omega \rangle = \alpha_i \text{ pour tout } i \in I,$$

autrement dit, si  $x = \sum_{i \in I} x^i e_i \in E$ , où  $(x^i)_{i \in I}$  est une famille presque nulle de scalaires on a :

$$\langle x, \omega \rangle = \sum_{i \in I} x^i \alpha_i,$$

de plus l'application  $(\alpha_i)_{i \in I} \mapsto \omega$ , de  $\mathbb{K}^I$  dans  $E^*$ , où  $\omega$  est l'unique forme linéaire sur  $E$  telle que

$$\langle e_i, \omega \rangle = \alpha_i \text{ pour tout } i \in I,$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^I$  sur  $E^*$ . Ici  $\mathbb{K}^I$  est l'espace vectoriel de toutes les applications de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Soient maintenant un hyperplan  $H$  de  $E$  et une forme linéaire  $\omega$  sur  $E$  de noyau  $H$ ,  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in I$ , on pose  $\langle e_i, \omega \rangle = \alpha_i$ . Alors un élément  $x = \sum_{i \in I} x^i e_i$  de  $E$  est dans  $H$  si et seulement si :

$$\langle x, \omega \rangle = \sum_{i \in I} x^i \alpha_i = 0,$$

où  $(x^i)_{i \in I}$  est une famille presque nulle de scalaires; ce qui montre que l'hyperplan  $H$  de  $E$  est défini dans une base donnée par une relation linéaire.

Désignons par  $\mathbb{K}^{(I)}$  l'ensemble des familles presque nulles  $(\lambda^i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}^{(I)}$  est un sous espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{K}^I$  de toutes les familles  $(\lambda^i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

Le fait que  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  est équivalent à dire que l'application

$$x \mapsto (\lambda^i(x))_{i \in I}$$

de  $E$  dans  $\mathbb{K}^{(I)}$ , où  $(\lambda^i(x))_{i \in I}$  est la famille de scalaires presque tous nuls telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda^i(x) e_i$ , est un isomorphisme. On a donc :

1.  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^{(I)}$ .

2.  $E^*$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^I$ .
3.  $E$  est de dimension finie si et seulement si  $E^*$  est de dimension finie, et dans ce cas on a  $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E^*$ .

**Proposition 1.1** Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ . Pour tout  $j \in I$ , on désigne par  $e^j$  l'unique forme linéaire sur  $E$  telle que pour tout  $i \in I$  on a :

$$\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$e^j$  est appelée  $j$ -ème forme coordonnée. On a :

1. La famille  $(e^i)_{i \in I}$  est libre dans  $E^*$ .
2. La famille  $(e^i)_{i \in I}$  est une base de  $E^*$  si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ . Le système  $(e^i)_{1 \leq i \leq n}$  des formes linéaires sur  $E$  telle que pour tout  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on a :

$$\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j,$$

qui est une base de  $E^*$ , est appelée *base duale* de la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . L'application

$$e_i \longmapsto e^i$$

de  $E$  dans  $E^*$ , est un isomorphisme d'espaces vectoriels, qui n'est pas canonique. il dépend en fait de la base choisie. Considérons par exemple la nouvelle base  $(v_i)$  de  $E$  définie par  $v_1 = ae_1, v_i = e_i, i \neq 1, a \neq 0$ . L'isomorphisme  $f$  de  $E$  dans  $E^*$  donné par  $f(v_i) = v^i$  où  $(v^i)$  est la base duale de  $(v_i)$ , ne coïncide pas avec l'isomorphisme  $e_i \longmapsto e^i$ , dès que  $a^2 \neq 1$ .

### 1.1.2 Orthogonalité

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $E^*$  son espace dual.

1. Deux éléments  $x \in E$  et  $\omega \in E^*$  sont dits orthogonaux si :

$$\langle x, \omega \rangle = 0.$$

2. Deux parties  $A \subseteq E$  et  $B \subseteq E^*$  sont dits orthogonaux si :

$$\langle x, \omega \rangle = 0$$

pour tous  $x \in A$  et  $\omega \in B$ .

3. Soit  $A \subseteq E$ . On appelle annulateur de  $A$ , que l'on note  $Ann(A)$ , l'ensemble :

$$Ann(A) = \{\omega \in E^* \mid \langle x, \omega \rangle = 0, \text{ pour tout } x \in A\}.$$

$Ann(A)$  est un sous espace vectoriel de  $E^*$  et l'on a :

$$Ann(A) = Ann(Vect(A)).$$

4. Soit  $B \subseteq E^*$ . On appelle orthogonal de  $B$ , que l'on note  $B^\perp$ , l'ensemble

$$B^\perp = \{x \in E \mid \langle x, u \rangle = 0, \text{ pour tout } u \in B\}.$$

$B^\perp$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et l'on a :

$$B^\perp = (Vect(B))^\perp.$$

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $J$  une partie de  $I$ . Alors pour qu'un élément  $x$  soit dans l'orthogonal  $\{e^j \mid j \in J\}^\perp$  de  $\{e^j \mid j \in J\}$ , il est nécessaire et suffisant que  $\langle x, e^j \rangle = 0$  pour tout  $j \in J$ , si et seulement si les coordonnées  $x^j$  ( $j \in J$ ) de  $x$  sont nulles, ce qui est équivalent à dire que  $x \in Vect(e_i \mid i \in I - J)$ , ainsi,

$$\{e^j \mid j \in I\}^\perp = Vect(e_i \mid i \in I - J).$$

Supposons que  $I - J$  soit fini. Pour qu'une forme linéaire  $\omega$  sur  $E$  soit dans l'annulateur  $Ann\{e_j \mid j \in J\}$  de la partie  $\{e_j \mid j \in J\}$ , il faut et il suffit,  $\langle e_j, \omega \rangle = 0$  pour tout  $j \in J$ .

Considérons la forme linéaire

$$\sigma = \omega - \sum_{i \in I - J} \langle e_i, \omega \rangle e^i,$$

cette forme linéaire est nulle, et par conséquent

$$\omega = \sum_{i \in I - J} \langle e_i, \omega \rangle e^i \in Vect(e^i \mid i \in I - J).$$



Soit maintenant  $\omega \in \text{Vect}(e^i \mid i \in I - J)$ . Il existe des scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I - J}$  telle que  $\omega = \sum_{i \in I - J} \lambda_i e^i$ , et donc, pour tout  $j \in J$ ,

$$\langle e_j, \omega \rangle = \sum_{i \in I - J} \lambda_i \langle e_j, e^i \rangle = \sum_{i \in I - J} \lambda_i \delta_j^i = 0,$$

donc  $\omega \in \text{Ann}\{e_j \mid j \in J\}$ , on a donc

$$\text{Ann}\{e_j \mid j \in J\} = \text{Vect}(e^i \mid i \in I - J).$$

On déduit, que si  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie, alors pour tout sous espace vectoriel  $F$  de  $E$  et pour tout sous espace vectoriel  $G$  de  $E^*$ , on a

1.  $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ann}(F)) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$ ,
2.  $\dim_{\mathbb{K}} G^\perp = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} G$ .

Et pour tout sous espace vectoriel  $F$  de  $E$ , on a :

$$(E/F)^* \simeq \text{Ann}(F).$$

En particulier si  $E$  de dimension finie, alors  $\dim_{\mathbb{K}}(E/F) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ann}(F)) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$ .

De même on a :

$$E^*/\text{Ann}(F) \simeq F^*.$$

**Définition 1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $E^*$  son espace dual. On appelle *bidual* de  $E$ , le dual  $(E^*)^*$  de  $E^*$ , on le note  $E^{**}$ .

Considérons l'application

$$\varphi_E : E \longrightarrow E^{**},$$

telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi_E(x) = \tilde{x}$  est la forme linéaire sur  $E^*$ , donnée par :

$$\tilde{x}(\omega) = \langle x, \omega \rangle$$

quel que soit  $\omega \in E^*$ , est un homomorphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Exercice 1.1** Montrer que  $\varphi_E$  est un isomorphisme si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

### 1.1.3 Transposition

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . À toute application linéaire  $u : E \longrightarrow F$ , on peut associer une unique application linéaire  ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$ , appelée transposée de  $u$ , définie par :

$${}^t u(\omega) = \omega \circ u,$$

c'est-à-dire, pour tous  $x \in E$  et  $\omega \in F^*$ , on a :

$$\langle x, {}^t u(\omega) \rangle = \langle u(x), \omega \rangle.$$

**Exemple 1.1** Soient  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ ,  $i : x \longmapsto x$  de  $F$  dans  $E$  l'injection canonique de  $F$  dans  $E$  et  $p : x \longmapsto \bar{x} = x + F$  de  $E$  sur  $E/F$ , la surjection canonique. Alors

1.  ${}^t i(\omega) = \omega \circ i = \omega|_F$  est la restriction de la forme linéaire  $\omega$  au sous espace vectoriel  $F$ , pour tout  $\omega \in E^*$ ,
2.  ${}^t p : (E/F)^* \longrightarrow E^*$  telle que

$${}^t p(\omega)(x) = \omega(x + F)$$

où  $\bar{x} = x + F$  est la classe modulo  $F$  du vecteur  $x$ .

**Proposition 1.2** Dans les hypothèses et notations ci dessus on a :

1. L'application  $u \longmapsto {}^t u$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  à valeurs dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F^*, E^*)$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire.
2.  ${}^t id_E = id_{E^*}$
3. Soit  $G$  un troisième espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ , alors

$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$$

4. Si  $u \in GL_{\mathbb{K}}(E)$ , alors  ${}^t u \in GL_{\mathbb{K}}(E^*)$  et l'on a :

$$({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1}).$$

De même on a :

**Proposition 1.3** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ . On a les relations suivantes :

1.  $\text{Im}^t u = \text{Ann}(\ker u)$ ,
2.  $\ker^t u = \text{Ann}(\text{Im } u)$ ,
3. le rang de  ${}^t u$  est fini si et seulement si, le rang de  $u$  est fini et l'on a :

$$\text{rg}({}^t u) = \text{rg}(u)$$

**Proposition 1.4** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ . Alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & E^{**} \\ \downarrow u & & \downarrow {}^{tt}u \\ F & \xrightarrow{\varphi_F} & F^{**} \end{array}$$

est commutatif :

$${}^{tt}u \circ \varphi_E = \varphi_F \circ u,$$

ici  ${}^{tt}u = {}^t({}^t u)$ .

**Proposition 1.5** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $G$  un sous espace vectoriel de  $E^*$ . Alors :

1.  $(\text{Ann}F)^\perp = F$
2.  $\dim F$  est finie si et seulement si  $\dim \text{Ann}F$  est finie et l'on a :

$$\text{codim } F = \dim \text{Ann}F,$$

3.  $\dim G$  est finie si et seulement si  $\dim G^\perp$  est finie et l'on a :

$$G = \text{Ann}(G^\perp),$$

## 1.2 Produits tensoriels d'espaces vectoriels

Les résultats des deux paragraphes qui vont suivre, restent valables en remplaçant un espace vectoriel sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$  par un module sur un anneau commutatif  $A$  et un espace vectoriel de dimension finie par un module libre de type fini.

### 1.2.1 Combinaisons linéaires formelles

Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $X$  un ensemble. Rappelons que  $\mathbb{K}^{(X)}$  est l'ensemble des familles presque nulles  $(\lambda^x)_{x \in X}$  des éléments de  $\mathbb{K}$ , autrement dit,

$$\mathbb{K}^{(X)}$$

est l'ensemble des applications

$$u : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

telles que

$$\{x \in X \mid u(x) \neq 0\}$$

soient finis.

L'ensemble  $\mathbb{K}^{(X)}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}^X$  formé de toutes les applications  $u : X \longrightarrow \mathbb{K}$ .

Pour tout  $x \in X$ , on considère l'élément  $\delta_x$  de  $\mathbb{K}^{(X)}$  défini par :

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille  $(\delta_x)_{x \in X}$  est une base de  $\mathbb{K}^{(X)}$  et pour tout  $u \in \mathbb{K}^{(X)}$ , on a :

$$u = \sum_{x \in X} u(x)\delta_x. \quad (1.1)$$

Soit  $f : X \longrightarrow G$  une application de  $X$  dans un espace vectoriel  $G$  sur  $\mathbb{K}$ . Il existe une application linéaire unique

$$\tilde{f} : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow G$$

telle que

$$\tilde{f}(\delta_x) = f(x).$$

Généralement, on identifie l'élément  $\delta_x$  de la base de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^{(X)}$  à l'élément  $x$  correspondant de  $X$  et on remplace les expressions (1.1) par :

$$u = \sum_{x \in X} u(x)x.$$

**Définition 1.2** Les éléments de  $\mathbb{K}^{(X)}$  sont appelés combinaisons linéaires formelles de  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

### 1.2.2 Propriété fondamentale des produits tensoriels

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ . On considère l'espace

$$C(E, F) = \mathbb{K}^{(E \times F)}$$

des combinaisons linéaires formelles de  $E \times F$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Compte tenu des notations du paragraphe précédent où on identifie chaque élément  $(x, y)$  de  $E \times F$  à l'application  $\delta_{(x,y)}$ , cet espace admet pour base l'ensemble

$$\{(x, y) \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Soit  $N$  le sous espace vectoriel de  $C(E, F) = \mathbb{K}^{(E \times F)}$  engendré par les éléments de la forme :

$$(\lambda x + \lambda' x', y) - \lambda(x, y) - \lambda'(x', y)$$

et

$$(x, \mu y + \mu' y') - \mu(x, y) - \mu'(x, y')$$

où  $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{K}$ ,  $x, x' \in E$  et  $y, y' \in F$ .

On appelle produit tensoriel des espaces vectoriels  $E$  et  $F$ , l'espace vectoriel quotient

$$C(E, F) / N$$

que l'on désigne par

$$E \otimes F.$$

Pour tout  $(x, y) \in E \times F$ , on désigne par

$$x \otimes y$$

l'élément de

$$E \otimes F = C(E, F) / N$$

représenté par l'élément  $(x, y)$  de  $E \times F$ . On a :

**Proposition 1.6** *L'application  $(x, y) \mapsto x \otimes y$ , de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$  est bilinéaire et les produits  $x \otimes y$  engendrent l'espace vectoriel  $E \otimes F$ .*

**Démonstration.** Pour tous  $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{K}$ ,  $x, x' \in E$  et  $y, y' \in F$  on a

$$(\lambda x + \lambda' x', y) - \lambda(x, y) - \lambda'(x', y) \in N$$

et

$$(x, \mu y + \mu' y') - \mu(x, y) - \mu'(x, y') \in N,$$

donc les classes d'équivalence de ces éléments sont nulles, soit

$$(\lambda x + \lambda' x') \otimes y - \lambda x \otimes y - \lambda' x' \otimes y = 0$$

et

$$x \otimes (\mu y + \mu' y') - \mu x \otimes y - \mu' x \otimes y' = 0.$$

par conséquent l'application  $p : (x, y) \mapsto x \otimes y$ , de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$  est bilinéaire.

Soit  $\bar{u}$  un élément de  $E \otimes F$  avec  $u \in C(E, F)$ . On a

$$u = \sum_{(x,y) \in E \times F} u(x, y) (x, y),$$

donc la classe  $\bar{u}$  de  $u$  modulo  $N$  s'écrit :

$$\bar{u} = \sum_{(x,y) \in E \times F} u(x, y) x \otimes y,$$

et la proposition est démontrée. ■

**Proposition 1.7 (Propriété fondamentale du produit tensoriel).** Soit  $f$  une application de  $E \times F$  dans un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{K}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est bilinéaire.
2. Il existe une application linéaire unique

$$\begin{array}{ccc} \bar{f} : E \otimes F & \longrightarrow & H \\ \text{telle que} & & \\ f(x, y) = \bar{f}(x \otimes y) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{f} & H \\ \otimes \downarrow & & \nearrow \bar{f} \\ E \otimes F & & \end{array}$$

**Démonstration.** Il existe une application linéaire unique  $\tilde{f} : C(E, F) \longrightarrow H$  telle que

$$\tilde{f}(x, y) = \text{“}\tilde{f}(\delta_{(x,y)})\text{”} = f(x, y).$$

Supposons que  $f$  est bilinéaire. Pour tous  $x, x' \in E, y \in F$  et  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$  on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}((\lambda x + \lambda' x', y) - \lambda(x, y) - \lambda'(x', y)) &= \tilde{f}(\lambda x + \lambda' x', y) - \lambda \tilde{f}(x, y) - \lambda' \tilde{f}(x', y) \\ &= f(\lambda x + \lambda' x', y) - \lambda f(x, y) - \lambda' f(x', y) = 0, \end{aligned}$$

de même on a :

$$\tilde{f}((x, \mu y + \mu' y') - \mu(x, y) - \mu'(x, y')) = 0$$

quels que soient  $x \in E, y, y' \in F$  et  $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$ , par conséquent on a :

$$\ker p = N \subseteq \ker \tilde{f}.$$

Il résulte qu'il existe une application linéaire unique<sup>1</sup>

$$\bar{f} : E \otimes F = C(E, F) / N \longrightarrow H$$

telle que  $\bar{f}(x \otimes y) = f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in E \times F$ , d'où (1)  $\implies$  (2).

La réciproque est immédiate. ■

**Proposition 1.8** Soient  $a_1, \dots, a_r$  des vecteurs quelconques de  $E$ . Alors pour tous  $b_1, \dots, b_r \in F$  indépendants dans  $F$ , la relation

$$\sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i = 0$$

entraîne  $a_1 = \dots = a_r = 0$ .

**Démonstration.** Supposons qu'il existe  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) tel que  $a_i$  ne soit pas nul. Considérons la forme linéaire  $a^i$  sur  $E$  telle que  $a^i(a_i) = 1$  et pour tout  $j$  ( $j = 1, \dots, r$ ), on considère la forme linéaire  $b^j$  sur  $F$  définie par

$$b^j(b_k) = \delta_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ , la forme bilinéaire sur  $E \times F$  définie par :

$$f(x, y) = a^i(x) b^i(y)$$

pour tous  $(x, y) \in E \times F$ . Il existe une forme linéaire unique  $\tilde{f}$  sur  $E \otimes F$  telle que

$$\tilde{f}(x \otimes y) = f(x, y) = a^i(x) b^i(y),$$

en particulier on a :

$$0 = \tilde{f} \left( \sum_{j=1}^r a_j \otimes b_j \right) = \sum_{j=1}^r \tilde{f}(a_j \otimes b_j) = \sum_{j=1}^r a^i(a_j) b^i(b_j) = 1,$$

ce qui est absurde, par conséquent  $a_1 = \dots = a_r = 0$ . ■

<sup>1</sup>Ici on utilise le résultat suivant : étant donné trois espaces vectoriels  $E, F$  et  $G$ , et étant donné deux applications linéaires  $u : E \longrightarrow F$  et  $v : E \longrightarrow G$  avec  $v$  surjective. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\ker v \subseteq \ker u$
2. Il existe une application linéaire unique  $\varphi : G \longrightarrow F$  telle que  $u = \varphi \circ v$

**Corollaire 1.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ ,  $(a_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(b_j)_{j \in J}$  une base de  $F$ , alors

$$(a_i \otimes b_j)_{(i,j) \in I \times J}$$

est une base de  $E \otimes F$ .

En particulier si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $\dim E \otimes F = (\dim E)(\dim F)$ .

### 1.2.3 Propriétés du produit tensoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Tout élément de l'espace  $E \otimes \mathbb{K}$  s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i = \sum_{i=1}^n (a_i x_i \otimes 1) = \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \otimes 1$$

avec  $x_i \in E$  et  $a_i \in \mathbb{K}$ , et par conséquent, tout élément de  $E \otimes \mathbb{K}$  s'écrit :

$$x \otimes 1 \text{ avec } x \in E.$$

La propriété fondamentale du produit tensoriel montre que l'application bilinéaire  $b : (x, a) \mapsto ax$  de  $E \times \mathbb{K}$  dans  $E$ , induit une application linéaire

$$\bar{b} : E \otimes \mathbb{K} \longrightarrow E$$

telle que  $\bar{b}(x \otimes a) = ax$ .

L'application linéaire  $x \mapsto x \otimes 1$  de  $E$  dans  $E \otimes \mathbb{K}$  et l'application linéaire  $\bar{b}$  sont inverses l'une de l'autre, ainsi les espaces vectoriels  $E \otimes \mathbb{K}$  et  $E$  sont isomorphes :

$$E \otimes \mathbb{K} \simeq E.$$

Étant donné trois espaces vectoriels  $E, F$  et  $H$  sur  $\mathbb{K}$ , alors à toute application linéaire  $f$  de  $E$  dans l'espace des applications linéaires de  $F$  dans  $H$  ( $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, H))$ ), associons l'application bilinéaire  $\tilde{f}$  de  $E \times F$  à valeurs dans  $H$  ( $\tilde{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; H)$ ), définie par :

$$\tilde{f}(x, y) = f(x)(y).$$

Inversement, à toute application bilinéaire  $b$  de  $E \times F$  dans  $H$  ( $b \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; H)$ ) on associe l'application linéaire  $b_* \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, H))$  définie par :

$$b_*(x) = b(x, \cdot)$$



pour tout  $x \in E$ , où  $b(x, \cdot)$  est l'application linéaire  $y \mapsto b(x, y)$  de  $F$  dans  $H$ .

Il est clair que les applications  $\theta : f \mapsto \tilde{f}$  et  $\phi : b \mapsto b_*$  sont linéaires et sont inverses l'une de l'autre, par conséquent

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, H)) \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; H)$$

La propriété fondamentale du produit tensoriel montre qu'à toute application bilinéaire  $b : E \times F \rightarrow H$ , on peut associer une application linéaire unique

$$\bar{b} : E \otimes F \rightarrow H$$

telle que  $\bar{b}(x \otimes y) = b(x, y)$

La correspondance  $b \mapsto \bar{b}$ , de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; H)$  dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes F; H)$  définit bien un isomorphisme :

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; H) \approx \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes F; H).$$

**Proposition 1.9** *Il existe un isomorphisme et un seul de  $E \otimes F$  sur  $F \otimes E$  appliquant  $x \otimes y$  sur  $y \otimes x$ .*

**Démonstration.** Soit  $h : E \times F \rightarrow F \otimes E$  l'application bilinéaire définie par :

$$h(x, y) = y \otimes x,$$

pour tous  $x \in E$  et  $y \in F$ . Il existe une application linéaire unique  $\tilde{h}$  de  $E \otimes F$  dans  $F \otimes E$  telle que

$$\tilde{h}(x \otimes y) = y \otimes x.$$

De même, il existe une application linéaire unique  $\tilde{g}$  de  $F \otimes E$  dans  $E \otimes F$  telle que

$$\tilde{g}(y \otimes x) = x \otimes y,$$

pour tous  $x \in E$  et  $y \in F$ . Et, donc,

$$\tilde{h} \circ \tilde{g} = id_{F \otimes E} \text{ et } \tilde{g} \circ \tilde{h} = id_{E \otimes F}.$$

Donc il existe un isomorphisme unique  $\tilde{h}$  de  $E \otimes F$  sur  $F \otimes E$  telle que

$$\tilde{h}(x \otimes y) = y \otimes x.$$

pour tous  $x \in E$  et  $y \in F$ . ■

**Proposition 1.10** *Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Alors, il existe un isomorphisme unique de  $(E \otimes F) \otimes G$  sur  $E \otimes (F \otimes G)$ , appliquant  $(x \otimes y) \otimes z$  sur  $x \otimes (y \otimes z)$ , pour tous  $x \in E, y \in F$  et  $z \in G$ .*

**Démonstration.** Soit  $x \in E$ . L'application

$$\varphi_x : F \times G \longrightarrow (E \otimes F) \otimes G$$

définie par

$$\varphi_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z,$$

est bilinéaire, donc il existe une application linéaire et une seule

$$\tilde{\varphi}_x : F \otimes G \longrightarrow (E \otimes F) \otimes G$$

telle que

$$\tilde{\varphi}_x(y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

L'application

$$\varphi : E \times (F \otimes G) \longrightarrow (E \otimes F) \otimes G$$

définie par

$$\varphi(x, u) = \tilde{\varphi}_x(u)$$

est bilinéaire, donc il existe une application linéaire unique

$$\bar{\varphi} : E \otimes (F \otimes G) \longrightarrow (E \otimes F) \otimes G$$

telle que

$$\bar{\varphi}(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z.$$

De même, il existe une application linéaire unique

$$\bar{\psi} : (E \otimes F) \otimes G \longrightarrow E \otimes (F \otimes G)$$

telle que

$$\bar{\psi}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Comme on a  $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = id_{(E \otimes F) \otimes G}$  et  $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = id_{E \otimes (F \otimes G)}$ , on déduit que  $\bar{\varphi}$  est un isomorphisme de  $(E \otimes F) \otimes G$  sur  $E \otimes (F \otimes G)$ , appliquant  $(x \otimes y) \otimes z$  sur  $x \otimes (y \otimes z)$ , pour tous  $x \in E, y \in F$  et  $z \in G$ . ■

Définissons maintenant le produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels.

Étant donné  $n$  espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_n$  sur un même corps commutatif  $\mathbb{K}$ . On dénote par  $C(E_1, \dots, E_n)$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par

l'ensemble  $E_1 \times \dots \times E_n$  et par  $N(E_1, \dots, E_n)$  le sous espace vectoriel de  $C(E_1, \dots, E_n)$  engendré par les éléments de la forme :

$$(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta x'_i, \dots, x_n) - \alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \beta(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

pour tous  $x_i, x'_i \in E_i$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

On appelle produit tensoriel des espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_n$ , l'espace vectoriel quotient

$$\frac{C(E_1, \dots, E_n)}{N(E_1, \dots, E_n)}$$

que l'on désigne par  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ , on désigne par  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  la classe de  $(x_1, \dots, x_n)$ . Il est clair que l'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  est  $n$ -linéaire et les produits  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  engendrent l'espace vectoriel  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ .

**Proposition 1.11 (Propriété fondamentale du produit tensoriel).**  
 Soit  $f$  une application de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{K}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est  $n$ -linéaire.
2. Il existe une application linéaire unique

$$\begin{array}{ccc} \bar{f} : E_1 \otimes \dots \otimes E_n \longrightarrow H & & E_1 \times \dots \times E_n \xrightarrow{f} H \\ \text{telle que} & & \otimes \downarrow \\ \bar{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = f(x_1, \dots, x_n). & & E_1 \otimes \dots \otimes E_n \nearrow \bar{f} \end{array}$$

Ceci conduit à l'étude de l'algèbre tensoriel :

$$T(E) = \mathbb{K} \oplus E \oplus E^* \oplus E \otimes E \oplus E \otimes E^* \oplus E^* \otimes E \oplus E^* \otimes E^* \oplus E \otimes E \otimes E + \dots$$

**Proposition 1.12** *Étant donné trois espaces vectoriels  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sur  $\mathbb{K}$ , il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \longrightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$  tel que*

$$f(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$$

*Démonstration.* L'application trilinéaire  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$ , de  $E_1 \times E_2 \times E_3$  à valeurs dans  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ , induit une application linéaire  $f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \longrightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$  telle que

$$f(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3.$$

Inversement, tout élément  $x_3 \in E_3$  fixé, correspond à une application bilinéaire

$$b_{x_3} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

telle que  $b_{x_3}(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ , qui induit à son tour une application linéaire

$$\bar{b}_{x_3} : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

telle que  $\bar{b}_{x_3}(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ .

On définit ensuite l'application bilinéaire

$$\bar{b} : E_1 \otimes E_2 \times E_3 \longrightarrow E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

donnée par :

$$\bar{b}(u, x_3) = \bar{b}_{x_3}(u), \text{ avec } u \in E_1 \otimes E_2 \text{ et } x_3 \in E_3.$$

Il en résulte qu'il existe une application linéaire

$$g : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \longrightarrow E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

telle que

$$g(u \otimes x_3) = \bar{b}(u, x_3),$$

et, donc,

$$g((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3.$$

Les applications linéaires  $f$  et  $g$  sont inverses l'une de l'autre, donc elles définissent un isomorphisme. ■

**Remarque 1.1** *Dans la pratique, on confond  $(x \otimes y) \otimes z$  et  $x \otimes (y \otimes z)$  qu'on écrit  $x \otimes y \otimes z$ , et on désigne par  $E \otimes F \otimes G$  l'espace engendré par  $x \otimes y \otimes z$ , où  $x \in E, y \in F$  et  $z \in G$ .*

*Et, on définit le produit tensoriel*

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k$$

des espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_k$  sur  $\mathbb{K}$  par :

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k = E_1 \otimes (E_2 \otimes \dots \otimes E_k),$$

et on confond aussi  $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k$  avec  $x_1 \otimes (x_2 \otimes \dots \otimes x_k)$ .

Soient  $E, F, G$  et  $H$  quatre espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{K}$ .

À tout couple  $(u, v)$  dans lequel  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$ , associons l'application bilinéaire

$$(x, y) \longmapsto u(x) \otimes v(y)$$

de  $E \times G$  à valeurs dans  $F \otimes H$ .

La propriété fondamentale du produit tensoriel montre qu'il existe une application linéaire unique

$$u \otimes v : E \otimes G \longrightarrow F \otimes H$$

telle que

$$u \otimes v(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)^2.$$

De plus l'application  $(u, v) \longmapsto u \otimes v$ , de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$  à valeurs dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes G, F \otimes H)$ , est bilinéaire, donc il existe une application linéaire unique

$$T : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes G, F \otimes H)$$

associant au produit tensoriel  $u \otimes v$  des vecteurs  $u$  et  $v$ , l'application linéaire  $u \otimes v : E \otimes G \longrightarrow F \otimes H$ . On a :

**Proposition 1.13** *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, l'application linéaire*

$$T : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes G, F \otimes H) \quad (1.2)$$

*est injective.*

*Si de plus les espaces  $E, F, G$  et  $H$  sont de dimension finie, alors  $T$  est un isomorphisme.*

**Démonstration.** Supposons qu'il existe  $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$  non nul tel que  $T(\omega) = 0$ .

Par conséquent, il existe  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  linéairement indépendants, et  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$  linéairement indépendants tels que

$$\omega = u_1 \otimes v_1 + \dots + u_n \otimes v_n,$$

---

<sup>2</sup>la notation classique  $u \otimes v$  peut prter une confusion, car elle possde deux significations différentes :

1.  $u \otimes v$  est le produit tensoriel du vecteur  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  par le vecteur  $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$ ,
2.  $u \otimes v : E \otimes G \longrightarrow F \otimes H$  est une application linéaire, définie par la proprié universelle du produit tensoriel.

et, donc,

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^n T(u_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i = 0,$$

par conséquent on a :

$$\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \otimes v_i(y) = 0 \quad (1.3)$$

pour tout  $(x, y) \in E \times G$ . Choisissons  $a \in E$  tel que  $u_1(a) \neq 0$ .

Soit  $p \geq 1$  le nombre maximal de vecteurs indépendants dans l'ensemble

$$\{u_1(a), \dots, u_n(a)\}.$$

On peut supposer que  $u_1(a), \dots, u_p(a)$  sont linéairement indépendants. On a donc

$$u_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_j^i u_i(a) \text{ pour } j = p+1, \dots, n,$$

et la relation (1.3) donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i(a, y) &= \sum_{i=1}^n u_i(a) \otimes v_i(y) \\ &= \sum_{i=1}^p u_i(a) \otimes v_i(y) + \sum_{j=p+1}^n u_j(a) \otimes v_j(y) \\ &= \sum_{i=1}^p u_i(a) \otimes v_i(y) + \sum_{j=p+1}^n \left( \sum_{i=1}^p \lambda_{ji} u_i(a) \right) \otimes v_j(y) \\ &= \sum_{i=1}^p u_i(a) \otimes \left( v_i(y) + \sum_{j=p+1}^n \lambda_{ji} v_j(y) \right) = 0 \end{aligned}$$

pour tout  $y \in G$ , par conséquent

$$v_i(y) + \sum_{j=p+1}^n \lambda_{ji} v_j(y) = 0 \text{ pour tout } y \in G.$$

On déduit que les  $v_i$  sont linéairement dépendants, ce qui est absurde, donc  $T$  est injective.

Si de plus les espaces  $E, F, G$  et  $H$  sont de dimension finie, alors les espaces  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$  et  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes G, F \otimes H)$  ont même dimension, donc  $T$  est un isomorphisme. ■

Lorsque  $F = H = \mathbb{K}$ , et  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, il existe un isomorphisme canonique

$$E^* \otimes G^* \longrightarrow (E \otimes G)^*. \quad (1.4)$$

Et, lorsque  $F = G = \mathbb{K}$ , et  $E$  et  $H$  sont de dimension finie, il existe un isomorphisme canonique

$$E^* \otimes H \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, H), \quad (1.5)$$

faisant correspondre au tenseur  $\omega \otimes x$  de  $E^* \otimes H$ , l'application linéaire  $u : E \longrightarrow H$  définie par :

$$u(y) = \langle y, \omega \rangle x.$$

Réciproquement, cherchons à déterminer le tenseur de  $E^* \otimes H$  associé à une application linéaire fixée  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, H)$ .

Soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $E$ ,  $(e^i)_{1 \leq i \leq p}$  sa base duale,  $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$  une base de  $H$ , et soient  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, H)$  et  $t(u)$  le tenseur de  $E^* \otimes H$  associé à  $u$ . Écrivons<sup>3</sup>

$$u(e_i) = a_i^j f_j$$

et

$$t(u) = \lambda_i^j e^i \otimes f_j.$$

On a donc

$$t(u)(e_k) = \lambda_i^j e^i \otimes f_j(e_k) = \lambda_i^j \langle e_k, e^i \rangle f_j = \lambda_i^j \delta_k^i f_j = \lambda_k^j f_j = u(e_k) = a_k^j f_j,$$

par conséquent  $\lambda_k^j = a_k^j$ , d'où :

$$t(u) = a_i^j e^i \otimes f_j = e^i \otimes a_i^j f_j = e^i \otimes u(e_i).$$

On montre facilement que si  $(e'_i)_{1 \leq i \leq p}$  une autre base de  $E$  alors  $t(u) = e'^i \otimes u(e'_i)$ .

**Proposition 1.14** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; \mathbb{K})$  l'espace des formes bilinéaires de  $E \times F$  dans  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique homomorphisme injectif*

$$\bar{J} : E \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E^*, F^*; \mathbb{K})$$

---

<sup>3</sup>**Convention d'Einstein** : Sauf mention du contraire, chaque fois que dans un monôme figure deux fois le même indice, une fois comme indice supérieur et une fois comme indice inférieur, on doit sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.

appliquant l'élément

$$x \otimes y$$

sur la forme bilinéaire  $J_{x,y}$  sur  $E^* \times F^*$  définie par :

$$J_{x,y}(\alpha, \beta) = \langle x, \alpha \rangle \langle y, \beta \rangle.$$

Et si de plus  $E$  et  $F$  sont de dimension finie,  $\bar{J}$  est un isomorphisme.

**Démonstration.** Soit  $J$  l'application

$$(x, y) \longmapsto J_{x,y}$$

de  $E \times F$  dans  $\mathcal{L}(E^*, F^*; \mathbb{K})$ , définie par :

$$J_{x,y}(\alpha, \beta) = \langle x, \alpha \rangle \langle y, \beta \rangle,$$

est bilinéaire, donc il existe une application linéaire unique

$$\bar{J} : E \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}(E^*, F^*; \mathbb{K})$$

telle que

$$\bar{J}(x \otimes y) = J_{x,y}$$

pour tous  $x \in E$  et  $y \in F$ .

Montrons que l'application  $\bar{J}$  est injective. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_j)_{j \in J}$  une base de  $F$ .

Soit  $t$  un tenseur de  $E \otimes F$  tel que  $\bar{J}(t) = 0$ . Par rapport à la base  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  de l'espace vectoriel  $E \otimes F$ , le vecteur  $t$  s'écrit :

$$t = \lambda^{ij} e_i \otimes f_j,$$

où  $(\lambda^{ij})$  est une famille presque nulle de scalaires. On a donc

$$\bar{J}(t) = \lambda^{ij} \bar{J}(e_i \otimes f_j) = \lambda^{ij} J_{e_i, f_j}$$

par conséquent, on a

$$0 = \bar{J}(t) \left( e^k, f^l \right) = \lambda^{ij} J_{e_i, f_j} \left( e^k, f^l \right) = \lambda^{ij} \langle e_i, e^k \rangle \langle f_j, f^l \rangle = \lambda^{kl}$$

pour tout  $(k, l) \in I \times J$ , où pour tout  $i \in I$ ,  $e^i$  est l'unique forme linéaire sur l'espace vectoriel  $E$  telle que  $\langle e_u, e^i \rangle = \delta_u^i$  quel que soit  $u \in I$  et  $f^j$  est l'unique forme linéaire sur l'espace vectoriel  $F$  telle que  $\langle f_v, f^j \rangle = \delta_v^j$



quel que soit  $v \in J$ . On a donc montré que  $t$  est le tenseur nul, par suite l'application  $\bar{J}$  est injective.

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie  $p$  et  $q$  respectivement, alors

$$\dim E \otimes F = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E^*, F^*; \mathbb{K}) = pq,$$

et l'application  $\bar{J}$  est un isomorphisme. ■

La proposition précédente montre que si les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, le produit tensoriel  $E \otimes F$  des espaces vectoriels  $E$  et  $F$  s'identifie à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E^*, F^*; \mathbb{K})$  des formes bilinéaires sur  $E^* \times F^*$

$$E \otimes F = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E^*, F^*; \mathbb{K})$$

et le produit tensoriel  $x \otimes y$  des vecteurs  $x$  et  $y$  à la forme bilinéaire définie sur  $E^* \times F^*$  par :

$$x \otimes y(\alpha, \beta) = \langle x, \alpha \rangle \langle y, \beta \rangle.$$

Plus généralement, le produit tensoriel  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$  des espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_n$  de dimension  $p_1, \dots, p_n$  ( $p_i \in \mathbb{N}$ ) s'identifie à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(n)}(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbb{K})$  des formes  $n$ -linéaires sur  $E_1^* \times \dots \times E_n^*$  :

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_n = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(n)}(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbb{K})$$

et le produit tensoriel  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  à la forme  $n$ -linéaire définie sur  $E_1^* \times \dots \times E_n^*$  par :

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n(\omega^1, \dots, \omega^n) = \langle x_1, \omega^1 \rangle \dots \langle x_n, \omega^n \rangle.$$

Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on dénote par  $(e_{k,i})_{1 \leq i \leq p_k}$  une base de  $E_k$ , alors la famille

$$(e_{1,i_1} \otimes \dots \otimes e_{n,i_n})_{1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n}$$

est une base de  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ , en particulier

$$\dim(E_1 \otimes \dots \otimes E_n) = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Rappelons que tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie s'identifie à son bidual  $E^{**}$  grâce à l'isomorphisme  $\varphi_E : E \longrightarrow E^{**}$ , définie par :

$$\varphi_E(x)(\omega) = \langle x, \omega \rangle,$$

pour tout  $x \in E$  et  $\omega \in E^*$ .

On voit ici, que le produit tensoriel  $E^* \otimes F^*$  des espaces vectoriels  $E^*$  et  $F^*$  s'identifie à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; \mathbb{K})$  des formes bilinéaires sur  $E \times F$

$$E^* \otimes F^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(2)}(E, F; \mathbb{K})$$

et le produit tensoriel  $\alpha \otimes \beta$  des covecteurs  $\alpha$  et  $\beta$  à la forme bilinéaire définie sur  $E \times F$  par :

$$\alpha \otimes \beta(x, y) = \langle x, \alpha \rangle \langle y, \beta \rangle.$$

Et plus généralement, le produit tensoriel  $E_1^* \otimes \dots \otimes E_n^*$  des espaces vectoriels  $E_1^*, \dots, E_n^*$  de dimension finie s'identifie à l'espace  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(n)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$  des formes  $n$ -linéaires sur  $E_1 \times \dots \times E_n$

$$E_1^* \otimes \dots \otimes E_n^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{(n)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$$

et le produit tensoriel  $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^n$  des covecteurs  $\omega^1, \dots, \omega^n$  à la forme  $n$ -linéaire définie sur  $E_1 \times \dots \times E_n$  par :

$$\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^n(x_1, \dots, x_n) = \langle x_1, \omega^1 \rangle \dots \langle x_n, \omega^n \rangle.$$

### 1.2.4 Tenseurs

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $p$ . pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $T^n(E)$  l'espace  $E \otimes \dots \otimes E$  ( $n$ -fois) :

$$T_0^n(E) = E^{\otimes n} = E \otimes \dots \otimes E \text{ (} n \text{ - fois)}$$

avec la convention

$$T_0^0(E) = \mathbb{K} \text{ et } T_0^1(E) = E.$$

Les éléments de  $T_0^n(E)$  sont appelés tenseurs  $n$ -fois contravariants et l'espace  $T^n(E)$  est appelé  $i$ -ième puissance tensorielle de  $E$ .

Et, pour chaque entier naturel  $m$ , on dénote par  $T_m^0(E)$  l'espace  $(E^*)^{\otimes m} = E^* \otimes \dots \otimes E^*$  ( $m$ -fois) avec la convention  $T_1^0(E) = E^*$ . Les éléments de  $T_n^0(E)$  sont appelés tenseurs  $n$ -fois covariants.

Et enfin pour tout couple  $(n, m)$  d'entiers naturels, on définit

$$T_m^n(E) = (E^*)^{\otimes m} \otimes E^{\otimes n}$$

Les éléments de  $T_m^n(E)$  sont appelés tenseurs mixtes  $n$ -fois contravariants et  $m$ -fois covariants. Les relations (1.4) et (1.5) permettent l'identification suivante

$$T_m^n(E) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E^{\otimes m}, E^{\otimes n}),$$

et les relations (1.2) et (1.5) nous permettent de voir qu'il existe un isomorphisme canonique

$$T_m^n(E) \otimes T_{m'}^{n'}(E) \longrightarrow T_{m+m'}^{n+n'}(E), \quad (1.6a)$$

tel que pour tous  $u = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in T_m^n(E)$  et  $v = \beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^{m'} \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{n'}$ , le produit tensoriel  $u \otimes v$  s'identifie à :

$$u \otimes v = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^m \otimes \beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^{m'} \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{n'}.$$

On étend la définition des isomorphismes (1.6a) au cas où  $n = m = n' = m' = 0$ , en considérant les applications linéaires correspondant aux applications bilinéaires  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  et  $(\alpha, x) \mapsto x\alpha$ . Il est clair que pour trois tenseurs quelconques  $t_1, t_2$  et  $t_3$  on a :

$$(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3).$$

De nouveau la relation (1.4) permet de voir qu'on a un isomorphisme

$$(T_m^n(E))^* \longrightarrow T_n^m(E)$$

grâce auquel on a :

$$\langle \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n, y_1 \otimes \dots \otimes y_m \otimes \beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^n \rangle = \prod \langle y_j, \alpha^j \rangle \prod \langle x_i, \beta^i \rangle.$$

Désignons par  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $E$  et par  $(e^i)_{1 \leq i \leq p}$  sa base duale, alors la famille

$$\left( e_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} \right)_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq p, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq p}$$

avec

$$e_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_m} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$$

est une base de  $T_m^n(E)$  formée de  $p^{n+m}$  éléments, et chaque tenseur  $n$ -fois contravariant et  $m$ -fois covariant s'écrit sous la forme :

$$t = t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_m} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}.$$

Les scalaires  $t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$  sont appelés composantes du tenseur  $t$  par rapport à la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ . Désignons par  $(e_i^{(\prime)})_{1 \leq i \leq p}$  une autre base de  $E$ , par  $(e^{(\prime)i})_{1 \leq i \leq p}$  sa base duale,  $P = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq p}$  la matrice de passage de la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  à la base  $(e_i^{(\prime)})_{1 \leq i \leq p}$  :

$$e_i^{(\prime)} = a_j^i e_j.$$

et on dénote par  $Q = (b_j^i)_{1 \leq i, j \leq p}$  la matrice de passage de la base  $(e^i)_{1 \leq i \leq p}$  à la base  $(e^{(l)i})_{1 \leq i \leq p}$ . La relation  $e^j = a_i^j e^{(l)i}$  montre que les matrices  $P$  et  $Q$  sont inverses l'une de l'autre.

Soient  $(t_{j_1 \dots j_m}^{(l)i_1 \dots i_n})_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq p, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq p}$  les composantes du tenseur  $t$  par rapport à la base  $(e_i^{(l)})_{1 \leq i \leq p}$ .

Les composantes  $t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$  et  $t_{j_1 \dots j_m}^{(l)i_1 \dots i_n}$  sont liées par :

$$t_{j_1' \dots j_m'}^{(l)i_1' \dots i_n'} = a_{j_1}^{j_1'} \dots a_{j_m}^{j_m'} b_{i_1}^{i_1'} \dots b_{i_n}^{i_n'} t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (1.7)$$

et

$$t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = a_{i_1'}^{i_1} \dots a_{i_n'}^{i_n} b_{j_1}^{j_1'} \dots b_{j_m}^{j_m'} t_{j_1' \dots j_m'}^{(l)i_1' \dots i_n'}. \quad (1.8)$$

Le formules ci dessus sont appelées lois de transformations d'un tenseur  $n$ -fois contravariant et  $m$ -fois covariant. Inversement on a :

**Théorème 1.1** *Pour qu'un système de  $p^{n+m}$  quantités attaché à une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  de l'espace vectoriel  $E$  puisse être considérée comme des composantes d'un tenseur  $n$ -fois contravariant et  $m$ -fois covariant, il faut et il suffit que, dans un changement de base, ce système se transforme selon les lois (1.7) et (1.8).*

### 1.2.5 Contraction d'un tenseur mixte

Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels avec  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , on considère l'application

$$\theta_j^i : E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots \times E \longrightarrow T_{m-1}^{n-1}(E)$$

définie par :

$$\theta_j^i(\omega^1, \dots, \omega^m, x_1, \dots, x_n) = \langle x_j, \omega^i \rangle \omega^1 \otimes \dots \otimes \widehat{\omega^i} \otimes \dots \otimes \omega^m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes \widehat{x_j} \otimes \dots \otimes x_n,$$

où l'accent circonflexe signifie qu'il faut omettre le facteur correspondant.

L'application  $\theta_j^i$  est  $(n+m)$ -linéaire, donc elle induit une application linéaire unique

$$C_j^i : T_m^n(E) \longrightarrow T_{m-1}^{n-1}(E)$$

telle que

$$C_j^i(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \langle x_j, \omega^i \rangle \omega^1 \otimes \dots \otimes \widehat{\omega^i} \otimes \dots \otimes \omega^m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes \widehat{x_j} \otimes \dots \otimes x_n$$

Cette application est appelée *opérateur de contraction* d'indice  $(i, j)$ .

Prenons par exemple  $n = m = 1$  et considérons l'opérateur de contraction d'indice  $(1, 1)$  :

$$C_1^1 : T_1^1(E) = E^* \otimes E \longrightarrow T_0^0(E) = \mathbb{K}.$$

Évidemment on a :

$$C_1^1(\omega \otimes x) = \langle x, \omega \rangle.$$

Rappelons que les éléments  $\omega \otimes x$  de  $E^* \otimes E$  correspondent canoniquement aux endomorphismes  $y \mapsto \langle y, \omega \rangle x$  de  $E$ , et que, inversement, tout endomorphisme  $u$  de  $E$  est associé au tenseur  $t(u) = e^i \otimes u(e_i)$ .

On appelle *trace* d'un endomorphisme  $u$  de l'espace vectoriel  $E$ , la valeur de l'opérateur de contraction  $C_1^1(t(u))$  appliqué au tenseur  $t(u)$  correspondant à  $u$ , on a donc :

$$Tr(u) = C_1^1(t(u)) = \langle u(e_i), e^i \rangle = a_i^i,$$

où  $(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq p}$  est la matrice de  $u$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ .

On vérifie aussitôt que l'on a :

$$Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u).$$

## 1.3 Formes extérieures

Sauf mention explicite du contraire, on suppose dans ce chapitre que  $\mathbb{K}$  est le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels et les espaces vectoriels considérés sont réels de dimension finie.

### 1.3.1 L'algèbre des tenseurs contravariants

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

On appelle algèbre des tenseurs contravariants, la sous algèbre de l'algèbre tensoriel  $T(E)$ , donnée par :

$$\begin{aligned} C(E) &= \mathbb{K} \oplus E \oplus E \otimes E \oplus E \otimes E \otimes E + \dots \\ &= C^0(E) \oplus C^1(E) \oplus C^2(E) \oplus \dots \end{aligned}$$

avec  $C^p(E) = E \otimes E \otimes \dots \otimes E$  ( $p$ -fois).

