



**HAL**  
open science

## Ondes dans les plasmas

Daniel Quemada

► **To cite this version:**

Daniel Quemada. Ondes dans les plasmas. DEA. Ed. Hermann, Paris”déposé avec l’aimable autorisation de l’éditeur, en date du 20 oct 2008”, France. 1968, pp.382. cel-00339201

**HAL Id: cel-00339201**

**<https://cel.hal.science/cel-00339201>**

Submitted on 11 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Propagation

# VIII

## des ondes dans les plasmas chauds homogènes. Théorie microscopique en présence d'un champ magnétique extérieur

En présence d'un champ magnétique statique  $B_0$ , la résolution de l'équation de Vlasov est plus difficile et conduit à un tenseur diélectrique dont les composantes sont d'une utilisation peu commode. En dehors de l'approximation des grandes longueurs d'ondes, où l'on retrouve les résultats de l'approximation adiabatique, il n'est pratiquement plus possible d'effectuer une étude générale de l'équation de dispersion; on ne peut en préciser les solutions qu'en particulierisant le problème étudié (domaine de fréquence, rapports des vitesses de phase aux vitesses thermiques, ordre de grandeur de la densité et du champ magnétique, etc.).

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux plasmas à deux composants, caractérisés par des distributions isotropes dans l'espace des vitesses, qui, dans les applications, seront prises maxwelliennes. Nous étudierons les situations pour lesquelles les températures des deux espèces de particules sont très différentes, essentiellement dans le domaine des basses fréquences où les effets de température, par suite de l'existence de modes très lents, sont les plus importants. Enfin, le voisinage de la résonance gyromagnétique électronique sera étudié, en même temps que l'*amortissement cyclotron*, de même nature que l'amortissement Landau.

### 8.1. Le tenseur diélectrique d'un magnétoplasma chaud

Il existe deux méthodes générales importantes pour résoudre l'équation de Vlasov linéarisée, lorsque  $B_0$  est différent de zéro : d'une part, la méthode de Fourier-Laplace (Sitenko et Stepanov, 1956; Bernstein, 1958) qui conduit, pour la perturbation  $f_1$ , à une équation différentielle par rapport à la vitesse; d'autre part la méthode dite « *méthode des caractéristiques* », pour laquelle on intègre directement l'équation linéarisée, le long des trajectoires du mouvement non perturbé des particules (c'est-à-dire le long d'hélices enroulées autour des lignes de forces

de  $B_0$ ), trajectoires qui sont décrites par les particules sous l'effet de leur agitation thermique. C'est cette deuxième méthode (Cf. par ex. Sagdeev et Shafranov, 1958; Mower, 1959) qui, en raison de son importance, est donnée dans l'appendice 9. Avec la géométrie habituelle ( $Oz$  le long de  $B_0$ ,  $Ox$  dans le plan  $(\mathbf{k}, B_0)$ ), elle conduit, dans le cas de l'équilibre isotrope ( $f_0 \equiv f_0(w^2)$ ), au résultat :

$$(8.1.1) \quad f_1(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) = -\frac{2q}{m\omega_b} \frac{\partial f_0}{\partial(\omega^2)} \int_0^\infty du \mathbf{w}'(u) \cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{r}', t - \frac{u}{\omega_b}\right).$$

Les trajectoires non perturbées des particules sont définies par

$$(8.1.2) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{1}{\omega_b} \left[ 2 \sin \frac{u}{2} \mathbf{R}\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \mathbf{w}_\perp + u \mathbf{w}_\parallel \right] \\ \mathbf{w}' = \mathbf{R}(u) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{R}(u) \cdot \mathbf{w}_\perp + \mathbf{w}_\parallel \end{cases}$$

$\mathbf{w}_\perp$  et  $\mathbf{w}_\parallel$  étant les composantes de  $\mathbf{w}$ , respectivement perpendiculaire et parallèle à  $B_0$ , et

$$(8.1.3) \quad \mathbf{R}(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

étant un tenseur qui définit la rotation autour du champ magnétique [on a  $t' = t - \frac{u}{\omega_b}$  c'est-à-dire  $u = \omega_b(t - t')$ ].

A partir de (8.1.1), on peut calculer, pour une onde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

la densité de courant  $\mathbf{J} = \sum_s q_s \int f_{1s} \mathbf{w} d^3w$ , d'où l'on déduira le tenseur de conductivité, puis le tenseur diélectrique.

Dans le cas de l'équilibre maxwellien, on peut mettre ce tenseur diélectrique sous la forme relativement simple :

$$(8.1.4) \quad \kappa = 1 - \sum_s \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0 e^{-\lambda} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}^{(n)} \right]_s$$

avec

$$(8.1.5) \quad \begin{cases} S_{11}^{(n)} = -n^2 Z_n F_n(\lambda) \\ S_{22}^{(n)} = -Z_n G_n(\lambda) \\ S_{33}^{(n)} = \lambda z_n Z_n' F_n(\lambda) \\ S_{12}^{(n)} = -S_{21}^{(n)} = i n Z_n H_n(\lambda) \\ S_{23}^{(n)} = -S_{32}^{(n)} = i(\lambda/2)^{1/2} Z_n H_n(\lambda) \\ S_{31}^{(n)} = S_{13}^{(n)} = (\lambda/2)^{1/2} n Z_n' F_n(\lambda) \end{cases}$$

où

$$z_n^{(e)} = \frac{\omega - n\omega_b}{k_{||}a_e} \quad z_n^{(i)} = \frac{\omega + n\Omega_b}{k_{||}a_i} \quad \lambda_s = \frac{1}{2} \frac{k_{\perp}^2 a_s^2}{\omega_b^2} = \frac{KT_s}{m_s} \frac{k_{\perp}^2}{\omega_b^2} \quad a_s^2 = \frac{2KT_s}{m_s}$$

(8.1.6)  $\left\{ \begin{array}{l} Z_n = Z(z_n) \quad Z'_n = Z'(z_n) = \frac{d}{dz_n} Z_n \\ \text{la fonction } Z \text{ étant définie en (7.4.23),} \\ F_n(\lambda) = \lambda^{-1} I_n(\lambda) \\ G_n(\lambda) = \lambda I_n''(\lambda) + (1 - 2\lambda) I_n'(\lambda) + \lambda I_n(\lambda) \\ H_n(\lambda) = I_n'(\lambda) - I_n(\lambda) \\ I_n(\lambda) \text{ étant la fonction de Bessel modifiée, du } n^{\text{ième}} \text{ ordre} \\ [I_n(\lambda) = i^{-n} J_n(i\lambda)] \text{ et } I_n', I_n'', \dots \text{ ses dérivées par rapport à } \lambda. \end{array} \right.$

Les expressions (8.1.5), sommées sur tous les  $n$  entiers, sont d'une utilisation pratique assez difficile. Nous allons tout d'abord en étudier la limite pour les grandes longueurs d'onde ( $z_n \gg 1$ ) en excluant les voisinages des résonances gyromagnétiques.

### 8.2. Limite des grandes longueurs d'ondes. Comparaison avec les résultats de la théorie adiabatique

#### Limite des grandes longueurs d'ondes 8.2.1

Cette limite est obtenue pour  $k_{\perp}$  et  $k_{||} \rightarrow 0$ , c'est-à-dire pour les deux conditions (8.2.1) et (8.2.2) :

(8.2.1)  $z_0^{(s)} = \frac{\omega}{k_{||}a_s} \gg 1$  (et donc  $z_n^{(s)} = \frac{\omega + n\omega_b}{k_{||}a_s} \gg 1$ , en excluant les voisinages des résonances gyromagnétiques et de leurs harmoniques),

(8.2.2)  $\lambda_s = \frac{k_{\perp}^2 a_s^2}{2\omega_b^2} \ll 1$

d'où 
$$I_n(\lambda) = I_{-n}(\lambda) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \left[ 1 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} z_n Z_n \sim -1 \\ z_n^2 Z'_n \sim 1 \end{array} \right\} \text{ en négligeant les termes en } e^{-z^2} \ll 1.$$

En portant ces développements dans (8.1.4), (8.1.5), (8.1.6), on obtient pour les composantes de  $\kappa_{\alpha\beta}$ , des expressions identiques aux expressions (6.5.1) obtenues par la théorie adiabatique.

#### Domaine de validité de la théorie adiabatique : Approximation des plasmas tièdes 8.2.2

L'identité, aux termes d'amortissement près, des résultats microscopique et macroscopique, justifie la validité de l'hypothèse adiabatique dans les domaines définis par (8.2.1) et (8.2.2).

Les expressions (6.5.1), où les corrections de température ne dépendent que des paramètres  $\tau_s = \frac{1}{2} \frac{k^2 a_s}{\omega^2}$ , ont été établies en posant pour seule hypothèse  $\tau \ll 1$ . On aurait pu les écrire en utilisant les paramètres  $\tau_\perp = \tau \sin^2 \theta$  et  $\tau_{//} = \tau \cos^2 \theta$ , avec  $\tau_\perp \ll 1$  et  $\tau_{//} \ll 1$ , conditions qui expriment l'hypothèse adiabatique.

