Propagation

VI

des ondes dans les plasmas chauds homogènes. Modèles macroscopiques

Dans le modèle plasma froid utilisé jusqu'à présent, les charges, à l'équilibre, étaient supposées fixes et la perturbation (c'est-à-dire l'onde) les faisait osciller autour de leur position d'équilibre. Dans les plasmas chauds, au contraire, il existe à l'équilibre, du fait de l'agitation thermique, des mouvements des particules en l'absence de perturbation. Chaque élément de volume du plasma contient alors des particules de vitesses très différentes; mais, parmi elles, toutes ne jouent pas le même rôle : lorsqu'une onde se propage dans le plasma, certaines particules se déplacent en phase avec elle (à la même vitesse et dans la même direction); ces particules, dites *résomnantes*, peuvent interagir très fortement avec l'onde et conduire à des phénomènes nouveaux qui n'apparaissent pas dans la théorie des plasmas froids (nous avons rencontré, cependant, un tel mécanisme résonnant, lors de l'étude des résonances gyromagnétiques : dans ce cas, la particule tournait, sur son orbite fixée dans un plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 , en phase, avec le champ dans ce plan, variant en $e^{-i\omega_b t}$).

Deux situations physiques très différentes, se présentent alors :

Dans un premier cas, il y a très peu de particules résonnantes (la distribution des vitesses $f_0(\mathbf{w})$ à l'équilibre est telle que $f_0\left(\frac{\omega}{k}\right) \ll 1$): on peut alors, en première approximation, en négliger l'effet; on retrouvera les résultats des plasmas froids, avec de petites corrections, dues aux effets de température.

Dans le deuxième cas, il y a beaucoup de particules résonnantes [la vitesse de phase ω/k de l'onde est de l'ordre de grandeur de la vitesse thermique $a = (2KT/m)\frac{1}{2}$]: l'onde interagira très fortement avec le milieu, et la perturbation qu'elle apportera à ce groupe de particules sortira rapidement de la description linéaire. Ainsi, le problème des particules piégées dans les creux de potentiel de l'onde, donc entraînées par elle, exigera un traitement non linéaire (Cf. chap. 7 et 8).

Pour la première situation physique envisagée nous adopterons, dans ce chapitre, une description d'ensemble, où chaque espèce de particules sera considérée comme un fluide (modèle hydrodynamique), les effets d'agitation thermique apparaissant sous la forme d'un terme de pression; dans le deuxième cas, on devra nécessairement revenir à une description plus fine du plasma qui pourra être obtenue, soit en considérant le plasma comme formé d'un grand nombre de faisceaux (modèle multifaisceaux), soit en adoptant une description statistique, caractérisée par une fonction de distribution des vitesses obéissant à l'équation de Vlasov (1.6.3) (modèle de Vlasov). Ces modèles microscopiques seront étudiés aux chapitres 7 et 8.

6.1. La description des plasmas chauds dans l'approximation hydrodynamique

Nous allons considérer chaque ensemble de particules d'une même espèce s comme un fluide. Dans un modèle phénoménologique, on peut écrire une équation de mouvement relative à la vitesse moyenne de ce fluide, les écarts à cette vitesse moyenne (qui représentent justement l'agitation thermique) étant décrits globalement par un terme de pression; lorsque T=0, ce terme de pression disparaît, et on retrouve l'équation du modèle plasma froid.

Pour l'élément de volume de fluide, animé de la vitesse moyenne \mathbf{v} , la force due à la pression sera ∇P , si la pression est scalaire; plus généralement, $\mathbf{\Psi}$ étant le tenseur de pression, elle s'écrira $\nabla \cdot \mathbf{\Psi}$, et contiendra à la fois des efforts de pression proprement dite et des efforts tranchants (comme ceux introduits par la viscosité). Si n est la densité des particules du fluide, l'équation du mouvement de l'élément de volume sera

(6.1.1)
$$nm\frac{d\mathbf{v}}{dt} = nq \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0\right) - \nabla \cdot \mathbf{\Psi}.$$

Mais il faudra alors se donner une équation d'état pour le tenseur de pression Ψ . De nombreux développements, particulièrement dans le cadre de la magnétohy-drodynamique sans collision, ont été donnés aux équations d'état adiabatiques, avec des hypothèses différentes sur la structure du tenseur Ψ .

a) L'hypothèse de pression scalaire (appelée aussi approximation MHD)

(6.1.2)
$$\Psi = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = 1 \quad ; \quad \nabla \cdot \Psi = \nabla P$$

avec une loi adiabatique simple $P \sim n^{\gamma}$ (Cf. par ex. Denisse et Delcroix, 1961), est satisfaisante, pour $\gamma = 3$, dans le cas des ondes longitudinales de haute fréquence, en l'absence de champ magnétique B_0 .

b) En présence de B_0 et quand il n'y a pas de collision, l'hypothèse de pression scalaire n'est plus valable; on sépare alors, dans Ψ , une pression $P_{//}$ dans la direction

parallèle à B_0 , et une pression P_{\perp} dans les directions perpendiculaires, ce qui traduit les mouvements découplés dans ces directions; le tenseur Ψ s'écrit

(6.1.3)
$$\Psi = \begin{pmatrix} P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P_{||} \end{pmatrix}$$

avec la loi adiabatique double, $P_{\perp} \sim n^{\gamma_{\perp}}$, $P_{||} \sim n^{\gamma_{||}}$, satisfaisante pour un gaz d'ions en présence d'un champ magnétique fort (Chew, Goldberger et Low, 1956; Lüst, 1959); pour une compression dans la direction de B_0 , on prend $\gamma_{\perp} = 1$ et $\gamma_{||} = 3$, tandis que pour une compression cylindrique, perpendiculaire à B_0 , $\gamma_{\perp} = 2$ et $\gamma_{||} = 1$ (Buneman, 1961; Delcroix, 1963); on alors la loi générale

(6.1.4)
$$\mathfrak{D}et(\Psi) = \mathbf{P}_{\perp} \mathbf{P}_{//} \sim n^5$$

conduisant, dans le cas de la pression scalaire, à la loi $P \sim n^{5/3}$, comme dans le cas des gaz ordinaires. La loi (6.1.3) est encore appelée approximation CGL.

c) La loi adiabatique complète, qui va être développée plus loin, Ψ étant alors un tenseur non diagonal, conduit encore à (6.1.4), $\mathfrak{D}et$ (Ψ) $\sim n^5$ (Buneman, 1961).

En présence de collisions, d'autres lois du type hydrodynamique peuvent être utilisées, comme par exemple, la loi de Navier-Stokes des fluides visqueux (Whitmer, 1961).

