Propagation des ondes dans les plasmas chauds homogènes. Théorie microscopique des oscillations longitudinales en l'absence de champ magnétique extérieur VII

Lorsqu'on veut tenir compte des effets de particules résonnantes, on ne peut plus se contenter d'un modèle fluide, d'où ces particules sont exclues. En particulier, pour les ondes de vitesse de phase voisine de la vitesse d'agitation thermique, on doit s'attendre, nous l'avons vu, à une description adiabatique incorrecte. Il est alors nécessaire de revenir soit au modèle multifaisceaux, soit au modèle microscopique, décrit par les fonctions de distribution f_s, obéissant à l'équation de Vlasov (1.7.3).

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus spécialement aux oscillations longitudinales d'un plasma. Ce problème sera envisagé suivant ces deux points de vue, et les différents résultats seront discutés.

7.1. Tenseur de conductivité d'un plasma isotrope. Cas de l'équilibre maxwellien

Linéarisons l'équation de Vlasov, autour d'un équilibre homogène, isotrope et neutre, et effectuons la transformation de Fourier sur $\mathbf{r}$ et t : cela revient à poser (en omettant l'indice s)

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) = f_0(w^2) + f_1(\mathbf{w})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \text{avec} \quad f_1 \ll f_0$$

(7.1.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 + \mathbf{E}_1\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

On obtient, au premier ordre par rapport à la perturbation[1]

$$-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w}) f_1 + \frac{q}{m}\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}} = 0 \tag{7.1.2}$$

d'où

$$f_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q}{im}(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w})^{-1}\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}}. \tag{7.1.3}$$

Le tenseur de conductivité σ_s associé à la densité de courant $\mathbf{J}_s$ transporté par

1. Le terme de force dû au champ magnétique de l'onde est $(\mathbf{w}\times\mathbf{B}_1)\cdot(\partial f_0/\partial \mathbf{w})$; il est nul si $f_0(w)$ est isotrope car alors $(\partial f_0/\partial \mathbf{w})$ est colinéaire à $\mathbf{w}$ (Cf. 7.1.7).

l'espèce s, est défini par

(7.1.4) $$\mathbf{J}_s = n_{0s} q_s \mathbf{v}_s = q_s \int f_{1s} \mathbf{w}_s \, d^3 w_s = \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{E}_1$$

d'où

(7.1.5) $$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q_s^2}{i m_s} \int \frac{\mathbf{w}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}} \frac{\partial f_{0s}(w^2)}{\partial \mathbf{w}} \, d^3 w.$$

Lorsque l'équilibre est caractérisé par une fonction isotrope dans l'espace des vitesses

(7.1.6) $$f_{0s} = n_{0s} \varphi_s(w^2), \qquad \text{où} \qquad \int \varphi_s(w^2) \, d^3 w = 1$$

on a

(7.1.7) $$\frac{\partial f_{0s}}{\partial \mathbf{w}_s} = 2 n_{0s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial (w_s^2)} \mathbf{w}_s$$

et (7.1.5) s'écrit

(7.1.8) $$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{k}, \omega) = -2 i \varepsilon_0 \omega_{ps}^2 \int \frac{\partial \varphi_s / \partial (w_s^2)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}_s} \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \, d^3 w_s.$$

Choisissons Oz le long de $\mathbf{k}$. Alors (7.1.8) s'écrit (en omettant de nouveau l'indice s)

(7.1.9) $$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -2 i \varepsilon_0 \omega_p^2 \int \frac{\partial \varphi / \partial (w^2)}{\omega - k w_s} w_\alpha w_\beta \, dw_1 dw_2 dw_3.$$

Or, $\varphi(w^2)$ étant une fonction paire, il en sera de même de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial (w^2)}$, et l'intégration sur les vitesses w_1 et w_2, perpendiculaires à $\mathbf{k}$, ne donnera un résultat non nul que pour les composantes diagonales (on retrouve ici, avec $\mathbf{k}$ sur Oz, les symétries de $\boldsymbol{\sigma}$ quand $\mathbf{B}_0 = 0$); par exemple, si l'équilibre est maxwellien

(7.1.10) $$\varphi(w^2) = (a\sqrt{\pi})^{-3} e^{-w^2/a^2} \quad ; \quad a^2 = 2\mathrm{KT}/m \quad ; \quad \frac{\partial \varphi(w^2)}{\partial (w^2)} = -a^{-2} \varphi(w^2)$$

on aura, compte tenu des relations

(7.1.11) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/a^2} du = a\sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/a^2} u du = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/a^2} u^2 du = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{\pi}$$

(7.1.12) $$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = i \varepsilon_0 \omega_p^2 \dfrac{1}{a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int \frac{e^{-v^2/a^2}}{\omega - kv} dv \\ \sigma_{33} = 2 i \varepsilon_0 \omega_p^2 \dfrac{1}{a^3 \sqrt{\pi}} \displaystyle\int \frac{v^2 e^{-v^2/a^2}}{\omega - kv} dv. \end{cases}$$

On obtiendra donc aussi un tenseur $\boldsymbol{\varkappa}$ diagonal, et, comme pour les plasmas froids, l'équation de dispersion (2.4.9) conduira à deux modes transversaux, polarisés suivant Ox et Oy, et à un mode longitudinal. Pour ce dernier mode, l'équation de dispersion $\varkappa_3 = 0$ s'écrit, en revenant à la forme générale (7.1.5)

$$\varkappa_{33} = 1 - \frac{\sigma_{33}}{i\omega\varepsilon_0} = 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m\omega}\int \frac{w_z}{\omega - kw_z}\frac{\partial f_0}{\partial w_z}\, dw_x dw_y dw_z = 0$$

soit en intégrant sur w_x et w_y

$$1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 mk}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega - kw_z}\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial w_z}\, dw_z = 0 \tag{7.1.13}$$

où $\bar{f}_0(w_z) = \int f_0(w^2)\, dw_x dw_y$. La forme (7.1.13) de l'équation de dispersion des ondes longitudinales électroniques a été obtenue pour la première fois par Vlasov (1938).

Dans (7.1.5, 8, 9 et 12) figurent des intégrales qui sont singulières pour les vitesses $\mathbf{w}_s = \omega/\mathbf{k}$: on voit apparaître ici le rôle particulier joué par les particules résonnantes dont les vitesses, dans la direction de $\mathbf{k}$, sont voisines de $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$; ces particules, rappelons-le, avaient disparu du modèle macroscopique lors des opérations de moyenne sur l'espace des vitesses. A cause de cette singularité, on ne sait pas quel sens donner à ces intégrales : leur évaluation nécessitera de préciser le problème traité.

Nous allons étudier successivement les « modes normaux » associés au modèle multifaisceaux, et l'évolution d'une perturbation initiale (problème de Landau). Puis nous indiquerons brièvement les résultats obtenus par Van Kampen (1955) et nous donnerons un aperçu du phénomène de piégeage, déjà mentionné au chapitre 6.

7.2. Étude des ondes longitudinales pour une distribution d'équilibre quelconque. Modèle multifaisceaux. Modes normaux d'oscillation

Dans le cas des ondes longitudinales, on obtient l'équation de dispersion directement à partir de la solution (7.1.3), en la portant dans l'équation de Poisson

$$i\varepsilon_0 k\mathrm{E} = \sum_s q_s \int f_{1s}(k,\omega,w)\, d^3w.$$

En appelant v la composante de $\mathbf{w}$, parallèle à $\mathbf{k}$, cette équation de dispersion se met sous la forme

$$1 + \sum_s \frac{q_s^2}{\varepsilon_0 m_s}\frac{1}{k}\int \frac{\partial f_{0s}}{\partial v}\frac{d^3w}{\omega - kv} = 0 \tag{7.2.1}$$

ou encore, en intégrant par parties ($f_{0s}(w)$ étant supposée s'annuler à l'infini)

$$1 - \sum_s \frac{q_s^2}{\varepsilon_0 m_s}\int \frac{f_{0s}\, d^3w}{(\omega - kv)^2} = 0. \tag{7.2.2}$$

L'équation (7.2.2) n'est fonction que de k et ω et elle apparaît donc bien comme l'équation de dispersion du mode longitudinal; mais, ainsi qu'il a été dit ci-dessus,

la singularité $v = \frac{\omega}{k}$ ne permet pas de donner un sens à cette équation. Néanmoins, s'il n'y a pas de particules résonnantes, l'intégrale dans (7.2.2) est définie et cette équation (7.2.3) est une véritable relation de dispersion.

Cette dernière situation est réalisée lorsqu'on considère un système constitué d'un nombre fini de faisceaux de particules, parallèles entre eux et de vitesses respectives $\mathbf{V}_{sj}$ bien déterminées : on a alors

$$f_{0s}(\mathbf{w}) = \sum_j n_{sj}\delta(\mathbf{w} - \mathbf{V}_{sj}) \tag{7.2.3}$$

où δ est la fonction de Dirac.