Or, d'après (8.2.1),  $\tau_{//} = (2z_0^2)^{-1} \ll 1$  : dans le domaine défini par (8.2.2), l'hypothèse adiabatique est donc vérifiée. D'après (8.2.2),  $\tau_\perp = 2\lambda \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2$  : pour  $\omega > \omega_b$ , la condition  $\lambda \ll 1$  entraîne évidemment  $\tau_\perp \ll 1$ ; pour  $\omega < \omega_b$ , la condition  $\lambda \ll 1$  est satisfaite si  $\tau_\perp \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 \ll 1$ , ce qui définit un domaine plus large que celui caractérisé par  $\tau_\perp \ll 1$ .

La discussion phénoménologique du domaine de validité de l'hypothèse adiabatique (donnée au § 6.2) est donc justifiée par ce qui précède. Naturellement les voisinages des résonances gyromagnétiques et de leurs harmoniques sont exclus de ces domaines.

Dans le plan  $(x, N^2)$ , ces domaines ont été précisés sur la figure 6.1, correspondant à

$$(8.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{//}^2 \ll c^2/a^2 \\ N_\perp^2 \ll \begin{cases} c^2/a^2 & \text{si } \omega > \omega_b \\ x/\beta & \text{si } \omega < \omega_b \end{cases} \end{array} \right.$$

où  $\beta = 2\mu_0 n_0 KT/B_0^2$ ; pour  $n_0$  et  $B_0$  fixés, ce domaine est d'autant plus grand que la température  $T$  est plus basse : on retrouve alors la limite des plasmas froids, valable dans tout le plan  $(x, N^2)$ ; plus le champ  $B_0$  est fort, plus le domaine de validité est grand, ce qui est en accord avec la limite  $B_0 \rightarrow \infty$ , où seule subsiste l'agitation thermique longitudinale, les rayons de Larmor des particules tendant vers zéro (pour  $N_\perp$ , la théorie des plasmas froids est applicable; pour  $N_{//}$ , la condition  $\tau_{//} \ll 1$  doit être maintenue); enfin, si  $n_0$  décroît, le domaine s'élargit : c'est la limite du vide, avec l'onde électromagnétique classique.

En conclusion : à l'intérieur du domaine défini par (8.2.3), les effets de l'agitation thermique sur la propagation des ondes n'apporteront que des corrections faibles à la théorie des plasmas froids. Mais pour une onde  $(\mathbf{k}, \omega)$  donnée, avec  $n_0$  et  $B_0$  fixés, les conditions (8.2.3) limitent la température : on dira que ces conditions (8.2.3) définissent l'*approximation des plasmas tièdes*, dénomination préférable, nous semble-t-il, à celle de théorie adiabatique.

A l'extérieur du domaine de validité de cette approximation, on doit s'at-

1. Ce sont en fait les termes électroniques qui imposent la condition limite : en effet  $\frac{\tau_i}{\tau_e} = \frac{m_e T_i}{m_i T_e} < 10^{-1}$  dans tous les cas pratiques.

tendre à des amortissements Landau très importants, mettant directement en cause l'existence de l'onde.

### 8.3. Propagation parallèle ( $k_{\perp} = 0$ )

Pour  $\lambda = 0$ , les expressions (8.1.4), (8.1.5) et (8.1.6) se simplifient beaucoup. On a alors

$$(8.3.1) \quad \kappa = 1 - \sum_s \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0 M \right)_s$$

où

$$(8.3.2) \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & -iM_2 & 0 \\ iM_2 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$(8.3.3) \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{1}{2}(Z_{-1} + Z_{+1}) \\ M_2 = -\frac{1}{2}(Z_{-1} - Z_{+1}) \\ M_3 = z_0 Z'_0. \end{cases}$$

On peut séparer l'équation de dispersion (3.4.1) en plusieurs termes

$$(8.3.4) \quad \kappa_{33} = 1 - \sum_s \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0^2 Z'_0 \right)_s = 0.$$

$$(8.3.5) \quad N_D^2 = \kappa_1 + \kappa_2 = 1 - \sum_s \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0 Z_{-1} \right)_s$$

$$(8.3.6) \quad N = \kappa_1 - \kappa_2 = 1 - \sum_s \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0 Z_{+1} \right)_s$$

correspondant respectivement à l'onde longitudinale (identique à la solution (7.5.29) pour  $B_0 = 0$ ), à l'onde droite et à l'onde gauche (Cf. (3.1.4) et (3.5.5)). Développées au premier ordre en  $1/z_0^2$ ,  $1/z_{\pm 1}^2$  et  $1/z_{\pm 1}^2$  (donc loin des résonances  $\omega = \omega_b$  et  $\omega = \Omega_b$ ), les solutions (8.3.5) et (8.3.6) se réduisent, aux termes d'amortissement près, aux solutions (6.5.7), très peu différentes des solutions correspondantes obtenues dans l'approximation des plasmas froids. Le calcul de l'amortissement, loin des résonances, est donné en appendice 10 (Cf. aussi Gershman, 1959).

D'après les expressions (8.3.3), il apparaît qu'en propagation longitudinale le calcul linéaire ne conduit à aucun harmonique des résonances gyromagnétiques : seules les fréquences fondamentales sont excitées; les expressions (8.3.3) ne dépendent, en effet, que de  $z_{+1}$  et  $z_{-1}$ . On retrouve la remarque faite à la fin du § 6.6. Nous étudierons plus loin ces résonances.

8.4. Propagation perpendiculaire ( $k_{\parallel} = 0$ ) : Résultats en haute fréquence

En négligeant les ions, les solutions pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ont été données par Dnestrovskii et Kostomarov (1961 a et 1961 b) pour l'onde *ordinaire* et pour l'onde *extraordi-*

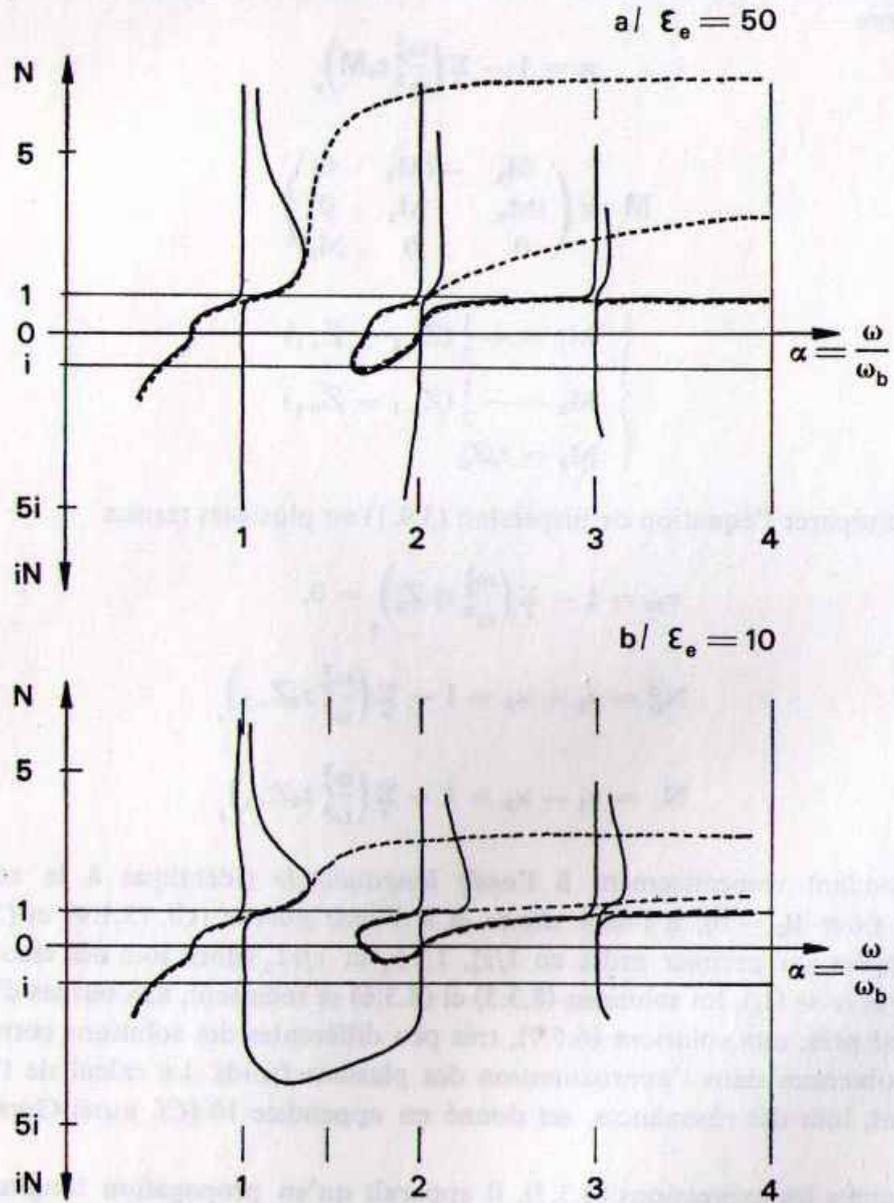


FIGURE 8.1.