Malheureusement, il est en général difficile de justifier la validité de l'équation d'état choisie. Nous allons préciser ce choix, et en étudier les limites d'application, en déduisant de l'équation de Vlasov (1.7.3)

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \mathbf{w}_s \times \mathbf{B}_0 \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{w}_s} = 0$$

un ensemble d'équations macroscopiques. En multipliant cette équation successivement par 1, \mathbf{w}_s , $\mathbf{w}_s\mathbf{w}_s$,... et, en en prenant la moyenne sur l'espace des vitesses (Cf. par ex. Spitzer, 1956; Delcroix, 1963), on obtient, pour chaque espèce s, une suite infinie d'équations (nous omettons l'indice s pour l'instant)

(6.1.5)¹

$$(a) \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{v} = 0$$

$$(b) mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{\Psi} = nq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$(c) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \mathbf{\Psi} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{\Psi} + (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Psi} + \text{transposé}) + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{q}{m} [\mathbf{B} \times \mathbf{\Psi} + \text{transposé}]$$

1. Dans (6.1.5 c), $\nabla v \cdot \Psi$ est un tenseur de composantes $(\nabla v \cdot \Psi)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} (\nabla_{\alpha} v_{\gamma}) \Psi_{\gamma\beta}$; le tenseur $\mathbf{B} \times \Psi$ se déduit facilement du cas où Ψ est une diade (produit tensoriel de deux vecteurs $\Psi = \mathbf{CD}$): on a alors $(\mathbf{B} \times \Psi)_{\alpha\beta} = (\mathbf{B} \times \mathbf{CD})_{\alpha\beta} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_{\alpha}D_{\beta}$: il ne reste qu'à remplacer tout produit: $C_{\gamma}D_{\delta}$ par la composante $\Psi_{\gamma\delta}$ (en respectant l'ordre!).

pour les grandeurs moyennes, ou moments, relatifs à l'espèce s

(a) densité moyenne
$$n = \int f d^3w$$

(b) vitesse moyenne $v = n^{-1} \int w f d^3w$
(c) tenseur pression cinétique $\Psi = m \int (w - v) (w - v) f d^3w$
(d) tenseur flux de chaleur $Q = m \int (w - v) (w - v) f d^3w$

L'équation (6.1.5 b) correspond évidemment à l'équation phénoménologique (6.1.1), et se réduit bien à (3.1.2) pour $\Psi = 0$.

Dans les équations (6.1.5) figure l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ à la place de $\frac{d}{dt}$. En effet, d'après (6.1.6), où $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$, les moments sont des fonctions de \mathbf{r} et t (par exemple $n = n(\mathbf{r}, t)$) : la dérivée $\frac{dn}{dt}$ devient donc une dérivée « en suivant le mouvement »

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) n.$$

Le système (6.1.5), où chacune des équations est couplée à la suivante, ne peut être résolu qu'en faisant une certaine hypothèse sur un moment, par exemple en le reliant aux moments d'ordres inférieurs : cette relation constitue une condition de fermeture du système des équations des moments. C'est une véritable équation d'état : comme pour le modèle phénoménologique, on retrouve donc ici la difficulté du choix de cette condition; néanmoins, les expressions des moments en fonction de f sont connues et nous allons voir que, sous certaines conditions, la série des moments constitue un véritable développement en série d'un petit paramètre, et qu'il est alors possible de caractériser le degré d'approximation adopté.

6.2. Conditions de validité de l'approximation hydrodynamique

A l'inverse des théories microscopiques non locales, dans lesquelles tout le passé de la particule intervient (Cf. Appendice 9), les théories hydrodynamiques sont des théories locales (dans le temps et dans l'espace), où n'apparaissent que les valeurs des moments au point \mathbf{r} et à l'instant t, et leurs variations au point $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ et à l'instant t + dt (cela tient à la forme des équations (6.1.5) et (6.1.6)).

Cette description macroscopique est donc satisfaisante en hydrodynamique des gaz, ou dans le cas des plasmas dominés par les collisions : le libre parcours moyen des particules est alors très faible et une théorie locale est correcte. Au contraire, dans un plasma sans collision, où les seules interactions sont les forces de Coulomb, les libres parcours moyens pourront être très grands, et la description locale tombera en défaut. La situation sera différente suivant que \mathbf{B}_0 est nul

ou non. Nous nous placerons dans le cas, le plus fréquent, où l'agitation thermique des électrons est plus grande que celle des ions $(a_e \gg a_i)$.

- a) Pour en préciser les conditions de validité remarquons que si B₀ est nul il existe dans le plasma deux échelles de longueur, associées à la vitesse d'agitation thermique a des électrons :
 - le l.p.m. $l = av^{-1}$, si v est la fréquence de collision,
- la distance $L = a\omega^{-1}$, parcourue en moyenne pendant une période. Une théorie locale (à l'échelle de la longueur d'onde λ) sera valable pourvu que :
 - $-\lambda \gg l$, s'il y a beaucoup de collisions ($\nu \gg \omega$),
- $\lambda \gg L$, s'il n'y a pas de collision ($\nu \ll \omega$); dans ce cas cela signifie que la distribution des particules ne s'est pas notablement modifiée, à cette échelle λ , pendant une période ω^{-1} .

Dans le premier cas (hydrodynamique des fluides et plasmas collisionnels), on a donc $\lambda \gg a v^{-1}$ et $\omega \ll v$, soit $\lambda \omega \simeq v_{\varphi} \lesssim a$: toutes les vitesses de phase sont possibles, en particulier celles qui sont voisines de a; les ondes du type sonore seront donc décrites de façon satisfaisante.

Dans le second cas (plasmas sans collision), $\lambda \gg a\omega^{-1}$, c'est-à-dire $\lambda\omega \simeq v_{\varphi} \gg a$: seules les ondes « rapides », de vitesses de phase beaucoup plus grandes que la vitesse thermique, seront correctement décrites. Pour étudier les ondes très lentes $v_{\varphi} \lesssim a$, il faudra revenir à la description microscopique, qui montrera des effets d'amortissement importants (amortissement Landau), traduisant les effets de particules résonnantes (Cf. chap. 7 et 8).

b) Lorsque $B_0 \neq 0$, les considérations précédentes s'appliquent encore au mouvement le long de B_0 ; mais dans la direction perpendiculaire, il existe une troisième longueur associée à a: le rayon de giration r_b des particules de vitesse a

$$r_b = a\omega_b^{-1}.$$

- Si $r_b \gg l$ (c'est-à-dire si $\omega_b \ll v$: il y a beaucoup de collisions pendant une période cyclotron), le champ magnétique ne joue pas un rôle fondamental; les mouvements parallèle et perpendiculaire (relativement à B_0) ne sont pas découplés : il n'y a pas de différence essentielle avec le cas précédent.
- Si $r_b \ll l$ ($\omega_b \gg \nu$: il y a beaucoup de rotations entre deux collisions), c'est r_b , et non plus l, qui représente le l.p.m. transversal; les mouvements parallèle et perpendiculaire seront découplés : on définira des longueurs d'onde $\lambda_{//}$ et λ_1 , et des vitesses de phase $v_{\phi//}$ et $v_{\phi\perp}$, relativement aux perturbations se propageant parallèlement et perpendiculairement à \mathbf{B}_0 , et la description locale exigera

$$\lambda_{II} \gg I$$
 ou L, suivant que $\omega \ll v$ ou $\omega \gg v$
 $\lambda_{\perp} \gg r_b$ ou L, suivant que $\omega < \omega_b$ ou $\omega > \omega_b$

— pour $\omega > \omega_b \gg \nu$, il faut donc que

— pour $\omega_b > \omega \gg v$

$$\begin{cases} v_{\varphi_{II}} \gg a \\ \frac{k_{\perp}a}{\omega_b} \ll 1 \qquad (\lambda_{\perp} \gg r_b) \end{cases}$$

— pour $\omega_b \gg v > \omega$, il n'y aura pas de condition sur $v_{\phi//}$, mais la condition $\lambda_{\perp} \gg r_b$, c'est-à-dire $\frac{k_{\perp}a}{\omega_b} \gg 1$ persistera.

En conclusion, dans le cas des plasmas sans collisions, les conditions de validité de la théorie macroscopique seront donc

$$(6.2.1) v_{\varphi//} \gg a$$

(6.2.2)
$$\begin{cases} v_{\varphi_{\perp}} \gg a & \text{si } \omega > \omega_b \\ \frac{k_{\perp} a}{\omega_b} \ll 1 & \text{si } \omega < \omega_b. \end{cases}$$

Sur les diagrammes de dispersion, rapportés à $x = (\omega_p/\omega)^2$ et $N^2 = (kc/\omega)^2$, ces conditions s'expriment par

(6.2.3)
$$N_{ll}^2 \ll \frac{c^2}{a^2}$$

(6.2.4)
$$\begin{cases} N_{\perp}^{2} \ll \frac{c^{2}}{a^{2}} & \text{si } x < (\omega_{p}/\omega_{b})^{2} \\ N_{\perp}^{2} \ll \frac{x}{\beta} & \text{si } x > (\omega_{p}/\omega_{b})^{2} \end{cases}$$

où le paramètre $\beta = \frac{a^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_b^2} = \frac{2\mu_0 n_0 KT}{B_0^2}$ a déjà été introduit en (2.3.9). Les figures 6.1 (a et b) traduisent les conditions (6.2.3) et (6.2.4).

