



HAL
open science

Cours de Mécanique des Fluides

Jean-François Sini

► **To cite this version:**

Jean-François Sini. Cours de Mécanique des Fluides. Engineering school. France. 2006, pp.213.
cel-00356205

HAL Id: cel-00356205

<https://cel.hal.science/cel-00356205v1>

Submitted on 26 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*Centrale
Nantes*

MECANIQUE DES FLUIDES

Jean-François SINI

2008

AVANT-PROPOS

Ce document polycopié correspond au support de cours de Mécanique des Fluides enseigné en première année à l'École Centrale. Il constitue une introduction à l'étude des phénomènes de transport de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans les écoulements de fluides.

La première partie (chapitres 2 à 9) présente les notions et principes généraux de la thermodynamique et de la Mécanique qui permettent d'établir les équations de bilans dans un fluide. Leur formalisation en écriture locale dans le cas des fluides *usuels* aboutit aux équations dites de Navier-Stokes. Ces développements généraux, associés à un formalisme rigoureux, peuvent apparaître quelque peu théoriques aux yeux d'un élève ingénieur, mais ils constituent la base indispensable de l'analyse des systèmes fluides. Ils permettent de cerner les approximations usuelles généralement utilisées dans l'étude simplifiée des écoulements industriels complexes. À ce propos, le chapitre 10 présente les notions essentielles permettant de réduire consciemment le système de Navier-Stokes et de justifier au cas par cas les hypothèses simplificatrices qui conduisent aux différentes *classes d'approximations* de la Mécanique des Fluides.

La deuxième partie du document (chapitres 11 à 15), après quelques éléments de Statique et des (rares) solutions exactes des équations de Navier-Stokes, présente un aspect plus appliqué, adapté à la formation d'un ingénieur généraliste. Les équations de bilans intégraux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, illustrées ici sur le cas simple des écoulements de conduites, permettent d'aborder d'un point de vue global, de nombreux problèmes courants de la Mécanique des Fluides Industrielle. L'essentiel des manipulations de Travaux Pratiques porte sur l'illustration de ces notions.

Un enseignement complémentaire électif est proposé en 2^{ème} année aux élèves qui le souhaitent^(*). Il s'agit non pas tant d'étendre les concepts ou le contenu au-delà de ce qui est présenté ici, mais de mettre en œuvre les acquis sur des applications industrielles concrètes par l'étude de quelques classes d'approximations.

Pour la rédaction de ce cours polycopié, j'ai utilisé librement de nombreux ouvrages classiques et quelques documents de certains collègues, tous disponibles à la bibliothèque de l'École Centrale. J'espère que ce polycopié constituera une invitation à la lecture de ces livres.

Jean-François Sini

Nantes, le 4 juillet 2006

(*) Cet enseignement électif (MFLAP), incontournable pour les options *Hydrodynamique Navale et Génie Océanique* et *Mécanique des Fluides Numérique*, est fortement recommandé pour les élèves s'orientant en 3^{ème} année vers les options *Energétique & Environnement* et *Génie Civil*... les autres sont aussi les bienvenus!

SOMMAIRE

Chapitre 1 Vecteurs et tenseurs.....	1
1.1 Vecteurs.....	1
1.1.1 Espace vectoriel Euclidien.....	1
1.1.2 Convention de l'indice muet.....	2
1.1.3 Changement de base.....	2
1.2 TENSEURS.....	3
1.2.1 Définitions.....	3
1.2.2 Changement de base.....	4
1.2.3 Opérations sur les tenseurs.....	5
1.2.4 Le tenseur d'orientation.....	7
1.3 OPÉRATEURS VECTORIELS ET TENSORIELS.....	8
1.3.1 Notations.....	8
1.3.2 Définitions.....	8
1.3.3 Notation dyadique.....	10
1.3.4 Identités.....	11
1.3.5 Relations intégrales.....	11

PREMIERE PARTIE

Chapitre 2 Introduction.....	15
2.1 CONCEPTS GÉNÉRAUX.....	15
2.1.1 L'état fluide.....	15
2.1.2 Le concept de milieu continu.....	16
2.1.3 Limites de l'hypothèse de continuité.....	18
2.1.4 Surfaces de discontinuité.....	18
2.2 PROPRIÉTÉS THERMODYNAMIQUES DES FLUIDES.....	18
2.2.1 Axiome de l'équilibre local.....	18
2.2.2 Équation d'état.....	19
2.2.3 Premier principe et énergie interne.....	20
2.2.4 Second principe et entropie.....	23
2.2.5 Forme différentielle de l'énergie interne et de l'entropie.....	24
2.2.6 Équations d'état canoniques, enthalpie.....	26
2.2.7 Quelques définitions.....	26

Chapitre 3 Cinématique	29
3.1 DESCRIPTION DU MOUVEMENT.....	29
3.1.1 Notions de référentiel et de configuration	29
3.1.2 Description Lagrangienne	30
3.1.3 Description Eulerienne	31
3.2 DÉRIVÉE PARTICULAIRE.....	31
3.2.1 Taux de variation d'une grandeur matérielle.....	31
3.2.2 Accélération d'une particule fluide	33
3.3 RÉFÉRENTIEL INERTIEL ET RÉFÉRENTIEL RELATIF	33
3.4 LIGNES FLUIDES	34
3.4.1 Trajectoires.....	34
3.4.2 Lignes de courant	35
3.4.3 Lignes d'émission.....	36
 Chapitre 4 Déformation et rotation.....	 37
4.1 TRANSLATION	37
4.2 ROTATION	38
4.3 DILATATION.....	39
4.4 CISAILLEMENT	40
4.5 DÉCOMPOSITION DU MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UNE PARTICULE.....	42
4.5.1 Cas 2D.....	42
4.5.2 Cas 3D.....	43
4.5.3 Taux de d'allongement d'un segment fluide	43
4.6 TENSEUR DES TAUX DE DÉFORMATION ET TENSEUR DES TAUX DE ROTATION	44
 Chapitre 5 Théorèmes de transport	 47
5.1 VOLUMES ET SURFACES DE CONTRÔLE.....	47
5.2 FORMULATION DES THÉORÈMES DE TRANSPORT	48
5.2.1 Cas général d'un volume de contrôle arbitraire.....	48
5.2.2 Cas d'un volume de contrôle fixe.....	50
5.2.3 Cas d'un volume de contrôle matériel $\mathcal{V}_m(t)$	50
5.2.4 Expression du théorème de transport en vitesse relative	50
5.2.5 Théorème de transport pour un champ vectoriel	50
5.3 FORMES ALTERNATIVES DES THÉORÈMES DE TRANSPORT	50
5.4 THÉORÈMES DE TRANSPORT EN PRÉSENCE D'UNE SURFACE SINGULIÈRE.....	51
5.5 APPLICATIONS.....	52
5.5.1 Le taux de dilatation volumique	52
5.5.2 L'équation de continuité.....	53
 Chapitre 6 Le tenseur des contraintes.....	 55
6.1 EFFORTS À DISTANCE - EFFORTS DE CONTACT.....	55
6.1.1 Schéma macroscopique des contraintes	55
6.1.2 Propriété des contraintes locales.....	56
6.2 LE TENSEUR DES CONTRAINTES.....	57
6.2.1 Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes.....	57
6.2.2 Composantes du tenseur des contraintes	59
6.2.3 Symétrie du tenseur des contraintes	59
6.2.4 Notion de pression statique	60
6.2.5 Le tenseur des contraintes visqueuses	62
 Chapitre 7 Équations de bilans.....	 65
7.1 FORME GÉNÉRALE D'UN PRINCIPE DE BILAN	65
7.2 ÉQUATION DE BILAN DE MASSE	66

7.3 ÉQUATION DE BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT	66
7.3.1 Formes macroscopiques	66
7.3.2 Formes locales	68
7.4 THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE	69
7.5 ÉQUATION DE BILAN DE L'ÉNERGIE	71
7.6 ÉQUATION DE BILAN DE L'ÉNERGIE INTERNE	73
7.7 FORME ENTHALPIQUE DU BILAN D'ÉNERGIE	74
7.8 ÉQUATION DE BILAN DE L'ENTROPIE	74
Chapitre 8 Lois de comportement	77
8.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX	77
8.1.1 Introduction	77
8.1.2 Axiomatique des lois de comportement	78
8.2 RELATIONS LINÉAIRES ENTRE FORCES ET FLUX	79
8.2.1 Cas de la quantité de chaleur - Loi de Fourier	80
8.2.2 Cas de la quantité de mouvement - Loi de Newton	81
8.3 LES FLUIDES NON NEWTONIENS	85
8.3.1 Les fluides non newtoniens indépendants du temps	86
8.3.2 Les fluides non newtoniens dépendants du temps	87
8.3.3 Les fluides visco-élastiques	87
8.4 QUELQUES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES FLUIDES	88
8.4.1 La viscosité	88
8.4.2 La conductivité thermique	88
8.4.3 La diffusivité matérielle	89
8.4.4 Les nombres adimensionnels du transport diffusif	89
Chapitre 9 Les équations de Navier-Stokes	91
9.1 ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS	91
9.1.1 Introduction	91
9.1.2 Quantité de mouvement	91
9.1.3 Énergie interne	92
9.2 TABLEAU RÉCAPITULATIF	93
9.2.1 Le système d'équations complet	93
9.2.2 Cas d'un fluide parfait	94
9.2.3 Cas d'un fluide isovolume	94
9.3 LES DIFFÉRENTES APPROCHES DE RÉOLUTION	94
Annexe du chapitre 9	97
Chapitre 10 Analyse dimensionnelle	99
10.1 INTRODUCTION	99
10.1.1 Échelles caractéristiques et estimations a priori	100
10.1.2 Nombres sans dimension	101
10.2 PRINCIPE DE L'ANALYSE DIMENSIONNELLE	103
10.2.1 Exemple	103
10.2.2 Le Théorème Π ou théorème de Vaschy-Buckingham	104
10.3 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ADIMENSIONNELLES	107
10.3.1 Établissement des équations	107
10.3.2 Interprétation du nombre de Reynolds	109
10.3.3 Interprétation du nombre de Froude	110
10.3.4 Équation adimensionnelle pour l'énergie	110
10.4 ANALYSE DE SIMILITUDE	112
10.4.1 Cas des écoulements isovolumes	112
10.4.2 Cas des écoulements compressibles	114
10.5 LES PRINCIPAUX NOMBRES SANS DIMENSION	115

DEUXIEME PARTIE

Chapitre 11 Statique des fluides	119
11.1 GÉNÉRALITÉS.....	119
11.1.1 Le théorème d'Archimède.....	120
11.1.2 Équilibres pseudo-statiques	122
11.1.3 Fluides compressibles.....	123
11.2 HYDROSTATIQUE	125
11.2.1 Hypothèses de base	125
11.2.2 Résultante de pression sur une paroi	125
11.2.3 Application à la mesure de la pression statique.....	127
11.2.4 Phénomènes de tension superficielle.....	129
Chapitre 12 Quelques solutions exactes de Navier-Stokes	133
12.1 LES ÉCOULEMENTS PARALLÈLES.....	133
12.1.1 Équations pour les écoulements parallèles en canal	133
12.1.2 Équations pour les écoulements parallèles en rotation	135
12.1.3 Équations pour les écoulements parallèles en conduite.....	136
12.2 ÉCOULEMENTS ENTRE DEUX PLAQUES PLANES	136
12.2.1 Écoulement dans un canal bidimensionnel.....	136
12.2.2 Écoulement de Couette.....	139
12.2.3 Premier problème de Stokes	140
12.3 DIFFUSION D'UN FILAMENT TOURBILLONNAIRE	142
12.4 ÉCOULEMENT DE POISEUILLE DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE	145
12.4.1 Grandeurs cinématiques et dynamiques	146
12.4.2 Grandeurs énergétiques	147
12.4.3 Limites de validité	148
12.5 NOTIONS DE TURBULENCE	149
12.5.1 Généralités.....	149
12.5.2 Formules empiriques pour les écoulements en conduites.....	150
Chapitre 13 Notions de bilans intégraux.....	155
13.1 INTRODUCTION	155
13.2 BILAN INTÉGRAL DE MASSE	158

Chapitre 14 Bilans d'énergie cinétique	161
14.1 FORMULATION GÉNÉRALE	161
14.1.1 Bilan macroscopique sur un volume arbitraire	161
14.1.2 Formulation pour les écoulements internes	163
14.2 RELATION DE BERNOULLI POUR LES FLUIDES VISQUEUX.....	164
14.2.1 Établissement de la relation intégrale	164
14.2.2 Exemple et interprétation graphique	169
14.3 RELATION DE BERNOULLI POUR LES FLUIDES PARFAITS	172
14.3.1 La formulation locale pour un fluide isovolume.....	172
14.3.2 Écoulements irrotationnels de fluides parfaits isovolumes	174
14.3.3 Le cas des fluides barotropes	175
14.4 EXEMPLES D'APPLICATION	176
14.4.1 Écoulements par des orifices	176
14.4.2 Pression d'arrêt	178
14.4.3 Mesures de la pression dans un écoulement	179
14.4.4 Mesures des débits	181
Chapitre 15 Bilans de quantité de mouvement	187
15.1 THÉORÈME DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT POUR LES ÉCOULEMENTS STATIONNAIRES ISOVOLUMES.....	187
15.1.1 Établissement de la relation intégrale	187
15.1.2 Cas particulier des écoulements internes	188
Cas des écoulements internes stationnaires de fluides isovolumes.....	189
15.2 EXEMPLES D'APPLICATION	191
15.2.1 Poussée dans un coude.....	191
15.2.2 Perte de charge dans un élargissement brusque	193
15.2.3 Puissance d'une hélice	195
Annexe 1 Coordonnées cartésiennes	200
Annexe 2 Coordonnées cylindriques	202
Annexe 3 Coordonnées sphériques.....	204
Annexe 4 Propriétés physiques des fluides	206
Index.....	209
Bibliographie sommaire	213
Ouvrages conseillés pour les Travaux en Autonomie	213

Chapitre 1 Vecteurs et tenseurs

Ce chapitre présente l'essentiel des notions mathématiques portant sur les opérateurs vectoriels et tensoriels et la notation indicelle, qui est largement utilisée dans le cours de Mécanique des Fluides.

On consultera les références [1] ou [6] pour une présentation plus rigoureuse et plus détaillée.

1.1 Vecteurs

1.1.1 Espace vectoriel Euclidien

La Cinématique Classique est construite à partir de l'espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3 dont les éléments sont des points et d'une définition du temps, ou *chronologie*, le temps étant représenté par la variable réelle t . À un couple de points (P,Q) correspond un élément \vec{x} d'un espace vectoriel euclidien \mathbf{E} de dimension 3, soit $(P,Q) \rightarrow \vec{x} = \vec{PQ}$. On définit le produit scalaire de \vec{x} et de \vec{y} , noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$, comme l'application bilinéaire symétrique de $(\mathbf{E} \times \mathbf{E})$ dans l'ensemble des réels \mathbf{R} dont la forme quadratique est définie positive:

$$(a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot \vec{z} = a(\vec{x} \cdot \vec{z}) + b(\vec{y} \cdot \vec{z}), \quad \forall (a, b) \in \mathbf{R},$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$$

Ayant fait le choix d'une base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ou \vec{e}_i ($i=1, 2, 3$) de \mathbf{E} , \vec{x} s'exprime sous forme de la combinaison linéaire:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i \quad (1.1)$$

où les x_i sont les *composantes* de \vec{x} . La base est orthonormée si et seulement si

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i=j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ ($\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$)
($\delta_{12} = \delta_{21} = \dots = \delta_{32} = 0$)

Les δ_{ij} sont les éléments de la matrice unité. Sauf mention explicite contraire, nous n'utiliserons dans ce cours que des bases orthonormées.

1.1.2 Convention de l'indice muet

On convient d'écrire la relation (1.1) sous la forme:

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i \quad (1.2)$$

Selon cette convention (dite convention d'Einstein), lorsqu'un indice est répété 2 fois dans un monôme, ce monôme représente en fait la somme de tous les termes obtenus en donnant à cet indice les valeurs 1, 2, 3. L'indice i dans (1.2) est dit *muet* car la lettre qui le représente est sans importance; par exemple, $x_i y_i$ et $x_j y_j$ désignent le même produit scalaire $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Il n'est pas inutile de préciser ici quelques indications sur l'utilisation de cette convention d'écriture.

Dans une relation, *un indice non muet est dit franc*; il ne peut apparaître qu'une seule fois dans un même monôme. Ainsi dans la relation

$$T_i = \sum_{ij} n_j \quad (1.3)$$

i est un indice franc alors que j est un indice muet.

☞ *Il faut toujours désigner un indice muet par une lettre différente de celles qui sont utilisées pour les indices francs.*

Notons que (1.3) exprime que \vec{T} est une forme linéaire de \vec{n} et la matrice Σ_{ij} représente dans la base considérée l'opérateur linéaire $\vec{T} \rightarrow \vec{n}$. En supposant qu'on ait aussi

$$n_i = A_{ij} m_j$$

alors la substitution dans (1.3) devra s'écrire

$$T_i = \sum_{ij} A_{jk} m_k$$

☞ *Ceci montre clairement que 2 indices muets qui interviennent dans le même monôme doivent toujours être désignés par 2 lettres différentes.*

1.1.3 Changement de base

Soient \vec{e}_i^* et \vec{e}_i deux bases orthonormées de \mathbf{E} . Les vecteurs \vec{e}_i^* peuvent naturellement s'exprimer comme des combinaisons linéaires des vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 :

$$\vec{e}_i^* = P_{ij} \vec{e}_j \quad (1.4)$$

En multipliant scalairement les deux membres de (1.4) par \vec{e}_k il vient

$$\vec{e}_i^* \cdot \vec{e}_k = P_{ij} \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = P_{ij} \delta_{jk} = P_{ik}$$

et l'on observe que P_{ik} est à la fois la composante de \vec{e}_i^* sur \vec{e}_k dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et aussi la composante de \vec{e}_k sur \vec{e}_i^* dans la base $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$. On peut donc écrire:

$$\vec{e}_i = P_{ji} \vec{e}_j^* \quad (1.5)$$

La comparaison de (1.4) et (1.5) montre que les matrices *transposées* P_{ij} et P_{ji} sont également *réciproques*; elles sont donc *orthogonales*.

Ceci s'écrit en notation indicielle:

$$P_{ik} P_{jk} = \delta_{ij} \quad ; \quad P_{ki} P_{kj} = \delta_{ij}$$

et en notation matricielle:

$$P P^T = P^T P = 1$$

Désignons par x_i et x_i^* les composantes d'un même vecteur \bar{x} dans les bases \bar{e}_i et \bar{e}_i^* ; on obtient en utilisant (14) et (15):

$$\bar{x} = x_i^* \bar{e}_i^* = x_i^* P_{ij} \bar{e}_j = x_j \bar{e}_j$$

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i = x_i P_{ji} \bar{e}_j^* = x_j^* \bar{e}_j^*$$

ce qui donne les relations de changement de base:

$$x_i^* = P_{ij} x_j$$

$$x_i = P_{ji} x_j^*$$

et en notation matricielle:

$$\bar{x}^* = P \bar{x}$$

$$\bar{x} = P^T \bar{x}^*$$

1.2 Tenseurs

1.2.1 Définitions

Un tenseur $\bar{\Sigma}$ du second ordre est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \bar{n} de \mathbf{E} un vecteur \bar{T} de \mathbf{E} et l'on écrit $\bar{T} = \mathcal{L}(\bar{n})$. Il est défini de manière unique par les 3 vecteurs:

$$\mathcal{L}(\bar{e}_i) = T_{ij} \bar{e}_j$$

c'est-à-dire par les 9 nombres T_{ij} appelés composantes du tenseur dans la base orthonormée \bar{e}_i , ou encore par la matrice T d'éléments T_{ij} .

La donnée de 2 vecteurs \bar{A} et \bar{B} permet de définir un tenseur par l'application linéaire

$$\bar{n} \rightarrow \bar{A}(\bar{B}\bar{n}) \tag{1.6}$$

Ce tenseur est le produit tensoriel de \bar{A} et \bar{B} . On le note $\bar{A} \otimes \bar{B}$ et ses composantes sont simplement $A_i B_j$.

Les produits tensoriels de 2 vecteurs forment un sous-ensemble de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 (espace à 9 dimensions) qui contient en particulier les 9 éléments

$$\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, (i, j = 1, 2, 3)$$

qui sont linéairement indépendants dans l'espace des tenseurs d'ordre 2. On peut en particulier écrire un tenseur du second ordre quelconque sous la forme

$$\bar{\Sigma} = \Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \tag{1.7}$$

Le tenseur défini par l'application identité est dit *tenseur unité* ou *tenseur d'isotropie* et noté $\bar{\mathbb{1}}$. Il est représenté dans toute base orthonormée par ses composantes δ_{ij} (matrice unité):

$$\bar{\mathbb{1}} = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Les notions précédentes se généralisent facilement pour définir les tenseurs d'ordres supérieurs. Ainsi un tenseur d'ordre 3 est un opérateur linéaire qui à tout vecteur \bar{n} de \mathbf{E} fait correspondre un tenseur du second ordre. Les écritures suivantes généralisent respectivement (1.6) et (1.7)

$$\begin{aligned} \bar{n} &\rightarrow \bar{A} \otimes \bar{B}(\bar{C}, \bar{n}) \\ \bar{\Gamma} &\equiv \Gamma_{ijk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

De la même manière, on peut considérer qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1:

$$\begin{aligned} \bar{n} &\rightarrow (\bar{A}, \bar{n}) \\ \bar{A} &= A_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

et qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0:

$$\begin{aligned} \bar{n} &\rightarrow (\bar{n}, \bar{n}) \\ \|\bar{n}\| &= n_i n_i \end{aligned}$$

1.2.2 Changement de base

Il s'agit de déterminer les composantes d'un tenseur dans une base orthonormée \bar{e}_i^* connaissant ses composantes dans une autre base orthonormée \bar{e}_i . On écrit:

$$\bar{\Sigma} = \Sigma_{ij}^* \bar{e}_i^* \otimes \bar{e}_j^* = \Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.$$

Or, compte tenu de (1.4) et (1.5) et de la linéarité du produit tensoriel

$$\begin{aligned} \bar{e}_i^* \otimes \bar{e}_j^* &= P_{ik} P_{j\ell} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_\ell \\ \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j &= P_{ki} P_{\ell j} \bar{e}_k^* \otimes \bar{e}_\ell^* \end{aligned}$$

on obtient

$$\Sigma_{k\ell}^* = P_{ki} P_{\ell j} \Sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \Sigma_{k\ell} = P_{ik} P_{j\ell} \Sigma_{ij}^*$$

qu'on peut encore écrire

$$\Sigma_{ij}^* = P_{ik} \Sigma_{k\ell} P_{j\ell} \quad \text{et} \quad \Sigma_{ij} = P_{ki} \Sigma_{k\ell}^* P_{\ell j} \quad (1.9)$$

soit en notation matricielle

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{P}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{S} = \mathbf{P}^T \mathbf{S}^* \mathbf{P}$$

1.2.3 Opérations sur les tenseurs

a) Multiplication tensorielle

Soient un tenseur $\bar{\bar{\Sigma}} = \bar{A} \otimes \bar{B}$ d'ordre 2 et un tenseur \bar{V} d'ordre 1. On définit le produit tensoriel de $\bar{\bar{\Sigma}}$ et de \bar{V} par

$$\bar{\bar{\Sigma}} \otimes \bar{V} = (\bar{A} \otimes \bar{B}) \otimes \bar{V} = \bar{A} \otimes \bar{B} \otimes \bar{V} \quad (1.10)$$

où $\bar{\bar{\Sigma}} \otimes \bar{V}$ est un tenseur d'ordre 3 que nous noterons $\bar{\bar{\Gamma}}$.

On écrira donc sous forme indicielle dans la base orthonormée \bar{e}_i

$$\Gamma_{ijk} = (\bar{\bar{\Sigma}} \otimes \bar{V}) = (A_i \bar{e}_i \otimes B_j \bar{e}_j) \otimes (V_k \bar{e}_k) = A_i B_j V_k \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k$$

ou encore

$$\Gamma_{ijk} = (\Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \otimes (V_k \bar{e}_k) = \Sigma_{ij} V_k \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \quad (1.11)$$

Les composantes du tenseur $\bar{\bar{\Gamma}}$ s'obtiennent donc par simple produit des composantes de $\bar{\bar{\Sigma}}$ et \bar{V} dans la base commune

$$\bar{\bar{\Gamma}} = \bar{\bar{\Sigma}} \otimes \bar{V} \leftrightarrow \Gamma_{ijk} = \Sigma_{ij} V_k \quad (1.12)$$

Le résultat du produit tensoriel de 2 tenseurs respectivement d'ordre n et m est un tenseur d'ordre n+m.

b) Contraction

À un tenseur d'ordre n on peut faire correspondre un tenseur d'ordre n-2 par *contraction* de deux indices francs voisins en deux indices muets. La convention de sommation (cf. §1.1.2) est alors appliquée.

- **Remarque 1:** La contraction du tenseur unité du second ordre $\bar{\bar{I}} = \delta_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ est le scalaire $\delta_{ii} = 3$. (1.13)

- **Remarque 2:** Le scalaire représenté par la contraction des 2 indices d'un tenseur $\bar{\bar{\Sigma}}$ d'ordre 2 est appelé la trace de ce tenseur et noté $\text{Tr}\{\bar{\bar{\Sigma}}\}$; $\text{Tr}\{\bar{\bar{\Sigma}}\} = \Sigma_{kk}$. (1.14)

c) Transposition

À partir d'un tenseur du second ordre $\bar{\bar{\Sigma}} = \Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$, on définit le *tenseur transposé* $\bar{\bar{\Sigma}}^T$ par transposition des 2 indices:

$$\bar{\bar{\Sigma}}^T = \Sigma_{ji} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_i = \Sigma_{ji} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Les matrices représentant $\bar{\bar{\Sigma}}$ et $\bar{\bar{\Sigma}}^T$ dans la base \bar{e}_i sont dites *transposées* l'une de l'autre

$$\Sigma_{ij}^T = \Sigma_{ji} \quad (1.15)$$

Un tenseur est dit *symétrique* s'il est égal à son transposé:

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji} \quad (1.16)$$

Un tenseur est dit *antisymétrique* s'il est égal à l'opposé de son transposé:

$$\Sigma_{ij} = -\Sigma_{ji} \quad (1.17)$$

La partie symétrique (ou paire) et la partie antisymétrique (ou impaire) d'un tenseur $\bar{\Sigma}$ sont définies respectivement par

$$\bar{\Sigma}_s = \frac{1}{2}(\bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}^T) \quad \text{ou} \quad \Sigma_{ijs} = \frac{1}{2}(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}) \quad (1.18)$$

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{1}{2}(\bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}^T) \quad \text{ou} \quad \Sigma_{ija} = \frac{1}{2}(\Sigma_{ij} - \Sigma_{ji}) \quad (1.19)$$

si bien que

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_s + \bar{\Sigma}_a \quad \text{et} \quad \bar{\Sigma}^T = \bar{\Sigma}_s - \bar{\Sigma}_a$$

d) Multiplication contractée

Le produit tensoriel contracté s'introduit naturellement en opérant dans la multiplication tensorielle une *contraction sur le dernier indice du 1er tenseur et le 1er indice du deuxième*. L'opération correspondante est notée par un point.

- Notation intrinsèque: $\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{T}}$
- Notation matricielle: $R = S T$
- Notation indicielle: $R_{ij} = S_{ik} T_{kj}$

En reprenant l'exemple du [§ 1.2.3-a](#), la relation (1.10) devient:

$$\bar{\bar{\Sigma}} \cdot \bar{\bar{V}} = (\bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{B}}) \cdot \bar{\bar{V}} = \bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{V}} \quad (1.20)$$

où $\bar{\bar{\Sigma}} \cdot \bar{\bar{V}}$ est un tenseur d'ordre 1 (un vecteur) que nous noterons $\bar{\bar{U}}$. On écrira donc sous forme indicielle dans la base orthonormée \bar{e}_i

$$U_i \bar{e}_i = (\bar{\bar{\Sigma}} \cdot \bar{\bar{V}}) = (A_i \bar{e}_i \otimes B_j \bar{e}_j) \cdot (V_k \bar{e}_k) = A_i B_j V_j \bar{e}_i$$

ou encore

$$U_i \bar{e}_i = (\Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot (V_k \bar{e}_k) = \Sigma_{ij} V_j \bar{e}_i \quad (1.21)$$

Les composantes de $\bar{\bar{U}}$ dans la base \bar{e}_i sont donc $U_i = \Sigma_{ij} V_j$.

Le résultat du produit contracté de 2 tenseurs respectivement d'ordre n (n=1) et m (m=1) est un tenseur d'ordre n+m-2.

Deux tenseurs $\bar{\bar{S}}$ et $\bar{\bar{T}}$ sont dits *inverses* ou *réciroques* si les produits $\bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{S}}$ sont tous deux égaux au tenseur unité

$$\bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{1}} \quad ; \quad S_{ik} T_{kj} = T_{ik} S_{kj} = \delta_{ij} \quad (1.22)$$

•Remarque 1: La contraction de $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ est $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$ (1.23)

•Remarque 2: Le produit scalaire de 2 vecteurs \bar{U} et \bar{V} est le résultat de la multiplication contractée des 2 vecteurs \bar{U} et \bar{V} :

$$\bar{U} \cdot \bar{V} = (U_i \bar{e}_i) \cdot (V_j \bar{e}_j) = U_i V_j \delta_{ij} = U_i V_i$$

•Remarque 3: Le résultat du produit doublement contracté de 2 tenseurs respectivement d'ordre n (n=2) et m (m=2) est un tenseur d'ordre n+m-4. Cette opération est notée par un double point:

$$\bar{\bar{\Sigma}} : \bar{\bar{D}} = (\Sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) : (D_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l) = (\Sigma_{ij} \bar{e}_i) \cdot (D_{j\ell} \bar{e}_\ell) = \Sigma_{ij} D_{ji} \quad (1.24)$$

•Remarque 4: Le produit contracté de 2 tenseurs symétriques n'est en général pas symétrique.

1.2.4 Le tenseur d'orientation

a) Définition

Le tenseur d'orientation $\bar{\bar{\vartheta}} = \varepsilon_{ijk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k$ est défini à partir du symbole de Lévi-Civita, noté ε_{ijk} , qui est une fonction alternée des indices ijk telle que $\varepsilon_{123} = 1$. Par transposition de 2 indices ε_{ijk} prend une valeur opposée.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3); & 231 \text{ par ex.} \\ -1 \text{ si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3); & 213 \text{ par ex.} \\ 0 \text{ si deux indices au moins sont égaux;} & 122 \text{ par ex.} \end{cases} \quad (1.25)$$

b) Produits contractés du tenseur d'orientation

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \quad (1.26)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pj k} = 2 \delta_{ip} \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (1.28)$$

On trouvera la démonstration de ces identités dans la référence [1].

c) Produit vectoriel de 2 vecteurs \bar{A}, \bar{B}

En effectuant le produit doublement contracté du tenseur d'orientation $\bar{\bar{\vartheta}}$ par $\bar{B} \otimes \bar{A}$ on obtient les composantes du produit vectoriel $\bar{A} \wedge \bar{B}$

$$\bar{\bar{\vartheta}} : (\bar{B} \otimes \bar{A}) = (\varepsilon_{ijk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k) (B_k \bar{e}_k \otimes A_j \bar{e}_j) = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \bar{e}_i$$

ainsi

$$\boxed{(\bar{A} \wedge \bar{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k} \quad (1.29)$$

d) Produit mixte de 3 vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

Son expression indicielle résulte directement de (1.29)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (1.30)$$

e) Vecteur associé à un tenseur antisymétrique

Si $\overline{\overline{\Omega}}$ est un tenseur antisymétrique du second ordre ($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$),

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad (1.31)$$

définit les composantes du vecteur associé (ou vecteur axial) à $\overline{\overline{\Omega}}$. Réciproquement, à tout vecteur $\vec{\omega}$, on peut associer un tenseur antisymétrique

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{jik} \omega_k \quad (1.32)$$

1.3 Opérateurs vectoriels et tensoriels

1.3.1 Notations

Dans un espace euclidien orthonormé d'axes Ox_i , \vec{e}_i désignant les vecteurs unitaires de la base de l'espace vectoriel associé, on définit les opérateurs gradient, divergence, laplacien et rotationnel par leurs composantes.

D'une manière générale, les *objets* de la Physique (et de la Mécanique des Fluides) sont des champs, c'est-à-dire des fonctions de l'espace et du temps associant à un point \vec{x} et à un instant t un scalaire $\varphi(\vec{x}, t)$, un vecteur $\vec{V}(\vec{x}, t)$ ou un tenseur d'ordre 2 (rarement plus) $\overline{\overline{\Sigma}}(\vec{x}, t)$. Les champs sont (sauf discontinuités locales traitées spécifiquement) continus et supposés dérivables *jusqu'à l'ordre utile*.

Pour compacter le formalisme les opérateurs de dérivation partielle s'écrivent à l'aide de la notation virgule. Ainsi

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} \equiv \varphi_{,t} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \equiv \varphi_{,i} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varphi(\vec{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \varphi_{,ij}$$

désignent respectivement la dérivée partielle par rapport au temps, par rapport à la variable d'espace x_i et la dérivée seconde par rapport à x_i et x_j .

1.3.2 Définitions

a) Gradient

L'opérateur *gradient* associé au champ scalaire $\varphi(\vec{x}, t)$ le champ vectoriel défini par

$$\overline{\text{grad}} \varphi = \varphi_{,i} \vec{e}_i \quad (1.33)$$

Il s'ensuit que les composantes du gradient sont

$$\varphi_{,i} = \overline{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{e}_i \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \text{ noté } \varphi_{,1} \text{ (direction } \vec{e}_1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \text{ noté } \varphi_{,2} \text{ (direction } \vec{e}_2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \text{ noté } \varphi_{,3} \text{ (direction } \vec{e}_3) \end{cases}$$

Si $\varphi(\vec{x}, t)$ est, par exemple, un champ de pression, le vecteur $\overline{\text{grad}} \varphi$ est orienté dans la direction où la pression varie le plus vite, il est dirigé vers les hautes pressions et son module indique, à chaque instant, l'intensité de la variation de pression par unité de distance dans cette direction.

Plus généralement le gradient d'un tenseur d'ordre n est un tenseur d'ordre $n+1$; par exemple $\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}$ est le tenseur d'ordre 2 (dit tenseur gradient de \vec{V}) défini par

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V} = V_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (1.34)$$

et qui a pour composantes $V_{i,j}$ soit
$$\begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

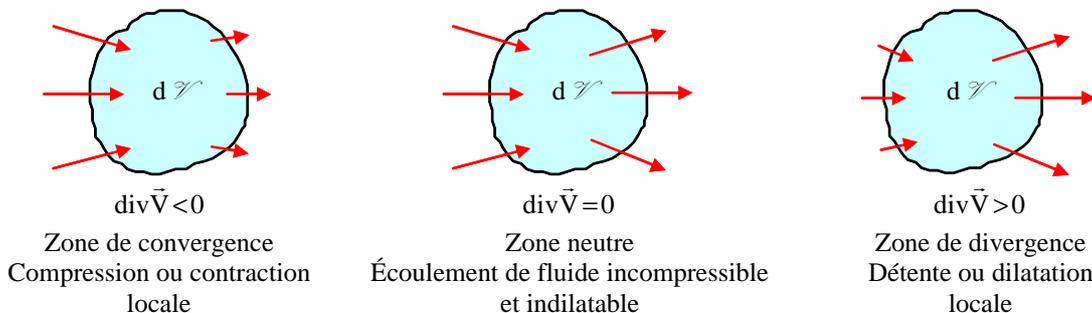
b) Divergence

L'opérateur *divergence* associée à un champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{x}, t)$ la fonction de points à valeurs scalaires

$$\text{div} \vec{V} = V_{i,i} \quad (1.36)$$

La comparaison de (1.34) et (1.36) montre que la divergence $V_{i,i}$ est la forme contractée du tenseur gradient $V_{i,j}$, c'est-à-dire $\text{div} \vec{V} = \text{Tr}\{ \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V} \}$.

Si $\vec{V}(\vec{x}, t)$ est, par exemple, le champ de vitesse dans un fluide, le champ scalaire $\text{div} \vec{V}$ indique l'intensité des contractions ou des expansions locales au sein du fluide. Cette notion peut être illustrée en considérant la quantité de fluide qui entre ou sort d'un élément de volume infinitésimal $d\mathcal{V}$ pendant l'élément de temps dt .



