Effets des collisions sur la propagation des ondes X

Au chapitre 1, nous avons donné un très bref aperçu des phénomènes de collisions binaires. Sans traiter les problèmes fondamentaux posés par les chocs entre particules chargées qui ont été largement développés (Cf. par ex. Spitzer, 1956), nous nous proposons dans ce chapitre d'examiner les principaux effets des collisions sur les caractéristiques de la propagation, en particulier sur les courbes de dispersion.

Ces effets ont été généralement négligés jusqu'à présent, souvent pour des raisons de simplicité; cela était assez bien justifié dans le cas des très hautes fréquences $\omega \gtrsim \omega_p$, *puisque nous avons toujours supposé* $\nu \ll \omega_p$ *comme une des conditions d'existence d'un plasma.* D'une part dans le cas des modes de basse fréquence, qui mettent en jeu les ions, en particulier pour les ondes magnétohydrodynamiques, et d'autre part chaque fois qu'on a affaire à un gaz faiblement ionisé, cette hypothèse n'est plus correcte : on peut avoir alors $\omega \lesseqgtr \nu \ll \omega_p$. Cette situation se rencontre dans l'ionosphère, par exemple.

Nous allons passer en revue les modèles utilisés pour tenir compte des collisions. Puis, nous définirons la *fréquence effective de collision* ν_{eff}, et nous donnerons les principales modifications des courbes de dispersion, en particulier pour la propagation dans l'ionosphère.

10.1. Généralités — Modèles pour les plasmas collisionnels

Du point de vue de la propagation des ondes, l'effet essentiel des collisions est d'introduire une dissipation d'énergie : les chocs consomment en effet de l'énergie; celle-ci est transférée du mouvement organisé des électrons vers, par exemple, les molécules neutres pour un plasma faiblement ionisé, vers les ions pour un plasma complètement ionisé.

Il en résulte donc un amortissement des ondes qui se traduit par un indice complexe $N = N_1 + iN_2$. Nous avons donné, au chapitre 2, les relations existant dans le cas isotrope, d'une part entre l'indice de propagation N_1 et l'indice d'extinction N_2 et, d'autre part, entre les parties réelle ε_1 et imaginaire ε_2 de la constante diélectrique ε (Cf. (2.2.35)); selon le problème étudié (ω réelle, k complexe, ou k réel, ω complexe), on a défini au § 2.1 la distance d'atténation $\Lambda = (\mathfrak{Im}k)^{-1}$, ou le temps d'amortissement $\tau = -(\mathfrak{Im}\omega)^{-1}$: ces notions vont évidemment intervenir ici.

Dans la description diélectrique, l'existence de pertes se traduit par un courant de fuite en régime continu, c'est-à-dire par une conductivité de partie réelle non nulle. En régime alternatif, il en est de même et on aura $\mathfrak{Re}\sigma \neq 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{Im}\varepsilon = \varepsilon_2 \neq 0$, ce qui donne $N_2 \neq 0$.

Une fois choisi un modèle macroscopique ou microscopique pour décrire le plasma avec collisions, on pourra en principe calculer, comme au chapitre 3, σ, puis ε. En les portant dans les équations de Maxwell, on obtiendra la même équation de dispersion (2.4.9) dont les solutions, complexes, fourniront les deux indices N_1 et N_2, et soit Λ, soit τ.

Différentes méthodes, liées au modèle choisi, permettent de déterminer le rôle des collisions. Le calcul de σ se faisant à l'aide de l'équation de transfert de la quantité de mouvement, c'est la section efficace attachée à ce processus et, par suite, la fréquence de collision ν_c associée (Cf. (1.5.2)) qui devra être précisée.

Dans le modèle plasma froid, on rend compte de l'effet global des collisions par un terme de frottement, proportionnel à la quantité de mouvement $-\nu m\mathbf{v}$: c'est ce que nous avons déjà fait à plusieurs reprises, notamment au chapitre 3, en établissant l'équation d'Appleton-Hartree. Il reste à relier le coefficient de frottement ν à la fréquence de collision ν_c : cette relation sera établie au prochain paragraphe.

Pour les plasmas chauds, le point de départ est l'équation de Boltzmann (1.6.2), où le terme $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}$ traduit la variation de la fonction de distribution, due aux interactions. On sépare habituellement cet effet en deux termes : l'un contribuant aux interactions collectives, à l'extérieur de la sphère de Debye, et qui se traduit par le champ électrique moyen de Vlasov; l'autre contribuant aux chocs binaires, à l'intérieur de la sphère de Debye, chocs électrons-électrons, électrons-ions, et aussi, puisqu'ils sont à très courte distance, chocs électrons-neutres (Cf. § 1.5). Une première approximation consiste à exprimer ce second terme d'une manière phénoménologique sous la forme

$$-\nu(f - f_0) \tag{10.1.1}$$

exprimant la relaxation de la fonction de distribution f vers la distribution maxwellienne f_0. Lorsqu'on prend $\nu = C^{te}$, ce terme (10.1.1) conduit, après intégration de

l'équation d'évolution de f, à une équation de mouvement contenant un terme de frottement identique à celui des plasmas froids. Néanmoins, les sections efficaces dépendant de la vitesse relative des particules entrant en collision, il en résulte une fréquence de collision fonction de cette vitesse : le calcul de σ, avec (10.1.1), ne conduira plus à une expression aussi simple que dans le cas des plasmas froids. La comparaison de ces deux types d'expressions permettra de définir ν_{eff}. Cependant, la forme (10.1.1) ne permet pas de satisfaire aux lois de conservation instantanées de la charge, de la quantité de mouvement et de l'énergie (Cf. pour la discussion, Bhatnagar, Gross et Krook, 1954). Un modèle plus raffiné a été élaboré par Gross et Krook (1956); étant néanmoins beaucoup plus simple que le terme de Boltzmann, il est souvent utilisé.

Des méthodes plus précises ont été développées dans le cas des plasmas faiblement ionisés pour les collisions électrons-neutres (les collisions électrons-ions et électrons-électrons étant alors négligeables), en développant $f(v)$ en harmoniques sphériques dans l'espace des vitesses (Allis, 1956) qui caractérisent les différentes anisotropies de la fonction $f(v)$; on montre alors (Bayet, Delcroix, Denisse, 1954, 1955) que les harmoniques sphériques sont des fonctions propres de l'opérateur de collision, les valeurs propres étant alors justement les fréquences de relaxation des anisotropies des différents ordres : celle d'ordre 1 s'interprète précisément comme la fréquence de collision associée au transfert de quantité de mouvement. On trouvera des développements et des applications de cette question dans les manuels (Cf. par ex. Bayet, 1958; Delcroix, 1966). Ces propriétés ont été utilisées pour étudier la propagation des ondes, et, mis à part l'amortissement Landau, conduisent pour les plasmas « tièdes » (Cf. chap. 6) à des résultats en accord avec la théorie cinétique (Johnston, 1962).

Enfin, pour les collisions électrons-ions, et électrons-électrons, nous avons signalé au chapitre 1 les difficultés d'application de l'équation de Boltzmann, dues à la longue portée des forces de Coulomb. La section efficace divergeant pour les très faibles déviations, c'est-à-dire pour les grands paramètres d'impact, cette divergence est éliminée en introduisant une longueur de coupure dans les intégrales, longueur qui est prise égale à λ_{De}, en accord avec l'effet d'écran décrit au chapitre 1. On obtient alors

$$\nu_{ei}(v) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{q^4}{m^2}\frac{n_i}{v^3} Log\,\Lambda = 8.10^5\frac{n_i}{v^3} Log\,\Lambda \tag{10.1.2}$$

où Λ est le paramètre de Spitzer, moyenne du rapport de λ_{De} au paramètre d'impact p_0, correspondant à une déviation égale à $\frac{\pi}{2}$; dans les cas pratiques, on a $Log\Lambda \sim 10$. Conformément au modèle choisi, on ne tient donc compte, dans le terme de collision, que des collisions binaires qui ont lieu à l'intérieur de la sphère de Debye. L'effet cumulé de nombreuses collisions, chacune à faible déviation,

se traduit par un ralentissement et par une diffusion des particules dans l'espace des vitesses. Ces effets ont été étudiés en détail par Chandrasekhar (1943) et par Spitzer (1956). L'équation de Boltzmann se réduit alors à l'équation de Fokker-Planck, dans laquelle les coefficients de ralentissement et de diffusion s'expriment à l'aide du paramètre Λ. Une forme équivalente du terme de collision avait été donnée par Landau (1936) [Cf. aussi Thomson, 1964, où cette équivalence est montrée].