Naturellement, les résonances $(k \to \infty)$ ne seront pas décrites correctement dans ce modèle hydrodynamique.

Sur la figure 6.1 b, on voit que plus β est petit, et plus le domaine de validité s'élargit dans la région des basses fréquences.

La condition $\beta \ll 1$ est habituellement utilisée. Avec l'hypothèse supplémentaire $\eta = (r_b/L) \ll 1$, Watson (1956) a montré que le système des équations hydrodynamiques, relativement au mouvement perpendiculaire à B_0 , se « ferme » et conduit, dans cette limite qui est celle des champs magnétiques très forts, à la loi adiabatique double (6.1.3), le mouvement parallèle à B_0 étant décrit par l'équation de Vlasov (Brueckner et Watson, 1956); le modèle est donc hydrodynamique pour le mouvement perpendiculaire à B_0 , et microscopique pour le mouvement parallèle à B_0 . Signalons, pour terminer, que des effets stabilisants dus à des valeurs finies de β ont été étudiés dans le cas des plasmas instables aux basses fréquences (Cf. Rosenbluth, Krall et Rostoker 1962; Pearlstein et Krall, 1966).

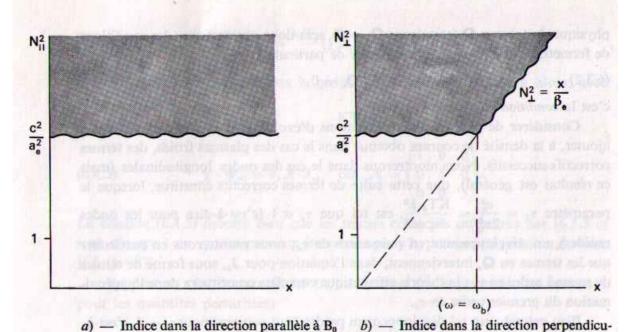


FIGURE 6.1.

Domaines de validité de la théorie hydrodynamique

Nous trouverons plus tard, au chapitre 8, une justification des conditions (6.2.1) et (6.2.2) à l'aide du calcul microscopique. Nous allons maintenant étudier la théorie adiabatique complète des ondes rapides, pour lesquelles $v_{\varphi}^2 = v_{\varphi//}^2 + v_{\varphi\perp}^2 \ll a^2$.

laire à Bo

6.3. Théorie macroscopique adiabatique

Revenons à la résolution du système d'équations (6.1.5). Rappelons tout d'abord que pour un équilibre isotrope $f_{0s} = f_{0s} (w_s^2)$, les valeurs des moments à l'équilibre sont

(6.3.1)
$$n = n_{0s}$$
; $\mathbf{v}_{0s} = 0$; $\mathbf{\Psi}_{0s} = n_{0s} KT_s \mathbf{1}$; $\mathbf{Q}_{0s} = 0$; ...

D'après la discussion précédente, la théorie macroscopique est valable pour les ondes rapides : l'hypothèse adiabatique semble donc correcte, à priori, pour décrire ces phénomènes rapides, les échanges de chaleur n'ayant pas le temps de s'établir pendant le passage de l'onde.

Pour fermer le système (6.1.5), on peut donc adopter des conditions de fermeture portant sur la pression, du type de celles qui ont été rappelées au § 6.1, et une première étape consistera à écrire la condition adiabatique habituelle pour la perturbation de pression (cette dernière étant supposée scalaire, ce qui, nous l'avons déjà dit, n'est pas satisfaisant pour $B_0 \neq 0$ et $\nu = 0$); nous verrons que cette condition de fermeture n'est pas cohérente, les termes introduits dans (6.1.5 b) étant du même ordre de grandeur que ceux qui figurent dans l'équation (6.1.5 c), dont on ne tient pas compte. L'étape suivante, en raison même de la signification

physique du tenseur \mathbf{Q} (et puisque $\mathbf{Q}_0 = 0$), sera donc obtenue avec les conditions de fermeture (une pour chaque espèce s de particules)

$$(6.3.2) \qquad \nabla \cdot \mathbf{Q}_s = 0$$

c'est la condition adiabatique complète.

Considérer de plus en plus d'équations d'évolution des moments, revient à ajouter, à la densité de courant obtenue dans le cas des plasmas froids, des termes correctifs successifs. Nous montrerons dans le cas des ondes longitudinales (mais ce résultat est général), que cette suite de termes correctifs constitue, lorsque le paramètre $\tau_s = \frac{a_s^2}{2v_m^2} = \frac{KT_s}{m_s} \frac{k^2}{\omega^2}$, est tel que $\tau_s \ll 1$ (c'est-à-dire pour les ondes rapides), un développement en puissances de τ_s; nous montrerons en particulier que les termes en \mathbf{Q}_s interviennent, dans l'équation pour \mathbf{J}_s , sous forme de termes du second ordre en τ_s : la théorie adiabatique complète constituera donc l'approximation du premier ordre en τ_s.

Bien entendu, un tel développement perdra tout son sens pour $\tau_s \sim 1$, c'est-àdire pour les ondes très lentes $(v_{\varphi} \simeq a_s)$, et il faudra revenir alors à la description microscopique.

Résolvons le système (6.1.5) par une méthode de perturbation; on linéarise les équations au voisinage de l'équilibre supposé homogène, et on en prend les transformées de Fourier dans l'espace et dans le temps. Cela revient à prendre, pour tout moment g, une expression de la forme

$$g = g_0 + g_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$
 , $g_1 \ll g_0$

et à linéariser les équations (6.1.5). On obtient ainsi, pour les perturbations des grandeurs associées au passage de l'onde (\mathbf{k}, ω) , $\xi_{s1} = q_s n_{s1}$, $\mathbf{J}_{s1} = n_{0s} q_s \mathbf{v}_{s1}$,

$$\Phi_{s1} = \frac{q_s}{m_s} \Psi_{s1}$$
 , le système (en omettant l'indice s)

$$\Phi_{s1} = \frac{q_s}{m_s} \Psi_{s1} \quad , \quad \text{le système (en omettant l'indice } s)$$

$$\begin{cases}
(a) \quad \xi_1 - \chi \cdot \mathbf{J}_1 = 0 \\
(b) \quad \mathbf{J}_1 - i\mathbf{b} \times \mathbf{J}_1 - \chi \cdot \Phi_1 = i\omega \varepsilon_0 p^2 \mathbf{E}_1 \\
(c) \quad \Phi_1 - (i\mathbf{b} \times \Phi_1 + \text{transposé}) - \frac{\mathbf{KT}}{m} [(\chi \cdot \mathbf{J}_1) \mathbf{1} + \chi \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1 \chi] = 0
\end{cases}$$

où
$$\chi = \mathbf{k}/\omega$$
 ; $\mathbf{b}_s = \omega_{bs}/\omega$, avec $\omega_{bs} = -\frac{q_s}{m_s} \mathbf{B}_0$; $p_s^2 = \omega_p^2/\omega^2$.

Nous allons tout d'abord étudier le cas où $B_0 = 0$.