Pour des faisceaux tous dirigés dans la direction de $\mathbf{k}$, (7.2.3) portée dans (7.2.2.) donne l'équation de dispersion (en se limitant aux électrons)

$$\mathrm{R}(k, \omega) = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega - k\mathrm{V}_j)^2} = 0 \tag{7.2.4}$$

où $\omega_{pj} = q_e^2 n_{ej}/\varepsilon_0 m_e$ est la fréquence plasma associée au faisceau de densité électronique n_{ej}.

Pour 5 faisceaux, la fonction $\mathrm{R}(k, \omega)$ est représentée, à k réel fixé, sur la figure (7.1), en fonction de ω. Les solutions $\mathrm{R}(k, \omega) = 0$ donnent, entre deux valeurs $k\mathrm{V}_j$ consécutives, deux solutions pour ω, certains couples de solutions pouvant être des couples de complexes conjugués. En plus, il existe une solution inférieure au plus petit $k\mathrm{V}_j$, une autre supérieure au plus grand.

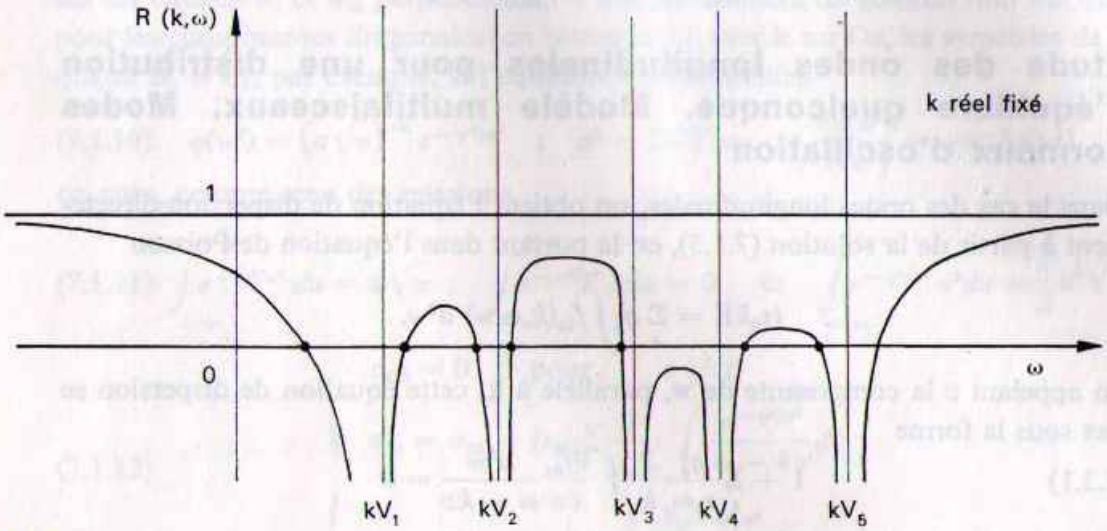

FIGURE 7.1.
Modèle multifaisceau : solutions de l'équation de dispersion (7.2.4)

Un ensemble infini de faisceaux constitue un modèle possible pour un plasma chaud, chaque faisceau étant, à la limite, constitué d'une seule particule. Il résulte de ce qui précède que, pour chaque valeur de k donnée, il pourra exister un nombre

infini de modes $\omega(k)$ dont les vitesses de phase, dans l'espace des vitesses, seront contenues dans le même domaine que celui des vitesses des faisceaux, c'est-à-dire des particules; or, en général, les distributions $f_0(\mathbf{w})$ couvrent tout l'espace des vitesses : n'importe quelle fréquence ω est possible pour chaque k, il n'y a donc pas d'équation de dispersion.

Ces modes associés aux faisceaux (deux modes par faisceau, en général) ont été étudiés par Bohm et Gross (1949), Twiss (1952) et plus récemment par Dawson (1960). Ce dernier a montré, en particulier, qu'à chaque faisceau est associé un mode amorti et un mode instable (qu'on rencontre déjà dans un système à deux faisceaux); cependant, lorsque le nombre des faisceaux augmente indéfiniment, l'instabilité disparaît et le plasma devient stable. En fait, ces « modes de faisceaux », qu'on appelle *modes normaux*, sont directement liés aux mouvements libres des particules en régime de faisceau, et sont indépendants des mouvements collectifs des particules, sous l'action du champ **E**, puisqu'on les trouverait aussi dans un gaz neutre [1] : en choisissant un certain nombre de faisceaux, n'importe quel mode $(\mathbf{k}, \omega)$ pourrait être produit. Néanmoins, ce choix de conditions initiales correspond, dans le cadre de la théorie linéaire, à une « préparation » du plasma, irréalisable en pratique : on ne peut pas, en effet, effectuer une sélection de particules de même vitesse, et leur faire subir, à elles seulement, un déplacement qui représentera la perturbation.

Au contraire, pratiquement, on perturbera toutes les particules, quelles que soient leurs vitesses, dans une certaine région de l'espace, pendant un certain temps. Cette perturbation excitera tous les modes normaux à l'intérieur de la bande $(\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega)$, déterminée par la perturbation : on aura ainsi une réponse cohérente, sous forme d'un paquet d'ondes. Après l'excitation, les différents modes normaux (non amortis) se déphaseront les uns par rapport aux autres et interfèreront de manière destructive : l'amplitude du paquet d'ondes diminuera dans le temps. Ce processus d'amortissement sans collision est appelé *amortissement Landau*, ou *amortissement par mélange de phase*.

En utilisant le même modèle, l'étude de l'interaction de l'onde avec les particules résonnantes (Dawson, 1961) conduit, dans le cas d'une distribution d'équilibre « normale » $\left(\frac{\partial f_0}{\partial v} < 0\right)$, à un transfert d'énergie des ondes vers ces particules résonnantes. Ce transfert d'énergie se traduit par un amortissement de l'onde, qui est justement l'amortissement Landau.

1. En effet, dans un gaz neutre, considéré comme constitué d'un ensemble infini de faisceaux de particules libres, de tels modes existeraient aussi : une perturbation de vecteur d'onde k, sur le faisceau de vitesse V, correspondrait au mode $(k, \omega = k\mathrm{V})$, de vitesse de phase V (Bohm et Gross, 1949).

7.3. Évolution d'une perturbation initiale : Problème de Landau

Pour donner un sens à l'intégrale (7.2.2), on étudie le problème suivant (résolu pour la première fois par Landau en 1946) : on étudie l'évolution d'une perturbation de la fonction de distribution des vitesses au cours du temps, à partir d'une condition initiale f_1 (r, w, $t = 0$) donnée. Naturellement, un tel problème exige d'utiliser, à la place de la transformation de Fourier dans le temps et dans l'espace, qui conduit à (7.1.2), une transformation de Fourier dans l'espace et de Laplace dans le temps, définie par [1]

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} f(\mathbf{k}, t)\, dt. \tag{7.3.1}$$

La variable ω qui apparaît dans cette dernière joue le rôle de la fréquence dans la transformée de Fourier, mais elle peut être complexe; cependant, l'intégrale de Laplace (7.3.1) ne converge que lorsque $\Im m\omega$ est supérieure à un certain nombre réel $\nu \lesseqgtr 0$, qui dépend de la forme de $f(t)$; dans le cas contraire, on donne un sens à cette intégrale, pour tout ω complexe, en effectuant son prolongement analytique dans la région où $\Im m\omega < \nu$.

On montre alors (Cf. Appendice 6) que l'étude du comportement temporel de $f(t)$ se ramène à l'étude de la nature et de la localisation des pôles de la fonction $f(\omega)$ dans le plan des ω complexes.

Dans cette transformation [2], l'équation (7.1.2) est remplacée par

$$-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w}) f_1(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{w}) + \frac{q}{m}\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}} = g_1(\mathbf{k}, \mathbf{w}) \tag{7.3.2}$$

où $g_1(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ est la transformée de Fourier spatiale de la perturbation initiale $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t = 0)$. Remarquons qu'on ne peut plus, à cause de g_1, définir une conductivité comme en (7.1.4).

Dans le cas des oscillations longitudinales, avec $\mathbf{k}$ parallèle à Oz, l'équation (7.3.2) s'écrit (pour l'espèce s de particules)

$$-i(\omega - kw_3) f_{1s} + \frac{q_s}{m_s}\mathrm{E}_1\frac{\partial f_{0s}}{\partial w_3} = g_{1s} \tag{7.3.3}$$

et doit être combinée avec la transformée (7.3.4) de l'équation de Poisson

$$ik\mathrm{E}_1(k, \omega) = \sum_s \frac{q_s}{\varepsilon_0}\int f_{1s}(\mathbf{k}, \mathbf{w}, \omega)\, d^3w. \tag{7.3.4}$$

1. Cette définition de la transformée de Laplace est choisie pour des raisons de commodité. On retrouve la définition habituelle en posant $i\omega = -p$, la condition de convergence devenant $\Re e p > \nu$.
2. En définissant la transformée de Fourier-Laplace par

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r \int_0^\infty dt\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} f(\mathbf{r}, t)$$

où $\mathbf{k}$ est réel.