Sans entrer dans les calculs compliqués de la théorie cinétique, des expressions approchées pour ν_{en} et ν_{ei} ont été données au § 1.5 et sont en général acceptables pour estimer leur ordre de grandeur. Plus précisément, avec $v \simeq (3KT_e/m_e)^{1/2}$ (10.1.2) devient

(10.1.3) $$\nu_{ei} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\, n_i T_e^{3/2}\, Log\, \Lambda$$

qui, pour $Log\Lambda \sim 10$, conduit à une fréquence de collision de l'ordre de cinq fois celle définie en (1.5.6), en accord avec (1.5.8).

Dans le cas où les collisions entre particules chargées sont dominantes, la distribution des particules reste pratiquement maxwellienne et on cherche, comme dans le cas des gaz neutres (méthode de Chapman-Enskog : Cf. par ex. Chapman et Cowling, 1939), une solution de l'équation de Boltzmann de la forme

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,[1 + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]$$

où f_0 est la distribution maxwellienne locale et $\Phi \ll 1$. L'application de cette méthode aux plasmas (Landshoff, 1949) permet de décrire, au premier ordre en Φ, les phénomènes de transport (essentiellement les conductivités électriques et thermiques) en magnétohydrodynamique des gaz complètement ionisés. Le même problème a été aussi traité à partir de l'équation de Fokker-Planck (Cf. par ex. Spitzer et Härm, 1953).

10.2. Transfert de quantité de mouvement par les chocs. Fréquences effectives de collision

Coefficient de frottement et fréquence de collision 10.2.1

Établissons tout d'abord la relation entre le terme de frottement de l'équation de mouvement de l'électron libre, et la fréquence de collision. Si $-gv$ est la force de frottement, l'équation du mouvement sous l'action du champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ s'écrira

(10.2.1) $$m\frac{dv}{dt} = q\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - gv$$

d'où

(10.2.2) $$v = \frac{q\mathbf{E}_0}{g - im\omega}\, e^{-i\omega t}.$$

En fait cette équation ne décrit qu'un mouvement fictif, où le terme gv représente l'effet *moyen* des collisions sur le mouvement et où v est la vitesse moyenne prise

par les électrons sous les effets conjugués du champ et des collisions. Suivant Ratcliffe (1959), calculons directement cette vitesse moyenne. La vitesse instantanée d'un électron libre contient deux contributions, l'une due au mouvement désordonné sous l'action des chocs, l'autre due au mouvement ordonné sous l'action du champ E. On suppose qu'après chaque collision, toute l'énergie acquise à cet instant, dans le champ, est transférée à l'énergie thermique (donc le gaz s'échauffe) : la vitesse ordonnée juste après le choc est donc nulle. Le mouvement *ordonné* est décrit par

$$m\frac{dv}{dt} = qE_0 e^{i\omega t}$$

soit

$$v(t) = \frac{qE_0}{-im\omega} e^{-i\omega t} + C^{te}.$$

Pour la collision ayant lieu à $t = t_1$, on a $v = 0$; entre les deux collisions ayant lieu à $t = t_1$ et $t = t_2$, la vitesse a pour expression

$$v(t) = \frac{qE_0}{-im\omega} e^{-i\omega t}(1 - e^{i\omega\theta}), \qquad t_1 < t < t_2 \tag{10.2.3}$$

en posant $\theta = t - t_1$. Pour t donné, (10.2.3) s'interprète comme la vitesse ordonnée d'un électron ayant subi sa dernière collision θ secondes avant l'instant t. Pour calculer la vitesse moyenne $\overline{v(t)}$, on doit donc trouver le nombre d'électrons ayant subit une collision entre θ et $\theta + d\theta$. Or, nous avons vu au § 1.5 que le nombre d'électrons effectuant une collision au bout d'un trajet x est (Cf. (1.5.1))

$$n = n_0 e^{-N\varsigma x}$$

soit, avec $x = \bar{v}(t - t_1) = \bar{v}\,\theta$, d'où $N\varsigma x = N\varsigma\bar{v}\theta = \nu_c\theta$

$$n = n_0 e^{-\nu_c\theta}.$$

Par suite le nombre d'électrons cherché est

$$dn = -\nu_c n_0 e^{-\nu_c\theta}\, d\theta.$$

La vitesse moyenne à l'instant t est donc

$$\bar{v} = \frac{1}{n_0}\int_{t_1=-\infty}^{t_1=t} v(t)\, dn$$

$$= \nu_c \frac{qE_0}{im\omega} e^{-i\omega t}\int_{\infty}^{0}(1 - e^{-i\omega\theta})\, e^{-\nu_c\theta}\, d\theta$$

où l'intégrale vaut $-\left[\frac{1}{\nu_c} + \frac{1}{i\omega - \nu_c}\right]$.

On a donc

$$\bar{v}(t) = \frac{q\mathrm{E}_0}{m(\nu_c - i\omega)} e^{-i\omega t}. \tag{10.2.4}$$

Par comparaison de (10.2.2) et (10.2.4), on voit que

$$g = m\nu_c \tag{10.2.5}$$

et que le terme de frottement $-gv$ dans l'équation de mouvement est bien $-\nu_c mv$, où ν_c est la fréquence de collision. Remarquons que ν_c est associée à la partie imaginaire de la fréquence *angulaire* ω, et non pas à celle de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Conductivité de Lorentz 10.2.2

A l'aide de (10.2.4) on obtient immédiatement la conductivité électronique du milieu (conductivité de Lorentz)

$$\sigma_e = \frac{n_0 q\bar{v}}{\mathrm{E}} = \frac{\varepsilon_0\omega_p}{\nu_c - i\omega} \tag{10.2.6}$$

ou, en séparant les parties réelle et imaginaire

$$\sigma_e = \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{\nu_c\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_c^2} + i\frac{\omega\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_c^2} \tag{10.2.7}$$

et de même

$$\varkappa = 1 - \frac{\sigma_e}{i\omega\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_c)}$$

$$\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2 = \left(1 - \frac{\omega_p}{\omega^2 + \nu_c^2}\right) + i\left(\frac{\nu_c}{\omega}\frac{\omega_p}{\omega^2 + \nu_c^2}\right) \tag{10.2.8}$$

qui montrent bien que σ_1 et $\varkappa_2$ sont liés aux pertes dans le milieu.

Fréquences effectives de collision 10.2.3

De la même manière, l'équation de Vlasov, avec un terme de relaxation en $-\nu(f - f_0)$, conduit à remplacer $-i\omega$ par $-i\omega + \nu$ dans la solution (7.1.3) pour $f_1(\mathbf{k}, \omega)$

$$f_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q}{im(\omega + i\nu - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}.$$

Dans la limite des grandes longueurs d'ondes ($k \to 0$), on a donc une conductivité (Cf. (7.1.5)) scalaire

$$\sigma = \sigma_{\alpha\alpha} = -\frac{q^2}{m}\int \frac{1}{\nu - i\omega} v_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial v_\alpha} d^3v, \qquad \alpha = x, y \text{ ou } z$$

soit, avec $f_0 = n_0\, g(v^2)$

$$\sigma = -\,\varepsilon_0\omega_p^2 \int \frac{v_\alpha}{\nu - i\omega}\frac{\partial g_0}{\partial v_\alpha}\, d^3v$$

$$\sigma = -\,\frac{4\pi}{3}\,\varepsilon_0\omega_p^2 \int_0^\infty \frac{v^3}{v - i\omega}\frac{\partial g_0}{\partial v}\, dv \quad \text{où} \quad v = |\mathbf{v}|. \tag{10.2.9}$$

Lorsque ν est indépendant de la vitesse, on retrouve la conductivité de Lorentz (10.2.6).