Ondes extraordinaires ( $k \cdot B_0 = 0$ ; ions immobiles)

———— théorie cinétique (Dnestrovskii et Kostomarov, 1961 b)  $\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right)^2 = 1,2$   
 - - - - - théorie adiabatique

naires. Ces résultats sont donnés graphiquement sur les figures 8.1 à 8.5, qui donnent l'indice  $N$  en fonction de  $\omega/\omega_b$ . La comparaison avec la théorie adiabatique, dont les solutions ont été données en (6.5.9) et (6.5.10), est indiquée sur ces figures. On constate, sous réserve de satisfaire à la condition de validité (6.2.4),

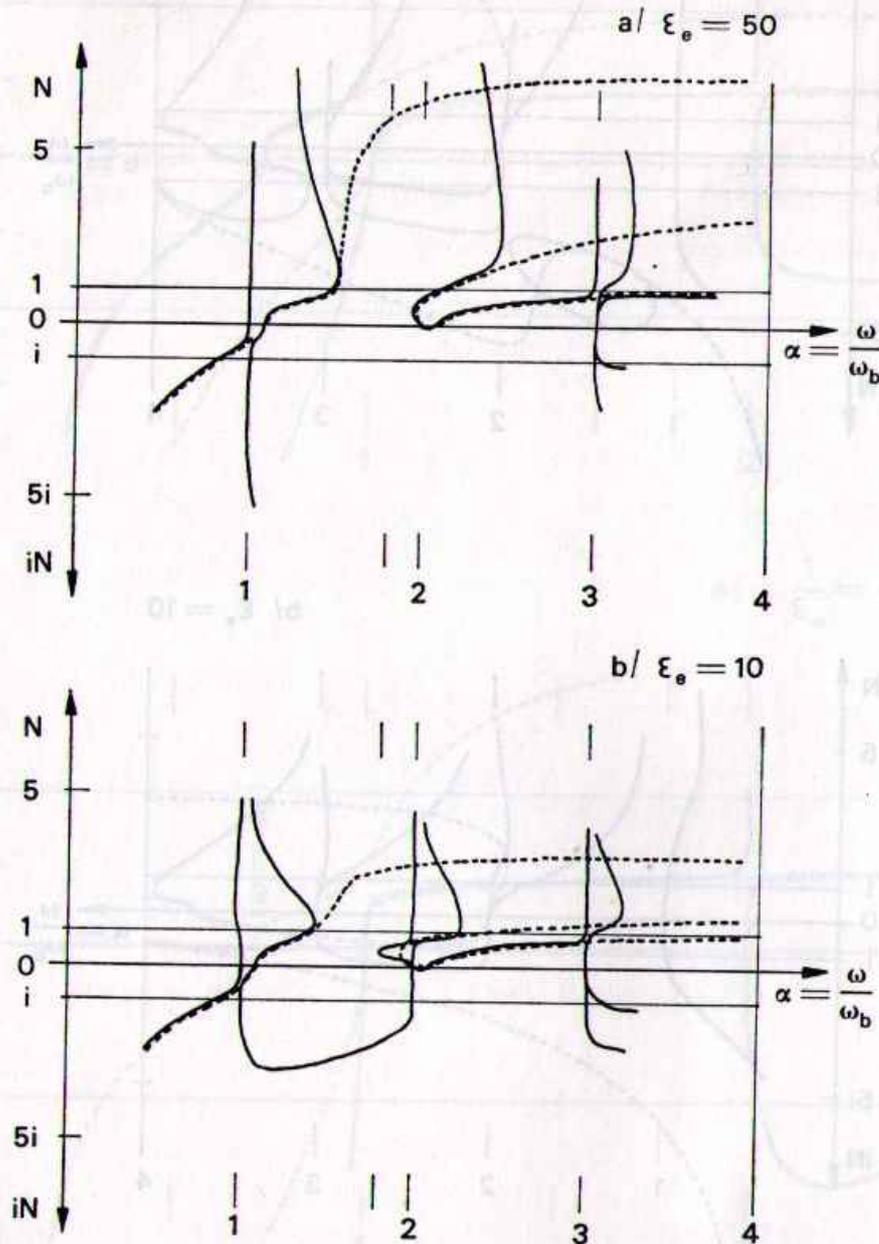


FIGURE 8.2.

Ondes extraordinaires ( $k \cdot B_0 = 0$ ; ions immobiles)

— théorie cinétique (Dnestrovskii et Kostomarov, 1961 b)

- - - théorie adiabatique

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right)^2 = 2,25$$

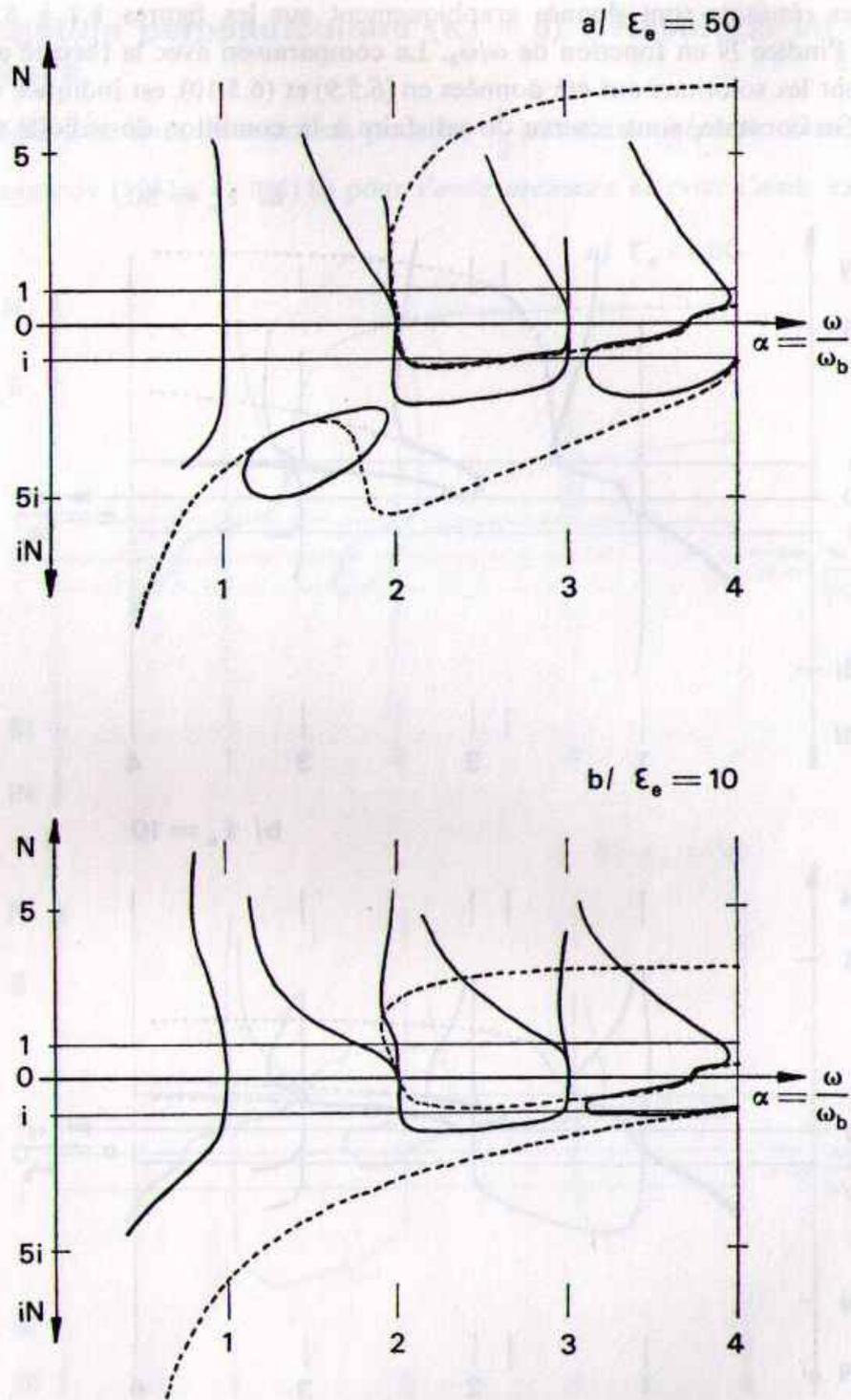


FIGURE 8.3.

Ondes extraordinaires ( $k \cdot B_0 = 0$ ; ions immobiles)

————— théorie cinétique (Dnestrovskii et Kostomarov, 1961 b)