Un élément de  $C^p(E)$  est appelé tenseur  $p$ -contravariant et  $C(E)$  est appelé algèbre des tenseurs contravariants de  $E$ . D'une manière similaire,

on peut définir la sous algèbre  $C(E^*)$  de  $T(E)$ . C'est l'algèbre des tenseurs covariants de  $E$ .

Il existe un couplage naturel de  $C^p(E^*)$  avec  $(C^p(E))^*$ , il est défini par la forme bilinéaire sur  $C(E) \times C(E^*)$  par :

$$\langle v, \gamma \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in C^p(E) \text{ et } \gamma \in C^q(E^*) \text{ avec } p \neq q \\ \sum v^{i_1 \dots i_p} \gamma_{i_1 \dots i_p} & \text{si } p = q \text{ avec } v = \sum v^{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} \text{ et } \gamma = \sum \gamma_{j_1 \dots j_p} e^{j_1 \dots j_p} . \end{cases}$$

Une forme extérieure de degré  $p$  (ou  $p$ -forme extérieure) sur  $E$  est un tenseur  $p$ -fois covariant sur  $E$  anti-symétrique c'est à dire un élément  $\theta$  de l'espace  $T_p^0(E) = (E^*)^{\otimes p}$  satisfaisant à :

$$\theta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -\theta(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

pour tous  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m \in E$ , ce qui est équivalent à dire que  $\theta$  est alternée, cela veut dire  $\theta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0$  dès qu'il existe un couple d'entiers naturels  $(i, j)$  avec  $1 \leq i < j \leq m$  tels que  $x_i = x_j$ .

On en déduit que

$$\theta(x_1, \dots, x_p) = 0$$

si les vecteurs  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p$  linéairement dépendants sur  $E$ , ainsi, toute  $p$ -forme extérieure sur  $E$  est identiquement nulle dès que  $p$  est supérieur strictement à  $\dim E$ .

Notons par  $\bigwedge_p(E) = \bigwedge^p(E^*)$  l'ensemble des  $p$ -formes extérieures sur  $E$ . Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel réel et la somme directe

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge_p(E),$$

ici  $\bigwedge_0 E = \mathbb{R}$  et  $\bigwedge_1 E = E^*$ , est appelée algèbre extérieure de  $E$ .

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_p$  opère sur l'espace vectoriel produit  $E^p = E \times E \times \dots \times E$  par :

$$\bar{\sigma}(x_1, \dots, x_p) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}).$$

**Proposition 1.15** *On a :*

$$\overline{\sigma \circ \tau}(x_1, \dots, x_p) = \bar{\tau}(\bar{\sigma}(x_1, \dots, x_p))$$

pour tous  $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_p$  et  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ .

En effet on a :

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}(x_1, \dots, x_p)) = \bar{\tau}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \bar{\tau}(y_1, \dots, y_p)$$

avec  $y_i = x_{\sigma(i)}$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ , par conséquent on a :

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}(x_1, \dots, x_p)) = (x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(p))}) = (x_{(\sigma \circ \tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma \circ \tau)(p)}),$$

d'où

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}(x_1, \dots, x_p)) = \overline{\sigma \circ \tau}(x_1, \dots, x_p).$$

On déduit que le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_p$  opère sur  $T_p^0(E)$  par :

$$\sigma t = t \circ \bar{\sigma}.$$

Il résulte aussitôt que l'on a :

$$(\sigma \circ \tau)t = \sigma(\tau t)$$

pour tous  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_p$  et  $t \in T_p^0(E)$ .

**Définition 1.3 (Opérateurs d'antisymétrisation).** On appelle opérateur d'antisymétrisation, l'application linéaire  $\mathcal{A} : T_p^0(E) \longrightarrow T_p^0(E)$  définie par :

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sigma t.$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ ,  $\varepsilon(\sigma)$  vaut 1 si  $\sigma$  est une permutation paire et elle vaut  $-1$  si elle est impaire.

**Proposition 1.16** Pour tout tenseur  $p$ -fois covariant  $t$ , on a :

1.  $\mathcal{A}(t) \in \bigwedge_p(E)$
2.  $t \in \bigwedge_p(E) \iff \sigma t = \varepsilon(\sigma)t$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ ,
3. Si  $t \in \bigwedge_p(E)$  alors  $\mathcal{A}(t) = t$ ,
4.  $\mathcal{A}(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{A}(t)$ .

*Démonstration.* Les démonstrations des assertions 2,3 et 4 sont laissées au soins du lecteur. Pour toute permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_p$ , on a :

$$\tau \mathcal{A}(t) = \tau \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sigma t \right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) (\tau \circ \sigma) t = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\tau) \varepsilon(\tau \circ \sigma) (\tau \circ \sigma) t,$$

d'où

$$\tau \mathcal{A}(t) = \varepsilon(\tau) \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\tau \circ \sigma) (\tau \circ \sigma) t \right) = \varepsilon(\tau) \left( \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\rho) \rho t \right) = \varepsilon(\tau) \mathcal{A}(t),$$

ce qui montre la première  
assertion. ■

**Définition 1.4 (Image réciproque d'une forme extérieure).** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors pour toute  $p$ -forme extérieure  $\omega$  sur l'espace vectoriel  $F$ , on peut associer une  $p$ -forme extérieure sur  $E$ , notée  $u^*\omega$  et appelée image réciproque de  $\omega$  par l'application linéaire  $u$ , cette  $p$ -forme est définie par :

$$u^*\omega(x_1, \dots, x_p) = \omega(u(x_1), \dots, u(x_p))$$

pour tous  $x_1, \dots, x_p \in E$ .

**Définition 1.5 (Produit extérieur).** Soient  $\alpha \in \bigwedge_p(E)$  et  $\beta \in \bigwedge_q(E)$ . On appelle produit extérieur de la  $p$ -forme extérieure  $\alpha$  par la  $q$ -forme extérieure  $\beta$ , la  $(p+q)$ -forme extérieure  $\alpha \wedge \beta$  sur  $E$  définie par :

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).$$

On voit clairement que  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$  de  $\bigwedge_p(E) \times \bigwedge_q(E)$  à valeurs dans  $\bigwedge_{p+q}(E)$  est une application bilinéaire.

Et, sans peine, on démontre qu'étant donné deux espaces vectoriels  $E, F$  et une application linéaire  $u : E \rightarrow F$ , alors

$$u^*(\alpha \wedge \beta) = u^*\alpha \wedge u^*\beta$$

pour tout  $(\alpha, \beta) \in \bigwedge_p(F) \times \bigwedge_q(F)$ .

**Proposition 1.17** Quels que soient  $\alpha \in \bigwedge_p(E)$  et  $\beta \in \bigwedge_q(E)$ , on a :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma_{p,q}$  la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+p \\ p+1 & \dots & p+q & 1 & \dots & p \end{pmatrix}.$$



On a

$$\varepsilon(\sigma_{p,q}) = (-1)^{pq}.$$

Pour tous  $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \in E$ , on a :

$$\alpha \otimes \beta(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \alpha(x_1, \dots, x_p) \beta(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}(\beta \otimes \alpha)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) &= \beta \otimes \alpha(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, x_1, \dots, x_p) \\ &= \alpha(x_1, \dots, x_p) \beta(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}), \end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\sigma_{p,q}(\beta \otimes \alpha) = \alpha \otimes \beta.$$

Le produit extérieur  $\alpha \wedge \beta$  est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \sigma(\alpha \otimes \beta) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma_{p,q}) \varepsilon(\sigma \circ \sigma_{p,q}) (\sigma \circ \sigma_{p,q})(\beta \otimes \alpha) \\ &= \varepsilon(\sigma_{p,q}) \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

**Proposition 1.18** *Quels que soient  $\alpha \in T_p^0(E)$  et  $\beta \in T_q^0(E)$ , on a :*

$$\mathcal{A}((\mathcal{A}\alpha) \otimes \beta) = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = \mathcal{A}(\alpha \otimes \mathcal{A}\beta).$$

*Démonstration.* On a :

$$(\mathcal{A}\alpha) \otimes \beta = \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sigma \alpha \right) \otimes \beta = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) [(\sigma \alpha) \otimes \beta].$$

On identifie le groupe  $\mathfrak{S}_p$  au sous groupe  $\mathfrak{H}_{p,q}$  de  $\mathfrak{S}_{p+q}$  formé des permutations du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(p) & p+1 & \dots & p+q \end{pmatrix}$$

avec  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ . On a donc

$$(\mathcal{A}\alpha) \otimes \beta = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{H}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \sigma(\alpha \otimes \beta),$$

par suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((\mathcal{A}\alpha) \otimes \beta) &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\tau) \tau((\mathcal{A}\alpha) \otimes \beta) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\tau) \tau \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \sigma(\alpha \otimes \beta) \right) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} \left( \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma) (\tau \circ \sigma) (\alpha \otimes \beta) \right) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).
\end{aligned}$$

De même on a

$$\mathcal{A}(\alpha \otimes \mathcal{A}(\beta)) = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).$$

Et la proposition est démontrée. ■

**Proposition 1.19** *pour tous  $\alpha \in \Lambda_p(E)$ ,  $\beta \in \Lambda_q(E)$  et  $\gamma \in \Lambda_r(E)$  on a :*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

*Démonstration.* On a :

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \mathcal{A}((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma),$$

de même on a :

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma),$$

et la proposition est démontrée. ■

Soient maintenant  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p$  des formes linéaires de  $E^*$ . On a

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p = p! \mathcal{A}(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sigma(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^p),$$

et, donc, pour tous  $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ , on a :

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^m(x_1, x_2, \dots, x_m) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, \omega^1 \rangle & \langle x_1, \omega^2 \rangle & \dots & \langle x_1, \omega^m \rangle \\ \langle x_2, \omega^1 \rangle & \langle x_2, \omega^2 \rangle & \dots & \langle x_2, \omega^m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, \omega^1 \rangle & \langle x_m, \omega^2 \rangle & \dots & \langle x_m, \omega^m \rangle \end{pmatrix}$$

Le produit extérieur des formes est appelé produit de Grassmann de ces formes.

Le fait que  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^m$  soit une  $p$ -forme extérieure résulte des propriétés du déterminant.

**Proposition 1.20** *Pour que  $p$  covecteurs  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p$  de  $E$  soient linéairement dépendantes dans  $E^*$ , il est nécessaire et suffisant que le produit de Grassmann  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p$  soit nul.*

*Démonstration.* Supposons que les formes linéaires  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p$  soient linéairement indépendantes et considérons les vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  vérifiant  $\omega^i(X_j) = \delta_{ij}$ . La matrice  $(\omega^i(X_j))$  coïncide avec la matrice identité. Il s'en suit que  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p(X_1, \dots, X_p) = 1$  d'où  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p \neq 0$ . Réciproquement, si  $f_1, \dots, f_p$  sont des formes linéaires sur  $E$  linéairement dépendantes dans  $E^*$ , alors pour tout  $p$ -uplet de vecteurs  $(X_1, \dots, X_p)$ , la matrice  $(f_i(X_j))$  est de rang strictement inférieur à  $p$  et son déterminant est nul. ■

**Proposition 1.21** *Le produit extérieur munit l'espace vectoriel*

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_0^n \bigwedge_p(E)$$

*d'une structure d'algèbre associative, unitaire non commutative.*

La non commutativité du produit extérieur se déduit de la formule suivante

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$

pour tous  $\alpha \in \bigwedge_p E$ ,  $\beta \in \bigwedge_q E$ .

**Proposition 1.22** *Soit  $\{e^1, \dots, e^n\}$  une base de  $E^*$ . Alors les  $p$ -formes*

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$$

*avec  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$  constituent une base de l'espace vectoriel  $\bigwedge_p E$ . Ainsi,*

$$\dim \bigwedge_p E = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ et } \dim \bigwedge E^* = 2^n.$$

*Démonstration.* Toute  $p$ -forme extérieure  $\alpha$  sur  $E$  s'écrit :

$$\alpha = a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p},$$

par conséquent,

$$\alpha = \mathcal{A}\alpha = a_{i_1 \dots i_p} \mathcal{A}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}) = \frac{a_{i_1 \dots i_p}}{p!} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p},$$

ce qui montre que l'ensemble

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$$

est une famille génératrice de  $\bigwedge_p E$ . L'indépendance de ces formes extérieures est laissée au soins du lecteur.

### 1.3.2 L'algèbre graduée $\bigwedge E^*$

Nous venons de voir que l'espace vectoriel gradué  $\bigwedge E^* = \bigoplus_0^n \bigwedge_p E$  est muni d'une structure d'algèbre associative non commutative de dimension  $2^n$ . Chaque élément  $\alpha$  de  $\bigwedge E^*$  s'écrit sous la forme

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_p \in \bigwedge_p E$$

avec  $\bigwedge_0 E = \mathbb{R}$ . La  $p$ -forme extérieure  $\alpha_p$  est appelée *composante homogène de degré  $p$  de  $\alpha$* .

### 1.3.3 Le produit intérieur

**Définition 1.6** Soit  $\alpha \in \bigwedge_p E$  une  $p$ -forme extérieure sur  $E$ ,  $p \geq 1$  et soit  $X$  un vecteur de  $E$ . Le produit intérieur de  $X$  par  $\alpha$  est la  $(p-1)$ -forme extérieure, notée  $i(X)\alpha$  (ou  $X \lrcorner \alpha$ ), définie par

$$i(X)\alpha(X_1, \dots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

L'application  $i(X) : \alpha \mapsto i(X)\alpha$  est une application linéaire de  $\bigwedge_p E$  dans  $\bigwedge_{p-1} E$ . On peut étendre cette application en un endomorphisme de  $\bigwedge E^*$  en posant  $i(X)\alpha = 0$  si  $\alpha = a \in \mathbb{R}$ , et  $i(X)\alpha = \sum_{i=1}^n i(X)\alpha_i$ , où  $\alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$  est la décomposition en composantes homogènes de  $\alpha$ .

**Proposition 1.23** Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs de  $E$ . On a alors :

1.  $i(X+Y) = i(X) + i(Y)$ ,
2.  $i(aX) = ai(X)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
3.  $i(X)i(Y) + i(Y)i(X) = 0$ ,
4.  $i(X)i(X) = 0$ .

Ces identités se démontrent sans difficulté.

**Proposition 1.24** Soient  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) une  $p$ -forme (respectivement une  $q$ -forme) extérieure sur  $E$ . Pour tout vecteur  $X \in E$ , on a :

$$i(X)(\alpha \wedge \beta) = (i(X)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(X)\beta).$$

*Démonstration.* Considérons  $p+q$  vecteurs indépendants  $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$  et supposons que  $X = e_1$ . On a

$$i(X)(\alpha \wedge \beta)(e_2, \dots, e_{p+q}) = (\alpha \wedge \beta)(e_1, \dots, e_{p+q})$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(s) \alpha(e_{s(1)}, \dots, e_{s(p)}) \beta(e_{s(p+1)}, \dots, e_{s(p+q)}).$$

L'ensemble des permutations  $\mathfrak{S}_{p+q}$  est réunion disjointe du sous ensemble  $S_1$  constitué des permutations dont la préimage de 1 est inférieure ou égale à  $p$  et du sous ensemble  $S_2$  des permutations dont la préimage de 1 est strictement supérieure à  $p$ . On a :

$$\frac{1}{p!q!} \sum_{s \in S_1} \epsilon(s) \alpha(e_{s(1)}, \dots, e_{s(p)}) \beta(e_{s(p+1)}, \dots, e_{s(p+q)}) = (i(X)\alpha) \wedge \beta$$

et

$$\frac{1}{p!q!} \sum_{s \in S_2} \epsilon(s) \alpha(e_{s(1)}, \dots, e_{s(p)}) \beta(e_{s(p+1)}, \dots, e_{s(p+q)}) = (-1)^p \alpha \wedge (i(X)\beta).$$

D'où le résultat. ■

### 1.3.4 Dérivations. Antidérivations

**Définition 1.7** Un endomorphisme linéaire  $h$  de  $\bigwedge E^*$  est une dérivation de  $\bigwedge E^*$  s'il vérifie :

1. pour toute  $p$ -forme extérieure  $\alpha$  sur  $E$ ,  $h(\alpha)$  est une forme dont le degré est de même parité que  $\alpha$ ,
2.  $h(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge h(\beta)$ , pour tous  $\alpha, \beta \in \bigwedge E^*$ .

**Définition 1.8** Un endomorphisme linéaire  $h$  de  $\bigwedge E^*$  est une antidérivation de degré  $q \in \mathbb{Z}$  de  $\bigwedge E^*$  s'il vérifie :

1.  $h(\bigwedge_p E) \subseteq \bigwedge_{p+q} E$
2.  $(-1)^{\deg(\alpha)} = (-1)^{\deg(h(\alpha))+1}$  pour tout  $\alpha$  de degré  $\deg(\alpha)$  donné,
3.  $h(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge h(\beta)$  pour tous  $\alpha \in \bigwedge_p E$ ,  $\beta \in \bigwedge E^*$ .

La deuxième condition implique que le degré d'une antidérivation est nécessairement impair.

**Exemple 1.2** Le produit intérieur par un vecteur  $X \in E$  est une antidérivation de degré  $-1$ .

### 1.3.5 Sur la structure de l'algèbre associative $\bigwedge E^*$

Muni du produit extérieur, l'espace vectoriel  $\bigwedge E^*$  est une algèbre associative, unitaire, non commutative de dimension  $2^n$ , où  $n$  est la dimension de  $E$ . Ces algèbres jouent un rôle important dans l'étude de la variété de toutes les algèbres associatives que l'on peut construire sur l'espace  $E$ . Nous n'allons pas développer cet aspect dans ce cours. Nous pouvons toutefois décrire en petite dimension la structure de cette algèbre associative.

1.  $n = 1$ . L'algèbre  $\bigwedge E^*$  est de dimension 2. Une base est donnée par  $\{1, e_1\}$  avec  $1 \in \bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$  et  $e_1 \in E^* = \bigwedge^1 E$  :

$$1 \wedge 1 = 1, \quad 1 \wedge e_1 = e_1 \wedge 1 = e_1, \quad e_1 \wedge e_1 = 0.$$

2.  $n = 2$ . Si  $\{e_1, e_2\}$  est une base de  $E^*$ , une base de  $\bigwedge E^*$  est donnée par  $\{1, e_1, e_2, e_3 = e_1 \wedge e_2\}$  et le produit est donné par :

$$1 \wedge e_i = e_i \wedge 1 = e_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1 = e_3,$$

les autres produits étant nuls.

Notons que toutes ces algèbres associatives sont des algèbres de Clifford attachées à une forme quadratique nulle. Bien que la structure de ces algèbres n'a que peu d'intérêt ici, les idéaux gradués vont jouer un rôle important dans la détermination des invariants des formes extérieures.

### 1.3.6 Les idéaux gradués de $\bigwedge E^*$

Un idéal  $I$  de  $\bigwedge E^*$  est une sous algèbre vérifiant

$$\alpha \wedge \omega \in I,$$

pour tous  $\alpha \in I$  et  $\omega \in \bigwedge E^*$ . Cet idéal  $I$  est dit *gradué* s'il admet la décomposition vectorielle suivante :

$$I = I_0 \oplus I_1 \oplus \cdots \oplus I_n,$$

avec  $I_k = I \cap \bigwedge_k E$ .

**Exemple 1.3** *Considérons la sous algèbre*

$$\bigwedge_i E \oplus \bigwedge_{i+1} E \oplus \cdots \oplus \bigwedge_n E.$$

*C'est un idéal gradué de  $\bigwedge E^*$ . Cet idéal est non commutatif (c'est-à-dire  $I \wedge I \neq 0$ ) ce qui montre que l'algèbre  $\bigwedge E^*$  n'est pas une algèbre simple.*

Soit  $I$  un idéal gradué de  $\bigwedge E^*$ . Tout élément  $\alpha \in I$  admet une décomposition

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_p \in \bigwedge_p E$$

en composantes homogènes. Comme  $I$  est gradué, cette décomposition est aussi la décomposition associée à la graduation de  $I$ .

**Lemme 1.1** *Si  $I_0 \neq \{0\}$ , alors  $I = \bigwedge E^*$ .*

*Démonstration.* En effet  $\bigwedge^0 E \cap I = I_0$ . Comme  $I$  est un idéal,  $I_0 \neq \{0\}$  implique  $I_0 = \mathbb{R}$ . Il s'en suit que toute 1-forme linéaire sur  $E$  est dans  $I$ . Comme toutes ces formes engendrent  $\bigwedge E^*$ , on a donc  $\bigwedge E^* = I$ . ■

### 1.3.7 Système linéaire associé à une $p$ -forme extérieure

Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme extérieure sur  $E$ . A partir d'une base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $E$ , on peut définir des formes linéaires  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$  par :

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}(X) = \alpha(X, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p-1}})$$

pour tout  $X \in E$ .

**Définition 1.9** *On appelle système linéaire associé à la  $p$ -forme  $\alpha$  et à la base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  le système linéaire*

$$\{\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}} = 0$$

avec  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{p-1} \leq n$ .

Ce système dépend évidemment de la base choisie  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Il permet toutefois de construire un objet intrinsèque associé à la forme  $\alpha$ .

### 1.3.8 Espace associé et rang d'une $p$ -forme extérieure

Soit  $A^*(\alpha)$  le sous espace de  $\bigwedge_1 E = E^*$  engendré par les formes linéaires  $\{\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}\}$ .

**Proposition 1.25** *L'espace  $A^*(\alpha)$  ne dépend pas du choix de la base choisie. Il est appelé le sous espace associé à  $\alpha$  et sa dimension  $r(\alpha)$  est le rang de  $\alpha$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  une autre base de  $E$  et notons  $(\alpha'_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}})$  le système associé correspondant. Si  $e'_i = a_i^j e_j$ , alors

$$\begin{aligned} \alpha'_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}(X) &= \alpha(X, e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_{p-1}}) \\ &= \sum a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_{p-1}}^{j_{p-1}} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{p-1}}(X), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'espace engendré par les formes linéaires  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$  coïncide avec l'espace engendré par les formes  $\alpha'_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$ . ■

**Remarque 1.2** 1. *La construction de l'espace  $A^*(\alpha)$  montre que cet espace est le plus petit sous espace de  $E^*$  tel que la  $p$ -forme  $\alpha$  se décompose en un produit d'éléments de ce sous espace. En d'autres termes,  $A^*(\alpha)$  contient le minimum de formes linéaires nécessaires pour écrire  $\alpha$ . Ainsi, si  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$  est une base de  $A^*(\alpha)$ , alors*

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} a_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}.$$

2. On a toujours

$$\deg(\alpha) \leq r(\alpha),$$

$\deg(\alpha)$  étant le degré de  $\alpha$ . Une classe importante de formes extérieures est composée des formes dont le degré est égal au rang.

### 1.3.9 L'espace $A(\alpha)$

Soit  $A(\alpha)$  le sous espace de  $E$  défini par :

$$A(\alpha) = \{X \in E \mid i(X)\alpha = 0\}.$$

**Théorème 1.2** *On a :*

$$A(\alpha) = (A^*(\alpha))^\perp = \{X \in E \mid \omega(X) = 0 \quad \forall \omega \in A^*(\alpha)\}.$$



*Démonstration.* Soit  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ ,  $r = r(\alpha)$ , une base de  $A^*(\alpha)$ . La forme  $\alpha$  s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} a_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}.$$

Soit  $X \in (A^*(\alpha))^\perp$ . Alors  $\omega^i(X) = 0$  pour tout  $i$ . Ainsi  $i(X)\alpha = 0$  et  $X \in A(\alpha)$ . D'où  $(A^*(\alpha))^\perp \subset A(\alpha)$ .

Inversement, soit  $X \in A(\alpha)$ . Considérons une base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $E$ . Les formes linéaires  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = i(e_{i_1})i(e_{i_2}) \dots i(e_{i_p})\alpha$  engendrent  $A^*(\alpha)$ . Comme  $X \in E$ ,  $i(X)\alpha = 0$  et  $i(X)\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ . Ainsi  $\omega(X) = 0$  pour tout  $\omega \in A^*(\alpha)$ , ce qui démontre le théorème. ■

**Remarque 1.3** *L'étude des espaces  $A^*(\alpha)$  est intéressante pour aborder la classification des  $p$ -formes extérieures. En effet, la dimension de ces espaces est un invariant à isomorphisme près de la forme  $\alpha$ . Dans le cas des 2-formes extérieures, cet invariant détermine entièrement la classe d'isomorphie d'une 2-forme donnée. Mais ceci n'est plus le cas pour une  $p$ -forme quelconque et la classification nécessitera l'étude de nouveaux invariants.*

### 1.3.10 Formes monômes

Une  $p$ -forme extérieure non nulle  $\alpha$  sur  $E$  est dite *forme monôme* s'il existe  $p$  formes linéaires  $\omega^1, \dots, \omega^p$  linéairement indépendantes telles que :

$$\alpha = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p$$

Il est clair que si  $\alpha$  est une  $p$ -forme monôme alors

$$rg(\alpha) = p = \deg(\alpha)$$

Inversement on a la caractérisation d'une forme monôme :

**Théorème 1.3** *Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme extérieure sur  $E$ . Alors  $\alpha$  est une forme monôme si et seulement si  $rg(\alpha) = p = \deg(\alpha)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme vérifiant  $rg(\alpha) = p$ . Considérons une base  $\{f_1, \dots, f_p\}$  de l'espace  $A^*(\alpha)$  associé à  $\alpha$ . D'après la définition de cet espace, on a  $\alpha = a\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p$  et  $\alpha$  est une forme monôme. ■

## 1.4 Exercices

**Exercice 1.2** *En utilisant la propriété fondamentale du produit tensoriel, montrer que si  $E, F$  et  $G$  sont des espaces vectoriels sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , alors il y a un isomorphisme unique*

$$(E \oplus F) \otimes G = (E \otimes G) \oplus (F \otimes G)$$

qui transforme  $(x \oplus y) \otimes z$  en  $(x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ .

**Exercice 1.3** *Soient  $E, F, E'$  et  $F'$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ ;  $u$  et  $v$  des applications linéaires*

$$u : E \longrightarrow E' \text{ et } v : F \longrightarrow F'.$$

1. *Montrer qu'il existe une application linéaire unique*

$$u \otimes v : E \otimes F \longrightarrow E' \otimes F'$$

telle que

$$(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$$

quels que soient  $x \in E$  et  $y \in F$ .

2. *On suppose que ces espaces vectoriels sont de dimension finies  $p, q, p'$  et  $q'$  respectivement. Soient  $(e_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$  et  $(e'_{i'j'})_{1 \leq i' \leq p', 1 \leq j' \leq q'}$  deux bases de  $E \otimes F$  et  $E' \otimes F'$  respectivement. Calculer la matrice de  $u \otimes v$  par rapport à ces bases.*
3. *Définir à partir de la question précédente, le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux matrices  $A$  et  $B$ , et calculer ce produit dans le cas où  $A \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{K})$ .*
4. *Soient  $E, F, E', F'$  et  $E'', F''$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ ;  $u, u'$  et  $v, v'$  des applications linéaires*

$$u : E \longrightarrow E', \quad u' : E' \longrightarrow E''.$$

et

$$v : F \longrightarrow F', \quad v' : F' \longrightarrow F''.$$

Montrer que

$$(u' \circ u) \otimes (v' \circ v) = (u' \otimes v') \circ (u \otimes v)$$

5. En déduire qu'en dimension finie, on a la formule

$$(A'A) \otimes (B'B) = (A' \otimes B') (A \otimes B)$$

pour tous  $A, A', B, B'$  sont des matrices dont les produits  $(A'A)$  et  $(B'B)$  ont un sens.

**Exercice 1.4** On considère ici le module  $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur l'anneau  $\mathbb{Z}$ . Montrer que l'ensemble  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(E^*, F^*; \mathbb{Z})$  des applications bilinéaires de  $E^* \times F^*$  dans  $\mathbb{Z}$ , est réduit à 0, mais qu'il n'en est pas ainsi de  $E \otimes E$ . (On considérera l'application  $(x, y) \mapsto xy$ , multiplication des entiers modulo  $p$ , En conclure que l'homomorphisme  $\tilde{j}$ , de la proposition ci-dessus relatives au cas des espaces vectoriels de dimension finie, n'est pas bijectif (il est même nul).

**Exercice 1.5** Place l'exercice qui met en évidence les rapports entre produit tensoriel lorsqu'on change de corps de base.



## Chapitre 2

# Espaces vectoriels symplectiques

### 2.1 Étude des 2–formes extérieures

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$  et  $\theta$  une 2–forme extérieure sur l’espace vectoriel  $E$  ( $\theta \in \bigwedge_2(E)$ ).

Rappelons que l’espace associé à  $\theta$  est le sous espace vectoriel

$$A(\theta) = \{x \in E \mid i(x)\theta = 0\},$$

où  $i(x)\theta$  est le produit intérieur du vecteur  $x$  par la 2–forme extérieure  $\theta$ . Rappelons aussi que le rang de la 2–forme  $\theta$  est la codimension de l’espace  $A(\theta)$ .

Par rapport à une base donnée  $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ . La matrice

$$A = (\theta(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

est appelée matrice de la 2–forme extérieure  $\theta$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}$ , et on écrit

$$A = M[\theta, \mathfrak{B}].$$

On a donc,

$$\theta(x, y) = {}^t X A Y$$

où  $X$  et  $Y$  sont les matrices colonnes associées au vecteurs  $x$  et  $y$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}$

On appelle discriminant de  $\theta$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}$ , le déterminant

$$dis_{\mathfrak{B}}(\theta) = \det A.$$

Par rapport à une autre base  $\mathfrak{B}'$  de  $E$ , on a

$$\theta(x, y) = {}^t X' A' Y'$$

où  $X'$  et  $Y'$  sont les matrices colonnes associées au vecteurs  $x$  et  $y$  par rapport à  $\mathfrak{B}'$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathfrak{B}$  à la base  $\mathfrak{B}'$ . Les relations  $X = PX'$  et  $Y = PY'$  donnent

$$A' = {}^t P A P,$$

ce qui montre que les discriminants  $dis_{\mathfrak{B}}(\theta)$  et  $dis_{\mathfrak{B}'}(\theta)$  sont liés par la relation :

$$dis_{\mathfrak{B}'}(\theta) = (\det P)^2 dis_{\mathfrak{B}}(\theta).$$

Rappelons aussi que le produit intérieur donne naissance à une application linéaire  $\theta^b : E \rightarrow E^*$  définie par :

$$\theta^b(x) = i(x)\theta,$$

si cette application linéaire est injective (et donc, un isomorphisme d'espaces vectoriels), on dira que la 2-forme extérieure  $\theta$  est non dégénérée. Et dans ce cas on a :

$$rg\theta = \dim E.$$

## 2.2 Orthogonalité symplectique

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux par rapport à la 2-forme extérieure  $\theta$  (ou tout simplement orthogonaux s'il n'y a pas de confusion à craindre), et on écrit  $x \perp y$ , si

$$\theta(x, y) = 0.$$

Deux sous-espaces vectoriels  $L$  et  $M$  de  $E$  sont dits orthogonaux par rapport à  $\theta$  (ou tout simplement orthogonaux), et on écrit  $L \perp M$ , si  $x \perp y$  pour tout  $(x, y) \in L \times M$ .

L'orthogonal symplectique d'une partie non vide  $A$  de  $E$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \theta(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

Deux sous-espaces vectoriels  $L$  et  $M$  de  $E$  sont dits supplémentaires orthogonaux si  $E = L \oplus M$  et  $L = M^\perp$ .

On déduit que pour toutes parties non vides  $A$  et  $B$  de  $E$ , on a les propriétés suivantes :

1.  $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$ ,
2.  $A \subseteq A^{\perp\perp}$

Et pour deux sous espaces vectoriels quelconques  $H, K$  de  $E$ , on a :

1.  $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp$ ,
2.  $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$ .

**Proposition 2.1** *Supposons que la 2-forme extérieure  $\theta$  est non dégénérée. Alors*

1.  $E^\perp = \{0\}$ .
2. pour tout sous espace vectoriel  $H$  de  $E$  on a :

- (a)  $H = H^{\perp\perp}$ ,
- (b)  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H$ .

Démonstration. La première propriété résulte de la relation  $E^\perp = \ker \theta^b$ .

En ce qui concerne la première partie de la seconde, on sait que  $H \subseteq H^{\perp\perp}$  d'une part, et d'autre part, pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que pour qu'un élément  $h_0 \in H^{\perp\perp}$  soit dans  $H$ , il faut et il suffit que  $\omega(h_0) = 0$  pour tout  $\omega$  appartenant à l'annulateur  $\text{Ann}(H)$  de  $H$ . Soit donc  $\omega \in \text{Ann}(H)$ . La dualité  $x \mapsto i(x)\theta$  de  $E$  sur  $E^*$ , montre qu'il existe  $x \in E$  tel que

$$\omega = i(x)\theta,$$

or la relation  $\omega \in \text{Ann}(H)$  entraîne que  $\omega(y) = i(x)\theta(y) = \theta(x, y) = 0$ , quel que soit  $y \in H$ , par suite  $x \in H^\perp$ , et, donc,

$$\omega(h_0) = \theta(x, h_0) = 0.$$

On a donc montré que  $\omega(h_0) = 0$  pour tout  $\omega \in \text{Ann}(H)$ , par suite  $h_0 \in H$ , ce qui montre  $H = H^{\perp\perp}$

Pour montrer la propriété 2.(b), nous rappelons la relation suivante :

$$\dim(\text{Ann}H) = \dim E - \dim H,$$

donc il suffit de montrer que

$$\dim(\text{Ann}H) = \dim H^\perp,$$

or l'isomorphisme  $\theta^b : x \mapsto i(x)\theta$  de  $E$  sur  $E^*$ , transforme  $H^\perp$  sur  $\text{Ann}(H)$  :

$$\theta^b(H^\perp) = \text{Ann}(H),$$

d'où  $\dim H^\perp = \dim(\text{Ann}H) = \dim E - \dim H$ . ■

### 2.3 Classification des 2-formes extérieures

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps commutatif et  $\theta \in \bigwedge_2 E$ , une forme extérieure sur  $E$  non nulle.

Il existe deux vecteurs  $u_1, v_1 \in E$  tels que  $\theta(u_1, v_1) = \lambda$  ne soit pas nul. Posons  $e_1 = \lambda^{-1}u_1$  et  $e'_1 = v_1$ , on a donc

$$\theta(e_1, e'_1) = 1$$

et la matrice  $S$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}_1 = (e_1, e'_1)$  de la restriction  $\theta_{H_1}$  de  $\theta$  au sous espace vectoriel  $H_1 = Vect(e_1, e'_1)$  est :

$$S = M(\theta_{H_1}, \mathfrak{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par  $H_2 = H_1^\perp$ . On a :

$$E = H_1 \oplus H_2.$$

En effet, tout élément  $x \in H_1 \cap H_2$  s'écrit nécessairement sous la forme :

$$x = \alpha e_1 + \alpha' e'_1$$

avec de plus

$$\theta(x, e_1) = \theta(x, e'_1) = 0,$$

par suite  $\alpha = \alpha' = 0$ , ce qui montre que le vecteur  $x$  est nul, c'est à dire que l'on a  $H_1 \cap H_2 = (0)$ .

Soit maintenant  $x$  un vecteur quelconque de  $E$ . Écrivons

$$y = x + \theta(x, e_1) e'_1 - \theta(x, e'_1) e_1.$$

On vérifie aisément que

$$\theta(y, e_1) = 0 \text{ et } \theta(y, e'_1) = 0,$$

ce qui montre que le vecteur  $y \in H_1^\perp = H_2$ , et, donc  $x \in H_1 + H_2$ , et la somme est directe.

Si la restriction de  $\theta$  au sous espace  $H_2$  est nulle, on arrête le processus qui consiste à :

1. il existe des vecteurs indépendants  $e_1$  et  $e'_1$  tels que  $\theta(e_1, e'_1) = 1$ ,



2. si  $\dim E$  est strictement supérieur à 2, l'espace  $E$  est somme directe

$$E = H_1 \oplus K,$$

avec  $H_1 = Vect(e_1, e'_1)$  et  $\theta$  est nulle sur le sous espace  $K$  qui est ici  $H_2$ .

Si  $\theta$  est non nulle sur  $H_2$ , le même raisonnement permet de voir qu'on peut trouver deux vecteurs  $e_2, e'_2 \in H_2$  tels que  $\theta(e_2, e'_2) = 1$ , et dans ces conditions la matrice par rapport à la base  $(e_2, e'_2)$  de la restriction de  $\theta$  au sous espace vectoriel  $Vect(e_2, e'_2)$  vaut  $S$ . Un raisonnement par récurrence sur la dimension de  $E$ , permet de montrer qu'il existe  $2p$  vecteurs indépendants

$$e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p$$

tels que :

$$\theta(e_1, e'_1) = \dots = \theta(e_p, e'_p) = 1,$$

et l'espace  $E$  s'écrit :

$$E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p \oplus K$$

avec  $H_i = Vect(e_i, e'_i)$ . et  $\theta$  est nulle sur le sous espace  $K$  dans le cas où la dimension de  $E$  est strictement supérieure à  $2p$ .

Complétons le système  $e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p$  en une base

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p, w_{2p+1}, \dots, w_n\}$$

de  $E$ , et la matrice de  $\theta$  par rapport à cette base s'écrit :

$$M(\theta, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} S_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_p & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

avec

$$S_1 = \dots = S_p = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons  $\omega^1, \omega'^1, \dots, \omega^p, \omega'^p, \alpha^{2p+1}, \dots, \alpha^n$  la base duale de  $\mathfrak{B}$ , c'est à dire

$$\begin{cases} \omega^i(e_j) = \delta_j^i, \omega^i(e'_j) = 0 \text{ et } \omega^i(w_j) = 0 \\ \omega'^i(e_j) = 0, \omega'^i(e'_j) = \delta_j^i \text{ et } \omega'^i(w_j) = 0 \\ \alpha^i(e_j) = 0, \alpha^i(e'_j) = 0 \text{ et } \alpha^i(w_j) = \delta_j^i. \end{cases}$$

**Théorème 2.1** *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Il existe  $2p$  formes linéaires indépendantes  $\omega^1, \omega'^1, \dots, \omega^p, \omega'^p$  sur l'espace  $E$  telles que :

$$\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^p \wedge \omega'^p.$$

2. La forme extérieure  $\theta$  est de rang  $2p$  :

$$rg\theta = 2p.$$

**Corollaire 2.1** *Soit  $A \in M(n, \mathbb{K})$  une matrice antisymétrique d'ordre  $2p$ . Alors il existe une matrice  $P$  d'ordre  $n$  inversible telle que  ${}^tPAP$  est la matrice 5.3.*

**Corollaire 2.2** *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. La 2-forme extérieure  $\theta$  est non dégénérée
2.  $rg\theta = \dim E = 2p$  ( $\theta$  est de rang maximum).

**Définition 2.1** *Deux formes extérieures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sur un espace vectoriel  $E$  seront dites équivalentes, et on écrit  $\theta_1 \sim \theta_2$ , s'il existe un automorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $\theta_1 = u^*\theta_2$ .*

Il est clair que  $\sim$  définit une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\bigwedge_2 E$ .

Soient  $\mathfrak{B}_0$  une base quelconque de  $E$ ,  $A$  (resp.  $B$  (resp.  $U$ )) la matrice de  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$  (resp.  $u$ )) dans cette base.

On a donc,

$$\theta_1(x, y) = {}^tXAY \text{ et } \theta_2(x, y) = {}^tXBY$$

pour tous  $x, y \in E$ , comme au début du chapitre, on désigne par  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes des vecteurs  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathfrak{B}_0$ . Et la relation  $\theta_1 = u^*\theta_2$  donne

$$A = {}^tUBU.$$

On a donc montré la :



## 2.4 Espaces vectoriels symplectiques

### 2.4.1 Définitions

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ . Une forme symplectique sur  $E$  est une 2-forme extérieure non dégénérée. Un espace vectoriel symplectique, est un couple  $(E, \theta)$  dans lequel  $E$  est un espace vectoriel de dimension paire  $2n$ , et  $\theta$  est une forme symplectique.

Soit  $(E, \theta)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$ . La base

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_n, e'_n\}$$

de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $\theta$  s'écrit :

$$M(\theta, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & S \end{pmatrix}$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

est appelé base symplectique de  $E$ .

Dans la base duale  $\{\omega^1, \omega'^1, \dots, \omega^n, \omega'^n\}$  de la base symplectique de  $E$ , la 2-forme extérieure  $\theta$  s'écrit :

$$\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^n \wedge \omega'^n$$

**Proposition 2.4** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\theta \in \bigwedge_2 E$  une 2-forme extérieure sur  $E$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{rg}\theta = 2p$ ,
2.  $\theta^p \neq 0$  et  $\theta^{p+1} = 0$

*Démonstration.* Cette proposition résulte de la relation suivante :

$$\theta^p = p! \omega^1 \wedge \omega'^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \wedge \omega'^p = p! \nu$$

pour  $\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^p \wedge \omega'^p$ . ■

### 2.4.2 Exemples

1. Dans le cas où la 2–forme extérieure  $\theta$  est quelconque (non nécessairement non dégénérée). on définit une 2–forme extérieure  $\bar{\theta}$  sur l'espace vectoriel quotient  $\bar{E} = \frac{E}{A(\theta)}$ , par :

$$\bar{\theta}(x + A(\theta), y + A(\theta)) = \theta(x, y)$$

pour tous  $x, y \in E$ .

La 2–forme extérieure  $\bar{\theta}$  est non dégénérée, et par conséquent elle définit une structure symplectique sur l'espace vectoriel  $\bar{E}$ .

2. On définit également une structure symplectique naturelle sur le produit de deux espaces vectoriels symplectiques comme suit :

Soient  $(E_1, \theta_1)$  et  $(E_2, \theta_2)$  deux espaces vectoriels symplectiques,

$$p_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \text{ et } p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$$

les projections canoniques. Considérons la 2–forme extérieure  $\theta \in \Lambda_2(E_1 \times E_2)$  définie par :

$$\theta = p_1^* \theta_1 + p_2^* \theta_2.$$

On vérifie aisément que la 2–forme extérieure  $\theta = p_1^* \theta_1 + p_2^* \theta_2$  définit une structure symplectique sur l'espace vectoriel produit  $E_1 \times E_2$ .

### 2.4.3 Sous espaces d'un espace vectoriel symplectique

Soient  $(E, \theta)$  un espace vectoriel symplectique et  $H$  un sous espace vectoriel de  $E$ .

Désignons par  $\theta_H$  la restriction de  $\theta$  au sous espace  $H$ . Évidemment on a :

$$A(\theta_H) = \{x \in H \mid i(x)\theta_H = 0\} = H \cap H^\perp,$$

par conséquent on a :

$$rg(\theta_H) = \dim H - \dim(H \cap H^\perp),$$

et si la 2–forme  $\theta$  est non dégénérée, alors cette relation montre qu'on a aussi  $A(\theta_{H^\perp}) = H \cap H^\perp$  puisque  $H^{\perp\perp} = H$ , et comme on a  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H$ , on déduit la relation :

$$rg(\theta_H) - rg(\theta_{H^\perp}) = 2 \dim H - \dim E.$$

Donnons ici les définitions suivantes :

1. On dit que  $H$  est un sous espace vectoriel *symplectique* (ou *non isotrope*) si,  $(H, \theta_H)$  est un espace vectoriel symplectique.
2. On dit que  $H$  est *isotrope* si  $H \cap H^\perp \neq (0)$ .
3. On dit que  $H$  est *totalelement isotrope* si  $H \subseteq H^\perp$ .
4. On dit que  $H$  est *coisotrope* si  $H \supseteq H^\perp$ .
5. On dit que  $H$  est lagrangien si  $H$  est un sous espace totalelement isotrope maximal (ici la relation d'ordre considérée est l'inclusion).

On déduit la

**Proposition 2.5** *On a les propriétés suivantes :*

1.  $H$  est un sous espace symplectique si et seulement si,  $H \cap H^\perp = (0)$ , si et seulement si  $\theta_H$  est non dégénérée, si et seulement si,  $E = H \oplus H^\perp$ .
2.  $H$  est un sous espace isotrope si et seulement si,  $\theta_H$  est dégénérée.
3.  $H$  est un sous espace totalelement isotrope si et seulement si,  $\theta_H$  est nulle.

**Définition 2.2** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension paire  $2n$ . On appelle polarisation réelle un couple  $(\theta, L)$  dans lequel  $\theta$  est une forme symplectique et  $L$  est un sous espace lagrangien.*

**Proposition 2.6** *Soit  $L$  un sous espace vectoriel de  $E$ . les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $L$  est lagrangien,
2.  $L = L^\perp$

*Démonstration.* Si  $L$  est contenu strictement dans  $L^\perp$ , alors il existe un élément  $a$  de  $E - L$  tel que  $\theta(a, y) = 0$  pour tout  $y \in L$ . Soit  $L' = L \oplus \mathbb{K}a$ . On a évidemment  $L \subset L'$ . Soit  $z = x + \lambda a \in L'$ , avec  $x \in L$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\theta(z, z') = \theta(x + \lambda a, x' + \lambda' a) = \theta(x, x') + \lambda\theta(x, a) + \lambda'\theta(a, x') = 0$$

pour tous  $z' = x' + \lambda' a$  appartenant à  $L'$  ( $x' \in L$  et  $\lambda' \in \mathbb{K}$ ), et, donc,  $z \in L'^\perp$ . D'où  $L' \subset L'^\perp$ , ceci contredit le fait que  $L$  est un sous-espace totalelement isotrope maximal, ce qui montre  $1 \implies 2$ . L'implication  $2 \implies 1$  est immédiate. ■

Il résulte aussitôt de l'égalité  $\dim L^\perp = \dim E - \dim L$ , le

**Corollaire 2.4** *Pour qu'un sous espace totalement isotrope  $L$  de  $E$  soit lagrangien, il est nécessaire et suffisant que  $\dim L = n = \frac{1}{2} \dim E$ .*

On sait que l'isomorphisme  $\theta^b : x \mapsto i(x)\theta$ , de  $E$  sur  $E^*$ , transforme  $L^\perp$  sur  $\text{Ann}(L)$ , et si  $L$  est lagrangien, alors  $\theta^b(L) = \theta^b(L^\perp) = \text{Ann}(L)$ , et on particulier  $\dim(\text{Ann}(L)) = n = \frac{1}{2} \dim E$

**Proposition 2.7** *Soit  $(\theta, L)$  une polarisation réelle sur  $E$ . Alors toute base  $\omega^1, \dots, \omega^n$  de l'annulateur  $\text{Ann}(L)$  de  $L$ , peut être complétée en une base  $\omega^1, \dots, \omega^n, \omega'^1, \dots, \omega'^n$  de  $E^*$  telle que :*

$$\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^n \wedge \omega'^n.$$

*Démonstration.* Soient  $\omega^1, \dots, \omega^n$  une base de l'annulateur  $\text{Ann}(L)$ , que l'on complète en une base  $\omega^1, \dots, \omega^n, \eta^1, \dots, \eta^n$  de  $E^*$ ,  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  la base de  $E$  dont la base duale est  $\omega^1, \dots, \omega^n, \eta^1, \dots, \eta^n$ .

Il est clair que le sous espace  $L$  est défini par les équations  $\omega^1 = 0, \dots, \omega^n = 0$ , et dans ces notations on a  $L = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ .

La 2-forme  $\theta$  s'écrit :

$$\theta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} \omega^i \wedge \eta^j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \eta^i \wedge \eta^j,$$

Comme  $L$  est lagrangien, on déduit que  $\theta(v_i, v_j) = 0$ , et, donc,  $c_{ij} = 0$  quels que soient  $i, j = 1, \dots, n$ . par conséquent la 2-forme  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \left( \sum_{j>i}^n a_{ij} \omega^j + \sum_{i=1}^n b_{ij} \eta^j \right).$$

Posons  $\omega'^i = \left( \sum_{j>i}^n a_{ij} \omega^j + \sum_{i=1}^n b_{ij} \eta^j \right)$ .