Plus généralement la divergence d'un tenseur d'ordre n est un tenseur d'ordre $n-1$; par exemple $\overline{\overline{\text{div}}} \vec{\Sigma}$ est le vecteur défini par

$$\overline{\text{div}} \overline{\Sigma} = \Sigma_{ij,j} \vec{e}_i \quad (1.37)$$

Notons que si φ est un champ scalaire, puisque $(\varphi \delta_{ij})_{,j} = \varphi_{,i}$, on a l'identité

$$\overline{\text{div}}(\overline{\varphi \mathbf{1}}) = \overline{\text{grad}} \varphi. \quad (1.38)$$

c) Rotationnel

L'opérateur *rotationnel* associé à un champ de vecteurs \vec{V} le champ de vecteurs défini par

$$\overline{\text{rot}} \vec{V} = \epsilon_{ijk} V_{k,j} \vec{e}_i \quad (1.39)$$

•Remarque : Le vecteur associé à $\overline{\text{grad}} \vec{V}$ a pour composantes $\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} V_{k,j}$; c'est donc le vecteur $\frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \vec{V}$.

d) Laplacien

Le laplacien, noté $\Delta \varphi$, d'un champ scalaire $\varphi(\vec{x}, t)$ est le scalaire défini par

$$\Delta \varphi = \overline{\text{div}}(\overline{\text{grad}} \varphi) = \varphi_{,ii} \quad (1.40)$$

Le laplacien, noté $\Delta \vec{V}$, d'un champ vectoriel $\vec{V}(\vec{x}, t)$ est le vecteur défini par

$$\Delta \vec{V} = \overline{\text{div}}(\overline{\text{grad}} \vec{V}) = V_{i,ji} \vec{e}_i \quad (1.41)$$

ou encore

$$\Delta \vec{V} = (\Delta V_i) \vec{e}_i$$

1.3.3 Notation dyadique

On simplifie les écritures en utilisant la notation dyadique qui introduit le vecteur symbolique nabla, noté $\vec{\nabla}$, dont les composantes formelles sont les opérateurs de dérivation partielle par rapport aux variables d'espace x_1, x_2, x_3 .

$$\vec{\nabla} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{noté } ,_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \text{noté } ,_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \text{noté } ,_3 \end{array} \right.$$

Opérateur	Notation
gradient $\overline{\text{grad}} \varphi$	$\vec{\nabla} \varphi$
tenseur gradient $\overline{\text{grad}} \vec{V}$	$\vec{\nabla} \vec{V}$
divergence $\overline{\text{div}} \vec{V}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$
vecteur divergence $\overline{\text{div}} \overline{\Sigma}$	$\vec{\nabla} \cdot \overline{\Sigma}$
rotationnel $\overline{\text{rot}} \vec{V}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$
laplacien $\Delta \varphi$	$\vec{\nabla}^2 \varphi$
Laplacien vectoriel $\Delta \vec{V}$	$\vec{\nabla}^2 \vec{V}$

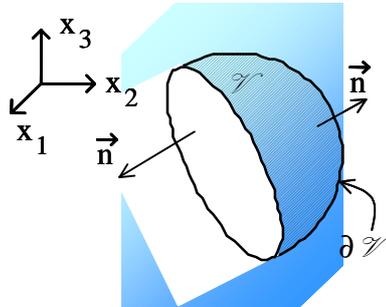
1.3.4 Identités

Identité	Notation dyadique
$\overline{\text{grad}}(\varphi + \psi) = \overline{\text{grad}}\varphi + \overline{\text{grad}}\psi$	$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi$
$\overline{\text{grad}}(\varphi\psi) = \varphi\overline{\text{grad}}\psi + \psi\overline{\text{grad}}\varphi$	$\vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi$
$\overline{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) = \overline{\text{rot}}\vec{U} + \overline{\text{rot}}\vec{V}$	$\vec{\nabla} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} + \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$
$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}}\varphi) = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi = \vec{0}$
$\overline{\text{rot}}(\varphi\vec{V}) = \varphi\overline{\text{rot}}(\vec{V}) + \overline{\text{grad}}\varphi \wedge \vec{V}$	$\vec{\nabla} \wedge (\varphi\vec{V}) = \varphi\vec{\nabla} \wedge \vec{V} + \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{V}$
$\text{div}(\vec{U} + \vec{V}) = \text{div}\vec{U} + \text{div}\vec{V}$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$
$\text{div}(\overline{\text{rot}}\vec{V}) = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$
$\text{div}(\varphi\vec{V}) = \varphi\text{div}(\vec{V}) + \overline{\text{grad}}\varphi \cdot \vec{V}$	$\vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{V}) = \varphi\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{V}$
$\text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \overline{\text{rot}}\vec{U} - \vec{U} \overline{\text{rot}}\vec{V}$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$
$\overline{\text{div}}(\overline{\overline{\varphi}}) = \overline{\text{grad}}\varphi$	$\vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{\varphi}}) = \vec{\nabla}\varphi$

1.3.5 Relations intégrales

a) Formules de Green-Ostrogradski

Soit \mathcal{V} un domaine volumique (connexe ou pas), de frontière $\partial\mathcal{V}$ sur laquelle est défini en tout point régulier le vecteur unitaire extérieur \vec{n} .



Si $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ est un champ scalaire, $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$ un champ vectoriel et $\overline{\overline{\Sigma}}(x_1, x_2, x_3)$ un champ tensoriel d'ordre 2, continus dans $(\mathcal{V} + \partial\mathcal{V})$ ayant des dérivées premières dans \mathcal{V} , alors

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \varphi \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\text{grad}}\varphi \, d\mathcal{V} \quad \text{soit} \quad \iint_{\partial\mathcal{V}} \varphi n_i \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \varphi_{,i} \, d\mathcal{V} \quad (1.42)$$

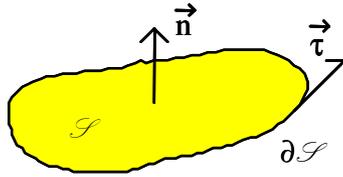
$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\vec{V} \, d\mathcal{V} \quad \text{soit} \quad \iint_{\partial\mathcal{V}} V_i n_i \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} V_{i,i} \, d\mathcal{V} \quad (1.43)$$

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \overline{\overline{\Sigma}} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\text{div}}\overline{\overline{\Sigma}} \, d\mathcal{V} \quad \text{soit} \quad \iint_{\partial\mathcal{V}} \Sigma_{ij} n_j \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \Sigma_{ij,j} \, d\mathcal{V} \quad (1.44)$$

Ces formules (ou théorème de la divergence) s'étendent naturellement à des tenseurs d'ordre supérieur à 2.

b) Formule de Stokes

Soit \mathcal{S} un domaine surfacique de frontière $\partial\mathcal{S}$ sur lequel est défini en tout point régulier le vecteur unitaire extérieur \vec{n} .



Si $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$ est un champ vectoriel continu dans $(\mathcal{S} + \partial\mathcal{S})$ ayant des dérivées premières dans \mathcal{S} , alors

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{\tau} d\ell = \iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \cdot \vec{n} dS \quad \text{soit} \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} V_i \cdot \tau_i d\ell = \iint_{\mathcal{S}} \epsilon_{ijk} V_{k,j} n_i dS \quad (1.45)$$

où le premier membre est la circulation du vecteur \vec{V} le long de $\partial\mathcal{S}$ (*parcouru dans le sens direct autour de \vec{n}*) et le second membre le flux du rotationnel de \vec{V} à travers \mathcal{S} .

PREMIÈRE PARTIE

Chapitre 2 Introduction

2.1 Concepts généraux

On appelle Mécanique l'étude des déplacements et des déformations des corps au cours du temps, y compris l'étude des conditions qui entraînent ces mouvements. Nous considérerons ici la Mécanique au sens restreint où n'interviennent ni changements d'état physique, ni transformations chimiques (vaporisation, cavitation, combustion...).

La dynamique est la partie de la Mécanique qui étudie (sans expliciter la variable température) les mouvements ou le repos dans leurs rapports avec les forces qui les engendrent.

La cinématique fournit le cadre spatio-temporel dans lequel sont décrits les mouvements dans l'espace euclidien à 3 dimensions. La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse.

2.1.1 L'état fluide

Le physicien distingue classiquement 3 états de la matière, solide, liquide et gazeux, en regroupant sous le vocable *fluide* les gaz et la plupart des liquides. À l'échelle microscopique, ce qui caractérise les fluides, c'est que les molécules ne sont pas bloquées dans leurs orientations relatives; elles ont ce degré de liberté (de désordre) que n'ont pas les molécules dans les solides.

Leurs propriétés communes sont qu'ils n'ont pas de forme propre, c'est-à-dire qu'ils sont dépourvus de rigidité; les forces nécessaires pour engendrer des déformations par glissement et assez lentes sont extrêmement petites.

Cette distinction entre solides et fluides n'est pas parfaitement nette, puisqu'on trouve des corps comme les gelées, les peintures, les pâtes, certaines solutions concentrées de polymères, qui manifestent à la fois des comportements de solides (pendant des temps courts) et des comportements de liquides (pendant des temps longs).

Les liquides: Les molécules sont liées en distance ce qui en limite le désordre. Ils occupent un volume défini et sont susceptibles de s'organiser en gouttes. Leur densité est telle qu'on définit d'ordinaire (assez mal) les liquides par le fait qu'en situation de repos, ils présentent une surface libre discernable et perpendiculaire au champ de gravité local.

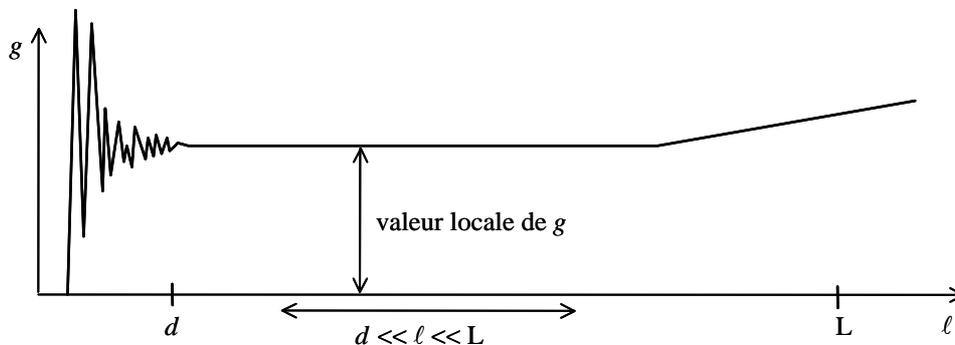
Les gaz: Les molécules ne sont pas liées en distance et les gaz occupent tout le volume disponible. Les forces permettant d'engendrer des déformations volumiques (contraction ou dilatation) sont faibles.

2.1.2 Le concept de milieu continu

La matière a une structure discontinue et la notion de milieu continu est un pur schéma. Elle consiste à admettre que la masse et toutes ses propriétés sont réparties continûment dans le matériau (ce qui n'exclut pas les discontinuités aux interfaces). Bien entendu ce schéma ne prétend représenter que les phénomènes macroscopiques dont les échelles caractéristiques sont très grandes devant la distance intermoléculaire moyenne. Comme il n'est pas question d'ignorer complètement les phénomènes dont le siège est à l'échelle moléculaire (comme celui de la diffusion), ceux-ci devront être représentés à travers une description macroscopique de leurs conséquences à grande échelle.

Le concept du continuum présente l'immense avantage d'autoriser le calcul différentiel et intégral dont les outils sont présentés au [Chapitre 1](#).

La première question concerne la définition de valeurs locales pour des grandeurs matérielles comme la masse, l'enthalpie, la vitesse ou la contrainte. Imaginons qu'un instrument de mesure d'une grandeur g puisse être miniaturisé à volonté, et portons la mesure de g en fonction de la dimension ℓ du volume d'observation ℓ^3 . Si ℓ est du même ordre que la distance moyenne d (quelque 10^{-10} m) entre molécules, g dépend du nombre de molécules observées (quelques unités), elle oscille et semble mal définie. Si $\ell \gg d$, le nombre de molécules observées est très grand et g est une valeur statistique des observations qui ne dépend plus de ℓ . Cette valeur ℓ doit cependant rester très petite devant la taille L (~ 1 m) de l'expérience pour justifier que l'on considère la mesure comme locale ou ponctuelle.



On admet donc que le volume observé, que nous désignerons *particule fluide*, est assez grand pour contenir un très grand nombre de molécules et assez petit pour définir une valeur "locale" et un élément de volume infinitésimal \mathcal{V}_ℓ permettant de justifier du calcul différentiel et intégral. En mécanique des fluides une bonne représentation locale des micro phénomènes nécessite de considérer des particules de l'ordre de 1 mm^3 à 1 cm^3 , c'est-à-dire d'un diamètre $\ell \sim 10^{-3}$ à 10^{-2} m. Dans des conditions normales, le libre parcours moyen dans les gaz est de l'ordre de 10^{-9} m et un volume \mathcal{V}_ℓ de 1 mm^3 d'air, par exemple, contient $2,7 \cdot 10^{16}$ molécules ce qui assure la validité de l'hypothèse.

De même on utilise couramment en Météorologie, dans l'étude de perturbations atmosphériques de l'ordre de 500 km, des "particules fluides" dont la taille caractéristique est de 10 km.

a) Masse volumique locale

Les considérations précédentes permettent de définir des densités volumiques

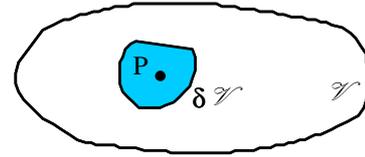
$$g = \lim_{\delta \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_i} \left[\frac{\delta G}{\delta \mathcal{V}} \right] \quad (2.1)$$

δG étant la valeur de la grandeur considérée portée par le volume $\delta \mathcal{V}$. Toute grandeur matérielle scalaire peut être définie à l'aide de (2.1). Ainsi, la masse volumique est définie localement au point P par:

$$\rho = \lim_{\delta \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_i} \left[\frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}} \right]$$

d'où l'expression de la masse d'un volume matériel \mathcal{V}

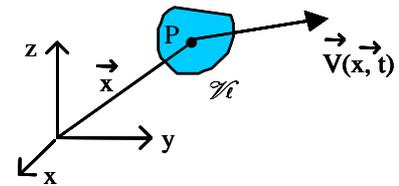
$$M(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}, t) d\mathcal{V}$$



b) Vitesse locale

Un raisonnement semblable au précédent permet de définir la vitesse $\vec{V}(\vec{x}, t)$ au point \vec{x} . Si N est le nombre de molécules, de vitesse individuelle \vec{v}_i et de masse m_i , contenues dans \mathcal{V}_i , \vec{V} est la vitesse du centre de masse de ces N molécules:

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$



soit encore

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \lim_{\delta \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_i} \left[\frac{\delta \vec{P}}{\delta m} \right] \quad (2.2)$$

où $\delta \vec{P}$ est la quantité de mouvement des molécules.

c) Contrainte locale

Soit $\partial \mathcal{V}$ la frontière (fictive) d'un volume fluide \mathcal{V} . Le fluide extérieur à \mathcal{V} exerce sur le fluide intérieur des tensions qui se transmettent à travers l'enveloppe $\partial \mathcal{V}$. Soient P un point de l'enveloppe, δS un élément de surface autour de P et \vec{n} la normale unitaire orientée vers l'extérieur. La force élémentaire $\delta \vec{F}$ qui s'exerce sur δS est proportionnelle à δS :

$$\delta \vec{F} = \vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) \delta S \quad (2.3)$$

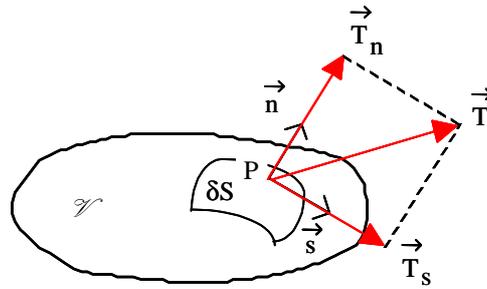
Le vecteur \vec{T} a la dimension d'une force par unité de surface et correspond à la contrainte moyenne qui s'exerce sur δS . Lorsque $\delta S \rightarrow \delta S_\ell$, le rapport $\delta \vec{F} / \delta S$ tend vers une limite finie indépendante de la forme de l'élément δS .

Cette valeur limite définit la contrainte locale au point P :

$$\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \lim_{\delta S \rightarrow \delta S_\ell} \left[\frac{\delta \vec{F}}{\delta S} \right] \quad (2.4)$$

Il est souvent commode de décomposer la contrainte en ses composantes normale et tangentielle:

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_s \vec{s}$$



2.1.3 Limites de l'hypothèse de continuité

L'hypothèse de continuité n'est pas admissible dès lors que le libre parcours moyen des molécules n'est pas très petit devant la dimension caractéristique du problème considéré. C'est le cas des problèmes suivants qui ne sont pas résolubles dans le cas de la Mécanique des Milieux Continus:

- 1- Les phénomènes de transport (diffusion, conduction) dus à l'agitation moléculaire; nous verrons cependant qu'on peut étudier ces phénomènes en Mécanique des Fluides sans référence à l'intimité de la structure moléculaire de même qu'en Thermodynamique on traite de la chaleur sans faire appel à sa signification moléculaire,
- 2- Le mouvement brownien d'une suspension de particules solides dans un liquide,
- 3- Certains écoulements d'huiles à grosses molécules; les molécules d'huile pouvant être du même ordre de grandeur que le jeu des pièces mécaniques à lubrifier,
- 4- Les problèmes d'aérodynamique dans des gaz très raréfiés.

2.1.4 Surfaces de discontinuité

Sous certaines conditions, on observe dans un fluide en mouvement des régions où certaines grandeurs matérielles (pression, vitesse, masse volumique...) varient très rapidement au point que la notion de continuité est mise en défaut localement. Ces régions sont assimilables à des *surfaces de discontinuité*. C'est le cas d'une surface libre ou d'une poche de cavitation et plus généralement de l'interface entre des fluides non miscibles. C'est également le cas des ondes de choc ou de la solution localement singulière de certaines théories comme le modèle de *fluide parfait*. La continuité s'entend alors de part et d'autre de ces surfaces.

2.2 Propriétés thermodynamiques des fluides

2.2.1 Axiome de l'équilibre local

Un *système thermodynamique* est un système matériel séparé de l'extérieur par une surface fermée permettant les échanges de matière, de travail et de chaleur. Dans un fluide en mouvement, tout volume isolé par la pensée (volume de contrôle) est un système *hors d'équilibre*. Les temps caractéristiques des déséquilibres correspondant aux changements de formes et aux déplacements sont de l'ordre de

$$\frac{L}{U} \approx 1 \text{ s}$$

où L est la dimension typique de l'écoulement (disons $L \sim 1 \text{ m}$) et U une vitesse caractéristique (disons $U \sim 1 \text{ ms}^{-1}$), et sont extrêmement longs par rapport au temps caractéristique de l'agitation moléculaire. Celui-ci est en effet de l'ordre de

$$\frac{d}{c} \approx 10^{-12} \text{ s}$$

où d est le libre parcours moyen moléculaire ($d \sim 10^{-9} \text{ m}$) et c une vitesse caractéristique d'agitation (disons $c \sim 10^3 \text{ ms}^{-1}$). La différence considérable entre ces échelles de temps permet d'admettre que le mouvement fluide est tellement lent qu'il ne change pas les propriétés thermodynamiques résultant des collisions extrêmement nombreuses des molécules même pendant des temps très courts. On peut donc en général considérer les particules fluides comme étant en *équilibre local thermostatique*. Cette approximation est bien justifiée pour toutes les mouvements dans les fluides dont les temps caractéristiques sont supérieurs à 10^{-6} s , ce qui est presque toujours le cas.

2.2.2 Équation d'état

C'est un fait d'expérience que l'état d'un système thermostatique simple (nous excluons les mélanges) est déterminé uniquement par deux paramètres, dits *variables d'état*. La pression P et la masse volumique ρ sont des *variables d'état*. Toutes les autres *variables d'état* (la température Θ ou l'enthalpie h , par exemple) sont ainsi fonctions de ces deux paramètres d'état, et les relations qui les lient sont appelées *équations d'état*. L'état d'un système peut donc être représenté par une relation de la forme

$$P = P(\rho, \Theta)$$

Les équations d'état sont soit obtenues à partir d'observations expérimentales, soit déduites d'une théorie cinétique.

- Les gaz *idéaux*: Dans le cas des gaz assez dilués (jusqu'à quelques atmosphères), l'expérience montre que dans des conditions normales de température, P , ρ et Θ sont liés par la loi des gaz *idéaux* (nous réservons l'adjectif *parfait* pour les fluides non visqueux):

$$\boxed{P = \rho R \Theta} \quad (2.5)$$

où la constante R du gaz est le rapport de la constante universelle des gaz *idéaux* \mathcal{R} ($\mathcal{R} = 8\,314,3 \text{ Joules par kilomole et par degré}$) et de la masse molaire du gaz considéré:

$$R = \mathcal{R}M$$

Ainsi, pour l'air ($M = 28,964 \text{ kg/kmol}$), $R = 287,06 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- Les gaz *denses*: On utilise la forme correctrice de Van der Waals:

$$\frac{P}{\rho r \Theta} = 1 + \rho A_1(\Theta) + \rho^2 A_2(\Theta) + \dots$$

• Les liquides: Ils sont très peu compressibles et peu dilatables; on peut en première approximation les considérer comme parfaitement isovolumes. L'équation d'état est alors:

$$\rho = \text{constante}$$

2.2.3 Premier principe et énergie interne

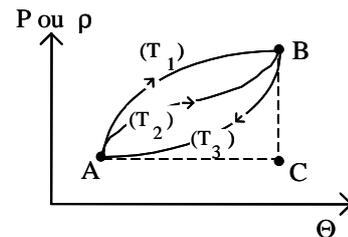
Le premier principe de la thermodynamique traduit le principe de la conservation de l'énergie.

a) Systèmes en équilibre:

Dans un système matériel en équilibre subissant une transformation quelconque, la somme du travail des forces extérieures W et de la quantité de chaleur Q fournie au système est:

- 1- nulle si la transformation est fermée (état final identique à l'état initial),
- 2- indépendante du chemin suivi sur un diagramme d'état.

On peut toujours ramener la comparaison de deux transformations non fermées (T_1) et (T_2) à la comparaison de deux transformations fermées, en leur associant une même transformation de retour (T_3). Ceci montre que la proposition 2 résulte directement de la proposition 1.



Il résulte de ce principe que, si A et B sont deux états d'équilibre voisins, la somme du travail δW et de la quantité de chaleur δQ fournis pour passer de A à B est une différentielle totale exacte:

$$\delta W + \delta Q = de \quad (2.6)$$

bien que δW et δQ dépendent chacun du chemin thermodynamique suivi. La grandeur e ainsi introduite est une variable d'état appelée *énergie interne*.

b) Systèmes hors d'équilibre:

Toute partie d'un fluide en mouvement est un système *hors d'équilibre*. Les états A et B peuvent être considérés comme des états d'équilibre du point de vue thermodynamique, mais pas du point de vue mécanique. L'axiome de l'équilibre local conduit à considérer qu'il y a additivité (et aucune dépendance mutuelle) entre, d'une part la somme

$$\delta W_{\text{rév}} + \delta Q_{\text{rév}} = de$$

qui permettrait de faire passer le système en équilibre de l'état thermodynamique A à l'état B, et d'autre part la somme

$$\delta W_{\text{méc}} + \delta Q_{\text{méc}} = dK$$

qui permet de faire évoluer *l'état du mouvement* de l'état A à l'état B. La grandeur K est l'*énergie cinétique* du système considéré.

L'expression du premier principe pour les fluides en mouvement est donc en définitive:

$$\boxed{\delta W + \delta Q = de + dK} \quad (2.7)$$

Il reste à exprimer chacun des termes en fonction des variables d'état ou de mouvement du fluide. Nous noterons \mathcal{V} un volume de fluide de surface enveloppe \mathcal{S}

- **Énergie cinétique:** Par définition $dK = \frac{1}{2} \rho V^2 d\mathcal{V}$ ($\vec{V}(\vec{x}, t)$ étant la vitesse locale).

- **Travail des forces extérieures:** En notant \vec{f} la densité de forces volumiques, \vec{T} la contrainte locale (voir §6.1.1) et \mathbf{P}_e la puissance des forces extérieures:

$$dW = \mathbf{P}_e dt = \left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \vec{T} \cdot \vec{V} dS \right] dt \quad (2.8)$$

Remarquons que le schéma qui consiste à séparer les changements d'état par transformation réversibles (succession d'états d'équilibre) et les changements d'état de mouvement conduit à affecter à $dW_{\text{rév}}$ la contribution du travail des forces de pression qui est contenue dans le dernier terme de (2.8). Le travail des forces de pression pour faire varier de $d\mathcal{V}$ le volume d'une masse unitaire de fluide est:

$$\delta W_{\text{rév}} = -P d\mathcal{V} = -P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dt \quad (2.9)$$

Le travail fourni à un système matériel fini dans une transformation réversible s'écrit donc:

$$dW_{\text{rév}} = \left[\iiint_{\mathcal{V}} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} d\mathcal{V} \right] dt \quad (2.10)$$

- **Quantité de chaleur:** On différencie les contributions volumiques (densité de sources volumiques distribuées r) des contributions surfaciques (par conduction par exemple). Par convention, la densité surfacique de flux à travers la surface \mathcal{S} délimitant le volume \mathcal{V} est notée $-\vec{q} \cdot \vec{n}$ de façon à compter un flux positif quand il correspond à un apport pour le système. En exprimant la puissance thermique fournie au système on écrira donc:

$$dQ = \left[\iiint_{\mathcal{V}} r d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \right] dt \quad (2.11)$$

$\delta Q_{\text{rév}}$ dépend du chemin thermodynamique suivi sur un diagramme d'état, et l'usage a conduit à choisir un chemin conventionnel constitué:

- d'un tronçon à pression (ou masse volumique) constante (AC sur le diagramme),
- d'un tronçon à température constante (CB sur le diagramme).

Considérons la quantité de chaleur fournie à l'unité de masse par un processus réversible.

$$\text{On a:} \quad \delta Q_{\text{rév}} = de - \delta W_{\text{rév}} = de + P d\mathcal{V} \quad (2.12)$$

On appelle *capacité calorifique* la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse pour augmenter sa température de 1 K et l'on distingue la *capacité calorifique à pression constante*:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta \Theta} \right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta} \right)_p + P \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \right)_p \quad (2.13)$$

et la *capacité calorifique à volume constant*:

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta \Theta} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta} \right)_v \quad (2.14)$$

• Sur le tronçon AC du diagramme (à P ou ρ constante), on a donc:

$$dQ_{(P)} = C_p d\Theta \quad ; \quad dQ_{(\mathcal{V})} = C_v d\Theta \quad (2.15)$$

On pourra expliciter la densité d'énergie interne e en utilisant sa propriété d'être une différentielle exacte:

$$\begin{cases} de = \left. \frac{\partial e}{\partial \Theta} \right|_v d\Theta + \left. \frac{\partial e}{\partial \mathcal{V}} \right|_\Theta d\mathcal{V} = C_v d\Theta + \left. \frac{\partial e}{\partial \mathcal{V}} \right|_\Theta d\mathcal{V} \\ de = \left. \frac{\partial e}{\partial \Theta} \right|_p d\Theta + \left. \frac{\partial e}{\partial P} \right|_\Theta dP = C_p d\Theta + \left. \frac{\partial e}{\partial P} \right|_\Theta dP \end{cases} \quad (2.16)$$

Pour l'instant les dérivées partielles $(\partial e / \partial \mathcal{V})|_\Theta$ et $(\partial e / \partial P)|_\Theta$ ne sont pas connues, pas plus que la quantité de chaleur $\delta Q_{(\Theta)}$, associée au tronçon CB. On pourra exprimer que la quantité de chaleur fournie est la somme des contributions à pression (ou volume) constant (tronçon AC) et à température constante (tronçon CB):

$$\begin{cases} \delta Q = \delta Q_{(P)} + \delta Q_{(\Theta)} \\ \delta Q = \underbrace{\delta Q_{(\mathcal{V})}}_{\text{tronçon AC}} + \underbrace{\delta Q_{(\Theta)}}_{\text{tronçon CB}} \end{cases} \quad (2.18)$$

c'est-à-dire, en utilisant (2.15) et en introduisant deux coefficients a et b :

$$\begin{cases} \delta Q = C_p \delta \Theta + a \delta P \\ \delta Q = \underbrace{C_v \delta \Theta}_{\text{tronçon AC}} + \underbrace{b \delta \mathcal{V}}_{\text{tronçon CB}} \end{cases} \quad (2.19)$$

Mais ceci est encore provisoire puisque les coefficients a et b ne sont pas des propriétés du fluide mais des paramètres caractéristiques de la transformation thermodynamique en cours. Leur expression sera déterminée au [§2.2.5](#) après avoir exprimé le second principe de la thermodynamique.

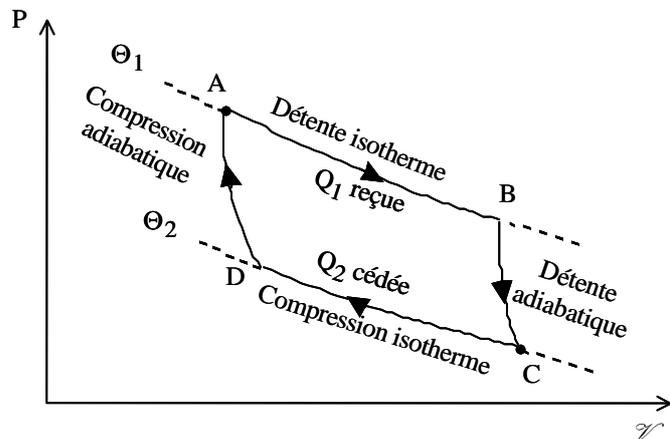
2.2.4 Second principe et entropie

Nous avons vu que toute partie d'un fluide en mouvement est un système thermodynamique *hors d'équilibre*. Les transformations réelles sont irréversibles et l'expérience montre qu'elles se font toujours dans un sens déterminé. Ceci n'est pas contenu dans le principe de conservation de l'énergie et il est nécessaire d'admettre un second principe, dit *Principe de Carnot*, qui permet de déterminer le sens des irréversibilités. Nous en donnons ici deux énoncés équivalents; le premier est dû à Kelvin, le second à Clausius:

1- On ne peut recueillir du travail à l'aide d'un système associé à une seule source de chaleur.

2- Une transformation dont le seul résultat est de transférer de la chaleur d'un corps froid vers un corps chaud est impossible.

La machine thermique la plus simple compatible avec le principe de Carnot utilise donc deux sources de chaleur. Elle emprunte une quantité de chaleur Q_1 ($Q_1 > 0$) à la source chaude et en restitue une partie Q_2 ($Q_2 < 0$; $|Q_2| < Q_1$) à la source froide. La différence $Q_1 - |Q_2|$ apparaît sous forme de travail. Le rendement de la machine est défini par le rapport:



$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1 \quad (2.20)$$

Il résulte du second principe que *toutes les machines thermiques fonctionnant entre deux températures données Θ_1 et Θ_2 ont le même rendement*. C'est le théorème de Carnot qui affirme que η (et donc Q_2/Q_1) ne dépend que de Θ_1 et Θ_2 . Cette propriété fondamentale permet de construire une échelle universelle de température (c'est-à-dire liée à aucune propriété d'un corps quelconque), dite échelle de Kelvin, telle que:

$$\eta = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1} \quad \text{et donc} \quad \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \quad (2.21)$$

• Dans une transformation réversible fermée, on a: $\frac{Q_1}{\Theta_1} + \frac{Q_2}{\Theta_2} = 0$

alors qu'en présence d'irréversibilités: $\frac{Q_1}{\Theta_1} + \frac{Q_2}{\Theta_2} < 0$

Toute transformation fermée peut être décomposée en une suite de n transformations. À chaque étape, la source chaude est à la température Θ_i et cède au système la quantité de chaleur Q_i , et l'on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\Theta_i} \leq 0$$

l'égalité ne valant que pour des transformations réversibles. Dans le cas d'une décomposition continue cette propriété devient :

$$\oint \frac{\delta Q}{\Theta} \leq 0$$

• Dans le cas d'une transformation réversible non fermée d'un système passant d'un état A à un état B $\int_A^B \frac{\delta Q}{\Theta}$ doit être indépendant du chemin suivi. On peut donc écrire :

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{\Theta} = s(B) - s(A)$$

ou pour une transformation infinitésimale : $\frac{\delta Q}{\Theta} = ds$ (2.22)

La grandeur s est une variable d'état, appelée *entropie*, et définie à une constante additive près; ds est une différentielle totale exacte.

2.2.5 Forme différentielle de l'énergie interne et de l'entropie

L'expression (2.22) du second principe peut maintenant permettre de déterminer les coefficients a et b que nous avons introduits (2.19) sous la forme :

$$\begin{cases} \delta Q = C_p \delta \Theta + a \delta P \\ \delta Q = \underbrace{C_v \delta \Theta}_{\text{tronçon AC}} + \underbrace{b \delta \mathcal{V}}_{\text{tronçon CB}} \end{cases} \quad (2.23)$$

en considérant dans le premier cas Θ et P et dans le second cas Θ et \mathcal{V} comme variables d'état indépendantes. Les deux coefficients a et b doivent être tels que :

$$\begin{cases} de = \delta Q - P \delta \mathcal{V} & \text{(1er principe)} \\ ds = \frac{\delta Q}{\Theta} & \text{(2nd principe)} \end{cases} \quad (2.24)$$

soient des différentielles totales exactes.

• Prenons d'abord P et Θ comme variables indépendantes. On obtient en combinant la première ligne de (2.23) et (2.24) :

$$\begin{cases} de = C_p \delta\Theta + a \delta P - P \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P \delta\Theta + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \Big|_\Theta \delta P \right] \\ ds = \frac{C_p}{\Theta} \delta\Theta + \frac{a}{\Theta} \delta P \end{cases} \quad (2.25)$$

d'où les conditions:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right) \Rightarrow \frac{\partial C_p}{\partial P} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P = \frac{\partial a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial s}{\partial \Theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right) \Rightarrow \frac{1}{\Theta} \frac{\partial C_p}{\partial P} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial a}{\partial \Theta} - \frac{a}{\Theta^2} \end{cases}$$

qui conduisent finalement à: $a = -\Theta \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P$ (2.26)

• Prenons maintenant \mathcal{V} et Θ comme variables indépendantes. On obtient en combinant la seconde expression de (2.23) et (2.24):

$$\begin{cases} de = C_v \delta\Theta + (b - P) \delta \mathcal{V} \\ ds = \frac{C_v}{\Theta} \delta\Theta + \frac{b}{\Theta} \delta \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.27)$$

d'où les conditions:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial e}{\partial \mathcal{V}} \right) \Rightarrow \frac{\partial C_v}{\partial \mathcal{V}} = \frac{\partial (b - P)}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \left(\frac{\partial s}{\partial \Theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathcal{V}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\Theta} \frac{\partial C_v}{\partial \mathcal{V}} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial b}{\partial \Theta} - \frac{b}{\Theta^2} \end{cases}$$

qui conduisent finalement à: $b = \Theta \frac{\partial P}{\partial \Theta} \Big|_{\mathcal{V}}$ (2.28)

Nous pouvons maintenant substituer dans (2.23) a et b par leur expression:

$$\begin{cases} \delta Q = C_p \delta\Theta - \Theta \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P \delta P \\ \delta Q = C_v \delta\Theta - \Theta \frac{\partial P}{\partial \Theta} \Big|_{\mathcal{V}} \delta \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.29)$$

De la même façon, la substitution dans (2.25) et (2.27) donne respectivement:

$$\begin{cases} de = \left[C_p - P \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P \right] \delta\Theta - \left[\Theta \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P + P \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \Big|_\Theta \right] \delta P \\ ds = \frac{C_p}{\Theta} \delta\Theta - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \Theta} \Big|_P \delta P \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} de = C_v \delta\Theta + \left[\Theta \frac{\partial P}{\partial \Theta} \Big|_{\mathcal{V}} - P \right] \delta \mathcal{V} \\ ds = \frac{C_v}{\Theta} \delta\Theta + \frac{\partial P}{\partial \Theta} \Big|_{\mathcal{V}} \delta \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.31)$$

L'identification de ces deux variantes conduit à une relation entre C_p et C_v connue sous le nom de formule de Mayer:

$$C_p - C_v = \Theta \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right|_P \quad (2.32)$$

2.2.6 Équations d'état canoniques, enthalpie

À l'aide des deux premiers principes on peut déduire la relation de Gibbs:

$$de = \Theta ds - P d(1/\rho) \quad (2.33)$$

ou, en introduisant l'enthalpie, variable d'état définie par $h = e + P/\rho$:

$$dh = \Theta ds + (1/\rho) dP \quad (2.34)$$

Puisque ces deux expressions ne font intervenir que des variables d'état et donc des différentielles totales exactes, on peut écrire respectivement:

$$\Theta = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad ; \quad \frac{P}{\rho^2} = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.35)$$

$$\Theta = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_\rho \quad ; \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_s \quad (2.36)$$

Les expressions de l'énergie interne e en fonction des variables s et ρ , ou de l'enthalpie h en fonction de s et P sont appelées équations d'état canoniques. Si on connaît $e=e(s, \rho)$ ou $h=h(s, P)$ on peut directement en déduire une relation entre P , ρ et Θ (l'équation thermique) et une relation entre e , Θ et ρ ou entre h , Θ et P (l'équation d'état calorique).

2.2.7 Quelques définitions

Nous verrons (§8.2 et §9.1) que dans le cas des écoulements de fluides incompressibles les seules données physiques nécessaires à la résolution des problèmes de dynamique des fluides sont la masse volumique ρ et la viscosité μ (avec éventuellement la conductivité thermique K).

Dans le cas des écoulements de fluides compressibles d'autres paramètres physiques interviennent.