----- théorie adiabatique

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right)^2 = 17,6$$

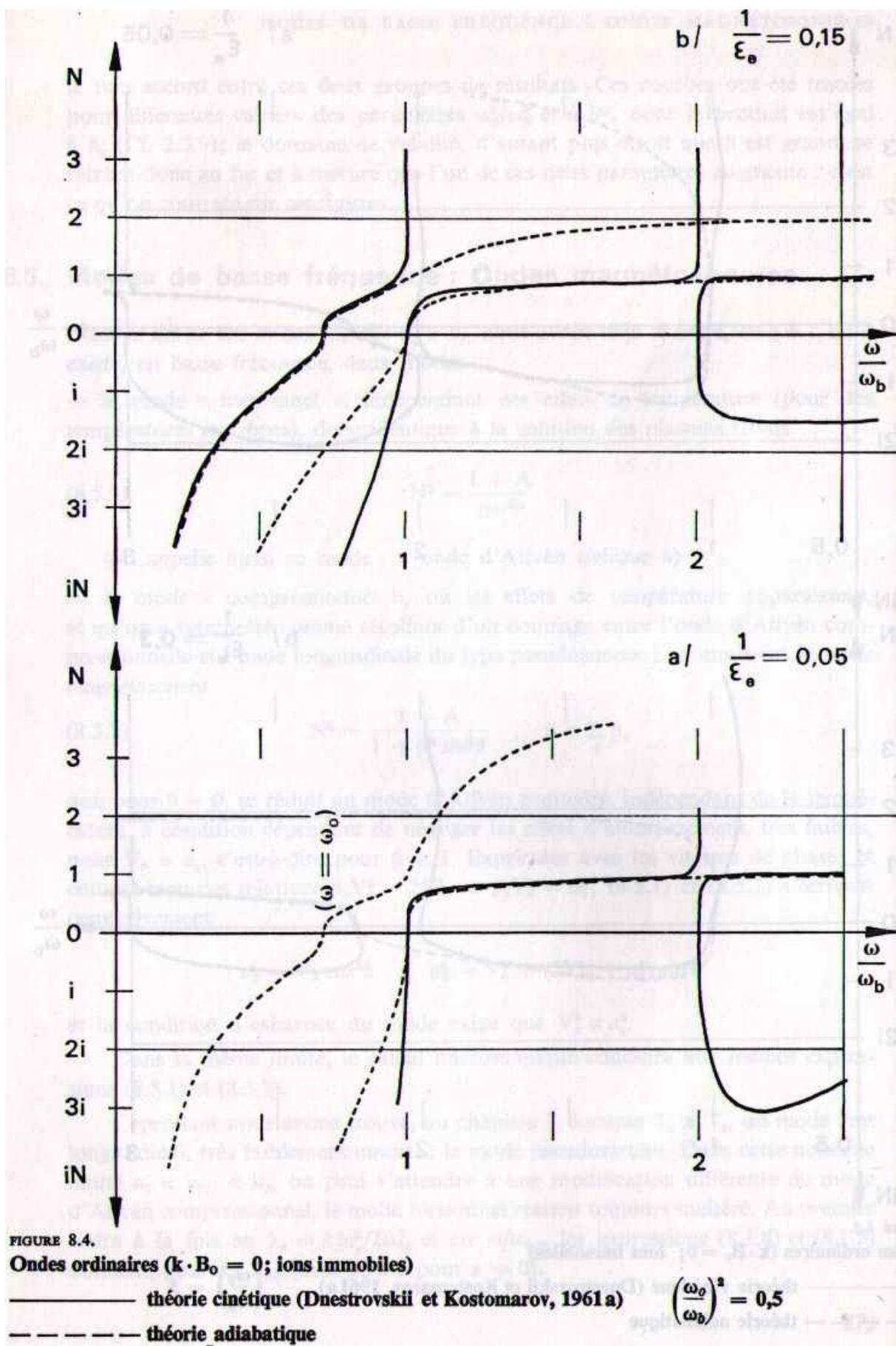


FIGURE 8.4.

Ondes ordinaires ( $k \cdot B_0 = 0$ ; ions immobiles)

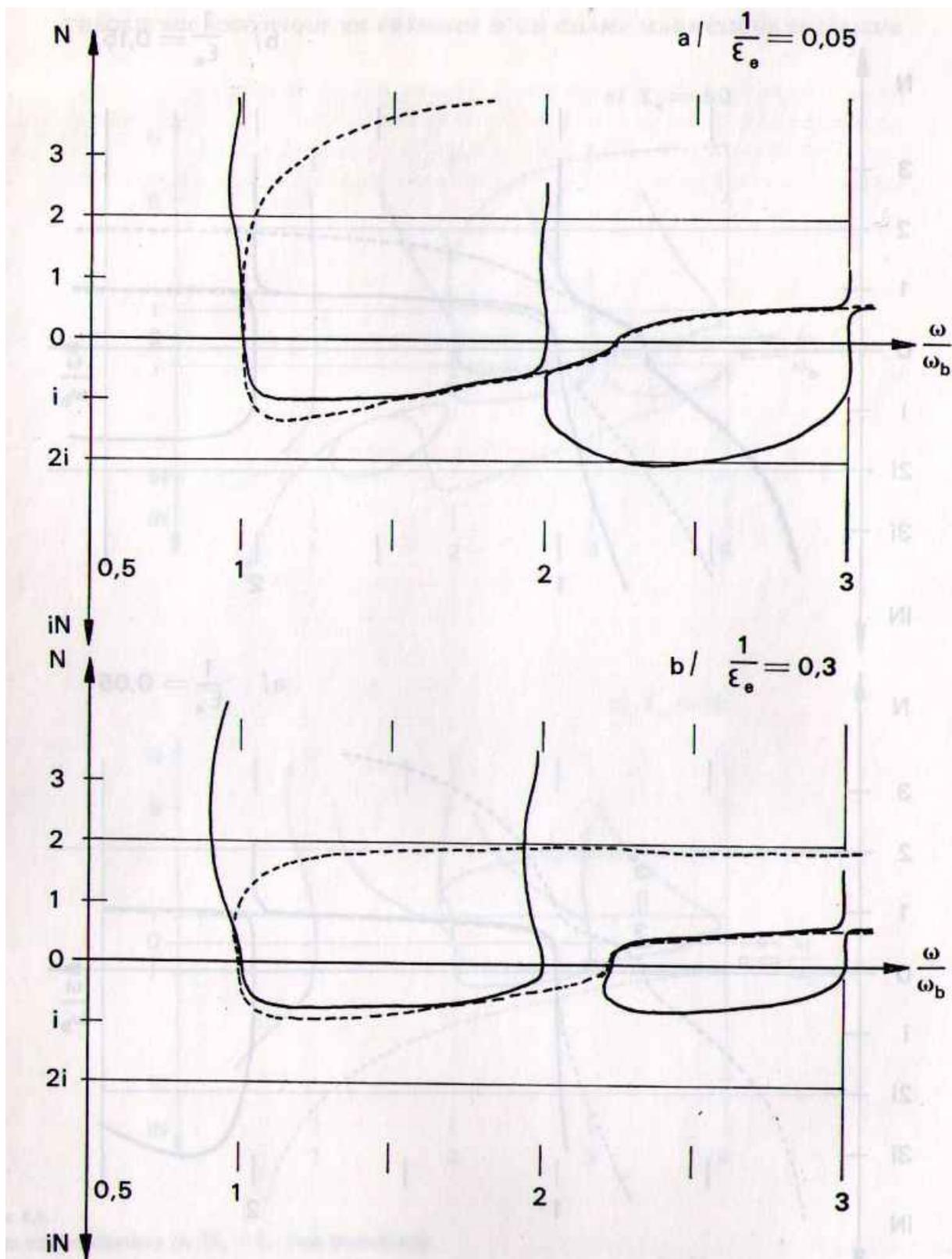


FIGURE 8.5.

Ondes ordinaires ( $k \cdot B_0 = 0$ ; ions immobiles)

——— théorie cinétique (Dnestrovskii et Kostomarov, 1961a)  $\left(\frac{\omega_0}{\omega_b}\right)^2 = 5$   
 - - - - - théorie adiabatique

le bon accord entre ces deux groupes de résultats. Ces courbes ont été tracées pour différentes valeurs des paramètres  $\omega_p^2/\omega_b^2$  et  $a/c^2$ , dont le produit est égal à  $\beta_e$  (Cf. 2.3.9); le domaine de validité, d'autant plus étroit que  $\beta$  est grand, se rétrécit donc au fur et à mesure que l'un de ces deux paramètres augmente : c'est ce qu'on constate sur ces figures.

## 8.5. Modes de basse fréquence : Ondes magnéto-sonores

Dans la limite des ondes rapides  $v_\varphi \gg a_s$ , nous avons déjà montré, au § 6.7, qu'il existe, en basse fréquence, deux modes :

— le mode « torsionnel », indépendant des effets de température (pour des températures isotropes), donc identique à la solution des plasmas froids

$$(8.5.1) \quad N^2 = \frac{1 + A}{\cos^2\theta}$$

(on appelle aussi ce mode : « onde d'Alfvén oblique »)

— le mode « compressionnel », où les effets de température apparaissent, et qu'on a interprété comme résultant d'un couplage entre l'onde d'Alfvén compressionnelle et l'onde longitudinale du type pseudosonore : ce mode est le *mode magnéto-sonore*

$$(8.5.2) \quad N^2 = \frac{1 + A}{1 + \beta^2 \sin^2\theta}, \quad \beta = \sum_s \beta_s$$

qui, pour  $\theta = 0$ , se réduit au mode d'Alfvén ordinaire, indépendant de la température, à condition cependant de négliger les effets d'amortissement, très faibles, pour  $V_A \gg a_s$ , c'est-à-dire pour  $\beta \ll 1$ . Exprimées avec les vitesses de phase, et compte tenu des relations  $\beta_e V_A^2 = 2V_{ps}^2$  et  $\beta_i V_A^2 = a_i^2$ , (8.5.1) et (8.5.2) s'écrivent respectivement

$$v_\phi^2 = V_A^2 \cos^2\theta \quad ; \quad v_\phi^2 = V_A^2 + (2V_{ps}^2 + a_i^2) \sin^2\theta$$

et la condition d'existence du mode exige que  $V_A^2 \ll a_e^2$ .

Dans la même limite, le calcul microscopique conduira aux mêmes expressions (8.5.1) et (8.5.2).