A partir de (10.2.9), on définit la *fréquence effective de collision* ν_{eff} comme une certaine moyenne de $\nu_c\,(v)$, sur l'espace des vitesses, telle que l'expression (10.2.9) prenne la forme (10.2.6) de la conductivité de Lorentz

$$\frac{1}{\nu_{eff} - i\omega} = -\,\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{v^3}{\nu\,(v) - i\omega}\frac{\partial g_0}{\partial v}\, dv$$

dans la limite des très hautes fréquences $\omega \gg \nu$, on obtient en particulier

$$\mathcal{R}e\,\sigma_{\text{Lorentz}} \sim \nu_c\,\varepsilon_0\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

$$\mathcal{R}e\,\sigma_{\text{Vlasov}} \sim -\,\frac{4\pi}{3}\,\varepsilon_0\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \int_0^\infty \nu\,(v)\,v^3\,\frac{\partial g_0}{\partial v}\, dv$$

d'où la définition

$$\nu_{eff}^{(\mathrm{HF})} = -\,\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \nu(v)\,v^3\,\frac{\partial g_0}{\partial v}\, dv. \tag{10.2.10}$$

On aurait pu définir aussi une « fréquence efficace moyenne » $\bar{\nu}$, directement à partir de la fonction de distribution, $\nu(v)$ n'étant fonction que du module de la vitesse

$$\bar{\nu} = \frac{1}{n_0}\int \nu(v)\,f\,(v)\,d^3v = 4\pi\int_0^\infty \nu(v)\,v^2 g\,(v)\,dv. \tag{10.2.11}$$

Pour une loi $\nu(v) = \mathrm{C^{te}}\cdot v^l$, on obtient la relation (Heald et Wharton, 1965)

$$\nu_{eff}^{(\mathrm{HF})} = \frac{3 + l}{3}\,\bar{\nu}. \tag{10.2.12}$$

Pour les plus basses fréquences $\omega \gtrsim \nu_e$, on peut écrire la constante diélectrique $\varkappa$ sous la forme (Gurevich, 1956, 1958)

$$\varkappa = \mathrm{K}_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\nu_{eff}}\right)\varkappa_1 + i\,\mathrm{K}_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{eff}}\right)\varkappa_2 \tag{10.2.13}$$

où $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sont définies en (10.2.8).

Pour les chocs électrons-neutres, les facteurs K_ε^n et K_σ^n sont donnés sur la figure 10.1, pour différentes valeurs du rapport ω/ν_{eff}^n.

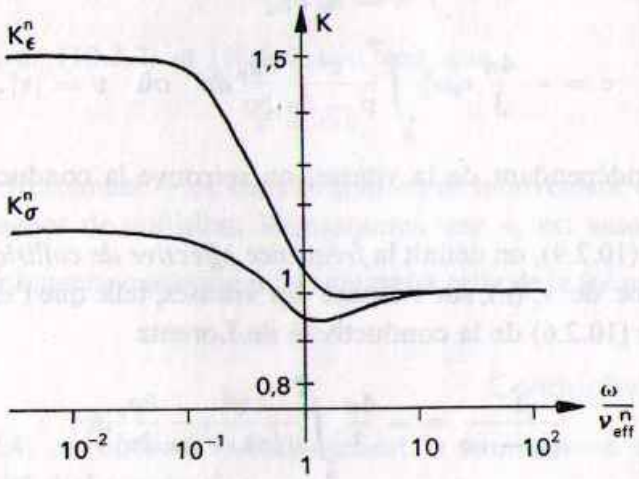

FIGURE 10.1.
Fonctions K_ε^n et K_σ pour les chocs $e-n$

Pour les chocs électrons-ions, ils sont montrés (fig. 10.2) sur les courbes différentes suivant que les chocs électron-électron sont négligés ou non : les différences deviennent importantes pour les fréquences $\omega \lesssim \nu_{eff}$ (Ginzburg, 1951; Hwa, 1958).

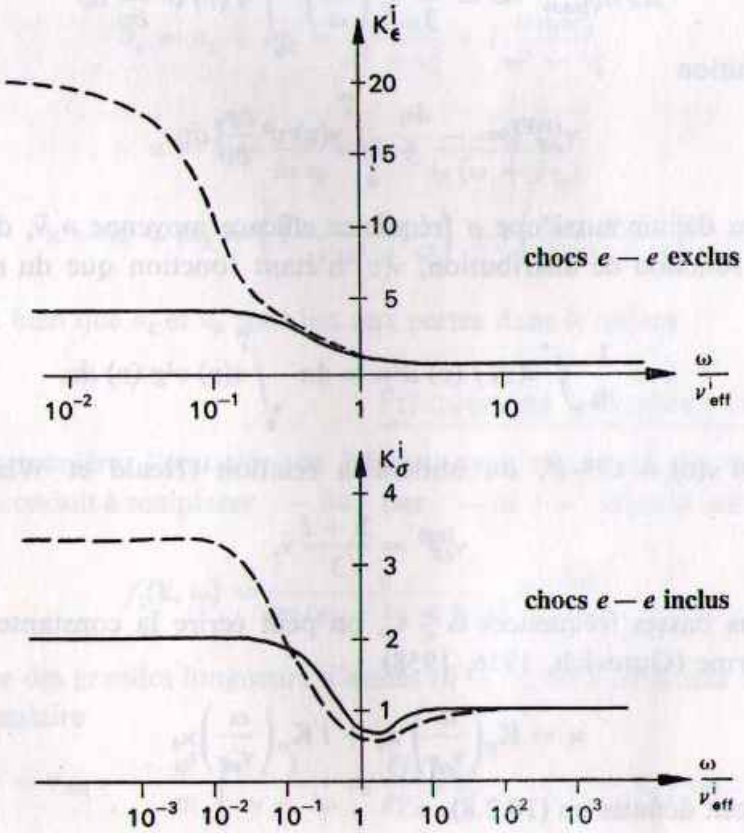

FIGURE 10.2.
Fonctions K_ε^i et K_σ^i pour les chocs $e-i$

D'autres formes ont été données, en particulier dans le cas $B_0 \neq 0$ (Heald et Wharton, 1965).

On constate sur ces courbes l'équivalence entre ν_{eff} et ν_c dans la région des hautes fréquences $\omega \gg \nu_{eff}$, ce qui se traduit par $K_\varepsilon \to 1$ et $K_\sigma \to 1$ quand $\omega \to \infty$.

On définira la fréquence effective totale de choc comme la somme

$$\nu_{eff}^{(tot)} = \nu_{eff}^{n} + \nu_{eff}^{i}$$

le calcul de la conductivité faisant intervenir ν_{eff}^{n} et ν_{eff}^{i} de la même façon.

10.3. Modifications apportées par les collisions à la propagation dans les plasmas froids

Dans tout ce qui suit, ν désignera la fréquence effective totale $\nu_{eff}^{(tot)}$ définie au paragraphe précédent. Nous nous limiterons aux plasmas froids. Rappelons que toutes les expressions obtenues pour $\nu = 0$ s'appliquent au cas $\nu \neq 0$ en changeant m_e en $m_e\left(1 + i\frac{\nu}{\omega}\right)$.

Cas $B_0 = 0$ 10.3.1

— Pour l'oscillation de plasma électronique, définie par $\varkappa^0 = 0$, on a montré, au § 9.1, que $\mathcal{R}e\omega = \omega_0$ et $\mathcal{I}m\omega = -\frac{\nu}{2}$, dans la limite, supposée toujours satisfaite, $\nu \ll \omega_0$.

— Pour l'oscillation basse fréquence, l'étude des ondes dans un plasma constitué de neutres, ions et électrons, tenant compte des collisions sur les trois espèces de particules, montre que dans un certain domaine de fréquence, l'oscillation ionique est moins amortie que l'onde sonore ordinaire (Sessler, 1964).