Posons comme en (7.1.6) $f_{0s} = n_{0s}\varphi_s(w^2)$. L'élimination des f_{1s} entre (7.3.3) et (7.3.4) donne la composante de Fourier-Laplace (k, ω) du champ électrique, qui est la quantité physique dont le comportement temporel est intéressant

$$\text{(7.3.5)} \qquad \mathrm{E}_1(k, \omega) = \frac{\sum_s \frac{q_s}{\varepsilon_0} \int \frac{g_{1s}(\mathbf{w})}{\omega - kw_3} d^3w}{k + \sum_s \omega_{ps}^2 \int \frac{\partial\varphi_1/\partial w_3}{\omega - kw_3} d^3w}.$$

Pour connaître ce comportement temporel, il faut maintenant étudier, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, les pôles de $\mathrm{E}(k, \omega)$ dans le plan des ω complexes. Remarquons que les intégrations sur les vitesses perpendiculaires à $\mathbf{k}$ ne changent rien au comportement analytique des termes de (7.3.5).

Le numérateur et le dénominateur de (7.3.5) contiennent des intégrales du type

$$\text{(7.3.6)} \qquad \Phi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(v)}{v - u} dv \qquad \text{où} \qquad u = \frac{\omega}{k}, \quad v = w_3.$$

On reconnaît l'intégrale de Cauchy associée à la fonction $h(v)$ de la variable réelle v, définie tant que $\mathfrak{I}mu \neq 0$, soit $\mathfrak{I}m\omega \neq 0$. Mais la discontinuité sur l'axe réel entraîne deux déterminations Φ^+ et Φ^-, respectivement au-dessus et au-dessous de l'axe réel des v (Cf. Appendice 7). Or, par définition de la transformée de Laplace, $\mathfrak{I}m\omega > v$, on doit choisir la détermination Φ^+ pour (7.3.6), correspondant à $\mathfrak{I}m\omega > 0$ (demi-plan supérieur) et son prolongement analytique (différent de Φ^-) dans le demi-plan inférieur, pour $\mathfrak{I}m\omega < 0$. Ce prolongement s'obtient en déformant l'axe réel des v, en un contour qui passe toujours en dessous du pôle $u = \frac{\omega}{k}$: on obtient donc

$$\text{(7.3.7)} \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad \mathfrak{I}m\omega > 0, & \Phi^+ = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(v)}{v - u} dv \\ \text{(b)} \quad \mathfrak{I}m\omega = 0, & \Phi^+ = \mathfrak{P}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(v)}{v - u} dv + \pi i\, h(u) \\ \text{(c)} \quad \mathfrak{I}m\omega < 0, & \Phi^+ = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(v)}{v - u} dv + 2\pi i\, h(u) \\ & \quad = \Phi^- + 2\pi i\, h(u) \end{cases}$$

où $\mathfrak{P}$ représente la partie principale (au sens de Cauchy) de l'intégrale : par définition

$$\text{(7.3.8)} \qquad \mathfrak{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(v)\, dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \mathrm{F}(v)\, dv + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{F}(v)\, dv \right].$$

Alors, la fonction Φ^+, régulière dans tout le demi-plan supérieur, a, dans le demi-plan inférieur (où Φ^- est régulière), les mêmes pôles que $h(u)$. Donc si $g(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ et $\partial\varphi/\partial w_3$ sont des fonctions entières de w, $h(v)$ le sera aussi, et en particulier $h(u)$: il en résulte que, d'une part, le numérateur et, d'autre part, le dénominateur de (7.3.5) n'ont pas de pôles. Les seuls pôles de $\mathrm{E}(k, \omega)$ sont alors les zéros du dénominateur, c'est-à-dire ceux définis par

$$1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\overline{\varphi}_s/\partial w_3}{w_3 - \dfrac{\omega}{k}}\, dw_3 = 0 \tag{7.3.9}$$

où, pour toute fonction $\varphi(w^2)$, on a défini

$$\overline{\varphi}(w_3^2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(w^2)\, dw_1 dw_2 \tag{7.3.10}$$

en sommant sur les vitesses w_1 et w_2 perpendiculaires à $\mathbf{k}$.

Lorsque $g(\mathbf{k}, \omega)$ présente des pôles, leurs contributions conduisent à des modes d'oscillations qui ne sont autre chose que les modes de particules libres, dépendant essentiellement des conditions initiales : ce sont les modes normaux, rencontrés lors de l'étude du modèle multifaisceau. Pour certaines « préparations » initiales, ces pôles sont situés sur l'axe réel : on obtient ainsi des oscillations non amorties, qui correspondent, nous allons le voir plus loin, aux modes associés aux particules résonnantes, c'est-à-dire aux modes associés aux *particules piégées*.

L'équation (7.3.9) est valable pour $\mathfrak{Im}\,\omega > 0$, et doit être remplacée, pour $\mathfrak{Im}\,\omega \leqslant 0$, par les expressions obtenues en effectuant le prolongement analytique de l'intégrale, conformément à (7.3.7). Quelle que soit la valeur de $\mathfrak{Im}\,\omega$, la relation (7.3.9) définit des fréquences $\omega = \omega(k)$, indépendantes des conditions initiales, qui représentent donc les modes propres longitudinaux : (7.3.9) est donc *l'équation de dispersion des ondes longitudinales*. Ces ondes propres intéressent, à travers le champ E satisfaisant à l'équation de Poisson, un grand nombre de particules et sont donc des *modes collectifs*.

L'équation (7.3.9) correspond à l'équation générale $\varkappa_{//} = 0$; on en déduit la *constante diélectrique longitudinale* du milieu [1]

$$\varkappa_{//}(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\overline{\varphi}_s(v)/\partial v}{v - \omega/k}\, dv. \tag{7.3.11}$$

1. L'expression (7.3.11) résulte en fait de ce que (7.3.9) définit des modes propres, indépendants des conditions initiales : l'équation (7.3.5), de la forme $\mathcal{A}\mathrm{E} = \mathcal{B}$, correspond à $i\mathbf{k}.\mathbf{D} = \rho_{ext}$, le terme de conditions initiales étant équivalent à un terme source, densité de charge extérieure (Cf. Shafranov, 1963). L'équation (7.3.5), sans excitation extérieure, s'écrit donc $ik\varepsilon_0\varkappa\mathrm{E} = 0$, d'où (7.3.11).

Remarquons que pour k réel, il ne peut exister de solution à ω réelle (Cf. la détermination (7.3.7)) que si

$$\sum_s \omega_{ps}^2 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial v}\right)_{v=\frac{\omega}{k}} = 0 \tag{7.3.12}$$

ce qui implique au moins deux espèces de particules, et des distributions dont les « températures » sont suffisamment écartées : nous verrons que pour $T_e \gg T_i$, il existe une solution très faiblement amortie, l'*onde acoustique ionique*.

7.4. Modes de Van Kampen. Modes de particules piégées. Domaine de validité de la théorie de Landau

Van Kampen (1955) a utilisé la fonction δ de Dirac pour résoudre l'équation (7.1.2); la division par le terme $(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w})$ exige en effet d'écrire, au lieu de (7.1.3), la solution sous la forme suivante

$$f_1 = \frac{q}{im}\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}}\left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w}}\right) + C\,\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w})\right] \tag{7.4.1}$$

où C est une constante qui sera déterminée en portant (7.4.1) dans l'équation de Poisson.

La présence de ce terme en $\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w})$ ne correspond pas à un raffinement mathématique, mais à l'existence d'un mode de particules libres, se déplaçant avec la vitesse de phase de l'onde : ce terme traduit donc la présence d'un faisceau de particules « piégées » dans l'onde, dont les vitesses sont contenues dans une bande très étroite autour de v_φ (Bohm et Gross, 1949).

A partir de (7.4.1), Van Kampen a montré qu'il n'existait plus d'équation de dispersion, à cause du terme en $\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{w})$ et il a trouvé une infinité de modes possibles, non amortis. Ces modes de Van Kampen constituent une base complète sur laquelle on peut développer toute perturbation de faible amplitude. L'évolution d'une perturbation initiale, sous forme d'un paquet d'ondes de Van Kampen, se fait en accord avec l'amortissement Landau, qui apparaît ici encore comme résultat d'un mélange de phase entre les modes constituant le paquet d'ondes (Cf. § 7.2).

Enfin, Jackson (1960) a montré qu'un mode de Van Kampen, pris isolément comme condition initiale du problème de Landau, conduisait, à travers une singularité du numérateur de (7.3.5) liée à la présence de la fonction δ, à une oscillation non amortie, du type mode de faisceau.