Ondes rapides adiabatiques en l'absence de champ magné-6.4. tique extérieur

Dans ce cas, on peut calculer immédiatement le terme dû à l'agitation thermique, $\chi \cdot \Phi_{s1}$ qui figure dans (6.3.3 b). Multiplions scalairement (6.3.3 c) par χ . On obtient age of the antimental and an experience of the control of

(6.4.1)
$$\mathbf{\chi} \cdot \mathbf{\Phi}_{s1} = \frac{\mathbf{K}\mathbf{T}_s}{m_s} [\chi^2 \mathbf{J}_{s1} + 2 (\chi \cdot \mathbf{J}_{s1}) \chi].$$

Prenons (ce qui ne restreint pas la généralité) Oz suivant \mathbf{k} : on a alors, avec $\mathbf{\chi} = (0, 0, \mathbf{\chi})$ et

(6.4.2)
$$\mathbf{\chi} \cdot \mathbf{\Phi}_{s1} = \tau_s \mathcal{A} \cdot \mathbf{J}_{s1} \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La relation (6.4.2) montre bien que les termes correctifs introduits par (6.3.3 c) sont d'ordre 1 en τ_s , comme ceux introduits par l'hypothèse de pression scalaire [Cf. (6.4.7)].

En portant (6.4.2) dans (6.3.3 b), on obtient (en supprimant les indices 1 pour les quantités perturbées)

$$(\mathbf{1} - \tau_s A) \cdot \mathbf{J}_s = i\omega \varepsilon_0 p_s^2 \mathbf{E}$$

qui s'écrit, au premier ordre en τ_s , avec $(1 - \tau_s A)^{-1} \# (1 + \tau_s A)$

(6.4.3)
$$\mathbf{J}_s = i\omega \varepsilon_0 p_s^2 (\mathbf{1} + \tau_s A) \cdot \mathbf{E}$$

ce qui définit σ₈. D'où, d'après (2.3.19), le tenseur diélectrique κ

(6.4.4)
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_{||} \end{pmatrix}$$

où

(6.4.5)
$$\begin{cases} \varkappa_{\perp} = 1 - \sum_{s} \frac{\omega_{ps}^{2}}{\omega^{2}} (1 + \tau_{s}) \\ \varkappa_{||} = 1 - \sum_{s} \frac{\omega_{ps}^{2}}{\omega^{2}} (1 + 3\tau_{s}). \end{cases}$$

Ce résultat montre que les plasmas chauds ont un tenseur diélectrique $\epsilon = \epsilon_0 \varkappa$, non seulement fonction de ω comme dans le cas des plasmas froids, mais aussi de k (à travers τ_s), ce qui conduira à un phénomène de dispersion à la fois temporelle et spatiale. Bien entendu, dans la limite des très grandes longueurs d'onde $(k \to 0)$, les corrections de température disparaîtront, les déplacements thermiques des charges devenant négligeables pour une onde de longueur d'onde infinie : on se retrouve alors dans le cas des plasmas froids : en particulier, on retrouvera les mêmes fréquences de coupures $(N \to 0)$; ces fréquences de coupure, indépendantes de la température associée au modèle choisi pour décrire le milieu, et indépendantes de l'angle de propagation, relativement au champ magnétique extérieur, constituent donc des « constantes absolues » de la propagation.

Comparons le résultat (6.4.5) à celui donné par la théorie adiabatique à

pression scalaire, où l'on pose $\Psi_s = P_s \mathbf{1}$, avec, à l'équilibre, $P_{s0} = n_{s0}KT_s$; en supposant, pour la pression totale, la loi adiabatique $P_s n_s^{-\gamma_s} = C^{to}$, on en tire immédiatement pour les perturbations P_{s1} et n_{s1}

(6.4.6)
$$P_{s1} = \gamma_s KT_s n_{s1}$$
 d'où

$$\mathbf{\chi} \cdot \mathbf{\Psi}_{s1} = \mathbf{\chi} \mathbf{P}_{s1} = \gamma_s \mathbf{K} \mathbf{T}_s n_{s1} \mathbf{\chi}$$

et avec (6.3.3 a), en revenant à Φ_{s1}

(6.4.7)
$$\chi \cdot \Phi_{s1} = \gamma_s \frac{KT_s}{m_s} \xi_{s1} \chi = \gamma_s \frac{KT_s}{m_s} (\chi \cdot \mathbf{J}_{s1}) \chi.$$

L'équation (6.3.3 b) s'écrit donc

$$(\mathbf{1} - \tau_s \gamma_s \mathcal{A}') \mathbf{J}_{s1} = i\omega \varepsilon_0 p_s^2 \mathbf{E}_s, \quad \text{où} \quad \mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et au premier ordre en τ_s (en omettant les indices 1)

$$\mathbf{J}_s = i\omega \varepsilon_0 p_s^2 (\mathbf{1} + \tau_s \gamma_s \mathcal{A}') \cdot \mathbf{E}$$

conduisant à un tenseur diélectrique de la forme (6.4.4), mais avec

(6.4.8)
$$\begin{cases} \varkappa_1' = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = \varkappa^0 \\ \varkappa_2'' = 1 - \sum_s \frac{\omega p_{ps}^2}{\omega^2} (1 + \gamma_s \tau_s). \end{cases}$$

La comparaison de (6.4.4) et (6.4.8) montre que \varkappa'_1 est inexact et que \varkappa'_{1} est correct à condition de prendre $\gamma_s = 3$, pour chaque espèce de particules. Ceci correspond bien à la loi adiabatique pour un mouvement à un seul degré de liberté (ici, dans la direction de k).

Ondes transversales 6.4.1

En portant l'expression (6.4.4) dans l'équation de dispersion générale (2.4.9), on obtient, comme au § 3.2, deux ondes transversales polarisées rectilignement suivant Ox ou Oy, et une onde longitudinale.

Mais ici, $\tau_s = \frac{KT_s}{m_s} \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{KT_s}{m_s c^2} N^2$, et l'équation des ondes transversales $N^2 = \varkappa_1$ s'écrit (pour un plasma à deux composants)

(6.4.9)
$$N^{2} = \frac{1 - \frac{\omega_{0}^{2}}{\omega^{2}}}{1 + \frac{KT_{e}}{m_{e}c^{2}}\frac{\omega_{p}^{2}}{\omega^{2}}(1 + \eta)}$$

où $\eta = \frac{1}{m^2 \alpha} (T_i/T_e) \ll 1$, dans les cas usuels. Ainsi que nous l'avons fait remarquer, ce mode présente la même coupure plasma que les plasmas froids.

Notons, cependant, que la correction de température est du même ordre que la correction relativiste 1 et par conséquent peut être négligée ici. La théorie à pression scalaire (où $\varkappa_{\perp} = \varkappa^0$, indépendant de T_e et T_i) décrira donc ces ondes transversales pour $B_0 = 0$ de manière satisfaisante.

Ondes longitudinales 6.4.2

L'équation de dispersion des ondes longitudinales est $x_{ij} = 0$, ce qui conduit à

(6.4.10)
$$\omega^2 = \sum_s \omega_{ps}^2 (1 + 3\tau_s) \# \omega_0^2 + 3\tau_e \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \omega_0^2 + 3k^2 \frac{KT_e}{m_e}$$

où, puisque $\omega \simeq \omega_0 \# \omega_p$, on a pris cette valeur approchée pour exprimer le terme correctif; finalement

$$(6.4.11) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 3k^2V_e^2$$

où $V_e = (KT_e/m_e)^{\frac{1}{2}}$ mesure la vitesse d'agitation thermique des électrons. Remarquons que, dans ce cas, il existe la même correction relativiste que dans le cas transverse (Clemmow et Willson, 1956), mais cette correction n'est pas comparable au terme dépendant de la température, qui d'ailleurs, est le seul terme en k^2 dans l'équation (6.4.11).