La famille  $(\omega^1, \dots, \omega^n, \omega'^1, \dots, \omega'^n)$  est une base de  $E^*$  dans laquelle la 2-forme  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \omega'^i,$$

Et la proposition est démontrée. ■

#### 2.4.4 Endomorphisme adjoint

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $2n$  muni d'une structure symplectique  $\theta$ . Rappelons que l'application  $\theta^b : x \mapsto i(x)\theta$  définit un isomorphisme de  $E$  sur son espace dual  $E^*$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Pour chaque  $t \in E$ , il existe un unique  $t' \in E$  tel que  $({}^t u \circ \theta^b)(t) = \theta^b(t')$ , la correspondance  $t \mapsto t'$  permet de définir une application de  $E$  dans lui même, notée  $u^T$ , telle que pour tous  $t$  et  $x$  appartenant à  $E$ , on ait :

$$\theta(t, u(x)) = \theta(u^T(t), x).$$

On déduit que pour tous  $u, v \in \text{End}(E)$  on a les propriétés suivantes :

1.  $\theta(t, u(x)) = \theta(u^T(t), x)$  pour tous  $t, x \in E$ ,
2. l'application  $u^T$  est linéaire,
3.  $(u + v)^T = u^T + v^T$ ,  $(\lambda u)^T = \lambda u^T$ ,
4.  $(u \circ v)^T = v^T \circ u^T$ ,  $u^{TT} = u$ ,  $(id_E)^T = id_E$ ,
5. si  $u \in GL(E)$  alors  $u^T \in GL(E)$  et l'on a  $(u^T)^{-1} = (u^{-1})^T$ .

L'endomorphisme  $u^T$  est appelé endomorphisme adjoint de  $u$ .

## 2.5 Les groupes $S_p(E, \theta)$ et $Sp(1, n : E)$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $2n$  sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , muni d'une structure symplectique  $\theta$ .

On sait qu'il existe une base  $e_1, e'_1, \dots, e_n, e'_n$  de  $E$  telle que, par rapport à sa base duale  $e^1, e'^1, \dots, e^n, e'^n$ , la 2-forme extérieure  $\theta$  s'écrit :

$$\theta = e^1 \wedge e'^1 + \dots + e^n \wedge e'^n,$$

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit *symplectique* s'il conserve la structure symplectique  $\theta$ , c'est à dire que l'on a :

$$u^* \theta = \theta,$$

et, donc,

$$u^* \theta^n = (u^* \theta)^n = \theta^n.$$

On déduit alors la relation suivante :

$$u^* e^1 \wedge u^* e'^1 \wedge \dots \wedge u^* e^n \wedge u^* e'^n = e^1 \wedge e'^1 \wedge \dots \wedge e^n \wedge e'^n,$$

par conséquent on a  $\det u = 1$ , ce qui montre que  $u$  est inversible, on a donc montré la :

**Proposition 2.8** *Si un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel symplectique  $(E, \theta)$  conserve la forme symplectique  $\theta$ , alors  $u$  est inversible, de plus son endomorphisme adjoint est donné par :*

$$u^T = u^{-1}.$$



*Démonstration.* Le premier point est démontré, quant au second, on a :

$$\theta(x, y) = \theta(u(x), u(y)) = \theta(u^T(u(x)), y),$$

pour tous  $x, y \in E$ , donc  $u^T \circ u = id_E$ , par suite  $u^T = u^{-1}$ . ■

On dit qu'un automorphisme  $u$  de  $E$  est symplectique, s'il laisse invariante la 2-forme extérieure  $\theta$ , autrement dit, pour tous  $x, y \in E$ , on ait

$$\theta(u(x), u(y)) = \theta(x, y).$$

Les automorphismes de  $E$  qui conservent la forme symplectique  $\theta$  forment un sous groupe du groupe linéaire  $GL(E)$ , appelé groupe symplectique de  $(E, \theta)$  et est noté  $Sp(E, \theta)$ .

Pour simplifier les calculs, on ordonne la base symplectique comme suit :

$$\mathfrak{B}_s = (e_1, e_2, \dots, e_n, e'_1, e'_2, \dots, e'_n),$$

et dans ces notations on a :

$$M(\theta, \mathfrak{B}_s) = J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, si  $U$  désigne la matrice d'un automorphisme symplectique  $u$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}_s$ , alors on a :

$${}^t U J U = J.$$

Notons par  $Sp(n, \mathbb{K})$  le groupe des matrices des automorphismes symplectiques de  $E$  par rapport à la base  $\mathfrak{B}_s$ . Ainsi, une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

avec  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices  $n \times n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ , est dans le groupe  $Sp(n, \mathbb{K})$ , si et seulement si,

1.  ${}^t AD - {}^t BC = I_n$ ,
2.  ${}^t AB$  et  ${}^t CD$  sont des matrices symétriques.

Soit maintenant  $(\theta, L)$  une polarisation réelle sur  $E$ , c'est à dire,  $\theta$  une forme symplectique et  $L$  est un sous espace lagrangien. On sait qu'il existe une base  $\mathfrak{B}_s = (e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n)$  de  $E$  telle que si on dénote par  $e^1, \dots, e^n, e'^1, \dots, e'^n$ , sa base duale, on a :

- (a) le sous espace  $L$  est engendré par les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ .
- (b)  $\theta = e^1 \wedge e'^1 + \dots + e^n \wedge e'^n$ .

On dit qu'un automorphisme  $u$  de  $E$  conserve la polarisation  $(\theta, L)$  si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $u^*\theta = \theta$ ,
2.  $u(L) = L$ .

Les automorphismes de  $E$  qui conservent la polarisation  $(\theta, L)$  forment un sous groupe de  $Sp(E, \theta)$ , noté  $Sp(1, n; E)$  et appelé groupe 1-symplectique.

Désignons par  $Sp(1, n; \mathbb{K})$  le groupe des matrices des automorphismes symplectiques de  $E$  exprimées par rapport à la base  $\mathfrak{B}_s$ .

Les calculs qui précèdent, montrent que les éléments du groupe  $Sp(1, n; \mathbb{K})$  sont les matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

avec  $A, C$  et  $D$  sont des matrices  $n \times n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ , est dans le groupe  $Sp(n, \mathbb{K})$ , si et seulement si,

1.  ${}^tCD$  est symétrique,
2.  ${}^tAD = I_n$ ,

Ainsi, le groupe  $Sp(1, n; \mathbb{K})$  est formé des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

avec  ${}^tC {}^t(A^{-1})$  est symétrique.

**Proposition 2.9** *Dans les hypothèses et notations ci dessus, les automorphismes symplectiques (resp. 1-symplectiques) transforment les sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens) en sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens).*

*Démonstration.* Soient  $\sigma \in Sp(E, \theta)$  et  $L$  un sous-espace vectoriel de  $E$  totalement isotrope. Pour tous  $x, y \in E$  on a

$$\theta(\sigma(x), \sigma(y)) = \theta(x, y) = 0,$$

donc le sous-espace  $\sigma(L)$  est totalement isotrope.

Supposons que  $L$  soit lagrangien, comme  $\sigma(L)$  est de dimension  $n = \frac{1}{2} \dim E$ , on déduit qu'il est lagrangien. ■

**Proposition 2.10** *Soit  $L$  un sous-espace lagrangien,  $M_0$  un sous-espace totalement isotrope de  $E$  supplémentaire à  $L$ . Alors il existe un sous-espace lagrangien  $M$  de  $E$ , supplémentaire à  $L$  et contenant  $M_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $M$  un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de  $E$  transverses à  $L$  contenant  $M_0$ . Alors  $M$  est un sous-espace lagrangien. ■



## Chapitre 3

# Variétés différentiables

On peut voir une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  comme une réunion  $\bigcup U$  (finie ou dénombrable) d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  dont chaque ouvert est muni d'un système de coordonnées locales  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et telle que si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $M$  d'intersection non vide, munis respectivement des systèmes de coordonnées locales  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$  alors chacun de ces systèmes se laisse exprimer différentiablement en fonction de l'autre et dont le jacobien

$$\det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est non nul.

Un vecteur tangent à une variété  $M$  de dimension  $n$ , en un de ses points  $x$ , par rapport à un système de coordonnées locales  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ , est une famille de nombres réels  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que si, par rapport à un autre système de coordonnées locales  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ , ce vecteur soit représenté par une autre famille de nombres réels  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors les familles  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  représentant ce même vecteur, sont liées par la relation :

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} v_j.$$

Comme exemple inhabituel de système de coordonnées locales et de variété différentiable, considérons dans le plan  $(x, y)$ , l'ensemble  $DA(2)$  des droites affines de ce plan.

Une droite affine non verticale s'écrit  $y = ax + b$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , cette droite est complètement déterminée par la connaissance du couple  $(a, b)$ .

On dénote par  $U_{nv}$  l'ensemble des droites non verticales.

De même une droite affine non horizontale s'écrit  $x = \tilde{a}y + \tilde{b}$ , avec  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ , cette droite est complètement déterminée par la connaissance du couple  $(\tilde{a}, \tilde{b})$ .

On dénote par  $U_{nh}$  l'ensemble des droites non horizontales. On a évidemment :

$$DA(2) = U_{nv} \cup U_{nh}.$$

Une droite qui est à la fois non verticale et non horizontale, c'est à dire, un élément de  $U_{nv} \cap U_{nh}$ , s'écrit à la fois  $y = ax + b$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $x = \tilde{a}y + \tilde{b}$ , avec  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

Les systèmes de coordonnées locales  $(a, b)$  et  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  d'une même droite sont liées par la relation

$$\tilde{a} = \frac{1}{a} \text{ et } \tilde{b} = -\frac{b}{a}.$$

Ici,  $DA(2)$  est une variété différentiable de dimension 2.

### 3.1 Variétés différentiables

Une variété topologique de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $M$  dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle système de coordonnées locales (ou carte locale) de  $M$  tout homéomorphisme  $\varphi$  d'un ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ouvert  $U$  est appelé domaine de la carte  $\varphi$ .

Pour mettre en évidence le domaine  $U$  d'une carte  $\varphi$ , on dit à son propos carte  $(U, \varphi)$ , ou carte  $\varphi : U \rightarrow V$  si de plus, on veut mettre l'accent sur le fait que  $\varphi$  est un homéomorphisme de l'ouvert  $U$  de  $M$  sur l'ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Désignons par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et par  $pr^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  les projections

$$\sum_{j=1}^n h^j e_j \mapsto h^i.$$

Soit  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , avec  $x^i = pr^i \circ \varphi$ , un système de coordonnées locales de  $M$  défini sur un ouvert  $U$  de  $M$ . Pour toute fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de  $M$  à valeurs réelles, la restriction  $f|_U$  de  $f$  à  $U$  s'exprime en fonction de  $x^1, \dots, x^n$  :

$$f|_U = F(x^1|_U, \dots, x^n|_U) \tag{3.1}$$

où  $F = f \circ \varphi^{-1}$ .

L'écriture 3.1 est appelée *expression locale* de la fonction  $f$  dans la carte  $\varphi$ .

Et si  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  est un autre système de coordonnées locales défini sur un ouvert  $V$  de  $M$ , alors les fonctions coordonnées  $x^i|_{U \cap V}$  s'expriment en fonction des coordonnées  $(y^1|_{U \cap V}, \dots, y^n|_{U \cap V})$  et inversement :

$$x^i|_{U \cap V} = F^i(y^1|_{U \cap V}, \dots, y^n|_{U \cap V})$$

et

$$y^i|_{U \cap V} = G^i(x^1|_{U \cap V}, \dots, x^n|_{U \cap V})$$

ici  $\varphi \circ \psi^{-1} = (F^1, \dots, F^n)$  et  $\psi \circ \varphi^{-1} = (G^1, \dots, G^n)$ . Les homéomorphismes

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

et

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

sont appelés changements de coordonnées (ou changements de cartes).

Un atlas de  $M$  est une famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  dont les domaines  $U_i$  recouvrent  $M$  :

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

La réunion de deux atlas de  $M$  est encore un atlas de  $M$ .

Un atlas  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est dit de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ), si tous les changements de coordonnées  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont de classe  $C^k$  dès que les domaines de définition  $U_i$  et  $U_j$  (de  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  respectivement) ne sont pas disjoints.

Deux atlas  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  de  $M$  de classe  $C^k$  sont dits  $C^k$ -équivalents si leur réunion  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  est encore un atlas de classe  $C^k$ . Cette relation est réflexive, symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence entre atlas de  $M$  de classe  $C^k$ .

Il en résulte que la réunion de tous les atlas d'une classe d'équivalence pour la relation " $C^k$ -équivalents" est le plus grand atlas de cette classe, qu'on appelle atlas maximal.

Une carte  $C^k$ -équivalente à toutes les cartes d'un atlas  $\mathfrak{A}$  appartient à l'atlas maximal  $\mathfrak{A}_{\max}$ .

On appelle variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ , une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  munie d'une classe d'équivalence d'atlas de classe  $C^k$  pour la relation :

$$\mathfrak{A} \stackrel{k}{\sim} \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \text{ et } \mathfrak{B} \text{ sont } C^k \text{ - équivalents,}$$

ou, ce qui revient au même, un atlas maximal de classe  $C^k$ .

Soient  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$  et de dimensions  $n$  et  $m$  respectivement.. Pour toutes cartes  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  de l'atlas  $\mathfrak{A}_1$  et  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  de l'atlas  $\mathfrak{A}_2$ , on forme l'application  $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \times V_2$  définie par :

$$\varphi_1 \times \varphi_2 (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = (\varphi_1 (x_1), \varphi_2 (x_2)),$$

pour tous  $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \in U_1 \times U_2$ .

On vérifie aisément que l'ensemble des applications  $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \times V_2$ , telles que  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  appartient à l'atlas  $\mathfrak{A}_1$  et  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  appartient à l'atlas  $\mathfrak{A}_2$ , est un atlas de classe  $C^k$ , noté  $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$  et appelé produit des atlas  $\mathfrak{A}_1$  et  $\mathfrak{A}_2$ , qui confère à  $M_1 \times M_2$  une structure de variété différentiable de classe  $C^k$  et de dimension  $n + m$ , appelée variété produit de  $M_1$  et  $M_2$ .

Sauf mention du contraire, lorsqu'on parle de  $M_1 \times M_2$  en tant que variété différentiable, il s'agit toujours de la variété produit.

**Remarques 3.1** 1. *Il existe des variétés topologiques compactes qui ne soient sous jacentes à aucune structure de variété différentiable (cf [39])*

2. *Un atlas de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) sur une variété différentiable  $M$  induit un atlas de classe  $C^l$  pour tout  $l \leq k$ , en particulier, une structure de variété topologique sur  $M$ .*

*Inversement, étant donné un atlas  $\mathfrak{A}_0$  de classe  $C^k$  sur  $M$ , avec  $k \geq 1$ , il existe un atlas  $\mathfrak{B}$  sur  $M$  de classe  $C^\infty$  induisant un atlas  $\mathfrak{A}$  de classe  $C^k$ , qui est  $C^k$ -équivalent à  $\mathfrak{A}_0$  ( $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}_0$ ). Ce résultat a été démontré par H. Whitney.*

*Désormais, quand nous parlons de variété différentiable (ou tout simplement de variété) sans précision supplémentaire sur la classe, il s'agit d'une variété différentiable de classe  $C^\infty$ .*

3. *Si les changements de cartes d'un atlas sont analytiques, la variété  $M$  sera dite analytique*

4. *Si l'on remplace  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{C}^n$  dans les définitions qui précèdent, on obtient la notion d'atlas analytique complexe et de variété analytique complexe (variété analytique).*

*Un atlas analytique complexe est aussi un atlas analytique réel et la structure de variété analytique réelle correspondante sera dite sous-jacente à la structure de variété analytique complexe.*



## 3.2 Exemples de variétés différentiables

### 3.2.1 L'espace $\mathbb{R}^n$ .

Muni de l'application  $Id_{\mathbb{R}^n} : x \mapsto x$ , l'espace  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$  et de  $C^\infty$ .

### 3.2.2 Surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Soit  $f$  une application d'un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs réelles, de classe  $C^k$  avec ( $k \geq 1$ ) et soit  $M = f^{-1}(0)$  l'ensemble des éléments  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  supposé non vide.

On dit que  $M$  est régulière si, pour tout  $p \in M$ , le gradient;

$$(\nabla f)(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \right)$$

de  $f$  est non nul.

**Proposition.** Si  $M$  est régulière, alors,  $M$  est une variété différentiable de dimension 2 de classe  $C^k$ .

*Démonstration.* Notons d'abord que le sous-ensemble  $M$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^3$  est séparée.

Soit  $p$  un point de  $M$  tel que  $(\nabla f)(p) \neq (0, 0, 0)$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \neq 0$ , on considère l'application  $\varphi^3 : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3)).$$

Le jacobien  $J(\varphi^3)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \neq 0$ , donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert  $U_p^3$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  et un voisinage ouvert  $V_{\varphi^3(p)}^3$  de  $\varphi^3(p)$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que la restriction  $\varphi^3|_{U_p^3}$  de  $\varphi^3$  à  $U_p^3$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U_p^3$  sur  $V_{\varphi^3(p)}^3$ .

Identifions l'espace  $\mathbb{R}^2$  au sous espace vectoriel  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\overline{V}_{\varphi^3(p)}^3 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^3(U_p^3)$  est un ouvert de  $\varphi^3(p)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et la restriction de  $\varphi^3$  à  $\overline{U}_p^3 = M \cap U_p^3$  est un homéomorphisme de  $\overline{U}_p^3$  sur  $\overline{V}_{\varphi^3(p)}^3 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^3(U_p^3)$ , c'est à dire une carte au point  $p$  définie par  $\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ .

L'homéomorphisme inverse

$$(\varphi^3)^{-1} : \overline{V}_{\varphi^3(p)}^3 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^3(U_p^3) \longrightarrow \overline{U}_p^3 = M \cap U_p^3$$

s'écrit :

$$(\varphi^3)^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \psi^3(x_1, x_2)).$$

Le théorème des fonctions implicites montre que l'application  $\psi^3$  est de classe  $C^k$ ,

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \neq 0$ , on considère l'application  $\varphi^1 : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\varphi^1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3)).$$

Le jacobien  $J(\varphi^1)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \neq 0$ , donc il existe un voisinage ouvert  $U_p^1$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  et un voisinage ouvert  $V_{\varphi^1(p)}^1$  de  $\varphi^1(p)$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que la restriction  $\varphi^1|_{U_p^1}$  de  $\varphi^1$  à  $U_p^1$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U_p^1$  sur  $V_{\varphi^1(p)}^1$ .

Identifions l'espace  $\mathbb{R}^2$  au sous espace vectoriel  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\overline{V}_{\varphi^1(p)}^1 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^1(U_p^1)$  est un voisinage ouvert de  $\varphi^1(p)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et la restriction de  $\varphi^1$  à  $\overline{U}_p^1 = M \cap U_p^1$  est un homéomorphisme de  $\overline{U}_p^1$  sur  $\overline{V}_{\varphi^1(p)}^1 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^1(U_p^1)$ , c'est à dire une carte au point  $p$  définie par  $\varphi^1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ .

L'homéomorphisme inverse

$$(\varphi^1)^{-1} : \overline{V}_{\varphi^1(p)}^1 = \mathbb{R}^2 \cap \varphi^1(U_p^1) \longrightarrow \overline{U}_p^1 = M \cap U_p^1$$

s'écrit :

$$(\varphi^1)^{-1}(x_2, x_3) = (\psi^1(x_2, x_3), x_2, x_3).$$

où  $\psi^1$  est de classe  $C^k$ .

Si  $p \in \overline{U}_p^1 \cap \overline{U}_p^3$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \neq 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \neq 0$ , et les changements de coordonnées  $\varphi^3 \circ (\varphi^1)^{-1}$  est donnée par :

$$\varphi^3 \circ (\varphi^1)^{-1}(x_2, x_3) = \varphi^3(\psi^1(x_2, x_3), x_2, x_3) = (\psi^1(x_2, x_3), x_2)$$

qui est un  $C^k$ -difféomorphisme local.

Le même raisonnement s'applique au cas où  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \neq 0$ , et tous les changements de cartes possibles étant de ce type, ce qui montre que l'atlas ainsi défini confère à  $M$  une structure de variété différentiable de dimension 2 et de même classe que  $f$ . ■

### 3.2.3 La sphère $S^n$ .

Pour chaque entier naturel  $n$ , on dénote par  $S^n$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\},$$

et, désignons par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et par  $E_n$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par l'équation  $x_{n+1} = 0$  ( $E_n$  est appelé hyperplan équatorial de  $S^n$ ), on identifie évidemment l'hyperplan équatorial avec  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle pôle nord (resp. pôle sud) de la sphère  $S^n$ , le point  $N = (0, \dots, 0, 1)$  (resp.  $S = (0, \dots, 0, -1)$ ).

On considère le recouvrement ouvert de la sphère  $S^n$  défini par les ouverts suivants  $U_N$  et  $U_S$  définis par :

$$U_N = S^n - \{N\} \text{ et } U_S = S^n - \{S\}.$$

On appelle projection stéréographique du pôle nord, l'application  $\varphi_N$  de  $U_N$  à valeurs dans l'hyperplan équatorial  $E_n$ , associant à un élément  $M$  de  $S^n - \{N\}$ , l'intersection  $\varphi_N(M)$  de la droite  $(NM)$  avec l'hyperplan équatorial  $E_n$  :

$$\{\varphi_N(M)\} = (NM) \cap E_n.$$

De même, la projection stéréographique du pôle sud est l'application  $\varphi_S$  de  $U_S$  à valeurs dans l'hyperplan équatorial  $E_n$ , associant à un élément  $M$  de  $S^n - \{S\}$ , l'intersection  $\varphi_S(M)$  de la droite  $(SM)$  avec l'hyperplan équatorial  $E_n$  :

$$\{\varphi_S(M)\} = (SM) \cap E_n.$$

Ainsi,

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

pour tout  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in U_N$ , et

$$\varphi_S(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

L'ensemble  $\{\varphi_N; \varphi_S\}$  définit un atlas de classe  $C^\infty$  sur la sphère  $S^n$ , ce qui confère à la sphère  $S^n$  une structure de variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^\infty$ .

**Remarque 3.1** *Les sphères de dimension  $\leq 4$  ne possèdent qu'une structure de variété différentiable, il s'agit de la structure naturelle définie par les projections stéréographiques  $\varphi_N$  et  $\varphi_S$ , tandis que les sphères de dimension  $\geq 5$  admettent plusieurs structures de variétés différentiables non difféomorphes à la structure naturelle, on les appelle sphères exotiques. F. Pham ([19]) a montré le premier que ces sphères s'introduisent naturellement en géométrie algébrique.*

### 3.2.4 Espace projectif réel $\mathbb{R}P(n)$

Munissons l'ouvert  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , de la relation suivante : deux points  $u$  et  $v$  de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  sont équivalents, et on écrit  $u \sim v$ , si et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , tel que  $u = \lambda v$ , en d'autres termes;  $u \sim v$  si et seulement si, ils définissent la même droite vectorielle.

La relation “ $\sim$ ” est une relation d'équivalence, l'espace quotient est appelé espace projectif réel de dimension  $n$ , et est désigné par  $\mathbb{R}P(n)$  :

$$\mathbb{R}P(n) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\sim}.$$

Pour chaque  $i = 1, \dots, n+1$ , on dénote par  $U_i$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par :

$$U_i = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}.$$

La famille  $(U_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  constitue un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .

On dénote par  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P(n)$  la surjection canonique, et par  $\overline{U}_i$  l'image  $\pi(U_i)$  par  $\pi$  de  $U_i$ .

L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P(n)$  muni de la topologie quotient est recouvert par la famille  $(\overline{U}_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ .

Et, pour chaque  $i = 1, \dots, n+1$ , on note par  $\varphi_i$  l'application de  $U_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right),$$

pour tout  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in U_i$  et par  $\overline{\varphi}_i$  l'application de  $\overline{U}_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$\overline{\varphi}_i(\overline{u}) = \varphi_i(u)$$

pour tout  $\overline{u} \in \overline{U}_i$ , où  $\overline{u}$  est la classe de  $u$  modulo la relation d'équivalence  $\sim$ .

Les  $\overline{\varphi}_i$  définissent des applications bijectives, et compte tenu de la topologie quotient de  $\mathbb{R}P(n)$ , la famille  $(\overline{\varphi}_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  confère à l'espace projectif réel une structure de variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^\infty$ .

## 3.3 Fonctions différentiables

### 3.3.1 Définitions

Soit  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ ,  $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle définie dans un voisinage d'un point  $p \in M$ .

On dit que  $f$  est différentiable au point  $p$ , s'il existe une carte  $\varphi \in \mathfrak{A}$  en  $p$ , c'est à dire que le domaine  $U$  de  $\varphi$  contient le point  $p$ , telle que l'expression locale  $f \circ \varphi^{-1}$  de la fonction  $f$  dans la carte  $\varphi$  est différentiable au point  $\varphi(p)$ .

Cette définition est intrinsèque, c'est à dire, elle ne dépend pas de la carte choisie; en effet, soit  $\psi$  une autre carte au point  $p$  dont le domaine sera dénoté par  $V$ . On a alors :

$$(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)} = (f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V)} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)},$$

et comme

$$(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

est de classe  $C^k$ , et que  $f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable au point  $\varphi(p)$ , on déduit que  $f \circ \psi^{-1}$  est différentiable au point  $\psi(p)$ .

On dira que la fonction  $f$  est différentiable sur une partie ouverte  $U$  de  $M$ , si la fonction  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ .

On dit que  $f$  est de classe  $C^l$  ( $l \leq k$ ) sur  $U$ , si pour tout point  $p \in U$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  autour de  $p$ , telle que l'expression locale  $f \circ \varphi^{-1}$  est de classe  $C^l$  sur  $\varphi(U)$ .

Comme exemple de fonctions différentiables de classe  $C^k$ , considérons les composantes  $x^i = pr^i \circ \varphi$  d'une carte  $\varphi$  de l'atlas  $\mathfrak{A}$ .

L'ensemble  $C^k(M, \mathbb{R})$  des fonctions  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ , muni des opérations :

$$\begin{aligned} f + g : x &\longmapsto f(x) + g(x) \\ fg : x &\longmapsto f(x)g(x) \\ \lambda f : x &\longmapsto \lambda f(x), \end{aligned}$$

où  $f, g \in C^k(M, \mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est une  $\mathbb{R}$ -algèbre. Bien entendu, on identifie le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels au sous ensemble de  $C^k(M, \mathbb{R})$  formé des fonctions  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  qui sont constantes sur  $M$ .

Il est clair que l'algèbre  $C^k(M, \mathbb{R})$  est complètement déterminée par l'atlas  $\mathfrak{A}$ , en fait, deux atlas  $C^k$ -équivalents sur  $M$  définissent la même  $\mathbb{R}$ -algèbre  $C^k(M, \mathbb{R})$ .

**Remarque 3.2** *Un atlas de classe  $C^k$  donne un choix particulier de fonctions différentiables, bien entendu, une fonction  $f$  peut être différentiable par rapport à un atlas sans l'être par rapport à un autre, par exemples, les atlas  $\mathfrak{A} = \{id_{\mathbb{R}}\}$  et  $\mathfrak{B} = \{x \longmapsto x^3\}$  formés d'une seule carte, ne sont pas équivalents, par conséquent, ils définissent des structures différentes de variété différentiable sur  $\mathbb{R}$ , et par conséquent, ils donnent des choix différents pour les fonctions réelles différentiables.*

Soient  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), de dimensions  $n$  et  $m$  respectivement,  $f$  une application de  $M_1$  dans  $M_2$  et  $p$  un point de  $M_1$ . On dit que  $f$  est différentiable au point  $p$ , s'il existe une carte  $(U_1, \varphi_1)$  au point  $p$ , une carte  $(U_2, \varphi_2)$  au point  $f(p)$  avec  $f(U_1) \subseteq U_2$  telles que l'expression locale

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

de  $f$  dans les cartes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , est différentiable au point  $\varphi_1(p)$ .

Cette définition est intrinsèque, soit en effet  $(V_1, \psi_1)$  une autre carte au point  $p$  et  $(V_2, \psi_2)$  une autre carte au point  $f(p)$ . L'expression locale

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

de  $f$  dans les cartes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  s'écrit :

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}).$$

Les changements de cartes  $(\varphi_1 \circ \psi_1^{-1})$  et  $(\psi_2 \circ \varphi_2^{-1})$  sont de classe  $C^k$ , l'expression locale  $(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$  de la fonction  $f$  dans les cartes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  est différentiable au point  $\varphi_1(p)$ , par conséquent,  $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$  est différentiable au point  $\psi_1(p)$ .

On voit bien que le rang de l'application linéaire  $d(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}$  ne dépend pas des cartes locales  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , il exprime donc une propriété intrinsèque de l'application  $f$ , on l'appelle rang de  $f$  au point  $p$ , et on le note

$$rg_p(f).$$

On a donc,

$$rg_p(f) \leq \min(n, m).$$

On dit que  $f$  est différentiable sur une partie ouverte  $U$  de  $M_1$ , si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ .

On dit que  $f$  est de classe  $C^p$  ( $p \leq k$ ) sur  $U$ , si pour tout point  $p \in U$ , il existe une carte  $(U_1, \varphi_1)$  autour de  $p$ , une carte  $(U_2, \varphi_2)$  autour de  $f(p)$ , telle que l'expression locale  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  est de classe  $C^p$  sur  $\varphi_1(U_1)$ .

On dit que  $f$  est un  $C^l$ -difféomorphisme ( $l \leq k$ ), d'un ouvert  $U$  de  $M_1$  sur un ouvert  $V$  de  $M_2$ , si  $f$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$  tel que  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^l$ .

L'ensemble  $Diff^k(M_1, M_2)$  des  $C^k$ -difféomorphismes  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  muni de la loi de composition des applications  $\circ$  est un groupe.  $C^k(M_1, \mathbb{R})$  est un module sur l'anneau  $C^k(M_1, \mathbb{R})$ .

### 3.3.2 Fonctions plateau. Partition de l'unité

#### Fonctions plateau

**Proposition 3.1** Soient  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  de classe  $C^k$  et  $p$  un point de  $M$ . Il existe deux ouverts  $V$  et  $W$  de  $p$  dans  $M$  tels que  $W \subset V$  et une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ , nulle sur  $M - V$ , égale à 1 sur  $W$  et qui vérifie  $0 < f(x) < 1$  pour tout  $x \in V - W$ .

*Démonstration.* Considérons les fonctions réelles d'une variable réelle  $u, v$  et  $w$  définies par :

$$u(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{\int_{-\infty}^x u(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt}$$

et  $w(x) = v(2 - x^2)$ , et soit  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$l(x) = w(\|x\|) = v(2 - \|x\|^2)$$

avec  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Il n'est pas difficile de voir que les fonctions  $u, v, w$  et  $l$  sont différentiables de classe  $C^\infty$ .

La fonction  $l$  vérifie :

1.  $l$  est identiquement égale à 1 ( $l \equiv 1$ ) sur la boule unité  $B(0, 1)$ ,
2.  $l$  est identiquement nulle ( $l \equiv 0$ ) sur le complémentaire  $\mathbb{R}^n - B(0, \sqrt{3})$  de la boule  $B(0, \sqrt{3})$ ,
3.  $0 < l(x) < 1$  sur  $B(0, \sqrt{3}) - B(0, 1)$ .

Soit  $\varphi : U \rightarrow V$  une carte locale au point  $p$ . Quitte à remplacer  $\varphi$  par  $\varphi - \varphi(p)$ , on peut supposer que  $\varphi(p)$  vaut 0.

Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif tel que

$$\alpha B(0, \sqrt{3}) \subset \varphi(U)$$

et soit  $f$  la fonction réelle définie sur  $M$  par :

$$f(x) = \begin{cases} l\left(\frac{1}{\alpha}\varphi(x)\right) & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

L'application  $f$  satisfait aux hypothèses du théorème avec  $V = \varphi^{-1}(\alpha B(0, \sqrt{3}))$  et  $W = \varphi^{-1}(\alpha B(0, 1))$ . ■

La fonction  $f$  donnée par le théorème précédent, est appelée *fonction plateau*

### Partition de l'unité

Tout d'abord, donnons les définitions suivantes :

1. Un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  d'un espace topologique  $T$  est dit localement fini, si pour tout  $x \in T$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que l'ensemble

$$\left\{ i \in I \mid U_i \cap U \neq \emptyset \right\}$$

est fini.

2. Un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  d'un espace topologique  $T$  est dit plus fin qu'un autre recouvrement  $(V_j)_{j \in J}$ , si chaque élément  $U_i$  du premier recouvrement est contenu au moins dans un élément  $V_j$  du second :

$$(\forall i \in I) (\exists j \in J) (U_i \subseteq V_j).$$

3. Un espace topologique  $T$  est dit paracompact si, il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de  $T$ , il existe un recouvrement ouvert plus fin localement fini. Pour une variété  $M$  séparée et connexe (ou une réunion dénombrable de variétés connexes), on démontre l'équivalence suivante :

- (a)  $M$  est paracompacte
- (b)  $M$  possède une base topologique dénombrable.

4. Une partition de l'unité sur une variété différentiable  $M$  est une famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de fonctions positives telles que :

- (a) la famille  $(\text{supp}(\varphi_i))_{i \in I}$  est localement finie,
- (b)  $\text{supp}(\varphi_i)$  est compact



$$(c) \sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$$

5. La partition de l'unité  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est dite de classe  $C^l$  si toutes les fonctions  $\varphi_i$  sont de classe  $C^l$ .
6. Une partition de l'unité  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est dite subordonnée à un recouvrement  $(V_j)_{j \in J}$  si pour tout  $i \in I$ , il existe  $j \in J$ , telle que  $\text{supp} \varphi_i \subset U_j$ .

**Théorème 3.1** *Pour tout atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$  d'une variété paracompacte de classe  $C^k$ , il existe un recouvrement ouvert plus fin auquel est subordonnée une partition de l'unité.*

Pour la démonstration, on se réfère à l'exposé de A. Eladraoui

### 3.3.3 Sous variétés d'une variété différentiable

**Théorème du rang constant.**

**Théorème du rang constant 3.1** *Soient  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), de dimensions  $n$  et  $m$  respectivement,  $f$  une application de  $M_1$  dans  $M_2$  de rang constant  $p$  de classe  $C^l$  avec  $l \leq k$ , et, soit  $x_0$  un point de  $M_1$ . Alors, il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x_0$ , une carte  $(V, \psi)$  en  $y_0 = f(x_0)$ , telles que l'expression locale de  $f$  dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$  se réduit à :*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0).$$

*Démonstration.* Soient  $(U, \varphi)$  une carte en  $x_0$ ,  $(U', \varphi')$  une carte en  $y_0 = f(x_0)$ , et  $F = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$  l'expression locale de  $f$  dans les cartes  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

$F$  étant de rang  $p$  au point  $x_0$ , donc on peut extraire de la matrice jacobienne

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi(x_0)) \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$$

une matrice de rang  $p$ . Quitte à changer la numérotation des  $x_j$  et des  $F_i$ , ce qui revient à changer les cartes  $\varphi$ , on peut supposer que le déterminant :

$$d(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\varphi(x_0)) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p}(\varphi(x_0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1}(\varphi(x_0)) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_p}(\varphi(x_0)) \end{vmatrix}$$

est non nul. L'application  $x \mapsto d(x)$  est continue (puisque  $f$  est de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ ), donc il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $x_0$  dans lequel l'application  $d$  ne s'annule pas.

Soit  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$G(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_p(x_1, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Le jacobien  $J(G)(\varphi(x))$  de l'application  $G$  au point  $\varphi(x)$  vaut  $d(x)$  :

$$J(G)(\varphi(x)) = d(x)$$

pour tout  $x \in W$ , le théorème d'inversion locale implique qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $\varphi(x_0)$  et un voisinage  $V'$  de  $G(\varphi(x_0))$  tel que  $G$  définit un difféomorphisme de  $V$  sur  $V'$ .

On voit donc que l'application

$$\psi = G \circ \varphi$$

définit un système de coordonnées locales au voisinage de  $x_0$ . L'expression locale  $H$  de  $f$  dans les cartes  $\psi$  et  $\varphi'$  s'écrit :

$$H = (H_1, \dots, H_m) = \varphi' \circ f \circ \psi^{-1} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} \circ G^{-1} = F \circ G^{-1},$$

et par définition même de  $G$ , on a :

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \text{ pour } i = 1, \dots, p.$$

On a aussi

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j} = 0$$

pour  $i, j \geq p+1$ , sinon, alors, en échangeant l'ordre dans  $x_{p+1}, \dots, x_n$  et dans  $H_{p+1}, \dots, H_m$ , on peut supposer que  $i = j = p+1$ , et dans ce cas,  $H$  serait de rang  $\geq p+1$ , ce qui est absurde; donc les composantes  $H_{p+1}, \dots, H_m$  ne dépendent que des variables  $(x_1, \dots, x_p)$  :

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = H_i(x_1, \dots, x_p) \text{ pour tout } i = p+1, \dots, m.$$

Soit  $K : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'application de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même, dont les composantes  $K_i$  sont définies par :

$$K_i(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ x_i - H_i(x_1, \dots, x_p) & \text{pour tout } i = p+1, \dots, m \end{cases}$$

On a

$$\frac{D(K_1, \dots, K_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = 1.$$

L'application  $\psi' = K \circ \varphi'$  définit bien un système de coordonnées locales au voisinage de  $y_0 = f(x_0)$ , et l'on a :

$$\begin{aligned} (\psi' \circ f \circ \psi^{-1})(x_1, \dots, x_n) &= K(\varphi' \circ f \circ \psi^{-1})(x_1, \dots, x_n) \\ &= K(H_1(x_1, \dots, x_n), \dots, H_m(x_1, \dots, x_n)) \\ &= K(x_1, \dots, x_p, H_{p+1}(x_1, \dots, x_p), \dots, H_m(x_1, \dots, x_p)) \\ &= (x_1, \dots, x_p, H_{p+1} - H_{p+1}, \dots, H_m - H_m) \\ &= (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'expression locale de  $f$  dans les cartes  $\psi$  et  $\psi'$  est l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . ■

### Immersion.. Submersion.. Plongement

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$  de dimensions  $n$  et  $m$  respectivement et  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  une application de classe  $C^l$  ( $1 \leq l \leq k$ ).

- (i) On dit que  $f$  est une *immersion*, si elle est de rang  $n = \dim M_1$  en tout point de  $M_1$ ; et dans ces conditions on a

$$\dim M_1 = n \leq \dim M_2 = m.$$

- (ii) On dit que  $f$  est une *submersion*, si elle est de rang  $m = \dim M_2$  en tout point de  $M_1$ ; ce qui entraîne que l'on a :

$$\dim M_1 = n \geq \dim M_2 = m.$$

- (iii) On dit que  $f$  est un *étalement*, si elle est de rang

$$n = \dim M_1 = m = \dim M_2.$$

- (iv) On dit que  $f$  est un *plongement*, si  $f$  est une immersion et si de plus,  $f$  est un homéomorphisme de  $M_1$  sur  $f(M_1)$  ( $f(M_1)$  étant muni de la topologie induite par celle de  $M_2$ ).

Il résulte du théorème du rang constant que l'on a :

**Corollaire 3.1** *Si  $f$  est une immersion (resp. une submersion), alors pour tout point  $x_0 \in M_1$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x_0$ , une carte  $(V, \psi)$  en  $y_0 = f(x_0)$ , telles que l'expression locale de  $f$  dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$  se réduit à l'application :*

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0).$$

(resp. à  $(u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_m)$ ).

### Sous-variétés

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  de classe  $C^k$  avec ( $k \geq 1$ ), soit  $p$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$  ( $p \leq n$ ), et soient  $X$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow M$  une application qui vérifie la propriété suivante :

- (P) Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , une carte locale  $(V, \varphi)$  au point  $y = f(x)$  telle que  $f(U) \subset V$  et  $\varphi \circ f$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(V) \cap \mathbb{R}^p$ , en identifiant  $\mathbb{R}^p$  au sous espace  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Les couples  $(U, \varphi \circ f)$  forment un atlas de classe  $C^k$  sur  $X$ , définissant ainsi une structure de variété différentiable de dimension  $p$  de classe  $C^k$  sur  $X$ ; appelée image inverse par  $f$  de la structure de variété de  $M$  de classe  $C^k$ , pour laquelle  $f$  est une immersion

On distingue les cas suivants :

1. Si  $X$  est un sous espace topologique de  $M$  ( $X \subset M$ ),  $f$  est l'injection canonique  $x \mapsto x$  vérifiant la propriété (P), on dit que  $X$  est une sous-variété (plongée) de  $M$ .
2. Si  $X$  est un sous ensemble de  $M$  muni d'une topologie qui n'est pas nécessairement la topologie induite par celle de  $M$ , mais qui est telle que l'injection canonique  $f : x \mapsto x$  soit continue et possède la propriété (P),  $X$  est appelée sous variété immergée dans  $M$ .

On remarque qu'une même partie de  $M$  peut être munie parfois de plusieurs structures différentes de sous variété immergée.

Toute partie ouverte d'une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ .

Tout sous espace discret au plus dénombrable d'une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  est une sous-variété de  $M$  de dimension 0.

**Exemple 3.1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), on suppose la surface  $M = f^{-1}(0)$  d'équation  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  est non vide et est régulière.

Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe  $i$  ( $i = 1 \dots, n$ ) tel que  $\partial_i f(x_0)$  ne soit pas nul. L'application  $\varphi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\varphi^i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

détermine un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  sur un voisinage ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\varphi^i(U \cap M) = \varphi^i(U) \cap \mathbb{R}^{n-1}.$$

Par suite la propriété (P) est satisfaite, ce qui montre que  $M$  est une sous variété plongée de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $n - 1$ . On dit que  $M$  est une hypersurface de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour les variétés différentiables paracompactes (ce qu'on va supposer par la suite on a :

**Théorème de Whitney 3.1** Toute variété différentiable de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), de dimension  $n$ , paracompacte admet :

1. un plongement  $f$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,
2. une immersion dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

### 3.3.4 Première approche des groupes et algèbres de Lie

#### Groupes de Lie

On appelle groupe de Lie de dimension  $n$ , un groupe  $(G, \cdot)$  muni d'une structure de variété différentiable de dimension  $n$  de classe  $C^\infty$  compatible avec la structure de groupe, c'est à dire, les applications

$$(x, y) \mapsto x \cdot y \text{ et } x \mapsto x^{-1},$$

de  $G \times G$  dans  $G$  est de classe  $C^\infty$ .

Le groupe produit  $G_1 \times G_2$ , d'un groupe de Lie  $G_1$  de dimension  $n$  par un groupe de Lie  $G_2$  de dimension  $m$ , muni de la structure de variété différentiable produit, est un groupe de Lie de dimension  $n + m$ , en effet, les applications

$$pr_1 \times pr_1 \text{ et } pr_2 \times pr_2,$$

de  $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$  à valeurs dans  $G_1 \times G_1$  (resp. dans  $G_2 \times G_2$ ), définies respectivement par :

$$pr_1 \times pr_1((a, b), (a', b')) = (a, a') \text{ et } pr_2 \times pr_2((a, b), (a', b')) = (b, b'),$$

sont de classe  $C^\infty$ , donc l'application

$$((a, b), (a', b')) \longmapsto (aa'; bb'),$$

de  $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$  à valeurs dans  $G_1 \times G_2$ , est de classe  $C^\infty$ , par conséquent le produit  $G_1 \times G_2$  est un groupe de Lie de dimension  $n + m$ .

De même l'application

$$(x, y) \longmapsto (x^{-1}, y^{-1})$$

est de classe  $C^\infty$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie de dimension  $n$ . Pour tout  $a \in G$ , les applications

$$L_a : x \longmapsto ax \text{ et } R_a : x \longmapsto xa,$$

de  $G$  dans lui-même, sont appelées translations à gauche et à droite respectivement<sup>1</sup>.

**Proposition 3.2** *Les applications  $L_a : x \longmapsto ax$  et  $R_a : x \longmapsto xa$ , sont des  $C^\infty$ -difféomorphismes.*

*Démonstration.* En effet, les applications

$$x \longmapsto (a, x) \text{ et } (a, x) \longmapsto ax$$

sont de classe  $C^\infty$ , donc  $L_a$  est de classe  $C^\infty$ , et comme  $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ , on déduit que  $L_a$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

Un raisonnement analogue montre que les translations à droite  $R_a$  sont des  $C^\infty$ -difféomorphismes. ■

Soient  $G$  un groupe de Lie et  $H$  une partie de  $G$ . On dit que  $H$  est un sous-groupe de Lie  $G$  si  $H$  est à la fois un sous-groupe et une sous-variété.

Il est clair qu'un sous-groupe ouvert  $H$  de  $G$  est un sous-groupe de Lie, en particulier la composante connexe de l'unité  $G_e$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ .

Pour les sous-groupes fermés on a :

---

<sup>1</sup>La lettre  $L$  de la translation à gauche  $L_a$  provient du mot anglais "left" et la lettre  $R$  provient du mot "right".

**Théorème de Chevalley 3.1** *Tout sous groupe fermé  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est un sous groupe de Lie de  $G$ .*

Une application  $u$  d'un groupe de Lie  $G_1$  dans un groupe de Lie  $G_2$  est appelée morphisme de groupes de Lie (ou homomorphisme de groupes de Lie), si  $u$  est différentiable de classe  $C^\infty$  et est un homomorphisme de groupes de  $G_1$  dans  $G_2$ . Si de plus  $u$  est un difféomorphisme on dira que c'est un isomorphisme de groupes de Lie, et si  $G_1 = G_2 = G$ , on dira que  $u$  est un automorphisme de  $G$ .

### Exemples

1. Le groupe additif  $\mathbb{R}^n$  est un groupe de Lie
2. Le cercle  $S^1$  et le tore  $\mathbb{T}^n$

L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de l'addition  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ , ce qui confère à cet espace une structure de groupe commutatif, et de la multiplication décrétée par :

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

En désignant par 1 et  $i$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on vérifie que  $i^2 = -1$  et que l'ensemble  $\mathbb{C}$  est un corps commutatif dont les éléments s'écrivent sous la forme  $z = x + yi$  et sont appelés nombres complexes, l'abscisse  $x$  est appelée partie réelle du nombre complexe  $z$  et l'ordonnée  $y$  est appelée partie imaginaire du nombre complexe  $z$ . Le complexe  $\bar{z} = x - yi$  est appelé conjugué de  $z$  est le nombre réel positif  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est appelé module de  $z$ .

Il est clair que l'application  $((x, y), (x', y')) \longmapsto (xx' - yy', xy' + x'y)$  est de classe  $C^\infty$ , donc le groupe multiplicatif  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  est un groupe de Lie de dimension 2.

Le cercle  $S^1$  est l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est un sous groupe fermé du groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ , donc c'est un groupe de Lie commutatif de dimension 1.

Le produit  $S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$ -fois) du groupe de Lie  $S^1$ , est un groupe de Lie commutatif de dimension  $n$ , appelé tore de dimension  $n$  et est dénoté par  $\mathbb{T}^n$ .

3. La sphère  $S^3$ .

L'ensemble  $\mathbb{H}$  des quaternions (de Hamilton) est l'ensemble  $\mathbb{R}^4$  muni de l'addition  $(r, a, b, c) + (r', a', b', c') = (r + r', a + a', b + b', c + c')$ , ce qui confère à cet espace une structure de groupe commutatif, et du multiplication  $(r, a, b, c) \cdot (r', a', b', c')$  de  $(r, a, b, c)$  et  $(r', a', b', c')$  est décrétée par :

$$(r.r' - aa' - bb' - cc', ra' + ar' + bc' - cb', rb' + br' + ca' - ac', rc' + cr' + ab' - ba').$$

En désignant par  $1, i, j, k$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , on vérifie aisément que l'on a :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ et } ij = k, jk = i, ki = j$$

et que l'ensemble  $\mathbb{H}$  est un corps non commutatif dont les éléments s'écrivent sous la forme  $q = r + ai + bj + ck$  et sont appelés quaternions. Le quaternion  $\bar{q} = r - ai - bj - ck$  est appelé conjugué de  $q$  et le nombre réel positif  $|q| = \sqrt{r^2 + a^2 + b^2 + c^2}$  est appelé module de  $q$ .

Il est clair que l'application  $(q, q') \mapsto q \cdot q'$  est de classe  $C^\infty$ , donc le groupe multiplicatif  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$  est un groupe de Lie de dimension 4.

La sphère  $S^3$  est l'ensemble des quaternions de module 1, c'est un sous groupe fermé du groupe multiplicatif  $\mathbb{H}^*$ , donc c'est un groupe de Lie de dimension 3.

On démontre le résultat suivant :

**Théorème.** Si la sphère  $S^n$  est un groupe de Lie, alors  $n = 1$  ou  $n = 3$ , de sorte que  $S^1$  et  $S^3$  sont les seules sphères qui peuvent être munies d'une structure de groupe de Lie.