Jusqu'à présent, l'existence physique des modes de particules libres non amortis, qui s'identifient aux modes de Van Kampen, a été considérée comme très improbable, en raison de la difficulté d'exciter isolément un tel mode. Pourtant, une telle excitation peut avoir lieu lorsqu'une onde de grande amplitude traverse le plasma; les interactions entre le champ et les particules résonnantes sont très

importantes, et on sort très rapidement de la description linéaire : la particule, initialement en phase avec le champ, est accélérée; puis, devançant l'onde, elle se trouve, à un moment donné, en opposition de phase avec lui : elle est alors décélérée, et plus tard elle se trouve à nouveau en phase avec le champ. Dans le référentiel lié à l'onde, ce mouvement correspond à une oscillation dans les puits de potentiel de l'onde : la particule y est *piégée*.

Pour ces particules piégées, le phénomène de mélange de phase n'existe plus et les modes associés aux particules piégées ne sont plus amortis, conformément aux différents résultats précédents. Ainsi, à côté des modes collectifs présentant l'amortissement de Landau, il peut exister, dans le plasma, des modes non linéaires de grande amplitude, non amortis (Bohm et Gross, 1949; Bernstein et al, 1957; Denisse, 1961 ; McClean, 1962), qui d'ailleurs correspondent aux oscillations d'un plasma excité par un faisceau modulé de charges.

A la lumière de ce qui précède, on peut donc conclure avec J. Dawson (1961) que le traitement de Landau sera valable tant que le régime non linéaire avec les particules piégées n'aura pu prendre place : cela aura lieu pendant un temps t tel que

(7.4.2) $$t < \tau_p$$

où

(7.4.3) $$\tau_p = \left(\frac{m}{|q_e| k\mathrm{E}}\right)^{1/2}$$

est le temps de piégeage, défini par le temps au bout duquel les particules se trouvent en opposition de phase avec le champ; on peut grossièrement le considérer comme celui où l'on pénètre dans le domaine non linéaire : dans le référentiel de l'onde, ce temps s'identifie avec la période d'oscillation $\sim \omega^{-1}$ des électrons qui oscillent dans le puits avec une amplitude maximum de l'ordre de $\lambda \sim k^{-1}$.

Sous la condition (7.4.2), deux situations physiques très différentes existent, pour lesquelles la description de Landau est valable. Appelons τ_L, le temps caractéristique d'amortissement Landau (qui sera calculé plus loin).

a) Si

(7.4.4) $$\tau_L \lesssim \tau_p$$

l'onde disparaît par amortissement Landau avant que le régime non linéaire ait pu s'installer.

b) S'il y a des collisions et si

(7.4.5) $$\tau_c \lesssim \tau_p$$

($\nu_c = (\tau_c)^{-1}$ étant la fréquence de collision), les collisions empêchent le piégeage effectif de beaucoup de particules, chacune d'elles ne pouvant pas être continûment accélérée par le champ : le mode de particules piégées ne peut pas s'établir et

l'onde s'amortit par effet Landau et par effet des collisions : l'amortissement Landau est alors (Platzman et Buchsbaum, 1961)

$$\gamma_L' = \gamma_L \frac{1}{1+(\tau_c/\tau_p)^2}, \qquad \text{où} \qquad \gamma_L \simeq \tau_L^{-1}.$$

Rappelons cependant que, s'il y a beaucoup de collisions ($\omega \lesssim \nu_c$), les modes collectifs disparaissent au profit d'ondes de type acoustique dans les gaz neutres.

En conclusion, l'amortissement de Landau sera présent dès que seront satisfaites les conditions (7.4.4.) ou (7.4.5) qu'on peut aussi écrire respectivement

(7.4.6) $$\gamma_L \tau_p \gtrsim 1, \qquad \text{ou} \qquad \nu_c \tau_p \gtrsim 1.$$

Ces conditions, associées à (7.4.3), donnent finalement une limite supérieure de l'amplitude du champ électrique, au-dessous de laquelle le calcul de Landau est correct.

7.5. Résolution de l'équation de dispersion des ondes longitudinales. Calcul de l'amortissement de Landau

Plasma à un seul composant : ondes électroniques « rapides » (ions au repos) 7.5.1

Pour une seule espèce de particules, on ne peut pas satisfaire à (7.3.12) et on aura des solutions soit amplifiées, soit amorties; néanmoins, pour les oscillations électroniques de très haute fréquence [1], il y aura très peu de particules résonnantes, c'est-à-dire que la dérivée $(\partial\bar{\varphi}/\partial w_3)_{w_3=\omega/k}$ sera très faible : on pourra donc négliger la contribution du pôle (pour $\mathfrak{J}m\omega < 0$), et on aura, en développant le dénominateur de l'intégrant dans (7.3.9)

(7.5.1) $$\left(\frac{\omega}{k}-v\right)^{-1} = \frac{k}{\omega}\left(1+\frac{kv}{\omega}+\left(\frac{kv}{\omega}\right)^2+\cdots\right)$$

donnant, après intégration par parties, le développement [2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial v}\left(v-\frac{\omega}{k}\right)^{-1} dv = \frac{k}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial v}\left[1+\frac{kv}{\omega}+\left(\frac{kv}{\omega}\right)^2+\cdots\right] dv$$

(7.5.2) $$= \frac{k^2}{\omega^2}\left[1+3\frac{k^2}{\omega^2}\int \bar{\varphi}\, v^2 dv\right]$$

1. Les limites très hautes fréquences, grandes longueurs d'onde et ondes rapides $\omega \gg ka$, se confondent ici.
2. Un tel développement correspond au développement en série de moments, c'est-à-dire, en puissances de $\tau \simeq \left(\frac{ka}{\omega}\right)^2$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}\, v^{2m} dv \sim a^{2m}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}\, v^{2m+1}\, dv = 0$.

compte tenu de la condition de normalisation (7.3.10) et de la nullité des intégrales sur v^{2n+1}, par suite de la parité de $\overline{\varphi}$. En définissant [1] la vitesse d'agitation thermique par $V_e^2 = \frac{KT_e}{m_e}$, (7.3.9) devient, en prenant $\omega = \omega_p$ dans le terme correctif,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2V_e^2 \tag{7.5.3}$$

on retrouve la relation de Bohm et Gross, déjà obtenue dans la limite ondes rapides de la théorie adiabatique, avec $\gamma_e = 3$.

Calculons l'amortissement : on sait déjà qu'il est très faible. On va donc chercher une solution de $\varkappa_{//}(k, \alpha)=0$ ($\varkappa_{//}$ étant explicité en (7.3.11)), pour une fréquence quasi réelle : $\alpha = \omega + i\gamma$ avec $\gamma \ll \omega$. Pour ω réelle, on a d'après (7.3.11) et (7.3.7b)

$$\varkappa_{//}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{v - \frac{\omega}{k}}\, dv + \pi i\, \overline{\varphi}'\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \quad \text{où } \overline{\varphi}'(v) = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v}. \tag{7.5.4}$$

En développant $\varkappa_{//}(k, \alpha)$, au premier ordre en γ, au voisinage de ω réelle on a

$$\varkappa_{//}(k, \alpha) = \varkappa_{//}(k, \omega) + i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \varkappa_{//}(k, \omega) \tag{7.5.5}$$

avec, d'après (7.5.4),

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \varkappa_{//}(k, \omega) = -\frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\frac{1}{k}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2}\, dv + \frac{\pi i}{k}\, \overline{\varphi}''\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]. \tag{7.5.6}$$

L'équation de dispersion $\varkappa_{//}(k, \alpha) = 0$ devient, en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\mathcal{R}e\, \varkappa_{//}(k, \alpha) = 0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{v - \frac{\omega}{k}}\, dv - \frac{\pi}{k}\gamma\, \overline{\varphi}''\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \tag{7.5.7}$$

$$\mathcal{I}m\, \varkappa_{//}(k, \alpha) = 0 = -\frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\pi \overline{\varphi}'\left(\frac{\omega}{k}\right) + \frac{\gamma}{k}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2}\, dv\right]. \tag{7.5.8}$$

L'équation (7.5.7), où le terme $\gamma\, \overline{\varphi}''\left(\frac{\omega}{k}\right)$ est négligeable dans la limite $\omega \gg ka$,

1. La température, pour un degré de liberté, étant définie par

$$\frac{1}{2}\, KT = \int \overline{\varphi}\, \frac{1}{2}\, mv^2 dv.$$

donne évidemment, après développement du dénominateur en puissances de $\frac{kv}{\omega}$, la solution (7.5.3) pour $\omega = \mathcal{R}e\alpha$ [1].

Pour calculer le coefficient de $\gamma = \mathcal{I}m\alpha$ dans (7.5.8) on utilise (7.5.7), à l'ordre zéro en γ, en la multipliant par k^2 et en dérivant par rapport à k : il vient

$$2k + \omega_p^2 \frac{\omega}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)} dv = 0. \tag{7.5.9}$$

Puis, en portant (7.5.9) dans (7.5.8), et en tenant compte de $\omega \simeq \omega_p$, on obtient

$$\gamma_L = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \frac{\omega}{k^2} \overline{\varphi}'\left(\frac{\omega}{k}\right) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^3}{k^2} \overline{\varphi}'\left(\frac{\omega_p}{k}\right). \tag{7.5.10}$$

Ces ondes longitudinales sont donc des ondes amorties ($\gamma_L < 0$) chaque fois que la distribution de vitesses a, dans le voisinage des vitesses de particules résonnantes, une pente négative (fig. 7.2). Cet amortissement est l'amortissement de Landau des ondes longitudinales électroniques.