Cependant nous avons trouvé, au chapitre 7, lorsque  $T_e \gg T_i$ , un mode lent longitudinal, très faiblement amorti : le mode pseudosonore. Dans cette nouvelle limite  $a_i \ll v_{\varphi//} \ll a_e$ , on peut s'attendre à une modification différente du mode d'Alfvén compressionnel, le mode torsionnel restant toujours inaltéré. Au premier ordre à la fois en  $\lambda_s = k_1^2 a_s^2 / 2\omega_{bs}^2$  et en  $\omega/\omega_{bs}$ , les expressions (8.1.4) et (8.1.5) donnent, pour les  $\kappa_{\alpha\beta}$  (avec  $z_n^2 \gg 1$  pour  $n \neq 0$ ).

$$(8.5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{11} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega_b^2} = 1 + A \\ \kappa_{22} = 1 + A + 2 \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \lambda_s z_{0s} Z_{0s} \\ \kappa_{33} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} (1 - \lambda_s) z_{0s}^2 Z_{0s}' \\ \kappa_{12} = -\kappa_{21} \neq 0 \\ \kappa_{23} = -\kappa_{32} = -i \sum_s (\lambda_s/2)^{1/2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} z_{0s} Z_{0s}' \\ \kappa_{13} = \kappa_{31} \neq 0. \end{array} \right.$$

Portées dans (2.4.9), les équations (8.5.3) conduisent à l'équation de dispersion (8.5.4)

$$(8.5.4) \quad [\kappa_{33}(\kappa_{22} - N^2) + \kappa_{23}^2] (\kappa_{11} - N^2 \cos^2\theta) = 0$$

(où le facteur  $\kappa_{23}$ , du premier ordre en  $\lambda_s$ , ne disparaît plus, comme dans (6.7.2) où il était du second ordre en  $\tau_s$ ).

L'équation (8.5.4) donne le mode torsionnel, inchangé, et le mode compressionnel

$$(8.5.5) \quad N^2 = \kappa_{22} + \frac{\kappa_{23}^2}{\kappa_{33}}$$

Pour  $a_i \ll \frac{\omega}{k_{\parallel}} \ll a_e$ , ( $z_{0e} \ll 1$  et  $z_{0i} \gg 1$ ), on a, d'après (8.5.3), avec (7.5.27) et (7.5.28), et avec  $2(\omega_{ps}/\omega)^2 \lambda_s = N^2 \sin^2\theta \beta_s$

$$(8.5.6) \quad \kappa_{22} \simeq 1 + A - N^2 \sin^2\theta \beta_i + \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \beta_e z_{0e}$$

$$(8.5.7) \quad \kappa_{23}^2 \simeq -\frac{1}{2} N^2 \sin^2\theta \beta_e (k_{De}/k_{\parallel})^2$$

$$(8.5.8) \quad \kappa_{33} \simeq \frac{k_{De}^2}{k_{\parallel}^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}$$

Dans (8.5.8), les deux termes  $\Omega_p^2/\omega^2$  et  $k_{De}^2/k_{\parallel}^2$  sont dans le rapport

$$\frac{\Omega_p^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k_{De}^2} \simeq \frac{V_{ps}^2}{v_{\phi\parallel}^2}$$

où  $V_{ps} = (KT_e/m_i)^{1/2}$  est la vitesse de phase des ondes pseudosonores (plasma électrons-protons).

Pour  $v_{\phi\parallel}^2 \gg V_{ps}^2$ , on obtient donc

$$(8.5.9) \quad N^2 = \frac{1 + A + i\frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta_e z_{0e}}{1 + \left(\beta_i + \frac{1}{2} \beta_e\right) \sin^2\theta}$$

qui, pour  $\theta = 0$ , redonne l'onde d'Alfvén ordinaire, avec un terme d'amortissement dû à l'agitation thermique électronique.

Pour  $v_{\phi\parallel}^2 \ll V_{ps}^2$ , on a

$$(8.5.10) \quad N^2 = \frac{1 + A}{\cos^2\theta} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta_e z_{oe}$$

$$1 + \beta_i \sin^2\theta$$

qui donne encore la même limite que (8.5.9) pour  $\theta = 0$ .

Avec  $\beta_e z_{oe} = c\beta_e/aN \cos \theta$ , le mode (8.5.9) n'existe plus lorsque  $\theta$  devient voisin de  $\pi/2$ ; en dehors de cette région, le terme imaginaire dans (8.5.9) est négligeable et on a

$$v_\phi^2 = V_A^2 + (V_{PS}^2 + a_i^2) \sin^2\theta$$

pratiquement identique à (8.5.2), et n'existe que si  $V_A^2 \gg V_{PS}^2$ , c'est-à-dire  $\beta_e \ll 1$ . Le mode (8.5.10), où le terme imaginaire, indépendant de  $\theta$ , est toujours négligeable si  $\beta_e \ll a_e/V_A$ , donne

$$v_\phi^2 = \cos^2\theta (V_A^2 + a_i^2 \sin^2\theta)$$

pratiquement identique au mode (8.5.1), mais de polarisation différente, et n'existe que si  $V_A^2 \ll V_{PS}^2$ , c'est-à-dire pour  $1 \ll \beta_e \ll a_e/V_A$ , ce qui exige  $V_A \ll a_e^2$ .

Enfin, pour  $v_\phi \simeq V_{PS}$ , on a  $|x_{33}| \ll 1$ , et alors l'équation de dispersion du mode compressionnel devient  $N^2 \simeq x_{22}^2/x_{33}$ , soit après calcul (et en négligeant le terme en  $\beta_e z_{oe}$ , toujours  $\ll 1$  si  $\beta_e \ll a_e/V_{PS}$ )

$$(8.5.11) \quad N^2 = \frac{c^2}{V_{PS}^2 \cos^2\theta} \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \sin^2\theta \right)$$

ou encore

$$v_\phi^2 = \frac{V_{PS}^2 \cos^2\theta}{1 + (V_{PS}/V_A)^2 \sin^2\theta}$$

L'existence des modes (8.5.9), (8.5.10) et (8.5.11) n'est assurée que si  $a_i^2 \ll v_\phi^2 \ll a_e^2$ . Pour le premier, il faut donc pratiquement que  $a_i^2 \ll \frac{V_A^2}{\cos^2\theta} \ll a_e^2$ , d'où  $\beta_i \ll 1$  (d'autant moins que  $\theta$  s'approche près de  $\pi/2$ ) et  $V_A^2 \ll a_e^2$  (d'autant plus que  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ). Pour le second, on doit avoir  $a_i^2 \ll V_A \ll V_{PS}^2 \ll a_e^2$ , conditions indépendantes de  $\theta$ , soit  $\beta_i \ll 1$  et  $\beta_e \gg 1$ . Enfin, le troisième qui existe pour  $\beta_e \ll 1$  exige  $\theta$  petit dès que  $1 \gtrsim \beta_e \ll a_e/V_A$ .

En conclusion, le couplage des modes d'Alfvén avec le mode pseudosonore conduit, pour  $\beta_e < 1$ , à deux modes (8.5.9), avec  $v_\phi^2 > V_A^2 \cos^2\theta$ , où  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , et (8.5.11) avec  $v_\phi^2 < V_A^2 \cos^2\theta$  : on les appelle respectivement *onde magnétosonore accélérée* et *onde magnétosonore retardée*<sup>1</sup> (relativement au mode torsionnel); pour  $1 < \beta_e \ll a_e/V_A$ , les deux solutions (8.5.10) et (8.5.11) donnent deux modes accélérés.

1. La théorie adiabatique à pression scalaire conduit aussi à des modes magnétosonores accélérés et retardés, mais dont les expressions des indices sont incorrectes.

L'excitation de ces modes magnétosonores a été proposée pour chauffer les ions d'un plasma (Frank-Kamenetskii, 1960).

## 8.6. Ondes longitudinales

L'équation de dispersion des ondes électrostatiques a été établie au § 6.8

$$(8.6.1) \quad \kappa_{11} \sin^2\theta + 2\kappa_{13} \sin\theta \cos\theta + \kappa_{33} \cos^2\theta = 0$$

et la limite des ondes rapides y a été étudiée; on l'obtiendrait de nouveau avec les expressions microscopiques (8.1.4, 5 et 6).

L'existence de l'onde pseudosonore, pour  $T_e \gg T_i$ , lorsque  $\theta = 0$ , nous conduit à rechercher, dans la limite des basses fréquences, une solution lente telle que  $a_1^2 \ll v_\phi^2 \ll a_2^2$ . Dans la même limite que celle étudiée au § précédent pour l'onde magnétosonore, on a donc

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &\simeq 1 + A \\ \kappa_{13} &\simeq 0 \\ \kappa_{33} &\simeq \left(\frac{k_{De}}{k_{\parallel}}\right)^2 - \left(\frac{\Omega_p}{\omega}\right)^2 \end{aligned}$$

expressions qui conduisent à

$$(8.6.2) \quad N^2 = \frac{2\omega_p^2 c^2 / a^2}{\Omega_p^2 \cos^2\theta - \omega^2 (1 + A) \sin^2\theta}$$

En excluant le voisinage de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  [(8.6.1) devient alors  $\kappa_{11} = 0 = 1 + A$  qui n'a pas de solution basse fréquence], on peut écrire

$$(8.6.3) \quad N^2 = \frac{c^2}{V_{ps}^2 \cos^2\theta} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{\Omega_p^2} (1 + A) \operatorname{tg}^2\theta \right]$$

l'angle  $\theta$  devant satisfaire à la condition

$$\operatorname{tg}^2\theta \ll \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 (1 + A)}$$

Dans ces conditions, on peut aller assez près de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pourvu que  $\omega$  soit suffisamment petit devant  $\Omega_p^2/(1 + A)$ . Pratiquement, on a donc

$$(8.6.4) \quad N^2 = \frac{c^2}{V_{ps}^2 \cos^2\theta}$$

qui, pour  $\beta_e \ll 1$ , se confond avec (8.5.11).