#### 4. Le groupe $Gl(n, \mathbb{R})$ .

L'espace  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées  $n \times n$ , muni des lois :

$$(A, B) \mapsto A + B \text{ et } (\lambda, B) \mapsto \lambda B$$

est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n^2$  qu'on identifie usuellement à  $\mathbb{R}^{n^2}$ . C'est un espace de Banach par rapport à n'importe quelle norme, et l'application bilinéaire (continue)

$$(A, B) \mapsto AB,$$

de  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$  est différentiable de classe  $C^\infty$ .



Le groupe linéaire  $Gl(n, \mathbb{R})$ , formé des matrices inversibles, est une partie ouverte de  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ , car c'est l'image réciproque, par l'application continue  $d : A \rightarrow \det A$ , de  $\mathbb{R}^*$  ( $Gl(n, \mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ).

Remarquons que toute matrice  $M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$  et pour tout entier naturel non nul  $n$  tel que  $\frac{1}{n}$  soit inférieur strictement à toutes les valeurs propres éventuelles de  $M$ , la matrice  $M - \frac{1}{n}I_n$  est inversible, et on a

$$M - \frac{1}{n}I_n \rightarrow M \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

par conséquent; Le groupe linéaire  $Gl(n, \mathbb{R})$  est un ouvert dense dans  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ .

Il est donc clair que l'application  $(A, B) \mapsto AB$ , de  $Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R})$  à valeurs dans  $Gl(n, \mathbb{R})$  est différentiable de classe  $C^\infty$ , de plus l'expression de l'inverse d'une matrice  $A$  de  $Gl(n, \mathbb{R})$ , donnée par  $A^{-1} = \frac{{}^t\tilde{A}}{\det A}$  permet d'établir aussi que l'application  $A \mapsto A^{-1}$  est différentiable de classe  $C^\infty$ , par conséquent  $Gl(n, \mathbb{R})$  un groupe de Lie de dimension  $n^2$ ;  $\tilde{A}$  étant la comatrice de  $A$ , c'est à dire la matrice des cofacteurs de  $A$ .

5. Le groupe symplectique  $Sp(n, \mathbb{R})$  est le groupe des matrices inversibles  $U \in Gl(2n, \mathbb{R})$  telles que  ${}^tUJU = J$ , avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe  $Sp(n, \mathbb{R})$  est formé des matrices carrées du type :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

avec  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices  $n \times n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{R}$ , vérifiant les relations

- (a)  ${}^tAD - {}^tBC = I_n$ ,  
 (b)  ${}^tAB$  et  ${}^tCD$  sont des matrices symétriques.

Le groupe  $Sp(n, \mathbb{R})$  est un sous groupe fermé du groupe de Lie  $Gl(2n, \mathbb{R})$ , donc c'est un groupe de Lie.

6. Le groupe orthogonal  $O(n, \mathbb{R})$  est le sous groupe de  $Gl(n, \mathbb{R})$  formé des matrices inversibles  $A$  telles que  ${}^tAA = I$ , c'est un sous groupe fermé du groupe de Lie  $Gl(n, \mathbb{R})$ , donc c'est un groupe de Lie.

7. Le groupe spécial orthogonal  $SO(n, \mathbb{R})$  est le sous groupe de  $Gl(n, \mathbb{R})$  formé des matrices inversibles  $A$  telles que  $\det A = 1$ , c'est un sous groupe fermé du groupe de Lie  $Gl(n, \mathbb{R})$ , donc c'est un groupe de Lie.

### Algèbres de Lie

Une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une application bilinéaire  $\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  vérifiant :

1.  $\mu(x, x) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{G}$ ,
2.  $\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0$  pour tous  $x, y, z \in \mathcal{G}$ .

La première relation est équivalente ici à :

$$\mu(x, y) = -\mu(y, x)$$

quels que soient  $x, y \in \mathcal{G}$ .

La deuxième relation est appelée identité de Jacobi.

En général  $\mu(x, y)$  est dénotée par  $[x, y]$ , et se lit "crochet  $x y$ ".

Supposons que  $\mathcal{G}$  soit de dimension finie  $n$ , et soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{G}$ , pour tous  $i, j = 1, \dots, n$ , écrivons :

$$\mu(e_i, e_j) = C_{ij}^k e_k,$$

on a évidemment les relations suivantes :

1.  $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$  quels que soient  $i, j, k = 1, \dots, n$ .
2. L'identité de Jacobi se traduit par :

$$C_{ij}^l C_{kl}^r + C_{jk}^l C_{il}^r + C_{ki}^l C_{jl}^r = 0 \text{ pour tous } i, j, r = 1, \dots, n,$$

Les scalaires  $C_{ij}^k$  sont appelées constantes de structure de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ .

**Exemples 3.1** 1. *Tout espace vectoriel  $\mathcal{G}$  est muni d'une structure triviale d'algèbres de Lie en posant :*

$$\mu(X, Y) = 0 \text{ pour tous } X, Y \in \mathcal{G},$$

*cette algèbre de Lie est dite abélienne.*

2. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de produit vectoriel  $\wedge$  est une algèbre de Lie

3. Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre réelle associative dont la multiplication est désignée par  $\circ$ . On peut munir cette algèbre d'une loi d'algèbre de Lie  $\mu$  en posant :

$$\mu(x, y) = x \circ y - y \circ x.$$

cette algèbre de Lie est dite sous jacente à la structure d'algèbre associative de  $\mathcal{A}$ . Par exemple, l'algèbre  $\text{End}(V)$  des endomorphismes d'un espace vectoriel, ou encore l'algèbre  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  donnent naissance à des algèbres de Lie notées respectivement par  $\mathcal{G}l(V)$  ou  $\mathcal{G}l(n, \mathbb{K})$ .

4. Soient  $(\mathcal{G}_1, \mu_1)$  et  $(\mathcal{G}_2, \mu_2)$  deux algèbres de Lie. On munit naturellement  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$  d'une loi d'algèbre de Lie  $\mu$  en posant :

$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (\mu_1(x_1, y_1), \mu_2(x_2, y_2)).$$

L'algèbre de Lie  $(\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2, \mu)$ , ainsi obtenue, est appelée somme directe des algèbres de Lie  $(\mathcal{G}_1, \mu_1)$  et  $(\mathcal{G}_2, \mu_2)$ .

5. L'espace réel  $\mathbb{R}^{2p+1}$ , muni de l'application bilinéaire antisymétrique  $\mu$  définie par :

$$\mu(e_{2i}, e_{2i+1}) = e_1,$$

et les autres  $\mu(e_i, e_j)$  sont nuls à l'exception de ceux obtenus par l'anticommutativité de  $\mu$ , est une algèbres appelée algèbre de Heisenberg d'ordre  $2p+1$  et sera désignée par  $H_p$ ;  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2p+1}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^{2p+1}$ .

Soit  $(\mathcal{G}, \mu)$  une algèbre de Lie. On dit qu'un sous espace vectoriel  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{G}$  est une sous algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{H}$  est stable par la loi d'algèbre de Lie  $\mu$  :

$$\mu(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}.$$

Il est clair qu'une sous algèbre de Lie est une algèbre de Lie.

**Exemples 3.2** 1. Algèbre spéciale linéaire  $sl(n, \mathbb{K})$  : le sous ensemble

$$sl(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K}) \mid \text{tr} A = 0\}$$

est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$  appelée algèbre spéciale linéaire.

2. Algèbre spéciale orthogonale  $so(n, \mathbb{R})$  : le sous ensemble

$$so(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K}) \mid {}^t A = -A\}$$

est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$  appelée algèbre spéciale orthogonale.

3. Algèbre de Lie symplectique  $sp(n, \mathbb{R})$  : le sous ensemble

$$sp(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{K}) \mid {}^t A J = -J A\}$$

est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{M}(2n, \mathbb{K})$  appelée algèbre symplectique, où  $J$  est la matrice carrée d'ordre  $2n$  donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Une sous algèbre de Lie  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{G}$  est un idéal de  $\mathcal{G}$ , si  $\mathcal{I}$  est une partie permise de  $\mathcal{G}$  c'est à dire,

$$\mu(\mathcal{I}, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}.$$

Étant donné un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{G}$ , on peut définir l'espace vectoriel quotient  $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{I}}$  d'une structure d'algèbre de Lie, en posant

$$\bar{\mu}(x + \mathcal{I}, y + \mathcal{I}) = \mu(x, y) + \mathcal{I},$$

l'algèbre de Lie ainsi obtenue est appelée algèbre de Lie quotient de  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{I}$ .

**Exemples 3.3** 1. Pour toute algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ,  $(0)$  et  $\mathcal{G}$  lui même sont des idéaux de  $\mathcal{G}$ .

2. Soit  $(\mathcal{G}, \mu)$  une algèbre de Lie. On dénote par  $Z(\mathcal{G})$  le centre de  $\mathcal{G}$ , c'est à dire l'ensemble des éléments  $x \in \mathcal{G}$  tels que  $\mu(x, y) = 0$  pour tout  $y \in \mathcal{G}$  :

$$Z(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \text{ tels que } \mu(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathcal{G}\}.$$

Alors  $Z(\mathcal{G})$  est un idéal de  $\mathcal{G}$ .

3. Soient  $(\mathcal{G}, \mu)$  une algèbre de Lie et  $\mathcal{H}$  une sous algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ . On dénote par  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$  le normalisateur de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ , c'est à dire l'ensemble des éléments  $x \in \mathcal{G}$  tels que  $\mu(x, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$  :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{G} \text{ tels que } \mu(x, \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}\}.$$

Alors  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$  est une sous algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$  contenant  $\mathcal{H}$ , et donc,  $\mathcal{H}$  est un idéal de  $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ .

Soient  $(\mathcal{G}_1, \mu_1)$  et  $(\mathcal{G}_2, \mu_2)$  deux algèbres de Lie sur le même corps commutatif  $\mathbb{K}$ , et  $u : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$  une application linéaire, on dit que  $u$  est un homomorphisme d'algèbres de Lie si elle conserve la structure d'algèbre de Lie, c'est à dire :

$$u(\mu_1(x, y)) = \mu_2(u(x), u(y)) \text{ pour tous } x, y \in \mathcal{G}_1.$$

Un homomorphisme bijectif d'algèbres de Lie sera appelé isomorphisme (d'algèbres de Lie), un homomorphisme d'algèbres de Lie, d'une algèbre de Lie dans elle même, sera appelé endomorphisme (d'algèbres de Lie), et enfin, un isomorphisme d'algèbres de Lie, d'une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{G}$ , sera appelé automorphisme (d'algèbres de Lie).

Nous admettons le résultat suivant :

**Théorème d'Ado 3.1** *Toute algèbre de Lie de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle est isomorphe à une algèbre de Lie de matrices.*

### 3.3.5 Quelques procédés de construction de variétés.

Voir exposé

## 3.4 Espace tangent. Fibré tangent

### 3.4.1 Germe d'une application

Soient  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$ , et soit  $x \in M_1$ . On désigne par  $\mathcal{C}_x(M_1, M_2)$  l'ensemble des applications  $f : U(f) \longrightarrow M_2$ , d'un voisinage ouvert  $U(f)$  de  $x$  dans  $M_1$  à valeurs dans  $M_2$ .

On dit que deux applications  $f : U(f) \longrightarrow M_2$  et  $g : U(g) \longrightarrow M_2$  de  $\mathcal{D}_x(M_1, M_2)$  ont le même germe au point  $x$ , et on écrit :

$$f \sim_x g,$$

s'il existe un voisinage ouvert  $W \subset U(f) \cap U(g)$ , tel que  $f|_W = g|_W$ . Il est clair que  $\sim_x$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{D}_x(M_1, M_2)$ . La classe d'équivalence d'une application  $f : U(f) \longrightarrow M_2$  est appelée germe de  $f$  au point  $x$  et est dénoté par  $J_x^0(f)$ .

On dénote par  $J_x^0(M_1, M_2) = \frac{\mathcal{C}_x(M_1, M_2)}{\sim_x}$  l'ensemble de tous les germes au point  $x$  d'éléments de  $\mathcal{C}_x(M_1, M_2)$ .

Lorsque  $M_2 = \mathbb{R}$ , l'ensemble quotient  $J_x^0(M_1, \mathbb{R}) = \frac{\mathcal{C}_x(M_1, \mathbb{R})}{\sim_x}$  de tous les germes au point  $x$  d'éléments de  $\mathcal{C}_x(M_1, \mathbb{R})$ , muni en plus des lois :

$$\begin{aligned} J_x^0(f) + J_x^0(g) &= J_x^0(f+g), \quad J_x^0(\lambda f) = \lambda J_x^0(f), \\ J_x^0(f) \cdot J_x^0(g) &= J_x^0(f \cdot g), \end{aligned}$$

$J_x^0(M_1, \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre.

### 3.4.2 Vecteurs tangents à une variété

Soient  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et soit  $x_0 \in M$ .

On désigne par  $\mathcal{D}_x(M, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications  $f : U(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , d'un voisinage ouvert  $U(f)$  de  $x$  dans  $M_1$  à valeurs réelles, telles que  $f$  est dérivable sur  $U(f)$ .

Une fonction  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$  est dite plate en  $x_0$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x_0$  telle que :

$$d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} = 0.$$

Cette définition est intrinsèque, en effet, si  $(V, \psi)$  est une autre carte en  $x_0$ , alors on a :

$$d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x_0)} = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} \circ d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x_0)} = 0.$$

**Remarque 3.3** Observons que pour deux éléments quelconque  $f, g \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$  tels que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . alors  $fg$  est plate en  $x_0$ , en effet,

$$\begin{aligned} d(fg \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} &= d((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x_0)} \\ &= f(x_0) d(g \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} + g(x_0) d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} = 0 \end{aligned}$$

On appelle dérivation en  $x_0$  toute application

$$X : \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$ , (Forme linéaire)
2.  $X(fg) = f(x_0) X(g) + X(f) g(x_0)$

pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ .

**Exemples 3.4** 1. Plaçons dans le cas  $M = \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  on pose

$$(x_0, u) \cdot f = df_{x_0}(u).$$

Le couple  $(x_0, u)$  définit bien une dérivation en  $x_0$ .

Désignons par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on a :

$$(x_0, e_i) \cdot f = df_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} (f),$$

quelle que soit la fonction  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Ainsi, le couple  $(x_0, e_i)$  s'identifie à l'opérateur de dérivation  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0}$  :

$$(x_0, e_i) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0},$$

$(x_1, \dots, x_n)$  étant le système de coordonnées cartésiennes.

2. Pour toute carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  en  $x_0$ , on associe  $n$  dérivations en  $x_0$  en posant

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} (f) := d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

pour tout  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ . De plus on a :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} (f) = 0$$

si  $f$  est plate en  $x_0$ .

**Proposition 3.3** Pour toute dérivation  $X$  en  $x_0$  et pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ , le nombre  $X(f)$  ne dépend que du germe  $J_{x_0}^0(f)$ .

*Démonstration.* Soient  $f, g \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$  telles que  $f \sim_x g$ . Soit  $(U, \varphi)$  une carte en  $x_0$ . Il existe un voisinage ouvert  $W \subset U$ , tel que  $f|_W = g|_W$  et une fonction plateau  $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$  telle que  $\theta(x) = 1$  sur un voisinage  $V \subset W$  et  $\theta(x) = 0$  sur  $M - W$ . On a donc,

$$\begin{aligned} X(\theta f) &= X(\theta) f(x_0) + X(f) \\ X(\theta g) &= X(\theta) g(x_0) + X(g), \end{aligned}$$

comme  $\theta f = \theta g$ ,  $f(x_0) = g(x_0)$ , on déduit que  $X(f) = X(g)$ . ■

**Corollaire 3.2** Pour toute dérivation  $X$  en  $x_0$  on a :

1.  $X(\lambda) = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
2.  $X(f) = 0$  pour toute fonction constante dans un voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 3.4** Pour toute forme linéaire  $X : \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $X(fg) = f(x_0)X(g) + X(f)g(x_0)$ ,
2.  $X(f) = 0$  si  $f$  est plate en  $x_0$ .

*Démonstration.* Soient  $X$  une dérivation en  $x_0$  et soit  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ . La formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 1 de  $f \circ \varphi^{-1}$  au point  $\varphi(x_0)$  donne

$$f = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \partial_i (f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)} (x_i - x_i(x_0)) + \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i(x_0))(x_j - x_j(x_0)) g_{ij}$$

avec

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \partial_{ij}^2 (f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)+t(\varphi(x)-\varphi(x_0))} dt.$$

Si  $f$  est plate en  $x_0$ , alors  $f = f(x_0) + \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i(x_0))(x_j - x_j(x_0)) g_{ij}$ , et il résulte de la remarque 3.3, que  $X(f) = 0$ , ce qui montre l'implication (1)  $\implies$  (2).

Réciproquement, on suppose que  $X(f) = 0$  dès que  $f$  est plate en  $x_0$ . Soient donc  $f, g \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ . Puisque la fonction  $(f - f(x_0))(g - g(x_0))$  est plate en  $x_0$ , alors  $X((f - f(x_0))(g - g(x_0))) = 0$ , et comme on a :

$$\begin{aligned} fg &= (f - f(x_0) + f(x_0))(g - g(x_0) + g(x_0)) \\ &= (f - f(x_0))(g - g(x_0)) + f(x_0)(g - g(x_0)) + g(x_0)(f - f(x_0)) + f(x_0)g(x_0), \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} X(fg) &= f(x_0)X((g - g(x_0))) + X((f - f(x_0)))g(x_0) \\ &= f(x_0)X(g) + X(f)g(x_0), \end{aligned}$$

d'où (2)  $\implies$  (1), et la proposition est démontrée. ■

**Définition 3.1** On appelle vecteur tangent à la variété  $M$  au point  $x_0$ , toute forme linéaire  $X : \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant l'une des propriétés équivalentes de la proposition 3.4.



L'ensemble des vecteurs tangents à la variété  $M$  au point  $x_0$ , muni des lois

$$\begin{aligned}(X + Y)(f) &= X(f) + Y(f) \\ (\lambda X)(f) &= \lambda X(f)\end{aligned}$$

est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, noté  $T_{x_0}M$  et est appelé espace tangent à la variété  $M$  au point  $x_0$ .

Soit maintenant  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  un système de coordonnées en  $x_0$  et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x_0}$$

les vecteurs tangents associés à ce système de coordonnées locales. Montrons que ces dérivations forment une base de l'espace tangent  $T_{x_0}M$ .

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$ , la fonction

$$f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) x_i$$

est plate en  $x_0$ . donc,

$$X(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) X(x_i) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(f)$$

par conséquent on a :

$$X = \sum_{i=1}^n X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}.$$

Ce montre que les dérivations  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$  forment un système de générateurs de l'espace vectoriel  $T_{x_0}M$ .

Soient maintenant  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$  des nombres réels vérifiant :

$$\lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_0} + \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{x_0} + \dots + \lambda^n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x_0} = 0,$$

La relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(x_j) = \delta_{ij}, \text{ pour tous } i, j = 1, \dots, n$$

implique  $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$ , et par conséquent le système est libre, ce qui prouve que les dérivations associées au système de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  en  $x_0$  forment une base de  $T_{x_0}M$ , en particulier on a :  $\dim T_{x_0}M = \dim M$ .

Soient maintenant  $\psi = (y_1, \dots, y_n)$  un autre système de coordonnées locales définies sur un ouvert  $V$  de  $x_0$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{x_0}(M, \mathbb{R})$  et pour tout  $i (i = 1, \dots, n)$ , on a :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} (f) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) = d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x_0)}(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i)).$$

Et comme

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) &= (d(y_1 \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i), \dots, d(y_n \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i)) \\ &= \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(x_0) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_0) e_j, \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} (f) &= d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x_0)} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_0) e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_0) e_j d(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x_0)}(e_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_0) e_j \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{x_0} (f), \end{aligned}$$

On obtient ainsi, les lois de transformations des systèmes de coordonnées locales :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{x_0}$$

et

$$\left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{x_0} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_{x_0} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{x_0}.$$

Ainsi, si un vecteur tangent  $X \in T_{x_0}M$ , de composantes  $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $(Y^i)_{1 \leq i \leq n}$ ) par rapport à la base  $\left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} \right)_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $\left( \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{x_0} \right)_{1 \leq i \leq n}$ ), alors les familles  $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(Y^i)_{1 \leq i \leq n}$  sont liées par les relations

$$X^i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{x_0} Y^j \text{ et } Y^i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{x_0} X^j.$$

On a vu que dans le cas de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} = (x_0, e_i),$$

ainsi, l'espace tangent  $T_{x_0}\mathbb{R}^n$  coïncide avec  $\{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ , évidemment,  $T_{x_0}\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure d'espace vectoriel définie par :

$$(x_0, u) + (x_0, v) = (x_0, u + v) \text{ et } \lambda(x_0, u) = (x_0, \lambda u).$$

On appelle fibré tangent à  $M$ , que l'on désigne par  $TM$ , l'ensemble de tous les vecteurs tangents la variété  $M$  en ses points, c'est donc la réunion de tous les espaces tangents  $T_x M$  en ses divers points :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Ainsi, chaque élément de  $TM$ , peut être identifié à un couple  $(x, X_x)$ , où  $x \in M$  et  $X_x \in T_x M$ .

### 3.4.3 Application tangente

Soient  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$ , avec  $(k \geq 1)$  et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable sur un voisinage ouvert d'un point  $x$  de  $M_1$ . Pour toute fonction réelle  $g \in \mathcal{D}_{f(x)}(M_2, \mathbb{R})$ , la fonction  $g \circ f \in \mathcal{D}_x(M_1, \mathbb{R})$ , et si  $g$  est plate en  $y = f(x)$ , alors  $g \circ f$  est plate en  $x$ , ceci permet de définir une application de  $T_x M_1$  à valeurs dans  $T_{f(x)} M_2$ , notée par  $df_x$  :

$$df_x : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$$

telle que pour tout  $X \in T_x M_1$ ,  $df_x(X)$  est la forme linéaire sur  $\mathcal{D}_{f(x)}(M_2, \mathbb{R})$  définie par :

$$df_x(X)(g) = X(g \circ f).$$

L'application  $df_x$  est une application linéaire de  $T_x M_1$  dans  $T_{f(x)} M_2$ , appelée différentielle de  $f$  en  $x$ , ou application tangente de  $f$  en  $x$ , on la note aussi  $f_{*x}$  ou  $f_x^T$ .

Mettons maintenant en évidence la matrice de l'application linéaire  $df_x$  dans les bases définies par des systèmes de coordonnées locales.

1. Soient  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  un système de coordonnées en  $x$  et

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x$$

les vecteurs tangents associés à ce système de coordonnées locales.

Alors pour toute fonction  $g \in \mathcal{D}_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , on a :

$$\left( d\varphi_x \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right) \right) (g) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x (g \circ \varphi) = dg_{\varphi(x)}(e_i) = (\varphi(x), e_i)(g),$$

d'où

$$d\varphi_x \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right) = (\varphi(x), e_i),$$

Ainsi, la matrice de l'application linéaire  $d\varphi_x$  dans les bases  $\left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right)_{1 \leq i \leq n}$  et  $((\varphi(x), e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est la matrice unité  $I_n$ .

2. Soient maintenant  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$ , avec ( $k \geq 1$ ) de dimensions respectives  $n$  et  $p$  et soit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable sur un voisinage ouvert d'un point  $x$ . Fixons deux cartes  $(U, \varphi)$  en  $x$  et une carte  $(V, \psi)$  en  $f(x)$  avec  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\psi = (y_1, \dots, y_p)$ . Alors on a :

$$df_x \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x (y_j) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x (y_j \circ f) = \partial_i (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} := \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x),$$

ce qui montre que la matrice de l'application linéaire  $df_x$  dans les bases

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right)_{1 \leq i \leq n} \text{ et } \left( \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(x)} \right)_{1 \leq j \leq p}$$

$$\left( \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p},$$

avec  $z_j = y_j \circ f$ .

On appelle application tangente d'une application différentiable  $f : M_1 \rightarrow M_2$ , l'application

$$Tf : TM_1 \rightarrow TM_2$$

définie par :

$$Tf(x, X) = (f(x), df_x(X)).$$

On vérifie aisément que l'on a :

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

pour tous  $f \in \mathcal{D}(M_1, M_2)$  et  $g \in \mathcal{D}(M_2, M_3)$  lorsque  $f$  et  $g$  sont composables.

Pour  $M_1 = M_2 = M$ , et  $f = id_M$ ; on a :

$$T(id_M) = id_{TM}$$

et si  $f \in Diff(M_1, M_2)$ , alors  $T(f)$  est bijective et l'on a :

$$T(f^{-1}) = (T(f))^{-1}.$$

En particulier  $df_x$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a :

$$(df_x)^{-1} = (df^{-1})_{f(x)}.$$

### 3.4.4 Vecteur tangent à une courbe

Soient  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et soit  $x_0 \in M$ .

On se propose dans ce paragraphe de mettre en évidence les liens entre les vecteurs tangents au point  $x_0 \in M$  et les vecteurs tangents à une courbe différentiable.

Soit  $\gamma \in \mathcal{D}_{t_0}(\mathbb{R}, M)$  une courbe différentiable sur  $M$  telle que  $\gamma(t_0) = x_0$ .

On appelle vecteur tangent à la courbe  $\gamma$ , que l'on note  $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}$ , la forme linéaire

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0} : \mathcal{D}_{\gamma(t_0)}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0).$$

Il est clair que  $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}$  définit un vecteur tangent à la variété  $M$  en  $x_0$ .

Réciproquement, soit  $X \in T_{x_0}M$ .

Dans une carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  en  $x_0$ , le vecteur  $X$  s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varphi(x_0) + td\varphi_{x_0}(X) \in \varphi(U)$  dès que  $|t| < \varepsilon$ , et soit

$$\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + td\varphi_{x_0}(X)).$$

Il est clair que

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = X,$$

### 3.4.5 Application cotangente

L'espace dual  $T_x^*M$  de  $T_xM$  est appelé espace cotangent à la variété  $M$  en  $x$ , on définit de même, le fibré cotangent à  $M$ , que l'on désigne par  $T^*M$ , la réunion de tous les espaces  $T_x^*M = (T_xM)^*$  en ses divers points :

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M.$$

Ainsi, chaque élément de  $T^*M$ , peut être identifié à un couple  $(x, \omega_x)$ , où  $x \in M$  et  $\omega_x \in T_x^*M$ .

Dans les hypothèses et notations ci dessus, considérons un système de coordonnées locales  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  en  $x_0$  et

$$dx_1(x_0), \dots, dx_n(x_0)$$

les différentielles des composantes  $x_i$  de la carte  $\varphi$  au point  $x_0$ .

Évidemment,  $dx_1(x_0), \dots, dx_n(x_0) \in T_{x_0}^*M$  et on vérifie aisément qu'on a :

$$\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{x_0}, dx_i(x_0) \right\rangle = \delta_{ij},$$

ainsi,  $dx_1(x_0), \dots, dx_n(x_0)$  est la base duale de  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{x_0}, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{x_0}$ .

Soient maintenant  $\psi = (y_1, \dots, y_n)$  un autre système de coordonnées locales définies sur un ouvert  $V$  de  $x_0$ . On vérifie facilement que les covecteurs  $dy_1(x_0), \dots, dy_n(x_0)$  et  $dx_1(x_0), \dots, dx_n(x_0)$  sont liés par,

$$dy_i(x_0) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{x_0} dx_j(x_0)$$

et

$$dx_i(x_0) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{x_0} dy_j(x_0).$$

Ce qui donne les lois de transformations des covecteurs suivantes, soit

$$\alpha_{x_0} = \sum_{i=1}^n a_i dx_i(x_0) = \sum_{i=1}^n b_i dy_i(x_0)$$

l'écriture du covecteur  $\alpha_{x_0}$  dans les bases  $dx_1(x_0), \dots, dx_n(x_0)$  et  $dy_1(x_0), \dots, dy_n(x_0)$  de l'espace  $T_{x_0}^*M$  des corepères en  $x_0$ , alors les composantes  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont liées par :

$$b_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_{x_0} a_j$$

et

$$a_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} b_j.$$

Soient maintenant  $(M_1, \mathfrak{A}_1)$  et  $(M_2, \mathfrak{A}_2)$  deux variétés différentiables de classe  $C^k$ , avec  $(k \geq 1)$  et  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  une application différentiable sur

un voisinage ouvert d'un point  $x_0$  de  $M_1$ . On appelle application cotangente de  $f$  en  $x_0$  de  $M_1$ , qu'on dénote par  $f_{x_0}^*$ , la transposée de l'application linéaire

$$df_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow T_{f(x_0)}M,$$

telle que pour tout  $X \in T_{x_0}M_1$ ,  $df_{x_0}(X)$  est la forme linéaire

$$df_{x_0}(X) : \mathcal{D}_{f(x_0)}(M_2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \longmapsto df_{x_0}(X)(g) = X(g \circ f),$$

ainsi, l'application cotangente de  $f$  en un point  $x_0$  est l'application

$$T_{x_0}^*M_1 \xleftarrow{f_{x_0}^* = {}^t(df_{x_0})} T_{y_0=f(x_0)}^*M_2$$

définie par :

$$f_{x_0}^*(\omega_{y_0}) = {}^t(df_{x_0})(\omega_{y_0}) = \omega_{y_0} \circ df_{x_0}.$$

Les applications cotangente vérifient la relation de composition qui est la suivante : étant données trois variétés différentiables  $M_1, M_2$  et  $M_3$  de classe  $C^k$ , avec ( $k \geq 1$ ) et

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

deux applications différentiables sur des voisinages ouverts des point  $x_0$  de  $M_1$  et  $y_0 = f(x_0)$  respectivement. Les applications cotangentes de  $f$  et  $g$  aux points  $x_0$  et  $y_0$  :

$$T_{x_0}^*M_1 \xleftarrow{f_{x_0}^*} T_{y_0}^*M_2 \xleftarrow{g_{y_0}^*} T_{z_0}^*M_3,$$

avec  $y_0 = f(x_0)$  et  $z_0 = g(y_0)$ , satisfont la relation :

$$(g \circ f)_{x_0}^* = f_{x_0}^* \circ g_{y_0}^*.$$

L'application cotangente de l'application identité  $id_M : M \longrightarrow M$ , d'une variété différentiable  $M$  satisfait à

$$id_M^* = id_{T^*M}.$$

Lorsque  $f \in Diff(M_1, M_2)$ , alors, pour tout  $x_0 \in M_1$ , l'application cotangente

$$T_{x_0}^*M_1 \xleftarrow{f_{x_0}^*} T_{y_0}^*M_2$$

est un isomorphisme et l'on a :

$$(f_{x_0}^*)^{-1} = (f^{-1})_{y_0}^*.$$

Au niveau d'une carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  en un point  $x_0$  d'une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ , on a évidemment les applications linéaires suivantes :

$$d\varphi_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow T_{\varphi(x_0)}\mathbb{R}^n = \{\varphi(x_0)\} \times \mathbb{R}^n$$

et

$$T_{x_0}^*M \xleftarrow{\varphi_{x_0}^*} T_{\varphi(x_0)}^*\mathbb{R}^n = \{\varphi(x_0)\} \times (\mathbb{R}^n)^*.$$

On désigne par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et par  $(e^i)_{1 \leq i \leq n}$  sa base duale. On vérifie aisément qu'on a la relation :

$$\varphi_{x_0}^* ((\varphi(x_0), e^i)) = dx_i(x_0)$$

qui est duale de

$$d\varphi_{x_0} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x_0} \right) = (\varphi(x_0), e_i),$$

### 3.4.6 Fibré tangent et fibré cotangent

#### Structures différentielles de $TM$ et de $T^*M$

Soient  $(M, \mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ .

Rappelons que le fibré tangent à  $M$ , est la réunion de tous les espaces tangents  $T_x M$  en ses divers points :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M = \{(x, X_x) \mid x \in M \text{ et } X_x \in T_x M\}.$$

On désigne par  $\pi : TM \longrightarrow M$  la projection canonique :

$$\pi(x, X_x) = x.$$

Pour toute carte  $(U_i, \varphi_i) \in \mathfrak{A}$ , on pose

$$\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i) = \{(x, X_x) \in TM \mid \pi(x, X_x) = x \in U_i\}$$

et, soit  $\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ , définie par :

$$\tilde{\varphi}_i(x, X_x) = (\varphi_i(x), d(\varphi_i)_x(X_x)),$$

ici

$$d(\varphi_i)_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Vérifions que  $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$  est un atlas de classe  $C^{k-1}$ . En effet, on a :



1. les applications  $\tilde{\varphi}_i$  sont des bijections, la bijection réciproque de  $\tilde{\varphi}_i$  est donnée par :

$$\tilde{\varphi}_i^{-1}(y, v) = \left( \varphi_i^{-1}(y), [d(\varphi_i)_x]^{-1}(v) \right)$$

2.  $\bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i = TM$

3.  $(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(y, v) = \left( (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_y v \right)$

On voit donc bien que la famille

$$\left( \tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i \right)_{i \in I}$$

est un atlas de classe  $C^{k-1}$  qui confère au fibré tangent  $TM$  une structure de variété différentiable de dimension  $2n$  et de classe  $C^{k-1}$ .

En posant

$$g_{ij}(x) = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)},$$

on vérifie les relations suivantes :

1.  $g_{ii} = id_{\mathbb{R}^n}$ .
2.  $g_{ij}$  est une application différentiable de classe  $C^k$  de  $U_i \cap U_j$  à valeurs dans le groupe linéaire  $Gl(n, \mathbb{R})$ .
3.  $g_{ij}(x) g_{jl}(x) = g_{il}(x)$  pour tous  $i, j, l \in I$  et  $x \in U_i \cap U_j \cap U_l$ .

Ainsi, les applications  $g_{ij}$  définissent un cocycle différentiable sur  $M$  à valeurs dans le groupe linéaire  $Gl(n, \mathbb{R})$  subordonné au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ .

On opère de la même manière pour définir la structure canonique de variété différentiable sur le fibré cotangent

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \omega_x) \mid x \in M \text{ et } \omega_x \in T_x^*M\}$$

On désigne par  $\pi : T^*M \longrightarrow M$  la projection canonique :

$$\pi(x, \omega_x) = x.$$

Pour toute carte  $(U_i, \varphi_i) \in \mathfrak{A}$ , on note par  $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$  et par  $\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ , l'application définie par :

$$\tilde{\varphi}_i(x, \omega_x) = \left( \varphi_i(x), (\varphi_i^{-1})^*(\omega_x) \right),$$

or  $(\varphi_i^{-1})^*(\omega_x) = \omega_x \circ d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} = \omega_x \circ [d\varphi_i(x)]^{-1}$  :

$$T_{\varphi_i(x)}^* \mathbb{R}^n \xleftarrow{(\varphi_i^{-1})^*} T_x^* M,$$

et donc, en notant  $\varphi_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ ,  $\omega_x = a_1 dx_{i1}(x) + \dots + a_n dx_{in}(x)$  on a pour tout  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) :

$$\left\langle e_j, (\varphi_i^{-1})^*(\omega_x) \right\rangle = \left\langle d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(e_j), \omega_x \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_x, \omega_x \right\rangle = a_j,$$

on peut donc écrire

$$\tilde{\varphi}_i(x, a_1 dx_{i1}(x) + \dots + a_n dx_{in}(x)) = (\varphi_i(x), a_1, \dots, a_n).$$

On vérifie aisément que la famille  $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$  définit un atlas de classe  $C^{k-1}$  qui confère au fibré tangent  $TM$  une structure de variété différentiable de dimension  $2n$  et de classe  $C^{k-1}$

### Champs de vecteurs et formes de Pfaff

Soit  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). On appelle champ de vecteurs sur  $M$ , toute application

$$X : M \longrightarrow TM, \quad x \longmapsto X_x$$

telle que

$$\pi \circ X = id_M,$$

$\pi$  étant la projection canonique  $\pi : TM \longrightarrow M$ ,  $(x, v) \longmapsto x$ . Autrement dit, pour tout  $x \in M$ ,  $X_x \in T_x M$ .

On dénote par  $\Gamma(TM)$  (où  $\mathfrak{X}(M)$ ) l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$ . Muni des opérations :

$$\begin{aligned} (X + Y)(x) &= X(x) + Y(x) \\ (fX)(x) &= f(x)X(x), \end{aligned}$$

$\Gamma(TM)$  des champs de vecteurs sur  $M$  est un  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$ -module, où  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$  est l'anneau des applications  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

Un champ de vecteurs  $X$  est dit différentiable (resp. de classe  $C^l$  avec  $l \leq k$ ), si  $X$  est différentiable (resp. de classe  $C^l$ ) en tant qu'application de la variété différentiable  $M$  dans la variété différentiable  $TM$ .

À toute carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  est associé  $n$  champs de vecteurs sur  $U$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

et tout champ de vecteurs  $X$  sur l'ouvert  $U$  s'écrit sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec  $f^1, \dots, f^n \in \mathfrak{F}(U, \mathbb{R})$ . Il est donc clair que  $\Gamma(TU)$  est un  $\mathfrak{F}(U, \mathbb{R})$ -module libre de rang  $n$ .

On voit clairement, qu'un champ de vecteurs  $X$  est différentiable (resp. de classe  $C^l$  avec  $l \leq k$ ), si, par rapport à une carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ , les composantes  $f^i$  le sont.

**Convention :** Désormais, sauf mention expresse du contraire, toutes les variétés différentiables seront supposées différentiables de classe  $C^\infty$ , et les applications différentiables seront supposées différentiables de classe  $C^\infty$ , les champs de vecteurs sur  $M$  seront supposés de classe  $C^\infty$ , ceci afin de ne pas nous éloigner de notre but. On dénote par  $\mathfrak{F}(M)$  l'anneau des  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  des applications différentiables de classe  $C^\infty$  sur  $M$  à valeurs réelles.

Pour tout champ de vecteurs différentiable  $X$  sur  $M$ , on associe l'application de  $\mathfrak{F}(M)$  dans lui-même, notée également  $X$ , et définie par :

$$X(f)(x) = X_x(f)$$

pour tous  $x \in M$  et  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ,  $\mathfrak{F}(M)$  étant l'algèbre des applications  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  différentiables (de classe  $C^\infty$  sur  $M$ ).

Cette application  $X$  est une dérivation de  $\mathfrak{F}(M)$ , c'est dire,  $X$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $X$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire,
2.  $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ , pour tous  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ .

Réciproquement, une dérivation de  $\mathfrak{F}(M)$  définit un champ de vecteurs sur  $M$ . Ainsi, un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , peut être considéré comme dérivation de  $\mathfrak{F}(M)$ .

**Définition 3.2** Une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  est dite parallélisable si le  $\mathfrak{F}(M)$ -module  $\Gamma(TM)$  des champs de vecteurs sur  $M$  est libre de rang  $n$ , c'est à dire, il existe  $n$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM)$ , indépendants en tout point de  $M$ , tels que tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$  s'écrit sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^n f^i X_i$$

avec  $f^1, \dots, f^n \in \mathfrak{F}(M)$ .

**Exemples 3.5** 1.  $\mathbb{R}^n$  est parallélisable.

2. Tout groupe de Lie est parallélisable (voir plus loin).

3. Les sphères  $S^1$ ,  $S^3$  et  $S^7$  sont les seules sphères parallélisables (voir [?]).

Pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$ , on vérifie que l'application

$$f \in \mathfrak{F}(M) \longmapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \in \mathfrak{F}(M),$$

est une dérivation. Le champ de vecteurs ainsi défini est appelé crochet de Lie de  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et est désigné par  $[X, Y]$  :

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

**Remarques 3.2** Soit  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  une carte de  $M$  et soient

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

les  $n$  champs de vecteurs locaux sur  $U$  associés à ce système de coordonnées locales. Alors

1. Pour tous  $i, j = 1, \dots, n$ , on a :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$$

En effet, pour toute application différentiable  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ , on a :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right](f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f = 0$$

d'après le lemme de Schwartz.

2. Soient

$$X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TU),$$

alors le crochet  $[X, Y]$  s'écrit :

$$[X, Y] = \left( f^i \frac{\partial g^j}{\partial x_i} - g^i \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

**Proposition 3.5** *On a :*

1.  $[X, X] = 0$  pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ ,
2.  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  pour tous  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$   
(Identité de Jacobi).

Ainsi,  $\Gamma(TM)$  est une algèbre de Lie réelle.

On appelle forme de Pfaff sur  $M$ , toute application différentiable

$$\alpha : M \longrightarrow T^*M, \quad x \longmapsto \alpha_x$$

telle que

$$\pi \circ \alpha = id_M,$$

$\pi$  étant la projection canonique  $\pi : T^*M \longrightarrow M$ . Autrement dit, pour tout  $x \in M$ ,  $\alpha_x \in T_x^*M$ .

On dénote par  $\Gamma(T^*M)$  (où  $\Lambda_1(M)$  ou  $\Lambda^1(T^*M)$ ) l'ensemble des formes de Pfaff sur  $M$ . Muni des opérations :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)_x &= \alpha_x + \beta_x \\ (f\alpha)_x &= f(x)\alpha_x, \end{aligned}$$

$\Lambda_1(M)$  des formes de Pfaff sur  $M$  est un  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$ -module, où  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$  est l'anneau des applications différentiables  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

À toute carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  est associé  $n$  formes de Pfaff sur  $U$

$$dx_1, \dots, dx_n,$$

et toute forme de Pfaff  $\alpha$  sur l'ouvert  $U$  s'écrit sous la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

avec  $f^1, \dots, f^n \in \mathfrak{F}(U)$ . Il est donc clair que  $\Gamma(T^*U)$  est un  $\mathfrak{F}(U)$ -module libre de rang  $n$ .

Notons enfin le couplage suivant

$$\mathfrak{X}(M) \times \bigwedge_1(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

telle que pour tous  $X \in \mathfrak{X}(M)$  et  $\omega \in \bigwedge_1(M)$ ,  $\langle X, \omega \rangle$  est la fonction :

$$\langle X, \omega \rangle : x \longmapsto \langle X_x, \omega_x \rangle.$$

### Groupe à un paramètre

Soit  $(M, \mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I})$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

**Définition 3.3** On appelle groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ , une application différentiable

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application  $\varphi_t$  définie par :

$$\varphi_t : x \longmapsto \varphi(t, x)$$

est un difféomorphisme de la variété  $M$ ,

2. l'application

$$t \longmapsto \varphi_t$$

définit un homomorphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\text{Diff}(M), \circ)$ ,  $\text{Diff}(M)$  étant l'ensemble des difféomorphismes de la variété  $M$ .

Donc si  $\varphi$  est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ , alors pour tous  $t, t' \in \mathbb{R}$  on a :

1.  $\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}$
2.  $\varphi_0 = id_M$ ,
3.  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ .

**Exemples 3.6** 1. *Considérons un champ de vecteurs linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  :*

$$X(x) = Ax,$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels. Pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , l'application définie par :

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(x) = \exp(tA)x = \left(1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots\right)x.$$

est un groupe à un paramètre de l'espace  $\mathbb{R}^n$ ; ceci découle des propriétés de l'exponentielle d'une matrice.

2. Soit  $M$  la sphère  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . L'application  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  définie par :

$$\varphi(t, (x, y, z)) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z \end{pmatrix}$$

est un groupe à paramètre de difféomorphisme de la sphère  $S^2$ .

3. Soient  $M = \mathbb{R}^2$  et  $\varphi$  l'application L'application  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  définie par :

$$\varphi(t, (x, y)) = (t + x, y)$$

est un groupe à un paramètre de difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

### Intégration d'un champ de vecteurs

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ . On appelle flot local de  $X$  en un point  $x_0$  de  $M$ , la donnée d'un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0, d'un ouvert  $U'$  de  $M$  et d'une application

$$\begin{aligned} \varphi : J \times U' &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \varphi(t, x) \end{aligned}$$

telle que pour tout  $x \in U'$  on ait :

$$\frac{d(\varphi_t(x))}{dt} \Big|_{t=0} = X(x)$$

avec  $\varphi(0, x) = x$ .

Soit  $\varphi$  un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ . On appelle orbite de  $x$ , l'ensemble

$$\{\varphi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit  $\varphi$  un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose

$$X(x) = \frac{d(\varphi_t(x))}{dt} \Big|_{t=0},$$

donc  $X(x)$  est le vecteur tangent à la courbe

$$t \longmapsto \varphi(t, x)$$

au point 0. Ceci nous permet de définir un champ de vecteurs

$$X : x \longmapsto \frac{d(\varphi_t(x))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\frac{d(\varphi_s(x))}{ds} \Big|_{s=t_0} = \frac{d(\varphi_{t_0+t}(x))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi_t(\varphi_{t_0}(x)))}{dt} \Big|_{t=0} = X(\varphi_{t_0}(x)),$$

par suite,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{t_0})_x(X_x) &= d(\varphi_{t_0})_x \left( \frac{d(\varphi_t(x))}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d(\varphi_{t_0}(\varphi_t(x)))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi_{t_0+t}(x))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d(\varphi_t(\varphi_{t_0}(x)))}{dt} \Big|_{t=0} = X(\varphi_{t_0}(x)); \end{aligned}$$

$X$  est appelé champ de vecteurs engendré par le groupe à un paramètre  $\varphi$ .

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . On appelle courbe intégrale (ou trajectoire) de  $X$ , une courbe différentiable  $\gamma$  d'une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $M$  telle que

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

pour tout  $t \in I$ .

Étant donné une trajectoire  $\gamma : I \longrightarrow M$  de  $X$  telle que  $\gamma(I)$  soit contenu dans le domaine  $U$  d'une carte  $(x_1, \dots, x_n)$ . On a donc

$$\gamma'(t)(x_i) = X^i(\gamma(t)) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

où

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$



soit,

$$\begin{aligned} \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(t) &= X^i(\gamma(t)) \\ &= (X^i \circ \varphi^{-1})((x_1 \circ \gamma)(t), \dots, (x_n \circ \gamma)(t)), \end{aligned}$$

qu'on écrit tout simplement

$$\frac{dx_i}{dt} = X^i((x_1 \circ \gamma)(t), \dots, (x_n \circ \gamma)(t)),$$

ceci montre que  $\gamma$  est solution du système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X^1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = X^n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Puisque  $X$  est de classe  $C^\infty$ , le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle, affirme que pour tout  $x \in M$ , pour toute carte  $(U, x_1, \dots, x_n)$  en  $x$ , il existe  $\varepsilon > 0$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  et une application différentiable

$$\phi : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times V \longrightarrow U$$

telle que pour tout  $x \in V$  et pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on ait :

$$\phi(0, x) = x$$

et

$$\frac{d(x_i(\phi(t, x)))}{dt} = X^i(\phi(t, x))$$

Soient  $s, t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  tels que  $|s + t| < \varepsilon$  et  $x \in V$ , on a :

$$\frac{d(\phi_{s+t}(x))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\phi_u(x))}{du} \Big|_{u=s} = X_{\phi(s, x)}.$$

L'unicité de la solution donne

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t.$$

De même on a :

1.  $\phi_0 = id_M$ ,
2.  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .

Soit  $X$  un champ de vecteurs différentiable sur  $M$ . Pour tout  $x \in M$ , on désigne par  $J(x)$  le plus grand intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  sur lequel est défini la courbe intégrale  $u_x$  satisfaisant à  $u_x(0) = x$ .

Posons

$$\mathfrak{D}(X) = \bigcup_{x \in M} (J(x) \times \{x\}).$$

L'application

$$\beta : \mathfrak{D}(X) \longrightarrow M$$

définie par :

$$\beta(t, x) = u_x(t)$$

où  $u_x : J(x) \longrightarrow M$  est la courbe intégrale maximale de  $X$  de condition initiale  $x$ . L'application  $\beta$  est appelée *flot global* de  $X$  et  $\mathfrak{D}(X)$  est appelé *domaine de définition* de ce champ de vecteurs.

**Définition 3.4** *Un champ de vecteurs  $X$  est dit complet s'il est engendré par un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $E$ , c'est-à-dire l'application  $\phi$  est définie sur  $\mathbb{R} \times M$ .*

**Proposition 3.6** *Si  $M$  est une variété différentiable compacte, alors tout champ de vecteurs sur  $M$  est complet.*

*Démonstration.* Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Puisque  $M$  est compacte, il existe un recouvrement ouvert fini  $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$  de  $M$ , un réel  $\varepsilon > 0$  et des applications

$$\varphi^i : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times U_i \longrightarrow M \quad (i = 1, \dots, p)$$

de classe  $C^\infty$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.  $\frac{d(\varphi_t^i(x))}{dt} \Big|_{t=0} = X_x$  pour tous  $i (i = 1, \dots, p)$  et  $x \in U_i$ ,
2.  $\varphi_{s+t}^i = \varphi_s^i \circ \varphi_t^i$  pour tous  $|s|, |t| < \varepsilon$  avec  $|s+t| < \varepsilon$ ,
3.  $\varphi_0^i = id_{U_i}$ ,  $(\varphi_t^i)^{-1} = \varphi_{-t}^i$  pour tous  $i (i = 1, \dots, p)$  et  $|t| < \varepsilon$ .