— Pour l'onde électromagnétique transversale, $N^2 = \varkappa^0$, aux hautes fréquences $\omega \gg \nu$, on a, d'après (2.2.35) et (10.2.8)

$$N_1^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1 - \frac{X}{1+Z^2}\right)^2 + \left(\frac{ZX}{1+Z^2}\right)^2} + 1 - \frac{X}{1+Z^2}\right]$$

et une expression analogue pour N_2^2; d'où

$$(10.3.1)\quad \begin{cases} N_1^2 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{(1-X)^2+Z^2}{1+Z^2}} + 1 - \dfrac{X}{1+Z^2}\right] \\ N_2^2 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{(1-X)^2+Z^2}{1+Z^2}} - \left(1 - \dfrac{X}{1+Z^2}\right)\right] \end{cases}$$

où $\quad X = (\omega_p/\omega)^2, \qquad Z = (\nu/\omega)$

(les indices 1 et 2 indiquent toujours les parties réelle et imaginaire des quantités complexes considérées).

Les courbes de dispersion pour les carrés des indices de propagation N_1 et d'extinction N_2, obtenues avec ces expressions, sont montrées sur la figure 10.3, pour différentes valeurs de Z.

Dès que Z n'est plus négligeable, le rôle des collisions est très important : l'effet d'écran disparaît (Cf. chap. 1) et la coupure pour $X = 1$ n'existe pratiquement plus ; dans l'ionosphère, on n'obtient plus, comme dans le cas sans collision, la réflexion des ondes à l'altitude z_0, où $X = 1$. Néanmoins, la réflexion peut avoir lieu à une altitude supérieure. Supposons, pour la fréquence considérée, que l'altitude z_0 soit assez basse et corresponde à une fréquence de collision telle que $Z \gg 1$: alors, d'après (10.3.1), on obtient ($X = 1$)

$$N_1^2 \sim 1 - \frac{X}{2Z^2} \sim 1 \quad ; \quad N_2^2 \sim X/2Z^2 \ll 1 :$$

l'indice N_1 reste voisin de l'unité : aucune réflexion n'a lieu et l'onde se propage vers les altitudes supérieures. Au cours de cette propagation, vers les $z > z_0$, la densité électronique augmente tandis que la densité des neutres et, par suite, la fréquence de collision diminuent; donc le rapport X/Z augmente et atteint

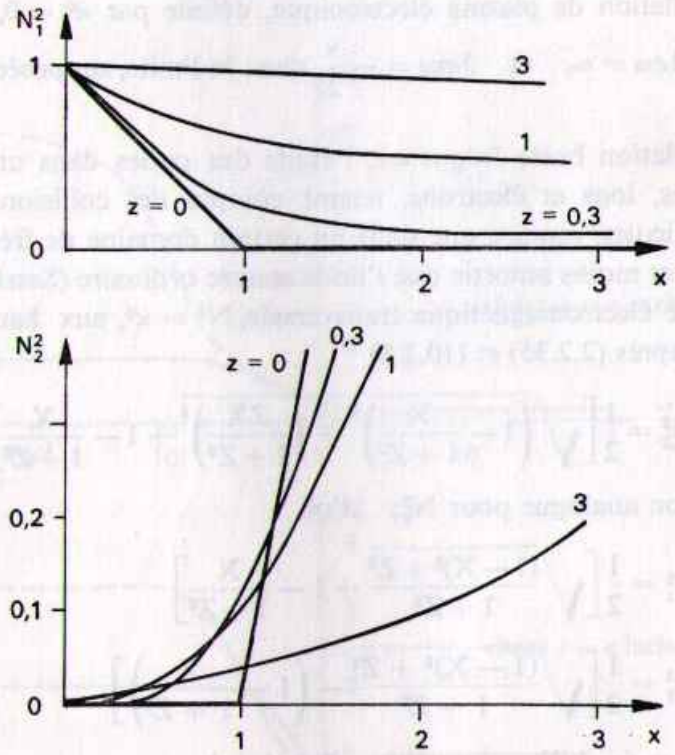

FIGURE 10.3.
$N_1^2 = (\mathcal{R}e\, N)^2$ et $N_2^2 = (\mathcal{I}m\, N)^2$ en fonction de X, pour le mode transversal, lorsque $B_0 = 0$ (Paramètre Z). [D'après Ratcliffe, 1959]

des valeurs où $X \simeq Z > 1$. Supposons qu'alors $X^2 \simeq Z^2 \gg 1$ d'où, avec (10.3.1)

$$N_1^2 \sim \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sim 1{,}2 \quad ; \quad N_2^2 \sim \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sim 0{,}2.$$

L'indice N_1 ne diffère pas encore beaucoup de l'unité, mais l'indice d'extinction n'est plus négligeable et cela se traduit par une réflexion appréciable (Cf. Budden, 1961, chap. 16 et 17).

Cas $B_0 \neq 0$ 10.3.2

10.3.2.1. PROPAGATION PARALLÈLE A B_0

Les expressions des indices des ondes droite et gauche deviennent (dans le cas des hautes fréquences, en négligeant les contributions des ions), avec $Y = \omega_b/\omega$

$$N_D^2 = 1 - \frac{X}{(1-Y)^2 + Z^2}(1 - Y - iZ) \tag{10.3.2}$$

$$N^2 = 1 - \frac{X}{(1+Y)^2 + Z^2}(1 + Y - iZ). \tag{10.3.3}$$

Les variations des indices de propagation et d'extinction pour chacun des deux modes sont montrées sur les figures 10.4 et 10.5.

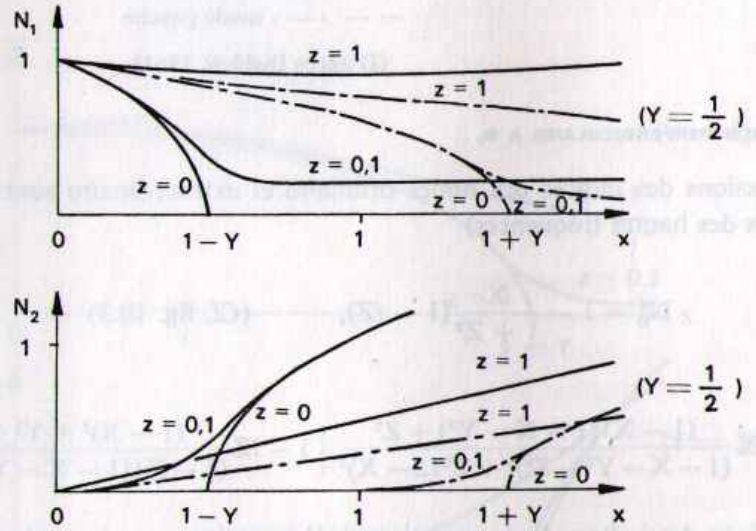

FIGURE 10.4.
Indices N_1 et N_2 en fonction de la densité, en propagation parallèle (Paramètre Z)
Cas $\omega > \omega_b$ $(Y < 1)$ ——— mode droit
— · — · — · mode gauche
(D'après Budden, 1961)

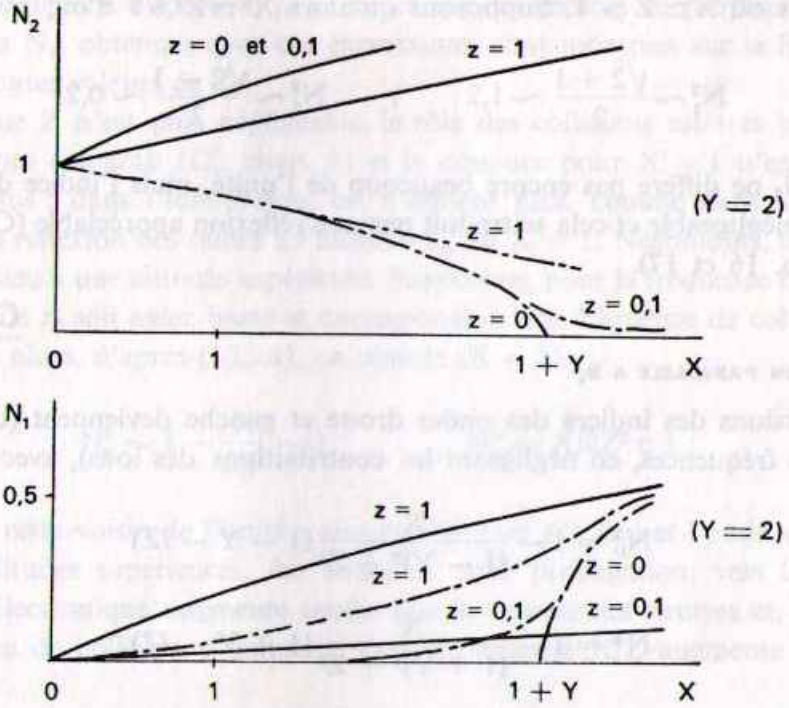

FIGURE 10.5.