- On définit le *coefficient de compressibilité* χ par la relation:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_\Theta \quad (2.37)$$

Dans le cas d'un gaz idéal, le coefficient de compressibilité est inversement proportionnel à la pression du gaz:

$$\chi = \frac{1}{P}$$

- On définit aussi le *coefficient de dilatation* à pression constante:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right)_p \quad (2.38)$$

Pour un gaz idéal, le coefficient de dilatation est inversement proportionnel à la température du gaz:

$$\chi = \frac{1}{\Theta}$$

• Nous avons déjà introduit (§2.2.3) les chaleurs spécifiques C_p et C_v respectivement à pression et à volume constant. Elles sont définies par:

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial \Theta} \right)_p \quad (2.39)$$

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial \Theta} \right)_p \quad (2.40)$$

où h et e sont l'enthalpie et l'énergie interne par unité de masse. Dans le cas des gaz idéaux ces deux fonctions ne dépendent que de la température et l'on peut donc écrire:

$$C_p = \frac{dh}{d\Theta}$$

$$C_v = \frac{de}{d\Theta}$$

Puisque, par ailleurs, on a $h = e + P/\rho = e + R\Theta$, les chaleurs spécifiques sont reliées par la relation:

$$C_p = C_v + R \quad (2.41)$$

Le rapport γ des chaleurs spécifiques intervient aussi très souvent: $\gamma = C_p/C_v$. Dans le cas d'un gaz idéal on peut exprimer C_p et C_v en fonction de R et γ seulement:

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \quad ; \quad C_v = \frac{1}{\gamma-1} R \quad (2.42)$$

• Rappelons pour finir que la célérité c du son dans un milieu est définie par

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.43)$$

Chapitre 3 Cinématique

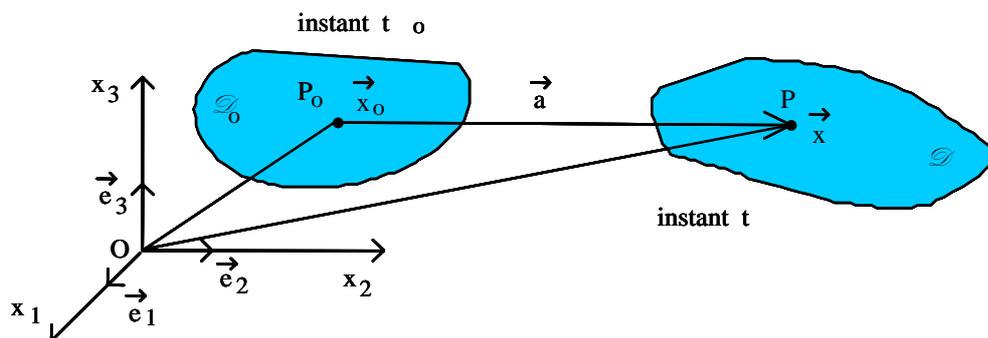
La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des forces qui les engendrent.

3.1 Description du mouvement

3.1.1 Notions de référentiel et de configuration

On appelle *référentiel* une relation bijective entre l'ensemble des positions occupées par un objet et les particules matérielles de cet objet. Nous dirons que \vec{x} est la position et t l'instant où un événement est observé dans le référentiel choisi. On rapporte l'espace euclidien à 3 dimensions à un repère orthonormé de base $(\vec{e}_i, i=1, 2, 3)$ et d'origine O .

Considérons un certain domaine \mathcal{S}_0 occupé, à un certain instant $t=t_0$, par un système matériel continu; cela signifie que chaque particule de \mathcal{S}_0 peut être identifiée (nommée) par sa position \vec{x}_0 (initiale ou de référence) à cet instant (initial ou de référence). Le mouvement est la relation de correspondance entre chacune des particules \vec{x}_0 et les positions successives qu'elles occupent au cours du temps.



La matière qui occupe \mathcal{S}_0 à t_0 se déplace et occupe le domaine \mathcal{S} à l'instant t . \mathcal{S}_0 est appelé *configuration de référence* et \mathcal{S} *configuration courante*.

Chaque point P de \mathcal{S} peut être identifié à une particule matérielle initialement située en un point P_0 de \mathcal{S}_0 . Le mouvement du système matériel est décrit en spécifiant l'ensemble des positions \vec{x} en fonction de \vec{x}_0 et de $(t-t_0)$

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t - t_0)$$

Le temps étant défini à une constante près, on choisit le plus souvent $t_0=0$, soit:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t) \quad (3.1)$$

Les composantes x_{0i} de \vec{x}_0 sont appelées *coordonnées matérielles* et les composantes x_i de \vec{x} *coordonnées géométriques*.

Le vecteur déplacement d'une particule est défini par:

$$\vec{a} = \vec{x} - \vec{x}_0 \quad (3.2)$$

Une configuration est dite réalisable si elle satisfait au principe d'exclusion qui interdit à 2 particules d'occuper simultanément la même position. L'application (3.1) est bijective pour toute configuration réalisable, c'est dire qu'on peut identifier chaque particule \vec{x}_0 (c'est-à-dire sa position de référence) en fonction de ses coordonnées courantes à l'instant t:

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\vec{x}, t) \quad (3.3)$$

La description du mouvement peut être formulée

- à l'aide des coordonnées matérielles \vec{x}_0 ; c'est la description de Lagrange; les 4 variables indépendantes ($x_{01}, x_{02}, x_{03}, t$) sont appelées *variables de Lagrange*,

- ou à l'aide des coordonnées géométriques \vec{x} ; c'est la description d'Euler; les 4 variables indépendantes (x_1, x_2, x_3, t) sont appelées *variables d'Euler*.

3.1.2 Description Lagrangienne

Le point de vue de Lagrange consiste à considérer une particule bien définie comme un point matériel et à caractériser le mouvement par ses positions successives. Ceci nécessite donc que l'on identifie la particule qui est considérée, par exemple par sa position initiale $\vec{x}(\vec{x}_0, 0) = \vec{x}_0$.

Le mouvement est alors caractérisé par les *équations paramétriques* représentées par les composantes de la relation (3.1):

$$x_i = x_i(\vec{x}_0, t) \quad ; \quad i=1, 2, 3$$

qui définissent la *trajectoire* de la particule ([§3.4.1](#)).

Le déplacement est exprimé en fonction des variables matérielles par:

$$\vec{a}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}(\vec{x}_0, t) - \vec{x}_0 \quad (3.4)$$

Le vecteur vitesse est défini comme le taux de variation du vecteur déplacement:

$$\vec{V}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} - \vec{x}_0] = \frac{\partial \vec{x}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

(puisque \bar{x}_o est constant pour une particule donnée) et le vecteur accélération par:

$$\boxed{\bar{\gamma}(\bar{x}_o, t) = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{x}(\bar{x}_o, t)}{\partial t^2}} \quad (3.6)$$

La description Lagrangienne présente une utilité certaine, par exemple lorsqu'on veut suivre un traceur dans un écoulement, mais elle conduit aussi à des difficultés d'analyse considérables dès que l'on souhaite exprimer le gradient de la vitesse puisque les dérivations spatiales portent alors sur des particules différentes; c'est pourquoi on lui préfère le plus souvent la description Eulerienne.

3.1.3 Description Eulerienne

La représentation d'Euler consiste à caractériser le mouvement à l'aide des coordonnées géométriques \bar{x} . Elle est équivalente à la description Lagrangienne puisque la vitesse $\bar{V}(\bar{x}, t)$ du fluide au point \bar{x} à l'instant t est aussi la vitesse $\bar{V}(\bar{x}_o, t)$ de la particule \bar{x}_o qui se trouve en ce point à cet instant.

La difficulté inhérente au point de vue d'Euler est une certaine complication de l'expression de l'accélération d'une particule fluide. La dérivée partielle $\partial \bar{V} / \partial t$ représente, non pas la variation de vitesse d'une particule donnée, mais la variation de vitesse en un point fixé; ce n'est donc pas l'accélération d'une particule qui, par nature, est une quantité Lagrangienne. Cette remarque est valable pour toute grandeur matérielle (portée par le matériau) dont on souhaite exprimer la variation temporelle. On appellera *dérivée particulaire* le taux de variation temporelle d'une grandeur matérielle dans le système de coordonnées Euleriennes (\bar{x}, t) .

L'accélération Eulerienne sera exprimée (§3.2.2) comme un cas particulier de la dérivation particulaire que nous allons d'abord expliciter (§3.2.1)

3.2 Dérivée particulaire

3.2.1 Taux de variation d'une grandeur matérielle

Soit φ la fonction de point (scalaire, vectorielle ou tensorielle) d'une grandeur matérielle. Elle peut aussi bien être décrite en mode de Lagrange ou en mode d'Euler: $\varphi(\bar{x}_o, t) = \varphi(\bar{x}, t)$

Le taux de variation de φ lorsqu'on suit une particule dans son mouvement est obtenu en dérivant φ par rapport au temps à \bar{x}_o constant. Désignons par $d\varphi/dt$ ce taux de variation¹

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left. \frac{d\varphi(\bar{x}_o, t)}{dt} \right|_{\bar{x}_o} = \frac{\partial \varphi(\bar{x}_o, t)}{\partial t}$$

et exprimons-le en coordonnées géométriques:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi[x_i(\bar{x}_o, t), t]}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(\bar{x}_o, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

¹ Certains auteurs utilisent la notation $D\varphi/Dt$

où apparaissent les composantes du vecteur vitesse définies par (3.5). On peut donc écrire finalement

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} V_i \tag{3.7}$$

qui définit la *dérivée particulaire* d'une grandeur matérielle; soit encore:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \phi) \cdot \vec{V}} \tag{3.8}$$

et dans le cas d'un vecteur

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{A}) \cdot \vec{V}} \tag{3.9}$$

Les relations de définition (3.8) et (3.9) peuvent être exprimées sous une forme unique en définissant l'opérateur scalaire $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$; on écrira donc l'opérateur dérivée particulaire de façon symbolique

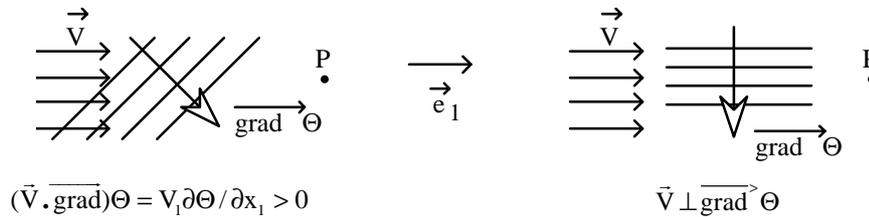
$$\boxed{\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \bullet} \tag{3.10}$$

et sous forme indicielle

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \left(V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \bullet \tag{3.11}$$

• Interprétation

Illustrons la notion de dérivée particulaire par l'exemple du champ de température Θ (considérée comme un marqueur passif) dans un écoulement rectiligne dans la direction \vec{e}_1 .



La température diminue au point P.

La température n'évolue pas au point P.

La variation au cours du temps de la température en un point P fixé s'écrit d'après (3.11)

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + V_1 \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}$$

Dans le cas du repos ($V_1=0$), le taux de variation local de température au point P est égal à celui de la particule qui s'y trouve

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}$$

Ce terme peut être non nul en présence d'un phénomène physique comme un transfert de chaleur radiatif ou une réaction chimique par exemple. Cependant, même en l'absence de tels phénomènes, le point P peut voir sa température évoluer en présence d'un écoulement ($V_1 \neq 0$) si les différentes particules qui passent en P portent des

températures différentes ($\partial\Theta/\partial x_1 \neq 0$). Cette modification locale de la température est purement d'origine cinématique; on parle d'*advection* et le terme $(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\Theta$ est appelé *terme d'advection*.

3.2.2 Accélération d'une particule fluide

L'accélération en point P est la dérivée particulaire du vecteur vitesse en ce point, soit d'après (3.10)

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}} \quad (3.12)$$

et sous forme indicielle

$$\boxed{\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_i}{\partial x_3}} \quad (3.13)$$

• Écoulement permanent

Le terme $\partial\vec{V}/\partial t$ est le terme d'accélération temporelle. Le mouvement est dit *permanent* (on parle aussi de *régime stationnaire*) s'il se reproduit identique à lui-même au cours du temps, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$$

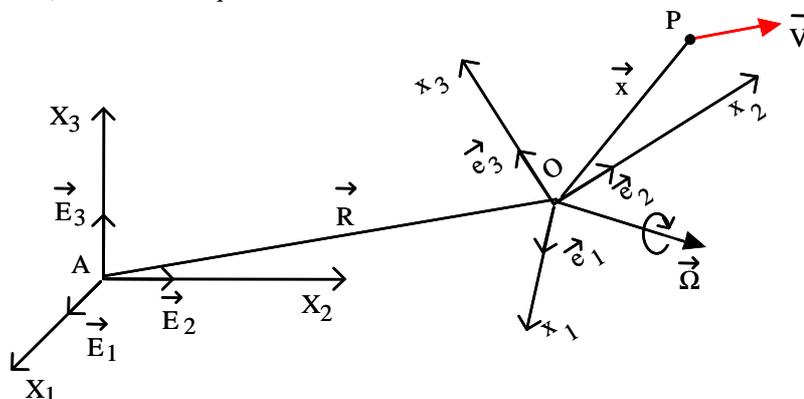
On notera que dans un écoulement permanent, le terme d'accélération spatiale $(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}$ (advection du vecteur vitesse) est, en général, non nul.

On pourra montrer, à titre d'exercice, que l'accélération d'une particule fluide peut se mettre sous la forme de Lamb:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V} \quad (3.14)$$

3.3 Référentiel inertiel et référentiel relatif

Les lois de la mécanique ne sont strictement applicables que dans un référentiel absolu (ou galiléen ou inertiel), c'est-à-dire au repos ou en translation uniforme par rapport au référentiel de Copernic qui est lié à un système stellaire considéré comme fixe. Il est pourtant, le plus souvent, intéressant de choisir un référentiel relatif non inertiel (ou repère entraîné) comme ceux qui sont liés à la Terre.



Exprimons les relations entre les grandeurs cinématiques dans un référentiel relatif (O, \vec{e}_i) caractérisé par une

vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ et les grandeurs cinématiques absolues (voir la figure). En remarquant que $\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_i$, on obtient:

• Positions: $\vec{X} = \vec{R} + \vec{x}$

• Vitesses: $\vec{V}_a = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V} + \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{x}$

• Accélérations: $\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{\gamma} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})$

où \vec{V}_a et $\vec{\gamma}_a$ sont respectivement la vitesse et l'accélération dans le référentiel absolu (A, \vec{E}_i) .

$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ est l'accélération de l'origine O du repère relatif,

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ est l'accélération complémentaire dite de Coriolis

$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x}$ est l'accélération angulaire dite d'Euler

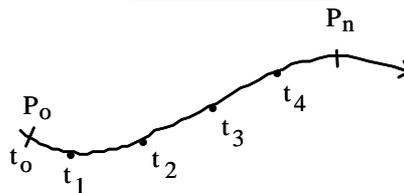
$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})$ est l'accélération centrifuge d'inertie $\equiv -\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^2$

L'accélération d'entraînement est définie par la somme de ces 4 termes qui n'ont pas généralement tous la même importance. L'accélération de Coriolis est dominante dans les écoulements géophysiques de grande échelle, mais le repère terrestre peut être considéré comme galiléen pour l'étude des écoulements de petite échelle comme les écoulements de laboratoire. Nous verrons que le nombre adimensionnel de Rossby est le critère qui permet d'évaluer l'approximation qui consiste à négliger ces effets.

3.4 Lignes fluides

3.4.1 Trajectoires

On appelle *trajectoire* la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupées successivement entre deux instants.



Son équation, pour une particule \vec{x}_o , est directement donnée par:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_o, t - t_o) \quad (3.15)$$

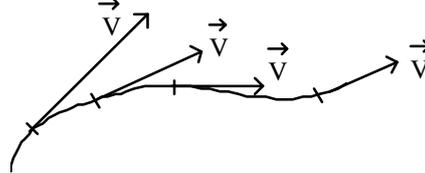
où t_o est fixé arbitrairement.

Les *trajectoires* permettent de visualiser le champ de vitesse en mode de Lagrange.

3.4.2 Lignes de courant

a) Définition

La description Eulerienne conduit elle aussi à une représentation imagée du champ de vitesse, à un instant t , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle *lignes de courant*. Elles représentent une visualisation instantanée du champ de vitesse.



L'équation des *lignes de courant* se déduit directement de cette définition en écrivant qu'un petit déplacement $d\vec{x}$ sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse:

$$\vec{V} \wedge d\vec{x} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{ijk} V_j dx_k = 0$$

En explicitant cette relation, on obtient:

$$\begin{cases} V_2 dx_3 - V_3 dx_2 = 0 \\ V_3 dx_1 - V_1 dx_3 = 0 \\ V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel

$$\boxed{\frac{dx_1}{V_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{V_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{V_3(\vec{x}, t)}} \quad (3.16)$$

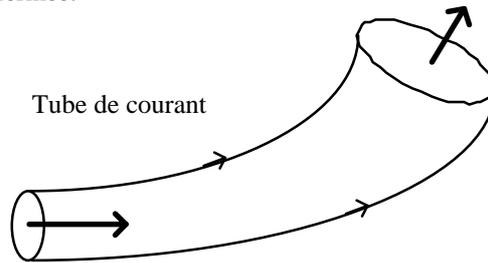
dans lequel t a la valeur fixée (et joue donc le rôle d'un paramètre).

Contrairement aux trajectoires, les lignes de courant ne peuvent pas se couper. Elles ne sont pas définies à un point d'arrêt ($\vec{V} = \vec{0}$).

Dans le cas général elles se déforment au cours du temps et sont donc distinctes des trajectoires qui sont, elles, définies pour un intervalle de temps fini. Dans le cas particulier des *écoulements permanents*, c'est-à-dire tels que le champ de vitesse soit indépendant du temps, les lignes de courant sont elles-mêmes indépendantes du temps et la particule qui parcourt le chemin $d\vec{x} = \vec{V}dt$ pendant la durée dt reste toujours sur la même ligne de courant; celle-ci est donc aussi une trajectoire.

b) Tube de courant

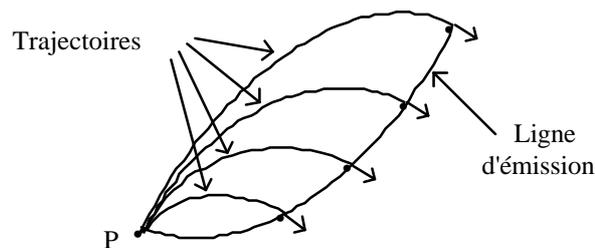
On désigne ainsi une surface tubulaire engendrée à un instant donné par toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe arbitraire fermée.



Si le contour du tube de courant délimite une section droite infinitésimale on parle de *filet de courant*.

3.4.3 Lignes d'émission

Une *ligne d'émission* est l'ensemble des positions à un instant t de toutes les particules fluides qui sont passées par un point P à un instant quelconque précédent.



Si l'écoulement est permanent, les trajectoires issues du point P sont toutes confondues; les lignes d'émissions et les trajectoires coïncident donc. C'est seulement dans ce cas particulier que les 3 familles de lignes coïncident.

Une *ligne d'émission* est visualisée en injectant un colorant de façon continue en un point fixé de l'écoulement

Chapitre 4 Déformation et rotation

La déformation d'un milieu continu est caractérisée par le déplacement relatif des divers points matériels qui constituent ce milieu. Nous présentons, dans ce chapitre, l'aspect géométrique des déformations par la description des mouvements simples: *translation*, *rotation*, *dilatation*, *déformation angulaire*. Il s'agit d'un simple rappel des notions présentées dans le cours de Mécanique des Milieux Continus.

En Mécanique des Fluides, le paramètre important n'est pas tant la déformation que la vitesse à laquelle la déformation intervient, et nous introduisons ici la notion de *taux de déformation* et de *taux de rotation*.

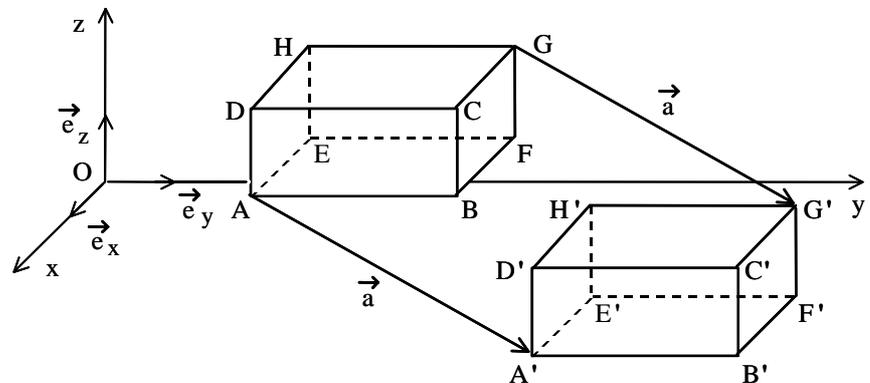
4.1 Translation

- Définition: Une *translation pure* est un mouvement dans lequel toutes les particules subissent le même déplacement.

En notant \bar{x} la position d'une particule fluide un instant donné, \bar{x}' sa position à un instant ultérieur et \bar{a} le déplacement:

$$\bar{x}' = \bar{x} + \bar{a}(t) \quad (4.1)$$

La figure représente la translation d'un élément fluide de forme géométrique simple. Le volume matériel initial conserve sa forme. Le mouvement de translation s'effectue **sans déformation**.



Le vecteur vitesse, défini par (3.5): $\bar{V}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \bar{a}(t)}{\partial t} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{V}(t)$ est le même pour toutes les particules.

4.2 Rotation

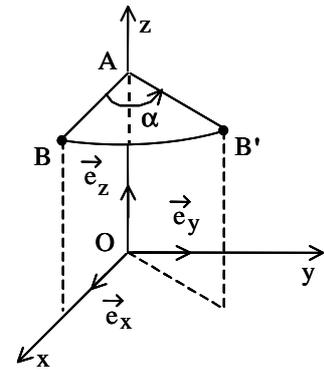
a) Définition: Une rotation pure est mouvement dans lequel toutes les particules tournent d'un même angle autour d'un axe donné.

b) Illustration: Soit par exemple la rotation d'un angle $\alpha(t)$ autour de l'axe Oz; une particule initialement en B se déplace au point B' tel que $AB' = AB$ et $\alpha = \widehat{BAB'}$.

On peut donc écrire:
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

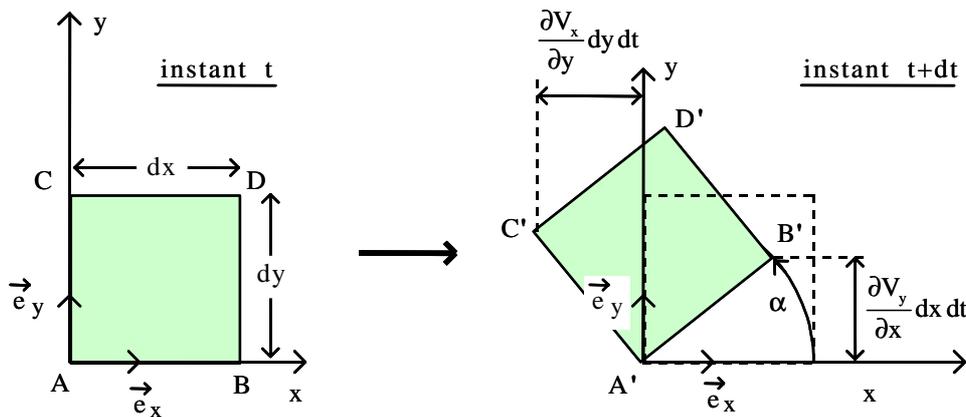
ou encore sous forme matricielle: $\vec{x}' = R \vec{x}$ où R est la matrice antisymétrique de la rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



c) Taux de rotation:

Considérons le déplacement de la ligne fluide AB. Si V_y est la vitesse du point A dans la direction \vec{e}_y , la vitesse du point B est $V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$. Le déplacement du point B pendant l'intervalle de temps dt est $V_y dt + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx dt$ et le segment fluide AB subit donc une rotation d'angle $\alpha = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx dt / dx = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt$. On peut donc exprimer le taux de rotation instantané du segment fluide AB: $\frac{\partial V_y}{\partial x} dt / dt = \frac{\partial V_y}{\partial x}$



De même le taux de rotation instantané du segment fluide AC est $-\frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt / dy dt = -\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et le *taux de*

rotation moyen autour de l'axe Oz est donc:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

On peut aisément généraliser ce résultat au cas d'une rotation tridimensionnelle:

$$\begin{cases} \Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

d) Vecteur tourbillon:

Le vecteur $\varepsilon_{ijk} V_{k,j} \vec{e}_i = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ est souvent appelé *vorticité* de l'écoulement. On appelle *vecteur tourbillon* le vecteur $\vec{\Omega}$ défini par (4.2) comme la moitié de la vorticité

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \quad (4.3)$$

et qui s'interprète comme une vitesse angulaire locale.

Un écoulement est dit *irrotationnel* si $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Le rotationnel du champ de vitesse étant nul celui-ci dérive d'un potentiel:

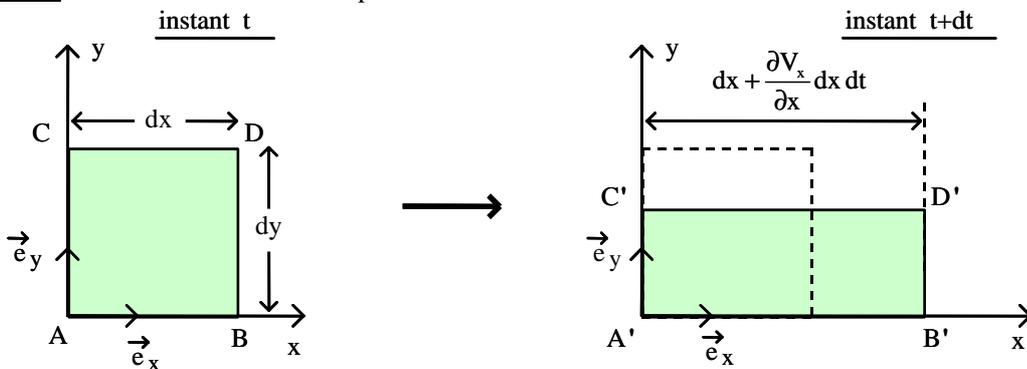
$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

et l'analyse de l'écoulement peut être faite à l'aide de cette fonction potentiel Φ .

4.3 Dilatation

a) Définition: On appelle *dilatation* la déformation unitaire associée à une variation de la vitesse dans la direction du mouvement.

b) Illustration: On observe une dilatation pure dans la direction x sur le schéma ci-dessous.



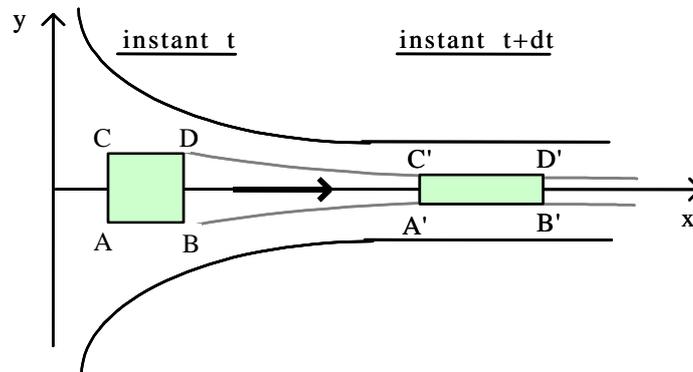
Si V_x désigne la vitesse au point A, on peut exprimer la vitesse en B par: $V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx$ et la longueur du segment A'B' par $dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt$. La variation relative de longueur du segment AB sera donc:

$$\left[\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt \right) - dx \right] / dx = \frac{\partial V_x}{\partial x} dt.$$

On définit donc le *taux de dilatation linéaire* dans la direction x par

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (4.4)$$

On observe, par exemple, une *dilatation* (dans la direction de l'écoulement) des particules fluides dans une section convergente d'une conduite. Au taux de dilatation $\partial V_x / \partial x$ dans la direction x correspond un *taux de contraction* $\partial V_y / \partial y$ dans la direction y .



De façon générale, on appelle *taux de dilatation volumique* (ou cubique) la somme

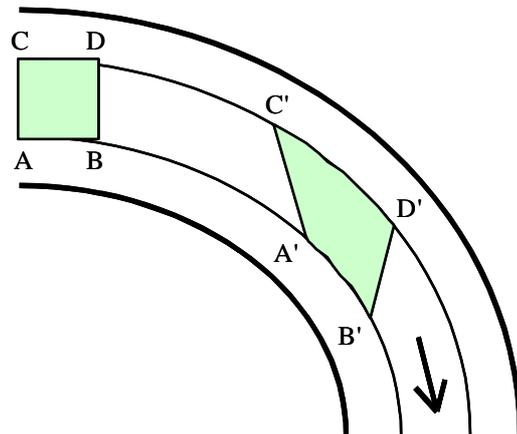
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

4.4 Cisaillement

a) Définition: On appelle *cisaillement* la **déformation angulaire** associée à une variation de la vitesse dans la direction normale au mouvement.

b) Illustration: Un cisaillement a lieu par exemple dans une conduite coudée puisque l'écoulement est alors plus rapide dans la partie intérieure du coude que dans sa partie extérieure.

Le segment fluide CD se déplace plus rapidement que le segment fluide AB. La déformation angulaire est proportionnelle à la différence de vitesse.



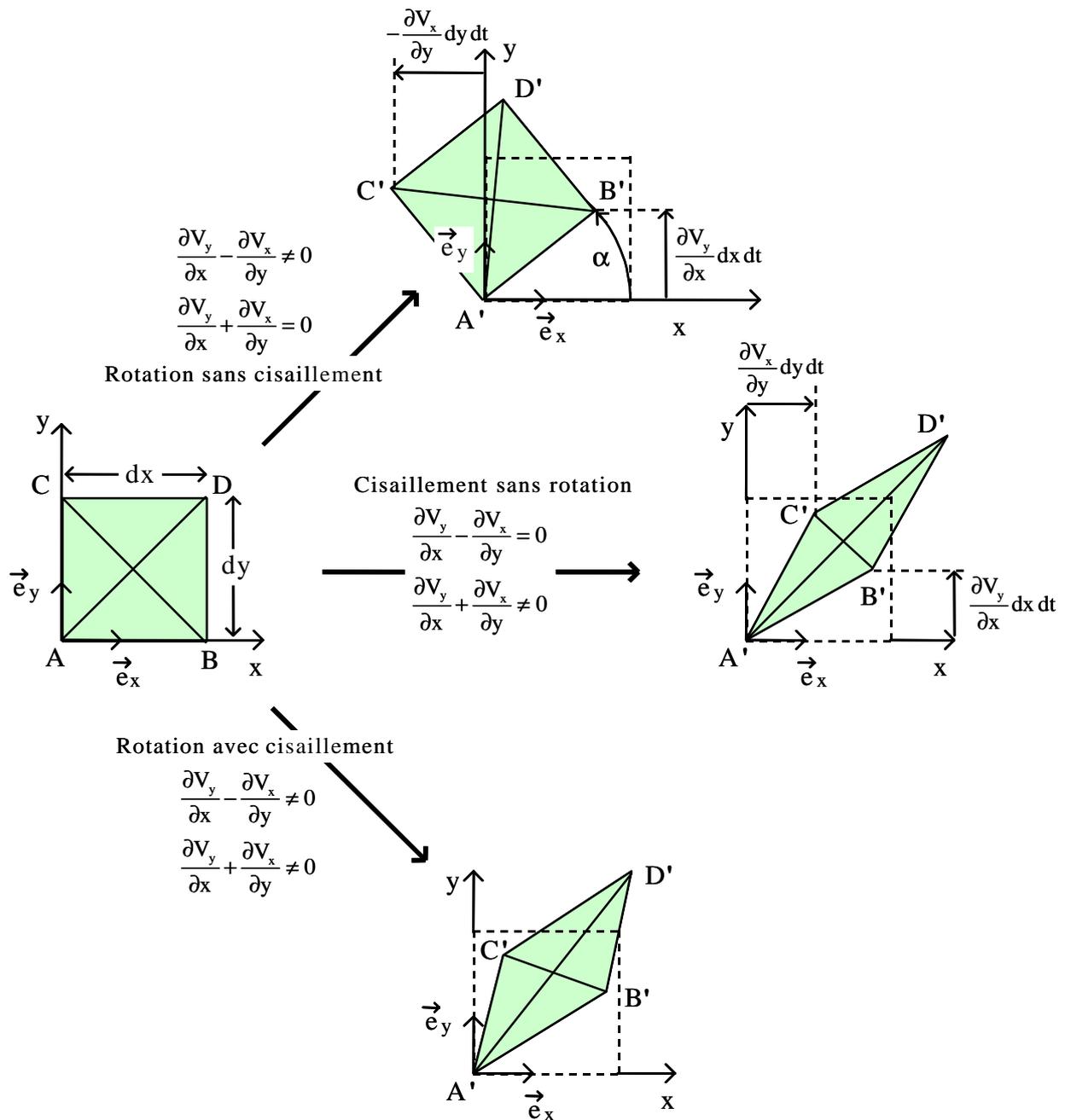
Considérons par exemple la déformation représentée sur le schéma de droite de la figure de la page suivante. Si V_x est la vitesse du point A, $V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy$ représente celle du point C. Pendant l'intervalle de temps dt le point A parcourt la distance $V_x dt$ alors que le point C parcourt la distance $V_x dt + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt$. Dans ces conditions le segment AC pivote autour de A d'un angle $\frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt / dy = \frac{\partial V_x}{\partial y} dt$ à la vitesse angulaire $\frac{\partial V_x}{\partial y} dt / dt = \frac{\partial V_x}{\partial y}$.

De la même manière si la vitesse du point B diffère de celle du point A, le segment AB pivote autour de A avec

une vitesse $\frac{\partial V_y}{\partial x}$. La vitesse de déformation de l'angle \widehat{CAB} est la somme de ces deux vitesses angulaires:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \tag{4.5}$$

• Sur le schéma considéré nous avons pris $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ égaux. Dans ce cas particulier la direction de la bissectrice principale est conservée et la rotation moyenne est nulle. On dit que la particule fluide subit un *cisaillement pur*.



• Si les deux taux de déformation $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ ne sont pas égaux la particule subit à la fois une rotation et une déformation (schéma du bas sur la figure).

• Dans le cas où les taux de déformation sont égaux et opposés (schéma du haut de la figure) on retrouve la rotation pure décrite au §4.2-c.

4.5 Décomposition du mouvement général d'une particule

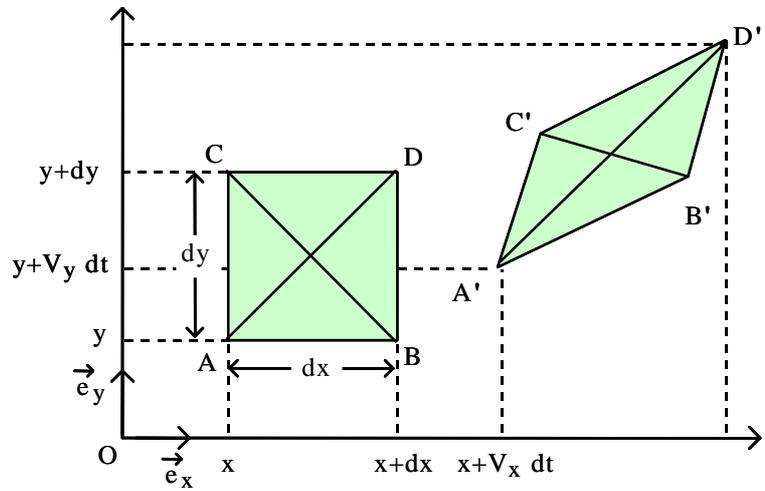
4.5.1 Cas 2D

Nous allons voir que dans le cas général un mouvement quelconque peut être décomposé en mouvements simples purs: translation, dilatation, déformation angulaire (cisaillement) et rotation. Considérons, pour simplifier l'exposé, un mouvement bidimensionnel quelconque (figure). La généralisation au cas tridimensionnel ne présentera aucune difficulté.

Vitesse au point A(x,y): $\vec{V}_A \begin{cases} V_x \\ V_y \end{cases}$

Vitesse au point D(x+dx, y+dy):

$$\vec{V}_D \begin{cases} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \\ V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \end{cases}$$



À l'instant t+dt le point A est passé en A' de coordonnées: $\begin{cases} x + V_x dt \\ y + V_y dt \end{cases}$ et le point D en D' de coordonnées:

$$\begin{cases} x + dx + (V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy) dt \\ y + dy + (V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy) dt \end{cases} \quad (4.6)$$

On peut réécrire (4.6) en faisant apparaître l'expression des mouvements simples de translation, dilatation, déformation angulaire et rotation; il suffit d'ajouter et retrancher $1/2(\partial V_y / \partial x) dy dt$ à la première coordonnée et $1/2(\partial V_x / \partial y) dx dt$ à la seconde:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{cccc} \text{Position init.} & \text{Translation} & \text{Dilatation} & \text{Déformation angulaire} & \text{Rotation} \\ x + dx + V_x dt + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} \text{Position init.} & \text{Translation} & \text{Dilatation} & \text{Déformation angulaire} & \text{Rotation} \\ y + dy + V_y dt + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dt \end{array} \right] \end{cases} \quad (4.7)$$

4.5.2 Cas 3D

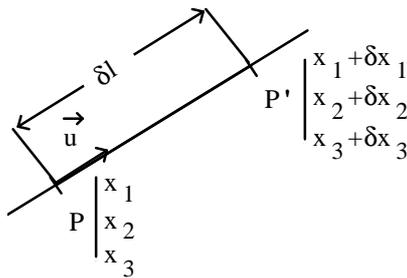
Il est aisé de généraliser l'expression (4.7) au mouvement général d'une particule fluide dans un écoulement tridimensionnel. On obtient:

$$\left. \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 x+dx + V_x dt + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \right] dt \\
 y+dy + V_y dt + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \right] dt \\
 z+dz + V_z dt + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \right] dt
 \end{array} \right] \\
 \text{Position} \qquad \text{Translation} \qquad \text{Dilatation} \qquad \text{Déformation angulaire} \\
 \text{initiale} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(Cisaillement)}
 \end{array} \right\} \\
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \right] dt \\
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \right] dt \\
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \right] dt \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Rotation}
 \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

4.5.3 Taux de d'allongement d'un segment fluide

Nous allons maintenant déterminer le taux de d'allongement \mathbf{d} d'un segment fluide, c'est-à-dire sa **variation de longueur par unité de longueur et de temps**.