Une très belle expérience (Malmberg et al, 1965) a permis de mesurer directement cet amortissement, en dépit de sa valeur extrêmement faible. On y montre en particulier que ce sont bien les particules résonnantes qui sont responsables de l'amortissement. D'autres chercheurs (Dolgopolov et al, 1963) ont réussi à le mesurer, en utilisant une onde de plus petite vitesse de phase (celle du mode sifflement), conduisant à des amortissements plus importants.

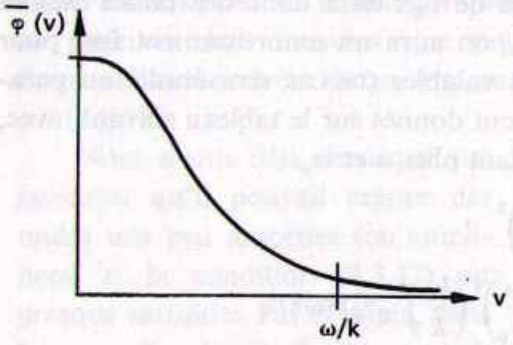

FIGURE 7.2.
Plasma stable

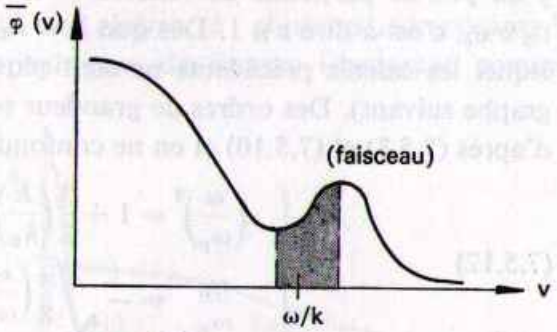

FIGURE 7.3.
Plasma instable

Dans le cas contraire, c'est-à-dire chaque fois qu'au voisinage de ω/k, la distribution présentera une pente positive, on aura $\gamma_L > 0$, c'est-à-dire une instabilité : c'est ce qui arrive dans un système faisceau-plasma (fig. 7.3). Bien entendu,

1. Ce calcul est plus correct qu'en (7.5.1), car l'intégrale dans (7.5.7.) n'est plus singulière, étant définie comme partie principale.

sous l'effet de cette instabilité, les phénomènes non linéaires prennent naissance assez rapidement, et la description linéaire tombe en défaut.

Une image physique, bien que peu conforme à la réalité, illustre ces phénomènes : les particules résonnantes, de vitesses comprises entre $\frac{\omega}{k} - \Delta v$ et $\frac{\omega}{k} + \Delta v$, interagissent avec l'onde. Celles qui sont moins rapides que l'onde sont entraînées par elle et lui empruntent de l'énergie; celles qui sont plus rapides sont freinées et lui en cèdent. Dans le plasma stable, où $\overline{\varphi}(v)$ est décrit sur la figure 7.2, il y a plus de particules de la première catégorie que de la seconde : le bilan total est une absorption d'énergie par les particules, au détriment de l'onde qui s'amortit donc. Dans le système plasma-faisceau (fig. 7.3), c'est le contraire qui se produit : l'onde absorbe une partie de l'énergie des particules, et devient instable.

Dans la pratique, cet amortissement Landau est très faible : ainsi pour un équilibre maxwellien, on a, d'après (7.1.10)

$$\overline{\varphi}(v) = \int \varphi(w^2)\, dw_1 dw_2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}, \quad a^2 = \frac{2KT_e}{m_e} \tag{7.5.11}$$

et (7.5.10), pour $\omega \simeq \omega_p$, se met sous la forme

$$\frac{\gamma_L}{\omega_p} = -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} z^3 e^{-z^2/2}$$

avec $z = \frac{\omega_p}{k a_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_D}{k}$, où $k_D = \sqrt{2}\, \omega_p / a_e = \left(\frac{n_{0e} q_e^2}{\varepsilon_0 KT_e}\right)^{1/2}$ est l'inverse de la longueur de Debye des électrons. Nous avons vu que l'hypothèse $\gamma_L \ll \omega \simeq \omega_p$ exige qu'il y ait peu de particules de vitesses voisines de v_φ : on a donc des ondes rapides $v_\varphi \gg a_e$, c'est-à-dire $z \gg 1$. Dès que $k \sim k_D$, on aura un amortissement fort pour lequel les calculs précédents ne sont plus valables (ce cas sera étudié au paragraphe suivant). Des ordres de grandeur sont donnés sur le tableau suivant, avec, d'après (7.5.3) et (7.5.10) et en ne confondant plus ω et ω_p

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 &= 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{k_D}\right)^2 \\ \frac{\gamma_L}{\omega_p} &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \left(\frac{k_D}{k}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}(k_D/k)^2}. \end{aligned} \right. \tag{7.5.12}$$

k/k_D	0,01	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5
ω/ω_p	1	1,007	1,017	1,03	1,07	1,17
γ_L/ω_p	$\sim 10^{-2000}$	10^{-19}	5.10^{-8}	3.10^{-4}	10^{-1}	0,93

Pour $k \gtrsim \frac{k_D}{2}$, on est donc sorti du domaine de validité de (7.5.12). Le tableau ci-dessus montre qu'en pratique, pour les ondes rapides, dès que v_φ est supérieure à quelques fois la vitesse thermique a_e, cet amortissement peut être négligé.

VITESSE DE GROUPE

On a $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = |\mathbf{v}_g| \frac{\mathbf{k}}{k}$, dans la direction de $\mathbf{k}$, avec d'après (7.5.3)

$$\omega \frac{\partial \omega}{\partial k} = 3V_e^2 k$$

c'est-à-dire

$$v_g = \frac{3V_e^2}{v_\varphi} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) v_\varphi. \tag{7.5.13}$$

En conclusion, la théorie microscopique conduit, dans la limite des ondes rapides, à des ondes longitudinales très faiblement amorties, pour lesquelles la relation de Bohm et Gross, déjà obtenue par la théorie adiabatique, est donc satisfaisante.

Nous allons maintenant étudier le cas des ondes « très lentes ».

Plasma à deux composants : Ondes pseudosonores et ondes plasma ioniques 7.5.2

7.5.2.1. ONDE PSEUDOSONORE

Pour un plasma d'électrons, la seule solution physiquement intéressante (faiblement amortie) est la solution rapide (7.5.3). Des solutions ondes très lentes ne pourront être trouvées que pour un plasma à plusieurs composants [1]. Pour ces ondes très lentes, on ne peut plus développer l'intégrant comme en (7.5.1).

Nous avons déjà remarqué, cependant, qu'il pouvait exister des ondes très peu amorties (ou amplifiées) si la condition (7.3.12) est presque satisfaite. Par exemple, dans le cas de distributions maxwelliennes, on a un maximum de $|\overline{\varphi}'|$ pour le point d'inflexion de $\overline{\varphi}$ (fig. 7.4). On pourra donc avoir, entre les deux maxima de $|\overline{\varphi}'|$ et

1. Cf. éq. (7.3.12).

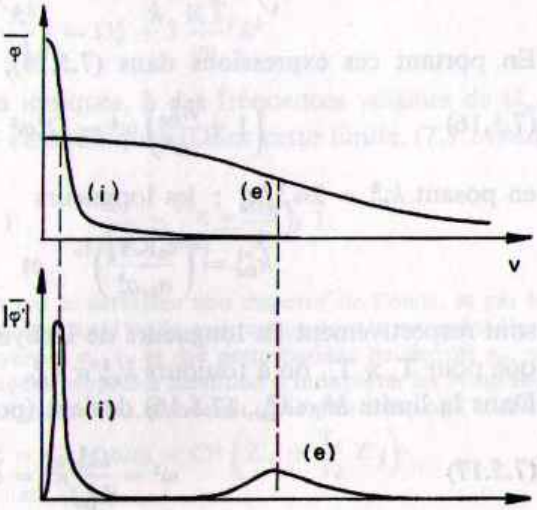

FIGURE 7.4.
Distributions $\overline{\varphi}$ et $\overline{\varphi}'$ pour $T_e \gg T_i$

$|\overline{\varphi}'|$, une région où $|\overline{\varphi}'| \simeq 0$ si, des deux distributions $\overline{\varphi}_e$ et $\overline{\varphi}_i$, l'une est très pointue et l'autre est très plate, c'est-à-dire si les deux températures T_e et T_i sont très différentes.