Indices N_1 et N_2 en fonction de la densité, en propagation parallèle (Paramètre Z)

Cas $\omega < \omega_b$ (Y > 1) ———— **mode droit**

— · — · — · **mode gauche**

(D'après Budden, 1961)

10.3.2.2. **PROPAGATION PERPENDICULAIRE A B_0**

Les expressions des indices des ondes ordinaire et extraordinaire sont (toujours dans le cas des hautes fréquences)

(10.3.4) $$N_O^2 = 1 - \frac{X}{1+Z^2}(1 - iZ), \qquad \text{(Cf. fig. 10.3)}$$

(10.3.5)

$$N_X^2 = 1 - X\frac{(1-X)(1-X-Y^2)+Z^2}{(1-X-Y^2-Z^2)^2+Z^2(2-X)^2}\left[1 - iZ\frac{(1-X)^2+Y^2+Z^2}{(1-X)(1-X-Y^2)+Z^2}\right]$$

Les variations des indices de propagation et d'extinction pour le mode extraordinaire sont données sur les figures 10.6 et 10.7.

Ces résultats sont à rapprocher des courbes de dispersion obtenues à partir de calculs rigoureux tenant compte, pour les plasmas complètement ionisés, des collisions $e-i$ et $e-e$ (Wyller, 1962).

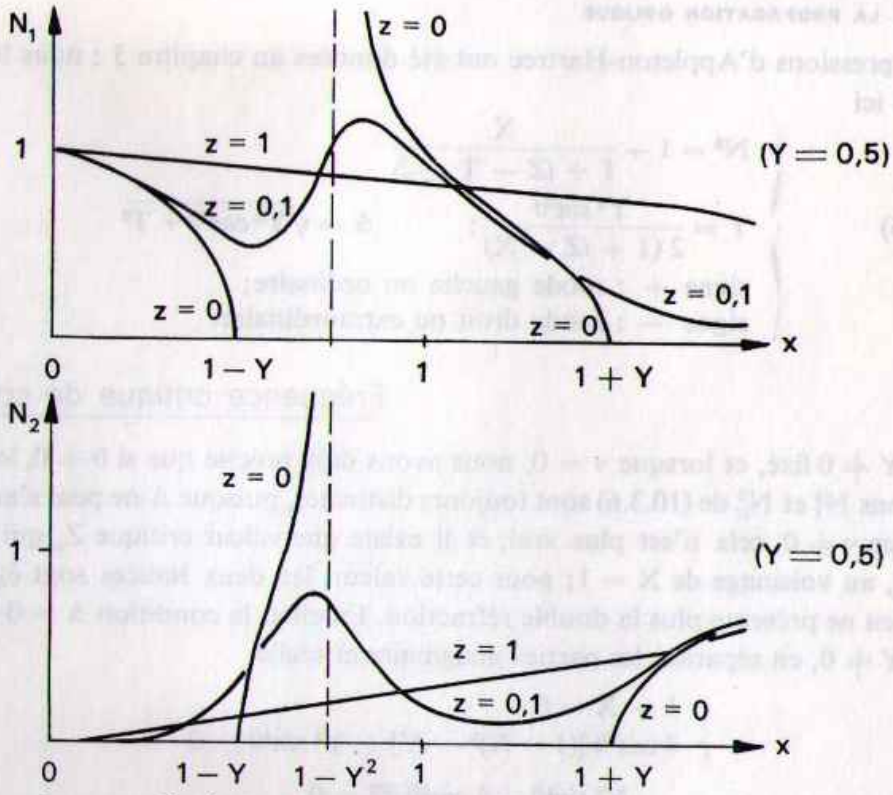

FIGURE 10.6.

Indices N_1 et N_2 du mode extraordinaire, en fonction de la densité, pour $\omega > \omega_b$. (D'après Budden, 1961)

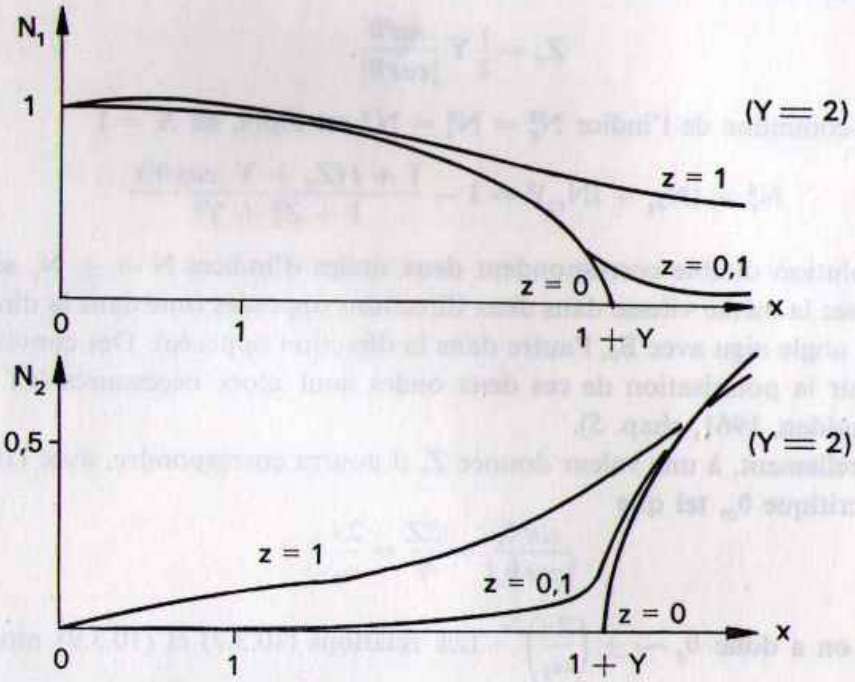

FIGURE 10.7.

Indices N_1 et N_2 du mode extraordinaire, en fonction de la densité, pour $\omega < \omega_b$. (D'après Budden 1961)

10.3.2.3. CAS DE LA PROPAGATION OBLIQUE

Les expressions d'Appleton-Hartree ont été données au chapitre 3 : nous les rappelons ici

$$(10.3.6)\qquad \begin{cases} N^2 = 1 - \dfrac{X}{1 + iZ - T \pm \Delta} \\ T = \dfrac{Y^2 \sin^2\theta}{2\,(1 + iZ - X)}; \qquad \Delta = \sqrt{Y^2 \cos^2\theta + T^2} \\ \text{signe } + \text{ : mode gauche ou ordinaire;} \\ \text{signe } - \text{ : mode droit ou extraordinaire.} \end{cases}$$

Fréquence critique de collision 10.3.3

Pour $Y \neq 0$ fixé, et lorsque $\nu = 0$, nous avons déjà précisé que si $\theta \neq 0$, les deux solutions N_I^2 et N_{II}^2 de (10.3.6) sont toujours distinctes, puisque Δ ne peut s'annuler. Lorsque $\nu \neq 0$, cela n'est plus vrai, et il existe une valeur critique Z_c qui donne $\Delta = 0$, au voisinage de $X = 1$; pour cette valeur, les deux indices sont égaux et le milieu ne présente plus la double réfraction. En effet, la condition $\Delta = 0$ s'écrit, pour $Y \neq 0$, en séparant les parties imaginaire et réelle

$$\begin{cases} 1 - X = 0 \\ 4 \cos^2\theta\,[(1 - X)^2 - Z^2] + Y^2 \sin^4\theta = 0 \end{cases}$$

soit $$Y^2 \sin^4\theta - 4 \cos^2\theta\, Z^2 = 0$$

d'où la fréquence de collision critique $\nu_{crit} = \omega Z_c$, avec

$$(10.3.7)\qquad Z_c = \frac{1}{2}\, Y \frac{\sin^2\theta}{|\cos\theta|}.$$

La valeur commune de l'indice $N_c^2 = N_I^2 = N_{II}^2$ est alors, en $X = 1$

$$(10.3.8)\qquad N_c^2 = (N_{c1} + iN_{c2})^2 = 1 - \frac{1 + i\,(Z_c + Y\,|\cos\theta|)}{1 + Z_c^2 + Y^2}.$$

A cette solution double correspondent deux ondes d'indices $N = \pm N_c$ se propageant avec la même vitesse dans deux directions opposées (une dans la direction faisant un angle aigu avec B_0, l'autre dans la direction opposée). Des conventions pour définir la polarisation de ces deux ondes sont alors nécessaires (Cf. § 3.5 et aussi Budden, 1961, chap. 5).