Ce mode pseudosonore oblique résulte, comme l'onde magnétosonore, du couplage entre l'onde d'Alfvén et l'onde pseudosonore; cependant, il dépend peu de  $B_0$  et a essentiellement un caractère sonore.

## 8.7. Amortissement cyclotronique et amortissement par effet Cérenkov. Modes de particules piégées

### Mécanismes d'amortissement d'une onde 8.7.1

L'amortissement d'une onde se propageant dans un plasma est dû à l'absorption d'énergie par les charges, cette énergie étant ensuite redistribuée aux mouvements thermiques. Cette absorption d'énergie peut se faire de deux manières différentes :

- sous l'effet des collisions, lorsque  $\omega \lesssim \nu$ ,
- par interaction forte avec les particules résonnantes, lorsque  $\omega \gg \nu$ .

Sauf aux très basses fréquences, où l'absorption collisionnelle (non résonnante) devient importante (et maintient maxwellienne la distribution des vitesses), ce seront les mécanismes non collisionnels (résonnants) qui seront responsables de l'amortissement de l'onde et se traduiront par une modification locale (dans l'espace des vitesses) de la distribution. Dans le cadre de la théorie linéaire, on ne saura pas dire comment cette absorption d'énergie est ensuite répartie dans le plasma. Seule une description non linéaire permettra de résoudre ce problème. Nous avons déjà rencontré, au chapitre 7, un exemple d'un tel amortissement : l'amortissement Landau, quand  $B_0 = 0$ .

Lorsque  $B_0 \neq 0$ , il existe dans le plasma deux types de particules résonnantes :

a) Le premier type correspond à un électron en rotation dans le champ  $B_0$ , et animé de la vitesse  $w_z$  parallèle à  $B_0$ ; il voit la composante (transverse à  $B_0$ ) du champ électrique de l'onde droite, à une fréquence  $\omega' = \omega - k_{||}w_z$ , modifiée par effet Doppler ( $\omega$  étant la fréquence du champ dans le référentiel au repos); si  $\omega' = \omega_b$ ,  $\omega_b$  désignant la fréquence gyromagnétique de cet électron, celui-ci voit un champ stationnaire et va donc absorber une partie de l'énergie de l'onde. (Cf. Appendice 11). Plus généralement, on aura des particules résonnantes sur les harmoniques  $n\omega_b$ , la condition définissant la vitesse des électrons résonnants étant

$$(8.7.1) \quad \omega - n\omega_b - k_{||}w_z = 0$$

et une condition analogue pour les ions. Ce mécanisme traduit l'absorption cyclotron.

b) Le deuxième type est défini par une charge en mouvement le long du champ  $B_0$ ; cette charge sera aussi en résonance avec le champ  $E_z$  de l'onde, quand sa vitesse sera égale à la vitesse de phase de l'onde, comme dans le cas des oscillations longitudinales, électroniques et ioniques, lorsque  $B_0 = 0$ . Cette égalité de vitesses implique évidemment que l'onde considérée soit une onde lente. De tels modes lents existent aussi quand  $B_0 \neq 0$  : modes d'Alfvén, mode pseudosonore, modes magnétosonores. L'absorption qui résulte de cet effet de résonance est le mécanisme inverse de l'émission Cérenkov (Cf. par ex. Landau et Lifshitz, 1959;

Panofski, Phillips, 1962) : elle sera appelée *absorption Cérenkov* (Shafranov, 1958) et est caractérisée par la condition

$$(8.7.2) \quad \omega - k_{\parallel} w_z = 0;$$

lorsque  $\theta = 0$ , elle se confond avec l'absorption Landau.

L'absorption cyclotron se traduit par une augmentation de l'énergie transverse des particules et, le mouvement longitudinal étant, dans l'approximation linéaire, découplé du mouvement transversal, la condition (8.7.1) restera pratiquement satisfaite pendant de longs intervalles de temps : l'absorption cyclotron se fait d'une manière continue et nous verrons au § 8.7.3 qu'elle ne s'accompagne d'un phénomène de piégeage, comme c'est le cas pour les oscillations longitudinales (Cf. § 7.4), qu'au bout d'un temps beaucoup plus long. Au contraire, l'absorption Cérenkov est directement associée à une modification de la vitesse longitudinale, et le piégeage aura lieu plus tôt : la condition (8.7.2) n'est satisfaite que pendant des intervalles de temps très inférieurs au temps de piégeage  $\tau_p$  : comme dans le cas de l'amortissement Landau, il s'établit une situation quasi stationnaire, où des particules absorbent de l'énergie à l'onde, pendant que d'autres lui en cèdent. (Il y a formation d'un « plateau » dans la distribution des vitesses parallèles : mais on sort alors de la description linéaire.)

### Modèle multifaisceaux 8.7.2

Dans l'étude des oscillations longitudinales, lorsque  $B_0 = 0$ , le modèle multifaisceaux a permis de préciser les modes de particules piégées et les échanges d'énergie entre l'onde et les particules. Ce modèle peut être appliqué ici, quand  $B_0 \neq 0$ , pour étudier l'interaction d'une onde avec les particules du plasma. Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas d'une onde en propagation parallèle au champ magnétique, le plasma étant représenté par la superposition de faisceaux parallèles à  $B_0$  (le long de  $Oz$ ). Dans le faisceau  $l$ , constitué de différentes espèces  $s$  de particules de vitesses  $V_s^{(l)}$ , parallèles à  $Oz$ , et de densités moyennes  $\bar{n}_s^{(l)} = n_{0s} g_{0s}(V_{sl})$ , les perturbations  $n_s^l$  et  $w_s^l$  de densité et de vitesse, apportées par l'onde, sont déterminées par les équations linéarisées (en omettant l'indice  $l$ )

$$(8.7.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} n_s + V_s \frac{\partial}{\partial z} n_s + \bar{n}_s \nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0$$

$$(8.7.4) \quad \bar{n}_s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}_s + \bar{n}_s V_s \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{w}_s = \frac{\bar{n}_s q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_s \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{w}_s \times \mathbf{B}_0)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}_1$  (perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , donc à  $\mathbf{B}_0$ ) sont les champs de l'onde. La densité (linéarisée) de courant microscopique  $\mathbf{j}_s = q_s (\bar{n}_s \mathbf{w}_s + n_s \mathbf{V}_s)$  a pour composantes, relativement à  $\mathbf{B}_0$

$$\mathbf{j}_\perp = \bar{n}_s q_s \mathbf{w}_{s\perp}$$

$$j_{\parallel} = \bar{n}_s q_s w_{s\parallel} \left( 1 + \frac{kV_s}{\omega - kV_s} \right) = \frac{\omega}{\omega - kV_s} \bar{n}_s q_s w_{s\parallel}$$

d'après (8.7.3).

Après transformation de Fourier, et compte tenu de  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\perp = \omega \mathbf{B}_\perp$ , on obtient pour la densité  $\mathbf{j}_{s\perp}$

$$-i(\omega - kV_s) \mathbf{j}_{s\perp} = \varepsilon_0 \bar{\omega}_{ps}^2 \left( 1 - \frac{kV_s}{\omega} \right) \mathbf{E}_\perp + \omega_{bs} \times \mathbf{j}_{s\perp}$$

où  $\bar{\omega}_{ps}^2 = \frac{\bar{n}_s q_s^2}{\varepsilon_0 m_s} = \omega_{ps}^2 g_{0s}(V_s)$  et  $\omega_{bs} = -\frac{q_s}{m_s} \mathbf{B}_0$  sont associés au faisceau  $l$ , de densité  $\bar{n}_s^0$ . Cette équation s'écrit :

$$(8.7.5) \quad \left( 1 - i \frac{\omega_{bs} \times}{\omega - kV_s} \right) \mathbf{j}_{s\perp} = i \varepsilon_0 \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} g_{0s} \mathbf{E}_\perp$$

formellement identique à l'équation (3.3.5) (pour les composantes perpendiculaires à  $\mathbf{B}_0$ ), lorsqu'on introduit la fréquence modifiée par effet Doppler  $\omega' = \omega - kV_s$ ; en remplaçant dans (3.3.5)  $b_s = \frac{\omega_{bs}}{\omega}$  par

$$b'_s = \frac{\omega_{bs}}{\omega'} = \frac{\omega_{bs}}{\omega - kV_s}$$

le calcul du § 3.3 s'applique donc ici et donne pour solution de (8.7.5)

$$(8.7.6) \quad \mathbf{j}_{s\perp} = \frac{i \varepsilon_0}{\omega} \omega_{ps}^2 g_{0s} \mathcal{A}_{s\perp}^{-1} \cdot \mathbf{E}_\perp$$

$$\text{où} \quad \mathcal{A}_{s\perp}^{-1} = (1 - b_s'^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -ib'_s \\ ib'_s & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la composante  $j_{s\parallel}$ , on obtient

$$(8.7.7) \quad j_{s\parallel} = i \omega \varepsilon_0 \frac{\omega_{ps}^2}{\omega'^2} E_{\parallel}.$$

En prenant la moyenne sur l'ensemble des faisceaux, on définit un tenseur de conductivité  $\sigma_s$  associé aux particules  $s$

$$\mathbf{J}_s = \langle \mathbf{j}_s \rangle = \sigma_s \cdot \mathbf{E}$$

où la moyenne est prise sur  $V_s$ ; pour une distribution continue de faisceaux, caractérisée par

$$\bar{n}_s(V) = n_{0s} g_{0s}(V), \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_{0s}(V) dV = 1$$

cette moyenne vaut

$$\langle \mathbf{j}_s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(\mathbf{V}) g_{0s}(\mathbf{V}) dV.$$