Examinons le cas le plus fréquent où $T_e \gg T_i$, et cherchons s'il peut exister une onde telle que

$$a_i \ll \frac{\omega}{k} \ll a_e \quad , \qquad a_s = 2KT_s/m_s. \tag{7.5.14}$$

Dans (7.3.9), qui s'écrit

$$\frac{\omega_p^2}{k^2}\int \frac{\partial\overline{\varphi}_e/\partial v}{v-\dfrac{\omega}{k}}\,dv + \frac{\Omega_p^2}{k^2}\int \frac{\partial\overline{\varphi}_i/\partial v}{v-\dfrac{\omega}{k}}\,dv = 1 \tag{7.5.15}$$

on peut alors évaluer les intégrales en négligeant les contributions des pôles : en vertu de (7.5.14), il n'existe en effet que très peu de particules résonnantes. Relativement aux ions, l'onde est une onde rapide, et on peut développer l'intégrale « ionique » comme en (7.5.2)

$$\int \frac{\partial\overline{\varphi}_i/\partial v}{v-\dfrac{\omega}{k}}\,dv \simeq \frac{k^2}{\omega^2}\left(1+3\,\frac{k^2}{\omega^2}\,\frac{KT_i}{m_i}\right).$$

Pour calculer l'intégrale « électronique », on y néglige le terme ω/k : pour une distribution maxwellienne en e^{-a^2/v^2}, on a

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_e}{\partial v} = -2\,\frac{v}{a_e^2}\,\overline{\varphi}_e$$

d'où

$$\int \frac{\partial\overline{\varphi}_e/\partial v}{v-\dfrac{\omega}{k}}\,dv \simeq -\frac{2}{a_e^2}\int \overline{\varphi}_e\,dv = -\frac{2}{a_e^2}.$$

En portant ces expressions dans (7.5.15), on obtient l'équation de dispersion

$$\left(1+\frac{k_{De}^2}{k^2}\right)\omega^4 - \Omega_p^2\omega^2 - 3\,\frac{k^2}{k_{Di}^2}\,\Omega_p^4 = 0 \tag{7.5.16}$$

en posant $k_{Ds}^2 = 2\omega_{ps}^2/a_s^2$; les longueurs

$$k_{De}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon_0 KT_e}{n_{0e}q_e^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad k_{Di}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon_0 KT_i}{n_{0i}q_i^2}\right)^{1/2}$$

sont respectivement les longueurs de Debye électronique et ionique. Remarquons que pour $T_e \gg T_i$, on a toujours $k_{De}^2 \ll k_{Di}^2$.

Dans la limite $k^2 \ll k_{De}^2$, (7.5.16) devient (pour un plasma α fois ionisé)

$$\omega^2 = \frac{\Omega_p^2}{k_{De}^2}\,k^2 = \alpha\,\frac{KT_e}{m_i}\,k^2. \tag{7.5.17}$$

L'équation (7.5.17) est celle d'une onde très lente de vitesse de phase V_{PS} telle que

$$V_{PS}^2 = \alpha \frac{KT_e}{m_i} \tag{7.5.18}$$

donc non dispersive. Cette onde est appelée *onde pseudosonore*[1] ou *onde acoustique ionique*.

Pour un plasma protons-électrons, on a, pour $KT_e = 1eV$ $(T_e \# 11.600°K)$

$$V_{PS} \# 10^4\, m/sec \sim 3.10^{-5} c \tag{7.5.19}$$

et, d'après (7.5.18)

$$V_{PS} = \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}\, V_i = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\, V_e$$

qui montre qu'en général V_{PS} est plus voisin de V_i que de V_e.

Remarquons que la condition posée au départ, $a_i \ll a_e$, qui exige donc $T_i \ll (m_i/m_e)\, T_e$, est moins restrictive que celles exigées par les conditions (7.5.14) : pour la solution (7.5.17), on a en effet

$$(\omega/ka_e)^2 = KT_e/m_i a_e^2 = m_e/2m_i \ll 1$$

$$(\omega/ka_i)^2 = KT_e/m_i a_i^2 = T_e/2T_i$$

la deuxième condition (7.5.14) n'est donc bien satisfaite que pour $T_e \gg T_i$.

7.5.2.2. ONDE PLASMA IONIQUE

Dans la limite $k^2 \gg k_{De}^2$, (7.5.16) donne

$$\omega^4 - \Omega_p^2 \omega^2 - 3 \frac{k^2}{k_{Di}^2} \Omega_p^4 = 0.$$

Si $k^2 \ll k_{Di}^2$, la seule racine positive est

$$\omega^2 = \Omega_p^2 \left(1 + 3 \frac{k^2}{k_{Di}^2}\right) = \Omega_p^2 + 3 \frac{KT_i}{m_i} k^2. \tag{7.5.21}$$

Elle définit des oscillations de plasma ioniques, à des fréquences voisines de Ω_p, analogues aux oscillations de plasma électroniques. Dans cette limite, (7.5.14) est bien satisfaite

$$\frac{\omega}{ka_e} \simeq \frac{\Omega_p}{ka_e} \simeq \frac{k_{De}}{k} \frac{\Omega_p}{\omega_p} \ll 1 \quad ; \qquad \frac{\omega}{ka_i} \simeq \frac{\Omega_p}{ka_i} \simeq \frac{k_{Di}}{k} \gg 1.$$

1. Cette dénomination est justifiée à la fois par le caractère non dispersif de l'onde, et par le fait que les électrons et les ions oscillent en phase dans l'onde, assurant partout la neutralité électrique du milieu : le calcul des vitesses moyennes v_e, v_i et des perturbations de densité n_e, n_i à partir de (7.1.3), qui est valable pour les modes propres à condition d'interpréter les intégrales sur les vitesses comme en (7.3.7) (Cf. aussi note page 334), donnerait (voir plus loin, éq. (7.5.24))

$$v_e/v_i = -T_i Z'_e / T_e Z'_i \quad \text{et} \quad \xi = n_e q_e + n_i q_i = C^{te} \left(Z'_e + \frac{T_e}{T_i} Z'_i\right).$$

Dans la limite $T_e \gg T_i$, on obtient $v_e = v_i$ et $\xi = 0$.

Enfin, si $k^2 \gg k_{Di}^2$, la solution de (7.5.20) n'est plus acceptable car, donnant $(\omega/ka_e) \ll 1$, elle conduit à $(\omega/ka_i) \ll 1$. Dans la région $\omega > \Omega_p$, la condition d'existence $(\omega/ka_i) \gg 1$ implique une limite pour les fréquences $\omega \gg \Omega_p$, bien naturelle, les ions ne pouvant évidemment plus répondre des excitations de trop grande fréquence.

7.5.2.3. OSCILLATIONS TRÈS AMORTIES

Lorsque T_e et T_i deviennent du même ordre de grandeur, il n'est plus possible d'évaluer approximativement les intégrales figurant dans l'équation de dispersion et il faut préciser les fonctions $\overline{\varphi}_s$.

Les intégrales dans (7.3.9) s'écrivent, après intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}'(v)}{v - \dfrac{\omega}{k}}\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi}(v)}{\left(v - \dfrac{\omega}{k}\right)^2}\, dv.$$

Pour un équilibre maxwellien, avec $\overline{\varphi}(v)$ donné en (7.5.11), l'intégrale s'écrit en posant $z = \omega/ka$, considérée comme variable complexe,

$$\frac{1}{a^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{(\nu - z)^2}\, d\nu = \frac{1}{a^2\sqrt{\pi}} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\nu - z}\, d\nu. \tag{7.5.22}$$

La fonction complexe de la variable $z = x + iy$

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\nu - z}\, d\nu = X(z) + iY(z) \tag{7.5.23}$$

est la « *fonction de dispersion du plasma* », tabulée par Fried et Conte (1961). Elle est définie par (7.5.23) pour $y = \Im mz > 0$, et par son prolongement analytique pour $y = \Im mz < 0$, conformément à (7.3.7)

$$Z(x - iy) = Z(x + iy) + 2i\sqrt{\pi}\, e^{-(x-iy)^2}, \quad y > 0 \tag{7.5.24}$$

et possède les propriétés suivantes :

$$Z(z^*) = -\,[Z(-z)]^*, \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} X(-x, y) &= -\,X(x, y) \\ Y(-x, y) &= Y(x, y) \end{aligned} \tag{7.5.25}$$

$$Z' = -2\,(1 + zZ), \qquad Z(0) = i\sqrt{\pi}, \quad \text{où} \quad \left(Z' = \frac{dZ}{dz}\right) \tag{7.5.26}$$

$$\text{pour } z \to 0, \quad Z(z) = i\sqrt{\pi}\, e^{-z^2} - 2z\left(1 - \frac{2z^2}{3} + \cdots\right) \tag{7.5.27}$$

$$(7.5.28)\quad \text{pour } z \to \infty, \quad Z(z) \simeq \sqrt{\pi}\,\sigma e^{-z^2} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{2z^2} + \cdots\right); \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ 1 & y = 0 \\ 2 & y < 0. \end{cases}$$

Exprimée avec la fonction $Z(z)$, l'équation de dispersion des ondes longitudinales (7.3.9) s'écrit [1]

$$(7.5.29)\qquad \varkappa_{//} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2 a_s^2} Z'(z_s) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} z_s^2 Z'_s = 0$$

avec

$$(7.5.30)\qquad z_s = \frac{\omega}{k a_s}, \quad a^2 = \frac{2KT_s}{m_s} \quad \text{et} \quad Z'_s \equiv Z'(z_s).$$

Pour les ondes rapides,

$z_s \gg 1$, on a, d'après (7.5.28), (en négligeant le terme en $e^{-z_s^2}$), l'équation de dispersion

$$(7.5.31)\qquad \omega^2 = \omega_p^2\left(1 + 3\frac{KT_e}{m_e}\frac{k^2}{\omega^2}\right) + \Omega_p^2\left(1 + 3\frac{KT_i}{m_i}\frac{k^2}{\omega^2}\right)$$

qui conduit, puisque $\omega_p^2 \gg \Omega_p^2$, à la solution (7.5.3) donnée par Bohm et Gross. On montre facilement que la partie imaginaire conduit à (7.5.12).