Naturellement, à une valeur donnée Z, il pourra correspondre, avec (10.3.7), un angle critique θ_c, tel que

$$(10.3.9)\qquad \frac{\sin^2\theta_c}{|\cos\theta_c|} = \frac{2Z}{Y} = \frac{2\nu}{\omega_b}$$

si $\nu \ll \omega_b$, on a donc $\theta_c \sim \pm \left(\dfrac{2\nu}{\omega_b}\right)^{1/2}$. Les relations (10.3.7) et (10.3.9) montrent que ν_{crit} ne dépend que du champ magnétique B_0 et de l'angle θ entre **k** et $\mathbf{B}_0$.

Remarquons que l'égalité des deux solutions complexes N_I^2 et N_{II}^2 de (10.3.6) implique *simultanément*

$$\begin{cases} (N_I)_1 = (N_{II})_1 = (N_c)_1 \\ (N_I)_2 = (N_{II})_2 = (N_c)_2 \end{cases}$$

ces égalités n'ont lieu que pour $X = 1$; on peut cependant avoir des cas où les parties réelles des deux indices N_I et N_{II} sont égales sans que les parties imaginaires le soient, ou vice-versa (Cf. fig. 10.8 et 10.9 et fig. 10.10 et 10.11).

Lorsque, à Z constant, on fait varier θ, les courbes (fig. 10.8 et 10.9) pour $N_1 = \mathcal{R}eN$ et $N_2 = \mathcal{I}mN$ pour chacun des deux modes N_I et N_{II} se déforment continûment depuis le cas de la propagation parallèle (fig. 10.4 et 10.5) jusqu'au cas de la propagation perpendiculaire (fig. 10.6 et 10.7). On traverse alors la valeur $\theta = \theta_c$ pour laquelle les parties réelle et imaginaire des deux indices deviennent égales : des précautions relatives à la dénomination des modes doivent être prises (Cf. Budden, 1961, chap. 6). Par exemple (fig. 10.8 et 10.9), pour $\theta > \theta_c$, les deux modes sont bien identifiés par rapport aux courbes obtenues pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; lorsque $\theta < \theta_c$, on garde pour $X < 1$, les mêmes dénominations, mais on doit les inverser pour $X > 1$.

Lorsque à θ fixé, on fait varier Z (à travers ν), des phénomènes analogues ont lieu : les figures 10.10 et 10.11, empruntées à Budden (1961), sont tracées pour $\theta = 23°16'$, respectivement pour $Y = 0{,}5$ et $Y = 2$.

Voisinages des résonances. L'effet des collisions est essentiel au voisinage des résonances : en effet, comme les corrections de température (Cf. chap. 6, 7 et 8), les collisions font disparaître les valeurs infinies de l'indice (Cf. fig. 10.4, 10.5, 10.6 et 10.7). Cela permet dans certains cas de surmonter les difficultés liées à ce problème (pour le rayonnement des antennes, par exemple).

Effet des collisions sur l'indice de groupe 10.3.4

Dans le cas où $B_0 = 0$, l'indice de groupe devient complexe et vaut, d'après $N^2 = 1 - \dfrac{X}{1 + iZ}$, pour une fréquence réelle

$$N_g = \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega N) = \frac{1}{N}\left(1 - i\frac{ZX}{2\,(1 + iZ)^2}\right)$$

dont la partie réelle est liée à la vitesse de propagation de l'énergie

$$N_{g1} = \frac{c}{v_g} = \mathcal{R}eN_g = \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega N_1) = \left(1 + \omega\frac{\partial}{\partial\omega}\right)N_1$$

d'où

$$N_{g1} = N_1 + \frac{1}{N_1}\frac{X}{(1 + Z^2)^2} \qquad N_1 \text{ étant défini en (10.3.1).}$$

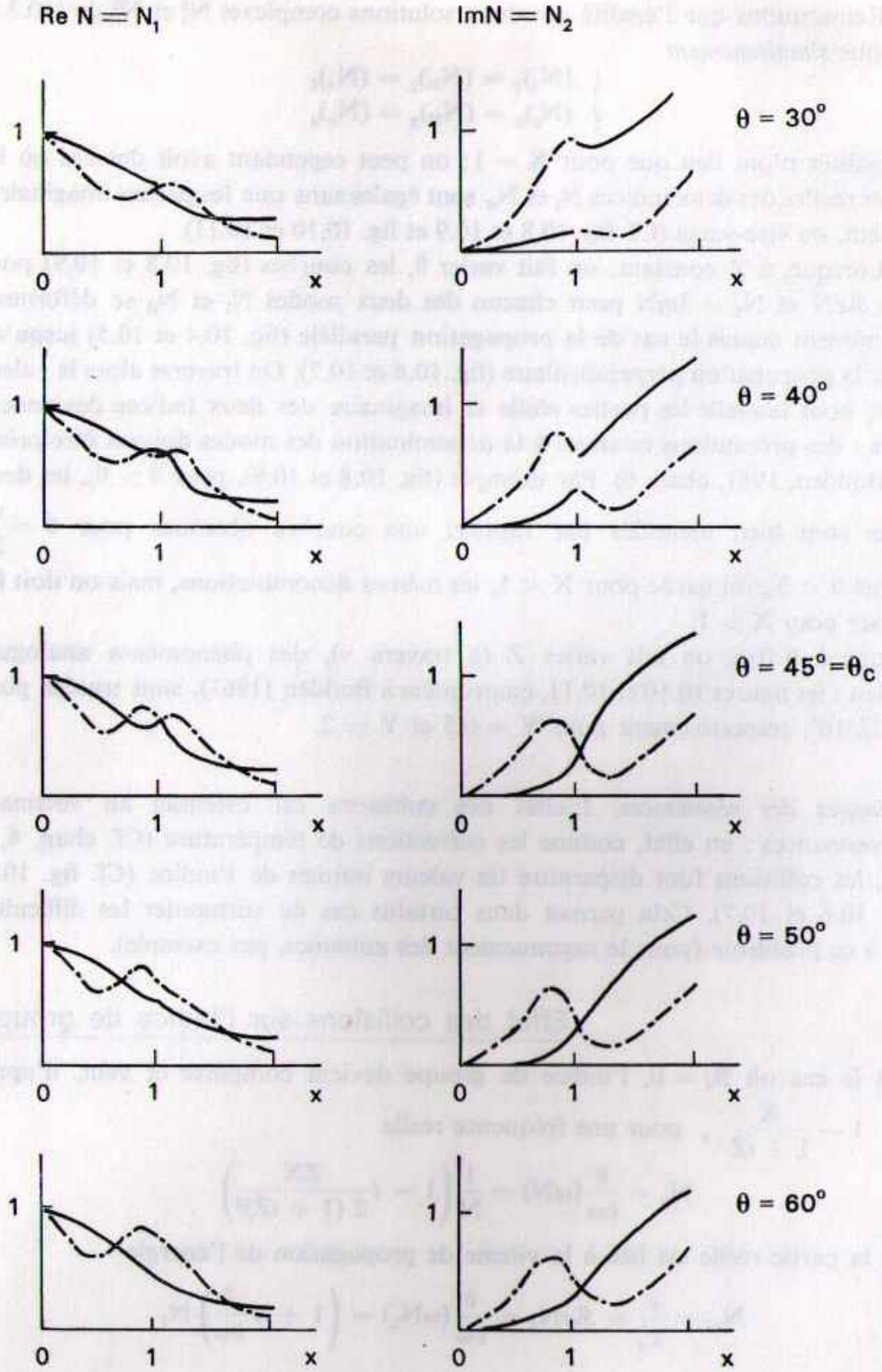

FIGURE 10.8.
$N_1 = \mathcal{R}eN$ et $N_2 = \mathcal{I}mN$ pour les deux modes, Z = 0,18 , Y = 0,5. (D'après Budden, 1961)