Ce mode longitudinal est donc une *onde* longitudinale qui se propage tant que $\omega \geqslant \omega_0$; mais puisque τ_e doit être très inférieur à 1, il en résulte que ω ne peut différer beaucoup de ω_0 : la propagation se fait dans un domaine de fréquence très étroit, d'autant plus étroit que la température est plus basse; cette limitation entraîne une limite pour k: la condition $\tau_e \ll 1$ s'écrit $k^2 V_e^2 \ll \omega^2 \# \omega_p^2$ c'est-à-dire

$$(6.4.12) k^2 \ll k_{\rm pe}^2,$$

en introduisant $k_{De} = \lambda_{De}^{-1}$ où $\lambda_{De} = (\epsilon_0 K T_e/n_{0e}q_e)^{1/2} = V_e/\omega_p$ est la longueur de Debye électronique. On retrouve, avec (6.4.12), la condition fondamentale (1.4.3) nécessaire à l'existence des phénomènes collectifs dans le milieu.

Pour $\omega < \omega_0$, l'indice N, donné par

$$N^2 = \frac{c^2}{3V_*^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

devient imaginaire pur : il n'y a plus propagation. La profondeur de pénétration est alors (Cf. (2.2.39)) : $\delta = \frac{c}{\omega N_2} \simeq \frac{V_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$

L'expression (6.4.11) est, comme nous le verrons, en accord avec le résultat microscopique (Formule de Bohm et Gross). La théorie à pression scalaire, avec $\gamma_e = 3$, conduit à la même expression, et c'est cet accord qui justifie, semble-t-il, l'utilisation très répandue de cette théorie adiabatique à pression scalaire.

1. Cette correction conduit à remplacer ω_0^2 par $\omega_0^2 \left(1 - \frac{5}{2} \frac{kT_e}{m_e c^2}\right)$. (Gershman, 1960.)

6.5. Ondes rapides adiabatiques en présence d'un champ magnétique extérieur

Pour $B_0 \neq 0$, les termes non diagonaux du tenseur Φ sont couplés par le champ magnétique, et le calcul de $\chi \cdot \Phi$ est long et quelque peu fastidieux; il est donné dans l'Appendice 5 : cette quantité est trouvée proportionnelle à τ_s ; au premier ordre en τ_s , on a donc pu prendre l'approximation d'ordre 0 — c'est-à-dire celle des plasmas froids — pour calculer les J_s qui figurent dans l'expression de $\chi \cdot \Phi_s$. On trouve ainsi un tenseur diélectrique $\epsilon = \epsilon_0 \varkappa$, avec ¹

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= 1 - \sum_{s} \frac{p_{s}^{2}}{1 - b_{s}^{2}} \left[1 + \tau_{s} \left(\frac{3}{1 - 4b_{s}^{2}} \sin^{2}\theta + \frac{1 + 3b_{s}^{2}}{(1 - b_{s}^{2})^{2}} \cos^{2}\theta \right) \right] \\
\kappa_{22} &= 1 - \sum_{s} \frac{p_{s}^{2}}{1 - b_{s}^{2}} \left[1 + \tau_{s} \left(\frac{1 + 8b_{s}^{2}}{1 - 4b_{s}^{2}} \sin^{2}\theta + \frac{1 + 3b_{s}^{2}}{(1 - b_{s}^{2})^{2}} \cos^{2}\theta \right) \right] \\
\kappa_{33} &= 1 - \sum_{s} p_{s}^{2} \left[1 + \tau_{s} \left(\frac{1}{1 - b_{s}^{2}} \sin^{2}\theta + 3 \cos^{2}\theta \right) \right] \\
\kappa_{12} &= -\kappa_{21} = \sum_{s} ib_{s} \frac{p_{s}^{2}}{1 - b_{s}^{2}} \left[1 + \tau_{s} \left(\frac{6}{1 - 4b_{s}^{2}} \sin^{2}\theta + \frac{3 + b_{s}^{2}}{(1 - b_{s}^{2})^{2}} \cos^{2}\theta \right) \right] \\
\kappa_{23} &= -\kappa_{32} = -\sum_{s} ib_{s} \frac{p_{s}^{2}}{(1 - b_{s}^{2})^{2}} \tau_{s} \left(3 - b_{s}^{2} \right) \sin\theta \cos\theta \\
\kappa_{31} &= \kappa_{13} = -\sum_{s} \frac{p_{s}^{2}}{(1 - b_{s}^{2})^{2}} \tau_{s} \left(2 \sin\theta \cos\theta \right).
\end{aligned}$$

Pour $B_0 = 0$ (et $\theta = 0$), on retrouve pour $\kappa_{11} = \kappa_{22}$ et κ_{33} les expressions (6.4.5). Bien entendu, un tel développement n'est valable que tant que les coefficients des τ_c restent petits, c'est-à-dire en dehors des valeurs $|b_c| = 1$ ou 2, donc dans

des τ_s restent petits, c'est-à-dire en dehors des valeurs $|b_s|=1$ ou 2, donc dans un voisinage suffisamment éloigné des fréquences gyromagnétiques $\omega=\omega_b$ ou $\omega=\Omega_b$ et de leurs harmoniques $\omega=2\omega_b$ ou $\omega=2\Omega_b^2$. Les voisinages trop proches de ces résonances ne seront pas décrits par la présente théorie dès que les conditions (6.2.1) et (6.2.2) ne seront plus satisfaites.

L'équation de dispersion sera donnée par (2.4.9), après y avoir substitué les $\varkappa_{\alpha\beta}$ donnés par (6.5.1). Elle se met encore sous la forme

(6.5.2)
$$AN^4 - BN^2 + C = 0,$$

1. Les expressions (6.5.1) satisfont aux lois générales de symétrie du tenseur de conductivité, en accord avec les relations d'Onsager : σ (k, B_0) n'est pas changé quand on change le signe du vecteur polaire k, mais est transformé en son transposé quand on change le signe du vecteur axial B_0 . Avec la géométrie choisie ici (Oz le long de B_0 , Oy le long de ($B_0 \times k$) et Ox le long de ($B_0 \times k$) $\times B_0$), le changement, à la fois des signes de B_0 et k, inverse les sens de Ox et Ox, mais pas de Ox, de sorte que, aussi bien pour σ que pour κ

$$\varkappa_{xy} = - \varkappa_{yx}, \quad \varkappa_{yz} = - \varkappa_{zy}, \quad \varkappa_{xz} = \varkappa_{zx}.$$

2. Les résonances sur les harmoniques successifs apparaîtraient aux ordres suivants en τ_s , en utilisant les équations des moments suivants, mais le calcul macroscopique devient alors inextricable.

avec

(6.5.3)
$$\begin{cases}
A = \varkappa_{11} \sin^2 \theta + \varkappa_{33} \cos^2 \theta + 2\varkappa_{13} \sin \theta \cos \theta \\
B = (\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}^2) \sin^2 \theta + \varkappa_{33} (\varkappa_{11} + \varkappa_{22} \cos^2 \theta) \\
+ 2 (\varkappa_{13}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{23}) \sin \theta \cos \theta \\
C = \varkappa_{33} (\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}^2)
\end{cases}$$

Les $\varkappa_{\alpha\beta}$ contenant des facteurs en N², l'équation (6.5.2) est en réalité du 3^e degré en N², le coefficient de N⁶ étant proportionnel, dans la limite $\tau \ll 1$, à $KT/mc^2 \ll 1$. On aura donc, en général, trois racines N², deux correspondant à celles des plasmas froids, modifiées par des corrections de température, et une nouvelle racine N² très grande (qui tend vers l'infini quand $T \rightarrow 0$), correspondant à une vitesse de phase très petite, et qui doit donc être rejetée. On aura finalement les deux solutions de (6.5.2), limitées au 1^{er} ordre en τ_s .