Pour les ondes très lentes

$z_s \sim 1$, la résolution de (7.5.29) ne peut être faite que numériquement. Elle montre que dans un plasma où le rapport T_e/T_i est de l'ordre de l'unité, il n'existe aucune onde très lente qui ne soit très fortement amortie (Fried et Gould, 1961). La figure 7.5, pour ω^2 réel et k complexe, illustre cette propriété (Quemada, 1963).

Une expérience, effectuée sur un plasma de Césium (Wong, d'Angelo, Motley, 1962) où $T_e \simeq T_i \# 2300$ °K, vérifie très bien ces résultats, avec des longueurs d'atténuation de l'ordre de $\lambda/4$, ce qui correspond donc à un amortissement très important.

Si les électrons présentent une vitesse d'ensemble (ou mouvement de dérive), par rapport aux ions, cet amortissement est diminué et disparaît au-dessus d'une certaine vitesse de dérive critique (Fried et Gould, 1961) : on obtient alors une instabilité, qui est du type instabilité de faisceaux (Buneman, 1959), dont l'existence a déjà été mentionnée.

Lorsque T_e devient très grand devant T_i,

on peut alors développer les fonctions $Z_e = Z(z_e)$ et $Z_i = Z(z_i)$, respectivement avec (7.5.27) et (7.5.28) pour les arguments z_e et z_i tels que $z_e \ll 1$ et $z_i \gg 1$. Alors

$$z_e^2 Z'_e \simeq -2z_e^2 - 2i\sqrt{\pi}\, z_e^3 e^{-z_e^2}$$

$$z_i^2 Z'_i \sim 1 + \frac{3}{2z_i^2} - 2i\sqrt{\pi}\,\sigma z_i^3 e^{-z_i^2}$$

1. L'expression (7.5.29) aurait pu être obtenue directement à partir des formules (7.1.12) pour la conductivité, en interprétant les intégrales qui y figurent comme en (7.3.7), c'est-à-dire, dans le cas de l'équilibre maxwellien, en fonction de $Z(z)$.

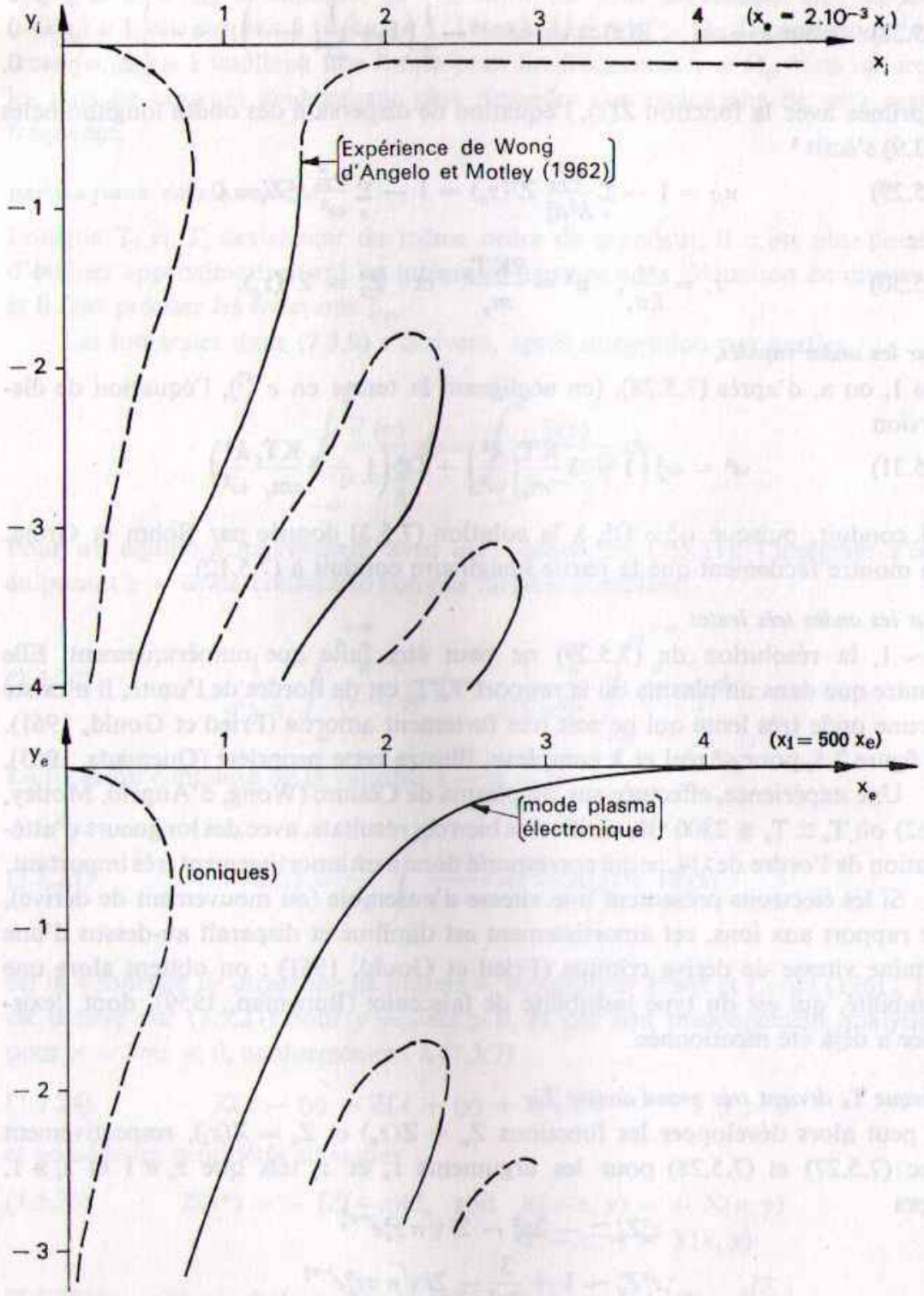

FIGURE 7.5.

Ondes longitudinales : $T_e = T_i$, ω^2 réel (—— $\omega^2 > 0$; — — $\omega^2 < 0$)

$$z_s = \frac{\omega}{k a_s} = x_s + i y_s \; ; \quad \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} = 500 \quad \text{(Césium)}$$

En portant ces développements dans (7.5.29), après y avoir négligé les termes en $z^3 e^{-z^2}$, on retrouve l'équation (7.5.16) obtenue par un calcul direct.

Enfin, la *limite statique*

$\omega = 0$ donne à partir de (7.4.29) dans laquelle, d'après (7.5.26), $Z'(0) = -2$

$$\varkappa_{//}(k, \omega) = 1 + \frac{k_{De}^2 + k_{Di}^2}{k^2} \tag{7.5.32}$$

exprimant les effets d'écran dus aux particules.