On a alors

$$(8.7.8) \quad \sigma_s = \begin{pmatrix} \sigma_{1s} & -\sigma_{2s} & 0 \\ \sigma_{2s} & \sigma_{1s} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3s} \end{pmatrix}$$

où

$$(8.7.9) \quad \begin{cases} \sigma_{1s} = \frac{i\varepsilon_0\omega_{ps}^2}{\omega} \int dV g_{0s}(\mathbf{V}) \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega_{bs}^2} \\ \sigma_{2s} = \frac{i\varepsilon_0\omega_{ps}^2}{\omega} \int dV g_{0s}(\mathbf{V}) \frac{i\omega_{bs}\omega'}{\omega'^2 - \omega_{bs}^2} \end{cases}$$

$$(8.7.10) \quad \sigma_{3s} = i\omega\varepsilon_0\omega_{ps}^2 \int dV g_{0s}(\mathbf{V}) \frac{1}{\omega'^2}$$

et

$$\omega' = \omega - kV = \omega'(\mathbf{V}).$$

Dans (8.7.9) et (8.7.10), les intégrales sont singulières et s'exprimeront (Cf. chap. 7) comme la somme d'une partie principale, réelle, et d'une partie imaginaire, contribution du pôle. Or, nous avons vu, au § 2.2, que les pertes dans le milieu étaient liées à  $\text{Re}(\sigma)$ , donc ici à la partie imaginaire des intégrales<sup>1</sup>, c'est-à-dire aux pôles qui traduisent la présence de particules résonnantes.

Les singularités des intégrales (8.7.9) ont lieu pour  $\omega - kV_s = \omega_{bs}$ , c'est-à-dire pour les particules résonnantes qui voient la fréquence du champ  $E_{\perp}$  (modifiée par effet Doppler) égale à la fréquence gyromagnétique : les pôles de ces intégrales contribueront à l'amortissement cyclotron. Par ailleurs, l'intégrale contenue dans (8.7.10) est singulière pour  $\omega' = \omega - kV = 0$ , c'est-à-dire pour les particules en résonance avec le champ  $E_{\parallel}$  de l'onde : le pôle donnera l'amortissement Cérenkov, de même type que l'amortissement Landau [(8.7.10) conduit directement à (7.2.2)]. Remarquons l'absence de particules résonnantes sur les harmoniques  $\omega' = n\omega_b$  : cela est dû au choix  $\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$  fait au début de ce calcul qui ne conduit donc pas aux résonances sur ces harmoniques (Cf. § 8.3).

Nous avons vu au chapitre 5 que la puissance absorbée par le milieu (par unité de volume) était donnée par

$$(8.7.11) \quad P = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*)$$

quand on prend les valeurs de  $\mathbf{J}$  pour  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  réels.

1. Pour les termes  $\sigma_s$ , l'absorption est liée à  $\text{Im}\sigma_s$  (Cf. éq. (8.7.12)) : c'est encore le pôle de l'intégrale qui contribue aux pertes d'énergie.

— Pour le mode droit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ ,  $E_y = iE_x$ , on a

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* = (\sigma_1 - i\sigma_2) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$$

d'où

$$(8.7.12) \quad P_1 = \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 (\Re \sigma_1 + \Im \sigma_2).$$

D'après (8.7.9), en se limitant aux contributions des électrons

$$\Re \sigma_1 = \frac{\pi \varepsilon_0 \omega_p^2}{2 \omega k} \omega_b \left[ g_{0e} \left( \frac{\omega - \omega_b}{k} \right) - g_{0e} \left( \frac{\omega + \omega_b}{k} \right) \right]$$

$$\Im \sigma_2 = \frac{\pi \varepsilon_0 \omega_p^2}{2 \omega k} \omega_b \left[ g_{0e} \left( \frac{\omega - \omega_b}{k} \right) + g_{0e} \left( \frac{\omega + \omega_b}{k} \right) \right]$$

d'où

$$(8.7.13) \quad P_1 = \frac{\pi \omega_p^2 \omega_b}{2 k \omega} g_{0e} \left( \frac{\omega - \omega_b}{k} \right) \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2.$$

— Pour le mode plasma,  $\omega \neq \omega_p$ , en négligeant les ions,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//}$

$$(8.7.14) \quad P_{//} = \frac{1}{2} (\Re \sigma_3) |\mathbf{E}|^2 = - \frac{\pi \omega \omega_p^2}{2 k^2} \left( \frac{\partial g_{0e}}{\partial V} \right)_{V=\frac{\omega}{k}} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2.$$

Nous retrouverons ces questions au chapitre 9.

### Modes de particules piégées 8.7.3

Les modes longitudinaux de grande amplitude (avec des particules piégées dans les puits de potentiel de l'onde), étudiés au § 7.4, ont été interprétés comme des solutions non linéaires ne présentant pas d'amortissement, correspondant à un faisceau modulé de charges.

De telles solutions non linéaires existent aussi pour les ondes transversales, et seront excitées dans un plasma par des faisceaux hélicoïdaux modulés.

Plaçons-nous dans le cas d'une onde droite de grande amplitude se propageant dans un plasma, le long de  $\mathbf{B}_0$ . Pour une telle onde, une accélération non linéaire,  $\frac{\bar{n}q}{m} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{m} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_1$ , représentant le couplage entre les courants et le champ magnétique de l'onde, vient s'ajouter à l'équation de mouvement (8.7.3); cette accélération se traduit par l'apparition d'une variation (non linéaire) du courant longitudinal, associée à la modification d'énergie transversale (Stix, 1962) : cette variation, autour du courant  $\mathbf{J}_{0//} = \bar{n}q\mathbf{V}$  du faisceau, est donnée par

$$(8.7.15) \quad \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{j}_{//} = \frac{qk}{m\omega} (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{qk}{m\omega} \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{1}{2} \bar{n} m w_1^2 \right)$$

d'après (5.1.2). Or, comme dans le cas longitudinal, les particules résonnantes, initialement en phase avec le champ, sont d'abord accélérées transversalement;

ceci, d'après (8.7.15), se traduit par une accélération longitudinale : les particules devancent de plus en plus l'onde, jusqu'à se trouver en opposition de phase avec elle; elles commencent alors à être ralenties jusqu'au moment où elles se retrouvent en phase avec le champ. A la propagation de l'onde de grande amplitude sont donc associées des oscillations longitudinales des charges : on retrouve l'oscillation des particules piégées dans des puits de potentiel.

Le temps de piégeage  $\tau_p$  — qui ici, sera aussi l'ordre de grandeur du temps pendant lequel la description linéaire reste valable — sera donc défini par le temps pour lequel la phase du champ, vu par une particule, change de  $\pi$ , donc pour lequel la distance  $z$  parcourue par une particule (dans le référentiel de l'onde) sera de l'ordre de la longueur d'onde

$$(8.7.16) \quad \int_0^{\tau_p} w_{||} dt \simeq k^{-1}$$

soit, d'après (8.7.15)

$$\int_0^{\tau_p} w_1^2 dt \simeq \frac{\omega}{k^2}.$$

Or, pour la particule résonnante, le module de la vitesse  $w_1$  croît proportionnellement à  $t$  :  $|v_1|^2 \simeq \frac{q^2 E^2}{m^2} t^2$  (Cf. par ex. Delcroix, 1963); ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement par intégration de (8.7.3). La définition (8.7.16) de  $\tau_p$  s'écrit alors

$$\frac{1}{3} \frac{q^2 E^2}{m^2} \tau_p^3 \simeq \frac{\omega}{k^2}$$

soit

$$(8.7.17) \quad \tau_p \simeq \left( \frac{3m^2 \omega}{q^2 k^2 E^2} \right)^{1/3},$$

qui correspond à (7.4.3) obtenu pour les ondes longitudinales. Ici encore, de tels modes de particules piégées ne pourront être observés que si le mécanisme d'accélération peut prendre place, c'est-à-dire s'il y a peu de collisions pendant le temps  $\tau_p$

$$v\tau_p \lesssim 1.$$

(8.7.17) définit alors l'amplitude du champ  $E_1$  de l'onde, à partir de laquelle le piégeage a lieu

$$(8.7.18) \quad E_1^2 \gtrsim \frac{3m^2 \omega}{q^2 k^2 \tau_p^3}.$$

Dans le cas des ondes longitudinales, cette condition s'écrivait (Cf. (7.4.3))

$$(8.7.19) \quad E_{||}^2 \gtrsim \frac{m^2}{q^2 k^2 \tau_{DL}^4}.$$

Pour des amplitudes de champs égales, le rapport  $(\tau_p/\tau_{pL})^3$  vaut  $3\omega\tau_{pL}$ ; ce facteur étant en général très supérieur à 1, la description linéaire des ondes longitudinales tombera en défaut beaucoup plus tôt que celle des ondes transversales.

Des modes de particules piégées, associés aux résonances sur les harmoniques  $\omega' = n\omega_{bs}$ , existent aussi; il faut alors que  $k_1 \neq 0$ . Ils correspondent à l'excitation non linéaire de modes analogues à ceux de Van Kampen, associés à des modes de particules libres; ces derniers, rappelons-le, sont dans le cadre d'une description linéaire, impossibles à exciter. De tels modes ont été étudiés pour  $\omega \simeq \omega_b$  par la méthode de Van Kampen (Felderhof, II, 1963).