Ces relations nous permettent de définir une famille  $(\varphi_t)_{|t| < \varepsilon}$  de difféomorphismes de  $M$  telle que

$$\forall i (i = 1, \dots, p), \quad \forall |t| < \varepsilon, \quad \varphi_t|_{U_i} = \varphi_t^i.$$

La famille  $(\varphi_t)_{|t|<\varepsilon}$  satisfait aux propriétés ci-dessus.

Soit  $t$  un nombre réel quelconque. Pour tout entier naturel  $m$  tel que  $|\frac{t}{m}| < \varepsilon$ , on pose

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{t}{m}} \circ \dots \circ \varphi_{\frac{t}{m}} = \left(\varphi_{\frac{t}{m}}\right)^m. \quad (3.2)$$

Le difféomorphisme  $\varphi_t$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Il reste à montrer que la définition (3.2) est indépendante de l'entier  $m$ . Considérons tout d'abord un entier  $m' = km$  avec  $k \geq 1$ . On a

$$\frac{t}{m} = k \frac{t}{m'}$$

et, donc,

$$\left(\varphi_{\frac{t}{m}}\right)^m = \left(\varphi_{k\frac{t}{m'}}\right)^m = \left(\varphi_{\frac{t}{m'}}\right)^{km} = \left(\varphi_{\frac{t}{m'}}\right)^{m'}$$

Pour  $m'$  quelconque satisfaisant à  $|\frac{t}{m'}| < \varepsilon$ , on a

$$\left(\varphi_{\frac{t}{mm'}}\right)^{mm'} = \left(\varphi_{\frac{t}{m'}}\right)^{m'} = \left(\varphi_{\frac{t}{m}}\right)^m,$$

donc  $\left(\varphi_{\frac{t}{m}}\right)^m$  ne dépend pas de l'entier naturel  $m$  tel que  $|\frac{t}{m}| < \varepsilon$ , par suite la famille  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  définit un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$  engendrant le champ de vecteurs  $X$ , ce champ de vecteurs est donc complet. ■

### Intégrales premières

Soient  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  et  $X$  un champ de vecteurs de sur  $M$ .

On appelle intégrale première du champ de vecteurs  $X$ , toute application différentiable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$X(f) = 0.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est une intégrale première de  $X$ ,
2.  $f$  est constante sur les courbes intégrales de  $X$ .

En effet, soit  $t \mapsto \gamma(t)$  une courbe intégrale de  $X$  définie sur un intervalle ouvert  $I$ . On a :

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = f'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = f'(\gamma(t))(X(\gamma(t))) = X(f)(\gamma(t)),$$

ce qui montre que (1) et (2) sont équivalentes.

**Proposition 3.7** Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . On a :

1. Pour tout  $x \in M$  tel que  $X_x \neq 0$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x$  et  $n-1$  intégrales premières  $f_1, \dots, f_{n-1}$  de  $X$  indépendantes en tout point de  $U$ .
2. Pour toutes intégrales premières  $f_1, \dots, f_{n-1}$  de  $X$ , indépendantes en tout point de  $U$ , et pour toute application  $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , la fonction  $\Phi(f_1, \dots, f_{n-1})$  est une intégrale première de  $X$ . et inversement toute intégrale première s'écrit sous la forme

$$\Phi(f_1, \dots, f_{n-1}).$$

**Démonstration.** Le problème étant local, on peut supposer dans la démonstration que  $M = \mathbb{R}^n$  et que  $X(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0 = e_1$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  est le système de coordonnées cartésiennes de  $\mathbb{R}^n$ . Soit

$$\phi(t, x_1, \dots, x_n) = (\phi^1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \phi^n(t, x_1, \dots, x_n))$$

le flot local de  $X$  au point  $x$ . On peut toujours supposer que  $\phi_t : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi(t, x_1, \dots, x_n)$  est définie sur la variété différentiable  $M$ . Soit  $\psi$  l'application différentiable définie sur  $M$  par :

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, 0, \dots, x_n) = (\phi^1(x_1, 0, \dots, x_n), \dots, \phi^n(x_1, 0, \dots, x_n))$$

Puisque  $X(0) = e_1$ , la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial \psi^i}{\partial x_j}(0)\right)$$

est la matrice identité. L'application  $\psi$  possède une application inverse  $\sigma$  définie sur un voisinage ouvert  $U$  de 0 notée

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

définissant ainsi, un système de coordonnées locales

$$y_i = \sigma_i(x_1, \dots, x_n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(t, x_1, \dots, x_n)) &= \sigma(\phi(t, \psi(y_1, \dots, y_n))) \\ &= \sigma(\phi(t, \phi(y_1, 0, y_2, \dots, y_n))) \\ &= \sigma(\phi(t + y_1, 0, y_2, \dots, y_n)) \\ &= \sigma(\psi(t + y_1, y_2, \dots, y_n)) \\ &= (t + y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce système de coordonnées locales, les courbes intégrales de  $X$  sont les courbes :

$$t \longmapsto (t + y_1, y_2, \dots, y_n),$$

et par conséquent le champ de vecteurs coïncide avec la dérivation par rapport à  $y^1$  en chaque point de  $U$  :

$$X(x) = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_x \text{ pour tout } x \in U.$$

Posons

$$f_1 = y_2, \dots, f_i = y_{i+1}, \dots, f_{n-1} = y_n.$$

On a donc

$$X(f_i) = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} = \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_1} = \delta_1^{i+1} = 0,$$

par suite  $f_1, \dots, f_i, \dots, f_{n-1}$  sont des intégrales premières de  $X$  qui sont indépendantes, car  $y_1, \dots, y_n$  est un système de coordonnées locales sur  $M$ .

Soit  $\Phi$  une intégrale première de  $X$ . On a alors

$$X(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0,$$

donc  $\Phi$  est indépendante de  $y_1$ , par suite  $\Phi$  ne dépend que de  $y_2 = f_1, \dots, y_n = f_{n-1}$ . ■

Nous avons démontré en particulier le résultat suivant :

**Théorème 3.2 (de redressement d'un champ de vecteurs).** Soient  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  et  $u \in M$  tel que  $X_u \neq 0$ . Alors il existe une carte  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  autour de  $x$  tel que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

### 3.4.7 Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs

Soit  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Considérons un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  et un flot local  $(\varphi_t)_{|t| < \varepsilon}$  de  $X$  défini sur un voisinage ouvert  $U$  d'un point  $x \in M$  et soit  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  un champ de vecteurs sur  $M$ .

Pour tout  $|t| < \varepsilon$ , on a

$$\Delta Y_t = d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} Y_{\varphi_t(x)} - Y_x \in T_x M$$

$$(L_X Y)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta Y_t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} Y_{\varphi_t(x)} - Y_x}{t} = \frac{d}{dt} \left( d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} Y_{\varphi_t(x)} \right)_{t=0} \in T_x M.$$

L'application

$$x \longmapsto (L_X Y)_x$$

permet de définir un champ de vecteurs sur  $M$ , appelé dérivée de Lie de  $Y$  par rapport à  $X$ . On les propriétés suivantes :

**Proposition 3.8** *Pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  et  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , on a :*

1.  $L_X(Y + Z) = L_X Y + L_X Z$ ,
2.  $L_X(fY) = fL_X(Y) + X(f)Y$

*Démonstration.* Montrons la seconde assertion.

Soient  $x \in M$  et  $(\varphi_t)_{|t| < \varepsilon}$  un flot local de  $X$  défini sur un voisinage ouvert  $U$  de  $x \in M$ . On a :

$$\begin{aligned} (L_X(fY))_x &= \frac{d}{dt} \left( d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) f(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)} \right)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( f(\varphi_t(x)) d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)} \right)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( f(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \left( d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)} \right)_{t=0} \\ &\quad + \left( f(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \frac{d}{dt} \left( d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)} \right)_{t=0} \\ &= df_x \left( \frac{d}{dt}(\varphi_t(x))_{t=0} \right) Y_x + f(x) (L_X Y)_x \\ &= df_x(X_x) Y_x + f(x) (L_X Y)_x = X_x(f) Y_x + f(x) (L_X Y)_x, \end{aligned}$$

d'où  $L_X(fY) = fL_X(Y) + X(f)Y$ . ■

Dans les notations ci-dessus, on appelle dérivée de Lie de la fonction  $f$  suivant le champ de vecteurs  $X$ , qu'on note  $L_X f$  la fonction :

$$x \longmapsto (L_X f)(x) = \frac{d}{dt} \left( (\varphi_t)_x^* f \right)_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( f(\varphi_t(x)) \right)_{t=0}.$$

Les calculs qui précèdent montrent que

$$L_X f = X(f).$$

Plaçons nous sur le domaine  $U$  d'un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ . On a

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et écrivons :

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La relation  $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$  donne

$$\sum_j \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x_k}(x) = \delta_k^i,$$

et, donc,

$$\sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \frac{\partial \varphi_0^j}{\partial x_k}(x) + \sum_j \frac{\partial \varphi_0^i}{\partial x_j}(x) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x_k}(x) \right)_{t=0} = 0,$$

soit,

$$\sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \delta_k^j + \sum_j \delta_j^i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x_k}(x) \right)_{t=0} = 0,$$

par suite,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x_k}(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial x_k}(x) \right)_{t=0}.$$

Calculons maintenant  $L_X \frac{\partial}{\partial x_i}$ . On a :

$$d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi_t(x)} = \sum_j \frac{\partial \varphi_{-t}^j}{\partial x_i}(\varphi_t(x)) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\varphi_t(x)},$$

donc,

$$\begin{aligned} \left( L_X \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x &= \lim_0 \frac{1}{t} \left( d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi_t(x)} - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right) = \sum_j \lim_0 \frac{1}{t} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^j}{\partial x_i}(\varphi_t(x)) - \delta_i^j \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\varphi_t(x)} \\ &= \sum_j \lim_0 \frac{1}{t} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^j}{\partial x_i}(\varphi_t(x)) - \frac{\partial \varphi_0^j}{\partial x_i}(x) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\varphi_t(x)} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_{-t}^j}{\partial x_i}(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x \\ &= - \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_t^j}{\partial x_i}(x) \right)_{t=0} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left( \varphi_t^j(x) \right)_{t=0} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x = - \sum_j \left( \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x, \end{aligned}$$

On déduit donc,

$$\begin{aligned} L_X Y &= \sum_i L_X Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i Y^i L_X \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= - \sum_i \sum_j Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_i \sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} = [X, Y], \end{aligned}$$

par conséquent,

$$L_X Y = -L_Y X = [X, Y].$$

### 3.4.8 Image d'un champ de vecteurs par un morphisme

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés différentiables et  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  un morphisme de variétés différentiables de  $M_1$  dans  $M_2$ .

Étant donné un champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM_1)$ , on sait que pour tout  $x \in M_1$ , on a :

$$f_{*x} X_x = df_x(X_x) \in T_{f(x)} M_2,$$

Posons nous la question suivante : peut on définir un champ de vecteurs  $f_* X$  sur  $M_2$ , ou plutôt sur l'image  $N = f(M_1)$  de  $M_2$  par :

$$(f_* X)_y = df_x(X_x), \text{ si } y = f(x)?$$

Évidemment, la réponse n'est pas toujours positive, cependant, si pour tout  $y \in M_2$  et pour tous  $x, x' \in M_1$  tels que  $y = f(x) = f(x')$ , on a

$$df_{x'}(X_{x'}) = df_x(X_x),$$

alors, on peut définir un champ de vecteurs  $f_* X$  sur  $M_2$  par :

$$(f_* X)_y = df_x(X_x), \text{ pour tout } y \in M_2 \text{ et } x \in M_1 \text{ vérifiant } y = f(x).$$

Le champ de vecteurs  $f_* X$  est dit projetable par  $f$ .

Deux champs de vecteurs  $X \in \Gamma(TM_1)$  et  $Y \in \Gamma(TM_2)$  sont dits  $f$ -reliés, ou compatibles pour  $f$ , si :

$$Y = f_* X,$$

en particulier,  $X$  est projetable par  $f$ .

Supposons que  $f$  est un difféomorphisme de  $M_1$  sur  $M_2$ , alors tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM_1)$  est projetable par  $f$ , et évidemment, les champs de vecteurs  $X$  et  $f_* X$  sont compatibles pour  $f$ .

**Proposition 3.9** Soient  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ ,  $N$  une sous variété différentielle de  $M$  de dimension  $p$  et  $i : N \longrightarrow M$  l'injection canonique. Alors pour tout  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tangent à la sous variété  $N$ , il existe un champs de vecteurs  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$  tel que

$$i_* \tilde{X} = X \circ i.$$



**Démonstration.** L'injection canonique  $i$  est une immersion, donc pour tout  $u \in N$ , il existe un unique vecteur  $\tilde{X}_u \in T_u N$  tel que

$$di_u \tilde{X}_u = X_u.$$

Il reste à vérifier que l'application  $u \mapsto \tilde{X}_u$  est différentiable.

Soient donc  $u \in N$ ,  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$  un système de coordonnées locales de  $u$  défini sur un ouvert  $U$  de  $u$  tel que  $U \cap N$  soit défini par les équations  $y^1 = c^1, \dots, y^{n-p} = c^{n-p}$  (constantes).

Par rapport à ce système de coordonnées locales, le champ de vecteurs  $X$  s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^p X^i(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=p+1}^n Y^i(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p}) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

avec les  $X^i(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$  et  $Y^j(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$  sont différentiables sur  $U$ , donc

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^p \tilde{X}^i(x^1, \dots, x^p) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

avec  $\tilde{X}^i(x^1, \dots, x^p) = X^i(x^1, \dots, x^p, c^1, \dots, c^{n-p})$ , est différentiable sur  $U \cap N$ . ■

Considérons maintenant deux champs de vecteurs  $X$  et  $X'$  sur  $M_1$  et  $Y = f_* X$ ,  $Y' = f_* X'$ . Par définition on a :

$$(f_* X)(g) \circ f = X(g \circ f)$$

quel que soit  $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2, \mathbb{R})$ . De même on a :

$$\begin{aligned} [Y, Y'](g) \circ f &= Y(Y'(g)) \circ f - Y'(Y(g)) \circ f \\ &= X(Y'(g) \circ f) - X'(Y(g) \circ f) \\ &= X(X'(g \circ f)) - X'(X(g \circ f)) = [X, X'](g \circ f), \end{aligned}$$

donc pour tout  $x \in M_1$ , on a :

$$[f_* X, f_* X']_{f(x)}(g) = [X, X']_x(g \circ f) = df_x([X, X']_x(g)) = (f_* [X, X'])_{f(x)}(g),$$

comme  $x$  et  $g$  sont quelconques, on déduit la relation :

$$[f_* X, f_* X'] = f_* [X, X'].$$

Soient  $M$  une variété différentiable et  $f \in \text{Diff}(M)$  un difféomorphisme de  $M$ . Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est dit invariant par  $f$  si  $f_*X = X$ , c'est à dire, pour tout  $x \in M$ , on a :

$$(f_*X)_{f(x)} = df_x X_x = X_{f(x)}.$$

Soient  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un groupe à un paramètre et  $X$  le champ de vecteurs engendré par  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . La relation

$$[(\varphi_t)_* X]_{\varphi_t(x)} = d\varphi_t(x) X_x = X_{\varphi_t(x)}$$

montre que le champ de vecteurs  $X$  est invariant par la famille  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

Soit  $f$  un difféomorphisme de  $M$  laissant invariant  $X$ . Alors pour tout  $x \in M$ , alors

$$df_x X_x = (f_*X)_{f(x)} = X_{f(x)}, \text{ quel que soit } x \in U,$$

et, donc,

$$df_x \left( \frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right)_{t=0} = \left( \frac{d\varphi_t(f(x))}{dt} \right)_{t=0}.$$

L'unicité de la courbe intégrale de  $f_*X$ , ayant pour condition initiale  $f(x)$  pour  $t = 0$ , implique que l'on a :

$$f \circ \varphi_t = \varphi_t \circ f,$$

ainsi,  $f$  commute avec  $\varphi_t$ .

Réciproquement, on suppose que  $f$  et  $\varphi_t$  commutent, alors on a :

$$\left( \frac{d(\varphi_t(f(x)))}{dt} \right)_{t=0} = \left( \frac{d(f(\varphi_t(x)))}{dt} \right)_{t=0} = df_x \left( \frac{d(\varphi_t(x))}{dt} \right)_{t=0} = df_x X_x,$$

soit,

$$X_{f(x)} = (f_*X)_{f(x)},$$

on a donc montré que pour qu'un champ de vecteurs  $X$  soit invariant par  $f$ , il est nécessaire et suffisant que  $f$  commute avec le groupe à un paramètre du champ de vecteurs  $X$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ , et soient  $(\varphi_t)_t$  et  $(\psi_t)_t$  les flots locaux associés. alors on a :

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \implies (\varphi_{-t})_* Y = Y \implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t} = L_X Y = [X, Y] = 0.$$

Réciproquement, on suppose que pour tout  $x \in M$ , on a :

$$(L_X Y)_x = [X, Y]_x = 0.$$

Posons

$$Z_t = d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)} = ((\varphi_{-t})_* Y)_x.$$

On a :

$$\begin{aligned} Z_{t+s} &= d\varphi_{-t-s}(\varphi_{t+s}(x)) Y_{\varphi_{t+s}(x)} = d(\varphi_{-t} \circ \varphi_{-s})(\varphi_{t+s}(x)) Y_{\varphi_{t+s}(x)} \\ &= d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) (d\varphi_{-s}(\varphi_{s+t}(x)) Y_{\varphi_t(\varphi_s(x))}), \end{aligned}$$

et, donc,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Z_{t+s} - Z_t}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) (d\varphi_{-s}(\varphi_{s+t}(x)) Y_{\varphi_t(\varphi_s(x))}) - d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)}) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) \frac{(d\varphi_{-s}(\varphi_{s+t}(x)) Y_{\varphi_t(\varphi_s(x))}) - Y_{\varphi_t(x)}}{s} \\ &= d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) (L_X Y)_{\varphi_t(x)} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dZ_t}{dt} = 0,$$

par conséquent, l'application  $t \mapsto Z_t$ , d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 à valeurs dans  $T_x M$ , satisfait à  $\frac{dZ_t}{dt} = 0$ , donc  $Z$  est constante, ce qui montre que  $Z_t = Z_0$  quel que soit  $t \in I$ , par conséquent on a :

$$(d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y_{\varphi_t(x)}) = Y_x,$$

ce qui prouve que l'on a :

$$(\varphi_{-t})_* Y = Y,$$

le champ de vecteurs  $Y$  est donc invariant par le difféomorphisme  $\varphi_{-t}$ , on a donc montré la :

**Proposition 3.10** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le crochet de Lie  $[X, Y]$  est identiquement nul.*
2. *Le champ de vecteurs  $Y$  est invariant par le flot du champ de vecteurs  $X$  au voisinage de chaque point de  $M$ .*
3. *Au voisinage de chaque point de  $M$ , les flots des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  commutent.*



## Chapitre 4

# Formes différentielles

### 4.1 L'espace fibré $\Lambda^p(T^*M)$

Soient  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^\infty$ .

On dénote par  $\Lambda^p(T^*M)$ , la réunion de tous les espaces  $\Lambda^p(T_x^*M)$  des  $p$ -formes extérieures sur  $T_xM$ , en ses divers points :

$$\Lambda^p(T^*M) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p(T_x^*M).$$

L'ensemble  $\Lambda^p(T^*M)$  s'identifie à l'ensemble des couples  $(x, \omega_x)$  tels que  $x \in M$  et  $\omega_x \in \Lambda_p(T_xM) = \Lambda^p(T_x^*M)$ , c'est à dire  $\omega_x : T_xM \times \dots \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$  est une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $T_xM$ .

On désigne par  $\pi : \Lambda^p(T^*M) \longrightarrow M$  la projection canonique :

$$\pi(x, \omega_x) = x.$$

Pour toute carte  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ , on pose

$$\tilde{U} = \pi^{-1}(U) = \{(x, \omega_x) \in \Lambda^p(T^*M) \mid \pi(x, \omega_x) = x \in U\}$$

et, soit

$$\tilde{\varphi} : \tilde{U} \longrightarrow \varphi(U) \times \bigwedge_p(\mathbb{R}^n),$$

définie par :

$$\tilde{\varphi}(x, \omega_x) = \left( \varphi(x), (\varphi^{-1})_x^*(\omega_x) \right),$$

ici

$$(\varphi^{-1})_x^*(\omega_x) = \omega_x \circ d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)} \otimes \dots \otimes d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)} = \omega_x \circ [d\varphi(x)]^{-1} \otimes \dots \otimes [d\varphi(x)]^{-1}$$

est définie par :

$$(\varphi^{-1})_x^*(\omega_x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \omega_x \left( [d\varphi(x)]^{-1}(e_{i_1}), \dots, [d\varphi(x)]^{-1}(e_{i_p}) \right),$$

donc si, par rapport au système de coordonnées locales  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ , la  $p$ -forme  $\omega_x$  s'écrit

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(x),$$

alors,

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})_x^*(\omega_x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) &= \omega_x \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right) \\ &= a_{i_1 \dots i_p}, \end{aligned}$$

on peut donc voir  $\tilde{\varphi}$  comme étant

$$\tilde{\varphi} : \tilde{U} \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{C_n^p},$$

définie par :

$$\tilde{\varphi} \left( x, \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(x) \right) = \left( \varphi(x), (a_{i_1 \dots i_p}(x))_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \right),$$

Il n'est pas difficile de voir que la famille  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})_{(U, \varphi) \in \mathfrak{A}}$  est un atlas de classe  $C^\infty$  conférant à  $\Lambda^p(T^*M)$  une structure de variété différentiable de dimension  $n + C_n^p$ .

## 4.2 Formes différentielles de degré $p$

Soient  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de classe  $C^\infty$ , de dimension  $n$  et  $p$  un entier naturel  $\leq$  ou égal à  $n$ . On appelle forme différentielle de degré  $p$  sur  $M$ , (ou  $p$ -forme différentielle) toute application différentiable

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^p(T^*M), \quad x \longmapsto \omega(x) = \omega_x$$

telle que

$$\pi \circ \omega = id_M,$$

$\pi$  étant la projection canonique  $\pi : \Lambda^p(T^*M) \longrightarrow M, (x, \omega_x) \longmapsto x$ . Ainsi, pour tout  $x \in M$ ,  $\omega_x$  est une  $p$ -forme extérieure sur  $T_x M$ .

Aussitôt, on voit qu'une fonction différentiable  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  est une forme différentielle de degré 0 sur  $M$  et toute forme différentielle de degré  $p > n = \dim M$  est nulle.

On dénote par  $\Lambda_p(M)$ , ou  $\Gamma(\Lambda^p(T^*M))$  l'ensemble des  $p$ -formes différentielles sur  $M$ . Muni des opérations :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x) &= \alpha(x) + \beta(x) \\ (f\alpha)(x) &= f(x)\alpha(x), \end{aligned}$$

$\Lambda_p(M)$  est un  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$ -module, où  $\mathfrak{F}(M, \mathbb{R})$  est l'anneau des applications différentiables  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , et on voit clairement que  $\Lambda_p(M)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

À toute carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  est associé  $n$  formes de Pfaff sur  $U$

$$dx_1, \dots, dx_n,$$

tels que, pour tout point  $x$  de  $U$ , les  $p$ -formes extérieures

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})(x) := dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(x),$$

avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ , forment une base de  $\bigwedge^p(T_x^*M) = \bigwedge^p(T_x^*U)$  et toute  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  sur l'ouvert  $U$  s'écrit sous la forme : et toute  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  sur l'ouvert  $U$  s'écrit sous la forme :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

avec  $a_{i_1 \dots i_p} \in \mathfrak{F}(U)$ . Il est donc clair que  $\Lambda_p(U)$  est un  $\mathfrak{F}(U)$ -module libre de rang  $C_n^p$ .

Pour toute  $p$ -forme différentielle  $\alpha \in \bigwedge_p(M)$ , on associe une forme  $p$ -linéaire extérieure sur  $\mathfrak{X}(M)$ , notée aussi  $\tilde{\alpha}$ ,

$$\tilde{\alpha} : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

définie par

$$\tilde{\alpha}(X^1, \dots, X^p)(x) = \alpha_x(X_x^1, \dots, X_x^p),$$

pour tous  $X^1, \dots, X^p \in \mathfrak{X}(M)$  et  $x \in M$ . Et de toute évidence, elle vérifie les relations suivantes

1.  $\tilde{\alpha}(X^1, \dots, X^i + Y^i, \dots, X^p) = \tilde{\alpha}(X^1, \dots, X^i, \dots, X^p) + \tilde{\alpha}(X^1, \dots, Y^i, \dots, X^p),$
2.  $\tilde{\alpha}(X^1, \dots, fX^i, \dots, X^p) = f\tilde{\alpha}(X^1, \dots, X^i, \dots, X^p)$

pour tous  $X^1, \dots, X^i, Y^i, \dots, X^p \in \mathfrak{X}(M)$  et  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .

Ainsi  $\tilde{\alpha}$  est une  $\mathfrak{F}(M)$ -forme multilinéaire sur le  $\mathfrak{F}(M)$ -module produit  $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)$ .

**Théorème 4.1** *Dans les hypothèses et notations ci dessus, la correspondance, qui à une  $p$ -forme différentielle  $\alpha \in \Lambda_p(M)$ , fait associer la forme  $\mathfrak{F}(M)$ -multilinéaire  $\tilde{\alpha}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.*

Dans ce qui suit, on identifie  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ .

Le produit extérieur d'une  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  par une  $q$ -forme différentielle  $\beta$  est la  $(p+q)$ -forme différentielle  $\alpha \wedge \beta$  définie par :

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$$

pour tout  $x \in M$ . Notons que ce produit vérifie en particulier :

$$f(\alpha \wedge \beta) = f\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge f\beta.$$

On a une application  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ , de  $\Lambda_p(M) \times \Lambda_q(M)$  à valeurs dans  $\Lambda_{p+q}(M)$ , munissant

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(M)$$

d'une structure d'algèbre associative, Ici  $\Lambda_0(M) = \mathfrak{F}(M)$ .

### 4.3 Image réciproque d'une forme extérieure

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés différentiables de dimension  $n$  et  $m$  respectivement, et

$$f : M_1 \longrightarrow M_2$$

une application différentiable.

L'image réciproque d'une  $p$ -forme  $\alpha$  sur  $M_2$  par  $f$  est la  $p$ -forme  $f^*\alpha$  sur  $M_1$  définie par :

$$(f^*\alpha)_x(h_1, \dots, h_p) = \alpha_{f(x)}(df_x(h_1), \dots, df_x(h_p)).$$

Soit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p},$$



où,  $\alpha_{i_1 \dots i_p} : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions définies sur  $M_2$ , l'expression locale de la  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  par rapport à un système de coordonnées  $(y_1, \dots, y_m)$  défini sur un ouvert  $V$  de  $M_2$ , alors

$$(f^* \alpha)(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p}(y(x)) \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial f_{i_p}}{\partial x_{j_p}} \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}.$$

On en déduit les propriétés suivantes :

1.  $f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta$ . pour tous  $\alpha, \beta \in \Lambda_p(N)$ ,
2.  $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ . pour tous  $\alpha \in \Lambda_p(N)$  et  $\beta \in \Lambda_q(N)$ .

L'application  $f^* : \Lambda_p(N) \longrightarrow \Lambda_p(M)$  s'étend à une application, notée également  $f^*$ ,

$$f^* : \bigwedge(N) \longrightarrow \bigwedge(M)$$

qui est un morphisme d'algèbres de  $\bigwedge(N)$  dans  $\bigwedge(M)$ . Et, si

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

deux morphismes de variétés différentielles de  $M_1$  dans  $M_2$  et de  $M_2$  dans  $M_3$ , alors les applications

$$\bigwedge_p(M_1) \xleftarrow{f^*} \bigwedge_p(M_2) \xleftarrow{g^*} \bigwedge_p(M_3) \text{ et } \bigwedge_p(M_1) \xleftarrow{(g \circ f)^*} \bigwedge_p(M_3)$$

sont liées par :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Il en résulte aussitôt que si  $f$  est un difféomorphisme d'une variété différentiable  $M$ , alors  $f^*$  est un isomorphisme et l'on a :

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

## 4.4 Produit intérieur

Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme différentielle sur une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$ , et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , on appelle produit intérieur de  $X$  par  $\alpha$ , la  $(p-1)$ -forme différentielle, notée  $i(X)\alpha$  ou  $X \lrcorner \alpha$ , définie par :

$$(i(X)\alpha)_x = i(X_x)\alpha_x, \text{ quel que soit } x \in M,$$

ainsi,

$$(i(X)\alpha)_x(X_x^1, \dots, X_x^{p-1}) = i(X_x)\alpha_x(X_x^1, \dots, X_x^{p-1}) = \alpha_x(X_x, X_x^1, \dots, X_x^{p-1}),$$

pour tous  $x \in M$  et  $X_x^1, \dots, X_x^{p-1} \in T_x M$ .

L'application  $\alpha \mapsto i(X)\alpha$  de  $\bigwedge_p(M) \rightarrow \bigwedge_{p-1}(M)$  s'étend à une application, notée également  $i(x)$ ,

$$i(X) : \bigwedge(M) \rightarrow \bigwedge(M)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $i(X + Y) = i(X) + i(Y)$  pour tous  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,
2.  $i(fX) = fi(X)$  pour tous  $X \in \mathfrak{X}(M)$  et  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ,
3. et si  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de variétés différentiables alors

$$i(X)f^*\alpha = f^*i(f_*X)\alpha,$$

quel que soit  $\alpha$ .

## 4.5 Différentiation extérieure

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable, la différentielle  $df$  est une forme différentielle de degré 1 sur  $M$ , et dans un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  défini sur un ouvert  $U$ ,  $df$  s'écrit :

$$d|_U f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Soit  $\alpha$  une  $p$ -forme différentielle et

$$\alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

l'expression locale de  $\alpha$  dans un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . En définissant l'applications  $d|_U : \bigwedge_p(U) \rightarrow \bigwedge_{p+1}(U)$  par :

$$d_U \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

on obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.2** *Il existe une unique famille d'applications*

$$d : \bigwedge_p (M) \longrightarrow \bigwedge_{p+1} (M)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ,  $df$  est la différentielle usuelle de  $f$ ,
2.  $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$  pour tous  $\alpha, \beta \in \bigwedge_p (M)$
3.  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$  pour tous  $\alpha \in \bigwedge_p (M)$  et  $\beta \in \bigwedge_q (M)$ ,
4.  $d \circ d = 0$ ,
5.  $d(f^* \alpha) = f^* d\alpha$ .
6. si  $\alpha$  une  $p$ -forme différentielle d'expression locales

$$\alpha_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

dans un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sur un ouvert  $U$  de  $M$ , alors

$$(d\alpha)_U = d_U \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

$d\alpha$  est appelée différentielle extérieure de  $\alpha$

Soit  $f : M \longrightarrow N$  un morphisme de variétés différentiables alors

$$d \circ f^* = f^* \circ d,$$

autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_p (M) & \xleftarrow{f^*} & \bigwedge_p (N) \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \bigwedge_{p+1} (M) & \xleftarrow{f^*} & \bigwedge_{p+1} (N). \end{array}$$

Considérée comme forme  $p$ - $\mathfrak{F}(M)$ -multilinéaire alternée sur le  $\mathfrak{F}(M)$ -module,  $\mathfrak{X}(M)$ , la différentielle  $d\alpha$  d'une  $p$ -forme différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} X_i \left( \alpha \left( X_1, \dots, \overset{\vee}{X}_i, \dots, X_{p+1} \right) \right) + \\ &\quad \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha \left( [X_i, X_j], X_1, \dots, \overset{\vee}{X}_i, \dots, \overset{\vee}{X}_j, \dots, X_{p+1} \right) \end{aligned}$$

où les termes  $\overset{\vee}{X}_i$  sont omis.

**Démonstration. Faire la démonstration**

## 4.6 Lemme de Poincaré

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

**Définition 4.1** Une forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  est dite fermée si  $d\omega = 0$ .

**Définition 4.2** Une forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  de degré  $p$  est dite exacte, s'il existe une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  de degré  $p - 1$  telle que :

$$\omega = d\alpha.$$

La  $(p - 1)$ -forme  $\alpha$  est appelée primitive de la  $p$ -forme  $\omega$  sur  $M$ .

**Proposition 4.1** Une forme différentielle exacte est fermée.

Cela résulte de la relation  $d \circ d = 0$ , la réciproque de cette proposition est fausse.

**Définition 4.3** Une  $p$ -forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  est dite localement exacte, si pour tout  $a \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $a$  et une  $(p - 1)$ -forme différentielle sur  $U$  ( $\alpha \in \Lambda_{p-1}(U)$ ) telle que

$$\omega_U = d\alpha.$$

**Exemples 4.1** 1. Soit  $\omega$  la 1-forme différentielle définie sur  $M = \mathbb{R}^2$  par :

$$\omega = xdx + \exp(x)dy.$$

cette forme n'est pas exacte. En effet si cette fonction admettait une primitive  $f$ , alors

$$x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \exp(x) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

et par conséquent on a d'après le lemme de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

par suite  $\exp(x) = 0$ , ce qui est absurde, donc  $\omega$  n'est pas exacte.

2. La forme différentielle  $\omega$  définie sur  $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  par :

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

est fermée, localement exacte, mais elle n'est pas exacte.

Pour tout  $i = 0, 1$ , on considère les injections canoniques  $j_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , définies par :

$$j_i(x) = (i, x).$$

**Lemme 4.1** *Il existe une application linéaire*

$$k : \bigwedge (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \bigwedge (\mathbb{R}^n),$$

*vérifiant les propriétés suivantes :*

1.  $k \left( \bigwedge_{p+1} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \right) \subset \bigwedge_p (\mathbb{R}^n)$ ,
2.  $dk + kd = j_1^* - j_0^*$ .

**Démonstration.** On munit l'espace  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  d'un système de coordonnées cartésiennes  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . On définit l'application  $k$  comme suit :

1.  $kf = 0$ , si  $f \in \bigwedge_0 (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , c'est dire, si  $f$  est une application différentiable de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ,
2.  $k\alpha = 0$  si  $\alpha = a(t, x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  où  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une application différentiable,
3.  $k\beta = \left( \int_0^1 b(t, x_1, \dots, x_n) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$  si  $\beta = b(t, x_1, \dots, x_n) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$  où  $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une application différentiable.

Par définition même de l'application  $k$  on a :

$$k \left( \bigwedge_{p+1} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \right) \subset \bigwedge_p (\mathbb{R}^n).$$

Il reste à montrer la relation

$$dk + kd = j_1^* - j_0^*.$$

Si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une application différentiable, on a :

$$dkf = 0,$$

et

$$kdf = \int_0^1 \frac{df}{dt} dt = f(1) - f(0) = (j_1^* - j_0^*)(f).$$

Pour  $\alpha = a(t, x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  où  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une application différentiable, on a :

$$dk\alpha = 0,$$

et

$$kd\alpha = \left( \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = (j_1^* - j_0^*)\alpha.$$

Pour  $\beta = b(t, x_1, \dots, x_n) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$  avec  $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une application différentiable, on a :

$$j_1^*\beta = j_0^*\beta = 0.$$

Par définition a :

$$k\beta = \left( \int_0^1 b(t, x_1, \dots, x_n) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}},$$

donc,

$$dk\beta = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_n) dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}.$$

et

$$kd\beta = - \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_n) dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

d'où

$$dk\beta + kd\beta = (j_1^* - j_0^*)\beta,$$

et le lemme est démontré. ■

**Proposition 4.2 (Lemme de Poincaré).** Une forme différentielle fermée de degré  $p$  ( $p \geq 1$ ) sur  $\mathbb{R}^n$  est exacte.

**Démonstration.** Soit  $\alpha$  une forme différentielle fermée de degré  $p$  ( $p \geq 1$ ) sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons l'application  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , définie par :

$$h(t, x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n).$$

On a  $h \circ j_1$  est l'application identique, et  $h \circ j_0$  est l'application constante  $x \mapsto 0$ , et donc,

$$\begin{aligned}\alpha &= (j_1^* - j_0^*) h^* \alpha \\ &= dk(h^* \alpha) + kdh^* \alpha \\ &= dk(h^* \alpha),\end{aligned}$$

ce qui montre que la forme différentielle  $\alpha$  est exacte. ■

La relation  $d \circ d = d^2 = 0$  montre que l'espace vectoriel des formes exactes sur  $M$  est contenu dans l'espace vectoriel des formes fermées, et on peut donc former l'espace quotient

$$H^p(M) = \frac{\ker(d : \Lambda_p(M) \longrightarrow \Lambda_{p+1}(M))}{\operatorname{Im}(d : \Lambda_{p-1}(M) \longrightarrow \Lambda_p(M))} \text{ pour } p \geq 1,$$

et  $H^0(M) = \ker(d : \mathfrak{F}(M) = \Lambda_0(M) \longrightarrow \Lambda_1(M))$ . Notons que  $H^0(M)$  s'identifie à  $\mathbb{R}^c$  où  $c$  est le nombre de composantes connexes de  $M$ .

$H^p(M)$  est appelé  $p$ -ème groupe de cohomologie de de Rham

Il résulte du théorème de Poincaré que

$$H^p(\mathbb{R}^n) = (0) \text{ pour tout } p \geq 1.$$

## 4.7 Dérivée de Lie d'une $p$ -forme

Soit  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Considérons un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  et un flot local  $(\varphi_t)_{|t| < \varepsilon}$  de  $X$  défini sur un voisinage ouvert  $U$  d'un point  $x \in M$  et soit  $\alpha \in \Lambda_p(M)$  une  $p$ -forme différentielle sur  $M$ .

Pour tout  $|t| < \varepsilon$ , on pose

$$(L_X \alpha)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t)^* \alpha_{\varphi_t(x)} - \alpha_x}{t} = \frac{d}{dt} ((\varphi_t)^* \alpha_{\varphi_t(x)})_{t=0} \in \bigwedge^p (T_x^* M).$$

L'application

$$x \mapsto (L_X \alpha)_x$$

permet de définir une forme différentielle degré  $p$ , appelée dérivée de Lie de  $\alpha$  par rapport à  $X$ .

Pour toute  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  on a la :

**Proposition 4.3**  $L_X \alpha = i(X) d\alpha + di(X) \alpha$

*Démonstration*

**Proposition 4.4** *La dérivée de Lie commute avec l'opérateur  $d$  de la différentiation extérieure :*

$$L_X d = dL_X.$$

**Proposition 4.5** *Pour tous  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\alpha \in \bigwedge_p(M)$  et  $f \in \mathfrak{F}(M)$  on a :*

1.  $L_{X+Y} = L_X + L_Y$
2.  $L_{fX}\alpha = fL_X\alpha + df \wedge i(X)\alpha$ .

**Proposition 4.6** *Pour tous  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  on a :*

1.  $[L_X; i(Y)] = i([X, Y])$ ,
2.  $[L_X; L_Y] = L_{[X, Y]}$ ,

**Proposition 4.7** *Pour toute application différentiable  $f$  d'une variété  $M$  à valeurs dans une variété  $N$ , et pour tous  $X \in \mathfrak{X}(M)$  et  $Y \in \mathfrak{X}(N)$   $f$ -reliés, c'est à dire,  $Y = f_*X$ , et  $\alpha \in \bigwedge_p(N)$ , alors :*

$$f^*L_X\alpha = L_Xf^*\alpha$$

## 4.8 Intégrale d'une forme différentielle

### 4.8.1 Variété orientable

Soit  $(M, \mathfrak{A})$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

On dit que  $M$  est orientable si elle possède une  $n$ -forme  $\Omega_n$  différentielle sans singularités.

Toute forme différentielle  $\Omega \in \bigwedge_n(M)$  sans singularités s'écrit :

$$\Omega = f\Omega_n, \text{ avec } f \in \mathfrak{F}(M) \text{ telle que } f(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in M.$$

nous disons que  $\Omega$  et  $\Omega_n$  définissent la même orientation (resp. des orientations contraires) si  $f(x) > 0$  (resp.  $f(x) < 0$ ) pour tout  $x \in M$ .

Une variété orientable sera dite orientée si on a fixé une orientation  $\Omega_n$ . Une autre orientation  $\Omega = f\Omega_n$  sera dite positive (resp. rétrograde ou négative) si  $f(x) > 0$  (resp.  $f(x) < 0$ ) quel que soit  $x \in M$ .

**Proposition 4.8** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  est orientable,



2.  $M$  possède un atlas dont la jacobien des changements de cartes sont strictement positifs :

$$J(\varphi \circ \psi^{-1})(x) = \det \left( d(\varphi \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \right) > 0$$

quel que soit  $x \in M$ .

### 4.8.2 Intégrale d'une $n$ -forme différentielle.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés préliminaires des intégrales des formes différentielles.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle chemin différentiable dans  $U$ , une application de classe  $C^\infty$  de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $U$ .

Un chemin différentiable  $\gamma$  dans  $U$ , sera dit fermé (ou lacet) si :

$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

Soit  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$  un chemin différentiable dans  $U$ . L'image réciproque :

$$\gamma^* \omega$$

par le chemin  $\gamma$  de la 1-forme  $\omega$ , s'identifie à la fonction définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f(t) = \omega(\gamma(t))\gamma'(t).$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , et on peut définir l'intégrale

$$\int_0^1 f(t) dt.$$

On appelle intégrale de la 1-forme  $\omega$  sur le chemin  $\gamma$ , l'intégrale sur  $[0, 1]$  de la fonction représentant  $\gamma^* \omega$  :

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

### 4.8.3 Intégrale d'une $n$ -forme différentielle.

Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Un chemin différentiable dans  $U$  est une application  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$  de classe  $C^\infty$ .

Le chemin  $\gamma$  est dit fermé (ou que c'est un lacet) si :

$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin différentiable dans  $U$  et  $\omega \in \Lambda_1(U)$ .  
L'image réciproque :

$$\gamma^*\omega$$

s'identifie à la fonction définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f(t) = \omega(\gamma(t))\gamma'(t).$$

$f$  est continue sur  $[0, 1]$ , on peut donc définir l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

On appelle intégrale de  $\omega$  sur le chemin  $\gamma$ , l'intégrale :

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t))\gamma'(t).dt$$

Soit  $M$  une v. lisse paracompacte de dim.  $n$  orientée par  $\Omega \in \Lambda_n(M)$ .  
Soit  $\omega \in \Lambda_n(M)$  à support compact. Rappelons

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}$$

**D'abord on suppose** qu'il  $\exists (U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ , avec  $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , t.q.

$$\text{supp}(\omega) \subset U.$$

On a  $\varphi(\text{supp}(\omega))$  est compact.  $(\varphi^{-1})^* \omega$  s'écrit :

$$(\varphi^{-1})^* \omega = a(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  étant le S.C. cartésiennes de  $\mathbb{R}^n$ .

**Par définition, l'intégrale de  $\omega$  sur  $M$ , est l'intégrale multiple usuelle,**

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega \\ &= \int_V a(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_V a d\mu. \end{aligned}$$

Cette intégrale existe car  $a(\xi_1, \dots, \xi_n)$  est continue sur  $M$  et est à support compact.

Avant de montrer que cette définition est intrinsèque, nous rappelons la formule de changement variable pour les intégrales multiples. Soient donc  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme. Si  $f \in L^1(V, d\mu)$  alors  $f \circ \phi \in L^1(U, d\mu)$  et l'on a :

$$\int_{V=\phi(U)} f d\mu = \int_U f \circ \phi |J(\phi)| d\mu.$$

Montrons maintenant que la définition ci dessus est intrinsèque. Soit donc  $\psi : U' \subset M \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$  une autre carte  $M$  telle que  $\text{supp}(\omega) \subset U'$  avec

$$J((\varphi \circ \psi^{-1})) > 0.$$

On a donc Les formules classiques de changements de variables pour les intégrales multiples donnent :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{-1})^* \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \circ \psi^{-1})^* \circ (\varphi^{-1})^* \circ \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \circ \psi^{-1})^* a d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a \circ \varphi \circ \psi^{-1} (\varphi \circ \psi^{-1})^* d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a \circ \varphi \circ \psi^{-1} J(\varphi \circ \psi^{-1}) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a \circ \varphi \circ \psi^{-1} |J(\varphi \circ \psi^{-1})| d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_V a d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega, \end{aligned}$$

ce qui montre que cette définition est intrinsèque.

Soit maintenant  $(f_i)_i$  une partition de l'unité.  $\omega$  et  $(U, \varphi)$  une carte telle que  $\text{supp}(\omega) \subset U$ . Pour chaque  $i \in I$ , la  $n$ -forme  $f_i \omega$  est continue et est à support compact, les  $f_i \omega$  sont presque nulles. On a donc,

$$\omega = \left( \sum_{i \in I} f_i \right) \omega = \sum_{i \in I} (f_i \omega),$$

ainsi,

$$\int_M \omega = \int_M \left( \sum_{i \in I} f_i \right) \omega = \sum_{i \in I} \int_M (f_i \omega).$$

Dans le cas général,  $\text{supp}(\omega)$  n'est pas nécessairement contenu dans le domaine  $U$  d'une carte  $\varphi$ , et soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité subordonnée à l'atlas  $\mathfrak{A}$  définissant la structure de variété de  $M$ , c'est à dire, pour tout  $i \in I$ ,  $\text{supp}(f_i)$  est contenu dans le domaine  $U$  d'une carte  $\varphi$  de cet atlas. Comme les  $f_i \omega$  sont presque nulles, on peut définir

$$\int_M \omega = \int_M \left( \sum_{i \in I} f_i \right) \omega = \sum_{i \in I} \int_M (f_i \omega).$$

Soit donc  $(g_i)_{i \in J}$  une autre partition de l'unité subordonnée à l'atlas  $\mathfrak{A}$ . Par définition, on a :

$$f_i = \sum_{j \in I} f_i g_j,$$

par suite,

$$\omega = f_i \omega = \sum_{j \in I} f_i g_j \omega$$

et donc,

$$\int_M f_i \omega = \sum_{j \in I} \int_M f_i g_j \omega,$$

par suite

$$\sum_{i \in I} \int_M f_i \omega = \sum_{i, j \in I} \int_M f_i g_j \omega.$$

De même on a :

$$\sum_{i \in I} \int_M g_i \Omega = \sum_{i, j \in I} \int_M f_i g_j \Omega.$$

d'où

$$\sum_{i \in I} \int_M g_i \omega = \sum_{i \in I} \int_M f_i \omega,$$

ce qui définit d'une manière intrinsèque l'intégrale d'une  $n$ -forme différentielle sur la variété  $M$ .

## Chapitre 5

# Distributions. Notion de feuilletage

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

**Définition 5.1** Une distribution de dimension  $p$  sur  $M$  (ou champ de  $p$ -directions) est la donnée en chaque point  $x$  de  $M$  d'un sous espace vectoriel  $\mathcal{D}(x)$  de dimension  $p$  de  $T_x M$ , autrement dit, un élément de la grassmannienne  $G_p(T_x M)$ .

**Exemples 5.1** 1. Étant donné un champ de vecteurs  $X \in \mathfrak{X}(M)$  sans singularité. Ce Champ définit évidemment une distribution de dimension 1 sur  $M$ . Notons qu'on ne peut pas toujours associer à une distribution de dimension 1 un champ de vecteurs sans singularités, par exemple sur  $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , associons à chaque point  $M(x, y)$ , la bissectrice des demi-droites  $[OX)$  et  $[OM)$

2. Les distributions  $\mathcal{D}(x) = \{x\} \times \{0_{T_x M}\}$  et  $\mathcal{D}(x) = T_x M$  de dimension 0 et  $n$  respectivement sont dites triviales.

3. Soit  $\pi : M \longrightarrow B$  une submersion de  $M$  sur une variété  $B$  de dimension  $m$ . Pour chaque point  $x$  de  $M$  on pose

$$\mathcal{D}(x) = \ker d\pi_x$$

définit une distribution de dimension  $n - m$ .

**Définition 5.2** Une distribution  $\mathcal{D}$  de dimension  $p$  sera dite de classe  $C^k$  avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , si tout point  $x_0 \in M$  admet un voisinage ouvert  $U$  et

des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(U)$  de classe  $C^k$  tels que pour tout  $x \in U$  on ait :

$$\mathcal{D}(x) = \text{Vect}(X_1(x), \dots, X_p(x))$$

Par abus de langage, on dira que les vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  forment une base locale de la distribution  $\mathcal{D}$ .