Pour les ondes principales $\left(\theta=0\text{ et }\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, ces solutions sont formellement identiques à celles des plasmas froids, puisqu'il en est alors de même des coefficients \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} (comparer (6.5.3) à (3.4.3), où $\varkappa_{11}=\varkappa_{22}=\varkappa_1$; $\varkappa_{12}=-\varkappa_{21}=-i\varkappa_2$; $\varkappa_{33}=\varkappa_3$).

Pour les coupures, définies par C = 0, on retrouve comme il a déjà été dit, les coupures des plasmas froids

$$x_3 = 0$$
; $x_1 \pm x_2 = 0$.

En propagation parallèle 6.5.1

On aura donc

(6.5.4)
$$\varkappa_{33} = 0; \qquad N_{\pm}^2 = \varkappa_{11} \pm i \varkappa_{12}.$$

La première correspond à l'onde de plasma, déjà étudiée pour $B_0 = 0$ [Éq. (6.4.10) et (6.4.11)]; la seconde correspond à un mode droit et à un mode gauche

(6.5.5)
$$N_D^2 \equiv N_+^2 = \varkappa_{11} + i\varkappa_{12}; \qquad N_G^2 \equiv N_-^2 = \varkappa_{11} - i\varkappa_{12}.$$

Avec (6.5.1) et en appelant \mathring{N}_{+} et \mathring{N}_{-} les solutions trouvées pour les plasmas froids, on a

$$\begin{split} \mathbf{N}_{\pm}^{\,2} &= \mathring{\mathbf{N}}_{\pm}^{\,2} - \sum_{s} \frac{p_{s}^{2} \tau_{s}}{(1 - b_{s}^{2})^{3}} \left[1 + 3b_{s}^{2} \mp b_{s} (3 + b_{s}^{2}) \right] \\ &= \mathring{\mathbf{N}}_{\pm} - \sum_{s} \frac{p_{s}^{2} \tau_{s}}{(1 \pm b_{s})^{3}} \end{split}$$

avec $\tau_s = (KT_s/m_sc^2)N^2$, on a donc

(6.5.6)
$$N_{\pm}^2 = \frac{\mathring{N}_{\pm}^2}{1 + \eta_{//\pm}} \# N_{\pm}^2 (1 - \eta_{//\pm})$$

où, pour un plasma à deux composants

(6.5.7)
$$\hat{\mathbf{N}}_{\pm} = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega \mp \omega_b)(\omega \pm \Omega_b)}$$

$$\eta_{//\pm} = \frac{\omega}{c^2} \left[\frac{\mathbf{K} \mathbf{T}_e}{m_e} \frac{\omega_p^2}{(\omega \mp \omega_b)^3} + \frac{\mathbf{K} \mathbf{T}_i}{m_i} \frac{\Omega_p^2}{(\omega \pm \Omega_b)^3} \right];$$

la correction $\eta_{//}$ doit rester « 1, ce qui exclut les voisinages trop proches des résonances gyromagnétiques (Cf. § 8.8). Cette correction contient, cependant, pour chacun des modes, une correction résonnante et une correction non résonnante : cette dernière est du même ordre que la correction relativiste et peut donc être négligée; au contraire, plus près de la résonance, la première devient beaucoup plus importante que la correction relativiste : elle doit être conservée.

En propagation perpendiculaire 6.5.2

Les solutions sont

(6.5.8)
$$\begin{cases} N_0^2 = \kappa_{33} \\ N_x = \frac{\kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{12}^2}{\kappa_{11}} \end{cases}$$

— l'onde ordinaire n'est donc plus identique à l'onde transversale trouvée pour $B_0 = 0$ ($\kappa_{33} + \kappa_{\perp}$), contrairement au cas des plasmas froids. On obtient facilement

(6.5.9)
$$N_0^2 = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1 + \eta_\perp'} \quad \text{où} \quad \eta_\perp' = \sum_s \frac{KT_s}{m_s c^2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{bs}^2}$$

l'onde extraordinaire est donnée par

(6.5.10)
$$N_x^2 = \frac{\mathring{N}_x}{1 + \eta \mathring{\tau}}$$

où, dans le cas des hautes fréquences

$$\eta_1'' = \frac{8KT_e}{m_e c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - 4\omega_b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2 \omega_b^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)}\right), \qquad \omega_1^2 = \omega_b^2 + \omega_p^2.$$

Comme dans le cas où $\theta = 0$, les corrections η'_1 et η''_1 , dans (6.5.9) et (6.5.10), deviennent très vite plus importantes que les effets relativistes dès qu'on s'approche des résonances.

Théorie adiabatique à pression scalaire 6.5.3

Celle-ci conduit à des résultats incorrects: en particulier, elle donne $\kappa_{23} = \kappa_{13} = 0$, et aucune correction de température sur les composantes $\kappa_{\alpha\beta}$ autres que κ_{33} , laquelle, comme lorsque $B_0 = 0$, est décrite correctement avec $\gamma_e = \gamma_i = 3$. Dans le cas $\theta = 0$, on peut d'ailleurs obtenir directement le résultat de la théorie à pression scalaire; il suffit de superposer aux ondes longitudinales (obtenues dans

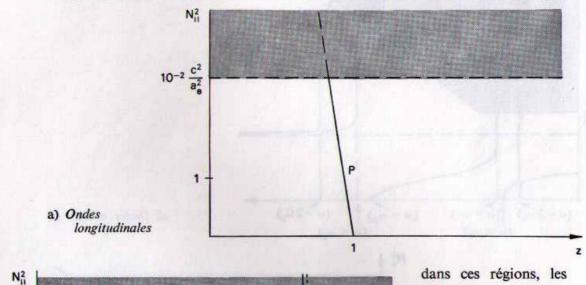
le cas $B_0 = 0$) les ondes transversales de l'approximation des plasmas froids (modes droit et gauche), puisque ces modes sont, dans l'hypothèse de pression scalaire, indépendants de la température.

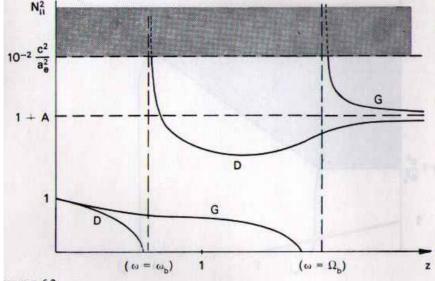
6.6. Courbes de dispersion des ondes principales rapides

Nous nous limiterons aux allures des courbes $N^2 = N^2(x)$ (fig. 6.2 et 6.3).

Sur ces figures ont été indiquées les limites (6.2.3) et (6.2.4) de la théorie adiabatique, en prenant $\tau_e \simeq 10^{-2}$.

Dans la région des faibles indices, l'allure générale des courbes obtenues dans l'approximation des plasmas froids est peu modifiée, ce qui est normal puisque,





dans ces régions, les effets de température apparaissent comme de petites corrections, de l'ordre de grandeur des corrections relativistes.

o) Ondes transversales

FIGURE 6.2.

Allure des Courbes de Dispersion en propagation parallèle $\left(A=rac{\omega_0^2}{\omega_b\Omega_b}\sim 10^2
ight)$

— Pour $\theta=0$, on retrouve les deux ondes droite et gauche, qui, aux basses fréquences, donnent l'onde d'Alfvèn, d'indice $N=(1+A)\frac{1}{2}$; pour les trop grandes valeurs de A (c'est-à-dire pour des champs magnétiques inférieurs à une certaine valeur critique, dépendant de la densité ionique), cette onde ne sera plus observée : cette condition critique $A \leq c^2/a_e^2$ s'écrit

(6.6.1)
$$\beta \lesssim \frac{m_e}{m_i} \qquad \left(\text{où } \beta = \frac{2\mu_0 n_0 KT}{B_0^2} \right)$$

et semble en bon accord avec les résultats expérimentaux.