7.5.2.4. COMPARAISON AVEC LA THÉORIE HYDRODYNAMIQUE

Comparons ces résultats à ceux qui seraient donnés par la théorie adiabatique à pression scalaire, (ou à $\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0$: il n'y a pas de différence pour les ondes longitudinales lorsque $\gamma_e = \gamma_i = 3$). L'onde très lente est définie, d'après (6.4.8) (sans faire le calcul au 1er ordre en τ_s, bien entendu), par

$$\varkappa'_{//} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} (1 - \gamma_s \tau_s)^{-1} = 0. \tag{7.5.33}$$

La *limite des très basses fréquences* est obtenue en ne conservant que les termes sous le signe $\sum_s$ (termes $\gg 1$), ce qui conduit à une vitesse de phase, dans le cas d'un gaz une fois ionisé ($\alpha = 1$) (Cf. par ex. Denisse et Delcroix, 1961)

$$V_{SM}^2 = \frac{\omega_p^2 V_i^2 + \Omega_p^2 V_e^2}{\omega_p^2 + \Omega_p^2} = V_i^2 \frac{1 + (\gamma_e T_e / \gamma_i T_i)}{1 + (m_e/m_i)} \qquad \text{où} \qquad V_s^2 = \gamma_s \frac{KT_s}{m_s}.$$

Dans le cas $T_e \gg T_i$, cette expression s'écrit

$$V_{SM}^2 = \gamma_e \frac{KT_e}{m_i}. \tag{7.5.34}$$

Mis à part le facteur γ_e, ce résultat est identique au résultat microscopique (7.5.18); en particulier il donne les mêmes dépendances en fonction de T_e et de m_i [1]. Mais, la théorie adiabatique — qui conduit, pour le choix $\gamma_e = 3$, à une équation de dispersion correcte pour les oscillations de plasma électroniques — donnera, pour l'onde pseudosonore, une vitesse de phase V_{SM} incorrecte. Néanmoins, une théorie « isotherme » pour les électrons ($\gamma_e = 1$) donnerait le résultat exact (7.5.18) : ce choix pourrait être justifié par la grande agitation thermique des électrons ($a_e \gg \omega/k$) qui assurerait les échanges de chaleur et maintiendrait donc isotherme la compression du gaz d'électrons, lors du passage de l'onde.

Pour les fréquences $\omega \simeq \Omega_p$, l'équation (7.5.32) conduit à une oscillation du type oscillation de plasma ionique, donnée en (7.5.21). Dans le calcul microscopique, cette

1. Ce point a été clairement vérifié dans les expériences d'Alexeff et Neidigh (1963). Cependant, les conditions expérimentales ne permettent pas, semble-t-il, de discuter la valeur qu'on doit attribuer à γ (Cf. aussi Little, 1961).

solution est limitée par la condition d'existence $k_{De}^2 \ll k^2 \ll k_{Di}^2$, qui impose, pour cette oscillation, une limite vers les hautes fréquences. Cette limite n'est pas contenue dans la théorie adiabatique, et doit y être introduite indépendamment.

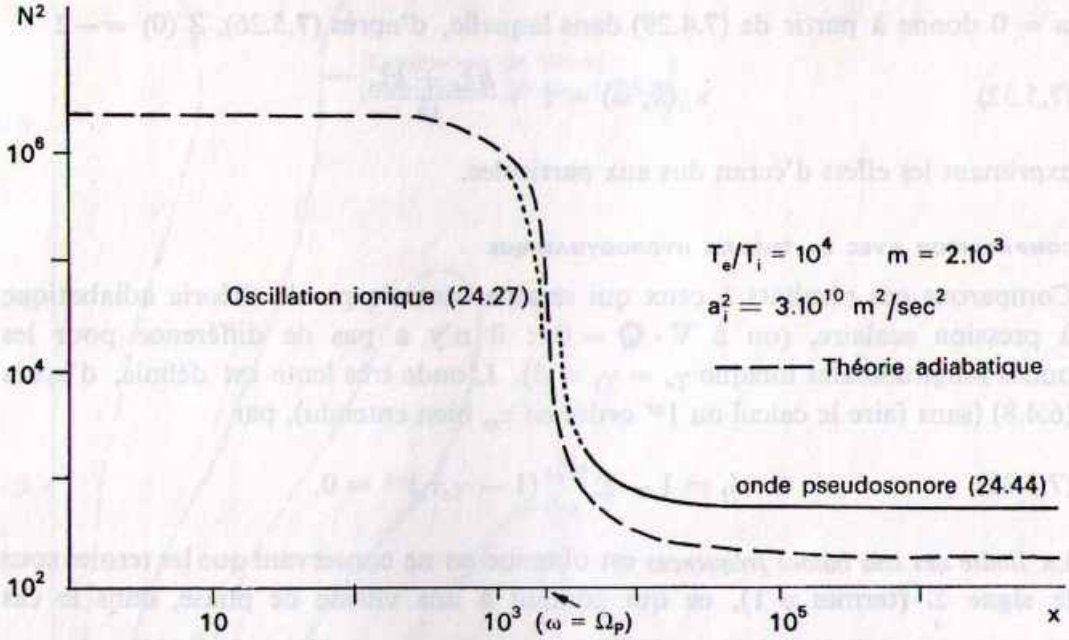

FIGURE 7.6.
Onde longitudinale ionique ($T_e \gg T_i$) : Onde pseudosonore et onde plasma ionique

Les calculs sont développés dans l'appendice 8; on y trouvera aussi une étude de l'amortissement du mode acoustique ionique.

Enfin, *dans le cas général*, et en particulier lorsque $T_e \sim T_i$, la solution adiabatique (74.33) existe toujours, et ne présente aucun amortissement, contrairement à la solution microscopique.

Avec les notations déjà utilisées, l'équation de dispersion « adiabatique » s'écrit :

$$\varkappa = \left(1 - \frac{V_e^2}{c^2} N^2\right) \left(1 - \frac{V_i^2}{c^2} N^2\right) \Big/ \left(1 - \frac{V_{SM}^2}{c^2} N^2\right) \tag{74.35}$$

La figure 7.6 montre les solutions microscopique et adiabatique (Cf. aussi Appendice 8) dans le cas où $T_e = 100\, T_i$, $m_i = 2\,000\, m_e$. On y voit le désaccord entre la théorie microscopique et la théorie adiabatique, désaccord qui, néanmoins, disparaîtrait pratiquement dans une théorie isotherme. En fait, le caractère incorrect de la théorie adiabatique tient surtout dans l'absence de conditions pour la validité de (74.35) : aucune condition sur les températures, alors que, à cause de l'amortissement Landau, l'onde n'existe plus dès que T_e n'est plus très grand devant T_i; aucune condition sur k, ou ce qui revient au même, sur ω, alors qu'on peut s'attendre à une limitation des oscillations ioniques pour les fréquences nettement supérieures à Ω_p.

En conclusion, une fois fixées, par l'étude microscopique, les conditions d'existence et les limites de validité de l'oscillation ionique, la théorie macroscopique (isotherme) décrit cette onde d'une façon satisfaisante. Nous retrouverons évidemment cette propriété dans le cas où $B_0 \neq O$, en particulier pour la propagation parallèle à B_0.

7.6. Ondes transversales

Pour trouver les modes transversaux $\omega(k)$, pour une polarisation de $\mathbf{E}$ fixée par exemple suivant Ox, si $\mathbf{k}$ est pris le long de Oz, on pourrait, comme pour les modes longitudinaux, coupler l'équation (7.3.2) à la projection sur cette direction Ox de la transformée de Laplace de l'équation déduite des équations de Maxwell (avec $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$)

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial J_x}{\partial t}.$$

On trouverait, pour $E(k, \omega)$, une expression analogue à (7.3.5), dont les seuls pôles seraient, là encore, les zéros du dénominateur. Mais il est plus simple de calculer la constante diélectrique $\varkappa_\perp$ à partir de la conductivité transverse (7.1.12) (Cf. note page 334)

$$\frac{\sigma_\perp}{i\omega\varepsilon_0} = -\frac{\omega_p^2}{\sqrt{\pi}\omega k a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-v^2/a^2}}{v - \dfrac{\omega}{k}}\,dv = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega}{ka}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\nu^2}}{\nu - \dfrac{\omega}{ka}}\,d\nu$$

soit

$$\frac{\sigma_\perp}{i\omega\varepsilon_0} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\, z\, Z(z). \tag{7.6.1}$$

La composante transverse de $\varkappa$ est donc

$$\varkappa_\perp = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}}{\omega^2} z_s Z_s \tag{7.6.2}$$

l'équation de dispersion étant encore

$$N^2 = \varkappa_\perp.$$

La limite des ondes rapides ($z_s \gg 1$), en négligeant les facteurs $e^{-z_s^2} \ll 1$, donne avec (7.5.28)

$$N^2 = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}(1 + \tau_s) \tag{7.6.3}$$

où

$$\tau_s = \frac{1}{2z_s^2} = \frac{KT_s}{m_s}\frac{k^2}{\omega^2}$$

a déjà été introduit au § 6.3.

Le résultat (7.6.3), à l'amortissement près, est l'équation de dispersion des ondes transversales rapides et se confond avec la solution (6.4.9) de la théorie adiabatique.

En ce qui concerne l'amortissement Landau de ces ondes transversales en l'absence de champ B_0, il faut remarquer qu'elles ont des vitesses de phases $v_\varphi \geqslant c$: pour des distributions acceptables du point de vue relativiste, il n'y aura pas de particules résonnantes et, par conséquent, pas d'amortissement.

Enfin, la recherche numérique des solutions lentes de (7.6.2) ne conduit à aucun mode faiblement amorti, même si $T_e \gg T_i$ ou $T_i \ll T_e$.

L'étude des ondes transversales dans un plasma isotrope a été effectuée par la méthode de Van Kampen (Felderhof, I, 1963) et montre qu'à côté des modes propres il existe des solutions stationnaires, comme dans le cas des ondes longitudinales; ces solutions correspondent aussi à des modes de particules piégées.