Soit $\delta\ell$ la longueur initiale d'un segment fluide PP' orienté selon le vecteur unitaire \bar{u} . Conformément aux notations indiquées sur la figure on a:



$$(\delta\ell)^2 = \delta x_i \delta x_i \quad (4.8)$$

$$\text{et } u_i = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \frac{\delta x_i}{\delta\ell} \quad (4.9)$$

Le taux d'allongement du segment est défini par:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta\ell} \frac{d(\delta\ell)}{dt} \right]$$

qu'on peut encore écrire:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta\ell)^2} \frac{d(\delta\ell)^2}{dt} \right] = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta\ell)^2} \frac{d(\delta x_i \delta x_i)}{dt} \right] = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{\delta x_i}{(\delta\ell)^2} \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right] \quad (4.10)$$

Or, puisque $\delta x_i = x_i(P') - x_i(P)$, on a:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \frac{d[x_i(P')]}{dt} - \frac{d[x_i(P)]}{dt} = V_i(P') - V_i(P) = \delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta x_j + O((\delta x_j)^2)$$

où les V_i sont les composantes du vecteur vitesse qu'on a développé en série de Taylor autour du point P.

En substituant cette dernière expression dans la relation (4.10) on obtient:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{\delta x_i}{\delta\ell} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\delta x_j}{\delta\ell} \right],$$

soit encore, en exprimant les composantes de $\bar{\mathbf{u}}$ d'après (4.9)

$$\boxed{\mathbf{d} = u_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} u_j} \quad (4.11)$$

☞ Ainsi, le taux d'allongement dans la direction $\bar{\mathbf{u}}$ est déterminé par le tenseur gradient de la vitesse locale.

- **Remarque 1:** Ce résultat apporte une justification à la remarque que nous avons faite à la fin du §3.1.2 sur la limitation majeure de la description Lagrangienne du mouvement dans les fluides.
- **Remarque 2:** Le taux d'allongement ne dépend en fait que de la seule partie symétrique du tenseur gradient des vitesses. Ceci est démontré au §4.6 où est introduit le tenseur des taux de déformation.

En notant $\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\text{grad}\mathbf{V}}}$ le *tenseur gradient des vitesses*, on écrira:

$$\boxed{\mathbf{d} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}} \cdot \bar{\mathbf{u}}} \quad (4.12)$$

avec

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij} = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

4.6 Tenseur des taux de déformation et tenseur des taux de rotation

On décompose classiquement le tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$ en la somme de sa partie symétrique $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ et de sa partie antisymétrique $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ (voir les définitions §1.2.3-c):

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} \quad (4.14)$$

avec

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (4.15)$$

$$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{D}}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)} \quad \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{ij} = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_{ji} \quad (4.16)$$

et

$$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}_{ij} = -\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}_{ji} \quad (4.17)$$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ est justement nommé *tenseur des taux de déformation* (stretching tensor); il est symétrique.

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} V_{1,1} & \frac{1}{2}(V_{1,2} + V_{2,1}) & \frac{1}{2}(V_{1,3} + V_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,2} + V_{2,1}) & V_{2,2} & \frac{1}{2}(V_{2,3} + V_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,3} + V_{3,1}) & \frac{1}{2}(V_{2,3} + V_{3,2}) & V_{3,3} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Le tenseur $\overline{\overline{\Omega}}$ est appelé *tenseur des taux de rotation* (spin tensor); il est antisymétrique.

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(V_{2,1} - V_{1,2}) & \frac{1}{2}(V_{1,3} - V_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(V_{2,1} - V_{1,2}) & 0 & -\frac{1}{2}(V_{3,2} - V_{2,3}) \\ -\frac{1}{2}(V_{1,3} - V_{3,1}) & \frac{1}{2}(V_{3,2} - V_{2,3}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Les composantes cartésiennes de ces tenseurs sont données en coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques en Annexes.

• Nous allons maintenant montrer que seul D_{ij} intervient dans la détermination du taux d'allongement \mathbf{d} . On peut en effet décomposer l'égalité (4.11):

$$\mathbf{d} = u_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} u_j = u_i D_{ij} u_j + u_i \Omega_{ij} u_j$$

Le dernier terme de cette expression peut être écrit sous la forme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j$$

ou encore, en permutant les indices muets du dernier terme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + \frac{1}{2} u_j \Omega_{ji} u_i = \frac{1}{2} u_i (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) u_j$$

Comme $\overline{\overline{\Omega}}$ est antisymétrique $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$ et l'on voit que $u_i \Omega_{ij} u_j = 0$.

En définitive, le taux d'allongement dans la direction $\bar{\mathbf{u}}$ est déterminé uniquement par le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ (et par les composantes u_i de la direction considérée):

$$\mathbf{d} = u_i D_{ij} u_j \quad (4.20)$$

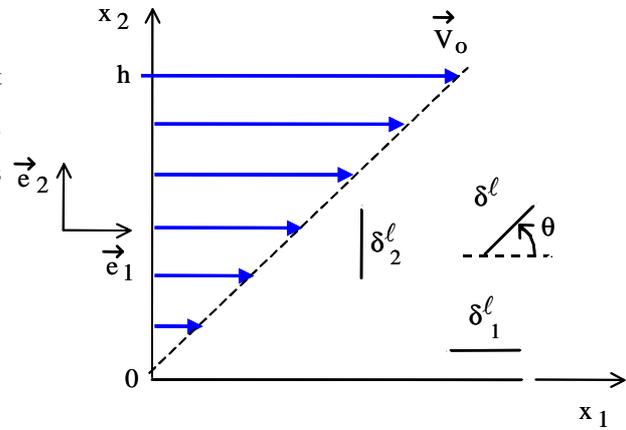
soit, sous forme intrinsèque:
$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (4.21)$$

Rappelons également que le *taux de déformation angulaire*, donné par la relation (4.5), est aussi déterminé par le tenseur $\overline{\overline{D}}$ (au facteur 1/2 près).

EXEMPLE: Taux de déformation dans un écoulement de Couette.

On appelle écoulement de *Couette* un écoulement bidimensionnel dans lequel la vitesse varie linéairement; par exemple l'écoulement d'un fluide entre deux plans $x_2 = 0$ et $x_2 = d$ dont la vitesse est définie par:

$$\vec{V} = \vec{V}(x_2) = V_o \frac{x_2}{h} \vec{e}_1 .$$



Dans ce cas particulier seules deux composantes du tenseur $\overline{\mathbf{D}}$ sont non nulles: $D_{12} = D_{21} = V_o / 2h$.

Évaluons le taux d'allongement $\mathbf{d} = \frac{1}{\delta l} \frac{d(\delta l)}{dt}$ d'un élément infinitésimal δl orienté dans une direction quelconque définie par $\vec{u} = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2$.

On peut utiliser indifféremment la forme indicielle (4.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= u_i D_{ij} u_j \\ &= D_{11} u_1^2 + u_1 D_{12} u_2 + u_2 D_{21} u_1 + D_{22} u_2^2 \\ &= D_{11} \cos^2\theta + (D_{12} + D_{21}) \sin\theta \cos\theta + D_{22} \sin^2\theta \\ &= 2D_{12} \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

ou la relation (4.21)

$$\mathbf{d} = \vec{u} \cdot \overline{\mathbf{D}} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{V_o}{h} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{V_o}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_o}{h} \sin\theta \cos\theta$$

On voit donc que l'allongement est maximum pour $\theta = \pi/4$:

$$\mathbf{d} \Big|_{\theta=\pi/4} = \frac{V_o}{2h}$$

mais qu'il est nul dans la direction \vec{e}_1 ($\mathbf{d}_1 = e_i D_{ij} e_j = D_{11} = 0$), ainsi que dans la direction \vec{e}_2 ($\mathbf{d}_2 = e_i D_{ij} e_j = D_{22}$).

Chapitre 5 Théorèmes de transport

5.1 Volumes et surfaces de contrôle

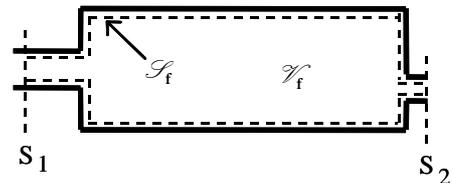
Un *volume de contrôle* est un volume imaginaire sur lequel on procède au bilan intégral d'une grandeur physique comme la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie. On appelle *surface de contrôle* l'enveloppe d'un volume de contrôle.

Le fluide peut entrer et sortir d'un volume de contrôle c'est-à-dire traverser la surface de contrôle qui peut elle-même être fixe ou mobile.

- Volume de contrôle fixe

Nous désignerons par \mathcal{V}_f un volume de contrôle figé dans l'espace. L'enveloppe constituée par la surface de contrôle correspondante sera notée \mathcal{S}_f . À titre d'exemple la figure ci-contre représente le volume de contrôle compris

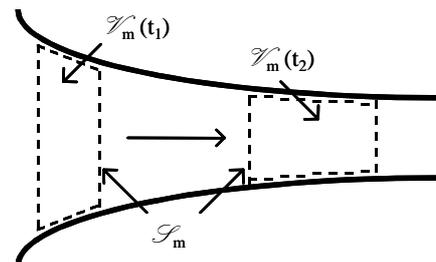
entre deux sections fixes S_1 et S_2 d'un pot de détente.



- Volume de contrôle matériel

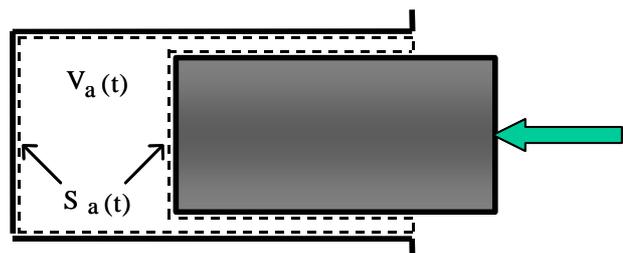
Un volume de contrôle matériel (qu'on note \mathcal{V}_m) se déplace avec le fluide; chaque point de son enveloppe (qu'on note \mathcal{S}_m) est une particule fluide.

La figure représente un volume matériel à deux instants différents dans une tuyère convergente.



- Volume de contrôle arbitraire:

Il est parfois utile de faire le bilan d'une grandeur matérielle sur un volume arbitraire dont le déplacement et la déformation sont différents de ceux du fluide qui le traverse.



On note \mathcal{V}_a ce volume et \mathcal{S}_a la surface de contrôle correspondante.

5.2 Formulation des théorèmes de transport

En Mécanique des Fluides, l'évolution des grandeurs matérielles est analysée à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines fluides macroscopiques. Le transport de ces grandeurs dans l'écoulement est explicité en suivant le mouvement; il est par conséquent nécessaire d'établir l'expression de la dérivée particulière d'une intégrale volumique.

5.2.1 Cas général d'un volume de contrôle arbitraire

Soit un volume de contrôle arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ limité par l'enveloppe fermée $\mathcal{S}_a(t)$. Soient $f(\vec{x}, t)$ une fonction scalaire continue et dérivable et $I(t)$ son intégrale sur le volume \mathcal{V}_a

$$I(t) = \iiint_{\mathcal{V}_a} f(\vec{x}, t) dV$$

Le taux de variation dans le temps de l'intégrale $I(t)$ est donné par

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a} f dV = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} f (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS \quad (5.1)$$

où \vec{V}_a désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et \vec{n} la normale extérieure. La relation (5.1), appelée parfois règle de Leibnitz, s'interprète de la façon suivante:

Taux de variation de l'intégrale de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $\mathcal{V}_a(t)$	=	Intégrale de la variation temporelle de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $\mathcal{V}_a(t)$	+	Flux de $f(\vec{x}, t)$ à travers l'enveloppe $\mathcal{S}_a(t)$
--	---	--	---	---

DÉMONSTRATION:

Pour démontrer l'expression (5.1) on peut remonter à la définition de l'opérateur de différenciation:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iiint_{\mathcal{V}_a(t+\Delta t)} f(\vec{x}, t+\Delta t) dV - \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t) dV \right] \quad (5.2)$$

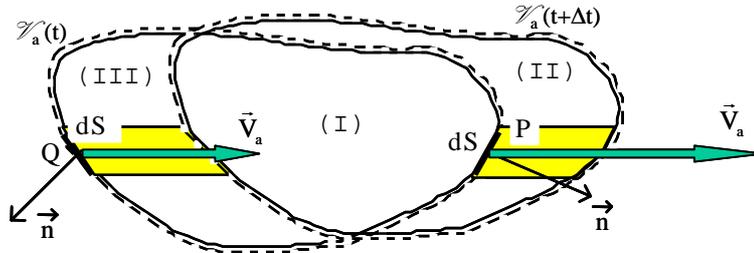
où encore, si l'on exprime que $\mathcal{V}_a(t+\Delta t) = \mathcal{V}_a(t) + \text{(II)} - \text{(III)}$ (voir sur la figure de la page suivante),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t) d\mathcal{V} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t+\Delta t) d\mathcal{V}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iiint_{\text{(II)}} f(\vec{x}, t+\Delta t) d\mathcal{V}}_{\textcircled{2}} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\iiint_{\text{(III)}} f(\vec{x}, t+\Delta t) d\mathcal{V}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t) d\mathcal{V}}_{\textcircled{4}} \right] \quad (5.3) \end{aligned}$$

Considérons maintenant les différents termes du second membre de (5.3).

• Termes ① et ④:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{1} - \textcircled{4}] = \iiint_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{1} - \textcircled{4}] = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (5.4)$$

• Terme ②:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{2}] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_{(II)} f(\vec{x}, t + \Delta t) d\mathcal{V}$$



L'élément de volume (II) au voisinage du point P (en grisé sur la figure) a pour valeur $dV = (\vec{V}_a \cdot \vec{n} \Delta t) dS$. On peut donc écrire en substituant cette expression de $d\mathcal{V}$ dans ②:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{2}] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iint_{\mathcal{S}_{II}} f(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{V}_a \cdot \vec{n} dS \right] \Delta t \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{II}} f(\vec{x}, t) \vec{V}_a \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (5.5)$$

où \mathcal{S}_{II} est la partie de l'enveloppe de \mathcal{V}_a qui balaye (II) pendant le déplacement.

• Terme ③:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{3}] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_{(III)} f(\vec{x}, t + \Delta t) d\mathcal{V}$$

L'élément de volume (III) au voisinage du point Q (en grisé sur la figure) a pour valeur $d\mathcal{V} = -(\vec{V}_a \cdot \vec{n} \Delta t) dS$ et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\textcircled{3}] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[- \iint_{\mathcal{S}_{III}} f(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{V}_a \cdot \vec{n} dS \right] \Delta t \\ &= - \iint_{\mathcal{S}_{III}} f(\vec{x}, t) \vec{V}_a \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (5.6)$$

où \mathcal{S}_{III} est la partie de l'enveloppe de \mathcal{V}_a qui balaye (III) pendant le déplacement.

Substituons pour finir les expressions (5.4), (5.5) et (5.6) dans (5.3); on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f(\vec{x}, t) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_{II}} f(\vec{x}, t) (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS + \iint_{\mathcal{S}_{III}} f(\vec{x}, t) (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS$$

soit encore, puisque $(\mathcal{S}_{II} \cup \mathcal{S}_{III})$ est l'enveloppe totale de $\mathcal{V}_a(t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a} f dV = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} f (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS} \quad (5.7)$$

5.2.2 Cas d'un volume de contrôle fixe

Dans ce cas $\vec{V}_a = \vec{0}$ et le flux de f à travers l'enveloppe est nul:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} \quad (5.8)$$

5.2.3 Cas d'un volume de contrôle matériel $\mathcal{V}_m(t)$

Dans ce cas le volume de contrôle se déplace avec le fluide; la vitesse en un point de l'enveloppe \mathcal{S}_m est la vitesse \vec{V} du fluide:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} f (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (5.9)$$

5.2.4 Expression du théorème de transport en vitesse relative

Considérons maintenant un volume de contrôle $\mathcal{V}_a(t)$ qui coïncide à l'instant t avec un volume matériel $\mathcal{V}_m(t)$. A cet instant t on peut écrire:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} f (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) \, dS \quad (5.10)$$

et aussi

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} f (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (5.11)$$

Puisqu'à cet instant on a $\mathcal{V}_a(t) = \mathcal{V}_m(t)$ et $\mathcal{S}_a(t) = \mathcal{S}_m(t)$ on peut retrancher (5.11) de (5.10) et écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} f \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} f \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} f (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} \, dS \quad (5.12)$$

5.2.5 Théorème de transport pour un champ vectoriel

Le théorème de transport se généralise immédiatement au cas d'une fonction vectorielle $\vec{W}(\vec{x}, t)$. Il suffit de considérer le transport de chacune des composantes. On obtient de façon évidente:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \vec{W} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \vec{W} (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) \, dS \quad (5.13)$$

5.3 Formes alternatives des théorèmes de transport

• Le second membre du théorème de transport peut être mis sous la forme d'une intégrale de volume. Il suffit d'utiliser la formule de Green-Ostrogradski (1.43):

$$\iint_{\mathcal{S}(t)} f \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \operatorname{div}(f \vec{V}) \, d\mathcal{V}$$

On obtient:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right] d\mathcal{V} \quad (5.14)$$

• L'intégrand du second membre peut être transformé en utilisant l'identité $\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V}_a \cdot \overline{\operatorname{grad} f}$

et en introduisant la dérivée particulaire

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overline{\operatorname{grad} f}$$

On écrira donc

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \vec{V} \right] d\mathcal{V} \quad (5.15)$$

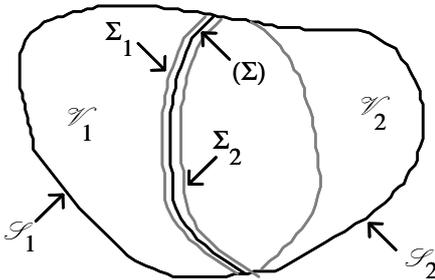
5.4 Théorèmes de transport en présence d'une surface singulière

La démonstration du théorème de transport présentée au § 5.2.1 fait l'hypothèse que la fonction considérée est continue dans le volume de contrôle. En présence d'une surface singulière où la fonction présente une discontinuité (§2.1.4) il convient de prendre quelques précautions particulières.

Considérons par exemple un volume de contrôle matériel $\mathcal{V}_m(t)$ coupé en deux parties \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 par une surface de discontinuité (Σ). Dans chaque volume \mathcal{V}_i la fonction f est supposée continue; on peut donc dans chacun d'eux utiliser (5.9):

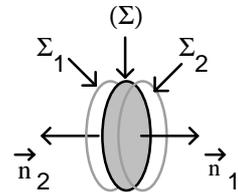
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_i(t)} f (\vec{V} \cdot \vec{n}_i) dS + \iint_{\Sigma_i(t)} f (\vec{V}_\Sigma \cdot \vec{n}_i) dS$$

où \vec{V}_Σ est la vitesse propre de la surface (Σ).



$$\mathcal{V}_m(t) = \mathcal{V}_1(t) + \mathcal{V}_2(t)$$

$$\mathcal{S}_m(t) = \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_2(t)$$



Ajoutons et retranchons $\vec{V} \cdot \vec{n}_i$ dans l'intégrand du dernier terme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} f \, d\mathcal{V} &= \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_i(t)} f (\vec{V} \cdot \vec{n}_i) dS + \iint_{\Sigma_i(t)} f [(\vec{V}_\Sigma - \vec{V}) \cdot \vec{n}_i + \vec{V} \cdot \vec{n}_i] dS \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_i + \Sigma_i} f (\vec{V} \cdot \vec{n}_i) dS - \iint_{\Sigma_i(t)} f (\vec{V} - \vec{V}_\Sigma) \cdot \vec{n}_i dS \end{aligned}$$

Les 2 premiers termes du second membre sont l'expression du théorème de transport appliqué au volume \mathcal{V} en l'absence de surface singulière. Le dernier terme, où apparaît la vitesse relative du fluide par rapport à (Σ) , traduit un flux de f à travers (Σ) . En utilisant (5.14)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right] d\mathcal{V} - \iint_{\Sigma_i(t)} f (\vec{V} - \vec{V}_\Sigma) \cdot \vec{n}_i \, dS$$

et en remarquant que $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mathcal{V} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_i(t)} f \, d\mathcal{V} \right]$ on obtient finalement:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right] d\mathcal{V} - \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{\Sigma_i(t)} f \vec{W} \cdot \vec{n}_i \, dS \right]} \quad (5.16)$$

où $\vec{W} = \vec{V} - \vec{V}_\Sigma$ est la vitesse relative du fluide par rapport à la surface de discontinuité (Σ) .

5.5 Applications

5.5.1 Le taux de dilatation volumique

Considérons le cas particulier où $f(\vec{x}, t)$ est la fonction scalaire constante $f(\vec{x}, t) = 1$. L'intégrale $I(t)$ représente dans ce cas le volume du domaine fluide considéré:

$$I(t) = \mathcal{V}_m(t) = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} d\mathcal{V}$$

et la dérivée particulière $dI(t)/dt$ est le taux de variation du volume de contrôle, soit, d'après (5.9),

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}_m(t) = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \operatorname{div} \vec{V} \, d\mathcal{V}$$

où encore, d'après (5.14)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{V}_m(t) = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \operatorname{div} \vec{V} \, d\mathcal{V}} \quad (5.17)$$

Si on considère à présent un volume fluide élémentaire $\delta \mathcal{V}_m$ la relation précédente s'écrit alors:

$$\frac{d\delta \mathcal{V}_m}{dt} = \operatorname{div} \vec{V} \, \delta \mathcal{V}_m$$

soit finalement:

$$\boxed{\frac{1}{\delta \mathcal{V}_m} \frac{d\delta \mathcal{V}_m}{dt} = \operatorname{div} \vec{V}} \quad (5.18)$$

La divergence de la vitesse locale du fluide représente donc le taux de variation relative du volume de la particule fluide. On dit qu'un écoulement de fluide est *isovolume*² (c'est-à-dire incompressible et indilatable) si le taux de dilatation volumique est nul en tout point

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Écoulement de fluide isovolume} \\ \text{(incompressible)} \end{array}} \iff \text{div } \vec{V} = \vec{0} \quad (5.19)$$

5.5.2 L'équation de continuité

Examinons à présent le cas où $f(\vec{x}, t)$ est la masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$ du fluide. L'intégrale $I(t)$ représente dans ce cas la masse du domaine fluide considéré:

$$M(\mathcal{V}_m) = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\vec{x}, t) d\mathcal{V}$$

\mathcal{V}_m étant un *domaine matériel*, sa masse est conservée au cours du mouvement et donc

$$\frac{d}{dt} M(\mathcal{V}_m) = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (5.20)$$

Dans le cadre de l'hypothèse de continuité cette expression reste vraie sur un volume infinitésimal; on peut donc écrire le principe de conservation de la masse (5.20) sous la forme locale

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0} \quad (5.21)$$

appelée **équation de continuité**.

En utilisant la définition (3.10) de la dérivation particulaire, l'équation de continuité prend la forme équivalente suivante

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0} \quad (5.22)$$

• **Remarque 1:** On retrouve l'expression (5.18)

$$\text{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\delta \mathcal{V}_m}{\delta m} \frac{d(\delta m / \delta \mathcal{V}_m)}{dt} = \frac{1}{\delta \mathcal{V}_m} \frac{d\delta \mathcal{V}_m}{dt}$$

et l'interprétation physique que nous avons faite de l'opérateur divergence au §1.3.2-b.

² Les variations de volume dans un fluide sont liées à travers l'équation d'état à celles du champ de pression (on parle de compressibilité) et à celles du champ de température (on parle alors de dilatation). Un abus de langage bien établi conduit à qualifier d'*incompressible* un écoulement de fluide *isovolume*.

- Remarque 2: Appliquons le théorème de transport à une grandeur matérielle ρf (où f apparaît comme une densité volumique):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho f \vec{V}) \right] d\mathcal{V}$$

et développons le second membre:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right) + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overline{\operatorname{grad} f} \right) \right] d\mathcal{V}$$

Le premier terme entre crochets est nul d'après (5.21) et le second fait apparaître la dérivée particulière de f . On obtient donc une forme particulière du théorème de transport:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{df}{dt} \, d\mathcal{V} \quad (5.23)$$

Cette expression, très utilisée, est parfois désignée dans la littérature sous le nom de *théorème de Reynolds*.

- Remarque 3: La dérivée particulière d'une grandeur matérielle quelconque φ s'écrit d'après (3.7):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Considérons maintenant le produit $\rho \, d\varphi/dt$; on a

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varphi V_j}{\partial x_j} - \underbrace{\varphi \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} \right]}_{\substack{\text{nul} \\ \text{d'après (5.21)}}$$

On pourra donc utiliser l'expression suivante

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \varphi \vec{V}) \quad (5.24)$$

Chapitre 6 Le tenseur des contraintes

6.1 Efforts à distance - efforts de contact

6.1.1 Schéma macroscopique des contraintes

Les particules matérielles qui ont une réalité physique sont les molécules; ce sont elles qui subissent les efforts extérieurs (comme la pesanteur) ou qui exercent des efforts sur les molécules voisines. Cependant le schéma du milieu continu nous conduit à “oublier“ cette réalité et à introduire une schématisation macroscopique des efforts réels.

On distingue 2 types de forces:

- celles qui sont exercées par un matériau situé en dehors du domaine fluide étudié et pénètrent à l'intérieur assez loin par rapport aux dimensions microscopiques;
- et celles qui sont exercées par les molécules du matériau situé en dehors du domaine fluide étudié et qui ont une portée voisine des dimensions microscopiques.

• L'exemple le plus courant dans la première catégorie est la force de pesanteur, mais aussi la force de Coulomb (si le fluide porte des charges électriques) ou les forces fictives comme la force de Coriolis (si le repère n'est pas galiléen). Nous écrirons la somme de ces *forces de volume* qui agissent au temps t sur la particule fluide de volume $d\mathcal{V}$ située au point \vec{x}

$$\rho \vec{f}(\vec{x}, t) dV$$

de sorte que $\rho \vec{f}$ représente la *densité volumique locale des efforts* et \vec{f} désigne la *densité massique locale*.

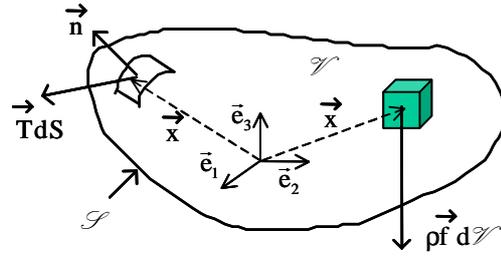
• Les forces d'origine moléculaire se distinguent des précédentes par le fait qu'elles décroissent très vite (comme d^{-7} ou d^{-8}) lorsque la distance d entre les molécules augmente. Pour la cohérence avec le schéma du milieu continu, il est clair que ces forces de très courte portée doivent être considérées comme ponctuelles. Considérons un domaine fluide \mathcal{V} . Il faut distinguer deux situations possibles:

- ou bien les molécules en interaction (considérées deux à deux) appartiennent toutes à \mathcal{V} , et dans ce cas les forces qu'elles exercent l'une sur l'autre s'annulent mutuellement en vertu du principe d'action-réaction,

- ou bien certaines d'entre elles n'appartiennent pas à \mathcal{V} .

Dans ce cas, on globalise l'action moléculaire des molécules extérieures agissant au temps t sur le fluide intérieur à \mathcal{V} , à travers l'élément de surface dS de la frontière pris autour du point \vec{x} et de normale unitaire extérieure \vec{n} :

$$\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) dS$$



Le vecteur \vec{T} est appelé la *contrainte locale*; il a la dimension d'une force par unité de surface.

La résultante des forces extérieures qui s'applique au volume fluide \mathcal{V} limité par la surface \mathcal{S} s'écrit donc

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f}(\vec{x}, t) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) dS \quad (6.1)$$

et le moment résultant des forces extérieures est:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{x} \wedge \vec{f}) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} (\vec{x} \wedge \vec{T}) dS \quad (6.2)$$

Dans le cas où la surface \mathcal{S} représente une surface physique (surface libre, interface entre deux fluides non miscibles, paroi solide...) la contrainte \vec{T} représente effectivement l'action des forces moléculaires du matériau extérieur. Dans le cas d'une surface fictive arbitraire on aperçoit la possibilité de représenter des forces "intérieures". Les interactions dynamiques entre fluide intérieur et fluide extérieur à travers l'élément dS sont dues à la fois aux forces intermoléculaires et à des échanges de molécules en nombre égal dans les deux sens à l'échelle macroscopique, ce qui annule tout transport net de masse; cependant le flux de quantité de mouvement est en général non nul. Cette interprétation à l'échelle macroscopique de la contrainte constitue la représentation des forces intermoléculaires dans le schéma du milieu continu.

6.1.2 Propriété des contraintes locales

Mise à part la différence de leurs dimensions (force par unité de volume et force par unité de surface), il y a une autre différence cruciale entre \vec{f} et \vec{T} : \vec{f} est défini en tout point à tout instant alors qu'à \vec{x} et t fixés \vec{T} dépend de l'orientation \vec{n} de l'élément de surface considéré. Il faut cependant ne pas confondre le vecteur \vec{T} et la direction \vec{n} .

Nous allons montrer que la contrainte locale change de signe lorsqu'on change le signe de la normale:

$$\vec{T}(-\vec{n}, \vec{x}, t) = -\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) \quad (6.3)$$

DÉMONSTRATION:

Pour cette démonstration nous utiliserons le théorème de la moyenne que nous rappelons ici:

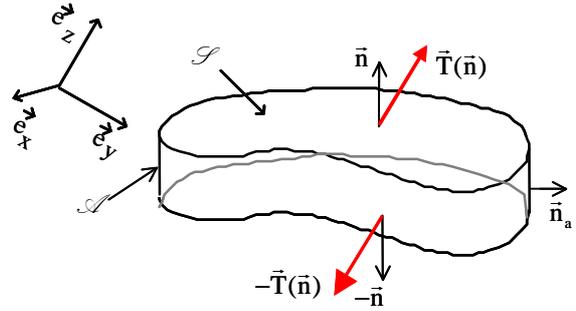
- cas monodimensionnel ($\mathcal{S} \equiv [a, b]$): $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \bar{f}$

• cas d'une surface ($\mathcal{D} \equiv \mathcal{S}$):
$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, dS = \bar{\mathbf{f}} \mathcal{S}$$

• cas d'un volume ($\mathcal{D} \equiv \mathcal{V}$):
$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \, dV = \bar{\mathbf{f}} \mathcal{V}$$

où \mathbf{f} est une fonction continue sur le domaine \mathcal{D} et $\bar{\mathbf{f}}$ sa valeur en un point du domaine.

Considérons maintenant le domaine matériel représenté par deux surfaces parallèles d'aire \mathcal{S} connectées par une bande d'épaisseur ℓ et d'aire \mathcal{A} . Si nous admettons que l'équilibre macroscopique du domaine matériel est possible³ (situation de repos), la résultante des efforts extérieurs est alors nulle, soit en décomposant la surface enveloppe en 3 termes:



$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \bar{\mathbf{f}} \, dV + \iint_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}) \, dS + \iint_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}) \, dS + \iint_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}_a, \bar{\mathbf{x}}) \, dS = \bar{\mathbf{0}}$$

D'après le théorème de la moyenne, on peut aussi écrire:

$$\rho \bar{\mathbf{f}} \mathcal{S} \ell + \iint_{\mathcal{S}} [\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}})] \, dS + \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}_a) \mathcal{A} = \bar{\mathbf{0}}$$

Prenons la limite $\ell \rightarrow 0$ (en remarquant qu'alors $\mathcal{A} \rightarrow 0$)

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{S}} [\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}})] \, dS = \bar{\mathbf{0}}$$

Comme la surface \mathcal{S} est arbitraire, cette dernière égalité n'est réalisée que si l'intégrand est identiquement nul:

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}) = -\bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}})$$

6.2 Le tenseur des contraintes

6.2.1 Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes

Nous venons de voir qu'en chaque point $P(\bar{\mathbf{x}}, t)$ du fluide, il existe un vecteur contrainte $\bar{\mathbf{T}}$ correspondant à chaque direction $\bar{\mathbf{n}}$. Nous allons maintenant montrer que la contrainte peut être représentée à l'aide d'un tenseur $\bar{\bar{\Sigma}}$ appelé *tenseur des contraintes* et qui caractérise l'état local des contraintes indépendamment de la direction $\bar{\mathbf{n}}$:

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\bar{\Sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (6.4)$$

³ Cette hypothèse n'est pas indispensable. La démonstration est identique pour un domaine matériel en mouvement, mais suppose connue l'expression du bilan de quantité de mouvement qui est présentée chapitre 7.

DÉMONSTRATION: Considérons l'équilibre d'un petit tétraèdre de volume infinitésimal $\delta \mathcal{V}$ dont les trois faces orthogonales δS_1 , δS_2 et δS_3 sont les projections de la quatrième face δS . Les notations sont explicitées dans le tableau ci-dessous:

Le tétraèdre est assez petit pour que \bar{x} soit supposé invariant. La seule variable est donc \bar{n} .

Écrivons l'équilibre⁴ de ce tétraèdre:

Facette	Surface	Normale unitaire extérieure	Contrainte
$P_1P_2P_3$	δS	\bar{n}	$\bar{T}(\bar{n})$
P_2AP_3	$\delta S_1 = \bar{a} \cdot \bar{n} \delta S$	$-\bar{a}$	$\bar{T}(-\bar{a})$
P_1AP_3	$\delta S_2 = \bar{b} \cdot \bar{n} \delta S$	$-\bar{b}$	$\bar{T}(-\bar{b})$
P_1AP_2	$\delta S_3 = \bar{c} \cdot \bar{n} \delta S$	$-\bar{c}$	$\bar{T}(-\bar{c})$

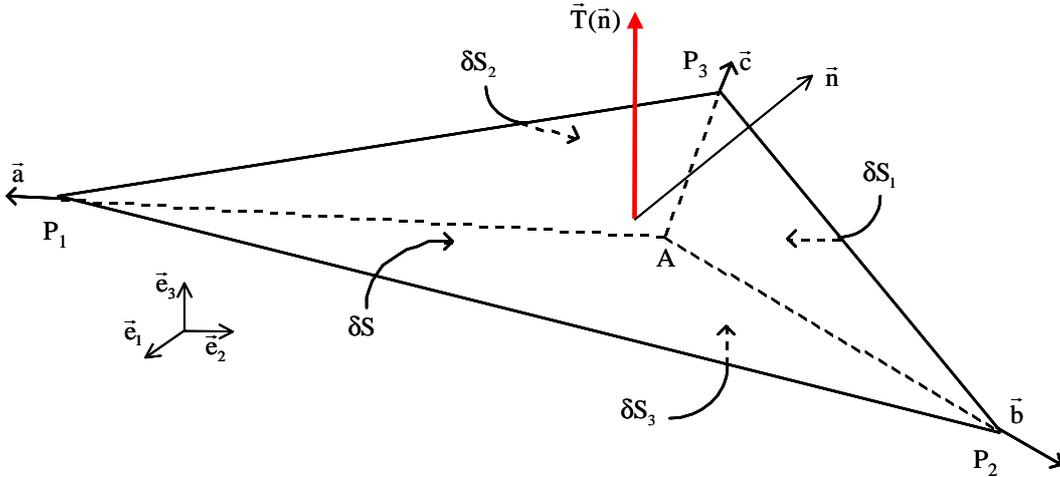
$$\rho \bar{f} \delta V + \bar{T}(\bar{n}) \delta S + \bar{T}(-\bar{a}) \delta S_1 + \bar{T}(-\bar{b}) \delta S_2 + \bar{T}(-\bar{c}) \delta S_3 = \vec{0}$$

soit, d'après (6.3):

$$\rho \bar{f} \delta V + \bar{T}(\bar{n}) \delta S - \bar{T}(\bar{a}) \delta S_1 - \bar{T}(\bar{b}) \delta S_2 - \bar{T}(\bar{c}) \delta S_3 = \vec{0}$$

et, en utilisant la deuxième colonne du tableau et en divisant par δS :

$$\bar{T}(\bar{n}) = \bar{T}(\bar{a}) \bar{a} \cdot \bar{n} + \bar{T}(\bar{b}) \bar{b} \cdot \bar{n} + \bar{T}(\bar{c}) \bar{c} \cdot \bar{n} - \rho \bar{f} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta S}$$



Prenons la limite $\delta S \rightarrow 0$ (en remarquant qu'alors $\delta \mathcal{V} / \delta S \rightarrow 0$), on obtient en explicitant les produits scalaires:

$$\bar{T}(\bar{n}) = \bar{T}(\bar{a}) a_j n_j + \bar{T}(\bar{b}) b_j n_j + \bar{T}(\bar{c}) c_j n_j$$

ou, en projection:

$$T_i(\bar{n}) = [T_i(\bar{a}) a_j + T_i(\bar{b}) b_j + T_i(\bar{c}) c_j] n_j \quad (6.5)$$

Ainsi, lorsqu'on se donne le trièdre orthonormé $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, la contrainte $\bar{T}(\bar{n})$ varie linéairement avec \bar{n} . Le terme entre crochets de l'expression (6.5) apparaît alors comme l'opérateur qui définit cette relation linéaire entre \bar{T}

⁴ Cette fois encore l'hypothèse d'équilibre n'est pas indispensable. La démonstration est identique pour un domaine matériel soumis à un mouvement (le terme d'inertie disparaissant par passage à la limite) mais suppose connue l'expression du bilan de quantité de mouvement qui est présenté au chapitre 7.

et \vec{n} . Par ailleurs, ces deux vecteurs sont indépendants du choix du référentiel (\vec{e}_i) et le terme entre crochets doit donc, lui aussi, jouir de cette propriété d'invariance. Ceci implique que ce doit être un tenseur du second ordre. En notant $\overline{\overline{\Sigma}}$ ce tenseur, nommé *tenseur des contraintes*, et σ_{ij} ses composantes, on écrira:

$$T_i(\vec{n}, \vec{x}, t) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t) n_j \quad (6.6)$$

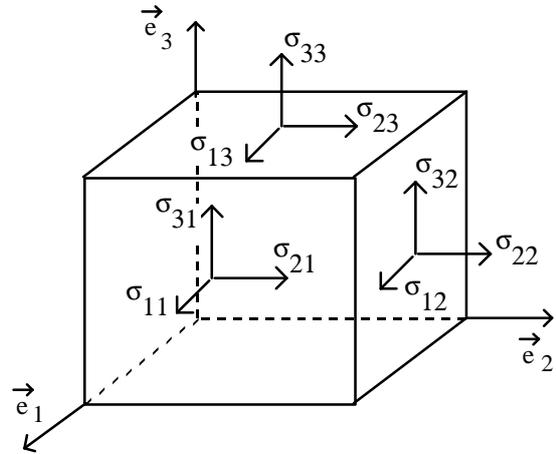
ou, en notation intrinsèque: $\vec{T}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \overline{\overline{\Sigma}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$ (6.7)

6.2.2 Composantes du tenseur des contraintes

Conformément à la relation de définition (6.5):

$$\sigma_{ij} = T_i(\vec{a}) a_j + T_i(\vec{b}) b_j + T_i(\vec{c}) c_j \quad (6.8)$$

les neuf composantes du tenseur $\overline{\overline{\Sigma}}$ caractérisent les composantes des contraintes sur les faces à normales positives d'un parallélépipède. Le second indice, j , caractérise l'orientation de la facette considérée; le premier indice, i , caractérise la composante de la contrainte sur la facette j .