## 8.8. Étude de la résonance gyromagnétique électronique

L'effet des électrons résonnants se traduit par un amortissement cyclotron de l'onde droite. Nous allons étudier cet amortissement dans le cadre de la théorie linéaire, en utilisant l'expression (8.3.5) de l'indice

$$N_D^2 = \kappa_1 + \kappa_2 = 1 + \sum_s \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} z_0 Z_{-1} \right)_s.$$

Au voisinage de la résonance  $\omega = \omega_b$ , seuls les termes électroniques contribuent de manière appréciable à  $N_D^2$ : en tenant compte de  $\frac{\omega_b}{\Omega_b} = \frac{\omega_p^2}{\Omega_b^2} \gg 1$ , on a en effet

$$(8.8.1) \quad N_D^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega k a_e} Z \left( \frac{\omega - \omega_b}{k a_e} \right) + \frac{\Omega_b^2}{\omega k a_i} Z \left( \frac{\omega + \Omega_b}{k a_i} \right).$$

L'équation (8.8.1) ne conduit pas, comme dans le cas des plasmas froids, à une valeur infinie de  $N_D$ , au voisinage de la résonance; celle-ci, obtenue pour  $\omega - \omega_b \sim k a_e$ , donc pour  $Z \left( \frac{\omega - \omega_b}{k a_e} \right)$  fini, donne  $N_D$ , c'est-à-dire à  $k$ , fini. Supposons donc (et nous le vérifierons ensuite) que  $\omega_b \gg k a_e$  et, à fortiori,  $\omega_b \gg k a_i$ . Pour  $\omega \sim \omega_b \gg \Omega_b$ ,  $Z \left( \frac{\omega + \Omega_b}{k a_i} \right) \sim -\frac{k a_i}{\omega + \Omega_b}$ . D'où

$$(8.8.2) \quad N_D^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_b} \left[ \frac{\Omega_b}{\omega + \Omega_b} - \frac{\omega_b}{k a_e} Z \left( \frac{\omega - \omega_b}{k a_e} \right) \right].$$

$\downarrow$   
 contribution  
du vide

$\downarrow$   
 contribution  
des ions

$\downarrow$   
 contribution  
des électrons

Pour  $\frac{\omega_b}{k a_e} \gg 1$ , on pourra donc négliger les contribution sdu vide et des ions

$$(8.8.3) \quad N_D^2 \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega k a_e} Z \left( \frac{\omega - \omega_b}{k a_e} \right), \quad |N_D^2| \gg 1.$$

— Assez loin de la résonance, de telle manière que  $\frac{\omega - \omega_b}{k a_e} \gg 1$ , tout en continuant de satisfaire à  $\frac{|\omega - \omega_b|}{\omega_b} \ll 1$  (ce qui est possible puisque  $(\omega_b/k a_e) \gg 1$ ) on trouve (Appendice 10)



- pour  $\omega > \omega_b$ , une onde évanescente,
- pour  $\omega < \omega_b$ , une onde faiblement amortie, de nombre d'onde  $k(1 + i\chi)$ , avec  $0 < \chi \ll 1$ , telle que

$$(8.8.4) \quad \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_b - \omega)}, \text{ identique à la solution plasmas froids (3.5.9)}$$

et

$$(8.8.5) \quad \chi = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \zeta e^{-\zeta^2} \quad \zeta = \frac{\omega_b - \omega}{ka_e} \gg 1.$$

Cette solution faiblement amortie n'existe pratiquement que lorsque le paramètre  $\beta_e = (a_e \omega_p / c \omega_b)^2 = \frac{2\mu_0 n_{0e} K T_e}{B^2}$  est  $\ll 1$ , et est limitée à la bande de fréquence

$$(2\beta)^{1/2} \leq \frac{\omega_b - \omega}{\omega_b} \ll 1$$

qui correspond à une région d'indices déterminée (Cf. Appendice 10)

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_b^2} \ll N^2 \leq N_m^2$$

où

$$(8.8.6) \quad N_m \simeq \frac{c}{a_e} \beta_e^{1/2}.$$

— Dans le voisinage immédiat de la résonance, avec  $\omega - \omega_b \sim ka_e$ , la résolution de (8.8.3) doit être effectuée numériquement. Cette résolution numérique conduit, pour  $\omega$  réelle donnée, à des solutions à  $k$  complexe,  $k = k_1 + ik_2$ . Remarquons que, quel que soit  $k_2$ ,  $Z\left(\frac{\omega - \omega_b}{ka_e}\right)$  reste finie : on aura donc, avec (8.8.3), des solutions  $k_1$  finies (c'est-à-dire  $\Re N$  finie) contrairement au cas des plasmas froids où les résonances correspondaient à  $N \rightarrow \infty$ . Dans le cas où  $\beta_e \ll 1$  (condition satisfaite en pratique), les valeurs numériques de  $k_1$  et  $k_2$  sont données sur la figure 8.6.

La variation de  $k_2$  montre un maximum vers  $\frac{\omega - \omega_b}{ka_e} \sim 1$ , correspondant au fait qu'on a alors un nombre maximum de particules résonnantes.

Enfin, l'ordre de grandeur de l'indice  $N_1^2 = k_1^2 c^2 / \omega^2$ , avec  $k_1 \lesssim k_0$ , correspond à la limite supérieure (8.8.6) du voisinage lointain : on a un raccordement des deux types de solutions; en effet cet indice est tel que

$$N^2 \# \frac{k_0^2 c^2}{\omega^2} = \frac{c \omega_p^2}{a_e \omega_b^2} = \left(\frac{c}{a_e}\right)^2 \beta_e$$

et on vérifie que l'on a  $\left(\frac{ka_e}{\omega_b}\right)^2 \simeq \left(\frac{k_0 a_e}{\omega_b}\right)^2 = \beta_e \ll 1$  : la condition posée au départ est bien vérifiée.

## 8.9. Conditions de validité de la linéarisation

En électrodynamique, on s'impose habituellement la condition de linéarisation

$$(7.7.1) \quad qE\lambda \ll \frac{1}{2} ma^2$$

exprimant que l'énergie gagnée par la charge dans le champ  $E$ , sur une longueur d'onde, est très inférieure à son agitation thermique. On définit ainsi un champ critique  $E'_c = \frac{ma^2}{q\lambda}$ . Cette condition n'a évidemment un sens que si  $\lambda \ll l$ ,  $l$  étant le

libre parcours moyen. On peut aussi définir un champ critique  $E''_c$  par la condition, analogue à (7.7.1), qui résulte de la comparaison de la vitesse acquise sous l'action de  $E$ , et de la vitesse thermique

$$(7.7.2) \quad \left(\frac{qE}{m\omega}\right)^2 \ll a^2 \quad E''_c = \frac{m\omega a}{q}$$

Le rapport  $E'_c/E''_c = a/2\lambda\omega \simeq a/v_\varphi$  montre qu'en général ( $v_\varphi \gg a$ ), c'est  $E'_c$  qui impose la condition de linéarisation.

En fait, les conditions (7.7.1) et (7.7.2) utilisent la vitesse ordonnée et n'expriment pas une condition sur le véritable échauffement. Pour cela, il faudrait tenir compte des collisions. Nous verrons (Cf. (9.1.1)) que la puissance absorbée par les électrons est  $P = \frac{1}{2} E^* \cdot \sigma_h \cdot E$ . Lorsque  $B_0 = 0$ , cela donne

$$P = \frac{1}{2} \frac{\nu_c \epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 + \nu_c^2} E^2, \quad (\text{Cf. (10.2.7)});$$

mais, en même temps, les électrons perdent une fraction de leur énergie par collision sur les molécules; chaque collision transférant la fraction  $\frac{2m}{M}$  de leur excès d'énergie sur les neutres (Cf. § 1.7). En négligeant l'énergie thermique des neutres et en supposant qu'à chaque instant toute l'énergie gagnée dans le champ est transférée au mouvement thermique par les collisions, on a donc

$$\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 + \nu_c^2} E^2 = \frac{6m}{M} KT_e$$

où  $T_e$  est une fonction lentement variable du temps. Cette égalité définit un champ critique  $E_c$  (Ginzburg, 1960)

$$E_c = \left[ \frac{6m}{M} KT_e \frac{\omega^2 + \nu_c^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} \right]^{1/2}$$

et la linéarisation sera valable si

$$E^2 \ll E_c^2.$$

Les valeurs de  $E_c$  dans un plasma sont en général peu élevées aux basses fréquences, lorsque  $\omega \ll \nu_c$ : ainsi dans l'ionosphère,  $E_c \sim 10^{-5}$  à  $10^{-3}$  volts/m; elles sont encore plus faibles dans les plasmas fortement ionisés. Pour les hautes fréquences,  $\omega \gg \nu_c$ , elles sont plus élevées, de  $10^{-1}$  à 1 volt/m.

Dans un magnétoplasma, le facteur  $\omega^2 + \nu_c^2$ , intervenant dans le numérateur de  $E_c$ , est remplacé par  $(\omega - \omega_b)^2 + \nu_c^2$ , ce qui conduit, au voisinage de la résonance gyromagnétique, à des champs critiques  $E_c$  beaucoup plus faibles lorsque les collisions ne jouent pas un rôle important.