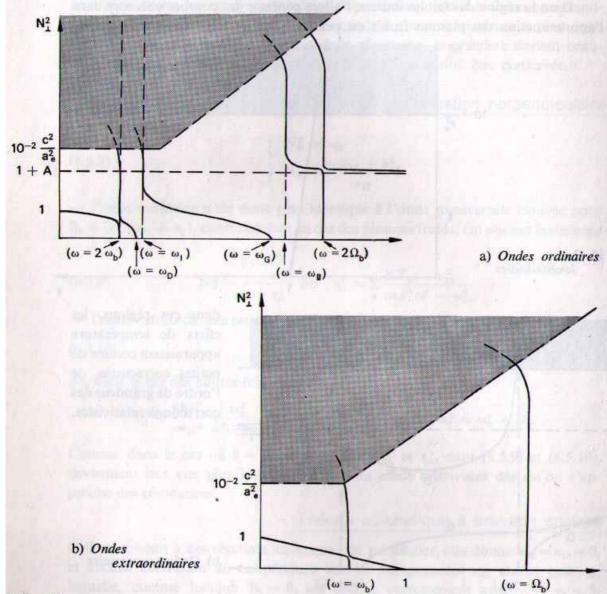


FIGURE 6.3.

Allure des Courbes de Dispersion en propagation perpendiculaire $\left(A=rac{\omega_0^2}{\omega_b\Omega_b}\sim 10^2
ight)$

— Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve les ondes ordinaires et extraordinaires, sans grand

changement, à l'existence de nouvelles résonances près : sur $\omega = \omega_b$ et $\omega = \Omega_b$ pour l'onde ordinaire, sur les harmoniques $\omega = 2\omega_b$ et $\omega = 2\Omega_b$ pour l'onde extraordinaire. Pour $\omega \simeq \omega_I$ et $\omega \simeq 2\omega_b$, ainsi que pour $\omega = \omega_I$ et $\omega = 2\Omega_b$, on observe des pseudo-résonances, régions où l'indice varie très vite sans tendre vers l'infini. Ces effets de pseudo-résonance ne représentent évidemment qu'une approximation grossière des phénomènes ayant lieu au voisinage des fréquences de résonance. Remarquons, néanmoins, que les harmoniques $\omega = 2\omega_b$ et $\omega = 2\Omega_b$ n'apparaissent que pour $\theta \neq 0$ (Cf. (6.5.1) pour $\varkappa_{\alpha\beta}$), c'est-à-dire dès que la propagation n'est plus rigoureusement parallèle à \mathbf{B}_0 : cela correspond au fait que, lorsque $\theta = 0$, la phase du champ reste constante tout le long de l'orbite d'une particule; tandis que, si $\theta \neq 0$, la particule voit, le long de son orbite, un champ dont la phase varie, le plan d'onde n'étant plus parallèle au plan de l'orbite : il y a alors formation d'harmoniques.

Signalons enfin que la recherche des modes adiabatiques très lents ($v_{\varphi} \sim a_e$ ou a_i), qui, rappelons-le, ne peuvent pas être correctement décrits par une théorie hydrodynamique, conduit, en ne s'imposant évidemment plus $\tau_s \ll 1$, à raccorder les branches « résonnantes » à des branches correspondant à des ondes peu dispersives, de vitesses de phase voisines de a_e ou a_i (Delcroix, Denisse, Quemada, 1961) : ces dernières correspondent à la troisième racine de l'équation (6.5.2) (qui tend vers l'infini quand $T \rightarrow 0$) qui a été éliminée en se fixant $\tau_s \ll 1$.

6.7. Ondes de très basse fréquence en propagation oblique : mode magnétosonore

En très basse fréquence, $\omega \ll \Omega_b$, Ω_p , les expressions (6.5.1) des $\varkappa_{\alpha\beta}$ deviennent, au premier ordre en $\frac{1}{b_s^2} = \frac{\omega^2}{\omega_{bs}^2}$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &\simeq \mathring{\kappa}_{11} = 1 + A \\
\kappa_{22} &\simeq \mathring{\kappa}_{22} - N^2 \sin^2 \theta \sum_{s} \beta_{s} \\
\kappa_{33} &\simeq \mathring{\kappa}_{33} - \frac{1}{2} N^2 \sum_{s} \beta_{s} (3b_{s}^{2} \cos^{2} \theta - \sin^{2} \theta) \\
\kappa_{12} &\simeq + \frac{i}{2} N^2 \sum_{s} b_{s}^{-1} \beta_{s} \left(\cos^{2} \theta - \frac{3}{2} \sin^{2} \theta \right) \\
\kappa_{23} &\simeq - \frac{i}{2} N^2 \sum_{s} b_{s} \beta_{s} \sin \theta \cos \theta \\
\kappa_{31} &\simeq 0
\end{aligned}$$

avec $\mathring{x}_{11} = \mathring{x}_{22} = 1 + A$ et $\mathring{x}_{33} = 1 - x$, $x \gg 1$; dans (6.7.1), on a utilisé le para-

mètre $\beta_s = 2\mu_0 n_{0s} KT_s/B_0^2$ (déjà introduit en (2.3.9) et (6.2.4)) pour exprimer le facteur $2\tau_s p_s^2 b_s^{-2} = N^2 \beta_s^2$, figurant dans les $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Alors, l'équation de dispersion (2.4.9) s'écrit, au premier ordre en $1/b_s^2$ et en τ_s

(6.7.2)
$$(\varkappa_{22} - N^2) \left[(\mathring{\varkappa}_{11} - N^2 \cos^2 \theta) \varkappa_{33} - N^2 \sin^2 \theta \mathring{\varkappa}_{11} \right] = 0$$

de la même forme que celle donnée par (3.9.3) dans le cas des plasmas froids; un traitement analogue, en tenant compte de |×23| » 1, conduit aux deux modes

$$\lambda_{11} - N^2 \cos^2\theta = 0$$
, polarisé suivant Ox
 $\mu_{22} - N^2 = 0$, polarisé suivant Oy.

Le premier

$$(6.7.3) N2 = \frac{1+A}{\cos^2\theta}$$

est identique au mode torsionnel trouvé pour les plasmas froids.

Le second

(6.7.4)
$$N^2 = \frac{1+A}{1+\beta \sin^2\theta}, \qquad \beta = \beta_e + \beta_i$$

correspond au mode compressionnel $N^2=1+A$ des plasmas froids (et s'identifie à lui pour $\theta=0$). Quand $\theta=0$, nous avons vu que le caractère compressionnel de ce mode froid disparaissait; dans un plasma chaud, nous montrerons (chap. 7) qu'il existe pour $\theta=0$, à côté de ces deux ondes d'Alfvèn transversales, un mode longitudinal, donc compressionnel pur : le mode pseudosonore. Lorsque $\theta\neq 0$, le mode d'Alfvèn compressionnel peut donc se coupler au mode pseudosonore, pour donner le mode (6.7.4), tandis que le mode torsionnel (6.7.3) reste inchangé. C'est pourquoi le mode compressionnel (6.7.4) est appelé mode magnétosonore.

Nous retrouverons ces modes dans le traitement microscopique (chap. 8).