6.2.3 Symétrie du tenseur des contraintes

Dans les fluides simples (ça n'est pas le cas des milieux diélectriques polarisés), le tenseur des contraintes possède une propriété de symétrie qui réduit de 9 à 6 le nombre de ses composantes indépendantes:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (6.9)$$

DÉMONSTRATION: Considérons un volume matériel fini \mathcal{V} dont l'enveloppe \mathcal{S} est de forme arbitraire. Ici encore nous considérerons une situation d'équilibre statique⁵. Le moment angulaire résultant (6.2) des forces agissant sur \mathcal{V} est alors nul; on peut donc écrire en notation indicelle, pour la composante i du moment:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \epsilon_{ijk} x_j T_k dS = 0 \quad (6.10)$$

Le tenseur des contraintes est introduit en utilisant l'expression (6.6) de la contrainte et l'on transforme l'intégrale de surface par application du théorème de la divergence (1.44). La seconde intégrale de (6.10) devient alors:

⁵ Même remarque que pour les démonstrations qui précèdent; l'hypothèse d'équilibre n'est pas indispensable. La démonstration est identique pour un domaine matériel soumis à un mouvement (le moment de quantité de mouvement disparaissant par passage à la limite).

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k dS = \iint_S \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{kl} n_l) dS = \iiint_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{kl})_{,l} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kl} x_{j,l} + x_j \sigma_{kl,l}) d\mathcal{V}$$

Substituons cette expression dans la relation (6.10) en remarquant que $\sigma_{kl} x_{j,l} = \sigma_{kl} \delta_{jl} = \sigma_{kj}$; il vient:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} [\rho x_j f_k + \sigma_{kj} + x_j \sigma_{kl,l}] d\mathcal{V} = 0$$

Appliquons maintenant cette relation générale à un volume \mathcal{V} qui tend vers zéro autour de l'origine O (de sorte que \bar{x} tende aussi vers $\vec{0}$). La relation précédente devient alors, en ne retenant que le terme d'ordre le plus élevé:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} d\mathcal{V} = 0$$

Et cette relation ne peut être vraie, pour tout point O et pour toute forme de volume \mathcal{V} , que si, en chaque point:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad (6.11)$$

soit, en développant et en ne gardant que les coefficients non nuls:

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} \sigma_{32} + \varepsilon_{132} \sigma_{23} = 0 & \mapsto \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \varepsilon_{231} \sigma_{13} + \varepsilon_{213} \sigma_{31} = 0 & \mapsto \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \varepsilon_{312} \sigma_{21} + \varepsilon_{321} \sigma_{12} = 0 & \mapsto \sigma_{21} = \sigma_{12} \end{cases}$$

Il apparaît ainsi que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, et le tenseur des contraintes ne comporte que six composantes indépendantes:

- les trois composantes diagonales $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, appelées *contraintes normales* puisqu'elles représentent la contribution à la composante normale des forces de surface (schéma de la page précédente),

- les trois composantes non diagonales, appelées *contraintes de cisaillement* puisque nous verrons qu'elles n'interviennent que dans des déformations de cisaillement.

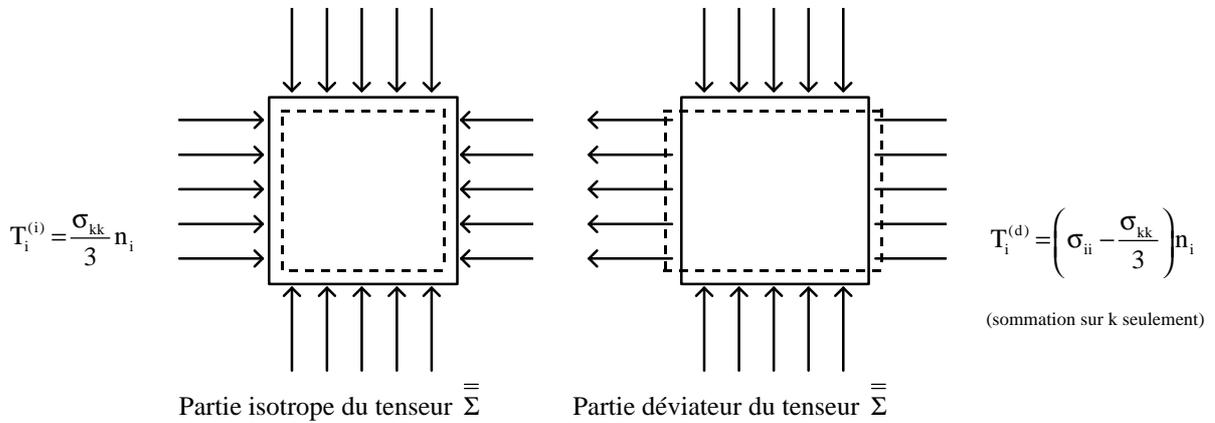
6.2.4 Notion de pression statique

Nous allons maintenant dégager une propriété spécifique du tenseur des contraintes: dans les fluides au repos les trois contraintes normales sont égales: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$.

Dans les axes principaux, le tenseur des contraintes est évidemment purement diagonal et peut toujours être décomposé en la somme de deux tenseurs, dont l'un est isotrope et dont l'autre, le complément, est un déviateur (par rapport à l'isotropie des contraintes):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{kk}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{kk}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{kk}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \frac{\sigma_{kk}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \frac{\sigma_{kk}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

La contribution du tenseur isotrope ($\frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij}$) à la contrainte est une composante normale qui ne varie pas lorsque \vec{n} varie. Le second tenseur a une trace nulle. Sa contribution à la force par unité de surface est également normale (parce qu'on a choisi des axes principaux), mais varie nécessairement lorsque \vec{n} varie; puisque la trace est nulle, il faut bien que l'une au moins de ces contraintes normales soit négative (une compression), et l'une au moins positive (une traction).



La figure illustre cet état (à 2 dimensions pour plus de clarté). La partie isotrope peut être équilibrée par un changement de volume sans changement de forme. La partie déviatoire correspondrait, au contraire, à un changement de forme sans changement de volume; ceci correspond à un état de mouvement et à la recherche d'une nouvelle forme d'équilibre telle que les forces internes équilibrent les forces externes⁶. En conséquence, si le fluide est au repos, le déviateur des contraintes est nécessairement nul; le tenseur des contraintes est donc isotrope, c'est-à-dire de la forme:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = -P(\vec{x}) \delta_{ij} \quad (6.13)$$

où le signe - est purement conventionnel. Le scalaire P (en général positif, car les fluides se trouvent normalement comprimés) est appelé la *pression* au point \vec{x} . Dans un fluide au repos, la contrainte

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = -P \delta_{ij} n_j = -P n_i \quad (6.14)$$

⁶ Nous ignorons ici la contribution des forces de volume. Leur présence éventuelle n'a pas d'incidence sur le résultat que nous allons établir. On peut toujours considérer un élément de volume assez petit pour que les forces de volumes soient négligeables, dans l'équilibre envisagé, devant les forces de surface.

est normale à la surface considérée et agit en compression (dans la direction opposée à la normale extérieure locale \vec{n}).

• **Équilibre des contraintes dans un fluide au repos**

La relation d'équilibre statique (6.13) permet de relier le champ scalaire de pression $P(\vec{x})$ aux forces de volume. La condition d'équilibre d'un fluide au repos s'écrit, en exprimant la nullité de la résultante (6.1) des efforts extérieurs:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f}(\vec{x}) d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}} P(\vec{x}) \vec{n} dS = \vec{0}$$

soit, en utilisant le théorème de la divergence (1.42):

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\rho \vec{f} - \overline{\text{grad}} P) d\mathcal{V} = \vec{0} \quad (6.15)$$

Cette relation doit être vraie quel que soit le volume matériel \mathcal{V} , par conséquent elle est vraie sur un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ et donc localement:

$$\overline{\text{grad}} P = \rho \vec{f} \quad (6.16)$$

• **Remarque 1:** Cette condition nécessaire d'équilibre exclut que le fluide puisse être au repos si la densité volumique locale des efforts $\rho \vec{f}$ n'est pas le gradient d'un champ scalaire.

• **Remarque 2:** Si cette condition est satisfaite alors $P(\vec{x})$ est constant sur les surfaces normales au champ de force $\vec{f}(\vec{x})$; ces surfaces sont dites *surfaces isobares*.

6.2.5 Le tenseur des contraintes visqueuses

Lorsque le fluide est en mouvement, il est commode de séparer la partie isotrope de la partie déviatoire. Pour cela on décompose la contrainte \vec{T} sous la forme générale:

$$\vec{T}_i = \sigma_{ij} n_j = -P \delta_{ij} n_j + \tau_{ij} n_j \quad (6.17)$$

où le premier terme du dernier membre représente la partie (6.14) des contraintes qui est associée à la pression statique et le dernier terme définit les composantes du tenseur $\overline{\tau}$ des *contraintes visqueuses*:

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (6.18)$$

ou, sous forme intrinsèque: $\overline{\Sigma} = -P \mathbf{1} + \overline{\tau}$ (6.19)

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Comme $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\mathbf{1}}$ sont des tenseurs symétriques, il s'ensuit que le tenseur des *contraintes visqueuses* est aussi symétrique

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (6.21)$$

Dans la décomposition précédente, la pression statique est une variable thermodynamique qui ne dépend que de l'état thermodynamique du système matériel étudié. Par contre, le tenseur des contraintes visqueuses dépend de l'écoulement (puisque'il est identiquement nul dans le cas du repos); nous verrons plus précisément qu'il dépend du taux de déformation locale.

Chapitre 7 Équations de bilans

7.1 Forme générale d'un principe de bilan

Les lois générales de la physique s'appuient sur le principe commun de l'analyse de bilan appelée souvent *loi de conservation*. Ce principe exprime qu'une grandeur physique est soit invariante (d'où le vocable *loi de conservation*), soit varie d'une manière définie en fonction des influences extérieures (d'où le vocable *loi de bilan*). Il convient de préciser d'emblée la démarche commune à toutes ces lois de bilan.

Remarquons d'abord que les grandeurs physiques astreintes à suivre des lois de bilan sont des grandeurs extensives (masse, quantité de mouvement, énergie, nombre de molécules d'une espèce particulière...). Il s'agit donc de grandeurs matérielles dont on évalue la quantité intégrale sous la forme d'une intégrale matérielle:

$$I(t) = \iiint_{V_m(t)} \rho f \, dV$$

dont nous savons calculer la dérivée particulière. Les lois de bilans sont donc des relations entre la variation dans le mouvement de $I(t)$ et les mécanismes physiques qui génèrent ces variations.

Les mécanismes physiques qui produisent (sources) ou détruisent (puits) la grandeur matérielle considérée relèvent de deux classes bien distinctes:

- des sources (ou puits), effectivement distribuées à l'intérieur du domaine \mathcal{V}_m mais commandées par un système extérieur (c'est le cas des forces de volume comme source de quantité de mouvement),
- des sources distribuées sur la frontière \mathcal{S}_m du volume de contrôle et commandées par le matériau situé hors de \mathcal{V}_m (c'est le cas des forces de surfaces pour la quantité de mouvement). On peut donc écrire un bilan sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho f \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} S \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dS \quad (7.1)$$

où S est la densité volumique des sources internes et $\vec{\varphi}$ le flux (vecteur ou tenseur) surfacique des sources externes. En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme de la relation (7.1) et le théorème de transport dans sa version (5.23), on peut écrire:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{df}{dt} d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{V}_m(t)} (S + \operatorname{div} \vec{\varphi}) d\mathcal{V}} \quad (7.2)$$

Cette équation intégrale de bilan doit être vraie quel que soit le domaine matériel considéré. On peut donc considérer un domaine élémentaire $d\mathcal{V}$ et écrire la forme locale suivante du principe de bilan:

$$\boxed{\rho \frac{df}{dt} = S + \operatorname{div} \vec{\varphi}} \quad (7.3)$$

7.2 Équation de bilan de masse

La masse d'un système matériel étant conservative, les termes sources S et les flux $\vec{\varphi}$ sont identiquement nuls. L'équation de conservation de la masse est obtenue en écrivant les formulations génériques (7.2) ou (7.3) pour $f \equiv 1$. Cette équation a été établie au §5.5.2. Indiquons ici les différentes formes macroscopiques utiles:

Forme (5.20):

$$\boxed{\iint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] d\mathcal{V} = 0} \quad (7.4)$$

ou, en exprimant le flux surfacique:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0} \quad (7.5)$$

Dans le cas d'un volume de contrôle arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ qui coïncide à l'instant t avec un volume matériel $\mathcal{V}_m(t)$, on peut écrire d'après (5.12) (en substituant $f \equiv \rho$):

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{V}_a(t)} \rho d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \rho (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (7.6)$$

Les formes locales de l'équation de continuité ont été établies au § 5.5.2; rappelons-les:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0} \quad (7.7)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0} \quad (7.8)$$

7.3 Équation de bilan de quantité de mouvement

7.3.1 Formes macroscopiques

L'application du principe de bilan à la quantité de mouvement prend la forme du Principe d'Euler (loi fondamentale de la Dynamique):

Dans un référentiel galiléen, le torseur d'accélération est égal au torseur des efforts extérieurs, à tout instant et pour toute partie \mathcal{D} d'un système matériel .

On rappelle qu'un torseur est l'ensemble des six éléments de réduction (à l'origine du repère considéré) d'un champ vectoriel, c'est-à-dire le couple: résultante et moment résultant. On a ainsi, pour un domaine matériel \mathcal{D} (de volume \mathcal{V}_m et d'enveloppe \mathcal{S}_m):

- le torseur de quantité de mouvement:

$$[\mathbf{P}] \begin{cases} \bar{\mathbf{P}} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{x}}, t) d\mathcal{V} \\ \bar{\mathbf{M}}_o(\mathbf{P}) = \iiint_{\mathcal{V}_m} \bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{x}}, t) d\mathcal{V} \end{cases}$$

- le torseur d'accélération:

$$[\mathbf{\Gamma}] \begin{cases} \bar{\mathbf{\Gamma}} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) d\mathcal{V} \\ \bar{\mathbf{M}}_o(\mathbf{\Gamma}) = \iiint_{\mathcal{V}_m} \bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) d\mathcal{V} \end{cases} \quad \text{avec } [\mathbf{\Gamma}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{P}]$$

- le torseur des efforts extérieurs:

$$[\mathbf{F}] \begin{cases} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\mathbf{f}} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \bar{\mathbf{T}} d\mathbf{S} \\ \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{f}} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d\mathbf{S} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \bar{\mathbf{f}}: \text{densité massique des forces de volume} \\ \bar{\mathbf{T}}: \text{contra int e surfacique} \end{cases}$$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit donc: $[\mathbf{\Gamma}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{P}] = [\mathbf{F}]$.

En exprimant la dérivée particulière du torseur de quantité de mouvement:

$$[\mathbf{\Gamma}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{P}] \begin{cases} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\mathbf{V}} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \rho \bar{\mathbf{V}} (\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d\mathbf{S} \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}}) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}}) (\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d\mathbf{S} \end{cases}$$

on obtient la forme explicite suivante:

$$\begin{cases} \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \rho \bar{\mathbf{V}} (\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \bar{\mathbf{f}} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \bar{\mathbf{T}} d\mathbf{S} \\ \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}}) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{V}}) (\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}_m} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \rho \bar{\mathbf{f}}) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} (\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{T}}) d\mathbf{S} \end{cases} \quad (7.9)$$

Ce théorème est d'une importance essentielle. Il permet en effet de calculer, à partir du champ de vitesse $\bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ dans le domaine considéré, le torseur des efforts exercés par un fluide en mouvement sur un obstacle. Il est

spécialement intéressant dans le cas des écoulements stationnaires puisque alors la seule donnée du champ de vitesse sur la frontière \mathcal{S} définit complètement le tenseur des efforts extérieurs.

Souvent, pour des raisons de symétrie, il apparaît clairement que le moment des efforts extérieurs est nul, aussi est-ce la relation sur la résultante des efforts qui est la plus utilisée. Dans ce cas l'équation intégrale de bilan de quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{V} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{f} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \vec{T} \, dS \quad (7.10)$$

D'autres formes macroscopiques du bilan de quantité de mouvement peuvent être exprimées à partir de l'expression précédente en transformant le membre de gauche à l'aide du théorème de Reynolds (5.23) et en introduisant le tenseur des contraintes défini par $\vec{T} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{V} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{f} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \, dS \quad (7.11)$$

Appliquons le théorème de Green-Ostrogradski au dernier terme :

$$\iint_{\mathcal{S}_m} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \left[\rho \vec{f} + \overline{\text{div}} \vec{\Sigma} \right] \, d\mathcal{V} \quad (7.12)$$

La formulation indicelle des relations (7.10), (7.11) et (7.12) est respectivement :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho V_i \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \rho V_i (V_j n_j) \, dS = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho f_i \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} T_i \, dS \quad (7.13)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho V_i \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{dV_i}{dt} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \rho f_i \, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \sigma_{ij} \cdot n_j \, dS \quad (7.14)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{dV_i}{dt} \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m} \left[\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] \, d\mathcal{V} \quad (7.15)$$

7.3.2 Formes locales

Le volume de contrôle $\mathcal{V}_m(t)$ est arbitraire et les intégrands apparaissant dans les deux membres de la relation (7.12) doivent être égaux :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \overline{\text{div}} \vec{\Sigma} \quad (7.16)$$

soit, sous forme indicielle:
$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.17)$$

On peut décomposer le tenseur $\overline{\Sigma}$ en utilisant (6.19) pour faire apparaître la pression P et le tenseur $\overline{\tau}$ des contraintes visqueuses dans ces deux dernières équations:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overline{\text{grad}} P + \overline{\text{div}} \overline{\tau} \quad (7.18)$$

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.19)$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement:

Variation de la quantité de mouvement par unité de volume	=	Forces volumiques par unité de volume	+	Forces associées à la pression par unité de volume	+	Contraintes visqueuses par unité de volume
---	---	---------------------------------------	---	--	---	--

Nous allons écrire une autre forme locale du bilan de quantité de mouvement en exprimant la dérivée particulaire qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation (7.19):

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i V_j}{\partial x_j} - V_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} \right)$$

Le terme entre parenthèses du membre de droite est nul en vertu de l'équation (7.7) de conservation de la masse. L'équation locale (7.19) de bilan de quantité de mouvement peut donc être écrite sous la forme dite *conservative*:

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i V_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.20)$$

soit, en écriture vectorielle:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{div}} (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = \rho \vec{f} + \overline{\text{div}} \overline{\Sigma} = \rho \vec{f} - \overline{\text{grad}} P + \overline{\text{div}} \overline{\tau} \quad (7.21)$$

7.4 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique établit que *la variation de l'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la somme des puissances des efforts (extérieurs et intérieurs) qui s'exercent sur lui.*

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i \quad (7.22)$$

- Il est facile d'expliciter le premier terme de cette relation (en utilisant le théorème de Reynolds):

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{1}{2} \rho V^2 d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{1}{2} \rho \frac{dV^2}{dt} d\mathcal{V} \quad (7.23)$$

- Les efforts extérieurs sont définis par:

$$\iiint_{\mathcal{V}_m} \rho \vec{f} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS$$

et le second terme de (7.22) peut donc s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{P}_e = \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{V} \cdot \rho \vec{f} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m} \vec{V} \cdot \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}_m} \left[\rho \vec{V} \cdot \vec{f} + \overline{\text{div}}(\vec{V} \cdot \vec{\Sigma}) \right] d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\rho V_i f_i + \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V}$$

• La démarche naturelle pour déterminer la puissance \mathbf{P}_i des forces de cohésion interne consiste à utiliser l'équation de bilan de quantité de mouvement, puis à comparer le résultat avec l'expression (7.22) du théorème de l'énergie cinétique. Formons donc le produit scalaire du vecteur vitesse \vec{V} et de l'équation de bilan (7.17) de la quantité de mouvement:

$$V_i \left[\rho \frac{dV_i}{dt} \right] = V_i \left[\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{dV^2}{dt} = \rho V_i f_i + \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Or, puisque $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, le dernier terme peut s'écrire: $\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} D_{ji}$ où nous avons fait apparaître le tenseur $\overline{\mathbf{D}}$ des taux de déformation. On obtient donc:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{dV^2}{dt} = \rho V_i f_i + \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} D_{ji}$$

Intégrons cette relation sur le volume de contrôle \mathcal{V}_m et identifions chaque terme par comparaison avec (7.22):

$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{1}{2} \rho \frac{dV^2}{dt} d\mathcal{V}}_{\frac{d\mathbf{K}}{dt}} = \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\rho V_i f_i + \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V}}_{\mathbf{P}_e} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} [-\sigma_{ij} D_{ji}] d\mathcal{V}}_{\mathbf{P}_i} \quad (7.24)$$

et on constate que *la puissance des efforts intérieurs est nulle dans un mouvement rigide* ($\overline{\mathbf{D}} = 0$).

À cette forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique exprimée sur un volume fluide \mathcal{V}_m quelconque, correspond évidemment la forme locale:

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{dt} = \rho V_i f_i + \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} D_{ji}} \quad (7.25)$$

On peut encore décomposer le tenseur $\overline{\Sigma}$ en utilisant (6.19) pour faire apparaître la pression P et le tenseur $\overline{\tau}$ des contraintes visqueuses; on obtiendra:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{dt} = \rho V_i f_i - V_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + V_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{dt} = \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{f}}_{\text{Puissance des forces volumiques par unité de volume}} - \underbrace{\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} P}_{\text{Puissance des forces de pression par unité de volume}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \overline{\text{div}} \tau}_{\text{Puissance des contraintes visqueuses par unité de volume}} \end{array}} \quad (7.26)$$

Il est intéressant d'exprimer les deux derniers termes de cette équation en faisant apparaître explicitement les contributions strictement surfaciques (sous forme d'une divergence) et les contributions volumiques (travail des efforts intérieurs). On procède à la transformation

$$V_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - V_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij} V_i - P V_j] + P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

où l'on peut faire apparaître le tenseur des taux de déformation \overline{D} en utilisant la propriété de symétrie du tenseur $\overline{\tau}$:

$$\tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \tau_{ji} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ij} D_{ji}$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique prend la forme explicite suivante:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{dt} = \rho V_i f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} V_i - P V_j) + P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} - \tau_{ij} D_{ji} \\ \frac{1}{2}\rho \frac{dV^2}{dt} = \rho \vec{V} \cdot \vec{f} + \text{div}(\overline{\tau} \cdot \vec{V} - P \vec{V}) + P \text{div} \vec{V} - \overline{\tau} : \overline{D} \end{array}} \quad (7.27)$$

7.5 Équation de bilan de l'énergie

La grandeur matérielle considérée est maintenant la densité d'énergie : $f(\vec{x}, t) = e + \frac{1}{2} V^2$.

L'énergie contenue dans un volume matériel $\mathcal{V}_m(t)$ est:

$$\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) d\mathcal{V}$$

L'expression de l'équation de bilan l'énergie s'établit à partir du premier principe de la thermodynamique (2.7). Selon ce principe l'évolution temporelle de l'énergie contenue dans $\mathcal{V}_m(t)$ est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la quantité de chaleur fournie au système:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (7.28)$$

où le travail par unité de temps (voir 2.8) est celui qui est développé respectivement par les forces volumiques et les contraintes appliquées à la surface \mathcal{S}_m du volume de contrôle matériel:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{V} dS \quad (7.29)$$

et où la puissance thermique fournie au fluide comporte éventuellement une contribution volumique associée à une densité volumique r de sources distribuées et une contribution surfacique définie par un vecteur densité de flux \vec{q} sur l'enveloppe \mathcal{S}_m :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} r d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (7.30)$$

On peut donc écrire le bilan d'énergie sous la forme intégrale suivante⁷:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} r d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{V} dS - \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS} \quad (7.31)$$

Une forme alternative de cette équation peut être obtenue en explicitant la contrainte à l'aide de l'expression (6.17):

$$\iint_{\mathcal{S}_m(t)} \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{V} dS = \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \left(-P \delta_{ij} n_j + \tau_{ij} n_j \right) V_i dS = \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \left(-P n_i V_i + \tau_{ij} V_i n_j \right) dS$$

et en transformant cette intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski:

⁷ Remarque: On peut bien sûr faire appel aux différentes formes du théorème de transport pour exprimer le terme intégral de variation de l'énergie en intégrales de variations:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V}$$

ou bien:
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \right) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

ou encore:
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \vec{V} \right) \right] d\mathcal{V}$$

$$\iint_{\mathcal{S}_m(t)} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{V}} dS = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[-\frac{\partial P V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} V_i}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V}$$

La même opération peut aussi être faite sur le terme de flux (radiatif ou conductif) de chaleur:

$$\iint_{\mathcal{S}_m(t)} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} d\mathcal{V}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (7.31) du bilan, il vient:

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\rho f_i V_i + r - \frac{\partial P V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right] d\mathcal{V}} \quad (7.32)$$

À cette forme intégrale du bilan d'énergie exprimé sur un volume fluide \mathcal{V}_m quelconque, correspond évidemment la forme locale:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) &= \rho f_i V_i + r + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} V_i - P V_j) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) &= \rho \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{V}} + r + \operatorname{div} (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{V}} - P \bar{\mathbf{V}}) - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} \end{aligned}} \quad (7.33)$$

7.6 Équation de bilan de l'énergie interne

On obtient directement l'équation pour l'énergie interne en retranchant l'équation (7.26) pour l'énergie cinétique de l'équation (7.33) pour l'énergie totale:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} &= r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} D_{ji} - P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \\ \rho \frac{de}{dt} &= \underbrace{r}_{\text{Apports de chaleur en volume}} - \underbrace{\operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}}_{\text{Apports de chaleur en surface}} + \underbrace{\bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}}_{\substack{\text{Apports de chaleur} \\ \text{par dissipation visqueuse} \\ \text{de l'énergie mécanique} \\ \text{(effets irréversibles)}}} - \underbrace{P \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}}}_{\substack{\text{Apports de chaleur} \\ \text{par compression} \\ \text{ou détente} \\ \text{(effets réversibles)}}} \end{aligned}} \quad (7.34)$$

Dans l'interprétation physique des différents termes de cette équation, les *apports* sont considérés dans l'acception algébrique du mot, sauf en ce qui concerne le terme $\bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}$ que nous noterons Φ_1 et dont nous montrerons au §9.1.3 (dans le cas particulier des fluides newtoniens qui sont les seuls considérés ici) qu'il est toujours positif. Il s'agit donc d'un terme source pour l'énergie interne, terme qui apparaît affecté d'un signe moins (terme puits) dans l'équation de l'énergie cinétique; il est donc interprété comme représentatif de la dissipation irréversible de l'énergie mécanique associée au travail des contraintes visqueuses. Ainsi les contraintes visqueuses travaillent toujours à un accroissement de l'énergie interne du fluide et donc de sa température.

7.7 Forme enthalpique du bilan d'énergie

Elle s'obtient aisément à partir de la définition de la densité d'enthalpie: $h = e + P/\rho$ mise sous la forme différentielle:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \left[\frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \rho \frac{de}{dt} + \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

où l'on exprime le dernier terme à l'aide de l'équation de continuité: $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V}$

On obtient alors:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + \frac{dP}{dt} + P \operatorname{div} \vec{V}$$

et l'on substitue $(\rho de/dt)$ par son expression (7.34). Il vient finalement:

$$\boxed{\rho \frac{dh}{dt} = r - \operatorname{div} \vec{q} + \frac{dP}{dt} + \tau : \mathbf{D}} \quad (7.35)$$

7.8 Équation de bilan de l'entropie

Pour établir l'équation du bilan de l'entropie, on utilise

$$\left. \begin{array}{l} \text{la relation de Gibbs (2.33):} \\ \text{et la forme différentielle de l'enthalpie:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Theta ds = de + P d(1/\rho) \\ dh = de + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dP \end{array} \Rightarrow \Theta ds = dh - \frac{dP}{\rho}$$

qu'on associe à l'équation (7.35) pour l'enthalpie. On obtient:

$$\boxed{\rho \Theta \frac{ds}{dt} = r - \operatorname{div} \vec{q} + \tau : \mathbf{D}} \quad (7.36)$$

Remarque: En aérodynamique un grand nombre de phénomènes peuvent être décrits en supposant le gaz non conducteur et non visqueux. En outre les sources r de chaleur distribuées dans le volume peuvent souvent être négligées elles aussi. L'équation pour l'entropie devient alors simplement:

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

“Dans un fluide non visqueux et adiabatiquement isolé l'entropie reste constante sur chaque ligne de courant”.

L'équation pour l'enthalpie se réduit alors à:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

• Équation pour la température

Au §2.2.5 nous avons écrit deux variantes (2.30) et (2.31) de l'accroissement d'entropie:

$$\Theta ds = \begin{cases} C_p \delta\Theta - \Theta \left. \frac{\partial V}{\partial \Theta} \right|_p \delta P \\ C_v \delta\Theta + \Theta \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_v \delta V \end{cases}$$

qu'on peut encore, pour une masse unitaire, écrire sous la forme

$$\Theta ds = \begin{cases} C_p \delta\Theta + \frac{\Theta}{\rho^2} \left. \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right|_p \delta P \\ C_v \delta\Theta - \frac{\Theta}{\rho^2} \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_p \delta \rho \end{cases}$$

Utilisons maintenant l'équation (7.36) pour l'entropie:

$$\rho \Theta \frac{ds}{dt} = \begin{cases} \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\Theta}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right|_p \frac{dP}{dt} \\ \rho C_v \frac{d\Theta}{dt} - \frac{\Theta}{\rho} \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_p \frac{d\rho}{dt} \end{cases} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D}$$

où encore, en utilisant l'équation de continuité pour exprimer $d\rho/dt$:

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\Theta}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right|_p \frac{dP}{dt} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D} \\ \rho C_v \frac{d\Theta}{dt} + \Theta \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_p \operatorname{div} \bar{V} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D} \end{cases} \quad (7.37)$$

• Pour les liquides: L'équation d'état peut être écrite sous la forme

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(\Theta - \Theta_0) + \chi(P - P_0)]$$

où β et χ sont les coefficients de dilatabilité et de compressibilité. Les variations relatives de masse volumique d'origine respectivement thermique ou mécanique $\beta(\Theta - \Theta_0)$ et $\chi(P - P_0)$ sont en général très faibles dans les liquides. On approxime donc souvent l'équation d'état par:

$$\rho = \rho_0$$

L'équation de continuité qui relie $\operatorname{div} \bar{V}$ aux variations de ρ impose alors que $\operatorname{div} \bar{V}$ soit aussi très petit, et comme C_p et C_v sont très peu différents, les équations (7.37) peuvent être approchées

$$\text{par:} \quad \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D} \quad (7.38)$$

• Pour les gaz idéaux: L'équation d'état permet d'exprimer simplement les dérivées partielles dans (7.37)

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right|_p = -\frac{\rho}{\Theta} \quad ; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right|_p = \frac{P}{\Theta}$$

On obtient donc les formes suivantes de l'équation pour la température:

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} - \frac{dP}{dt} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D} \\ \rho C_v \frac{d\Theta}{dt} + P \operatorname{div} \bar{V} = r - \operatorname{div} \bar{q} + \bar{\tau} : \bar{D} \end{cases} \quad (7.39)$$

Chapitre 8 Lois de comportement

8.1 Principes généraux

8.1.1 Introduction

Les équations de bilan établies au chapitre précédent traduisent les principes généraux de la Mécanique et de la Thermodynamique, et en tant que telles sont applicables à l'étude du mouvement de tout matériau représenté à l'échelle du continuum. La représentation du matériau à cette échelle conduit à ignorer le détail des phénomènes de transport à l'échelle moléculaire, perte d'information qu'il est maintenant nécessaire de réintroduire sous la forme de relations empiriques dites *constitutives* ou *lois de comportement*.

C'est un fait d'expérience que, même en l'absence de transport *advectif*, c'est-à-dire en situation de repos macroscopique ($\vec{V}(\vec{x}, t) = 0$), il existe un transport *diffusif* représentatif de l'agitation moléculaire. Si une grandeur physique $\mathbf{g}(\vec{x}, t)$ (scalaire ou vecteur) est distribuée de manière non uniforme dans un fluide (ou un solide), un certain flux $\phi_{\mathbf{g}}$ de \mathbf{g} progresse des régions où \mathbf{g} est grand vers les régions où \mathbf{g} est petit, et finit par annuler les différences initiales (à moins qu'elles ne soient continuellement restaurées de l'extérieur). L'exemple le plus banal est certainement celui de la chaleur. Mais cette propriété s'applique aussi bien à la quantité de mouvement, la concentration en matériau dissout, en charge électrique, etc.

L'expérience montre aussi que, pour une distribution initiale donnée, la vitesse de diffusion de \mathbf{g} peut être très différente d'un matériau à un autre. Tous les matériaux ne répondent pas de manière identique à la même sollicitation: une même contrainte appliquée sur de l'eau ou du goudron n'engendre pas la même déformation et la conduction de la chaleur est très différente dans l'air et dans un métal.

L'une des caractéristiques essentielles des fluides est leur capacité de se déformer continûment lorsqu'ils sont soumis à des contraintes. La déformation du fluide se poursuit tant que la contrainte est appliquée alors qu'un solide soumis à une contrainte donnée présente une déformation qui s'établit à un niveau indépendant du temps. Dans ces conditions la déformation du fluide doit être caractérisée par le taux de déformation (variation relative de la distance entre 2 points par unité de temps), alors que, dans un solide, la déformation est simplement caractérisée par la

variation relative de distance entre 2 points.

Ces différences de comportement rendent compte de propriétés physiques très différentes qui ne sont pas décrites à l'échelle du milieu continu mais qui sont contenues globalement dans les termes de flux surfaciques que nous avons introduits dans les équations de bilan.

L'objet de ce chapitre est donc de formuler les *relations constitutives* grâce auxquelles peuvent être décrits ces flux. Jointes aux équations générales de bilan, à une loi d'état et aux conditions aux limites, les *relations de comportement* doivent permettre la résolution complète du mouvement du système compte tenu des données initiales.

Nous limiterons dans ce cours au cas des fluides simples dits *newtoniens* qui sont caractérisés par une relation linéaire entre forces et flux. Les fluides *non newtoniens* seront néanmoins évoqués au [§8.3](#).

8.1.2 Axiomatique des lois de comportement

Les relations qui traduisent le comportement physique du milieu considéré, bien que de nature expérimentale (les études microscopiques à travers une théorie cinétique sont loin d'avoir abouti, sauf dans le cas des gaz pas trop denses), doivent néanmoins satisfaire à un certain nombre de principes. On définit ainsi en Mécanique des Milieux Continus toute une axiomatique des comportements.

Nous nous limitons ici à l'énoncé de quelques-uns des axiomes les plus "évidents".

- Principe de l'homogénéité dimensionnelle:

Les lois de comportement doivent être invariantes dans tout changement du système d'unités.

- Principe d'homogénéité spatiale:

On admet que la loi de comportement est la même en tout point du matériau.

- Principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle:

Cet axiome d'isotropie exprime qu'une loi de comportement doit être invariante par changement de référentiel. Autrement dit, les propriétés du milieu sont indépendantes de l'observateur.

- Principe de causalité ou du déterminisme:

Selon ce principe, le comportement d'un élément de matière de position \bar{x} à l'instant t est parfaitement déterminé par l'histoire du milieu jusqu'à l'instant t ; la situation actuelle ne dépend pas du futur. Pour les fluides proprement dits, on admettra que le comportement local ne dépend que de l'état actuel; on dit qu'il s'agit de matériaux dépourvus de mémoire.

- Principe de localisation spatiale:

Cet axiome stipule que le comportement ne dépend que des valeurs locales des variables du mouvement et de

leurs dérivées spatiales. Un milieu est dit *matériellement simple* dans le sens où seules les dérivées premières interviennent.

8.2 Relations linéaires entre forces et flux

Soit $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ la valeur locale instantanée de la densité volumique d'une grandeur physique matérielle. Notons $\varphi_{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t)$ le flux par unité de surface de cette grandeur \mathbf{g} , au point $\bar{\mathbf{x}}$, à l'instant t , pour une orientation $\bar{\mathbf{n}}$ de la surface considérée ($\varphi_{\mathbf{g}}$ représente la quantité de \mathbf{g} qui traverse l'unité de surface pendant l'unité de temps). \mathbf{g} peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur. Nous nous proposons de caractériser, d'un point de vue phénoménologique, les propriétés de transport diffusif des fluides par des relations entre $\varphi_{\mathbf{g}}$ et \mathbf{g} . Dans ces relations interviendront des coefficients différents d'un fluide à l'autre, et pour un fluide donné variables avec l'état de celui-ci.