On dira aussi qu'un champ de vecteurs  $X$  appartient à la distribution  $\mathcal{D}$ , et on écrit  $X \in \mathcal{D}$ , si pour tout  $x \in M$ ,  $X(x) \in \mathcal{D}(x)$ .

**Définition 5.3** Une carte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  de  $M$  sera dite adaptée à la distribution  $\mathcal{D}$  si

$$\mathcal{D}(x) = \text{Vect} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right)_x \right)$$

pour tout point  $x$  de  $U$ .

**Définition 5.4** Une variété intégrale de  $\mathcal{D}$  est une sous-variété connexe de  $M$  de dimension  $p$  vérifiant :

$$T_x N = \mathcal{D}(x)$$

pour tout  $x \in N$ .

**Exemple 5.1** Considérons une submersion  $\pi : M \rightarrow B$  d'une variété  $M$  de dimension  $n = p + q$  sur une variété  $B$  de dimension  $q$ . Le théorème du rang constant montre que pour tout point  $x_0$  de  $M$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x_0$  et une carte  $(V, \psi)$  en  $f(x_0)$  telles que l'expression locale  $\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}$  de  $\pi$  dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  se réduit à :

$$(x, y) \mapsto y$$

de  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  sur  $\psi(V) \subset \mathbb{R}^q$ .

Notons  $\varphi = (x^1, \dots, x^p; y^1, \dots, y^q)$  et  $\psi = (z^1, \dots, z^q)$ .

Pour chaque  $b \in B$ , la fibre  $\pi^{-1}(b)$  au dessus de  $b$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $p$  telle que

$$\pi^{-1}(b) \cap U$$

est définie par les équations

$$y^1 = z^1(b), \dots, y^q = z^q(b).$$

En effet, pour chaque  $u \in \pi^{-1}(b) \cap U$ , on a d'une part  $\varphi(u) = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ , et d'autre part :

$$y = \psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(b),$$

on déduit que  $\varphi(u) = (x, \psi(b))$ , par suite,

$$\varphi(\pi^{-1}(b) \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{\psi(b)\}).$$

Il en résulte donc que les fibres de la submersion  $\pi$  sont des sous variétés de  $M$  de dimension  $p$  dont les équations par rapport au système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^p; y^1, \dots, y^q)$  sont

$$dy^1 = 0, \dots, dy^q = 0.$$

Pour chaque  $u \in M$ , on pose

$$\mathcal{D}(u) = \ker d\pi_u.$$

On a donc une distribution de dimension  $p$  sur  $M$ . Comme  $\pi$  est constante sur la sous-variété  $\pi^{-1}(\pi(u))$ , on voit que

$$\mathcal{D}(u) = \ker d\pi_u = T_u \pi^{-1}(\pi(u)).$$

Localement, par rapport au système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^p; y^1, \dots, y^q)$  et  $(z^1, \dots, z^q)$  on a :

$$\begin{aligned} d\pi_u \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (z^j) &= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_u (z^j \circ \pi) \\ &= d(z^j \circ \pi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(u)}(e_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq p) \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{D}(x) = \text{Vect} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right)_x \right),$$

par conséquent,  $(x^1, \dots, x^p; y^1, \dots, y^q)$  est un système de coordonnées locales adaptées à la distribution  $\mathcal{D}$ .

**Définition 5.5** Une distribution  $\mathcal{D}$  sur  $M$  sera dite intégrable si tout point de  $M$  appartient à une carte adaptée à cette distribution.

Soit donc  $\mathcal{D}$  une distribution de dimension  $p$  de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  supposée intégrable. Considérons deux systèmes de coordonnées locales  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^p; y^1, \dots, y^q))$  et  $(U', \varphi' = (x'^1, \dots, x'^p, y'^1, \dots, y'^q))$  adaptées à la distribution  $\mathcal{D}$ .

La relation

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} + \frac{\partial y'^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y'^l} \in \mathcal{D}$$

montre que  $\frac{\partial y'^l}{\partial x^i} = 0$ , autrement dit les fonctions  $y'^l$  ne dépendent que de  $y^1, \dots, y^q$ :

$$y'^l = y'^l(y^1, \dots, y^q),$$

par suite les changement de coordonnées  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  s'écrivent :

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y)). \quad (5.1)$$

pour tous  $(x, y) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ .

Ainsi, la variété  $M$  est munie d'un atlas dont les changement de cartes vérifient la relation 5.1. Cet atlas est dit feuilleté de codimension  $q$  et toute carte de cet atlas sera dite feuilletée.

**Définition 5.6** *Un feuilletage de dimension  $p$  (ou de codimension  $q$ ) et de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ , est un atlas maximal feuilleté de codimension  $q$  de classe  $C^k$ , c'est à dire, les changement de cartes sont du type 5.1.*

Réciproquement, un feuilletage de codimension  $q$  détermine une distribution intégrable de codimension  $q$  et de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ , cette distribution est définie en chaque point  $x$  de  $M$  par :

$$\mathcal{D}(x) = Vect \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right)_x \right),$$

où  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$  est une carte feuilletée en  $x$ . Les cartes de ce feuilletage sont des cartes adaptées à la distribution  $\mathcal{D}$  et  $(y^1, \dots, y^q)$  sont appelés coordonnées transverses.

**Définition 5.7** *Une variété différentiable munie d'un feuilletage  $\mathfrak{F}$  sera dite feuilletée.*

**Définition 5.8** *On entend par feuilletage modèle de dimension  $p$ , le feuilletage de dimension  $p$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  défini par la submersion  $\pi : (x, y) \mapsto y$ , de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^q$  avec  $n = p + q$ .*



Les sous-espaces affines

$$\mathbb{R}^p \times \{a\} = \{(x, a) \mid x \in \mathbb{R}^p\}, \quad a \in \mathbb{R}^q,$$

sont appelés feuilles du feuilletage modèle de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.9** Un difféomorphisme local  $\phi : U \longrightarrow U'$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelé automorphisme du feuilletage modèle de dimension  $p$  si les composantes  $\phi^{p+1}, \dots, \phi^{p+q}$  ne dépendent que de  $y^1, \dots, y^q$ , autrement dit si :

$$\frac{\partial \phi^{p+1}}{\partial x^i} = \dots = \frac{\partial \phi^{p+q}}{\partial x^i} = 0,$$

soit,

$$\phi(x, y) = (\phi^1(x, y), \dots, \phi^p(x, y), \phi^{p+1}(y), \dots, \phi^{p+q}(y))$$

pour tout  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ .

Pour tout  $(x_0, y_0) \in U$ , on appelle plaque passant par  $(x_0, y_0)$  dans  $U$ , la composante connexe dans  $U$  de  $\mathfrak{F}_{(x_0, y_0)} \cap U$ ,  $\mathfrak{F}_{(x_0, y_0)} = \{(x_0 + x, y_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  étant la feuille feuilletage modèle (de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ ) passant par  $(x_0, y_0)$ .

Ainsi, un automorphisme du feuilletage modèle de dimension  $p$  transforme les plaques de  $U$  en des plaques de  $U'$ .

Soient maintenant  $\mathfrak{F}$  un feuilletage de dimension  $p$  de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  sur une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  et

$$\varphi : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

une carte feuilletée de  $\mathfrak{F}$ . et soit  $u \in U$ . On appelle plaque de  $U$  passant par  $u$ , l'image réciproque par  $\varphi$  de la plaques de  $V$  passant par  $\varphi(u)$ .

Dans une carte feuilletée  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$  de  $\mathfrak{F}$  définie sur  $U$ , la plaque de  $U$  passant par  $u$  la composante connexe de la sous-variété de  $U$  de dimension passant par le point  $u$  définie par les équations  $dy^1 = 0, \dots, dy^q = 0$ .

On voit donc que si

$$\varphi : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

est une carte feuilletée de  $\mathfrak{F}$  alors

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$$

avec

$$\varphi^1 = (x^1, \dots, x^p) \text{ et } \varphi^2 = (y^1, \dots, y^q).$$

Et si  $c$  est une plaque dans  $U$  définie par les équations  $dy^1 = 0, \dots, dy^q = 0$ , alors  $(c, \varphi^1 = (x^1, \dots, x^p))$  est une carte de  $M$ , ces cartes forment un atlas de  $M$  qui confère à  $M$  une structure de variété différentiable de dimension  $p$ .

Les composantes connexes de  $M$  munie de sa structure de variété de dimension  $p$  définie par le feuilletage  $\mathfrak{F}$ , sont appelées feuilles de ce feuilletage.

On voit donc qu'une feuille de  $\mathfrak{F}$  passant par un point  $u_0$  de  $M$  est une sous-variété intégrale connexe maximale de la distribution  $\mathcal{D}$  associée au feuilletage  $\mathfrak{F}$ , c'est-à-dire, la réunion de toutes les variétés intégrales connexes de  $\mathcal{D}$  passant par le point  $x_0$ .

Les feuilles de  $\mathfrak{F}$  forment une partition de  $M$  en sous variétés connexes maximales de dimension  $p$ .

**Définition 5.10** Une distribution  $\mathcal{D}$  sur  $M$  sera dite involutive si pour tous champs de vecteurs  $X, Y \in \mathcal{D}$ , le crochet de Lie  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ .

**Théorème 5.1 (de Frobenius).** Soit  $\mathcal{D}$  une distribution différentiable de dimension  $p$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $\mathcal{D}$  intégrable,
2.  $\mathcal{D}$  involutive.

**Démonstration.** Supposons que  $\mathcal{D}$  soit intégrable. Soient donc  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Montrons que le crochet de Lie  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ . Désignons par  $N$  une sous variété différentielle de dimension  $p$  de  $M$  et  $i : N \rightarrow M$  l'injection canonique. Par hypothèse on a

$$X_u, Y_u \in \mathcal{D}(u) = T_u N \text{ pour tout } u \in N,$$

donc il existe deux champs de vecteurs  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$  tels que :

$$i_* \tilde{X} = X \circ i \text{ et } i_* \tilde{Y} = Y \circ i,$$

et comme on a

$$[X, Y]_u = \left[ i_* \tilde{X}, i_* \tilde{Y} \right]_{i(u)} = i_* \left[ \tilde{X}, \tilde{Y} \right]_{i(u)} \in T_u N = \mathcal{D}(u),$$

par suite  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ , et donc  $\mathcal{D}$  est involutive.

Réciproquement, on suppose que  $\mathcal{D}$  est involutive. Montrons que chaque point de  $M$  admet un système de coordonnées locales adaptées à la distribution  $\mathcal{D}$ . Soit donc  $u \in M$ , il existe un ouvert  $U_1$  de  $M$  contenant  $u$  et  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(U_1)$  tels que :

$$\mathcal{D}(v) = \text{Vect}(X_1(v), \dots, X_p(v)) \text{ pour tout } v \in U.$$

Le théorème de redressement d'un champ de vecteurs montre qu'il existe un système de coordonnées locales  $\varphi = (u^1, \dots, u^n)$  défini sur un voisinage ouvert  $U_2$  de  $u$  contenu dans  $U_1$  tel que  $\varphi(u) = 0$  et

$$X_{1|U_2} = \frac{\partial}{\partial u^1}.$$

On peut supposer que  $U_1 = U_2$ .

Pour  $p = 1$ , le théorème est démontré. Supposons que la propriété ainsi définie est satisfaite jusqu'à l'ordre  $p - 1$ .

Soit  $N$  la sous variété de  $U$  de dimension  $n - 1$  définie par l'équation  $u^1 = 0$  :

$$N = \{x \in U \mid u^1(x) = 0\}.$$

Posons

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 - X_2(u^1) X_1 \\ \dots \\ Y_p = X_p - X_p(u^1) X_1. \end{cases}$$

Les relations

$$Y_i(u^1) = 0, \text{ pour } i = 2, \dots, p$$

montrent qu'en chaque point  $u$  de  $N$ , les vecteurs  $Y_2(u), \dots, Y_p(u)$  sont tangents à la sous-variété  $N$  au point  $u$  :

$$Y_2(u), \dots, Y_p(u) \in T_u N.$$

Il en résulte qu'il existe  $p - 1$  champs de vecteurs  $\tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_p \in \mathfrak{X}(N)$  tels que :

$$i_* \tilde{Y}_2 = Y_2 \circ i, \dots, i_* \tilde{Y}_p = Y_p \circ i,$$

ou encore

$$\tilde{Y}_2 = Y_{2|N}, \dots, \tilde{Y}_p = Y_{p|N}.$$

Les relations

$$[\tilde{Y}_l, \tilde{Y}_m] = [Y_l, Y_m]_{|N} \in \mathfrak{X}(N)$$

montrent que  $\tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_p$  engendrent une distribution  $\tilde{\mathcal{D}}$  de dimension  $p - 1$ . Comme  $X_1, \dots, X_p$  et  $Y_1, \dots, Y_p$  engendrent le même sous espace, on déduit que  $\mathcal{D}$  est involutive, par suite

$$[\tilde{Y}_l, \tilde{Y}_m] = [Y_l, Y_m]_{|N} = \sum_{k=1}^p C_{lm}^k Y_{k|N} = \sum_{k=2}^p C_{lm}^k \tilde{Y}_k$$

est tangent à  $N$  (donc  $C_{lm}^1 = 0$ ); ce qui montre que  $\tilde{\mathcal{D}}$  est involutive, donc il existe un système de coordonnées locales  $z^2, \dots, z^n$  défini sur un voisinage ouvert  $V$  de  $u$  dans  $N$  tel que

$$\tilde{\mathcal{D}}(v) = Vect \left( \left( \frac{\partial}{\partial z_2} \right)_v, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial z_p} \right)_v \right),$$

pour tout  $v \in V$ .

Les fonctions  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$  données par

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = z^2(u^2, \dots, u^n) \\ \dots \\ x^p = z^p(u^2, \dots, u^n) \\ y^1 = z^{p+1}(u^2, \dots, u^n) \\ \dots \\ y^q = z^{p+q}(u^2, \dots, u^n) \end{cases}$$

définissent un système de coordonnées locales dans un voisinage ouvert  $W$  de  $u$  dans  $M$ .

On a

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^1} Y_2(y^j) = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1}, Y_2 \right](y^j) = \sum_{k=2}^p C_{12}^k Y_k(y^j) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x^1} Y_p(y^j) = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1}, Y_p \right](y^j) = \sum_{k=2}^p C_{1p}^k Y_k(y^j). \end{cases} \quad (5.2)$$

On voit donc que pour chaque  $j = 1, \dots, q = n - p$ , les courbes

$$x^1 \mapsto (Y_1(y^j)(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), \dots, Y_p(y^j)(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q))$$

sont des solutions du système linéaire homogène de  $p - 1$  équations (5.2). Et on sait qu'on a une solution unique dès qu'on a fixé une condition initiale. Or pour  $x^1 = 0$ , on a :

$$Y_i(y^j) = \tilde{Y}_i(y^j_{|N}) = 0$$

donc ces solutions sont nulles sur un voisinage ouvert  $U$  de  $u$ , par suite

$$Y_i = \sum_{j=1}^p a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

sur  $U$ , on conclut donc que la distribution  $\mathcal{D}$  est engendrée par les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}$$

sur l'ouvert  $U$  et par conséquent  $\mathcal{D}$  est intégrable.

## 5.1 Variétés riemanniennes

### 5.1.1 Définitions

**Variété riemannienne de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) :** C'est un  $(M, g)$  dans lequel

1.  $M$  est une V.D. de classe  $C^k$
2.  $g$  est un champ de tenseurs 2-fois covariant de classe  $C^{k-1}$  sur  $M$  t.q.  $\forall x \in M$ ,  $g_x$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $T_x M$ .  
 $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la fonction réelle  $g(X, Y) : x \mapsto g_x(X_x, Y_x)$  est diff. de classe  $C^{k-1}$ .  $g$  est appelé tenseur métrique.

**Localement :**

Soit un SCL  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$

Pose

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

On a

$$g(X, Y) = g\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Soit,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

**Exemple 5.2** Soit l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire euclidien

$$\langle u = u^i e_i, v = v^j e_j \rangle = \delta_{ij} u^i v^j = \sum_{i=1}^n u^i v^i.$$

Sur la VD  $M = \mathbb{R}^n$  on définit

$$g_x((x, u), (x, v)) = \langle u, v \rangle$$

$\forall (x, u), (x, v) \in T_x \mathbb{R}^n$ .

Une **isométrie** d'une VR  $(M, g)$  sur une VR  $(N, h)$  est un difféo de  $M$  sur  $N$  t.q.

$$f^* h = g$$

$Isom(M, g)$  groupe

**Sous-variétés riemanniennes :**

$(M, g)$  VR

$N$  sous variété de  $M$

$N$  est munie canoniquement d'une structure de VR  $g_0$  définie par la restriction à  $N$  de  $g$ .

$(N, g_0)$  est dite sous variété riemannienne de  $(M, g)$ .

Soit  $N$  une sous variété de  $\mathbb{R}^n$ . Alors la métrique canonique de  $\mathbb{R}^n$  induit une structure de sous variété sur  $N$  donnée par :

$$i^* \langle, \rangle$$

$\langle, \rangle$  étant le produit scalaire euclidien et  $i : N \rightarrow M$  l'injection canonique.

**Produit de deux variétés riemanniennes**

$(M, g)$  et  $(N, h)$  deux VR

$$T_{(x,y)} M \times N = T_x M \oplus T_y N$$

$$g \times h((X_M, X_N), (Y_M, Y_N)) = g(X_M, Y_M) + h(X_N, Y_N)$$

### 5.1.2 Distance géodésique

$(M, g)$  une VR

$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , un chemin de classe  $C^1$  par moceaux.

**Longueur de  $\gamma$**

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t)} dt = \int_a^b ds \end{aligned}$$

avec  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ .

Pour tous  $x, y \in M$ , on note par  $\mathfrak{F}(x, y)$  l'ensemble des chemins de classe  $C^1$  par morceaux  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , joignant  $x$  et  $y$ , i.e.  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ .

Distance géodésique

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathfrak{F}(x, y)} L(\gamma).$$

**Proposition 5.1** *La distance géodésique détermine sur  $M$  une structure d'espace métrique compatible avec sa topologie.*

Dém. En exercice

La recherche des chemins de classe  $C^2$  et de longueur minima joignant deux points données nous ramène à déterminer les chemins  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  qui vérifient les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'^i} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

où

$$\mathfrak{L} = \sqrt{g_{ij}(x^1(t), \dots, x^n(t)) x'^i(t) x'^j(t)}$$

(Calcul des variations). Les courbes obtenues ne dépendent pas des coordonnées locales. Ces courbes sont appelées géodésiques de  $(M, g)$ . Nous admettons le résultat suivant :

**Proposition 5.2**  $\forall x_0 \in M, \exists U \in \mathcal{O}(x_0, M)$  t.q.  $\forall x, y \in U$  on ait :

1.  $\exists$  une géodésique unique contenue dans  $U$  joignant  $x$  et  $y$ .
2. La longueur de cette géodésique est égale à  $d(x, y)$ .

Le voisinage  $U$  est dit convexe.

**Proposition 5.3** *Si  $M$  est connexe et complète pour la distance géodésique, alors deux points quelconques  $x, y \in M$  peuvent être joints par une géodésique aux moins.*

N.B. L'exemple de la sphère, montre qu'une géodésique ne réalise pas nécessairement le minimum de la longueur.

## 5.2 Dérivation covariante

Soit  $M$  une V.D.

Une connexion affine sur la variété  $M$  est une application

$$TM \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow TM$$

$$(X_x, Y) \in T_x M \times \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_{X_x} Y \in T_x M$$

de satisfaisant à :

1.  $\nabla$  est  $\mathbb{R}$ -bilinéaire,
2.  $\nabla_{X_x} fY = X_x(f)Y_x + f(x)\nabla_{X_x} Y$ ,  $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ ,
3.  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , l'application

$$\nabla_X Y : x \longmapsto \nabla_{X_x} Y$$

est un champ de vecteurs.

Il en résulte que l'on a :

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

$\nabla_{X_x} Y$  est appelée dérivation covariante du champ de vecteur  $Y$  dans la direction du vecteur tangent  $X_x$ .

**Exemple 5.3**  $M = \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , on pose

$$\nabla_{X_{x_0}} Y = dY_{x_0} X_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{x_0 + tX_{x_0}} - Y_{x_0}}{t}$$

et dans ces conditions on a :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= dY(X) - dX(Y) \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

Une connexion sur une VD  $M$  sera dite symétrique si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un S.C.L. défini sur un ouvert  $U$ .



Ecrivons

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les  $\Gamma_{ij}^k$  sont des fonctions différentiables sur  $U$  appelées symboles de Christoffel et déterminent entièrement la connexion, en effet, pour tous

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(U),$$

on a :

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = X^i Y^k_{,i} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

avec

$$Y^k_{,i} = \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j.$$

Pour la connexion ordinaire sur  $\mathbb{R}^n$  les symboles de Christoffel sont nulles, et pour une connexion symétrique on a

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

**Proposition 5.4** *Toute variété paracompacte possède une connexion.*

**Proposition 5.5**  $\nabla_{X_x} Y$  de dépend que  $Y(\gamma(t))$  où  $\gamma(t)$  est une courbe différentiable définie sur un intervalle assez petit  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  t.q.

$$\gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = X_x.$$

**Définition 5.11** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  un chemin de classe  $C^k$ . On appelle champ de vecteurs le long de la courbe  $\gamma$  un chemin  $V : [a, b] \rightarrow TM$  relevant  $\gamma$  i.e.

$$\pi(V(t)) = c(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

**Exemple 5.4**  $\frac{d\gamma}{dt}(t)$  est un champ de vecteurs le long de la courbe  $\gamma$ .

**Proposition 5.6** Soient  $(M, \nabla)$  une VD munie d'une connexion affine,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  un chemin de classe  $C^k$  dans  $M$  et  $V$  un champ de vecteurs le long de  $\gamma$ . Alors on peut définir un champ de vecteurs de classe  $C^{k-1}$  le long de  $\gamma$ , noté  $\frac{DV}{dt}$  appelé dérivée covariante de  $V$  satisfaisant à :

1.  $\frac{DV}{dt}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire,
2.  $\geq \frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}$

3. Pour tout  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  et  $V(t) = Y(\gamma(t))$  on a :

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y.$$

**Définition 5.12** Un champ de vecteurs  $V$  le long de  $\gamma$  est dit parallèle pour la connexion  $\nabla$  si  $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ . Un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est appelé une géodésique si son champ tangent est parallèle.

### 5.2.1 Courbure. Torsion d'une connexion

**Torsion**

$$T(X, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

**Courbure**

$$R(X, Y)Z \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

soit,

$$R(X, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

### 5.2.2 Transport parallèle

**Proposition 5.7** Étant donné un chemin  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ ,  $b > 0$  ou  $+\infty$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et un vecteur  $V_0 \in T_{\gamma(0)}M$ . Il existe un champ de vecteur unique  $V$  le long de  $\gamma$  parallèle tel que  $V(0) = V_0$ .  $V(t)$  est appelé transport parallèle de  $V_0$  le long de  $\gamma$ .

## 5.3 Espaces vectoriels symplectiques

### 5.3.1 Étude des 2-formes extérieures

$E$  un e.v. de dim. finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  corps commutatif),  $\theta \in \bigwedge_2(E)$ .

$$A(\theta) = \{x \in E \mid i(x)\theta = 0\},$$

$$\text{rg}\theta \stackrel{\text{Déf}}{=} \text{codim}(A(\theta)).$$

Soit  $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $E$ . Par déf.

$$A = M[\theta, \mathfrak{B}] = (\theta(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

On a donc,

$$\theta(x, y) = {}^t XAY$$

où  $X = M[x, \mathfrak{B}]$  et  $Y = M[y, \mathfrak{B}]$ .

**Discriminant de  $\theta$  par rapport à  $\mathfrak{B}$  :**

$$dis_{\mathfrak{B}}(\theta) = \det A.$$

Soit  $\mathfrak{B}'$  une autre base de  $E$ , on a

$$\theta(x, y) = {}^t X' A' Y'$$

où  $X' = M[x, \mathfrak{B}']$  et  $Y' = M[y, \mathfrak{B}']$ .

Soit  $P = M[id, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}]$  = matrice de passage de  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{B}'$ . Les relations  $X = PX'$  et  $Y = PY'$  donnent

$$A' = {}^t P A P,$$

et donc,

$$dis_{\mathfrak{B}'}(\theta) = (\det P)^2 dis_{\mathfrak{B}}(\theta).$$

On a une application linéaire  $\zeta : E \rightarrow E^*$  définie par :

$$\zeta(x) = i(x)\theta,$$

**Définition**

$\theta$  non dégénérée si  $\zeta$  injective.

**Conséquence**

$$\theta \text{ non dégénérée} \implies rg\theta = \dim E.$$

### 5.3.2 Orthogonalité symplectique

$x, y \in E$

$$x \perp y \text{ si } \theta(x, y) = 0.$$

$L, M$  deux sev de  $E$

$$L \perp M \text{ si } x \perp y \quad \forall (x, y) \in L \times M.$$

$$A^\perp = \{x \in E \mid \theta(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

$L$  et  $M$  de  $E$  sont supplémentaires orthogonaux si

$$E = L \oplus M \text{ et } L = M^\perp.$$

$\forall A, B \subseteq E$ , on a les pptés suivantes :

1.  $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$ ,

$$2. A \subseteq A^{\perp\perp}$$

Et pour deux sous espaces vectoriels quelconques  $H, K$  de  $E$ , on a :

$$1. (H \cap K)^{\perp} = H^{\perp} + K^{\perp},$$

$$2. (H + K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}.$$

**Proposition.** Suppose  $\theta$  non dégénérée. Alors

$$1. E^{\perp} = \{0\}.$$

2.  $\forall H$  sev de  $E$  on a :

$$(a) H = H^{\perp\perp},$$

$$(b) \dim H^{\perp} = \dim E - \dim H.$$

**Dém.**

1. résulte de  $E^{\perp} = \ker \zeta$ .

2. (a) On a  $H \subseteq H^{\perp\perp}$ .

Soit  $h_0 \in H^{\perp\perp}$ .

On a l'équivalence

$$h_0 \in H \iff \omega(h_0) = 0. \forall \omega \in \text{Ann}(H).$$

Soit  $\omega \in \text{Ann}(H)$ . Il existe  $x \in E$  t.q.  $\omega = i(x)\theta$ .

Or

$$\omega \in \text{Ann}(H) \implies \omega(y) = i(x)\theta(y) = \theta(x, y) = 0, \forall y \in H,$$

par suite  $x \in H^{\perp}$ , et, donc,

$$\omega(h_0) = \theta(x, h_0) = 0.$$

donc  $\omega(h_0) = 0 \forall \omega \in \text{Ann}(H)$ , par suite  $h_0 \in H$ , ce qui montre  $H = H^{\perp\perp}$

2. (b) Rappelons que

$$\dim(\text{Ann}H) = \dim E - \dim H,$$

donc il suffit de montrer que

$$\dim(\text{Ann}H) = \dim H^{\perp},$$

or l'isomorphisme  $\zeta : x \mapsto i(x)\theta$  de  $E$  sur  $E^*$ , transforme  $H^{\perp}$  sur  $\text{Ann}(H)$

:

$$\zeta(H^{\perp}) = \text{Ann}(H),$$

d'où  $\dim H^{\perp} = \dim(\text{Ann}H) = \dim E - \dim H$ . ■

## 5.4 Classification des 2-formes extérieures

$E$  un e.v. dim.  $n$  sur  $\mathbb{K}$  (corps commutatif)  $\theta \in \bigwedge_2 E$ , non nulle.

$\exists u_1, v_1 \in E : \theta(u_1, v_1) = \lambda \neq 0$ .

Pose  $e_1 = \lambda^{-1}u_1$  et  $e'_1 = v_1$ , on a donc

$$\theta(e_1, e'_1) = 1$$

$H_1 = \text{Vect}(e_1, e'_1)$ .  $\mathfrak{B}_1 = (e_1, e'_1)$ ,  $\theta_{H_1} = \theta|_{H_1 \times H_1}$ . On a

$$S = M(\theta_{H_1}, \mathfrak{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par  $H_2 = H_1^\perp$ . On a :

$$E = H_1 \oplus H_2.$$

$x \in H_1 \cap H_2$  s'écrit :

$$x = \alpha e_1 + \alpha' e'_1$$

avec de plus

$$\theta(x, e_1) = \theta(x, e'_1) = 0,$$

par suite  $\alpha = \alpha' = 0$ .

Soit  $x \in E$ . Pose

$$y = x + \theta(x, e_1) e'_1 - \theta(x, e'_1) e_1.$$

On vérifie aisément que

$$\theta(y, e_1) = 0 \text{ et } \theta(y, e'_1) = 0,$$

$\implies y \in H_1^\perp = H_2$ , et, donc  $x \in H_1 + H_2$ ,  $\implies E = H_1 \oplus H_2$ .

Si  $\theta_{H_2} = \theta|_{H_2 \times H_2}$  est nulle, on arrête le processus qui consiste à :

1.  $\exists$  des vecteurs indépendants  $e_1$  et  $e'_1 : \theta(e_1, e'_1) = 1$ ,
2. si  $\dim E > 2$ , l'espace  $E$  est somme directe

$$E = H_1 \oplus K,$$

avec  $H_1 = \text{Vect}(e_1, e'_1)$  et  $\theta$  est nulle sur le sous espace  $K$  qui est ici  $H_2$ .

Si  $\theta$  est non nulle sur  $H_2 \implies \exists e_2, e'_2 \in H_2 : \theta(e_2, e'_2) = 1$ , et donc,

$$M\left(\theta_{Vect(e_2, e'_2)}, \mathfrak{B}_2 = (e_2, e'_2)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Un raisonnement par récurrence sur la dimension de  $E$ , permet de montrer qu'il existe  $2p$  vecteurs indépendants

$$e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p$$

tels que :

$$\theta(e_1, e'_1) = \dots = \theta(e_p, e'_p) = 1,$$

et l'espace  $E$  s'écrit :

$$E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p \oplus K$$

avec  $H_i = Vect(e_i, e'_i)$ . et  $\theta$  est nulle sur  $K$  lorsque  $\dim E > 2p$ .

Complétons le système  $e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p$  en une base

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_p, e'_p, w_{2p+1}, \dots, w_n\}$$

de  $E$ , et la matrice de  $\theta$  par rapport à cette base s'écrit :

$$M(\theta, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} S_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_p & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

avec

$$S_1 = \dots = S_p = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons  $\omega^1, \omega'^1, \dots, \omega^p, \omega'^p, \alpha^{2p+1}, \dots, \alpha^n$  la base duale de  $\mathfrak{B}$ , c'est à dire

$$\begin{cases} \omega^i(e_j) = \delta_j^i, \omega^i(e'_j) = 0 \text{ et } \omega^i(w_j) = 0 \\ \omega'^i(e_j) = 0, \omega'^i(e'_j) = \delta_j^i \text{ et } \omega'^i(w_j) = 0 \\ \alpha^i(e_j) = 0, \alpha^i(e'_j) = 0 \text{ et } \alpha^i(w_j) = \delta_j^i. \end{cases}$$

**Théorème.** Les propriétés suivantes sont équivalentes :



avec

$$S_1 = \dots = S_p = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $A = M(\theta, \mathfrak{B})$ , si  $A$  est de rang maximum  $2n$ , le déterminant de la matrice  $Q$  est appelé **Pfaffien de  $A$**  et est noté  $Pf(A)$  :

$$Pf(A) = \det Q.$$

**Par convention**, le Pfaffien de  $A$  est nul, si le rang de la 2–forme extérieure  $\theta$  est inférieure strictement à la dimension de  $E$  :  $Pf(A) = 0$ .

On déduit le :

**Corollaire.** Deux 2–formes extérieures  $\theta_1, \theta_2 \in \wedge_2 E$ ,  $E$  de dim. finie sont équivalentes si et seulement si, elles ont le même rang :

$$rg\theta_1 = rg\theta_2$$

### 5.4.1 Définitions

$E$  un  $\mathbb{K}$ –e.v. de caractéristique  $\neq 2$ .

**Forme symplectique. Espace vectoriel symplectique**

$\theta \in \wedge_2(E)$  est symplectique sur  $E \xleftrightarrow{\text{déf}} \theta$  est non dégénérée  
 $(E, \theta)$  est dit e.v. vectoriel symplectique

Et donc,  $\dim E$  paire  $2n$  et  $rg(\theta) = 2n$

**Base symplectique de  $E$ .**

C'est une base  $\mathfrak{B} = \{e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_n, e'_n\}$  de  $E$  t.q.

$$M(\theta, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & S \end{pmatrix} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\{\omega^1, \omega'^1, \dots, \omega^n, \omega'^n\}$  la base duale de  $\mathfrak{B}$ , on a :

$$\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^n \wedge \omega'^n$$

**Proposition.** Soit  $E$  un e.v. de dim. finie et  $\theta \in \wedge_2(E)$ . Les pptés suiv. sont équiv. :

1.  $rg\theta = 2p$ ,
2.  $\theta^p \neq 0$  et  $\theta^{p+1} = 0$



**Dém.** Pour  $\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^p \wedge \omega'^p \implies$

$$\theta^p = p! \omega^1 \wedge \omega'^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \wedge \omega'^p. \quad \blacksquare$$

### Exemples

1.  $\theta$  quelconque (non néce. non dégénérée).

Soit  $\bar{E} = \frac{E}{A(\theta)}$ , Pose

$$\bar{\theta}(x + A(\theta), y + A(\theta)) = \theta(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

$\bar{\theta}$  non dégénérée. Conséquence  $\bar{\theta}$  est symplectique sur  $\bar{E}$ .

2. Soient  $(E_1, \theta_1)$  et  $(E_2, \theta_2)$  deux e.v. symplectiques,

$$p_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \text{ et } p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$$

les proj. can.. Considère  $\theta \in \bigwedge_2(E_1 \times E_2)$  définie par :

$$\theta = p_1^* \theta_1 + p_2^* \theta_2.$$

$\theta = p_1^* \theta_1 + p_2^* \theta_2$  est une structure symplectique sur  $E_1 \times E_2$ .

### 5.4.2 Sous espaces d'un espace vectoriel symplectique

Soient  $(E, \theta)$  un e.v. symplectique et  $H$  un s.e.v. de  $E$ .

Désignons par  $\theta_H$  la restriction de  $\theta$  au sous espace  $H$ . Évidemment on a :

$$A(\theta_H) = \{x \in H \mid i(x)\theta_H = 0\} = H \cap H^\perp,$$

conséquence,

$$rg(\theta_H) = \dim H - \dim(H \cap H^\perp),$$

comme  $\theta$  est non dégénérée, alors  $A(\theta_{H^\perp}) = H \cap H^\perp$  puisque  $H^{\perp\perp} = H$ , or  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H$ , on déduit :

$$rg(\theta_H) - rg(\theta_{H^\perp}) = 2 \dim H - \dim E.$$

### Définitions

1.  $H$  est un sev *symplectique* (ou *non isotrope*) si,  $(H, \theta_H)$  est un e.v. symplectique.

2.  $H$  est isotrope si  $H \cap H^\perp \neq (0)$ .
3.  $H$  est totalement isotrope si  $H \subseteq H^\perp$ .
4.  $H$  est coisotrope si  $H \supseteq H^\perp$ .
5.  $H$  est lagrangien si  $H$  totalement isotrope maximal.

On déduit la

**Proposition.** On a :

1.  $H$  s.e. symplectique  $\iff H \cap H^\perp = (0) \iff \theta_H$  est non dégénérée  $\iff E = H \oplus H^\perp$ .
2.  $H$  s.e. isotrope  $\iff \theta_H$  est dégénérée.
3.  $H$  s.e. totalement isotrope  $\iff \theta_H$  est nulle.

**Définition.**  $\dim E$  paire  $2n$ . On appelle polarisation réelle un  $(\theta, L)$  :  $\theta$  symplectique et  $L$  s.e. lagrangien.

**Proposition.**  $L$  s.e.v. de  $E$ . les pptés suiv. sont équivalentes :

1.  $L$  est lagrangien,
2.  $L = L^\perp$ .

**Dém.** Si  $L \subsetneq L^\perp$ , alors  $\exists a \in E - L : \theta(a, y) = 0 \forall y \in L$ . Soit  $L' = L \oplus \mathbb{K}a$ . On a  $L \subset L'$ . Soit  $z = x + \lambda a \in L'$ , avec  $x \in L$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\theta(z, z') = \theta(x + \lambda a, x' + \lambda' a) = \theta(x, x') + \lambda\theta(x, a) + \lambda'\theta(a, x') = 0$$

$\forall z' = x' + \lambda' a \in L'$ . et donc,  $z \in L'^\perp$ . D'où  $L' \subset L'^\perp$ , Absurde ( $L$  totalement isotrope maximal). Donc  $1 \implies 2$ . L'implication  $2 \implies 1$  est immédiate. ■

Il résulte aussitôt de l'égalité  $\dim L^\perp = \dim E - \dim L$ , le

**Corollaire.** Soit  $L$  s.e.t.i. Alors  $L$  lagrangien  $\iff \dim L = n = \frac{1}{2} \dim E$ .

On sait que l'isomorphisme  $\theta^b : x \mapsto i(x)\theta$ , de  $E$  sur  $E^*$ , transforme  $L^\perp$  sur  $\text{Ann}(L)$ , et si  $L$  est lagrangien, alors  $\theta^b(L) = \theta^b(L^\perp) = \text{Ann}(L)$ , et on particulier  $\dim(\text{Ann}(L)) = n = \frac{1}{2} \dim E$

**Proposition.**  $(\theta, L)$  une polarisation réelle sur  $E$ . Alors toute base  $\omega^1, \dots, \omega^n$  de l'annulateur  $\text{Ann}(L)$  de  $L$ , peut être complétée en une base  $\omega^1, \dots, \omega^n, \omega'^1, \dots, \omega'^n$  de  $E^*$  telle que :

$$\theta = \omega^1 \wedge \omega'^1 + \dots + \omega^n \wedge \omega'^n.$$

**Dém.** Soient  $\omega^1, \dots, \omega^n$  base de  $\text{Ann}(L)$ , que l'on complète en une base  $\omega^1, \dots, \omega^n, \eta^1, \dots, \eta^n$  de  $E^*$ ,  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  la base de  $E$  dont la base duale est  $\omega^1, \dots, \omega^n, \eta^1, \dots, \eta^n$ .

Il est clair que  $L \mid \omega^1 = 0, \dots, \omega^n = 0$ , et on a  $L = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ .  
 $\theta$  s'écrit :

$$\theta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} \omega^i \wedge \eta^j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \eta^i \wedge \eta^j,$$

$L$  lagrangien  $\implies \theta(v_i, v_j) = 0$ ,  $\implies$  les  $c_{ij} = 0$ , donc  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \left( \sum_{j>i}^n a_{ij} \omega^j + \sum_{i=1}^n b_{ij} \eta^j \right).$$

Posons  $\omega'^i = \left( \sum_{j>i}^n a_{ij} \omega^j + \sum_{i=1}^n b_{ij} \eta^j \right)$ .

La famille  $(\omega^1, \dots, \omega^n, \omega'^1, \dots, \omega'^n)$  est une base de  $E^*$  dans laquelle la 2-forme  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \omega'^i,$$

C.Q.F.D.

### 5.4.3 Endomorphisme adjoint

$E$  un e.v. de dim.  $2n$  muni d'une structure symplectique  $\theta$ .

Soit  $u \in \text{End}(E)$ .

$\forall t \in E, \exists ! t' \in E : ({}^t u \circ \theta^b)(t) = \theta^b(t')$ , la correspondance  $t \mapsto t'$  permet de définir une application de  $u^T : E \longrightarrow E : \forall t.x \in E$ , on ait :

$$\theta(t, u(x)) = \theta(u^T(t), x).$$

On déduit que  $\forall u, v \in \text{End}(E)$  on a :

1.  $\theta(t, u(x)) = \theta(u^T(t), x) \quad \forall t, x \in E$ ,
2.  $u^T$  linéaire,
3.  $(u + v)^T = u^T + v^T$  ,  $(\lambda u)^T = \lambda u^T$ ,
4.  $(u \circ v)^T = v^T \circ u^T$  ,  $u^{TT} = u$  ,  $(id_E)^T = id_E$ ,
5. si  $u \in GL(E)$  alors  $u^T \in GL(E)$  et l'on a  $(u^T)^{-1} = (u^{-1})^T$ .  
 $u^T$  appelé endomorphisme adjoint de  $u$ .

### 5.5 Les groupes $S_p(E, \theta)$ et $Sp(1, n : E)$

$E$  un e.v. de dim.  $2n$  sur  $\mathbb{K}$ , muni d'une structure symplectique  $\theta$ .

On sait qu'il  $\exists$  une base  $e_1, e'_1, \dots, e_n, e'_n$  de  $E$  : par rapport à sa base duale  $e^1, e'^1, \dots, e^n, e'^n$ ,  $\theta$  s'écrit :

$$\theta = e^1 \wedge e'^1 + \dots + e^n \wedge e'^n,$$

$u \in \text{End}(E)$  symplectique  $\iff u^*\theta = \theta$ ,

et donc,

$$u^*\theta^n = (u^*\theta)^n = \theta^n.$$

On déduit :

$$u^*e^1 \wedge u^*e'^1 \wedge \dots \wedge u^*e^n \wedge u^*e'^n = e^1 \wedge e'^1 \wedge \dots \wedge e^n \wedge e'^n,$$

#### Conséquence

$$\det u = 1,$$

en particulier  $u$  inversible. on a donc montré la :

**Proposition.**  $u$  conserve  $\theta \implies u$  est inversible, de plus :

$$u^T = u^{-1}.$$

**Dém.** On a :

$$\theta(x, y) = \theta(u(x), u(y)) = \theta(u^T(u(x)), y), \quad \forall x, y \in E$$

donc  $u^T \circ u = \text{id}_E$ , par suite  $u^T = u^{-1}$ . ■

$u \in GL(E)$  est symplectique  $\iff \forall x, y \in E, \theta(u(x), u(y)) = \theta(x, y)$ .

$$Sp(E, \theta) = \{u \in GL(E) \mid u^*\theta = \theta\}$$

est un sous groupe de  $GL(E)$ , appelé groupe symplectique de  $(E, \theta)$ .

Ordonnons la base symplectique comme suit :

$$\mathfrak{B}_s = (e_1, e_2, \dots, e_n, e'_1, e'_2, \dots, e'_n),$$

et dans ces notations on a :

$$M(\theta, \mathfrak{B}_s) = J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pa suite, si  $U = M(u, \mathfrak{B}_s)$ , alors

$${}^tUJU = J.$$

Notons par  $Sp(n, \mathbb{K})$  le groupe des matrices symplectiques de  $E$  par rapport  $\mathfrak{B}_s$ . Ainsi, une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

avec  $A, B, C, D \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K})$ , est dans le groupe  $Sp(n, \mathbb{K}) \iff$

1.  ${}^tAD - {}^tBC = I_n$ ,
2.  ${}^tAB$  et  ${}^tCD$  symétriques.

Soit maintenant  $(\theta, L)$  une polarisation réelle sur  $E$ .  $\exists \mathfrak{B}_s = (e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n)$  base de  $E$  : si  $e^1, \dots, e^n, e'^1, \dots, e'^n$ , est sa base duale, alors :

- (a)  $L = Vect(e_1, \dots, e_n)$ .
- (b)  $\theta = e^1 \wedge e'^1 + \dots + e^n \wedge e'^n$ .

Un automorphisme  $u$  de  $E$  conserve  $(\theta, L)$  si :

1.  $u^*\theta = \theta$ ,
2.  $u(L) = L$ .

Les automorphismes de  $E$  qui conservent  $(\theta, L)$  forment un sous groupe de  $Sp(E, \theta)$ , noté  $Sp(1, n; E)$  et appelé groupe 1-symplectique.

$$Sp(1, n; \mathbb{K}) = \{M(u, \mathfrak{B}_s) \mid u \in p(1, n; E)\}$$

Ainsi, sont les matrices du type :

$$\begin{aligned} Sp(1, n; \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{K}) \right. \\ &: \quad \left. {}^tCD \text{ symétrique, } {}^tAD = I_n \right\}, \end{aligned}$$

Ainsi, le groupe  $Sp(1, n; \mathbb{K})$  est formé des matrices du type :

$$\begin{aligned} Sp(1, n; \mathbb{K}) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{K}) \right. \\ &: \quad \left. {}^tC {}^t(A^{-1}) \text{ symétrique} \right\}. \end{aligned}$$

**Proposition.** Les automorphismes symplectiques (resp. 1-symplectiques) transforment les s.e.t.i. (resp. s.e.l.) en s.e.t.i. (resp. s.e.l.).

**Dém.** Soient  $\sigma \in Sp(E, \theta)$  et  $L$  un s.e.t.i.. On a

$$\theta(\sigma(x), \sigma(y)) = \theta(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in E$$

$\implies \sigma(L)$  est t.i..

Suppose  $L$  lagrangien. Or  $\dim \sigma(L) = n = \frac{1}{2} \dim E$ , donc  $\sigma(L)$  lagrangien.

■

**Proposition.**  $L$  un s.e.l.,  $M_0$  un s.e.t.i. de  $E$  supplémentaire à  $L$ . Alors  $\exists M$  s.e.l. de  $E$ , supplémentaire à  $L$  et contenant  $M_0$ .

**Dém.** Soit  $M$  un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de  $E$  transverses à  $L$  contenant  $M_0$ . Alors  $M$  est un sous-espace lagrangien. ■

## 5.6 VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

### 5.6.1 Structures symplectiques

**Variété symplectique :**  $(M, \theta)$  dans lequel  $M$  v.d.  $\dim M = 2n$ ,  $\theta \in \Lambda_2(M)$  :

1.  $\theta$  fermée :  $d\theta = 0$ ,
2.  $\theta$  non dégénérée :  $(\forall X \in \mathfrak{X}(M)) (i(X)\theta = 0 \implies X = 0)$ .

Ainsi,

1.  $\zeta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Lambda_1(M)$ ,  $X \longmapsto i(X)\theta$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{F}(M)$ -module.
2.  $(T_x M, \theta_x)$  est un e.v. symplectique
3.  $M$  orientable (orienté par :  $\theta^n$ )

### 5.6.2 Exemples

#### 1. Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$

$$\theta = dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n$$

$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  S.C. cartésiennes de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**2. Variétés de dimension 2 (surface) :**  $M$  orientable  $\implies M$  symplectique.

**3. Produit de variétés symplectiques :**

$(M_1, \theta_1)$  et  $(M_2, \theta_2)$  deux v.s.

$p_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$  et  $p_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$  les projections can. Alors

$$\theta = p_1^* \theta^1 \pm p_2^* \theta^2 \stackrel{\text{Notation}}{=} \theta^1 \pm \theta^2$$

est une s.s. sur  $M_1 \times M_2$ .

### 5.6.3 Forme de Liouville sur un fibré cotangent $T^*B$

$B$  une v.d. de dim.  $n$ ,  $T^*B$  son fibré cotangent.

$$\pi : T^*B \longrightarrow B, u = (z, \omega_z) \longmapsto z$$

la proj. can.

On définit  $\lambda \in \bigwedge_1(M)$  par :

$$\lambda_u(X_u) = \omega_z(d\pi_{\pi(u)}(X_u)),$$

$\forall u = (z, \omega_z) \in T^*B$  et  $X_u \in T_u(T^*B)$ ,  $\lambda$  est appelée forme de Liouville du fibré cotangent  $T^*B$ .

Rappelons que si  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  un S.C.L.

$(\bar{U} = \pi^{-1}(U), \bar{\varphi})$  défini par :

$$\bar{\varphi} : (z, \omega_z) \longmapsto (x^1(z), \dots, x^n(z), p_1(z), \dots, p_n(z)),$$

avec  $\omega_z = \sum p_i dx^i$  et  $z \in U$ , est un S.C.L. sur  $\bar{U}$ . Localement sur  $U$ , tout  $X \in \mathfrak{X}(U)$  s'écrit :

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum b^i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

et donc,

$$d\pi_{\pi(u)}(X_u) = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

par suite,

$$\lambda_u(X_u) = \omega_z(d\pi_{\pi(u)}(X_u)) = \omega_z\left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum a^i p_i$$

par conséquent,

$$\lambda = \sum p_i dx^i$$

Pose

$$\theta = d\lambda = \sum dp_i \wedge dx^i.$$

On voit donc que  $\theta$  est une structure symplectique sur  $T^*B$ , appelée structure symplectique canonique.

### 5.6.4 Sous variétés d'une variété symplectique

Soient  $(M, \theta)$  une v.s. et  $N$  une s.v.s. de  $M$ .