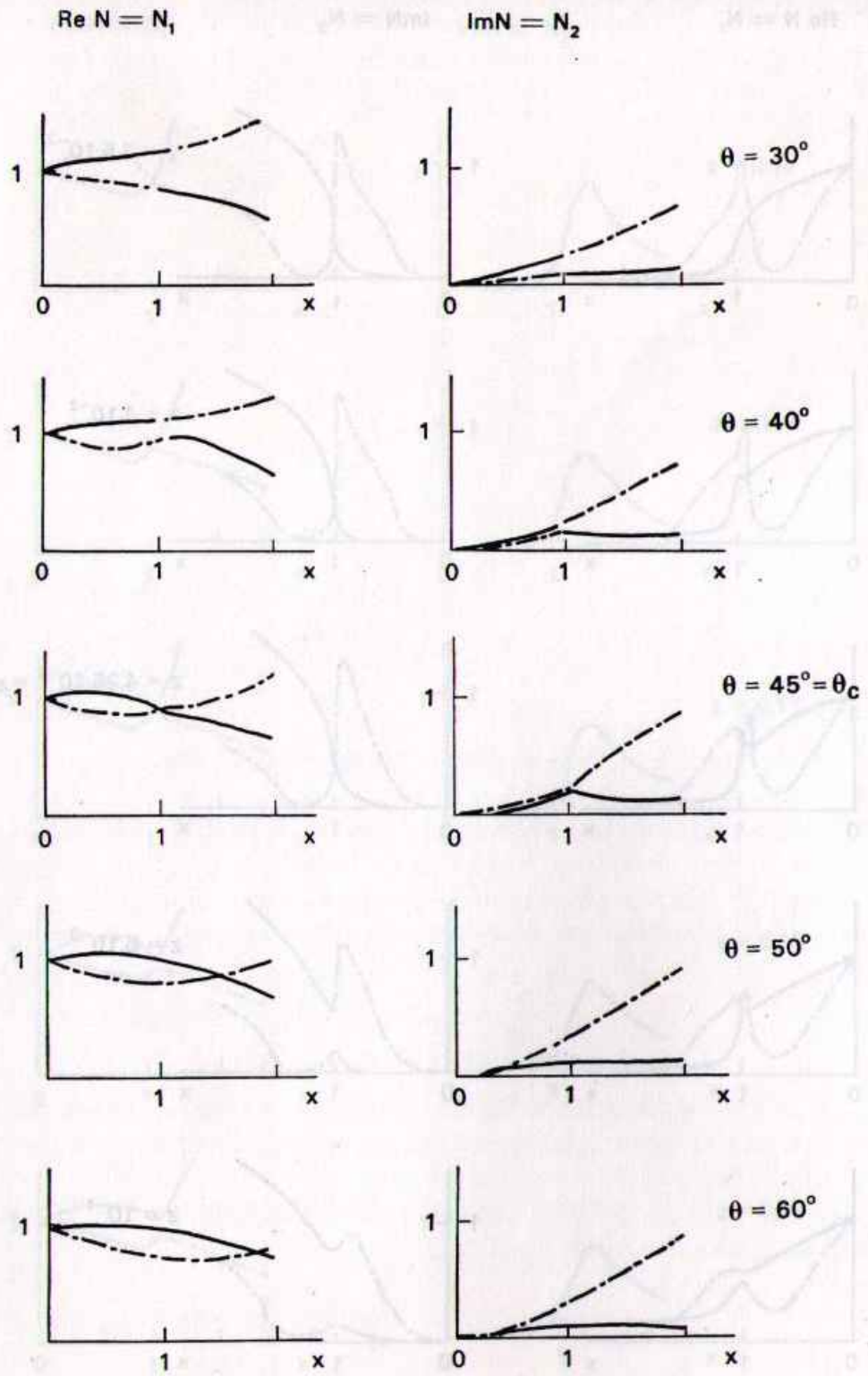

FIGURE 10.9.
$N_1 = \mathcal{R}eN$ et $N_2 = \mathcal{I}mN$ pour les deux modes, $Z = 0{,}18$, $Y = 2$. (D'après Budden, 1961)

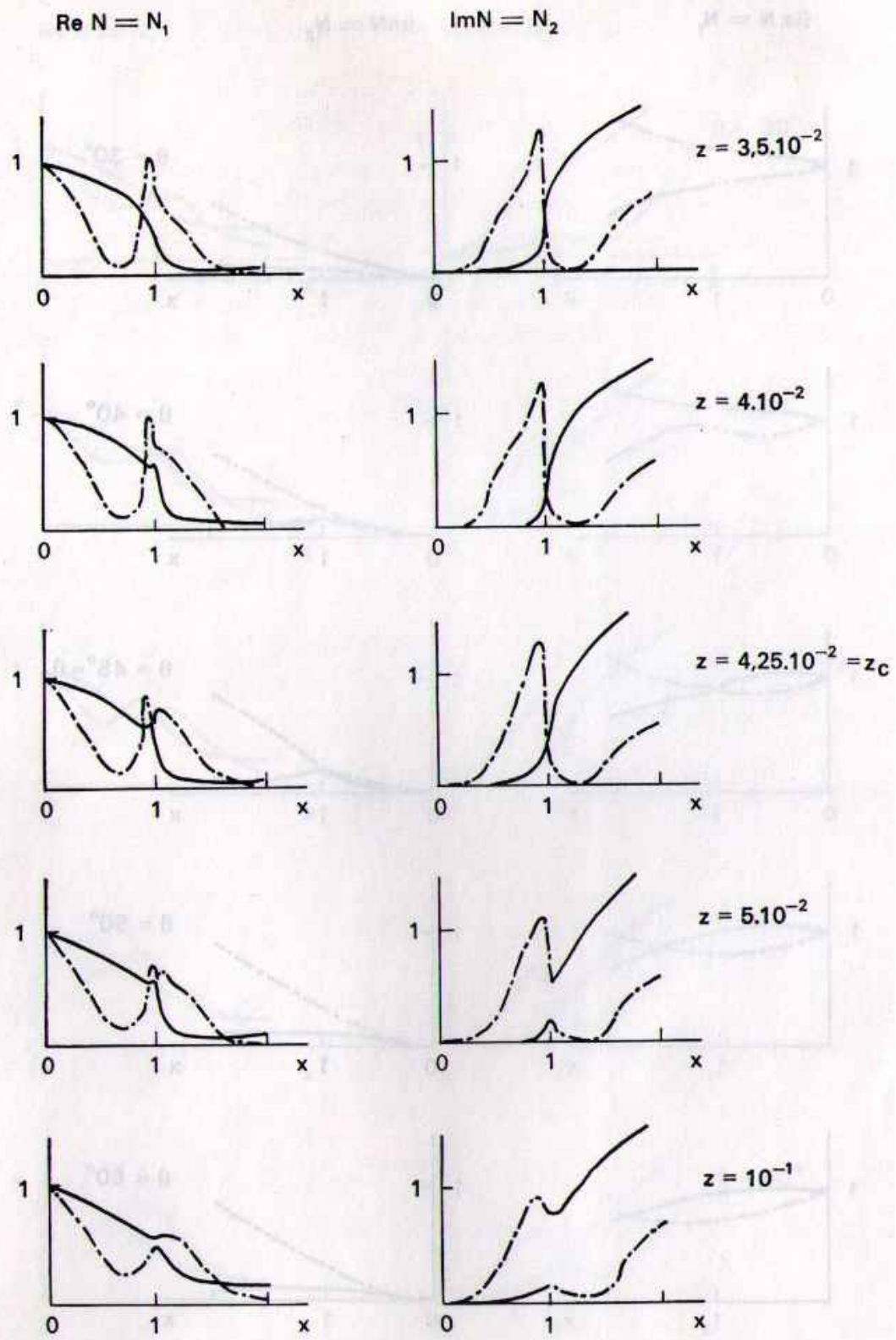

FIGURE 10.10.
$\mathcal{R}e$N et $\mathcal{I}m$N pour les deux modes, $\theta = 23°16'$, Y = 0,5. (D'après Budden, 1961)