On cherche donc une fonctionnelle de la forme:

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t), \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}, \tau), \bar{\mathbf{x}}, t\} = 0$$

- Le principe de causalité admet que le passé détermine complètement le présent. Ceci impose que $\tau \leq t$ dans la relation précédente.

- Le principe d'objectivité admet que les propriétés de transport moléculaire du matériau sont indépendantes de l'observateur, notamment de sa position et de sa vitesse. Ceci impose que le temps t ne peut être lui-même un argument de la fonctionnelle \mathcal{F} . On est donc conduit à écrire:

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t), \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}, \tau), \bar{\mathbf{x}}\}_{\tau \leq t} = 0$$

- Le principe d'homogénéité spatiale suppose que, si le milieu est homogène, la fonctionnelle \mathcal{F} ne peut dépendre explicitement de $\bar{\mathbf{x}}$.

- Conformément à l'axiome de l'équilibre local, le fluide doit avoir une *mémoire infiniment courte*, de telle sorte que seuls les instant τ très proches de t interviennent dans le comportement du fluide à l'instant t :

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t), \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}, \tau)\} = 0$$

et le principe de localisation spatiale revient à considérer le *domaine d'influence extrêmement petit*, de telle sorte que seules interviennent les positions $\bar{\mathbf{y}}$ très proches de $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{x}}, t), \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, t)\} = 0$$

Ce résultat signifie que dans un fluide les valeurs locales de $\varphi_{\mathbf{g}}$ sont fonctions à chaque instant des valeurs locales de \mathbf{g} et de ses dérivées spatiales:

$$\varphi_g(\bar{n}, \bar{x}, t) = A \mathbf{g}(\bar{x}, t) + K_j \frac{\partial \mathbf{g}(\bar{x}, t)}{\partial x_j} + \dots$$

Mais φ_g devrait être nul dans le cas particulier d'une distribution uniforme du champ de \mathbf{g} (toutes les dérivées spatiales sont nulles), donc $A \equiv 0$.

Conformément à l'hypothèse du *petit domaine d'influence* nous ne considérerons ici que des milieux matériellement simples pour lesquels les dérivées d'ordre supérieur à un n'interviennent pas. On aboutit finalement à une relation linéaire entre les premières dérivées de \mathbf{g} et les flux φ_g :

$$\varphi_g(\bar{n}, \bar{x}, t) = K_j \frac{\partial \mathbf{g}(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \quad (8.1)$$

Les variables $\partial \mathbf{g} / \partial x_j$ sont parfois appelées *contraintes généralisées* ou *variables intensives* parce qu'elles caractérisent l'intensité du phénomène. Les variables φ_g sont appelées *flux généralisés* ou *variables extensives*. Cette dénomination vient du fait qu'elles sont additives lorsqu'on réunit deux systèmes en un seul, alors que les variables intensives conservent la même valeur que dans les deux systèmes initiaux.

Remarquons que nous avons exprimé le flux φ_g pour représenter uniquement le transport de \mathbf{g} dû à l'agitation moléculaire. Si l'on envisage un mode de transport qui n'exige pas de support matériel, comme le rayonnement électromagnétique, il faut ajouter un terme indépendant de \mathbf{g} au second membre de la relation (8.1):

$$\varphi_g(\bar{n}, \bar{x}, t) = R + K_j \frac{\partial \mathbf{g}(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \quad (8.2)$$

La physique propre à ce mode de transport doit permettre d'explicitier ce terme R supplémentaire.

8.2.1 Cas de la quantité de chaleur - Loi de Fourier

Si $\mathbf{g}(\bar{x}, t)$ est un champ scalaire, la grandeur φ_g est un vecteur flux $\vec{\varphi}$ tel que la quantité de \mathbf{g} qui traverse par unité de temps un élément de surface dS de normale extérieure \bar{n} s'écrit:

$$\vec{\varphi} \cdot \bar{n} dS$$

La relation linéaire (8.2) s'écrit alors, en notation indicielle:

$$\varphi_i = R_i + K_{ij} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}$$

Cette relation doit être invariante par changement de repère; φ_i et $\partial \mathbf{g} / \partial x_j$ étant des vecteurs, le coefficient de transport diffusif K_{ij} est donc un tenseur du second ordre. La condition d'isotropie du fluide impose à K_{ij} d'être proportionnel au tenseur d'isotropie δ_{ij} :

$$K_{ij} = -K \delta_{ij}$$

le signe - étant simplement là par convention pour que le flux soit positif lorsque le gradient de \mathbf{g} est négatif (le flux

de chaleur est orienté vers les zones froides, c'est-à-dire opposé au gradient de température).

La loi constitutive représentant le flux d'un scalaire est donc finalement:

$$\varphi_i = R_i + K \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (8.3)$$

a) Loi de Fourier

Si $\vec{\varphi}$ désigne le vecteur flux de chaleur (noté \vec{q}), alors g représente la température $\Theta(\vec{x}, t)$. La quantité de chaleur qui traverse par unité de temps l'élément de surface dS est la somme de deux termes:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} dS = \vec{R} \cdot \vec{n} dS - K \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Theta dS \quad (8.4)$$

Le premier terme représente un mécanisme de transport possible dans un matériau à température uniforme; \vec{R} peut représenter le flux radiatif puisque le rayonnement n'exige pas de support matériel. Ce terme, qui peut être considéré séparément et exprimé à l'aide d'un modèle radiatif, est souvent négligé car les fluides sont assez opaques au rayonnement thermique.

Le dernier terme caractérise l'aptitude du matériau à transporter la chaleur d'un point à l'autre en présence d'inhomogénéités du champ de température. La loi constitutive:

$$\vec{q} = -K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \quad (8.5)$$

qui caractérise la conduction de la chaleur est appelée *loi de Fourier*. Le coefficient scalaire K est la *conductivité thermique* du fluide.

b) Loi de Fick

Si $\vec{\varphi}$ désigne le vecteur flux de matière d'une espèce, alors g représente la concentration (notée C) de cette espèce. Le transport immatériel de matière étant impossible, $\vec{R} = \vec{0}$. La loi constitutive:

$$\vec{\varphi} = -D \overrightarrow{\text{grad}} C \quad (8.6)$$

qui caractérise le transport diffusif de matière est appelée *loi de Fick*. Le scalaire D est le coefficient de *diffusivité matérielle*

8.2.2 Cas de la quantité de mouvement - Loi de Newton

Considérons maintenant que la grandeur g est le vecteur densité de quantité de mouvement (c'est-à-dire la vitesse). Les dérivées $\partial g / \partial x_i$ dans la relation générique (8.3) constituent un tenseur d'ordre 2, tout comme le tenseur des contraintes $\overline{\Sigma}$ qui représente, comme nous l'avons vu au [chapitre 7](#), le flux de quantité de mouvement à travers l'unité de surface. La relation (8.3) prend alors la forme linéaire

$$\sigma_{ij} = \underbrace{R_{ij}}_{(1)} + \underbrace{K_{ijk\ell} \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell}}_{(2)} \quad (8.7)$$

• Terme (1): Conformément à la remarque que nous avons faite au §6.2.4, dans le cas particulier d'un fluide au repos, on doit retrouver la forme isotrope (6.13):

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij}$$

où P est la pression thermodynamique qui vérifie l'équation d'état. Ceci impose que R_{ij} , la partie indépendante du champ de vitesse, soit également de cette forme. Ceci nous amène donc à écrire la relation (8.7) sous la forme:

$$\sigma_{ij} = -R(\bar{x}, t) \delta_{ij} + K_{ijk\ell} \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \quad (8.8)$$

où R à la dimension d'une pression, mais ce n'est pas la pression, valeur moyenne des trois contraintes principales qui vérifie l'équation d'état en vertu de l'axiome de l'équilibre local. La pression est, d'après cette définition:

$$P = -\frac{1}{3} \sigma_{jj} = R - \frac{1}{3} K_{jjk\ell} \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \quad (8.9)$$

• Terme (2): Décomposons le tenseur gradient de vitesse selon (4.14) en faisant apparaître les tenseurs des taux de déformation $D_{k\ell}$ et de rotation $\Omega_{k\ell}$:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k} \right)}_{\text{taux de déformation } D_{k\ell}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} - \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k} \right)}_{\text{taux de rotation } \Omega_{k\ell}} \quad (8.10)$$

La relation linéaire (8.8) peut ainsi être écrite sous la forme:

$$\sigma_{ij} = -R \delta_{ij} + K_{ijk\ell} [D_{k\ell} + \Omega_{k\ell}] \quad (8.11)$$

À ce stade, on peut ramener le tenseur d'ordre quatre $K_{ijk\ell}$ à une forme assez simple et à un nombre réduit de composantes. Il doit en effet vérifier le principe d'objectivité de façon que la loi de comportement soit invariante par rapport au système d'axes dans lequel on l'exprime. Ceci impose que:

$$K_{ijk\ell} = \lambda \delta_{ij} \delta_{k\ell} + \mu \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \eta \delta_{i\ell} \delta_{jk}$$

et réduit à trois le nombre de scalaires indépendants formant les composantes de $K_{ijk\ell}$. En outre, la symétrie du tenseur des contraintes σ_{ij} impose que $K_{ijk\ell} = K_{jik\ell}$, c'est-à-dire: $\mu = \eta$. Il reste à substituer ces résultats dans la relation générale (8.11):

$$\sigma_{ij} = -R \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \delta_{k\ell} [D_{k\ell} + \Omega_{k\ell}] + \mu (\delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}) [D_{k\ell} + \Omega_{k\ell}]$$

$$\sigma_{ij} = -R \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} [D_{kk} + \Omega_{kk}] + \mu [D_{ij} + \Omega_{ji}] + \mu [D_{ji} + \Omega_{ij}]$$

ou encore, en tenant compte que Ω_{ij} est antisymétrique de trace nulle et que D_{ij} est symétrique:

$$\sigma_{ij} = [-R + \lambda D_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (8.12)$$

Le transport diffusif de quantité de mouvement fait venir deux coefficients scalaires λ et μ devant tous les deux être des variables d'état. Ils sont appelés *coefficients de viscosité dynamique*, leur dimension est $[M.L^{-1}.T^{-1}]$.

On peut encore substituer le scalaire R par son expression (8.9) en fonction de la pression:

$$\left. \begin{aligned} R &= P + \frac{1}{3} K_{jkk} \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \\ K_{jkk} &= (3\lambda + 2\mu) \delta_{k\ell} \end{aligned} \right\} \rightarrow R = P + (\lambda + \frac{2}{3}\mu) D_{kk} \quad (8.13)$$

On obtient finalement la loi de comportement connue sous le nom de **loi de Newton**. Les fluides qui se révèlent suivre cette loi sont dits *fluides newtoniens*. Notons bien que seul le coefficient μ intervient; le second coefficient de viscosité λ a pour seule conséquence de relier le scalaire R, quantité sans intérêt réel, à la pression et à la dilatation cubique D_{kk} ⁸.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= - \left[P + \frac{2\mu}{3} D_{kk} \right] \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \\ \bar{\Sigma} &= -P \bar{1} - \underbrace{\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \bar{V} \bar{1}}_{\tau} + 2\mu \bar{D} \end{aligned} \quad (8.14)$$

tenseur des contraintes visqueuses

Le tenseur des contraintes visqueuses prend donc, pour les fluides newtoniens, la forme explicite suivante:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \bar{V} + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \\ & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \bar{V} + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \mu \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) \\ \mathbf{S} & & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \bar{V} + 2\mu \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

La plupart des fluides usuels (l'eau, l'alcool, l'huile... et tous les gaz dans des conditions de température et de pression peu différentes de la normale⁹) ont un comportement newtonien. Il faut cependant garder à l'esprit le caractère essentiellement empirique de cette relation linéaire entre contraintes et déformations.

L'approximation du fluide parfait

Notons ici le caractère particulier des fluides tels que le tenseur des contraintes serait indépendant du tenseur des taux de déformations. Une telle approximation connue sous le nom d'hypothèse du *fluide parfait* conduit à admettre que le tenseur des contraintes reste sphérique comme c'est le cas dans un fluide au repos:

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} \quad (8.16)$$

⁸ On remarquera que dans la classe très large des écoulements isovolumes (tels que $D_{kk} = 0$) P et R sont confondus.

⁹ La relation de comportement (8.13) est cependant en défaut dans les gaz en présence d'une onde de choc suffisamment intense pour provoquer des taux de déformation extrêmement élevés.

Nous verrons que cette approximation peut se justifier, non pas en tant que loi constitutive d'un matériau hypothétique, mais dans le cadre d'une classe d'écoulements caractérisés par l'ordre de grandeur du *nombre de Reynolds*.

Illustration de la contrainte dans un écoulement de fluide visqueux

Si le fluide n'est pas *parfait*, il est dit *visqueux*. Le coefficient de viscosité μ s'interprète comme un coefficient de résistance au glissement du fluide sur lui-même. Considérons, à titre d'exemple, le cas simple de l'écoulement unidirectionnel cisailé représenté sur la figure et défini par le champ de vitesse:

$$\begin{cases} V_1 = V_1(x_2) \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

La seule composante non nulle du tenseur des taux de déformations est:

$$D_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2}$$

que nous noterons D . Nous allons exprimer la

contrainte \vec{T} exercée au point M par le fluide situé

dans la région $x_2 > x_2(M)$ sur le fluide situé dans la région $x_2 = x_2(M)$ représenté en grisé sur la figure et de normale extérieure locale $\vec{n} = \vec{e}_2$. Cette contrainte s'écrit de façon générale:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

avec, dans le cas d'un fluide newtonien:

$$\sigma_{ij} = - \left[P + \frac{2\mu}{3} D_{kk} \right] \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Dans le cas considéré, l'écoulement est nécessairement isovolume: $D_{kk} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0$

et donc:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -P & \mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & 0 \\ \mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2}}_{\tau} \vec{e}_1 - P \vec{e}_2$$

contrainte visqueuse

Outre la force normale de compression $-P\vec{e}_2$, le fluide de la région supérieure exerce sur le fluide de la région basse des efforts tangentiels proportionnels au coefficient μ et au gradient de vitesse dans la direction normale à la frontière considérée. Ces efforts sont dirigés dans la direction \vec{e}_1 parce que nous avons choisi un gradient de vitesse $\partial V_1 / \partial x_2$ positif. On peut dire que, par suite de la viscosité, les filets fluides les plus rapides tendent à entraîner les filets fluides les moins rapides avec lesquels ils sont en contact. Réciproquement (changer \vec{n} en $-\vec{n}$), les filets fluides les plus lents tendent à freiner les filets fluides rapides. Les contraintes visqueuses ont ainsi un rôle de redistribution de la quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire au cisaillement. Elles assurent en ce sens une certaine cohésion du fluide en s'opposant à toute discontinuité du champ de vitesse.

Cette analyse a pour conséquence le *principe d'adhérence* selon lequel un fluide visqueux au contact d'une paroi solide prend la vitesse de cette paroi.

L'interprétation physique que nous venons de faire indique aussi qu'il est raisonnable de supposer μ positif. Elle montre encore que dans le cadre de l'hypothèse de *fluide parfait*, les filets fluides n'exercent aucun effet tangentiel d'accélération ou de retardement les uns sur les autres. Le concept de fluide parfait apparaît donc comme un cas limite schématique (dans lequel des discontinuités sont possibles) qui est utile pour représenter en première approximation des écoulements de fluides réels dans lesquels les effets visqueux sont faibles. Mais, strictement parlant, il n'existe pas de fluide parfait dans la nature.

8.3 Les fluides non newtoniens

En général, on considère que *l'état fluide* est caractérisé par des contraintes tangentielles nulles au repos et par un écoulement continu sans rupture sous l'influence d'une contrainte anisotrope. *L'état solide* peut présenter des contraintes tangentielles au repos et assume un équilibre de déformation lorsqu'il est soumis à un système de contraintes. En fait tout dépend de l'échelle temporelle de mesure car même un solide, soumis à des contraintes, s'écoule aussi peu que ce soit mais avec des vitesses de déformation très lentes (fluage) sans commune mesure avec celles des liquides. Cette difficulté apparaît clairement à la frontière des deux états: il est difficile de distinguer un solide d'un fluide viscoélastique.

En ce qui concerne les fluides, on peut distinguer trois catégories principales suivant la nature des arguments de la fonctionnelle $\mathcal{F}\{\bar{\tau}, \bar{D}, t\} = 0$ qui forme la (partie déviatoire de la) relation constitutive entre contraintes visqueuses et déformations:

- Les fluides indépendants du temps pour lesquels il existe une relation biunivoque entre $\bar{\tau}$ et \bar{D} . Les fluides newtoniens pour lesquels cette relation est linéaire ($\bar{\tau} = 2\mu\bar{D}$) constituent un cas particulier (heureusement très fréquent). Le *fluide parfait* correspond au cas singulier fictif où le coefficient μ est supposé nul.
- Les fluides dépendants du temps pour lesquels le comportement rhéologique évolue au cours du temps. La relation contrainte-déformation dépend du "passé mécanique du fluide".
- Les fluides viscoélastiques qui présentent à la fois les caractéristiques de fluides précédents et des solides et retrouvent partiellement leur forme primitive après déformation.

Notre propos, dans ce cours, sera limité à la mécanique des fluides newtoniens, aussi nous limiterons nous à une description très sommaire des fluides non newtoniens. Le lecteur trouvera un exposé plus complet et des références spécialisées dans [2].

8.3.1 Les fluides non newtoniens indépendants du temps

Il s'agit des fluides dont la relation de comportement, de la forme $\tau = \mathcal{F}(\dot{D})$, est non linéaire. Par analogie au cas newtonien unidirectionnel présenté dans l'exemple du §8.2.2, on convient alors de définir un coefficient μ_a dit de *viscosité apparente* de façon à représenter le comportement des fluides sous la forme: $\tau = \tau_c + \mu_a \frac{\partial V_1}{\partial x_2}$.

Une façon très commune de représenter la rhéologie de tels fluides est alors d'exprimer le coefficient μ_a sous la

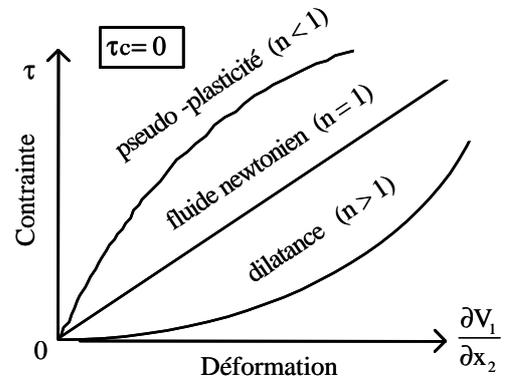
forme dite d'Ostwald:
$$\mu_a = k \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^{n-1}$$

où τ_c , la *contrainte critique*, représente le seuil minimal de contrainte à appliquer pour que le fluide commence à se déformer, k est appelé *consistance* du fluide. L'écart à l'unité de l'exposant n traduit la "non-perfection visqueuse" du fluide; n est appelé l'*indice de l'écoulement*.

On distingue ainsi:

a) Les fluides sans contrainte critique

- Les fluides pseudo-plastiques ($n > 1$) sont tels que la viscosité apparente μ_a diminue lorsque la déformation augmente. On dit que ces fluides, qui sont les plus fréquents et les plus importants en Génie des Procédés, présentent une rhéofluidification. Appartiennent à cette classe les huiles et les graisses de lubrification, le pétrole, le sang, les ciments, les colles, certaines peintures, la plupart des solutions polymères...



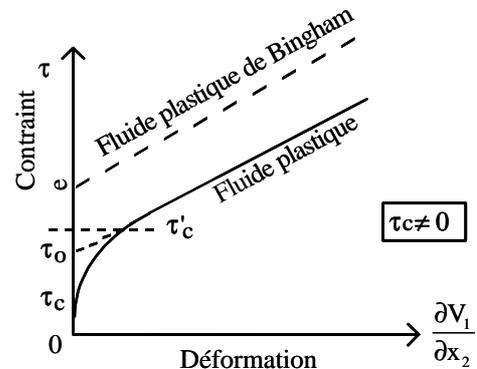
Fluides sans contrainte critique

- Les fluides dilatants ($n < 1$) voient leur viscosité apparente μ_a croître avec la déformation. Ce type de comportement est nettement moins fréquent. C'est le cas des suspensions avec forte teneur en solide comme les solutions colloïdales d'argile dans l'eau ou les empois d'amidon.

b) Les fluides à contrainte critique

Les fluides plastiques sont caractérisés par des courbes du type ci-contre. En général, la courbe finit par devenir plus ou moins rectiligne à partir d'une certaine valeur τ'_c de la contrainte. On représente alors le comportement par morceaux à l'aide d'une extrapolation à l'origine, et en première approximation:

$$\begin{cases} \tau - \tau_o = \mu_a \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) & \text{pour } \tau > \tau_c \\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) = 0 & \text{pour } \tau < \tau_c \end{cases}$$



Fluides à contrainte critique

On parle alors de fluide de Bingham. Les fluides qui sont justiciables de cette loi avec une bonne approximation sont, par exemple, les peintures à l'huile, certaines pâtes (dentifrice), les margarines, certaines graisses, la pâte à papier, certaines boues de forage...

Indiquons enfin que la loi puissance, très utilisée par approcher le comportement des fluides indépendants du temps dans une gamme limitée de vitesse de cisaillement $\partial V_1 / \partial x_2$, est parfois insuffisante. Certaines opérations de mise en œuvre des “plastiques” peuvent en effet couvrir un intervalle de 10^2 à 10^6 s⁻¹. On est alors conduit à faire intervenir des lois plus complexes (voir [2]).

8.3.2 Les fluides non newtoniens dépendants du temps

Le comportement des fluides non newtoniens peut s'expliquer par certaines modifications de leur structure interne. Si ces modifications sont très rapides, le temps n'intervient pas de manière apparente dans leur loi constitutive; par contre, si elles sont suffisamment lentes, la viscosité apparente mesurée dépendra du temps.

- Les fluides thixotropes: Il s'agit des fluides à mémoire tels qu'un cisaillement prolongé entraîne une désorganisation lente de la structure. La viscosité apparente décroît avec le temps. Les encres d'imprimerie, certaines graisses, boues de forage, polymères fondus ou peintures et de nombreux matériaux de l'industrie alimentaire appartiennent à cette classe rhéologique. La thixotropie est un phénomène réversible, mais qui peut comporter des hystérésis.

- Les fluides rhéopexes: Il s'agit des fluides tels qu'un cisaillement durable entraîne une organisation lente de la structure. Ce phénomène très complexe et rare n'a été étudié que de manière qualitative.

8.3.3 Les fluides visco-élastiques

Les fluides visco-élastiques ont à la fois un comportement visqueux et élastique, en ce sens qu'ils récupèrent une partie de la déformation après suppression des contraintes. La rhéologie de ces milieux a fait l'objet de nombreux ouvrages (voir [2]) en raison de l'importance industrielle de ces matériaux (la plupart des pâtes plastiques actuelles, bitumes, nylon...).

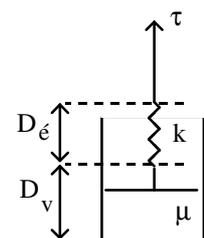
Nous nous limiterons ici à la présentation sommaire du modèle simple dit *corps de Maxwell* qui associe en série un ressort élastique de raideur k et un amortisseur de viscosité μ .

Pour un tel système soumis à une contrainte τ , les déformations s'ajoutent. Le taux de déformation s'écrit donc:

$$D = D_\epsilon + D_v = \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{2\mu}$$

Si un “fluide” de ce type est soumis à une contrainte de cisaillement τ telle que $d\tau/dt$ soit très petit ($\tau \sim$ constant), on retrouve un comportement de fluide newtonien:

Par contre, pour des variations très rapides du cisaillement tels que



$$\frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt} \gg \frac{\tau}{2\mu}$$

ce qui est d'autant vrai que μ est grand et k petit, on a $D = \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt}$ et ceci qui correspond effectivement au comportement d'un solide élastique de raideur k constante.

8.4 Quelques propriétés physiques des fluides

8.4.1 La viscosité

Les dimensions du coefficient de *viscosité dynamique* μ sont celles d'une force par unité de surface $[M.L^{-1}.T^{-2}]$ divisée par un taux de déformation $[T^{-1}]$, soit $[\mu] = [M.L^{-1}.T^{-1}]$. Dans le système international μ est donné en $kg.m^{-1}.s^{-1}$ (ou Pa.s) et cette unité a reçu le nom de Poiseuille¹⁰.

Il est souvent plus commode d'utiliser le coefficient de *viscosité cinématique* ν obtenu en divisant μ par la masse volumique:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (8.17)$$

Les dimensions de la viscosité cinématique sont $[M.L^{-1}.T^{-1}] / [M.L^{-3}] = [L^2.T^{-1}]$. Dans le système international ν s'exprime en m^2/s .

L'expérience montre que la viscosité des gaz croît lorsque la température augmente, alors qu'elle décroît dans le cas des liquides newtoniens. L'influence de la pression sur la viscosité des gaz reste faible jusqu'à 20 bars environ, et dans la plupart des cas pratiques elle est négligeable sur la viscosité des liquides en dessous de 40 bars. Pour la détermination des coefficients de viscosité, on pourra consulter des ouvrages spécialisés comme ceux de Reid et al. [3] ou Yaws [4].

Quelques valeurs usuelles de la viscosité sont données dans l'Annexe 4.

8.4.2 La conductivité thermique

La *conductivité thermique* K est définie par la relation (8.5)

$$\vec{q} = -K \overline{\text{grad}} \Theta$$

comme le coefficient qui fixe, dans un milieu isotrope, l'importance du flux de chaleur en présence d'un gradient de température donné. Les dimensions du flux de chaleur \vec{q} sont celles d'une énergie par unité de surface et de temps $[W.L^{-2}.T^{-1}]$ et donc

¹⁰ On fera attention à ce qu'une unité encore souvent utilisée est le centipoise (cPo) qui est la viscosité de l'eau à 20 °C. On a l'équivalence $1 kg.m^{-1}.s^{-1} = 10^{-3} cPo$.

$$[K] = \frac{[W.L^{-2}.T^{-1}]}{[\Theta.L^{-1}]} = [W.L^{-1}.T^{-1}.\Theta^{-1}]$$

Il est souvent plus commode d'utiliser le coefficient de *diffusivité thermique* obtenu en divisant K par la masse volumique et la capacité calorifique Cp:

$$a = \frac{K}{\rho C_p} \quad (8.18)$$

Les dimensions de la diffusivité thermique sont

$$[a] = \frac{[W.L^{-1}.T^{-1}.\Theta^{-1}]}{[M.L^{-3}][W.M^{-1}.\Theta^{-1}]} = [L^2.T^{-1}]$$

Dans le système international a s'exprime, comme la viscosité cinématique, en m^2/s . Quelques valeurs usuelles de la conductivité thermique sont données dans l'Annexe 4.

8.4.3 La diffusivité matérielle

Le coefficient de *diffusivité matérielle* \mathcal{D} , défini par la relation (8.6)

$$\vec{\phi} = -\mathcal{D} \overrightarrow{\text{grad}} C \quad (8.19)$$

a pour dimension

$$[\mathcal{D}] = \frac{[\phi]}{[C][L^{-1}]} = \frac{[M.L^{-2}.T^{-1}]}{[M.L^{-3}][L^{-1}]} = [L^2.T^{-1}]$$

Dans le système international \mathcal{D} s'exprime, comme la viscosité cinématique et la diffusivité thermique, en m^2/s .

8.4.4 Les nombres adimensionnels du transport diffusif

On compare la diffusion de chaleur, de quantité de mouvement et de matière en définissant des nombres adimensionnels:

$$\text{- nombre de Prandtl} \quad Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu C_p}{K} \quad (8.20)$$

$$\text{- nombre de Schmidt} \quad Sc = \frac{\nu}{\mathcal{D}} \quad (8.21)$$

$$\text{- nombre de Lewis} \quad Le = \frac{a}{\mathcal{D}} \quad (8.22)$$

qui caractérisent la facilité relative de transport diffusif d'une propriété par rapport à une autre.

Dans des conditions normales pour les gaz, Pr, Sc et Le sont de l'ordre de l'unité. Pour l'air, par exemple, le nombre de Prandtl reste proche de 0,75 et les variations de ν et a sont semblables (a augmentant un peu plus vite

que ν). Ceci signifie que dans les gaz, où les chocs moléculaires sont relativement peu nombreux, les transports des trois propriétés s'effectuent avec pratiquement la même efficacité.

Pour les liquides, ν est très variable: $10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ pour l'eau par exemple et $2.10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ pour la glycérine. La diffusivité thermique a est de l'ordre de $10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ à l'exception des sels et des métaux fondus et la diffusivité matérielle \mathcal{D} de l'ordre de $10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ à $10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Ainsi nous aurons généralement pour les liquides $1 \ll \text{Pr} < \text{Sc}$ et $\text{Le} \gg 1$.

Ces résultats signifient que, à l'échelle moléculaire, le transport de quantité de mouvement s'effectue mieux que le transport de chaleur et de matière. Ainsi, pour transférer de la chaleur ou de la matière, il faudra dissiper une quantité relativement beaucoup plus grande d'énergie mécanique. Ce phénomène est évidemment dû aux nombreux chocs intermoléculaires qui participent pleinement au transfert de quantité de mouvement, partiellement au transfert de chaleur et assez faiblement au transfert de matière.

Chapitre 9 Les équations de Navier-Stokes

9.1 Établissement des équations

9.1.1 Introduction

On appelle *équations de Navier-Stokes* l'ensemble des équations de bilans spécifiquement formulées pour les fluides newtoniens. La méthode d'obtention consiste donc simplement à reporter dans les équations de bilan établies au [chapitre 7](#) la loi de comportement de Newton (8.14):

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \\ \tau_{ij} = -\frac{2\mu}{3} D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \end{cases} \quad (9.1)$$

et de Fourier (8.5):
$$q_j = -K \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \quad (9.2)$$

Notre propos sera donc limité, dans ce qui suit, aux seuls fluides *classiques* monophasiques et non réactifs caractérisés par une relation linéaire et isotrope entre contraintes et taux de déformation et une relation linéaire et isotrope entre flux de chaleur et gradient de température.

En outre nous supposons pour simplifier que la viscosité dynamique μ reste constante dans tout l'écoulement¹¹, ce qui revient à supposer que les variations de température ne sont pas trop importantes.

9.1.2 Quantité de mouvement

$$\left. \begin{array}{l} (7.19) \mapsto \rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ (9.1) \mapsto \tau_{ij} = -\frac{2\mu}{3} D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P + \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + 2\mu \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$

¹¹

Si $\mu = \mu(\Theta)$, un certain nombre de termes supplémentaires apparaissent dans les équations que nous allons établir.

Explicitons le dernier terme par la définition du tenseur D_{ij} :

$$2\mu \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right)$$

Il vient finalement:

$$\begin{cases} \rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P - \frac{\mu}{3} \text{div} \vec{V} \right) + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} \left(P - \frac{\mu}{3} \text{div} \vec{V} \right) + \mu \Delta \vec{V} \end{cases} \quad (9.3)$$

9.1.3 Énergie interne

$$\begin{aligned} (7.34) \mapsto \rho \frac{de}{dt} = r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} : D_{ji} - P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \\ (9.2) \mapsto q_j = -K \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho \frac{de}{dt} = r + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) - P \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \Phi_1 \\ \rho \frac{de}{dt} = r + \text{div} \left(K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \right) - P \text{div} \vec{V} + \Phi_1 \end{cases} \quad (9.4)$$

où nous avons noté Φ_1 le terme comportant le produit doublement contracté.

- Fonction de dissipation visqueuse: Il est facile de montrer que Φ_1 est toujours positif ([démonstration en fin de ce chapitre](#)). Ce terme apparaît, affecté du signe +, dans l'équation de bilan d'énergie cinétique et, affecté du signe -, dans l'équation de bilan d'énergie interne. Il est donc interprété comme le taux d'accroissement irréversible de l'énergie interne par dissipation visqueuse de l'énergie cinétique.

- Forme enthalpique: Pour l'équation d'énergie, on peut de façon équivalente utiliser la forme enthalpique (7.35). La même substitution que celle opérée pour obtenir l'équation (9.4) donne alors:

$$\begin{cases} \rho \frac{dh}{dt} = r + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) + \frac{dP}{dt} + \Phi_1 \\ \rho \frac{dh}{dt} = r + \text{div} \left(K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \right) + \frac{dP}{dt} + \Phi_1 \end{cases} \quad (9.7)$$

- Équation pour la température: Il est plus aisé de mesurer des températures au sein d'un écoulement que l'énergie interne ou l'enthalpie. Aussi utilise-t-on souvent les équations (7.37) pour la température, ou plutôt leurs formes approchées (7.38) et (7.39). Celles-ci s'écrivent pour les fluides newtoniens:

$$\text{- pour les liquides:} \quad \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = r + \text{div} \left(K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \right) + \Phi_1 \quad (9.8)$$

$$\text{- pour un gaz idéal:} \quad \rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dP}{dt} + r + \text{div} \left(K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta \right) + \Phi_1 \quad (9.9)$$

9.2 Tableau récapitulatif

9.2.1 Le système d'équations complet

Les grandeurs locales et instantanées que l'on cherche à déterminer sont en général au nombre de six: P , ρ , Θ , V_i . Elles sont liées par six équations couplées qui expriment pour un fluide newtonien:

- l'équilibre local du fluide (équation d'état)
- la conservation de la masse (équation de continuité)
- la loi fondamentale de la dynamique (équation de bilan de quantité de mouvement)
- la conservation de l'énergie (équation de bilan de l'énergie).

Dans le cas d'un fluide dont la viscosité et la conductivité thermique varient assez peu avec les paramètres d'état

$$\begin{cases} \mu = \mu(P, \Theta) \\ K = K(P, \Theta) \end{cases}$$

et peuvent donc être supposées constantes, ces équations s'écrivent:

État	↪	$f(P, \rho, \Theta) = 0$	(9.10)
Continuité	↪	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$	
Quantité de mouvement	↪	$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(P - \frac{\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) + \mu \Delta \vec{V}$	
Énergie	↪	$\rho \frac{de}{dt} = r + \operatorname{div} \left(K \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Theta \right) - P \operatorname{div} \vec{V} + \Phi_1$	

Équations de Navier-Stokes¹²

• La forme de l'équation d'état dépend de la nature du fluide considéré.

• \vec{f} et r sont des données. Le plus souvent les forces de volume se réduisent aux seules forces de gravité; dans ce cas $\vec{f} \equiv \vec{g}$, \vec{g} désignant l'accélération locale de la pesanteur.

• Φ_1 est le taux de dissipation volumique donné par: $\Phi_1 = 2\mu \left[D_{ij} D_{ji} - \frac{1}{3} D_{kk}^2 \right]$

¹²

Très souvent on réserve cette appellation aux seules équations de la dynamique (continuité et quantité de mouvement).

9.2.2 Cas d'un fluide parfait

Si le fluide peut être considéré comme parfait (non visqueux et non conducteur de la chaleur) et non chauffé ($r=0$), le système se simplifie comme suit (en prenant l'équation d'état des gaz idéaux):

État	↪	$P = \rho R \Theta$	(9.11)
Continuité	↪	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$	
Quantité de mouvement	↪	$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P$	
Énergie	↪	$\rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dP}{dt}$	

9.2.3 Cas d'un fluide isovolume

Si le fluide peut être supposé incompressible et indilatable, le système est ramené à trois systèmes découplés:

État	↪	$\rho = \text{constante}$	(9.12)
Continuité	↪	$\operatorname{div} \vec{V} = 0$	
Quantité de mouvement	↪	$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \operatorname{grad} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \Delta \vec{V}$	
Énergie	↪	$\rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = r + \operatorname{div} \left(K \operatorname{grad} \Theta \right) + \Phi_1$	

La première équation permet de considérer que la masse volumique ρ est, comme μ et K , une constante donnée. Les équations de la dynamique forment un système fermé, découplé de l'équation de l'énergie, et permettent de déterminer les champs de vitesse $\vec{V}(\vec{x}, t)$ et de pression $P(\vec{x}, t)$. Enfin, l'équation de l'énergie permet, lorsque $\vec{V}(\vec{x}, t)$ et $P(\vec{x}, t)$ sont connus, de calculer le champ de température.

9.3 Les différentes approches de résolution

À ce stade de la présentation des équations de la mécanique des fluides newtoniens, il convient d'analyser la structure du système obtenu pour évaluer les difficultés de résolution et envisager la méthodologie la mieux adaptée à chaque type de problème concret.

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires.

- Cas particulier du repos: Le système de Navier-Stokes est évidemment adapté à l'étude des configurations de repos, c'est-à-dire des conditions de l'équilibre statique d'un fluide. En fait, les équations de la statique ne sont pas seulement un cas particulier des équations de Navier-Stokes puisque, en l'absence de déformations, on fait l'économie d'une loi de comportement. Elles sont donc également valables pour l'étude des fluides non newtoniens en situation de repos.