1.  $N$  est une s.v. *symplectique* (ou *non isotrope*) de  $M$  si,  $\forall x \in N$ ,  $T_x N$  est un s.e.v. symplectique de  $(T_x M, \theta_x)$
2.  $N$  est *isotrope* si  $\forall x \in N$ ,  $T_x N$  est un s.e.v. isotrope de  $(T_x M, \theta_x)$ .
3.  $N$  est *totalelement isotrope* si  $\forall x \in N$ ,  $T_x N$  est un s.e.v. totalelement isotrope de  $(T_x M, \theta_x)$ .
4.  $N$  est *coïsothrope* si  $\forall x \in N$ ,  $T_x N$  est un s.e.v. *coïsothrope* de  $(T_x M, \theta_x)$ .
5.  $N$  est *lagrangienne* si  $\forall x \in N$ ,  $T_x N$  est un s.e.v. lagrangien  $(T_x M, \theta_x)$ .
6. Un feuilletage  $\mathfrak{F}$  de  $M$  est dit lagrangien, si toute feuille de  $\mathfrak{F}$  est une sous variété lagrangienne de  $M$ .

**Définition.**  $\dim M$  paire  $2n$ . On appelle polarisation réelle un  $(\theta, \mathfrak{F})$  :  $\theta$  symplectique et  $\mathfrak{F}$  est un feuilletage lagrangien.

**Exemple.**

On considère  $T^*B$  muni de la structure symplectique canonique  $\theta = d\lambda$ ,  $\lambda$  étant la forme de Liouville de  $T^*B$ . Alors le feuilletage  $\mathfrak{F}_\pi$  défini par la submersion  $\pi$  est lagrangien. par suite le couple  $(\theta, \mathfrak{F}_\pi)$  est une polarisation réelle.

### 5.6.5 Systèmes hamiltoniens

Soient  $(M, \theta)$  une v.s.

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est appelé automorphisme .

Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Les pptés suivantes sont équivqlentes :

1. Au voisinage de chaque point, le flot local  $\varphi_t$  de  $X$  est un symplectomorphisme de l'ouvert où il est défini sur son image,
2.  $L_X \theta = 0$ , (dérivé de Lie suivant  $X$ )
3.  $i(X)\theta$  fermée.

**Dém.**

La relation  $L_X \theta = i(X) d\theta + di(X)\theta = di(X)\theta$  montre que (2) et (3) sont équivalentes.

Montrons (1)  $\implies$  (2)



Suppose que le flot local  $\varphi_t$  de  $X$  est un symplectomorphisme, donc

$$\varphi_t^* \theta = \theta$$

par conséquent,

$$L_X \theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \theta - \theta}{t} = \frac{d(\varphi_t^* \theta)}{dt} (0) = 0.$$

Réciproquement, si

$$(L_X \theta) = \frac{d(\varphi_t^* \theta)}{dt} (0) = 0,$$

alors

$$\frac{d(\varphi_t^* \theta)}{dt} (t) = \varphi_t^* (L_X \theta) = 0,$$

par suite  $(\varphi_t^* \theta)_x$  constante . d'où

$$(\varphi_t^* \theta)_x = (\varphi_0^* \theta)_x = \theta_x$$

par suite,

$$\varphi_t^* \theta = \theta$$

ce qui montre que  $\varphi_t$  est un symplectomorphisme  $\forall t$ .

**Définition.**  $X \in \mathfrak{X}(M)$  est appelé système localement hamiltonien s'il vérifie l'une des pptés équivalentes de la propo. précédente. On dit aussi que  $X$  est un automorphisme infinitésimal pour  $\theta$ .

On dit que  $X$  est un champ hamiltonien si la forme de Pfaff  $i(X)\theta$  est exacte, i.e. si  $\exists H : M \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable t.q.

$$i(X)\theta = -dH$$

$H$  est appelée application hamiltonienne où hamiltonien.

La dualité  $\zeta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \bigwedge_1(M)$ ,  $X \mapsto i(X)\theta$ , permet d'associer à toute application différentiable  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , un unique champ hamiltonien  $X_H$ , dit associé à  $H$ , t.q.

$$i(X_H)\theta = -dH.$$

**Expression locale dans  $T^*B$**  muni de la forme symplectique canonique  $\theta = d\lambda$ .

Plaçons nous dans un S.C.  $(\overline{U}, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  de  $T^*B$ .

Soit  $H : T^*B \rightarrow \mathbb{R}$ , un hamiltonien et  $X_H$  le champ hamiltonien associé

:

$$i(X_H)\theta = -dH.$$

Par rapport à ce S.C.  $\theta$  et  $dH$  s'écrivent :

$$\theta = d\lambda = \sum dp_i \wedge dx^i$$

et

$$dH = \sum \left( \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right)$$

L'équation différentielle des courbes intégrales de  $X_H$  s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dt} = X_H(\phi(t)),$$

donc, dans ces coordonnées on a :

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \end{cases}$$

Ces équations sont appelées équations de Hamilton.

### 5.6.6 Crochet de Poisson

**Proposition.** Soient  $H, K$  deux hamiltonien et  $X_H, X_K$  les champs hamiltoniens associés. Le crochet  $[X_H, X_K]$  est un Champ hamiltonien. Plus précisément l'application

$$\{H, K\} = \theta(X_H, X_K)$$

satisfait  $[X_H, X_K] = X_{\{H, K\}}$ . De plus  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{, \})$  est une algèbre de Lie de dimension infinie.

**Dém.**

$$\begin{aligned} i([X_H, X_K])\theta &= [\mathcal{L}_{X_H}, i(X_K)]\theta \\ &= -d(\theta(X_H, X_K)) = -d\{H, K\}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\{H, K\} = -\{K, H\}$ .

Pour l'identité de Jacobi on a :

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta(X_H, X_K, X_L) \\ &= X_H(\theta(X_K, X_L)) - X_K(\theta(X_H, X_L)) \\ &\quad + X_L(\theta(X_H, X_H)) - \theta([X_H, X_L], X_K) \\ &\quad + \theta([X_H, X_K], X_L) - \theta([X_L, X_K], X_H), \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} X_H(\theta(X_K, X_L)) &= -X_H(\{K, L\}) = -d\{K, L\}(X_H) \\ &= i(X_{\{K, L\}})\theta(X_H) = -\theta(X_H, X_{\{K, L\}}) \\ &= \{H, \{K, L\}\} \end{aligned}$$

et,

$$\theta([X_H, Y_L], X_K) = \theta(X_{\{H, L\}} \cdot X_K) = \{K, \{H, L\}\},$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta(X_H, X_K, X_L) \\ &= \{H, \{K, L\}\} - \{K, \{H, L\}\} + \{L, \{H, K\}\} \\ &\quad - \{K, \{H, L\}\} + \{L, \{H, K\}\} - \{H, \{L, K\}\} \\ &= 2(\{H, \{K, L\}\} + \{K, \{L, H\}\} + \{L, \{H, K\}\}), \end{aligned}$$

ce qui montre l'identité de Jacobi.

$$\{H, \{K, L\}\} + \{K, \{L, H\}\} + \{L, \{H, K\}\} = 0.$$

**Expression locale du crochet de Poisson dans les coordonnées canoniques de  $T^*B$ .** Dans un S.C.  $(\bar{U}, x^i, p_j)$  de  $T^*B$  la forme  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum dp_i \wedge dx^i$$

et donc,  $\forall H, K \in C^\infty(T^*B)$ , on a :

$$\{H, K\} = \theta(X_H, X_K) = \sum \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial K}{\partial p_i} \right).$$

### 5.6.7 Variétés de Poisson

$M$  v.d.

**déf :** C'est  $(C^\infty(M), \{.\}) : (H, K) \mapsto \{H, K\}$ .  $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , app.  $\mathbb{R}$ -bilinéaire vérifiant :

1.  $\{H, K\} = -\{K, H\}$ ,
2. Jacobi :  $\{H, \{K, L\}\} + \{K, \{L, H\}\} + \{L, \{H, K\}\} = 0$ .

Leibniz :

$$\begin{aligned} \{H, KL\} &= \{H, K\}L + K\{H, L\}. \\ \{HK, L\} &= \{H, L\}K + H\{K, L\}. \end{aligned}$$

**Exemple**

1.  $(M, \theta)$  v.s. Pour

$$\{H, K\} = \theta(X_H, X_K).$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= (i(X_H)\theta)(X_K) = -(i(X_K)\theta)(X_H) \\ &= -X_K(H) = X_H(K). \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} \{H, KL\} &= X_H(KL) = X_H(K)L + KX_H(L), \\ &= \{H, K\}L + K\{H, L\} \\ \{HK, L\} &= -X_L(HK) = -X_L(H)K - HX_L(K) \\ &= \{H, L\}K + H\{K, L\} \end{aligned}$$

D'où Leibniz, par suite  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{.\})$  définit une str. de Poisson sur  $M$ .

2.  $(\mathcal{G}, [,])$  alg. de lie de dim. finie.  $\mathcal{G}^*$  e. dual de  $\mathcal{G}$ .

En partant de la différentielle de Gâteaux, ou différentielle faible, de  $H : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $x \in \mathcal{G}^*$  est l'application  $dH_x : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{G}^*$  on a :

$$\langle u, dH_x \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(x + tu) - H(x)}{t},$$

bien entendu  $dH_x \in \mathcal{G}^{**} \approx \mathcal{G}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dénote la mise en dualité (produit scalaire naturel)  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Pour  $H, K \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R})$ ,  $x \in \mathcal{G}^*$ , on a :

$$dH_x, dK_x \in \mathcal{G}^{**} \approx \mathcal{G}$$

Pose

$$\{H, K\}(x) = \langle x, [dH_x, dK_x] \rangle.$$

L'app.  $\{, \}$  est bil. anti-symétrique, et vérifie Leibniz

$$d(HK)_x = H(x)dK_x + K(x)dH_x,$$

vérifions Jacobi.

D'abord, on a :

$$ad_X : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad ad_X Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$$

et:

$$\begin{aligned} ad_X^* : \mathcal{G}^* &\longrightarrow \mathcal{G}^*, \quad \langle ad_X^* x, Y \rangle = -\langle x, ad_X Y \rangle \\ &= \langle x, [Y, X] \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}, \quad \forall x \in \mathcal{G}^*. \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} d\{H, K\}(x)(y) &= \langle y, [dH_x, dK_y] \rangle + \langle x, [d^2 H_x(y), dK_x] \rangle \\ &\quad + \langle x, [dH_x, d^2 K_x(y)] \rangle \\ &= \langle y, [dH_x, dK_y] \rangle + \langle ad_{dK_x}^* x, d^2 H_x(y) \rangle \\ &\quad - \langle ad_{dH_x}^* x, d^2 K_x(y) \rangle = \langle y, [dH_x, dK_y] \rangle \\ &\quad + \langle y, d^2 H_x(ad_{dK_x}^* x) \rangle \\ &\quad - \langle y, d^2 K_x(ad_{dH_x}^* x) \rangle, \end{aligned}$$

pose

$$X = dH_x, \quad Y = dK_x \text{ et } Z = dL_x,$$

on a donc,

$$d\{H, K\}(x) = [X, Y] + d^2 H_x(ad_Y^* x) - d^2 K_x(ad_X^* x),$$

on déduit

$$\begin{aligned} \{\{H, K\}, L\}(x) &= \langle x, [d\{H, K\}_x, dL_x] \rangle \\ &= \langle x, [[X, Y], Z] \rangle \\ &\quad + \langle x, [d^2 H_x(ad_{dK_x}^* x), dL_x] \rangle \\ &\quad - \langle x, [d^2 K_x(ad_{dH_x}^* x), dL_x] \rangle \end{aligned}$$

et comme,

$$\begin{aligned} &\{\{H, K\}, L\}(x) + \{\{K, L\}, H\}(x) \\ &\quad + \{\{L, H\}, K\}(x) \\ &= \langle x, [[X, Y], Z] \rangle + \langle x, [[Y, Z], X] \rangle \\ &\quad + \langle x, [[Z, X], Y] \rangle \\ &+ \langle x, [d^2 H_x(ad_Y^* x), Z] \rangle - \langle x, [d^2 K_x(ad_X^* x), Z] \rangle \\ &\quad - \langle x, [d^2 K_x(ad_Z^* x), X] \rangle - \langle x, [d^2 H_x(ad_Y^* x), X] \rangle \\ &\quad - \langle x, [d^2 L_x(ad_X^* x), Y] \rangle - \langle x, [d^2 H_x(ad_Z^* x), Y] \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \langle x, [d^2 H_x (ad_Y^* x), Z] \rangle - \langle x, [d^2 H_x (ad_Z^* x), Y] \rangle \\ &= \langle ad_Z^* x, d^2 H_x (ad_Y^* x) \rangle - \langle ad_Y^* x, d^2 H_x (ad_Z^* x) \rangle \\ &= d^2 H_x (ad_Y^* x, ad_Z^* x) - d^2 H_x (ad_Z^* x, ad_Y^* x) = 0, \end{aligned}$$

conséquence

$$\{\{H, K\}, L\} + \{\{K, L\}, H\} + \{\{L, H\}, K\} = 0$$

Ainsi,  $\mathcal{G}^*$  possède une structure naturelle de variété de Poisson, appelée structure de Poisson de Kirillov de  $\mathcal{G}^*$ .

Un 2-cocycle symplectique de  $\mathcal{G}$  est une forme bilinéaire  $\theta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  :

- (a)  $\theta(X, Y) = -\theta(Y, X)$
- (b)  $\theta([X, Y], Z) + \theta([Y, Z], X) + \theta([Z, X], Y) = 0$

Pour  $(H, K) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$  et  $x \in \mathcal{G}^*$  pose

$$\{H, K\}_{(\theta)}(x) = \langle x, [dH_x, dK_y] \rangle - \theta(dH_x, dK_y).$$

**Exercice :**  $\{H, K\}_{(\theta)}$  structure de Poisson, appelée structure de Lie Poisson associée au cocycle  $\theta$ .

Soit  $M$  une v. de Poisson.

$\forall H$ , l'application

$$K \mapsto \{H, K\}, \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

est une dérivation (Leibniz), donc  $\exists X_H \in \mathfrak{X}(M)$  t.q.

$$X_H(K) = \{H, K\} = -X_K(H).$$

$X_H$  est appelé champ hamiltonien associé à  $H$ . La relation de Jacobi peut s'écrire :

$$\{\{H, K\}, L\} = \{H, \{K, L\}\} - \{K, \{H, L\}\},$$

soit

$$X_{\{H, K\}}(L) = X_H(X_K(L)) - X_K(X_H(L))$$

d'où

$$X_{\{H, K\}} = [X_H, X_K].$$

**Proposition.**  $(M, \theta)$  une v.s.,  $N$  une sous variété de  $M$  et  $i : N \longrightarrow M$  l'injection canonique t.q. la forme induite  $\theta_N = i^*\theta$  soit de rang constant. Alors la distribution

$$x \longmapsto A(\theta_N(x)) = T_x N \cap (T_x N)^\perp$$

est complètement intégrable sur  $N$ .

**Dém.** On a :

$$A(\theta_N) = TN \cap (TN)^\perp \text{ sous-fibré de } TN$$

et soient  $X, Y \in \Gamma(A(\theta_N)) = \Gamma(TN \cap (TN)^\perp)$ . On a :

$$\begin{aligned} i([X, Y])\theta_N &= [L_X, i_Y]\theta_N \\ &= L_X i_Y \theta_N - i_Y L_X \theta_N \\ &= -i_Y (i_X d\theta_N + di_X \theta_N) = 0, \end{aligned}$$

par suite,  $[X, Y] \in \Gamma(A(\theta_N))$ , donc cette distribution est involutive, et par conséquent, elle est complètement intégrable d'après le théorème de Frobenius. ■

**Proposition.** Les hypothèses et notations étant celles de la proposition précédente. On suppose de plus qu'il existe

$$\pi : N \longrightarrow B, \text{ submersion surjective}$$

telle que les fibres soient les sous variétés intégrales de la distribution

$$x \longmapsto A(\theta_N(x)).$$

Alors il existe une forme symplectique  $\theta_B$  sur  $B$  telle que :

$$\theta_N = \pi^* \theta_B = i^* \theta.$$

**Dém.** Si  $\theta_B$  existe alors  $\forall \bar{x} \in B, \forall \bar{X}, \bar{Y} \in T_{\bar{x}} B$

$$\theta_B(\bar{x})(\bar{X}, \bar{Y}) = \theta_N(x)(X, Y)$$

pour tous  $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$ ,  $X, Y \in T_x N$  t.q.  $d\pi_x(X) = \bar{X}$  et  $d\pi_x(Y) = \bar{Y}$ . Donc si  $\theta_B$  existe, alors elle est unique.

Montrons l'existence de  $\theta_B$ . Il suffit de montrer que

$$\theta_N(x)(X, Y)$$

ne dépend pas de  $x$  dans  $\pi^{-1}(\bar{x})$ , ni de  $X \in (d\pi_x)^{-1}(\bar{X})$  et  $Y \in (d\pi_x)^{-1}(\bar{Y})$ .

Si  $X, X' \in (d\pi_x)^{-1}(\bar{X})$  et  $Y \in (d\pi_x)^{-1}(\bar{Y})$ , alors

$$X - X' \in \ker d\pi_x = A(\theta_N(x)),$$

par suite,

$$\theta_N(x)(X - X', Y) = 0,$$

soit,

$$\theta_N(x)(X, Y) = \theta_N(x)(X', Y).$$

Le même raisonnement montre que si  $Y, Y' \in (d\pi_x)^{-1}(\bar{Y})$ , alors

$$\theta_N(x)(X', Y) = \theta_N(x)(X', Y'),$$

donc,

$$\theta_N(x)(X, Y) = \theta_N(x)(X', Y').$$

Soit  $x, x' \in \pi^{-1}(\bar{x})$ , puisque  $\pi^{-1}(\bar{x})$  est connexe, alors il existe un ouvert  $U$  de  $N$  contenant  $x$  et  $x'$ ,  $Z \in \mathfrak{X}(U)$  t.q.  $Z$  appartenant à la distribution  $x \mapsto A(\theta_N(x))$  et  $x, x'$  soient dans la même courbe intégrale  $Z$ . Notons par  $\varphi_t(x)$  le flot local de  $Z$ .

$\exists s$  t.q.  $\varphi_s(x) = x'$ .

Soient  $X, Y \in T_x N$ , vérifiant

$$d\pi_x(X) = \bar{X} \text{ et } d\pi_x(Y) = \bar{Y}.$$

Posons

$$X' = d(\varphi_s)_x(X) \text{ et } Y' = d(\varphi_s)_x(Y)$$

Comme  $Z$  est une section de la distribution  $x \mapsto A(\theta_N(x))$ , chaque courbe intégrale de ce champ est complètement contenue dans une feuille du feuilletage associé à cette distribution, donc

$$\pi \circ \varphi_s = \pi,$$

par suite

$$d\pi_{x'}(X') = d\pi_{x'}(d(\varphi_s)_x(X)) = d\pi_x(X) = \bar{X}$$

et

$$d\pi_{x'}(Y') = d\pi_{x'}(d(\varphi_s)_x(Y)) = d\pi_x(Y) = \bar{Y}$$



or

$$\begin{aligned}\theta_N(x')(X', Y') &= \theta_N(\varphi_s(x))(d(\varphi_s)_x(X), d(\varphi_s)_x(Y)) \\ &= (\varphi_s^* \theta_N)(x)(X, Y),\end{aligned}$$

et comme

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \theta_N) = \varphi_t^*(L_Z \theta_N) = 0$$

car

$$L_Z \theta_N = i(Z) d\theta_N + di(Z) \theta_N$$

puisque  $d\theta_N = 0$  et  $Z \in \ker d\pi = A(\theta_N)$ . On a donc,

$$\varphi_t^* \theta_N = \theta_N,$$

par suite

$$\theta_N(x')(X', Y') = \theta_N(x)(X, Y),$$

Ce qui montre l'existence et l'unicité de  $\theta_B$ .

L'espace

$$T_{\bar{x}}B \stackrel{\text{identification}}{\approx} \frac{T_x N}{\ker d\pi_x = T_x N \cap (T_x N)^\perp = A(\theta_N)}$$

La définition de  $\theta_B$  et de la construction de la structure d'esp. vect. symplectique quotient étudié dans la partie linéaire montre que  $\theta_B$  est de rang constant =  $\dim B$ .

Enfin,

$$\pi^* d\theta_B = d\pi^* \theta_B = d\theta_N = 0$$

ce qui montre  $d\theta_B = 0$  car  $\pi$  étant une submersion,  $\pi^*$  injective. ■

**Proposition.** Les hypothèses et notations étant celles de la proposition précédente. Soit  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable t.q.

$$\forall x \in N, X_H(x) \in T_x N$$

$\exists \widehat{H} : B \rightarrow \mathbb{R}$  unique t.q.

$$H|_N = \widehat{H} \circ \pi$$

De plus,  $X_H$  et  $X_{\widehat{H}}$  sont  $\pi$ -reliés :

$$\pi_* X_H = X_{\widehat{H}} \circ \pi.$$

**Dém.** Puisque  $\forall x \in N, X_H(x) \in T_x N$ , alors

$$dH(x) \in \left( (T_x N)^\perp \right)^\circ,$$

donc  $dH(x) = 0$  sur

$$T_x N \cap (T_x N)^\perp = \ker d\pi_x = T_x(\pi^{-1}(\pi(x))),$$

donc  $H$  est constante sur les fibres de la submersion  $\pi$ , par suite il existe  $\widehat{H} : B \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable t.q.

$$H|_N = \widehat{H} \circ \pi = \pi^*(\widehat{H}).$$

On a donc

$$\pi^*\theta_B = \theta_N \text{ et } d(H|_N) = d\pi^*(\widehat{H}) = \pi^*(d\widehat{H}).$$

on déduit

$$\begin{aligned} \pi^*(i(d\pi_x(X_{H|N}))\theta_B) &= -i(X_{H|N})\theta_N = -d(H|_N) \\ &= -\pi^*(d\widehat{H}) = \pi^*(i(X_{\widehat{H}})\theta_B) \end{aligned}$$

$\pi$  étant une submersion,  $\pi^+$  injective et  $\theta_B$  non dégénérée donc

$$\forall x \in N, d\pi_x(X_H(x)) = X_{\widehat{H}}(\pi(x)).$$

### 5.6.8 Propriétés des variétés de Poisson

Soit  $M$  une variété de Poisson .

$\{, \}$  le crochet de Poisson

Pour  $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , on pose

$$X_H = \{H, \cdot\}.$$

La relation de Jacobi donne

$$\{\{F, G\}, H\} = \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\}$$

par suite,

$$X_{\{F, G\}} = [X_F, X_G].$$

La relation

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= X_H(K) = \langle dK, X_H \rangle \\ &= -X_K(H) = -\langle dH, X_K \rangle \end{aligned}$$

montre que pour chaque  $x \in M$ , la valeur de  $\{H, K\}(x)$  ne dépend que des valeurs en  $x$  de  $dH(x)$  et de  $dK(x)$ , cette dépendance est bilinéaire antisymétrique, donc il existe une application bilinéaire antisymétrique

$$P_x : T_x^*M \times T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R}$$

t.q.

$$\{H, K\}(x) = P_x(dH(x), dK(x)).$$

Par rapport à un système de coordonnées locales  $(x^i)$  défini dans un voisinage de  $x$  on a

$$\{x^i, x^j\}(x) = P_x(dx^i, dx^j) = P_x^{ij}.$$

Une variété de Poisson peut être définie par un bivecteur  $P$  tel que l'espace  $\mathcal{C}^\infty(M)$  muni du crochet

$$\{H, K\} = P(dH, dK)$$

est une algèbre de Lie.

On peut associer à  $P$  un morphisme de fibrés vectoriels

$$\underline{P} : T^*M \longrightarrow TM,$$

ou encore une application linéaire antisymétrique

$$\underline{P} : \bigwedge_1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

tel que

$$\langle \beta, \underline{P}(\alpha) \rangle = P(\alpha, \beta) = -\langle \alpha, \underline{P}(\beta) \rangle.$$

Ainsi

$$X_H = \{H, \cdot\} = P(dH, \cdot) = \underline{P}(dH).$$

$(M, P)$  V. de Poisson

$\forall x \in M$ ,

Espace caractéristique en  $x$

$$C_x = \underline{P}(T_x^*M)$$

Champ de caractéristique

$$C = \underline{P}(T^*M)$$

**Morphisme de variété de Poisson**

$(M_1, P_1)$  et  $(M_2, P_2)$  deux V. de Poisson

$\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$  morphisme de V.D.

$\varphi$  est un morphisme de variété de Poisson si

$$\{\varphi^*H, \varphi^*K\}_1 = \varphi^* \{H, K\}_2$$

soit,

$$d\varphi_x P_1(x) = P_2(\varphi(x)).$$

### 5.6.9 Quotient d'une variété symplectique ou de Poisson

$E$  E.V.,  $\dim E < \infty$ ,

$E^*$  espace dual.

$P : E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$  forme bilinéaire.

$\underline{P}$  l'application linéaire

$$\underline{P} : E^* \longrightarrow E$$

définie par

$$\langle \beta, \underline{P}(\alpha) \rangle = P(\alpha, \beta) = -\langle \alpha, \underline{P}(\beta) \rangle.$$

Soit  $C = \underline{P}(E^*) = \text{Im } \underline{P}$  et

$$\theta_C : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\theta_C(u, v) = P(\alpha, \beta)$$

où  $u = \underline{P}(\alpha)$  et  $v = \underline{P}(\beta)$ .

**Proposition.**  $(C, \theta_C)$  est un e.v symplectique et  $\forall F$  sev de  $E$ ,

$$\underline{P}(\text{Ann}(F)) = (F \cap C)^\perp$$

**Dém.**  $\theta_C$  est bien définie. Soient  $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in E^*$  t.q.

$$u = \underline{P}(\alpha) = \underline{P}(\alpha') \quad \text{et} \quad v = \underline{P}(\beta) = \underline{P}(\beta')$$

alors

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \underline{P}(\alpha)(\beta) \\ &= \underline{P}(\alpha')(\beta) = -(\alpha')(\beta) \\ &= -\underline{P}(\beta')(\alpha') = P(\alpha', \beta'), \end{aligned}$$

donc  $\theta_C$  est bien définie.  $\theta_C$  antisymétrique.

Soit  $u \in C$  t.q.  $i(u)\theta_C = 0$ . Pose  $u = \underline{P}(\alpha)$ . On a

$$\underline{P}(\alpha)(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in E^*$$

donc  $\langle u, \beta \rangle = 0 \forall \beta \in E^*$ , par suite  $u = 0$ . Et donc  $\theta_C$  est non dégénérée.  $(C, \theta_C)$  E.V. symplectique.

Soient  $\alpha \in \text{Ann}(F)$  et  $v \in F \cap C$ . On a

$$\theta_C(\underline{P}(\alpha), v) = -\langle \alpha, v \rangle = 0,$$

par suite  $\underline{P}(\alpha) \in (F \cap C)^\perp$ , soit,

$$\underline{P}(\text{Ann}(F)) \subseteq (F \cap C)^\perp$$

Réciproquement, soit  $u = \underline{P}(\alpha) \in (F \cap C)^\perp$ , on a donc

$$\theta_C(\underline{P}(\alpha), v) = -\langle \alpha, v \rangle = 0, \forall v \in F \cap C$$

par suite,

$$\alpha \in \text{Ann}(F \cap C) = \text{Ann}(F) + \text{Ann}(C).$$

Or

$$\text{Ann}(C) = \text{Ann}(\underline{P}(E^*)) = \ker \underline{P}$$

donc

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ avec } \alpha_1 \in \text{Ann}(F), \alpha_2 \in \ker \underline{P};$$

par conséquent,

$$u = \underline{P}(\alpha_1) \in \underline{P}(\text{Ann}(F)),$$

ce qui montre que

$$(F \cap C)^\perp \subseteq \underline{P}(\text{Ann}(F)),$$

d'où

$$(F \cap C)^\perp = \underline{P}(\text{Ann}(F)).$$

C.Q.F.D

**Proposition.** Soit  $\tilde{E} = \frac{E}{F}$ ,  $\pi : E \longrightarrow \tilde{E}$  la surj. can.  ${}^t\pi : \tilde{E}^* \longrightarrow E^*$ , la transposée de  $\pi$ ,  ${}^t\pi$  est injective et l'on a :

$${}^t\pi(\tilde{E}^*) = \text{Ann}(F).$$

On définit une forme bilinéaire antisymétrique,

$$\tilde{P} : \tilde{E}^* \times \tilde{E}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$\tilde{P}(\alpha, \beta) = P({}^t\pi(\alpha), {}^t\pi(\beta)), \alpha, \beta \in \tilde{E}^*.$$

Alors

$$\ker \tilde{\underline{P}} = (\underline{P} \circ {}^t\pi)^{-1} \left( (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp \right)$$

**Dém.**  $\ker \pi = F$  et  $\pi$  surj.  $\implies {}^t\pi$  est injective et  $\text{Im } {}^t\pi = \text{Ann } F$  (cf cours MP2).

Soient  $\alpha, \beta \in E^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\alpha, \beta) &= \langle \beta, \tilde{\underline{P}}(\alpha) \rangle = \langle {}^t\pi(\beta), \underline{P}({}^t\pi(\alpha)) \rangle \\ &= \langle \beta, \pi(\underline{P}({}^t\pi(\alpha))) \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\underline{P}} = \pi \circ \underline{P} \circ {}^t\pi$$

par suite

$$\begin{aligned} \alpha \in \ker \tilde{\underline{P}} &\iff (\pi \circ \underline{P} \circ {}^t\pi)(\alpha) = 0 \\ &\iff (\underline{P} \circ {}^t\pi)(\alpha) \in F, \end{aligned}$$

or,  ${}^t\pi(\alpha) \in \text{Ann}(F)$ , donc

$$(\underline{P} \circ {}^t\pi)(\alpha) \in \underline{P}(\text{Ann}(F)) = (F \cap C)^\perp,$$

d'une part, et d'autre part on a toujours

$$(\underline{P} \circ {}^t\pi)(\alpha) \in C,$$

ce qui montre que

$$\ker \tilde{\underline{P}} = (\underline{P} \circ {}^t\pi)^{-1} \left( (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp \right). \blacksquare$$

**Corollaire.** On a :

1.  $\pi \left( (F \cap C)^\perp \right) = \tilde{\underline{P}} \left( \tilde{E}^* \right),$
2.  $\text{rang } \tilde{\underline{P}} = \dim C - \dim(F \cap C) - \dim \left( (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp \right).$

**Dém.** On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{P}} &= \pi \circ \underline{P} \circ {}^t\pi \\ \text{Im } {}^t\pi &= {}^t\pi \left( \tilde{E}^* \right) = \text{Ann}(F) \end{aligned}$$

Bien entendu  $\tilde{P}(\tilde{E}^*) = \pi((F \cap C)^\perp)$ , et

$$\ker \pi|_{(F \cap C)^\perp} = F \cap (F \cap C)^\perp,$$

et comme  $(F \cap C)^\perp \subset C$  on a

$$\ker \pi|_{(F \cap C)^\perp} = (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp$$

et donc

$$\text{rang} \tilde{P} = \dim (F \cap C)^\perp - \dim (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp,$$

soit

$$\text{rang} \tilde{P} = \dim C - \dim (F \cap C) - \dim (F \cap C) \cap (F \cap C)^\perp. \blacksquare$$

**Cas particulier.** Si  $(E, \theta)$  est un e.v.s. alors  $C = E$  et  $\theta_C = \theta$ , et donc,

$$\text{rang} \tilde{P} = \dim E - \dim F - \dim (F \cap F^\perp).$$

### Fonctions basiques

Soit  $(M, \mathfrak{F})$  V. feuilletée,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  est dite basique pour  $\mathfrak{F}$  si,  $\forall Y \in T(\mathfrak{F})$ ,  $Y(f) \equiv 0$ , ceci est équivalent à  $f$  est cste sur chaque feuille de  $\mathfrak{F}$ .

On note par  $\mathfrak{B}(M, \mathfrak{F}) = \{\text{fonctions basiques pour } \mathfrak{F}\}$

$\mathfrak{B}(M, \mathfrak{F})$  sous-anneau de  $\mathcal{C}^\infty(M)$  et  $\mathcal{C}^\infty(M)$  est un  $\mathfrak{B}(M, \mathfrak{F})$ -module.

Un  $X \in \mathfrak{X}(M)$  est dit feuilleté (ou un automorphisme infinitésimal) pour  $\mathfrak{F}$ , si au voisinage de chaque point de  $M$ , le flot local  $(\varphi_t)_{|t| < \varepsilon}$  associé à  $X$  laisse invariant le feuilletage.

$\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F}) \equiv \{\text{champs de vecteurs feuilletés pour } \mathfrak{F}\}$ .

**Proposition.**  $(M, P)$  V. de Poisson et  $\pi : M \longrightarrow B$  une submersion surjective. On a l'équivalence :

1.  $\forall H, K \in \mathcal{C}^\infty(B)$ ,  $\forall b \in B$ ,  $\{H \circ \pi, K \circ \pi\}|_{\pi^{-1}(b)}$  est constante,
2. Il existe une structure de Poisson sur  $B$  pour laquelle  $\pi$  est un morphisme de variétés de Poisson..

Les propriétés ci dessus sont satisfaites lorsque les  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$  sont connexes et qu'au voisinage de chaque point de  $M$ ,  $\ker d\pi$  est localement engendrée par des systèmes hamiltoniens.

**Dém.**

L'application

$$H \longmapsto H \circ \pi \text{ de } \mathcal{C}^\infty(B) \text{ dans } \mathfrak{B}(M, \mathfrak{F}_{(\pi)})$$

est un isomorphisme d'E.V.

Si la ppte 2 est satisfaite alors

$$\{H \circ \pi, K \circ \pi\}_M = \{H, K\}_B \circ \pi,$$

ce qui montre l'assertion 1.

Réciproquement si  $\forall b \in B, \{H \circ \pi, K \circ \pi\}_{|\pi^{-1}(b)}$  est constante, on définit

$$\{H, K\}_B(b) = \{H \circ \pi, K \circ \pi\}_M(x)$$

pour tout  $x \in \pi^{-1}(b)$ . Il est clair que  $\{H, K\}_B$  est une structure de Poisson pour laquelle  $\pi$  est un morphisme de V. de Poisson. D'où 1 implique 2.

Supposons que les fibres  $\pi^{-1}(b), b \in B$ , sont connexes, et qu'au voisinage de chaque point de  $M$ ,  $\ker d\pi$  est localement engendrée par des systèmes hamiltoniens. c'est dire que pour tout  $x_0 \in M, \exists U_0 \in O(x_0), (H_i)_{i \in I}, H_i \in C^\infty(U_0)$  t.q.  $\forall x \in U,$

$$\ker d\pi_x = Vect \{X_{H_i}(x) \mid i \in I\}.$$

Soit donc  $H, K \in C^\infty(B)$ . Pour tout  $i \in I$  on a :

$$\begin{aligned} i(X_{H_i}) d\{H \circ \pi, K \circ \pi\} &= \{H_i, \{H \circ \pi, K \circ \pi\}\} \\ &= \{\{H_i, K \circ \pi\}, H \circ \pi\} + \{K \circ \pi, \{H_i, H \circ \pi\}\} \\ &= \{i(X_{H_i}) d(K \circ \pi), H \circ \pi\} + \{K \circ \pi, i(X_{H_i}) d(H \circ \pi)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $H \circ \pi, K \circ \pi$  sont constantes sur les fibres de  $\pi$ , par suite, les  $\{H \circ \pi, K \circ \pi\}$  sont localement constantes sur les fibres qui sont connexes, donc les  $\{H \circ \pi, K \circ \pi\}$  sont localement constantes sur les fibres, ce qui montre que l'assertion 1 est satisfaite. ■

**Remarque.**

Dans les hypothèses et notations de la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} rang \tilde{P} &= rang P - \dim(\ker d\pi_x \cap C(x)) \\ &\quad - \dim(\ker d\pi_x \cap C(x)) \cap (\ker d\pi_x \cap C(x))^\perp. \end{aligned}$$

**Proposition (P. Libermann).** Soit  $(M, \theta)$  une V.S. muni d'un sous fibré intégrable de  $TM$ . On dénote par  $\mathfrak{F}$  le feuilletage défini par le sous fibré  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\forall H, K \in \mathfrak{B}(M, \mathfrak{F})$ , le crochet de Poisson  $\{H, K\} \in \mathfrak{B}(M, \mathfrak{F})$ ,



2.  $E^\perp$  est un sous fibré intégrable de  $TM$ .

Lorsque ces conditions sont satisfaites, les sous fibrés intégrables  $E$  et  $E^\perp$  sont *dits symplectiquement complets*.

Lorsque le feuilletage est *simple*, i.e. défini par une submersion  $\pi : M \rightarrow B$ , alors  $\mathfrak{F}$  est symplectiquement complet si et seulement si, il existe sur  $B$  une structure de Poisson telle que  $\pi$  soit un morphisme de variétés de Poisson. Dans ces conditions, la structure de Poisson sur  $B$  pour laquelle  $\pi$  est un morphisme de Poisson est unique

**Dém.**



## Chapitre 6

# Espaces fibrés

### 6.1 Espace fibré localement trivial

Un fibré localement trivial de base  $M$  et de fibre  $F$  est un quadruplet  $(P, M, \pi, F)$  où  $P$ ,  $M$  et  $F$  sont des espaces topologiques,  $\pi$  est une application continue surjective de  $P$  dans  $M$ , appelée projection, satisfaisant la propriété suivante: pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un homéomorphisme  $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$  tel que  $p \circ \phi = \pi$ , où  $p$  désigne la projection canonique de  $U \times F$  dans  $U$ .

On dit que:

$P$  est l'espace total du fibré,

$M$  est la base,

$F_b = \pi^{-1}(x)$  est la fibre au-dessus de  $x \in M$

Le couple  $(U, \phi)$  est appelé carte du fibré. Si  $(U, \phi)$  et  $(V, \psi)$  sont deux cartes telles que  $U \cap V \neq \emptyset$ , on peut écrire

$$\psi \circ \phi^{-1}(b, f) = (b, g(b)(f)) \quad (6.1)$$

où  $g$  est une application de  $U \cap V$  dans le groupe des homéomorphismes de  $F$ .

On déduit que chaque fibre est isomorphe à  $F$ .

**Remarque 6.1** *L'espace total  $P$  hérite des propriétés topologiques (séparation, connexité, compacité) communes à  $M$  et  $F$ .*

### 6.2 Fibré vectoriel

**Définition 6.1** *Un fibré vectoriel est la donnée d'un fibré localement trivial  $(P, M, \pi, F)$  de fibre un espace vectoriel réel de dimension finie et d'une*

famille (maximale)  $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)$  de cartes satisfaisant la propriété suivante: les  $U_i$  forment un recouvrement ouvert de la base  $M$  et

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, f) = (x, g_{ij}(x) \cdot f) \quad (6.2)$$

**Définition 1** pour tous  $x \in U_i \cap U_j$  et  $f \in F$  où  $g_{ij}$  est une application de  $U_i \cap U_j$  dans  $Gl(F)$ .

### 6.3 Fibré différentiel

On se place dans le cadre de la géométrie différentielle et on remplace espace topologique par variété, continuité par différentiabilité, ...

**Définition 6.2** Un fibré (différentiel)  $P$  de base  $M$  et de fibre  $F$  est un quintuplet  $(P, M, \pi, F, \mathcal{A})$  où  $P$ ,  $M$ , et  $F$  sont des variétés,  $\pi$  est une application différentiable surjective de  $P$  dans  $M$ , appelée projection, et  $\mathcal{A}$  est une collection  $(\overline{U}_i = \pi^{-1}(U_i), \phi_i)$ , appelée atlas du fibré, satisfaisant certaines propriétés. Les  $U_i$  forment un recouvrement ouvert de la base  $M$ , les  $\phi_i$ , appelées trivialisations locales, sont des difféomorphismes (globaux) de  $\overline{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$  dans  $U_i \times F$  tel que  $p \circ \phi_i = \pi$ , où  $p$  désigne la projection canonique de  $U_i \times F$  dans  $U_i$ . Enfin, et c'est le point essentiel,  $F$  est munie d'une certaine structure algébrique et les changements de carte  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  sont des isomorphismes de cette structure algébrique.

Les changements de cartes sont appelés fonctions de transition du fibré.

Si  $F$  est un espace discret, on obtient le cas intéressant de la structure dite de revêtement. Si  $F$  est un espace vectoriel, on obtient la structure de fibré vectoriel. Si  $F$  est un groupe de Lie, on obtient la structure de fibré principal. Ce dernier fera l'objet des paragraphes suivants.

### 6.4 Espaces fibrés principaux

**Définition 6.3** Un fibré (différentiel) principal  $P$  de base  $M$  et de fibre  $G$  est un quintuplet  $(P, M, \pi, G, \mathcal{A})$  où  $P$  et  $M$  sont des variétés,  $G$  est un groupe de Lie,  $\pi$  est une application différentiable surjective de  $P$  dans  $M$ , appelée projection, et  $\mathcal{A}$  est une collection  $(\overline{U}_i = \pi^{-1}(U_i), \phi_i)$ , appelée atlas du fibré, satisfaisant certaines propriétés. Les  $U_i$  forment un recouvrement ouvert de la base  $M$ , les  $\phi_i$ , appelées trivialisations locales, sont des difféomorphismes (globaux) de  $\overline{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$  dans  $U_i \times G$  tel que  $p \circ \phi_i = \pi$ , où  $p$

désigne la projection canonique de  $U_i \times F$  dans  $U_i$ . Enfin, les changements de cartes  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  sont des isomorphismes de  $G$  de la forme

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, g) = (x, g_{ij}(x) \cdot g) \quad (6.3)$$

Aux changements de carte  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  sont donc associées des fonctions de transition  $g_{ij}$  de  $U_i \cap U_j$  dans  $G$  qui agissent par multiplication à gauche sur la fibre.

Posons

$$\phi_i^{-1}(u) = (x, g_i) \quad (6.4)$$

$$(x, g_i) = \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, g_j) = (x, g_{ij}(x) \cdot g_j)$$

donc  $g_i = g_{ij}(x) \cdot g_j$  pour tout  $x \in U_i \cap U_j$

On peut alors définir une action à droite de  $G$  sur  $M$ ,  $u \longmapsto ug$ , (on la notera  $R$  ultérieurement) par les formules ( $u \in \pi^{-1}(x)$ ):

$$\phi_i(ug) = (x, g_i g) \quad (6.5)$$

$$ug = \phi_j^{-1}(x, g_j g) = \phi_j^{-1}(x, g_{ij}^{-1}(x) g_i g) = \phi_i^{-1}(x, g_i g)$$

Cette action à droite est donc intrinsèque (elle ne dépend pas de la trivialisations locale utilisée), elle est libre (le stabilisateur de tout point se réduit à l'identité) et transitive (il n'existe qu'une seule orbite) et les éléments  $v$  de la fibre  $G_u = \pi^{-1}(\pi(u))$  passant par  $v$  s'écrivent de façon unique sous la forme  $v = ug$ ,  $g \in G$  (ses orbites sont les fibres)

**Exemple 6.1** : *Le fibré des repères linéaires:*

L'exemple suivant est fondamental; il est à l'origine de toute la théorie des espaces fibrés. Il fournit de plus un bon support à notre intuition géométrique surtout quand on s'intéresse des espaces fibrés principaux. On considère:

- Un élément quelconque  $u \in P$  comme étant un repère en  $x \in M$ .
- Le groupe  $G$  comme étant un groupe de transformations de repères.
- Une section locale  $\sigma$  comme étant un repère mobile dans l'ouvert  $U$ .
- Les fonctions de transition  $g_{ij}$  comme décrivant les changements de repères.

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Un repère  $u$  en  $x \in M$  est la donnée de  $n$  vecteurs indépendants de  $T_x M$  (autrement dit la donnée d'un isomorphisme d'espaces vectoriels  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ ).

Notons  $G_x$  l'ensemble de tous les repères en  $x$  et posons  $P = \bigcup_{x \in M} G_x$ .

Soit  $\pi$  l'application qui à tout repère centré en  $x$  associe l'origine  $x$  elle-même.

Soit  $(U_i, \varphi_i)$  une carte de l'atlas définissant  $M$ . On définit  $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times GL(n)$  par:

$$\phi_i(u) = \left( \pi(u), d(\varphi_i)_{\pi(u)} \circ u \right) \quad (6.6)$$

Posons

$$\phi_j(u) = \left( \pi(u), d(\varphi_j)_{\pi(u)} \circ u \right) = (x, g) \quad (6.7)$$

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, g) = \left( x, d(\varphi_i)_{\pi(u)} \circ u \right) = \left( x, d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j \circ \pi(u)} \circ d(\varphi_j)_{\pi(u)} \circ u \right) = (x, g_{ij}(x) \cdot g)$$

où

$$g_{ij}(x) = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j \circ \pi(u)} \quad (6.8)$$

désignent les fonctions de transition.

Ainsi  $P$  est un fibré principal sur  $M$  de groupe structural  $GL(n)$  appelé fibré des repères linéaires ("frame bundle" en anglais) sur  $M$  et noté  $L(M)$  ou  $FM$ .

### 6.4.1 Homomorphisme de fibrés principaux

Un homomorphisme (respectivement isomorphisme) de fibrés principaux  $(P, M, \pi)$  et  $(P', M', \pi')$ , de fibres éventuellement distinctes, est la donnée d'un couple  $(H, h)$  d'applications différentiables (respectivement de difféomorphismes)  $H : P \rightarrow P'$  et  $h : M \rightarrow M'$  tel que  $\pi' \circ H = h \circ \pi$

Notons qu'un tel morphisme est compatible avec les projections, donc envoie des fibres en fibres.

### 6.4.2 Fibré trivialisable

**Définition 6.4** *Un fibré principal  $(P, M, \pi, G)$  est dit trivialisable s'il est isomorphe à un fibré trivial.*

Choisissons une famille de sections locales  $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ . Un tel choix nous permet de définir des trivialisations locales:

$$\phi_i^{-1}(u) = (x, g_i(u)) \quad (6.9)$$

où  $x = \pi(u)$  et  $g_i(u)$  est l'unique élément de  $G$  tel que  $u = \sigma_i(x) \cdot g_i(u)$ .  
les sections locales  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont reliés dans leurs domaines de définition par la relation

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) g_{ij}(x) \quad (6.10)$$

les fonctions  $g_i$  et  $g_j$  sont reliées par la relation

$$g_i(u) = g_{ij}(\pi(u)) g_j(u) \quad (6.11)$$

**Théorème 6.1** *Un fibré principal est trivialisable si et seulement il admet une section globale.*

### 6.4.3 Espace vertical et connexion

Soit  $(P, M, \pi, G)$  un fibré principal de base  $M$ . Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . En tout point  $u$  de  $P$ , la fibre  $G_u = \pi^{-1}(\pi(u))$  passant par  $u$  est une sous-variété de  $P$  isomorphe à  $G$ . L'espace  $T_u P$  tangent à  $P$  en  $u$  admet un sous-espace canonique "vertical" (à l'aide de l'identification naturelle qui fait que l'espace tangent à une sous-variété est un sous-espace de l'espace tangent général).

Notons  $V_u P$  l'espace vertical (par abus d'écriture on écrira parfois  $V_u$ )

Pour tout  $A \in \mathcal{G}$ , les courbes  $ue^{tA}$  habitent dans la fibre  $G_u$ , leurs vecteurs tangents sont donc des éléments de  $V_u$ .

Posons

$$A^*(u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ue^{tA} \quad (6.12)$$

La correspondance  $u \mapsto A^*(u)$  définit un champ de vecteurs dit champ fondamental et l'on montre (voir Helgason) que  $V_u$  est engendré par les vecteurs fondamentaux.

Par contre, il n'existe pas de manière canonique de choisir, pour chaque  $u$ , un supplémentaire  $H_u$  de  $V_u$  dans  $T_u P$ . Une connexion est une façon de faire un tel choix.

### Notion de connexion

Intuitivement, un vecteur de l'espace tangent  $T_u P$  est un déplacement infinitésimal d'un repère; ceci peut s'analyser à l'aide de deux mouvements différents ("supplémentaires"): on peut faire tourner le repère sans bouger l'origine (des déplacements verticaux du point  $u$  qui correspondent à des

mouvement de  $u$  dans sa fibre) mais on peut également déplacer l'origine du repère (des déplacements horizontaux) (et on peut faire les deux). L'espace vertical est donc canoniquement défini par des déplacements infinitésimaux du repère  $u$  qui n'entraînent aucun déplacement de l'origine  $x$ : on fait tourner le repère grâce à un élément du groupe  $GL(n)$ .