6.8. Ondes électrostatiques dans un magnétoplasma

Jusqu'à présent, nous n'avons trouvé qu'un seul mode longitudinal, le mode plasma électronique, et l'existence du mode pseudosonore vient d'être signalée. Ces modes sont obtenus, soit quand $B_0 = 0$, soit quand $B_0 \neq 0$, pour $\theta = 0$ (Cf. § 8.3). Pour θ quelconque, il est possible de chercher des modes longitudinaux, pour lesquels il n'y aura pas de champ magnétique de l'onde, le champ électrique

dérivant d'un potentiel $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$. Ces modes seront

appelés modes électrostatiques. Ils seront donc définis par

$$(6.8.1) \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Plus généralement, ces modes seront tels que $E_L \gg E_T$, où E_L et E_T sont les composantes de E relativement à k. Or, l'équation (2.4.4)

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

pour $E = E_L + E_T$ et avec

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{L}}) \, \mathbf{N} - \, \mathbf{N}^2 (\mathbf{E}_{\mathbf{T}} + \mathbf{E}_{\mathbf{L}}) = - \, \mathbf{N}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{T}}$$

s'écrit

$$\varkappa \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{L}} = (\mathbf{N}^2 - \varkappa \cdot) \, \mathbf{E}_{\mathbf{T}}.$$

On aura donc $|\mathbf{E_L}| \gg |\mathbf{E_T}|$ si $N^2 \gg |\varkappa_{\alpha\beta}|$, quels que soient α et β . Cette condition est en particulier satisfaite pour les résonances des plasmas froids, $N^2 \to \infty$, c'est-à-dire pour $\mathcal{A} = \varkappa_{11} \sin^2\theta + \varkappa_{33} \cos^2\theta = 0$: on retrouve la polarisation longitudinale pour tous les modes à la résonance, sauf pour $\theta = 0$ où, alors, \varkappa_1 et \varkappa_2 tendent aussi vers l'infini.

Les deux relations (6.8.1) et (6.8.2) s'écrivent

$$k \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \varkappa_{11}\sin\theta + \varkappa_{31}\cos\theta & \varkappa_{13}\sin\theta + \varkappa_{33}\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E}_{L} = 0$$

d'où l'équation de dispersion des modes électrostatiques, compte tenu de $\kappa_{31} = \kappa_{13}$

(6.8.3)
$$\varkappa_{11} \sin^2 \theta + 2 \varkappa_{13} \sin \theta \cos \theta + \varkappa_{33} \cos^2 \theta = 0.$$

Pour les plasmas froids, $\kappa_{13} = 0$ et (6.8.3) redonne l'équation (3.4.38) qui correspondait à toutes les résonances, sauf celles obtenues pour $\theta = 0$, à savoir $\omega = \omega_b$ et $\omega = \Omega_b$.

Dans l'approximation adiabatique, \times_{13} est d'ordre 1 en τ_s . Avec les expressions (6.5.1), l'équation (6.8.3) se met donc sous la forme

(6.8.4)
$$\mathring{\varkappa}_{11} \sin^2 \theta + \mathring{\varkappa}_{33} \cos^2 \theta =$$

$$\sum_{s} \tau_{s} \frac{p_{s}^{2}}{1-b_{s}^{2}} \left\{ 3 \sin^{2}\theta \left[\frac{\sin^{2}\theta}{1-4b_{s}^{2}} + \frac{(1+b_{s}^{2})\cos^{2}\theta}{(1-b^{2})^{2}} \right] + \cos^{2}\theta \left[\sin^{2}\theta + 3(1-b^{2})\cos^{2}\theta \right] \right\}$$

où les $\stackrel{\circ}{\varkappa}_{\alpha\beta}$ sont les valeurs de $\varkappa_{\alpha\beta}$ pour les plasmas froids.

Dans la limite des B₀ forts (au premier ordre en $1/b_s^2$) on obtient, avec $\tau_s = a_s^2 N^2/2c^2$, $a_s^2 = 2KT_s/m_s$

(6.8.5)
$$N^{2} \cos^{2}\theta \# \frac{1-x+(1+A) tg^{2}\theta}{\frac{3}{2} \sum a_{o}^{2} p_{o}^{2}/c^{2}}.$$

Examinons le cas des hautes fréquences, pour lesquelles on peut négliger les ions :

— Pour $\theta = 0$, (6.8.4) conduit à

$$1-x=3\tau_e p_e^2$$

c'est-à-dire à la relation de Bohm et Gross, pour $\omega \# \omega_n$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \frac{\mathrm{KT}_e}{m_e} \, k^2.$$

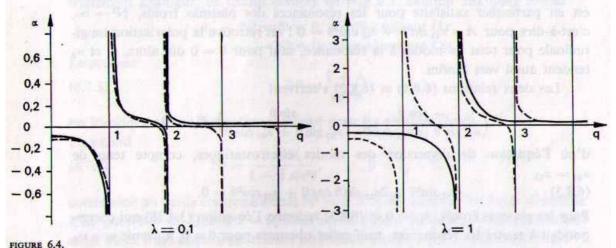
— Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'expression (6.8.5) n'est plus valable. On obtient directement de (6.8.3)

$$\varkappa_{11}=0$$
, soit

(6.8.6)
$$\varkappa_{11} = 1 - \frac{p_e^2}{1 - b_e^2} \left(1 + \frac{3\tau_e}{1 - 4b_e} \right) = 0.$$

Posons
$$q = \frac{\omega}{\omega_b}$$
, $\lambda = \frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{\omega_b^2}$, $\alpha = \alpha(q, \lambda) = \frac{KT}{m} \frac{k_\perp^2}{\omega_p} = \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2} \lambda$ (6.8.6) devient
$$\alpha = \frac{\lambda}{a^2 - 1} \left(1 + \frac{3\lambda}{a^2 - 4} \right).$$

Les figures (6.4) montrent les variations de α (q) pour $\lambda = 0,1$ et $\lambda = 1$.



Ondes électrostatiques électroniques

Sur ces figures, on a tracé en pointillé les résultats correspondants obtenus par le calcul microscopique (Bernstein, 1958). On constate le bon accord pour $\lambda \ll 1$ et le désaccord dès que $\lambda \gtrsim 1$ (mis à part le fait que la théorie adiabatique ne conduit pas aux harmoniques successifs $\omega = n\omega_b$ pour $n \geqslant 3$): on retrouve ici la limite de validité de la théorie adiabatique donnée au § 6.2, $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{k_\perp a}{\omega_b} \right)^2 \ll 1$ pour $\omega < \omega_b$, et $\lambda \left(\frac{\omega_b}{\omega} \right)^2 \ll 1$ pour $\omega > \omega_b$, conditions qui se confondent pratiquement dans la région considérée $0 \ll q \ll 3$.

— Pour θ quelconque (toujours dans le cas où B_0 est fort et pour des températures assez basses), posons encore $q=\frac{\omega}{\omega_b}=\frac{1}{b_e}$, et, en plus de $\lambda=\frac{1}{2}\frac{k_\perp^2a^2}{\omega_b^2}=\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{\omega_b^2}\sin^2\theta$, posons $\mu=\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{\omega_b^2}\cos^2\theta$, de sorte que $p_eq^2\sin^2\theta=\lambda k^2/k_D^2$ et $p_e^2q^2\cos^2\theta=\mu k^2/k_D^2$ (où k_D^{-1} est la longueur de Debye). Au premier ordre en λ et μ , et en négligeant les ions, l'expression (6.8.4) s'écrit

(6.8.8)
$$\frac{k_{\rm D}^2}{k^2} = \frac{\lambda}{q^2 - 1} + \frac{\mu}{q^2}$$

résultat identique à celui du calcul microscopique (Cf. Bernstein, 1958); l'accord est d'ailleurs obtenu aussi pour les termes en λ^2 et μ^2 , mais pas pour ceux en $\mu\lambda$. De (6.8.8), on tire la solution

(6.8.9)
$$q = \frac{\omega}{\omega_b} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{k^2 a^2} - \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 a^2} \right)^2 + \frac{4\omega^2}{k^2 a^2} \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$