- Les non-linéarités: Le système de Navier-Stokes est constitué d'équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées entre elles. Les non-linéarités apparaissent dans les termes d'advection, par exemple le terme d'accélération:

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

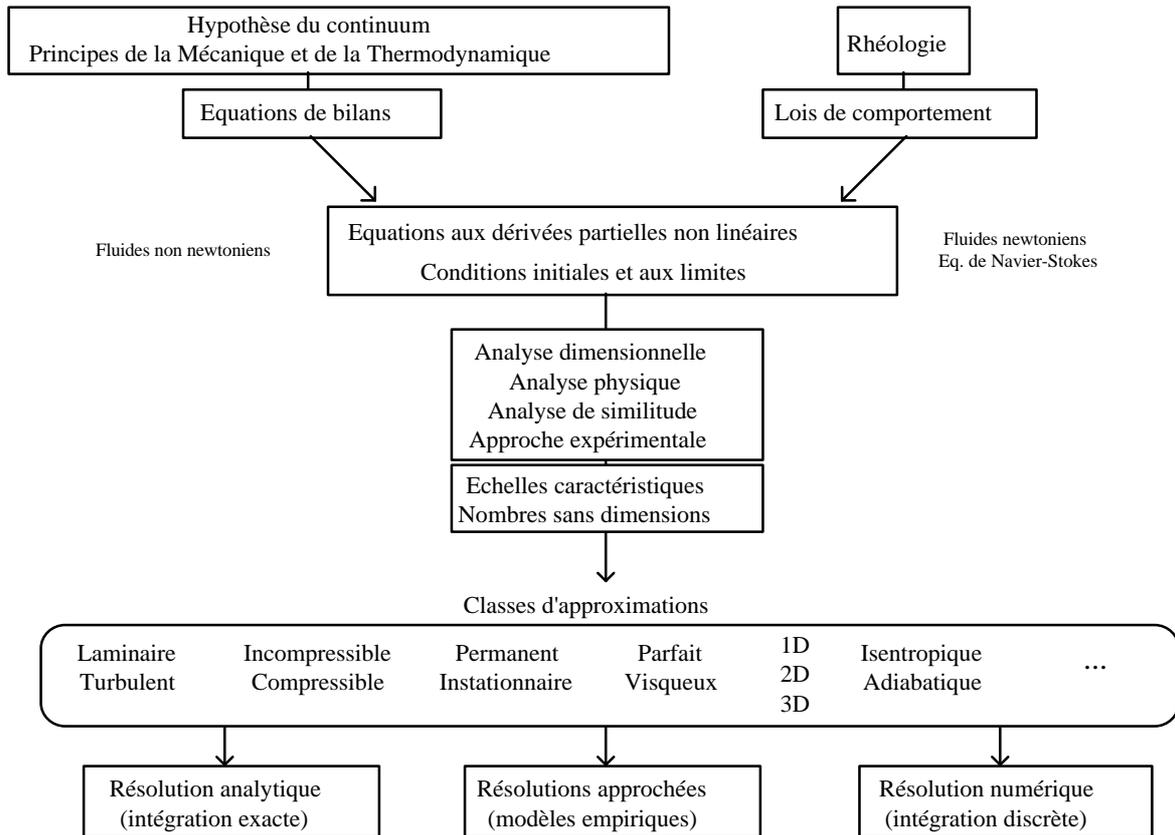
En dehors de quelques configurations assez académiques pour lesquelles les équations sont linéarisables et découplées (voir [chapitre 12](#)), il n'est pas possible d'envisager, dans le cas général, une résolution analytique directe par intégration du système (9.10).

Plusieurs voies sont alors envisageables:

- **Réduire le problème en recherchant des solutions approchées**: De nombreuses approches ont été développées qui concourent toutes à établir un système réduit dans le cadre d'hypothèses uniquement justifiées dans un domaine de validité clairement défini: écoulements permanents, unidimensionnels, bidimensionnels, irrotationnels, isovolumes, laminaires... de fluides non visqueux, isentropiques, isothermes, non pesants... et toute combinaison de ces différents approximations. Les outils qui permettent d'apprécier, pour chaque configuration particulière, la validité des approximations, reposent essentiellement sur l'analyse dimensionnelle, l'analyse physique (recherche des échelles caractéristiques du problème), l'analyse de similitude (théorie des maquettes), mais aussi... l'intuition, fondée sur la connaissance des phénomènes physiques, la pratique¹³, l'étude des expériences.

- **Rechercher des solutions numériques**: L'augmentation rapide de la puissance des calculateurs scientifiques s'est accompagnée, depuis les années 70, d'un développement considérable des méthodes numériques adaptées à la résolution des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes conduisent à une formulation discrète linéarisée du problème continu et à la résolution d'un système linéaire de relations algébriques couplées. La *Mécanique des Fluides Numérique* trouve cependant ses limites (en particulier pour la simulation des écoulements tridimensionnels turbulents) dans la puissance encore insuffisante des supercalculateurs et les coûts importants des calculs. La recherche de formulations réduites (les *classes d'approximations*) des problèmes de Mécanique des Fluides est donc, dans ce domaine aussi, indispensable.

¹³ À ce titre, les séances de Travaux Pratiques, organisées en 1ère année puis en 2ème année (pour certaines options), sont irremplaçables pour acquérir les éléments de bon sens et d'intuition qui sont indispensables au savoir-faire des ingénieurs.



Quelques exemples de solutions analytiques des équations de Navier-Stokes seront présentés au [chapitre 12](#). Les méthodes d'analyse permettant d'évaluer le domaine de validité des approximations et leur degré d'imprécision font l'objet du prochain chapitre.

Annexe du chapitre 9

Démonstration de la positivité de la fonction de dissipation visqueuse Φ_1

Par définition: $\Phi_1 = \tau_{ij} V_{i,j}$ avec, pour les fluides newtoniens $\tau_{ij} = \mu(V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} \delta_{ij}$

Ainsi:
$$\Phi_1 = \mu(V_{i,j} + V_{j,i}) V_{i,j} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} V_{i,j} \delta_{ij}$$

Développons:

$$\frac{\Phi_1}{\mu} = 2 \underbrace{[(V_{1,1})^2 + (V_{2,2})^2 + (V_{3,3})^2]}_{\textcircled{1}} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \underbrace{(V_{1,2} + V_{2,1})^2 + (V_{1,3} + V_{3,1})^2 + (V_{2,3} + V_{3,2})^2}_{\textcircled{2}}$$

Considérons séparément le terme $\textcircled{1}$:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= 2 \left[(V_{1,1})^2 + (V_{2,2})^2 + (V_{3,3})^2 \right] - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) (V_{1,1} + V_{2,2} + V_{3,3}) \\ &= 2 \left[(V_{1,1})^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{1,1} \right] + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{1,1} \\ &\quad + 2 \left[(V_{2,2})^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{2,2} \right] + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{2,2} \\ &\quad + 2 \left[(V_{3,3})^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{3,3} \right] + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{3,3} \\ &= 2 \left[V_{1,1} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 - \frac{2}{9} (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{1,1} \\ &\quad + 2 \left[V_{2,2} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 - \frac{2}{9} (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{2,2} \\ &\quad + 2 \left[V_{3,3} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 - \frac{2}{9} (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) V_{3,3} \\ &\quad \underbrace{- \frac{2}{9} (\operatorname{div} \vec{V})^2}_{0} \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{\mu} &= 2 \underbrace{\left[V_{1,1} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 + \left[V_{2,2} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 + \left[V_{3,3} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2}_{\textcircled{1}} \\ &\quad + \underbrace{(V_{1,2} + V_{2,1})^2 + (V_{1,3} + V_{3,1})^2 + (V_{2,3} + V_{3,2})^2}_{\textcircled{2}} \end{aligned}$$

soit encore, en faisant apparaître le tenseur des taux de déformation:

$$\Phi_1 = 2\mu \left[\left(D_{11} - \frac{D_{kk}}{3} \right)^2 + \left(D_{22} - \frac{D_{kk}}{3} \right)^2 + \left(D_{33} - \frac{D_{kk}}{3} \right)^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{13}^2 + 2D_{23}^2 \right] = \mathbf{0} \quad (9.5)$$

• On peut aussi montrer que $\Phi_1 = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} \tau_{ji}$

$$\begin{aligned} \mapsto 2\mu \Phi_1 = & \left[2\mu V_{1,1} - \frac{2\mu}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 + \left[2\mu V_{2,2} - \frac{2\mu}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 + \left[2\mu V_{3,3} - \frac{2\mu}{3} (\operatorname{div} \vec{V}) \right]^2 \\ & + 2\mu^2 (V_{1,2} + V_{2,1})^2 + 2\mu^2 (V_{1,3} + V_{3,1})^2 + 2\mu^2 (V_{2,3} + V_{3,2})^2 \end{aligned}$$

$$\mapsto \Phi_1 = \frac{1}{2\mu} \left[\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{13}^2 + 2\tau_{23}^2 \right]$$

c'est-à-dire:

$$\boxed{\Phi_1 = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} \tau_{ji}}$$

(9.6)

Chapitre 10 Analyse dimensionnelle

10.1 Introduction

L'analyse dimensionnelle est conduite par identification des grandeurs fondamentales que sont la longueur, le temps, la masse et éventuellement la température. Outre ces grandeurs fondamentales, les grandeurs "secondaires" qui sont listées dans le tableau ci-dessous sont usuellement utilisées en Mécanique des Fluides.

GRANDEUR	SYMBOLE	DIMENSION	UNITÉ S.I.	NATURE
Longueur	ℓ, L, D, d	[L]	mètre (m)	fondamentale
Temps	t	[T]	seconde (s)	
Masse	M, m	[M]	kilogramme (kg)	
Température	Θ	[Θ]	Kelvin (K)	
Vitesse	V, U	[L.T ⁻¹]	m.s ⁻¹	cinématique
Accélération	γ	[L.T ⁻²]	m.s ⁻²	
Débit volumique	Q _v	[L ³ .T ⁻¹]	m ³ .s ⁻¹	
Viscosité cinématique	ν	[L ² .T ⁻¹]	m ² .s ⁻¹	
Vitesse de rotation	ω	[T ⁻¹]	s ⁻¹	
Masse volumique	ρ	[M.L ⁻³]	kg/m ³	
Viscosité dynamique	μ	[M.L ⁻¹ .T ⁻¹]	Poiseuille (PI)	dynamique
Tension capillaire	σ	[M.T ⁻²]	kg/s ²	
Force	f, F	[M.L.T ⁻²]	Newton (N)	
Couple	C	[M.L ² .T ⁻²]	mètre-Newton (m-N)	
Pression, contrainte	P, τ	[M.L ⁻¹ .T ⁻²]	Pascal (Pa)	
Puissance mécanique	\mathcal{P}_m	[M.L ² .T ⁻³]	Watt (W)	
Puissance thermique	\mathcal{A}	[M.L ² .T ⁻³]	Watt (W)	thermique
Quantité de chaleur	Q	[M.L ² .T ⁻²]	Joule (J)	
Conductivité thermique	K	[M.L.T ⁻³ . Θ ⁻¹]	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	
Diffusivité thermique	a	[L ² .T ⁻¹]	m ² .s ⁻¹	
Capacité calorifique	Cp, Cv	[L ² .T ⁻² . Θ ⁻¹]	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	

Les équations de Navier-Stokes ne peuvent être résolues que dans des cas très simples. Pour cette raison, on est souvent contraint d'utiliser les méthodes expérimentales pour évaluer l'importance relative des différentes contributions au bilan des variables dépendantes. L'estimation a priori des ordres de grandeurs des termes des équations de bilan donne souvent des résultats utiles dans des situations compliquées. L'*analyse dimensionnelle* est l'outil efficace de cette procédure d'estimation.

L'analyse dimensionnelle permet de regrouper les paramètres physiques (μ , K , $C_p \dots$), les variables dépendantes (ρ , P , Θ , V_i) et indépendantes (x_i , t), en nombres adimensionnels ayant une *signification physique* et qui permettent:

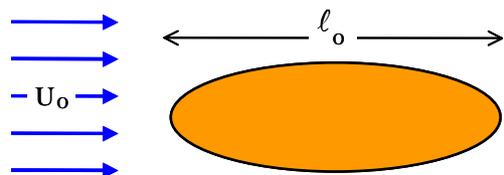
- de négliger les termes peu importants et donc de simplifier le problème,
- d'obtenir des informations sur la solution avant d'avoir résolu le problème,
- d'optimiser une éventuelle approche expérimentale,
- d'étendre les résultats obtenus sur une maquette d'échelle réduite au problème grandeur nature (similitude).

Nous allons d'abord introduire les techniques d'estimation et faire apparaître quelques nombres sans dimension importants.

10.1.1 Échelles caractéristiques et estimations a priori

Désignons par ℓ_o une dimension typique de l'écoulement. ℓ_o peut être selon le cas le diamètre d'une conduite, la largeur moyenne d'un canal ou d'un bassin, la dimension caractéristique d'un corps solide placé dans un écoulement...

D'une manière générale cette échelle de longueur doit caractériser la distance caractéristique sur laquelle les variables dépendantes varient de façon significative.



Soit U_o une vitesse typique (caractérisant justement la variation significative que nous venons d'évoquer); cette échelle de vitesse peut être la vitesse de débit pour un écoulement de conduite ou la vitesse moyenne à "l'infini amont" pour le cas d'un écoulement en incidence sur un solide. On notera P_o la variation typique de la pression dans l'écoulement. On caractérise aussi une masse volumique typique ρ_o , une viscosité typique $\mu_o \dots$

Les variations dans le temps peuvent être caractérisées par une période t_o , ou une fréquence $f_o = 1/t_o$, typiques des instationarités de l'écoulement; t_o sera par exemple de l'ordre de la seconde pour un champ de vagues, de l'ordre de quelques dizaines de secondes pour la houle océanique, de quelques jours pour l'étude des dépressions atmosphériques...

Muni de ces échelles, nous allons maintenant estimer les termes qui interviennent dans l'équation de quantité de mouvement:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\rho \overline{\text{grad} \vec{V} \cdot \vec{V}}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\overline{\text{grad} P}}_{\textcircled{4}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{V} + \overline{\text{grad} \left(\frac{\mu}{3} \text{div} \vec{V} \right)}}_{\textcircled{5}}$$

① représente la quantité d'accélération instationnaire par unité de volume

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \propto \rho_o \frac{U_o}{t_o} = \rho_o U_o f_o \quad (10.1)$$

② représente la quantité d'accélération advective par unité de volume (les forces d'inertie)

$$\rho \overline{\text{grad} \vec{V} \cdot \vec{V}} \propto \rho_o \frac{U_o^2}{\ell_o} \quad (10.2)$$

③ représente la force de gravité par unité de volume

$$\rho \vec{g} \propto \rho_o g \quad (10.3)$$

④ représente la force de pression par unité de volume

$$\overline{\text{grad} P} \propto \frac{P_o}{\ell_o} \quad (10.4)$$

⑤ représente les forces visqueuses par unité de volume

$$\mu \Delta \vec{V} + \overline{\text{grad} \left(\frac{\mu}{3} \text{div} \vec{V} \right)} \propto \mu_o \frac{U_o}{\ell_o^2} \quad (10.5)$$

10.1.2 Nombres sans dimension

On peut maintenant comparer ces estimations entre elles. Il suffit pour cela d'en faire le rapport deux à deux:

• Le rapport $\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} = \frac{\text{Accélération instationnaire}}{\text{Forces d'inertie}} \propto \frac{\rho_o U_o f_o}{\rho_o U_o^2 / \ell_o} = \frac{f_o \ell_o}{U_o} \quad (10.6)$

est appelé *nombre de Strouhal* (St). Il caractérise l'instationarité de l'écoulement.

• Le rapport $\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{3}} = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de gravité}} \propto \frac{\rho_o U_o^2 / \ell_o}{\rho_o g} = \frac{U_o^2}{\ell_o g} \quad (10.7)$

est appelé *nombre de Froude* (Fr)¹⁴. Il caractérise l'importance relative de la force d'inertie et de la force de pesanteur.

• Le rapport $\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{4}} = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de pression}} \propto \frac{\rho_o U_o^2 / \ell_o}{P_o / \ell_o} = \frac{U_o^2}{P_o / \rho_o} \quad (10.8)$

14

Certains auteurs définissent le nombre de Froude comme la racine carrée de ce rapport.

caractérise l'importance relative des forces de pression.

$$\text{Le nombre d'Euler (Eu) est défini par le groupement sans dimension } Eu = \frac{P_o}{\rho_o U_o^2} \quad (10.9)$$

On montre aussi que $U_o^2 / (P_o / \rho_o)$ est proportionnel au carré du *nombre de Mach* (Ma). En effet, la vitesse du son c est définie par $c^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$, qui peut être estimée par P_o / ρ_o . Ainsi

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{4}} \propto \frac{U_o^2}{P_o / \rho_o} = \frac{U_o^2}{c^2} \stackrel{\text{déf}}{=} Ma^2 \quad (10.10)$$

$$\bullet \text{ Le rapport } \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{5}} = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}} \propto \frac{\rho_o U_o^2 / \ell_o}{\mu_o U_o / \ell_o^2} = \frac{\rho_o U_o \ell_o}{\mu_o} \quad (10.11)$$

est appelé *nombre de Reynolds* (Re). Il mesure l'importance relative des forces d'inertie et des forces visqueuses.

D'autres nombres sans dimension existent. Les principaux sont répertoriés à la fin de ce chapitre.

On pourra, à titre d'exercice, appliquer même démarche à l'équation de l'énergie (9.9)

$$\underbrace{\rho C_p \frac{\partial \Theta}{\partial t}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Theta}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\frac{dP}{dt}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{r}_{\textcircled{4}} + \underbrace{\text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} \Theta)}_{\textcircled{5}} + \underbrace{\Phi_1}_{\textcircled{6}} \quad (10.12)$$

en définissant une échelle typique Θ_o de variation de température. On fera alors apparaître:

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} = \frac{\text{Instationnarité}}{\text{Transport advectif}} \propto \frac{f_o \ell_o}{U_o} \stackrel{\text{déf}}{=} St, \text{ le nombre de Strouhal}$$

$$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}} = \frac{\text{Energie de pression}}{\text{Energie enthalpique}} \propto \frac{P_o / \rho_o}{C_p \Theta_o} \stackrel{\text{déf}}{=} Ec, \text{ le nombre d'Eckert} \quad (10.13)$$

En choisissant $P_o = \rho_o U_o^2$, on aura $Ec = U_o^2 / C_p \Theta_o$ et pour un gaz parfait, on pourra écrire $Ec = \gamma / (\gamma - 1)$ où $\gamma = C_p / C_v$ est le *coefficient adiabatique* (ou *nombre gamma*),

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{5}} = \frac{\text{Transport advectif}}{\text{Transport diffusif}} \propto \frac{\rho_o C_p U_o \ell_o}{K_o} \stackrel{\text{déf}}{=} Pe, \text{ le nombre de Peclet.} \quad (10.14)$$

Ce nombre est l'homologue pour la thermique du nombre de Reynolds, auquel il est relié par: $Pe = Pr \times Re$ (où Pr est le nombre de *Prandtl* que nous avons défini au §8.4.4 avec les nombres de *Schmidt* et de *Lewis*).

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{6}} = \frac{\text{Transport advectif}}{\text{Dissipation volumique}} \propto \frac{C_p \Theta_o \rho_o U_o \ell_o}{U_o^2 \mu_o} = Ec \times Re$$

10.2 Principe de l'analyse dimensionnelle

10.2.1 Exemple

On présente ici une analyse systématique *aveugle* fondée sur la dimension des variables descriptives du problème étudié. Le principe fondamental repose sur l'homogénéité dimensionnelle. Il faut:

- ❶ recenser les variables du problème (intuition, expérience...),
- ❷ former avec ces variables une équation hypothétique (généralement un développement généralisé de type polynomial),
- ❸ appliquer à cette relation le principe d'homogénéité dimensionnelle;
- ❹ effectuer quelques expériences pour déterminer les coefficients constants qui subsistent dans l'équation.

Exemple: Étude de l'écoulement d'un fluide isovolume dans une conduite cylindrique

❶ Les variables retenues et leurs dimensions sont listées dans le tableau ci-dessous. La solution (la vitesse moyenne de l'écoulement) doit dépendre du gradient de pression (la seule force motrice) et des caractéristiques de la conduite et du fluide. En observant que le diamètre D , la vitesse de débit U_d , la viscosité μ et la

masse volumique ρ du fluide ne peuvent dépendre de la longueur L de la conduite, on peut écrire *a priori* que le gradient linéique de pression doit s'exprimer en fonction des autres variables:

$$\Delta P^*/L = f(\rho, \mu, U_d, D)$$

Variables ¹⁵	Symboles	Dimensions
Chute de pression par unité de longueur	$\Delta P^*/L$	$M.L^{-2}.T^{-2}$
Diamètre de la conduite	D	L
Vitesse moyenne du fluide	U_d	$L.T^{-1}$
Viscosité dynamique	μ	$M.L^{-1}.T^{-1}$
Masse volumique	ρ	$M.L^{-3}$

❷ Développons la fonction f en série de puissance du type:

❸ Cette équation doit être dimensionnellement correcte, c'est-à-dire que dans l'équation aux dimensions:

$$[M.L^{-2}.T^{-2}] = [M.L^{-3}]^{\alpha_n} [M.L^{-1}.T^{-1}]^{\beta_n} [L.T^{-1}]^{\gamma_n} [L]^{\delta_n}$$

les exposants de chaque dimension fondamentale doivent être égaux. Par conséquent:

$$\begin{cases} [M] \mapsto 1 = \alpha_n + \beta_n \\ [L] \mapsto -2 = -3\alpha_n - \beta_n + \gamma_n + \delta_n \\ [T] \mapsto -2 = -\beta_n - \gamma_n \end{cases}$$

Il y a quatre inconnues pour 3 relations. On obtient, en conservant uniquement β_n par exemple:

$$\alpha_n = 1 - \beta_n; \delta_n = -1 - \beta_n; \gamma_n = 2 - \beta_n$$

¹⁵

L'expérience autant que la solution analytique des équations de Navier-Stokes présentée au §12.4 justifient ces choix.

soit

$$\frac{\Delta P^*}{L} = \sum_n A_n \rho^{(1-\beta_n)} \mu^{\beta_n} U_d^{(2-\beta_n)} D^{-(1+\beta_n)} = \frac{\rho U_d^2}{D} \sum_n A_n \left(\frac{\mu}{\rho U_d D} \right)^{\beta_n}$$

et l'on voit apparaître le nombre de Reynolds construit sur le diamètre et la vitesse de débit. On pourra donc écrire:

$$2C_f = \frac{D}{\rho U_d^2} \frac{\Delta P^*}{L} = \varphi(\text{Re}) \quad (10.15)$$

relation qui montre que le nombre de Reynolds et le paramètre C_f sont les seuls nombres adimensionnels qui interviennent dans le problème. Le paramètre C_f est interprété comme un coefficient de frottement (§12.4).

⚡ La détermination des coefficients constants A_n qui spécifient la fonction sur Re relève de l'expérimentation. En fait, dans le cas particulier d'un écoulement laminaire dans une conduite lisse, nous verrons (§12.4) que ces coefficients peuvent être déterminés analytiquement.

10.2.2 Le Théorème P ou théorème de Vaschy-Buckingham

Ce théorème généralise la méthode qui vient d'être utilisée dans l'exemple précédent.

Théorème: Soit un phénomène physique décrit par une relation $f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ faisant intervenir n paramètres indépendants. Si k est le nombre désigne le nombre de grandeurs fondamentales nécessaires pour définir les paramètres p_1, p_2, \dots, p_n , alors la relation initiale peut être mise sous la forme:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$$

où les Π_i sont des groupements, INDÉPENDANTS et sans dimension, des n variables initiales.

Ce théorème est très important car il précise que dans l'exemple précédent où 5 variables dépendent de 3 grandeurs fondamentales, la solution du problème est obligatoirement une relation entre 2 nombres adimensionnels indépendants (ce qui signifie que l'on peut déduire l'un de l'autre par multiplication, élévation de puissance, division...). Ainsi une méthode de détermination systématique des groupements Π_i n'est pas indispensable et il est possible de faire appel à l'intuition. La solution sera toujours correcte.

- si on obtient bien $n-k$ nombres Π_i ,
- si ces nombres font bien intervenir toutes les variables (p_1, p_2, \dots, p_n),
- s'ils sont indépendants.

Toutefois, la technique suivante est recommandée.

Détermination pratique des nombres sans dimension:

On commence par choisir k variables dimensionnellement indépendantes parmi les p_1, p_2, \dots, p_n . On forme ensuite les $n-k$ groupes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} p_{k+1} \\ \Pi_2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} p_{k+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Pi_{n-k} = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k} p_n \end{array} \right.$$

Il reste finalement à déterminer les combinaisons d'exposants qui rendent chacun de ces groupements sans dimension. Il suffit pour cela d'exprimer les unités de chaque quantité p_i en fonction des grandeurs fondamentales $[M, L, T, \Theta]$.

REMARQUE: Corrélation des résultats expérimentaux:

Revenons sur l'exemple de l'écoulement dans une conduite cylindrique pour lequel on a posé:

$$\Delta P/L = f(\rho, \mu, U_d, D)$$

et supposons qu'on veuille caractériser l'influence de chacune des quatre variables sur le gradient de pression $\Delta P/L$ par dix points expérimentaux. En toute généralité pour les quatre variables indépendantes cela nécessiterait 10^4 points de mesures.

L'analyse dimensionnelle a établi la relation

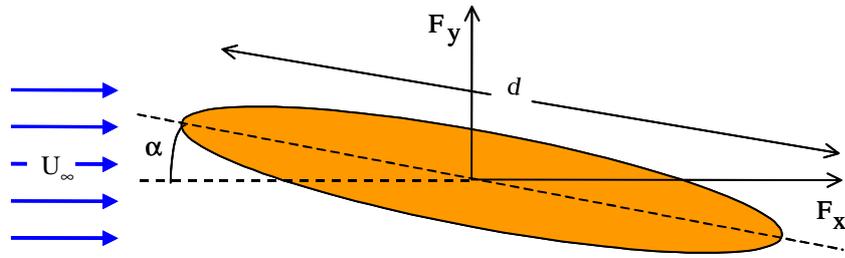
$$2C_f = \frac{D}{\rho U_d^2} \frac{\Delta P}{L} = \varphi\left(\text{Re} = \frac{\rho U_d D}{\mu}\right)$$

qui permet de voir que dix valeurs du nombre de Reynolds permettront de tracer la courbe $2C_f = \varphi(\text{Re})$. Les variables sur lesquelles on pourra jouer pour modifier Re sont a priori n'importe lesquelles parmi ρ , μ , U_d et D ; le plus simple et le plus économique sera de faire varier le débit dans la conduite.

EXEMPLE: Portance et traînée d'une surface portante

Les ailes d'un avion, les voiles, la dérive, le safran sont des exemples de surfaces portantes. Elles sont en général minces et profilées. Lorsqu'elles sont placées dans un écoulement de vitesse uniforme U_g et sous une incidence α , l'écoulement engendre une certaine distribution de contraintes normales (pression) et tangentielles (cisaillement visqueux) sur l'obstacle. C'est un problème fondamental que de vouloir déterminer la résultante de ces efforts. On décompose en général cette résultante en sa composante dans la direction de l'écoulement (la *traînée* F_x) et dans la direction orthogonale (la *portance* F_y).

On peut considérer a priori que ces efforts doivent dépendre des caractéristiques du fluide (ρ, μ), de l'écoulement (U_∞, α) et



de celles de la surface portante (sa corde d et son envergure L):

$$F_x \text{ (ou } F_y) = f(d, L, \rho, U_\infty, \mu, \alpha)$$

Le problème comporte sept variables et ne fait intervenir que trois grandeurs fondamentales $[M, L, T]$; il est donc régi par quatre nombres sans dimensions. Deux nombres apparaissent de manière évidente: $\Pi_1 = L/d$ et $\Pi_2 = \alpha$. Il suffit donc de déterminer les deux autres à l'aide de la relation:

$$F_x \text{ (ou } F_y) = f(d, \rho, U_\infty, \mu, \Pi_1 = L/d, \Pi_2 = \alpha)$$

On peut écrire par exemple pour la traînée F_x (comme pour la portance F_y):

$$\left. \begin{aligned} \Pi_3 &= d^{\alpha_1} \rho^{\alpha_2} U_\infty^{\alpha_3} F_x \\ \Pi_4 &= d^{\beta_1} \rho^{\beta_2} U_\infty^{\beta_3} \mu \end{aligned} \right\} \mapsto \left\{ \begin{aligned} [M^0 \cdot L^0 \cdot T^0] &= [L]^{\alpha_1} [M \cdot L^{-3}]^{\alpha_2} [L \cdot T^{-1}]^{\alpha_3} [M \cdot L \cdot T^{-2}] \\ [M^0 \cdot L^0 \cdot T^0] &= [L]^{\beta_1} [M \cdot L^{-3}]^{\beta_2} [L \cdot T^{-1}]^{\beta_3} [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}] \end{aligned} \right\}$$

dont la résolution sur les exposants donne:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= -2; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = -2 \\ \beta_1 &= -1; \beta_2 = -1; \beta_3 = -1 \end{aligned} \right\} \mapsto \left\{ \begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{F_x}{\rho U_\infty^2 d^2} \\ \Pi_4 &= \frac{\mu}{\rho U_\infty d} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

La relation initiale s'écrit donc sous la forme suivante qui définit le *coefficient de traînée* C_x :

$$\frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 d^2} = C_x(\text{Re}, \alpha, L/d) \tag{10.16}$$

et de même, le *coefficient de portance* C_y :

$$\frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 d^2} = C_y(\text{Re}, \alpha, L/d) \tag{10.17}$$

De nombreuses expériences effectuées à basse vitesse confirment la validité de ces deux relations. Pour le cas asymptotique d'un profil bidimensionnel (envergure infinie, $L \gg d$) L/d n'intervient plus. Les figures ci-dessous donnent qualitativement le C_x et le C_y pour un profil bidimensionnel typique. Pour des valeurs faibles de l'angle

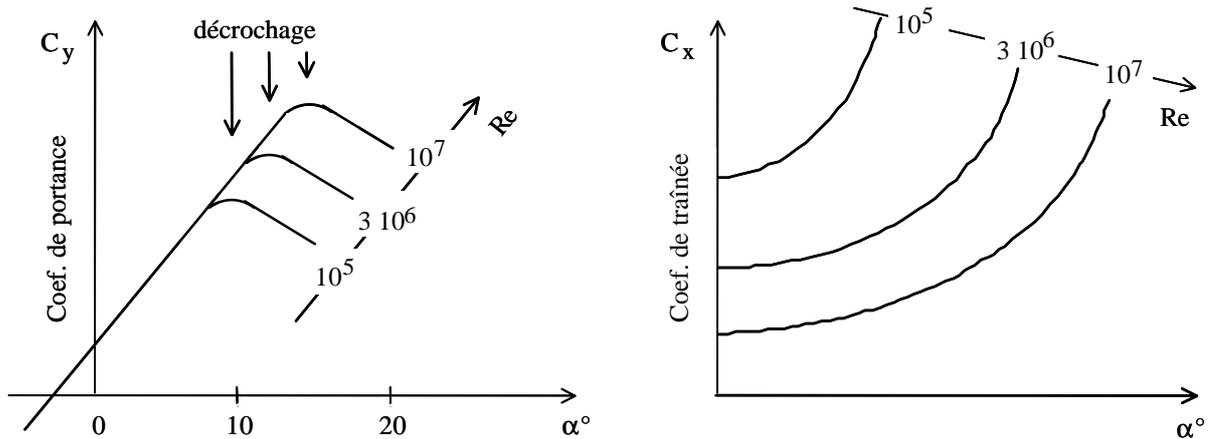
(16) Dans le cas tridimensionnel, on norme plutôt F_x par $\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S$ où $S = dL$ est l'aire de la surface.

d'incidence, on constate que la portance n'est pas sensible au nombre de Reynolds. En revanche, aux fortes incidences et près du décrochage, on observe une influence notable de Re.

Le coefficient de traînée est souvent représenté sous la forme:

$$C_x(\text{Re}, \alpha) \sim C_p(\alpha) + C_f(\text{Re}) \quad (10.18)$$

Le terme C_p représente la *traînée de pression* et C_f est la traînée de frottement qui dépend essentiellement du nombre de Reynolds. Aux grandes vitesses et dans les gaz, les effets de compressibilité deviennent importants et C_x et C_y dépendent aussi du nombre de Mach.



Cas d'une sphère ou d'un cylindre

Si l'objet considéré est une sphère, l'angle d'incidence n'est pas défini et le diamètre d est la seule longueur caractéristique. Le coefficient de traînée apparaît comme une fonction unique du nombre de Reynolds:

$$\frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (\pi d^2 / 4)} = C_x(\text{Re}) \quad (10.19)$$

Les mêmes considérations sont applicables dans le cas d'un cylindre de grande longueur ($L \gg d$) placé dans un écoulement dont la direction est orthogonale à l'axe du cylindre. Pour ces deux cas les courbes $C_x(\text{Re})$ sont données dans le fascicule de Travaux Pratiques de Mécanique des Fluides pour $10^{-1} = \text{Re} = 10^6$.

10.3 Équations de Navier-Stokes adimensionnelles

10.3.1 Établissement des équations

À l'aide des échelles caractéristiques que nous avons définies en introduction de ce chapitre, il est naturel de construire des variables adimensionnelles pour reformuler les équations de bilan sous forme adimensionnée. Il sera

ensuite facile de comparer le “poids respectif” des différents termes pour justifier d’éventuelles simplifications en négligeant les contributions mineures. Ceci permettra aussi d’étudier la possibilité d’étudier les écoulements sur des maquettes à échelle réduite et de justifier de la similitude des solutions.

Le tableau ci-contre indique pour chaque variable indépendante (x_i , t) et dépendante (V_i , ρ , P , Θ) l’échelle choisie (affectée de l’indice o) et la variable sans dimension correspondante (signalée avec un astérisque).

variable	échelle	variable sans dimension
\bar{x}	$= \ell_o$	\bar{x}^*
t	$= 1/f_o$	t^*
\bar{V}	$= U_o$	\bar{V}^*
P	$= P_o$	P^*
Θ	$= \Theta_o$	Θ^*
ρ	$= \rho_o$	ρ^*
μ	$= \mu_o$	μ^*
\bar{g}	$= \bar{g}_o$	\bar{g}^*

Avec ces notations, les opérateurs prennent la forme:

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{1}{\ell_o} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} \bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3^*} \bar{e}_3 \right) = \frac{1}{\ell_o} \overrightarrow{\text{grad}}^*$$

$$\text{div} = \frac{1}{\ell_o} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^*} + \frac{\partial}{\partial x_2^*} + \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right) = \frac{1}{\ell_o} \text{div}^*$$

$$\Delta = \frac{1}{\ell_o^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^{*2}} \right) = \frac{1}{\ell_o^2} \Delta^*$$

On obtient ainsi facilement la forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes:

$$\rho_o f_o \left[\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} \right] + \frac{\rho_o U_o}{\ell_o} \left[\rho^* \text{div} \bar{V}^* \right] = 0$$

$$\rho_o U_o f_o \left[\rho^* \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial t^*} \right] + \frac{\rho_o U_o^2}{\ell_o} \left[\rho^* \bar{V}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{V}^* \right] = \rho_o g_o \rho^* \bar{g}^* - \frac{P_o}{\ell_o} \left[\overrightarrow{\text{grad}} P^* \right] + \frac{\mu_o U_o}{\ell_o^2} \left[\mu^* \Delta^* \bar{V}^* + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mu^*}{3} \text{div} \bar{V}^* \right) \right]$$

Divisons cette dernière équation par le “poids” du terme d’inertie ($\rho_o U_o^2 / \ell_o$), On obtient:

$$\frac{f_o \ell_o}{U_o} \left[\rho^* \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial t^*} \right] + \left[\rho^* \bar{V}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{V}^* \right] = \frac{g_o \ell_o}{U_o^2} \rho^* \bar{g}^* - \frac{P_o}{\rho_o U_o^2} \left[\overrightarrow{\text{grad}} P^* \right] + \frac{\mu_o}{\rho_o U_o \ell_o} \left[\mu^* \Delta^* \bar{V}^* + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mu^*}{3} \text{div} \bar{V}^* \right) \right] \quad (10.20)$$

et l’on voit apparaître les nombres sans dimension suivants:

$$\text{St} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{f_o \ell_o}{U_o} \text{ le nombre de Strouhal,} \quad \text{Fr} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{U_o^2}{g_o \ell_o} \text{ le nombre de Froude,}$$

$$\text{Eu} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{P_o}{\rho_o U_o^2} \text{ le nombre d'Euler,} \quad (\text{ou encore } \text{Ma} = \frac{U_o}{c} \text{ le nombre de Mach,})$$

$$\text{Re} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\rho_o U_o \ell_o}{\mu_o} \text{ le nombre de Reynolds.}$$

Ainsi:

$$\text{St} \left[\rho^* \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}^*}{\partial t^*} \right] + \left[\rho^* \bar{\mathbf{V}}^* \cdot \overline{\text{grad}^* \bar{\mathbf{V}}^*} \right] = \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* \bar{\mathbf{g}}^* - \text{Eu} \left[\overline{\text{grad}^* P^*} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu^* \Delta^* \bar{\mathbf{V}}^* + \overline{\text{grad}^* \left(\frac{\mu^*}{3} \text{div}^* \bar{\mathbf{V}}^* \right)} \right] \quad (10.21)$$

Il est clair que, si les échelles sont effectivement représentatives, les termes entre crochets sont en $\mathcal{O}(1)$.

10.3.2 Interprétation du nombre de Reynolds

Considérons pour simplifier l'analyse un écoulement stationnaire ($\text{St} \sim 0$), non pesant ($\mathbf{g}_o \sim 0$) de fluide isovolume. Pour l'étude de ce type d'écoulement, on choisit en général comme échelle des variations de pression $P_o = \rho_o U_o^2$ (la pression dynamique). L'équation (10.20) se réduit alors à:

$$\rho^* \bar{\mathbf{V}}^* \cdot \overline{\text{grad}^* \bar{\mathbf{V}}^*} = -\overline{\text{grad}^* P^*} + \frac{1}{\text{Re}} \mu^* \Delta^* \bar{\mathbf{V}}^* \quad (10.22)$$

Le nombre de Reynolds, défini comme le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, peut aussi s'interpréter comme le rapport entre le *temps caractéristique de la diffusion* $\tau_{\text{diff}} = \ell_o^2 / \nu_o$ de la quantité de mouvement par la viscosité (c'est-à-dire par l'agitation moléculaire) et le *temps de transit* $\tau_{\text{tran}} = \ell_o / U_o$ de la particule fluide dans le champ d'expérience; en effet:

$$\text{Re}_{\text{déf}} = \frac{\rho_o U_o \ell_o}{\mu_o} = \frac{\ell_o^2 \rho_o / \mu_o}{\ell_o / U_o} = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{tran}}}$$

- Cas $\text{Re} \gg 1$: Il est clair que, si $\tau_{\text{tran}} \ll \tau_{\text{diff}}$ ($\text{Re} \gg 1$), pendant sa présence très courte dans le champ d'expérience la particule ne pourra pas être beaucoup marquée par la diffusion de quantité de mouvement. Dans ce cas, l'équation (10.22) montre que la contribution du terme de frottement visqueux est négligeable; les termes d'inertie et de pression doivent s'équilibrer mutuellement. On conçoit bien que cette approximation, dite du *fluide parfait*, peut entraîner des difficultés puisqu'elle annule identiquement les frottements et la dissipation d'énergie. Remarquons que, si on accepte de changer d'échelle de longueur pour traiter le terme visqueux, on pourra en trouver une, très petite devant ℓ_o , qui le rende du même ordre que les autres. Cela signifie qu'à l'échelle ℓ_o , la viscosité est sans effets, mais qu'il existe une petite échelle où ils sont importants.