On souhaite également disposer d'un moyen d'assujettir le déplacement d'un repère choisi lorsqu'on fait bouger l'origine dans la base.

Autrement dit nous souhaitons disposer d'une méthode nous permettant d'associer à tout chemin allant d'un point  $x$  à un point  $y$  dans la base et à tout repère au point  $x$  un certain chemin dans l'espace de repères (transporter son repère avec soi)

Choisir une telle méthode ne se fait pas canoniquement et revient à choisir ce qu'on appelle "connexion" dans le fibré des repères linéaires.

**Définition 6.5** Une connexion sur un fibré principal  $(P, M, \pi, G)$  est la donnée sur  $P$  d'un champ de sous-espaces vectoriels  $H : u \mapsto H_u \subset T_u P$  satisfaisant les propriétés suivantes:

- Définition 2**
1.  $H_u$  est supplémentaire à  $V_u$  dans l'espace tangent:  $T_u P = V_u \oplus H_u$
  2.  $H_u$  est invariant par l'action du groupe:  $H_{ug} = R_{g*} H_u$  pour tous  $u \in P$  et  $g \in G$
  3. L'application  $u \mapsto H_u$  est différentiable  
Les vecteurs de  $H_u$  sont dits horizontaux.

La condition 2 signifie que tout champ de vecteurs tangent  $X \in T_u P$  s'écrit de manière unique:

$$X = \alpha^i X_i + X^H \quad (6.13)$$

où les  $X_i$  forment une base de  $\mathcal{G}$  et  $X^H \in H_u$

**Théorème 6.2** Soit  $H$  une connexion sur le fibré principal  $\pi : P \rightarrow M$ .

**Theorem 3** Il existe une 1-forme  $\omega$  sur  $P$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  ( $\omega \in \mathcal{G} \otimes T^*P$ ) telle que:

1.  $\omega(A^*(u)) = A$  pour tout  $A \in \mathcal{G}$
2.  $R_{g*}\omega = ad_{g^{-1}}\omega$  pour tout  $g \in G$



$\omega$  est dite la 1-forme de connexion associée à la connexion  $H$ .

**Proof.** On prend  $\omega(A^*(u)) = A$  et  $\ker \omega_u = H_u$

Rappelons d'après la définition de la représentation  $ad$  que pour tout  $A \in \mathcal{G}$  on a

$$e^{tad_g A} = g e^{tA} g^{-1} \quad (6.14)$$

En dérivant cette relation en  $t$  on trouve:

$$R_{g*} A^* = (ad_{g^{-1}} A)^* \quad (6.15)$$

donc

$$\omega(R_{g*} A^*) = \omega((ad_{g^{-1}} A)^*) = ad_{g^{-1}} A = ad_{g^{-1}} \omega(A^*) \quad (6.16)$$

d'où

$$R_g^* \omega = ad_{g^{-1}} \omega \quad (6.17)$$

ce qui s'écrit encore:

$$R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = ad_{g^{-1}} \omega_u(X) \quad (6.18)$$

pour tout  $X \in T_u P$

Si l'on définit  $H_u P$  comme étant le noyau de  $\omega$  en  $u$ , on retrouvera la définition de connexion.

Cette définition a l'avantage de ne visiblement pas dépendre d'un atlas particulier de  $P$ , elle est donc intrinsèque (on peut d'ailleurs donner une expression locale de  $\omega$  au moyen des fonctions de transition et des sections locales.)

Tout fibré principal possède une connexion: Si  $(\lambda_i)$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert de la base  $M$ , alors la forme de Pfaff  $\omega = \sum_i (\lambda_i \circ \pi) (\phi_i^{-1})^* \alpha$  ( $\alpha$  étant la forme de Maurer Cartan de  $G$ ) est une forme de connexion sur  $P$ .

De plus, si  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont des 1-formes de connexion sur un fibré principal, il en est de même que  $t \omega_1 + (1-t) \omega_0$ .

### Expression locale d'une forme de connexion

Le fait que tout fibré principal soit localement trivial va nous permettre de définir la connexion non pas comme une 1-forme sur  $P$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$  mais comme une forme sur la base  $M$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$ .

Soient  $(U_i, \phi_i)$  un atlas du fibré  $P$  et  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  ses fonctions de transition.

Soient  $\sigma_i$  une section locale définie sur l'ouvert  $U_i$  et  $\omega$  une 1-forme de connexion sur  $P$ .

On définit sur  $U_i$  la 1-forme à valeurs dans  $\mathcal{G}$ :  $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ . Une telle forme s'appelle le potentiel vecteurs associé à la connexion  $\omega$  par la section  $\sigma_i$ .

Notons  $g_i$  la trivialisations locale associé à  $\sigma_i$ :

$$u = \sigma_i(b) g_i(u) \text{ et } \phi_i(u) = (b, g_i(u)) \quad (6.19)$$

**Proposition 4** *Etant donnés une collection  $(U_i, \sigma_i, \mathcal{A}_i)$  formée d'ouverts  $U_i$  recouvrant la base, de sections locales  $\sigma_i : U_i \rightarrow M$  (telles que  $\pi \circ \sigma_i = 1_{U_i}$ ) et de 1-formes  $\mathcal{A}_i$  sur  $U_i$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$ , il existe une unique forme de connexion sur  $P$  qui s'écrit dans l'ouvert  $\pi^{-1}(U_i)$  sous la forme:*

$$\omega_i = ad_{g_i^{-1}} \pi^* \mathcal{A}_i + L_{g_i^{-1}*} \circ dg_i \quad (6.20)$$

où  $g_i^{-1}(u) = (g_i(u))^{-1}$

1. **Proof.** On démontre ceci:
2.  $\omega_i$  est une forme de connexion sur  $\pi^{-1}(U_i)$
3.  $R_g^* \omega_i = ad_{g^{-1}} \omega_j$
4.  $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$
5. les  $\omega_i$  coïncident sur les intersections de cartes.

On aura besoin du lemme suivant:

**Lemme 6.1** *Dans les conditions de la proposition précédente, les  $\mathcal{A}_i$  sont liées par la relation:*

**Lemma 5**

$$\mathcal{A}_j = ad_{g_{ij}^{-1}} \mathcal{A}_i + L_{g_{ij}*} dg_{ij} \quad (6.21)$$

où les  $g_{ij}$  sont les fonctions de transition de l'atlas des trivialisations locales associées aux sections locales  $\sigma_i$

Dans toute la suite  $(P, M, \pi, G)$  est un fibré principal muni d'une 1-forme de connexion  $\omega$ .

**Théorème 6.3** Soient  $\gamma$  une courbe tracée sur la base  $M$  et  $u_0$  un point de la fibre au-dessus de  $\gamma(0)$ .

**Theorem 6** Il existe une unique courbe  $\tilde{\gamma}$  sur  $P$  telle que:

1.  $\tilde{\gamma}(0) = u_0$
2.  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$
3. les vecteurs tangents à  $\gamma$  appartiennent à l'espace horizontal  $H_u P$  associé à la connexion  $\omega$

La courbe  $\tilde{\gamma}$  est dite relèvement horizontal de  $\gamma$

**Théorème 6.4** Pour tout vecteur  $\zeta \in T_x M$ , il existe un unique vecteur  $\tilde{\zeta} \in H_u P$  ( $u \in \pi^{-1}(x)$ ) tel que  $\pi_* \left( \tilde{\zeta} \right) = \zeta$

**Theorem 7** Le vecteur horizontal  $\tilde{\zeta}$  est dit relèvement horizontal de  $\zeta$

**Dérivée covariante:**

**Définition 6.6** Soient  $\phi \in \Lambda^r(P^*) \otimes V$  une forme différentielle extérieure de degré  $r$  sur  $P$  à valeurs dans un espace  $V$  et  $X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$  des vecteurs de  $T_u P$ .

**Définition 8** La dérivée covariante de  $\phi$  est la  $r + 1$ -forme extérieure sur  $P$  à valeurs dans  $V$  définie par:

$$\nabla \phi(X_1, X_2, \dots, X_{r+1}) = d\phi(X_1^H, X_2^H, \dots, X_{r+1}^H) \quad (6.22)$$

**Définition 6.7** La 2-forme de courbure est la dérivée covariante de la 1-forme de connexion:

$$\Omega = \nabla \omega \in \Lambda^2(P^*) \otimes \mathcal{G} \quad (6.23)$$

La courbure se transforme sous multiplication à droite par action adjointe:

$$R_g^* \Omega = ad_{h^{-1}} \Omega \quad (6.24)$$

**Théorème 6.5** Soient  $X, Y \in T_u P$ . On a les équations de Cartan:

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (6.25)$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (6.26)$$

## 6.5 Variétés complexes et presque complexes

### 6.5.1 Variétés complexes

**Définition 6.8** Soient  $V$  un espace vectoriel réel, et  $V^c$  l'ensemble des éléments de la forme  $u + iv$ , où  $u$  et  $v$  sont des éléments de  $V$  et  $i = \sqrt{-1}$ .

$V^c$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , qui sera appelé le complexifié de  $V$ .

Ainsi nous avons :

$$V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

**Proposition 6.1** Toute  $\mathbb{R}$ -base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $V$ , est aussi une  $\mathbb{C}$ -base de son complexifié  $V^c$ .

La dimension donc complexe de  $V^c$  est égal à la dimension réelle de  $V$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}} V^c = \dim_{\mathbb{R}} V = m.$$

**Définition 6.9** Une structure complexe sur un espace vectoriel réel  $V$  est un endomorphisme  $J$  de  $V$  tel que  $J^2 = -id_V$ .

**Proposition 6.2** Soit  $J$  une structure complexe sur un espace vectoriel réel de dimension  $2n$ . Alors il existe  $n$  vecteurs linéairement indépendants  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $V$  tels que les vecteurs  $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$  forme une base de  $V$ .

**Corollaire 6.1** Si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $V^c$ , alors  $\{e_1, \dots, e_m, ie_1, \dots, ie_m\}$  est une  $\mathbb{R}$ -base de  $V^c$ .

La dimension donc réelle de  $V^c$  est égal à deux fois la dimension complexe de  $V^c$ ,

$$\dim_{\mathbb{R}} V^c = 2 \dim_{\mathbb{C}} V^c = 2m.$$

**Définition 6.10** Soit  $M$  un espace topologique de dimension  $2n$ . On appelle carte locale complexe de  $M$ , ou système de coordonnées locales complexes, un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto (z^1, z^2, \dots, z^n) \end{aligned}$$

d'un voisinage ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ .  $U$  est dit le domaine de la carte, les  $n$  complexes  $(z^\alpha)$  sont dits les coordonnées complexes de  $z$  dans la carte considérée.

**Définition 6.11** La variété  $M$  est dite analytique complexe, s'il existe un ensemble  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}\}$  de cartes complexes, ou atlas, satisfaisant aux conditions suivantes :

1.  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,
2. si  $\forall \alpha, \beta \in I$  tel que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  sont holomorphes.

Le nombre  $n$  est appelé la dimension complexe de  $M$ ,

$$n = \dim_{\mathbb{C}} M.$$

**Exemples 6.1** 1. *L'espace des nombres complexes  $\mathbb{C}^n$ .*

$\mathbb{C}^n$  muni de la topologie usuelle et de l'atlas formé par la carte unique  $\{\mathbb{C}^n, id\}$  est une variété complexe de dimension  $n$ .

2. *Les espaces vectoriels complexes.*

Soient  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n$ , et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ .

Posons :

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z^1 e_1 + \dots + z^n e_n &\mapsto (z^1, \dots, z^n) \end{aligned}$$

$V$  muni de l'atlas formé par la carte unique  $\{V, \varphi\}$  est une variété complexe de dimension  $n$ .

3. *La sphère  $S^2$ .*

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Soient

$$\begin{aligned} \varphi : U = S^2 \setminus (1, 0, 0) &\rightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi : V = S^2 \setminus (-1, 0, 0) &\rightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3} \end{aligned}$$

Les changements de cartes sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$S^2$  muni de l'atlas  $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  est une variété complexe de dimension 2.

4. **L'espace projectif complexe**  $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ .

$\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$  est l'espace quotient de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  par la relation d'équivalence,  $z \sim z'$ , si et seulement si  $\exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  tel que  $z' = \lambda z$ .

Soit

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} U_\alpha & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n) & \mapsto & \left( \frac{z_0}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_{\alpha-1}}{z_\alpha}, \frac{z_{\alpha+1}}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_n}{z_\alpha} \right) \end{array}$$

où

$$U_\alpha = \{(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_\alpha \neq 0, \alpha = 0, \dots, n\}.$$

L'application réciproque  $\varphi_\alpha^{-1}$  de  $\varphi_\alpha$  est donnée par :  $\forall Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\varphi_\alpha^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{\alpha-1}, \bar{1}, \bar{Z}_{\alpha+1}, \dots, \bar{Z}_n).$$

Les changements de cartes sont donnés par :

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \begin{array}{ccc} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) & \rightarrow & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \\ (z_1, \dots, z_n) & \mapsto & \left( \frac{Z_1}{Z_\beta}, \dots, \frac{Z_{\alpha-1}}{Z_\beta}, \frac{1}{Z_\beta}, \dots, \frac{\hat{Z}_\beta}{Z_\beta}, \dots, \frac{Z_n}{Z_\beta} \right) \end{array}$$

où le signe  $\wedge$  signifie que le terme correspondant est omis.

$\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$  muni de l'atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq n}\}$  est une variété complexe de dimension  $n$ .

Si  $(z^\alpha)$  est un système de coordonnées locales complexes, posons :

$$z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^\alpha + ix^{\bar{\alpha}}), (\bar{\alpha} = \alpha + n).$$

Les  $2n$  nombres réels  $(x^k)$  sont dits les coordonnées locales réelles associées aux coordonnées complexes  $(z^\alpha)$ . Il en résulte que toute structure analytique complexe définie sur  $M$  induit sur cette variété une structure analytique réelle et, a fortiori, une structure différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soient  $T_x M$  l'espace vectoriel tangent en  $x$  à  $M$  et  $T_x M^c$  son complexifié.

La donnée d'une structure analytique complexe sur  $M$  définit en chaque point  $x$  de la variété une structure complexe sur l'espace tangent.

Soit  $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$  l'endomorphisme donné par :

$$J_x \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x = \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)_x, J_x \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x.$$

L'endomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $J_x$  de  $T_x M$  se prolonge en un endomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire noté encore  $J_x$  de  $T_x M^c$  tel que  $J_x^2 = -id_{T_x M^c}$  et  $J_x(u + iv) = J_x(u) + iJ_x(v)$  pour tout  $u, v \in T_x M$ . Ainsi nous avons

$$J_x \left( \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)_x = i \left( \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)_x, \quad J_x \left( \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} \right)_x = -i \left( \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} \right)_x.$$

D'autre part  $J_x : T_x M^c \rightarrow T_x M^c$  possède deux valeurs propres  $i$  et  $-i$ . Soient  $T_x M^{(1,0)}$  et  $T_x M^{(0,1)}$  les sous espaces propres associés aux valeurs propres  $i$  et  $-i$  respectivement. On a

$$T_x M^{(1,0)} = \{X \in T_x M^c \mid J_x X = iX\}$$

et

$$T_x M^{(0,1)} = \{X \in T_x M^c \mid J_x X = -iX\}.$$

Ainsi l'espace tangent complexifié  $T_x M^c$  de  $T_x M$  se décompose en la somme directe

$$T_x M^c = T_x M^{(1,0)} \oplus T_x M^{(0,1)}.$$

### Bases de $T_x M$ adaptées à une structure complexe de $T_x M$

Soit  $(\vec{\varepsilon}_\alpha)$  une base de  $T_x M^{(1,0)}$ , le système des vecteurs complexes conjugués  $(\vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$  définit une base de  $T_x M^{(0,1)}$ . Il est clair donc que le système des  $2n$  vecteurs  $(\vec{\varepsilon}_\alpha, \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$  forme une base de  $T_x M^c$ . Une telle base sera dite une base  $T_x M^c$  adaptée à la structure complexe définie sur  $T_x M$ .

Relativement à la base adaptée  $(\vec{\varepsilon}_\alpha, \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$ , les composantes du tenseur  $J_j^k$  sont de la forme :

$$J_j^k = \begin{pmatrix} i\delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -i\delta_\beta^\alpha \end{pmatrix}$$

Etant donnée une base adaptée  $(\vec{\varepsilon}_\alpha, \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$  de  $T_x M^c$ , considérons les  $2n$  vecteurs réels  $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\bar{\alpha}})$  définis par :

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_\alpha + \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\vec{\varepsilon}_\alpha - i\vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}).$$

Les vecteurs  $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\bar{\alpha}})$  définissent ainsi une base de  $T_x M^c$ , donc une base de  $T_x M$ .

Les composantes du tenseur  $J_j^k$  par rapport à la base réelle  $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\bar{\alpha}})$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où  $I_n$  est la matrice identité  $n \times n$ .

### Formes vectorielles complexes

Soit  $M$  une variété différentiable,  $T_x M$  l'espace vectoriel tangent à  $M$  au point  $x$  et  $T_x M^c$  son complexifié. Soit d'autre part,  $V$  un espace vectoriel complexe.

Soit  $\varphi_x$  une forme extérieure réelle en  $x$  à valeurs dans  $V$ ; elle s'écrit :  $\varphi_x = \sum_{j=1}^{2m} e_j \otimes \varphi_x^j$ ,  $\{e_j\}$  étant une base de  $V$  sur  $\mathbb{R}$  et les  $\varphi_x^j$  des formes extérieures à valeurs réelles. Soit maintenant  $\overline{\varphi_x}$  l'extension de  $\varphi_x$  à  $T_x M^c$  et  $\{e_A\}_{1 \leq A \leq m}$  une base de  $V$  sur  $\mathbb{C}$  comme  $\overline{\varphi_x} \in V \otimes_{\mathbb{C}} (\Lambda T_x M^c)^*$  on a  $\overline{\varphi_x} = e_A \otimes \varphi_x^A$  où les  $\varphi_x^A$  sont des formes extérieures complexes sur  $T_x M^c$ . Alors,  $\varphi_x$  considéré comme restriction à  $T_x M$  de  $\overline{\varphi_x}$  peut s'écrire  $\varphi_x = e_A \otimes \underline{\varphi_x^A}$  où les  $\underline{\varphi_x^A}$ , restriction à  $T_x M$  des  $\varphi_x^A$ , sont des formes extérieures sur  $T_x M$  à valeurs complexes. Nous identifierons désormais  $\varphi_x$  et  $\overline{\varphi_x}$  (resp.  $\varphi_x^A$  et  $\underline{\varphi_x^A}$ ) de sorte que une forme extérieure à valeurs vectorielles complexes dans  $V$  au point  $x$  écrite

$$\varphi_x = e_A \otimes \varphi_x^A$$

où les  $\varphi_x^A$  sont des formes extérieures sur  $T_x M$  à valeurs complexes, peut être interprétée soit comme application linéaire réelle de  $\Lambda T_x M$  dans  $V$  soit comme application linéaire complexe de  $\Lambda T_x M^c$  dans  $V$ .

En fin, si  $\varphi$  est une forme différentielle extérieure sur  $M$  à valeurs dans  $V$ , on l'écrira encore

$$\varphi = e_A \otimes \varphi^A$$

où les  $\varphi^A$  sont des formes différentielles extérieures à valeurs complexes.

### Connexions linéaires complexes

Considérons au point  $x$  de  $M$  l'espace vectoriel tangent  $T_x M$  et son complexifié  $T_x M^c$ .

Les repères de  $T_x M^c$  aux différents points  $x$  définissent un espace fibré  $C(M)$ , principal de groupe structural  $GL(n, \mathbb{C})$ . Ainsi  $C(M)(M, GL(n, \mathbb{C}))$  est appelé l'espace fibré principal des repères linéaires complexes.

**Définition 6.12** *On appelle connexion linéaire complexe, une connexion sur l'espace fibré principal des repères linéaires complexes  $C(M)$  de groupe structural le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$ .*

Une connexion linéaire complexe peut être aussi définie par la donnée d'une 1-forme  $\omega$  à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire complexe,



une telle forme peut être représentée en  $x$  au moyen d'une matrice d'ordre  $n$  dont les éléments sont des formes linéaires en  $x$  à valeurs complexes. À toute connexion linéaire complexe de forme  $\omega$ , correspond une connexion linéaire complexe, dite sa complexe conjuguée dont la forme désignée par  $\tau\omega$ .

On sait déjà que toute base de  $T_xM$  est une base sur  $\mathbb{C}$  de  $T_xM^c$ , donc  $L(M) \subset C(M)$ . Il en résulte que toute connexion linéaire sur  $L(M)$  définit une connexion linéaire sur  $C(M)$  avec laquelle elle peut être identifiée et qui coïncide avec sa complexe conjuguée. À une telle connexion sur  $C(M)$  on donne le nom de connexion linéaire réelle. La théorie des connexions linéaires réelles développées dans le chapitre précédant s'étend trivialement aux connexions linéaires complexes. En particulier, étant donnée une connexion linéaire réelle, on peut l'envisager sur  $C(M)$  c'est-à-dire la rapporter à des repères complexes; on pourra ainsi obtenir les tenseurs de courbure et torsion, la différentielle absolue d'un champ de tenseurs, rapportés à des repères complexes.

### 6.5.2 Variétés presque complexes

**Définition 6.13** Une structure presque complexe sur une variété différentiable réelle  $M$  de dimension  $2n$  est un champ de tenseurs  $J$  qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe un endomorphisme  $J_x$  de l'espace  $T_xM$  tel que  $J_x^2 = -id_{T_xM}$ .

**Définition 6.14** Une variété différentiable réelle munie d'une structure presque complexe est appelée variété presque complexe.

**Exemples 6.2** 1. Soit  $M = \mathbb{R}^{2n}$ .

Soit l'opérateur  $J_0$  défini par :

$$J_0 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, J_0 \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  est les coordonnées cartésiennes de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

$(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$  est une variété presque complexe.  $J_0$  est appelé la structure presque complexe canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

2. Soit  $M = S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ .

L'espace vectoriel tangent en  $x$  à  $S^2$  est donné par :

$$T_x S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, \xi \rangle = 0\},$$

$\langle, \rangle$  étant le produit scalaire euclidien.

Soit  $J_x$  la transformation linéaire de  $T_x S^2$  définie par :

$$J_x(\xi) = x \times \xi \forall \xi \in T_x S^2,$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$ .

Alors  $J_x (x \in S^2)$  définit une structure presque complexe  $J$  sur  $S^2$  et le couple  $(S^2, J)$  est une variété presque complexe.

### Torsion d'une structure presque complexe

**Définition 6.15** Une structure presque complexe  $J$  sur  $M$  est dite intégrable s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que :

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

**Définition 6.16** La torsion d'une structure presque complexe  $J$  ou tenseur de Nijenhuis, est le tenseur  $N$  de type  $(1, 2)$  défini par :

$$N(X, Y) = 2([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

**Théorème 6.6** une structure presque complexe  $J$  est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis est nul.

### Connexions presque complexe

Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe. Soit  $J_0$  la structure presque complexe canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On définit l'espace de repères suivant :

$$E^c = \{u : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ isomorphismes } \mathbb{R} - \text{linéaires tels que } u \circ J_0 = J \circ u\}.$$

$E^c(M, GL(n, \mathbb{C}))$  est un espace fibré principal, dit l'espace fibré principal des repères linéaires complexes.

**Définition 6.17** Sur la variété presque complexe  $(M, J)$ , on appelle connexion presque complexe une connexion sur l'espace fibré principal  $E^c$  de groupe structural le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Théorème 6.7** Toute connexion linéaire réelle sur une variété presque complexe  $(M, J)$  induit sur cette variété une connexion presque complexe. Pour que la connexion linéaire soit naturellement associée à la connexion presque complexe qu'elle induit, il faut et il suffit que la dérivée covariante du tenseur presque complexe  $J$  dans la connexion linéaire soit nulle,  $\nabla J = 0$ .

**Proposition 6.3** *Toute variété presque complexe  $(M, J)$  possède une connexion presque complexe telle que sa torsion  $T$  est donnée par :  $N = 8T$ , où  $N$  est le tenseur de Nijenhuis de  $J$ .*

## 6.6 Géométrie des $G$ -structures

### 6.6.1 Espaces de repères. $G$ -structures.

Soient  $M$  une variété différentiable réelle ou complexe,  $L(M)$  l'espace fibré principal des repères linéaires réels de  $M$ , et  $C(M)$  l'espace fibré principal des repères linéaires complexes de  $M$ .

**Définition 6.18** *On appelle espace de repères réels (resp. espace de repères complexes) sur la variété différentiable  $M$ , tout sous-espace fibré principal différentiable de l'espace  $L(M)$  des repères linéaires réels (resp.  $C(M)$  des repères linéaires complexes) de  $M$ .*

**Définition 6.19** *On appelle  $G$ -structure (resp.  $G$ -structure complexe) sur  $M$ , la structure  $E(M, G)$  déterminée par la donnée d'un espace de repères réels  $E$  (resp. espace de repères complexes) sur  $M$ , de groupe structural  $G$ .*

$G$  est donc un sous-groupe de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  (resp.  $GL(n, \mathbb{C})$ ).  $E$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $E$  est un sous-espace fibré principal de  $L(M)$  (resp.  $C(M)$ ) de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Les repères de  $E$  sont appelés les repères distingués ou adaptés à la  $G$ -structure. Le co-repère dual d'un repère distingué est un co-repère distingué.

- Exemples 6.3**
1. Soit  $G = \{id_{\mathbb{R}^n}\}$ . Une  $G$ -structure est un parallélisme, c'est-à-dire la donnée de  $n$  champs de vecteurs linéairement indépendants en tout point.
  2. Soit  $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ , groupe des matrices de déterminant strictement positif. Une  $G$ -structure est une orientation.
  3. Soit  $G = SL(n, \mathbb{R})$ , groupe des matrices de déterminant 1. Une  $G$ -structure équivaut à la donnée d'une forme volume, c'est-à-dire d'une  $n$ -forme non nulle en chaque point.

4. Soit  $G = O(n, \mathbb{R})$ , groupe des matrices orthogonales. Une  $G$ -structure sur  $M$  est une structure riemannienne, définie par un tenseur  $g \in \Gamma(S^2 T^* M)$  appelé métrique riemannienne, qui détermine un produit scalaire sur l'espace tangent en chaque point de  $M$ .
5. Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $2n$ ,  $\forall x \in M, T_x M$  est l'espace vectoriel tangent et  $T_x M^c$  son complexifié. Soit  $T_1$  un champ de sous-espaces vectoriels complexe de  $T_x M^c$  de dimension  $n$  et  $T_2$  est le complexe conjugué de  $T_1$  (d'où  $T_1$  et  $T_2$  sont supplémentaires et dimension de  $T_2 = n$ ).

Les bases adaptées  $(\vec{\varepsilon}_\alpha, \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$  de  $T_x M^c$ , formées d'une base  $(\vec{\varepsilon}_\alpha)$  de  $T_1$  et de la base complexe conjuguée  $(\vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$  de  $T_2$  constituent un espace de repères complexes  $E^b \subset C(M)$  ayant pour groupe structural le groupe  $L_n^b(\mathbb{C})$  des matrices

$$\left( \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{array} \right) \mid A \in GL(n, \mathbb{C}), \bar{A} \text{ est le complexe conjugué de } A,$$

groupe isomorphe à  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Une  $L_n^b(\mathbb{C})$ -structure  $E^b(M, L_n^b(\mathbb{C}))$  est une structure presque complexe.

6. Les bases réelles adaptées à la structure presque complexe, sont les bases de  $T_x M$  déduites des précédentes par :

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_\alpha + \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}) \text{ et } \vec{e}_{\bar{\alpha}} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_\alpha - \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}})$$

elles constituent un espace de repères réels  $E^a \subset L(M)$  dont le groupe structural  $L_n^a(\mathbb{C})$  est la représentation réelle de  $GL(n, \mathbb{C})$  dans  $GL(2n, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire le groupe des matrices

$$\left( \begin{array}{cc} B & C \\ -C & B \end{array} \right) \text{ où } B, C \text{ matrices réelles tel que } B+iC = A \in GL(n, \mathbb{C}) .$$

Une  $L_n^a(\mathbb{C})$ -structure  $E^a(M, L_n^a(\mathbb{C}))$  est une structure presque complexe.

### 6.6.2 $G$ -structures définies par un tenseur

**Proposition 6.4** Soient  $P(M, G)$  un espace fibré principal,  $V$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une action à gauche de  $G$  définie par la

représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Soit  $\tau$  un tenseur sur  $P$  à valeurs dans  $V$  dont l'image est contenue dans l'orbite  $Gy_0$  d'un point  $y_0 \in V$ . Alors, pour tout  $y \in \tau(P)$ ,  $\tau^{-1}(y)$  est un  $H_y$ -sous-fibré principal de  $P$ , où  $H_y$  est le sous-groupe d'isotropie de  $G$  en  $y$ .

La proposition ci-dessus donne une méthode importante de construction de sous-fibrés principaux à partir de certains tenseurs. Elle répond à une question soulevée par D. Bernard dans [?].

Soit maintenant  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une représentation linéaire du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$ . Considérons sur  $L(M)$  un tenseur  $\tau$  à valeurs dans  $V$ , et supposons que l'image  $\tau(L(M))$  soit contenue dans une seule orbite, que l'on appellera  $S$ , de  $GL(n, \mathbb{R})$  dans  $V$ . Si l'on choisit arbitrairement un point  $y_0 \in S$  et si l'on pose

$$H = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid g.y_0 = y_0\},$$

$H$  est un sous-groupe de Lie fermé de  $GL(n, \mathbb{R})$  et, d'après la proposition précédente,  $E = \tau^{-1}(y_0)$  est une  $H$ -structure sur  $M$ , qui sera dite  $H$ -structure définie par le tenseur  $\tau$ .

Le lecteur pourra reconnaître un certain nombre de structures de ce type parmi les exemples précédents. Souvent, l'espace vectoriel  $V$  est l'espace  $\mathfrak{T}_l^k(M)$ , de sorte que le tenseur  $\tau$  peut être regardé comme un tenseur de type  $(k, l)$ .

Notons enfin que dans la construction précédente la linéarité de l'action de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $V$  ne joue aucun rôle. On pourra donc prendre pour  $V$  une variété munie d'une action à gauche de  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $\tau$  étant simplement un tenseur sur  $L(M)$  à valeurs dans  $V$ .

### 6.6.3 $G$ -structures équivalentes

**Définition 6.20** Soit une  $G$ -structure (réelle ou complexe)  $E(M, G)$ . Une  $G'$ -structure  $E'(M', G')$  est dite équivalente à  $E$  s'il existe  $l \in GL(n, \mathbb{R})$  (resp.  $GL(n, \mathbb{C})$ ) tel que  $E' = El$ .

**Définition 6.21**  $E$  complexe est dite équivalente au réel si elle admet une structure équivalente réelle. Si  $E$  est réelle (resp. complexe), une structure  $E'$  équivalente à  $E$  est encore une  $G$ -structure réelle (resp. complexe) si et seulement si  $l$  appartient au normalisateur  $N(G)$  (resp.  $N^c(G)$ ) de  $G$  dans  $GL(n, \mathbb{R})$  (resp.  $GL(n, \mathbb{C})$ ), on dit alors que  $E'$  est une  $G$ -structure réelle (resp. complexe) associée à  $E$ .

**Exemple 6.2** La  $L_n^b(\mathbb{C})$ -structure  $E^b(M, L_n^b(\mathbb{C}))$  et la  $L_n^a(\mathbb{C})$ -structure  $E^a(M, L_n^a(\mathbb{C}))$  définies par une structure presque complexe (exemple?) sont équivalentes, car si  $u = (\vec{\varepsilon}_\alpha, \vec{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}) \in E^b$  est une base adaptée complexe et si  $u' = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\bar{\alpha}}) \in E^a$  la base réelle correspondante, on a :

$$u' = ul \text{ où } l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & -iI_n \end{pmatrix}$$

d'où  $E^a = E^b l$  et  $L_n^a(\mathbb{C}) = l^{-1} L_n^b(\mathbb{C}) l$ .  $E^a$  étant réelle,  $E^b$  est équivalente au réel.

Dans la suite on appelle  $\mathcal{C}$ -structure l'ensemble des  $G'$ -structures équivalentes à une  $G$ -structure donnée  $(G, G' \in \mathcal{C})$ .

Le problème de la détermination de toutes les  $G$ -structures possibles sur  $M$  est résolu lorsque  $G$  donné est fermé dans  $GL(n, \mathbb{R})$ , elles correspondent biunivoquement aux sections différentiables de l'espace homogène  $E/G$ . Cependant, le problème de la détermination de toutes les  $\mathcal{C}$ -structures est encore posé.

Soit un représentant  $G \in \mathcal{C}$ , une  $\mathcal{C}$ -structure donnée admet dès que  $N(G) \neq G$  plusieurs représentants qui sont des  $G$ -structures, et ces structures sont associées. Soit  $\mathfrak{F}$  le faisceau des germes de sections différentiables de  $E/G$  que l'on peut appeler faisceau des germes de  $G$ -structures. L'espace quotient  $\mathfrak{F}/N$  est encore un faisceau, et si  $q : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}/N$  la projection canonique, alors deux sections de  $\mathfrak{F}$  définissent deux  $G$ -structures associées, si et seulement si elles ont la même image par  $q$ .

Il y a donc un correspondance biunivoque entre les  $\mathcal{C}$ -structures sur  $M$  et les sections du faisceau  $\mathfrak{F}/N$  qui ont un relèvement dans  $\mathfrak{F}$ . On peut donc appeler  $\mathfrak{F}/N$  faisceau des  $\mathcal{C}$ -structures sur  $M$ . La même analyse est évidemment valable dans le cas complexe.

**Définition 6.22** Une  $G$ -structure  $E(M, G)$  sur  $M$  est dite intégrable si au voisinage de chaque point  $x$  de  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  tel que la section du fibré  $L(M)$  au-dessus de  $U$  définie par le champ de repères naturels  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  est à valeurs dans  $E$ .

Le système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  sur  $U$  sera dite adapté à la  $G$ -structure  $E(M, G)$ . si  $(x^1, \dots, x^n)$  et  $(y^1, \dots, y^n)$  sont deux systèmes de coordonnées locales adaptés sur les voisinages  $U$  et  $V$  respectivement, alors la matrice Jacobienne  $(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})_{1 \leq i, j \leq n}$  appartient à  $G$  en chaque point de  $U \cap V$ .

**Proposition 6.5** Soit  $E(M, G)$  une  $G$ -structure définie par un tenseur  $t$  de type  $(k, l)$ .  $E$  est intégrable si, et seulement si, il existe au voisinage de chaque point de  $M$  des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  dans lesquelles le tenseur  $t$  a des coefficients constants :

$$t = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n} c_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

avec  $c_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ .

Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées locales sur un ouvert  $U$  de  $M$ . L'identification naturelle, en tout point  $x \in M$ , de  $T_x M$  avec  $\mathbb{R}^n$  détermine une section standard  $\sigma_S = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$  du fibré  $L(M)$ . À chaque sous groupe de Lie  $G$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  correspond une  $G$ -structure  $E_S(M, G)$  c'est l'unique  $G$ -structure sur  $M$  qui admet  $\sigma_S$  comme section globale. On l'appelle  $G$ -structure standard sur  $M$ .

Une  $G$ -structure  $E(M, G)$  sur  $M$  est donc intégrable si elle est localement équivalente à la  $G$ -structure standard  $E_S(M, G)$ .

Le problème d'intégrabilité pour les  $G$ -structures consiste à caractériser les  $G$ -structures intégrables, c'est donc un cas particulier du problème d'équivalence.

#### 6.6.4 Connexions adaptées à une $G$ -structure

**Définition 6.23** Soit  $E(M, G)$  une  $G$ -structure sur  $M$ . Une connexion linéaire  $\omega$  sur  $M$  est dite adaptée à  $E$  si, en tant que connexion sur  $L(M)$ , elle est adaptée au sous-fibré  $E$ , on désignera encore par  $\omega$  la restriction à  $E$  de la connexion.

Dans le cas des structures définies par un tenseur, il est facile de caractériser les connexions adaptées :

**Proposition 6.6** Si la  $G$ -structure  $E(M, G)$  est définie par un tenseur  $t$  de type  $(k, l)$  sur  $M$ , une connexion linéaire  $\omega$  est adaptée à  $E$  si, et seulement si, la différentielle absolue de  $t$  dans cette connexion est nulle,  $Dt = 0$ .

**Proposition 6.7** Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux connexions adaptées à une  $G$ -structure  $E(M, G)$ , alors  $u = \omega' - \omega$  est une 1-forme tensorielle sur  $E$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$  et de type adjoint.

**Remarques 6.1** 1. La 1-forme  $\omega$  d'une connexion adaptée à une  $G$ -structure  $E(M, G)$  prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ .

2. La  $G$ -structure  $E(M, G)$  est intégrable si elle admet une connexion adaptée à courbure et torsion nulles.

### Dérivée covariante

**Définition 6.24** Soient  $H(M, G)$  un espace de repères réels (resp. complexe) et  $\varphi$  une  $q$ -forme tensorielle ( $q = 0, \dots, n$ ) sur  $H$  à valeurs dans l'espace vectoriel  $V$  (réel si  $H$  est réel, complexe si  $H$  est complexe), on appelle dérivée covariante de  $\varphi$  le tenseur sur  $H$  défini par :

$$\nabla\varphi = tD\varphi.$$

L'opération de dérivation covariante est propre aux espaces de repères, à la différence de la différenciation absolue qui s'opère sur toute espace fibré principal différentiable.

$t\varphi$  étant un tenseur de type  $\mathfrak{R}(g) \otimes \Lambda^q g^{-1}$  à valeurs dans  $V \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^q(\mathbb{K}^{m^*})$ ,  $Dt\varphi$  est une 1-forme de même type et  $\nabla\varphi$  est un tenseur de type  $\mathfrak{R}(g) \otimes \Lambda^q g^{-1} \otimes g^{-1}$  à valeurs dans  $V \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^q \mathbb{K}^{m^*} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{m^*}$ .

Lorsque  $\varphi$  est un tenseur  $\tau$ , comme  $t\tau = \tau$ , alors  $\nabla\tau = tD\tau$ , on retrouve, donc, la notion habituelle de dérivée covariante. Quand  $q > 0$ , au contraire,  $tD\varphi$  est un tenseur à valeurs dans  $V \otimes \Lambda^{q+1} \mathbb{K}^{m^*}$  et de type  $\mathfrak{R}(g) \otimes \Lambda^{q+1} g^{-1}$  qui n'a donc aucune raison de coïncider avec  $\nabla\varphi$ .

**Proposition 6.8** Sur un espace de repères, le tenseur associé à la différentielle absolue d'une  $q$ -forme  $\varphi$  est égal à l'antisymétrisé de la dérivée covariante de  $\varphi$  dans une connexion à torsion nulle; il en diffère par un terme bilinéaire par rapport à la torsion et au tenseur associé à  $\varphi$  lorsque la torsion n'est pas nulle, suivant la formule :

$$(tD\varphi)_{i_0 i_1 \dots i_q}^A - \sum_{l=0}^q (-1)^l (\nabla\varphi)_{i_l i_0 \dots \widehat{i}_l \dots i_q}^A = \sum_{\substack{k < l \\ k, l = 0, 1, \dots, q}} 2(-1)^{(k+l)} S_{i_k i_l}^p (t\varphi)_{p i_0 \dots \widehat{i}_k \dots \widehat{i}_l \dots i_q}^A.$$

### 6.6.5 Tenseur de structure d'une $G$ -structure

Soit  $\omega$  une connexion sur la  $G$ -structure  $E(M, G)$ ,  $\Theta$  sa forme de torsion et  $\tau_{\Theta} : E \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n^*} \otimes \mathbb{R}^n$  le tenseur de torsion.

Soit l'application

$$\rho : \Lambda^2 \mathbb{R}^{n^*} \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n^*} \otimes \mathbb{R}^n / \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n^*} \otimes \mathcal{G})$$



où

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathcal{G} & \rightarrow & \Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n \\ S & \mapsto & \mathcal{A}(S) \end{array} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u, v) \mapsto \mathcal{A}(S)(u, v) = S(u)v - S(v)u$$

est l'opérateur d'antisymétrisation, cet opérateur respecte les actions naturelles du groupe  $G$  sur les espaces  $\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathcal{G}$  et  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n$ , de sorte que  $G$  agit sur l'espace  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n / \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathcal{G})$ .

**Définition 6.25** *Le tenseur  $\tau = \rho \circ \tau_\Theta$  sur  $E$  à valeurs dans  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n / \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathcal{G})$  est un invariant de la  $G$ -structure  $E(M, G)$ , appelé tenseur de Chern-Bernard de  $E$ , ou encore tenseur de structure de  $E$ .*

**Proposition 6.9** *Soit  $E(M, G)$  une  $G$ -structure sur  $M$ , si le tenseur de structure de  $E$  est nul, alors il existe sur  $E$  une connexion sans torsion.*

**Proposition 6.10** *le tenseur de structure d'une  $G$ -structure intégrable est nul.*

**Remarque 6.2** *La réciproque, bien que fausse en général, est vraie pour quelques types importants de structures.*

*Soit  $E(M, G)$  la  $G$ -structure définie par le tenseur presque complexe  $J$ ,  $E$  est intégrable si et seulement si le tenseur de structure  $\tau$  de  $E$  est nul.*



# Bibliographie

- [1] J.F.ADAMS. *Vector fields on spheres*. Ann. of Maths. (1962).
- [2] Mc.AUDIN-P.IGLESIAS *La géométrie symplectique*. La RECHERCHE. 38 France. Décembre 1994
- [3] L. AUSLANDER *Examples of locally affine spaces* Ann. of Maths. 64 (1964) 255-259.
- [4] L. AUSLANDER *The structure of complete locally affine manifolds*. Topology 3 suppl.1 (1964) 131-139.
- [5] L. AUSLANDER and L. MARKUS *Holonomy of flat affinely connected manifolds*. Ann. of Math. Princeton 62(1955) 139-151.
- [6] A. AWANE *Sur une généralisation des structures symplectiques*. Thèse Strasbourg (1984).
- [7] A. AWANE *k-symplectic structures* . Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.
- [8] A. AWANE *G-espaces k-symplectiques homogènes*. Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.
- [9] A. AWANE *Structures k-symplectiques*. Thèse Mulhouse(1992).
- [10] A. AWANE *Some affine properties of the k-symplectic manifolds*. *Beiträge zur Algebra und Geometrie* "Contribution to Algebra and Geometry" Volume 39 (1998) N°.1, 75 – 83. Germany
- [11] A. AWANE *Systèmes extérieures k-symplectiques*. Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino. Vol. 56, 1 (1998).
- [12] A. AWANE, M.BELAM, S.FIKRI, M.LAHMOUZ et B.NAANANI. *Systèmes hamiltoniens k-symplectiques*. Revista Matematica Complutense (2002) vol XV, num. 1, 1-21.

- [13] A. AWANE - M. GOZE. *Pfaffian systems, k-symplectic systems*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.
- [14] M. Berger. *La géométrie de Riemann : Aperçu historique et résultats récents*.
- [15] M.BERGER-B.GOSTIAUX. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF 1992.
- [16] F. BORCEUX. *Approche historique de la géométrie*. SOCHEPRESS CIAO (1986)
- [17] ROBERT A. BLUMENTHAL *Foliated manifolds with flat basic connection*. J. Differential Geometry , 16 (1981) 401-406.
- [18] Y.CHOQUET-BRUHAT. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Dunod. Paris (1968).
- [19] R.DEUHEVELS. *Cours de géométrie différentielle*. Cours de l'École Polytechnique.
- [20] J. DIEUDONNE *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag (1971).
- [21] J. DIEUDONNE *Eléments d'Analyse*. Gauthiers-Villars (1974).
- [22] J. DIEUDONNE *Linear Algebra and Geometry*. Hermann, Paris (1969)
- [23] B.DOUBROVINE, S.NOVIKOV, A.FOMENKO. *Géométrie Contemporaine : Méthodes et Applications*. Vol. 1, 2 et 3. Editions Mir Moscou (1979)
- [24] C. GODBILLON *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann. Paris (1969).
- [25] C. GODBILLON *FEUILLETAGES. Etude géométrique*. Birkhäuser (1991).
- [26] C. GODBILLON *Eléments de topologie algébrique*. Hermann. Paris (1971).
- [27] R.GODEMENT. *Cours d'algèbre*. Hermann Paris (1966) .
- [28] E. GOURSAT *Leçons sur les systèmes de Pfaff*. Paris. 1922.

- [29] M. GOZE *Systèmes de Pfaff*. Rendiconti Seminario. Facoltà di Scienze. Università di Cagliari Vol. 60 Fasc.2 (1990) 167-187.
- [30] M. GOZE *Systèmes de Pfaff associés aux algèbres de type H*. Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino Vol. 46, 1 (1988) 91-110.
- [31] M. GOZE *Sur la classe des formes invariantes à gauche sur un groupe de Lie* CRAS, Paris, (1976), T283 SA 499-502.
- [32] M. GOZE - A. BOUYAKOUB *Sur les algèbres de Lie munie d'une forme symplectique*. Rendiconti Seminario Facoltà Scienze. Università Cagliari Vol. 37 Fasc. 57 1(1987) 86-97.
- [33] M. GOZE - Y. KHAKIMDJANOV *Nilpotent Lie algebras*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London (1996).
- [34] M. GOZE - Y. HARAGUCHI *Sur les r-systèmes de contact*. CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.
- [35] W.H.GREUB. *Multilinear Algebra*. Springer Verlag Berli Heidelberg NewYork (1967)
- [36] S. HELGASON *Differential Geometry and Symmetric spaces* . Academic Press. New-York (1978).
- [37] F. HIRZBRUCH *Topological methods in Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York (1968).
- [38] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU *Foundations of differential Geometry*. Volume 1. Interscience Publishers New-York (1963).
- [39] Ivan KOLÁŘ, Peter W. MICHOR. *Natural Opérations in Différential Geometry*. Spriger Velag, Berlin-Heidelberg (1993)
- [40] S.LANG. *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Compagny (1977)
- [41] D.LEHMANN-C.SACRÉ. *Géométrie et topologie des surfaces*. PUF Mathématiques 1982
- [42] M. de LEON-MENDEZ-SALGADO *Regular p-almost cotangent structures*. J. Corean Math. Soc. 25 (1988) N°2; 273-287.
- [43] P. LIBERMANN et C.M. MARLE *Géométrie symplectique Bases théorique de la Mécanique classique*. Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.

- [44] A.LICHNEROWICZ *Éléments du calcul tensoriel*. Librairie Armand Colin (1950).
- [45] A. MEDINA *Structures de Poisson affines*. Colloque international Aix-en-Provence (1990).
- [46] P.MOLINO *Géométrie de Polarisation*. Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.
- [47] P.MOLINO *Riemannian foliations*. Birkhäuser (1988).
- [48] P.MOLINO *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*.
- [49] K. NOMIZU *Lie Groups and differential Geometry*. Math. Soc. Japan (1956).
- [50] Y. NAMBU *Generalized Hamiltonian Dynamics*. Physical Review D Volume 7, Number 8 15 April 1973.
- [51] Frédéric PHAM. *Géométrie et Calcul Différentiel sur les variétés*. Inter-Editions, Paris (1992)
- [52] M. POSTNIKOV *Groupes et Algèbres de Lie*. Mir. Moscou.(1985).
- [53] M. PUTA *Some Remarks on the  $k$ -symplectic manifolds*. Tensors.109-115.
- [54] T. SARI *Sur les variétés de contact localement affines*. CRAS, Paris, (1981), T292 SI 809-812.
- [55] S. STERNBERG *Lectures on differential Geometry*. Prentice Hall (19964).
- [56] N. WALLACH *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*. MATH. SCI. PRESS, 53, Jordan Road, Brookline, Massachusetts. 02146 (1977).
- [57] G. WARNER *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and co. Glenview (1972).
- [58] A. WEINSTEIN *Lectures on symplectic manifolds*. Conference board of mathematical science, (Regional Conference Series in Mathematics n 29 , A.M.S.) (1977).
- [59] A. WEINSTEIN *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*. Advances in Maths, 6 (1971), 329-346.

- [60] A. WIEL *Sur le théorème de de Rham*. Comm. math. Helv. 26(1952), 119-145.
- [61] J.A. WOLF *Spaces of constant curvature* (University of California, 1972).