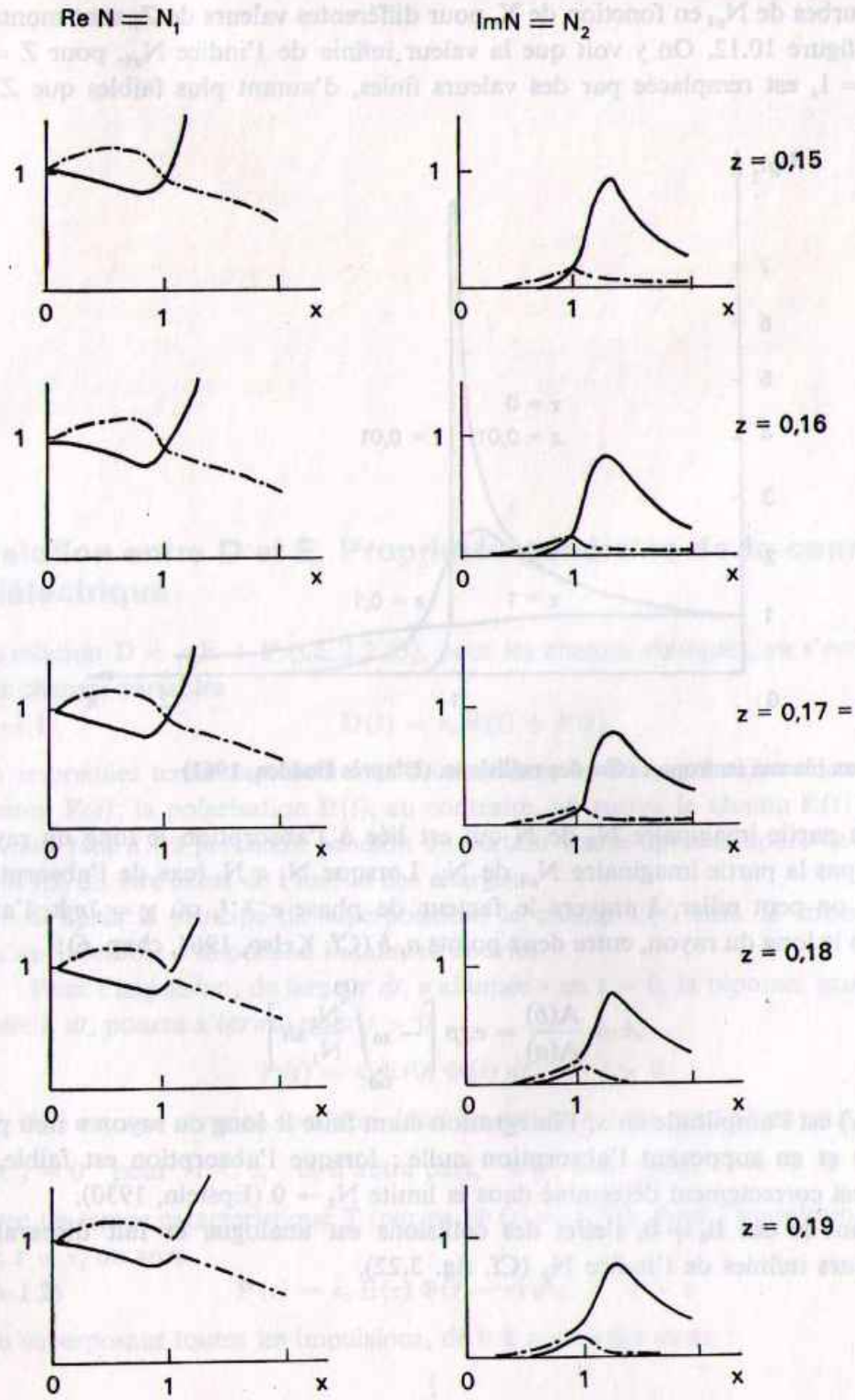

FIGURE 10.11.
$\mathcal{R}e$N et $\mathcal{I}m$N pour les deux modes, $\theta = 23°16'$, Y = 2. (D'après Budden, 1961)

Les courbes de N_{g1} en fonction de X, pour différentes valeurs de Z, sont montrées sur la figure 10.12. On y voit que la valeur infinie de l'indice N_{g1}, pour $Z = 0$, en $X = 1$, est remplacée par des valeurs finies, d'autant plus faibles que Z est grand.

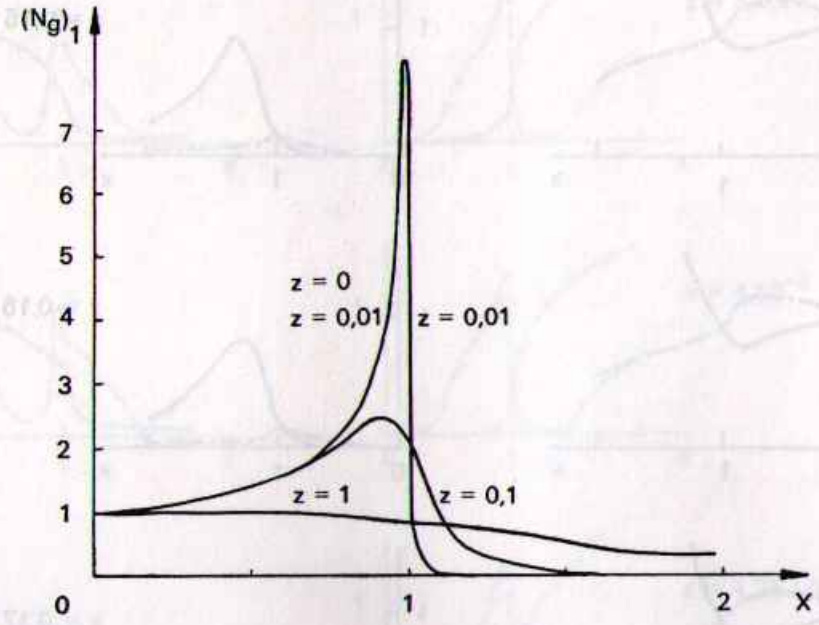

FIGURE 10.12.
Indice de groupe d'un plasma isotrope : effet des collisions. (D'après Budden, 1961)

C'est la partie imaginaire N_2 de N qui est liée à l'absorption le long du rayon et non pas la partie imaginaire N_{g2} de N_g. Lorsque $N_2 \ll N_1$ (cas de l'absorption faible), on peut relier, à travers le facteur de phase $e^{-\chi \cdot \mathbf{r}}$, où $\chi = \mathfrak{I}m\mathbf{k}$, l'atténuation le long du rayon, entre deux points a, b (Cf. Kelso, 1964, chap. 6):

$$\mathcal{A} = \frac{A(b)}{A(a)} = exp\left[-\omega \int_{(a)}^{(b)} \frac{N_2}{N_1}\, dt\right]$$

où A (x) est l'amplitude en x, l'intégration étant faite le long du rayon « non perturbé » et en supposant l'absorption nulle : lorsque l'absorption est faible, le rayon est correctement déterminé dans la limite $N_2 \to 0$ (Epstein, 1930).

Dans le cas $B_0 \neq 0$, l'effet des collisions est analogue et fait disparaître les valeurs infinies de l'indice N_g (Cf. fig. 3.22).