- Cas $\text{Re} \ll 1$: Si maintenant $\tau_{\text{tran}} \gg \tau_{\text{diff}}$ ($\text{Re} \ll 1$), la particule fluide demeure tellement longtemps dans le champ d'expérience que la marque de la viscosité sera très profonde. Les termes d'inertie et de pression, tous les deux très petits, ne pourraient pas équilibrer les frottements visqueux. Mais ceci est inacceptable en vertu du principe de moindre dégénérescence; aussi faibles que soient les variations de pression, nous ne pouvons pas exploiter une approximation qui les élimine complètement. Là encore, il faut revoir le choix des échelles. Bien

entendu, c'est l'échelle utilisée pour les variations de pression ($\rho_o U_o^2$) qui s'avère impropre pour ce cas limite $Re \ll 1$ puisque les forces d'inertie sont alors négligeables. En effet, nous pouvons estimer l'échelle de pression P_o dans ce cas, en réécrivant l'équation (10.20) sous la forme:

$$Re \left[\rho^* \vec{V}^* \cdot \overline{\text{grad}^* \vec{V}^*} \right] = - \frac{P_o \ell_o}{U_o \mu_o} \left[\overline{\text{grad}^* P^*} \right] + \left[\mu^* \Delta^* \vec{V}^* \right]$$

On voit que, si $Re \ll 1$, pour que les termes de pression et de viscosité puissent s'équilibrer il faut que $P_o \approx \mu_o U_o / \ell_o$. Cette échelle est évidemment sans commune mesure avec l'énergie cinétique par unité de volume ($\frac{1}{2} \rho_o U_o^2$).

10.3.3 Interprétation du nombre de Froude

Considérons maintenant un écoulement à surface libre pour lequel la référence de pression est $P = P_{\text{réf}}$ à la surface (assez peu courbée pour que la tension superficielle soit négligeable). La pression adimensionnelle est définie par: $P^* = (P - P_{\text{réf}}) / \rho U_o^2$. L'équation (10.20) s'écrit maintenant (fluide isovolume, écoulement stationnaire):

$$\left[\rho^* \vec{V}^* \cdot \overline{\text{grad}^* \vec{V}^*} \right] = \frac{1}{Fr} \rho^* \vec{g}^* - \left[\overline{\text{grad}^* P^*} \right] + \frac{1}{Re} \left[\mu^* \Delta^* \vec{V}^* \right]$$

où le nombre de Froude ($Fr = U_o^2 / \ell_o g$) caractérise le rapport des forces de pesanteur et des forces d'inertie. On le définit souvent comme la racine carrée de ce rapport; dans ce cas, il mesure le rapport de la vitesse des particules fluides à leur vitesse de chute libre dans le champ de pesanteur, ou encore le rapport de deux temps caractéristique: le temps nécessaire pour qu'une particule atteigne sa vitesse de chute libre $(\ell_o / g_o)^{1/2}$ et le temps de transit de la particule dans le champ d'expérience (ℓ_o / U_o) .

- **Cas $Fr \gg 1$:** Les forces d'inertie sont très supérieures aux forces de pesanteur et sont équilibrées par les forces de pression et de viscosité. C'est le cas des gaz à grandes vitesses pour lesquelles on fait usuellement l'hypothèse de fluide non pesant.

- **Cas $Fr \ll 1$:** On peut alors souvent négliger les forces d'inertie devant les effets gravitationnels. Les forces de pesanteur sont alors équilibrées par les forces de pression (hypothèse quasi-hydrostatique) avec éventuellement une contribution visqueuse.

10.3.4 Équation adimensionnelle pour l'énergie

La méthode utilisée au § 10.3.1 pour l'équation de bilan de quantité de mouvement peut être appliquée à l'équation pour l'énergie. On aboutit alors à la formulation adimensionnelle suivante:

$$\text{St} \left[\rho^* C_p^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} \right] + \left[\rho^* C_p^* \vec{V}^* \cdot \overline{\text{grad}^* \Theta^*} \right] = \text{St} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right] + \text{Ec} \left[\vec{V}^* \cdot \overline{\text{grad}^* P} \right] + X r^* + \frac{1}{\text{Pe}} \text{div}^* \left(K^* \overline{\text{grad}^* \Theta^*} \right) + \frac{1}{\text{EcRe}} \Phi_1^* \quad (10.21)$$

avec

$$X = \frac{\ell_o r_o}{\rho_o C_p_o V_o \Theta_o} = \frac{\text{Apports électromagnétiques}}{\text{Transport advectif}},$$

$$\text{Pe}_{\text{déf}} = \frac{\rho_o C_p U_o \ell_o}{K_o} = \text{Pr} \times \text{Re} \quad \text{le nombre de Peclet}, \quad \text{Ec}_{\text{déf}} = \frac{P_o / \rho_o}{C_p \Theta_o} = \frac{U_o^2}{C_p \Theta_o} \quad \text{le nombre d'Eckert.}$$

• Le nombre de Peclet est l'homologue du nombre de Reynolds pour le champ thermique.

• Le nombre d'Eckert peut atteindre des valeurs de l'ordre de l'unité si la vitesse est grande (par ex. de l'ordre de la vitesse du son) et si les écarts de température demeurent modérés. À titre d'exemple, pour l'air ($C_p \sim 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), avec $U_o = 300 \text{ m.s}^{-1}$, $\Theta_o = 100 \text{ K}$, on trouve:

$$\text{Ec} = \frac{(300)^2}{10^3 \cdot 10^2} = 0.9$$

Mais dès que la vitesse est dix fois plus faible (30 m.s^{-1}), ce qui est encore une vitesse importante, Ec devient assez faible ($9 \cdot 10^{-3}$) pour pouvoir négliger de terme de pression devant le transport advectif de chaleur. Ceci signifie que, pour les gaz, si la vitesse est nettement plus faible que la vitesse du son, l'équation d'énergie peut prendre la même forme que celle que nous avons établie (9.8) pour les liquides:

$$\rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = r + \text{div} \left(K \overrightarrow{\text{grad} \Theta} \right) + \Phi_1 \quad (10.22)$$

Cette équation, commune aux liquides et aux gaz à vitesse modérée, couvre un domaine d'applications extrêmement vaste. Elle est donc très importante. Dans de très nombreux cas, on peut encore la simplifier en négligeant la dissipation volumique Φ_1 (si le fluide est assez peu visqueux) et la production de chaleur r par les sources internes. En supposant que K est constant, l'équation pour l'énergie devient:

$$\frac{d\Theta}{dt} = a \Delta \Theta \quad (10.23)$$

où $a = K / \rho C_p$ est le coefficient de *diffusivité thermique*.

10.4 Analyse de similitude

Pour des raisons évidentes de rentabilité, on ne peut guère envisager d'entreprendre des études expérimentales d'écoulements sur des ouvrages en vraie grandeur. Il se pose aussi souvent des problèmes de faisabilité, subordonnés à des impératifs d'exploitation, des difficultés de contrôle de paramètres dans le cas de phénomènes naturels... On cherche donc autant que possible à travailler sur des écoulements de maquette à échelle réduite, et il convient donc d'établir des lois de similitude.

Deux écoulements (E1) et (E2) sont semblables si, à des instants homologues tels que $t_2 = q t_1$, les domaines fluides (D1) et (D2) se correspondent dans une similitude géométrique de rapport constant, et si, pour chaque couple de points homologues \vec{x}_1 et \vec{x}_2 , il existe un rapport constant entre les vitesses, un rapport constant entre les pressions, et de façon générale, un rapport constant entre toutes les grandeurs de même nature.

Il résulte de cette définition que si deux écoulements sont semblables, ils vérifient à la fois une similitude géométrique (rapport d'échelle), une similitude cinématique (les trajectoires sont géométriquement semblables) et une similitude mécanique (les grandeurs physiques, dynamiques et éventuellement thermiques homologues sont similaires).

10.4.1 Cas des écoulements isovolumes

Nous allons d'abord discuter des problèmes de similitude dans le cas simplifié des écoulements stationnaires de fluide isovolume en supposant que le problème thermique est découplé.

Considérons donc deux systèmes fluides (E₁) et (E₂) géométriquement semblables. Dans ce qui suit nous repérons par l'indice 1 les grandeurs de l'écoulement en grandeur réelle et par 2 celles de l'écoulement à échelle réduite. Supposons aussi que les conditions initiales et aux limites de ces écoulements soient aussi semblables. L'écoulement est alors décrit pour le premier système (E₁) par:

$$(1) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{V}^* = 0 \\ \rho^* \vec{V}^* \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^* \vec{V}^* = \frac{1}{Fr_1} \rho^* \vec{g}^* - Eu_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}}^* P^* + \frac{1}{Re_1} \mu^* \Delta^* \vec{V}^* + \text{conditions aux limites (CL}_1) \end{cases}$$

et pour le système (E₂) par:

$$(2) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{V}^* = 0 \\ \rho^* \vec{V}^* \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^* \vec{V}^* = \frac{1}{Fr_2} \rho^* \vec{g}^* - Eu_2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}^* P^* + \frac{1}{Re_2} \mu^* \Delta^* \vec{V}^* + \text{conditions aux limites (CL}_2) \end{cases}$$

Les deux écoulements sont décrits par des équations identiques sous réserve que $Re_1 = Re_2$, $Eu_1 = Eu_2$ et $Fr_1 = Fr_2$. Ces conditions, dites *conditions de similitude*, sont nécessaires pour que les solutions du champ de vitesse adimensionnelle $\vec{V}^*(\vec{x}^*)$ et du champ de pression adimensionnel $P^*(\vec{x}^*)$ soient identiques. Les systèmes qui satisfont ces conditions sont *dynamiquement semblables*.

Nous allons examiner les critères de réalisabilité pour que ces trois conditions puissent être réalisées simultanément. Les conditions de similitude s'écrivent (en supposant $g_1 = g_2 = g$):

$$\text{pour la similitude de Reynolds} \quad \frac{U_1 d_1}{\nu_1} = \frac{U_2 d_2}{\nu_2} \quad (10.24)$$

$$\text{pour la similitude de Froude} \quad \frac{U_1^2}{g d_1} = \frac{U_2^2}{g d_2} \quad (10.25)$$

$$\text{pour la similitude d'Euler} \quad \frac{P_1}{\rho_1 U_1^2} = \frac{P_2}{\rho_2 U_2^2} \quad (10.26)$$

En notant λ le rapport d'échelle géométrique entre les deux écoulements, $\lambda = d_2/d_1$, ces trois conditions conduisent immédiatement à:

$$\frac{U_2}{U_1} = \lambda^{1/2} \quad (10.26)$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \lambda^{3/2} \quad (10.27)$$

$$\frac{P_2 / (\rho_2 g)}{P_1 / (\rho_1 g)} = \lambda \quad (10.28)$$

On peut déduire de ces trois relations

$$\text{le rapport des débits volumiques (vitesse x longueur}^2\text{)} : \quad \frac{Q_{v_2}}{Q_{v_1}} = \frac{U_2 d_2^2}{U_1 d_1^2} = \lambda^{5/2}$$

$$\text{le rapport des temps (longueur/vitesse)} : \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{d_2 U_1}{U_2 d_1} = \lambda^{1/2}$$

$$\text{le rapport des puissances (débit massique x longueur)} : \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 Q_{v_2} d_2}{\rho_1 Q_{v_1} d_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda^{7/2}$$

On remarque que dans tous ces rapports, l'échelle géométrique λ intervient toujours à une puissance positive de sorte que ce sont toujours les grandeurs relatives à la maquette qui ont les valeurs les plus faibles. En particulier, λ intervient avec des puissances élevées dans l'expression des débits et celle des puissances; ceci constitue une circonstance très favorable qui permet de réaliser des études sur maquettes à moindre coût. Autre avantage: le modèle réduit permet de "prévoir l'avenir" dans le sens où les événements se produisent dans des délais plus courts.

On voit en outre que, une fois choisis l'échelle λ de la maquette et le lieu de l'expérience (g_1 et g_2), le rapport des vitesses, les propriétés physiques du fluide 2 relativement à celles du fluide 1 et le rapport des pressions (exprimées en hauteurs de fluides) sont déterminés. Dans la pratique la condition (10.27) sur les propriétés physiques du fluide 2 est souvent réhibitoire.

Le tableau ci-contre montre qu'elle impose habituellement des viscosités cinématiques très faibles. Or les liquides satisfaisant à cette condition (si toutefois ils existent) sont d'un maniement très difficile parce que toujours très volatils. La similitude parfaite est donc difficile à obtenir en dehors des cas (rares) où le fluide 1 est très visqueux.

λ	ν_2/ν_1
1/10	0,032
1/50	0,028
1/100	0,001

La condition (10.27) étant une conséquence des conditions de Froude et de Reynolds, aussi a-t-on cherché à s'affranchir de l'une ou de l'autre de ces conditions. Il est possible, par exemple, de réaliser une similitude partielle en éliminant la condition de Froude. Celle-ci étant liée à la pesanteur, son élimination ne peut être qu'une approximation qui consiste à négliger l'action des forces gravitationnelles. On peut en général s'affranchir de la condition de Froude dans le cas des écoulements de liquides *en charge*¹⁷ et dans les écoulements de gaz¹⁸.

A contrario, dans le cas des écoulements à surface libre, on pourra éliminer la condition de Reynolds si l'effet de la diffusion visqueuse peut être négligée ($Re \gg 1$).

Notons pour finir que dans le cas des écoulements isovolumes, la pression de référence est la pression dynamique ($P = \rho U^2$) si bien que la condition d'Euler (10.28) n'intervient plus puisqu'elle se confond avec la condition (10.26).

10.4.2 Cas des écoulements compressibles

Dans le cas des écoulements de fluide compressibles, les forces gravitationnelles peuvent généralement être négligées. Pour maintenir la similitude dynamique, le nombre de Froude n'est plus pertinent, mais il faut tenir compte des effets de compressibilité. On considère que ces effets ne sont plus négligeables dès que le nombre de Mach est supérieur à 0.2 environ. Nous avons montré au §10.1 que le nombre de Mach au carré est proportionnel au rapport des forces d'inertie par unité de volume et des forces de pression par unité de volume:

$$\frac{|\rho \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V}|}{|\overline{\text{grad}} P|} \propto \frac{U_o^2}{P_o / \rho_o} \approx \frac{U_o^2}{c^2} \stackrel{\text{déf}}{=} Ma^2$$

¹⁷ On appelle ainsi les écoulements qui s'effectuent dans des domaines limités exclusivement par des parois solides. La présence d'une surface libre se traduit une condition à la limite sur la pression qui réintroduit l'influence de la gravité à travers la relation (10.28) d'Euler.

¹⁸ Les forces gravitationnelles sont en général négligeables dans les écoulements gazeux.

Ainsi, dans le cas d'un écoulement stationnaire de fluide compressible, l'équation pour la quantité de mouvement s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\left[\rho^* \vec{V}^* \cdot \overline{\text{grad}}^* \vec{V}^* \right] = -\frac{1}{\text{Ma}^2} \left[\overline{\text{grad}}^* P^* \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu^* \Delta^* \vec{V}^* + \overline{\text{grad}}^* \left(\frac{\mu^*}{3} \text{div}^* \vec{V}^* \right) \right] \quad (10.32)$$

Pour assurer la similitude dynamique, il faut donc conserver les nombres de Reynolds et de Mach. Pratiquement la similitude complète ne peut être réalisée qu'en faisant appel à des souffleries pressurisées.

Ainsi, l'observation rigoureuse des règles de similitude conduit à des essais sur maquettes impossibles ou très coûteuses. L'expérience montre cependant qu'il est possible de se contenter d'une similitude approchée, notamment lorsqu'un nombre limité de forces sont prédominantes.

En admettant maintenue la similitude géométrique, on pourra se fonder en première approximation sur le tableau suivant.

Approximation	Classe d'approximation	Critère principal à préserver
Ma \sim 0 Re \gg 1	Fluides incompressibles (liquides) Fluides parfaits	Similitude dynamique assurée par la similitude géométrique
Ma \sim 0 Fr non pertinent	Fluides incompressibles (liquides) Écoulements en charge	$\text{Re} = \frac{\rho U d}{\mu}$
Ma \sim 0 Re pas trop petit	Fluides incompressibles (liquides) Faible viscosité Écoulements à surface libre	$\text{Fr} = \frac{U^2}{g d}$
Ma < 0.2	Écoulements faiblement compressibles (gaz)	$\text{Re} = \frac{\rho U d}{\mu}$
Ma > 0.2	Écoulements compressibles (gaz)	$\text{Ma} = \frac{U}{c}$

10.5 Les principaux nombres sans dimension

Le tableau suivant regroupe quelques-uns des nombres adimensionnels relatifs à la Mécanique des Fluides, le symbole, leur définition et leur signification. On trouvera dans la référence [5] une liste plus complète incluant notamment les groupements adimensionnels utilisés en transferts de chaleur et de matière.

Nombre	Symbole	Définition	Signification
Coef. adiabatique	γ	C_p/C_v	
de Bond	Bo	$\Delta\rho d^2 g/\sigma$	F. de gravité/F. superficielle
Capillaire	N_{ca}	$\mu U/\sigma = We.Re^{-1}$	F. de viscosité/F. superficielle
de Cauchy	C	$\rho U^2/\chi$	F. d'inertie/F. de compression
de Darcy	Da	$\equiv 4C_f$	
de Dean	D	$Re (D/D_s)^{1/2}$	Re (F. centrifuge/F. d'inertie)
d'Eckert	Ec	$(P/\rho)/(C_p \Theta)$	Energie de pression/Energie enthalpique
d'Euler	Eu	$U^2/(C_p \Theta)$	Energie cinétique/Energie enthalpique
de Fanning		$\equiv 4C_f$	
Coef. de frottement	C_f	$[d/(2\rho U^2)] (\Delta P/L)$	F. de frottement/ (2 x F. d'inertie)
de Froude (1)	Fr	$U^2/(gd)$	F. d'inertie/F. de gravité
de Froude (2)	Fr	$U/(gd)^{1/2}$	“ “
de Froude (3)	Fr	$U^2/(\beta g \Delta\theta d)$	F. d'inertie/F. d'Archimède
de Galilée		$\rho^2 g d^3/\mu^2$	Re (F. de gravité/F. visqueuse)
de Grashof	Gr	$g \beta \Delta\theta d^3/\nu^2$	Re (F. d'Archimède/F. visqueuse)
de Laval	La	$U/[2 \gamma/(\gamma+1).R\Theta]^{1/2}$	Vitesse/vitesse critique du son
de Lewis	Le	a/\mathcal{D}	Diffusivité thermique/diffusivité matérielle
de Mach	Ma	U/c	Vitesse/vitesse du son
de Nusselt	Nu	kd/K	Transfert de chaleur pariétal/diffusif
de Peclet	Pe	$\rho C_p U d/K$	Transfert de chaleur advectif/diffusif
Coef. de portance	C_y	$F_y/(1/2 \rho U^2 d^2)$	F. de portance/F. de pression dynamique
de Prandtl	Pr	ν/a	Viscosité cinématique/diffusivité thermique
de Rayleigh	Ra	$g \beta \Delta\theta d^3/(\nu a)$	$\equiv Gr.Pr$
de Reynolds	Re	$U d/\nu$	F. d'inertie/F. visqueuse
de Rossby	Ro	U/fd	F. d'inertie/F. de Coriolis
Coef. de rugosité		ϵ/d	Hauteur moy. d'aspérités/diamètre (conduite)
de Schmidt	Sc	ν/\mathcal{D}	Viscosité cinématique/diffusivité matérielle
de Stanton	St	$k/(\rho C_p U)$	Transfert de chaleur pariétal/advectif
de Strouhal	St	$f d/U$	Instationnarité/advection
Coef. de traînée	C_x	$F_x/(1/2 \rho U^2 d^2)$	F. de traînée/F. de pression dynamique
de Weber	We	$\rho d U^2/\sigma$	F. d'inertie/F. superficielle

DEUXIÈME PARTIE

Chapitre 11 Statique des fluides

La Mécanique des Fluides étant réputée “en voie de disparition” dans les programmes des classes préparatoires, il n’est peut-être pas inutile de rappeler quelques éléments de Statique. Ce chapitre se limite à l’essentiel et ne constitue pas un pré-requis pour la suite.

11.1 Généralités

La relation générale de la statique des fluides a déjà été aperçue au [§6.2.4](#) comme un cas particulier correspondant à la nullité de la résultante des efforts extérieurs. Ceci se traduit par l’équilibre des contraintes normales et des forces de volumes (6.16):

$$\overline{\text{grad}} P = \rho \vec{f} \quad (11.1)$$

où \vec{f} représente la densité massique des forces de volume. Cette relation constitue l’équation générale de la statique des fluides.

“Dans un fluide en équilibre, la pression croît dans le sens du champ de force”.

• Si le champ \vec{f} est irrotationnel (et dans ce cours nous nous placerons dans cette hypothèse), on définit un potentiel des forces $\vec{f} = -\overline{\text{grad}} \Phi$ et la relation d’équilibre devient:

$$\overline{\text{grad}} P = -\rho \overline{\text{grad}} \Phi \quad (11.2)$$

“Dans un fluide en équilibre, les surfaces équipotentielles sont des surfaces isobares”.

• Cas où les forces de volume se réduisent à la force de pesanteur.

Puisque $\vec{f} \equiv \vec{g}$ définit la verticale locale, les surfaces isobares sont horizontales. Il est alors commode de choisir un repère tel qu'un des axes soit vertical; soit \vec{e}_z cet axe que nous choisissons ascendant

$$\vec{e}_z = -\frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \rightarrow \vec{g} = -g \overline{\text{grad}} z$$

L'équation (11.2) s'écrit alors:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (11.3)$$

et pour un fluide isovolume ($\rho = \text{cste}$), elle prend la forme particulièrement simple:

$$P^* = P + \rho g z = \text{constante} \quad (11.4)$$

où la *pression étoilée* représente l'énergie potentielle de l'unité de volume de fluide dans le champ de gravité.

L'accélération de la pesanteur \vec{g} correspond à la résultante de la force d'attraction terrestre et de la force centrifuge d'inertie due à la rotation intrinsèque de la planète (§3.3). On considérant que la Terre est de densité constante ($d = 5,52$), l'accélération de pesanteur peut s'exprimer par la relation:

$$g = g_0 [1 - 0,002644 \cos(2\varphi) - 3,1510^{-7} z]$$

où φ est la latitude du lieu, z est l'altitude¹⁹ exprimée en mètres et $g_0 = 9,80619 \text{ m.s}^{-2}$.

Ainsi, au niveau du "sol", g varie de $9,78 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ à l'équateur à $9,83 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ aux pôles. Le plus souvent, on prendra $g = 9,81 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ dans les applications courantes.

11.1.1 Le théorème d'Archimède

Soit un fluide (ou un système de fluides) en équilibre soumis à la seule pesanteur. Considérons une portion du fluide (en grisé sur le schéma de gauche) d'enveloppe (S). Le poids \vec{p} de ce fluide est équilibré par l'ensemble des forces de pression exercées sur (S) par le fluide extérieur à (S). Ces forces de pression admettent donc une résultante $\vec{\pi}$, égale et opposée à \vec{p} .

¹⁹ En toute rigueur, l'altitude d'un lieu est sa distance verticale (le long des lignes de champ) au géoïde passant par le zéro du marégraphe de Marseille (convention internationale). Le plus souvent, on approxime que la Terre est une sphère et l'altitude est prise selon la verticale géométrique par rapport au zéro local (niveau local des plus basses marées d'équinoxes).

Remplaçons le fluide contenu dans (S) par un solide limité par la même surface. Les forces de pression qui s'exercent sur (S) n'ont pas changé; elles admettent toujours la même résultante $\vec{\pi}$, égale et opposée à \vec{p} ; d'où le *théorème d'Archimède*:

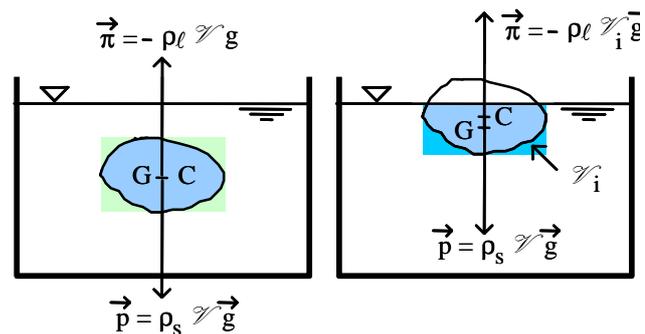
Les forces de pression exercées par un système de fluides en équilibre sur un solide immergé admettent une résultante, appelée poussée d'Archimède:

son support passe par le centre d'inertie de l'ensemble des fluides remplacés;

elle est verticale ascendante

son module est égal à celui du total des poids fluides remplacés.

Si le système de fluides se réduit à un fluide unique, de masse volumique ρ_ℓ constante, et si le solide est complètement immergé, le centre de poussée coïncide avec le centre d'inertie du corps immergé.

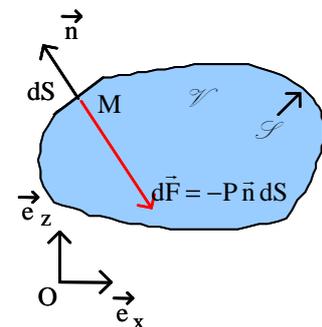


Si le corps est immergé dans plusieurs fluides (schéma de droite), comme c'est le cas d'un

floteur dont la partie inférieure est dans un liquide et la partie supérieure dans un gaz (mais aussi dans le cas d'un liquide stratifié en densité), le théorème reste applicable, mais le centre de poussée n'a pas une position invariable par rapport un repère lié au solide. La résultante des pressions exercées par le liquide et par le gaz (ou à chaque niveau pour un fluide stratifié) est appliquée au barycentre du volume (le centre de poussée).

• Approximation de pression uniforme

Dans les applications, il arrive fréquemment que les variations de pression qu'entraîne l'existence du champ de pesanteur [éqs. (11.3)] soient faibles devant la valeur absolue de la pression: c'est le cas lorsque 2 particules quelconques du domaine fluides sont à des altitudes voisines, et particulièrement dans le cas d'un fluide de faible masse volumique (atmosphère). La pression est alors considérée uniforme dans le domaine considéré; sa valeur P_0 est constante.



Dans le cadre de cette approximation, la résultante des forces de pression qui s'exercent sur une surface fermée \mathcal{S} a pour valeur:

$$\vec{\pi} = - \iint_{\mathcal{S}} P \vec{n} dS = - \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\text{grad } P} d\mathcal{V} = \vec{0} \quad (11.5)$$

et le moment résultant:

$$\vec{M} = - \iint_{\mathcal{S}} P (\overline{OM} \wedge \vec{n}) dS = - P_0 \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\text{rot}(\overline{OM})} d\mathcal{V} = \vec{0} \quad (11.6)$$

“Si la pression est uniforme, le système des forces de pression s’exerçant sur une surface fermée constitue un torseur nul”.

11.1.2 Équilibres pseudo-statiques

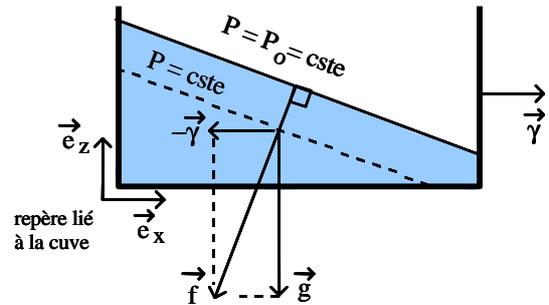
Les exemples présentés ici sont, en toute logique, des problèmes de “dynamique” dans la mesure où le fluide se déplace par rapport à un système d’axes fixes. En fait, ces problèmes peuvent être résolus dans un système d’axes qui se déplace à la même vitesse (linéaire ou angulaire) que le fluide (mouvement solide).

a) Équilibre d’un liquide pesant soumis à une accélération constante

Dans ce cas, la densité volumique des forces est la somme de l’accélération de pesanteur et de la force d’inertie: $\rho \vec{f} = \rho \vec{g} - \rho \vec{\gamma} = \overline{\text{grad}} P$

Les surfaces isobares sont perpendiculaires aux lignes du champ $(\vec{g} - \vec{\gamma})$. L’équilibre s’écrit en projection:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \gamma \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$



Les surfaces isobares sont fournies par l’intégration de $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0$, soit:

$$z = -\frac{\gamma}{g} x + \text{cste}$$

b) Équilibre d’un liquide pesant soumis à une rotation constante

On considère, dans le champ de pesanteur, un réservoir cylindrique en rotation de vitesse constante $\vec{\omega}$ et partiellement rempli d’un liquide. En réaction à l’accélération centripète d’entraînement, le fluide est soumis à l’accélération centrifuge

$$\vec{\gamma} = \omega^2 \vec{r} = + \overline{\text{grad}} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

La projection de l’équation d’équilibre sur les axes d’un repère cylindrique tournant à la vitesse $\vec{\omega}$ donne:

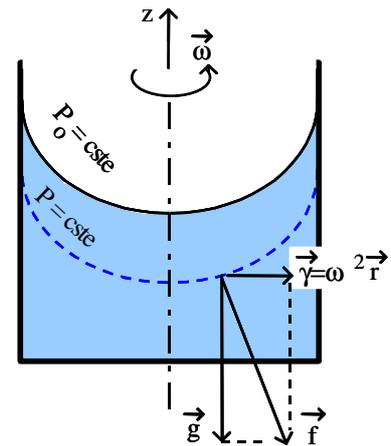
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

Les surfaces isobares sont fournies par l'intégration de $dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0$, soit: $P = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g z + cste$

Les surfaces isobares sont donc des paraboles de révolution d'axe \vec{e}_z orthogonales aux lignes du champ $\vec{f} = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}$. Avec $V_\theta = r\omega$, il vient

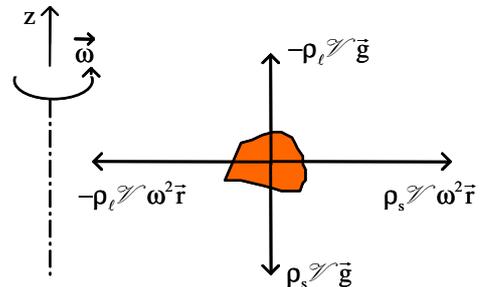
$$\left(P + \rho g z - \frac{\rho V_\theta^2}{2} \right) = cste$$

qui constitue une forme tronquée de l'équation de Bernoulli (Eq. 14.11) pour l'équilibre pseudo-statique d'un fluide en mouvement solide relatif.



• Application à la centrifugation

Considérons un corps de volume \mathcal{V} de masse volumique ρ_s immergé dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ tournant à la vitesse $\vec{\omega}$. Il est soumis à la force de gravité, à la poussée d'Archimède et aux forces centrifuge et centripète schématisées ci-contre. Les forces $-\rho_\ell \mathcal{V} \vec{g}$ et $-\rho_\ell \mathcal{V} \omega^2 \vec{r}$ représentent la réaction du fluide environnant sur le corps. Si $\rho_s > \rho_\ell$, le solide s'éloigne de l'axe \vec{e}_z ; si $\rho_s < \rho_\ell$, le solide se rapproche de l'axe. Cette propriété est utilisée en centrifugation.



11.1.3 Fluides compressibles

En toute généralité, dans un fluide au repos macroscopique, la masse volumique est une fonction d'au moins deux variables d'état: $\rho = \rho(P, \Theta)$, et les surfaces isobares ($P = cste$) ne sont pas en général confondues avec les surfaces isopycnes ($\rho = cste$) ou les isothermes ($\Theta = cste$): on dit que le fluide est *barocline*. La stratification du milieu peut être représentée par différents modèles.

• **modèle barotrope**: Il s'agit du cas où l'équation d'état peut être représentée par la relation $\rho = \rho(P)$. Les trois familles d'iso-surfaces sont alors confondues.

• **modèle adiabatique:** Les gaz sont de mauvais conducteurs de la chaleur, et l'on peut souvent les représenter à l'aide du *modèle adiabatique*. Dans cette hypothèse, on peut écrire d'après (2.29):

$$\delta Q = \rho C_p d\Theta - \Theta \beta dP = 0$$

où β est le coefficient de dilatation défini par (2.38). Ainsi, en utilisant la relation de la statique,

$$\left. \frac{d\Theta}{\Theta} \right|_{\text{adiab.}} = -\frac{\beta}{\rho C_p} dP = -\frac{\beta g}{C_p} dz \quad (11.7)$$

et l'on peut déterminer le profil vertical de température. En particulier, dans le cas d'un gaz idéal $\beta = 1/\Theta$, et donc:

$$\left. \frac{d\Theta}{dz} \right|_{\text{adiab.}} = -\frac{g}{C_p} \quad (\sim -0,0097 \text{ K.m}^{-1} \text{ pour l'air sec})$$

soit,
$$\Theta(z) = \Theta_0 - \frac{g}{C_p}(z - z_0) \quad (11.8)$$

La température décroît effectivement (en moyenne) d'environ un degré par 100 mètres de dénivellation dans les basses couches de l'atmosphère.

On peut alors exprimer la variation relative de pression:

$$(11.7) \mapsto \left. \begin{aligned} \left. \frac{d\Theta}{\Theta} \right|_{\text{adiab.}} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{dP}{\Theta} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left. \frac{d\Theta}{\Theta} \right|_{\text{adiab.}} = \frac{R}{C_p} \frac{dP}{P} \Rightarrow P = P_0 \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right)^{C_p/R} \\ P = \rho R \Theta \end{aligned} \right\}$$

et finalement, en substituant l'expression (11.8) du profil de température en utilisant l'expression (2.42) du coefficient adiabatique γ :

$$P = P_0 \left[1 - \frac{g}{C_p \Theta_0} (z - z_0) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (11.9)$$

Ainsi, pour l'air atmosphérique, la décroissance de la pression est d'environ 1 hectopascal (1 millibar) par 100 mètres de dénivellation dans les basses couches. La variation relative de pression au voisinage du sol est d'environ 0,012% par mètre de dénivellation; ceci justifie que l'on considère la pression comme constante en tout point dans les réservoirs de gaz industriels.

• **modèle isotherme:** L'approximation $\Theta = \Theta_0$, peu réaliste pour les fluides géophysiques, est souvent acceptable pour les fluides industriels. On peut alors écrire pour un gaz idéal $P = \rho R \Theta_0$, et

alors:
$$dP = -\rho g dz \mapsto \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R \Theta_0} dz \mapsto P = P_0 \exp\left[-\frac{g}{R \Theta_0}(z - z_0)\right]$$

relation qui confirme une variation relative de pression de 0,012% par mètre de dénivellation.

11.2 Hydrostatique

11.2.1 Hypothèses de base

- Le champ des forces à distance se réduit au seul champ de pesanteur.
- La pression atmosphérique est constante en tout point du domaine considéré. Cette approximation est correcte au $1/1000^e$ près si les dénivellations sont inférieures à 7,5 mètres.
- La masse volumique du fluide est indépendante de la pression et de la température. Ceci est vérifié au $1/1000^e$ près dans le cas de l'eau jusqu'à une pression de 20 bars et pour des variations de température n'excédant pas 10 K.

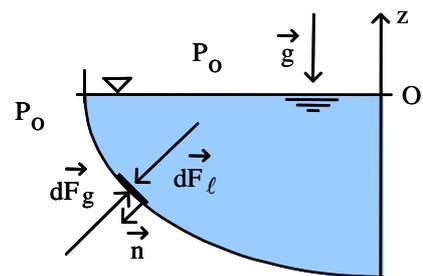
11.2.2 Résultante de pression sur une paroi

Soit dS un élément de surface de la paroi d'un récipient contenant un fluide au repos dans le champ de pesanteur. Les forces s'exerçant sur la face interne et la face externe de cet élément sont respectivement²⁰ (voir les notations sur le schéma):

$$\begin{cases} d\vec{F}_\ell = P_\ell dS \vec{n} \\ d\vec{F}_g = -P_0 dS \vec{n} \end{cases} \quad \text{avec } P_\ell - P_0 = -\rho g z$$

La résultante des forces de pression sur dS a pour expression

$$d\vec{F} = d\vec{F}_\ell + d\vec{F}_g = (P_\ell - P_0) dS \vec{n} = -\rho g z dS \vec{n}$$



²⁰ Rappelons la convention utilisée systématiquement en Mécanique des Fluides, qui consiste à orienter le vecteur normal unitaire vers l'extérieur du domaine fluide étudié. Ainsi, pour les forces de pression exercées par la paroi sur le fluide s'écrivent: $\vec{F}_{p \rightarrow f} = -\iint P \vec{n} dS$. Par conséquent les forces de pressions exercées par le fluide sur la paroi sont: $\vec{F}_{f \rightarrow p} = -\vec{F}_{p \rightarrow f} = \iint P \vec{n} dS$

On se propose maintenant d'exprimer la résultante des forces de pression sur une paroi de dimension finie.

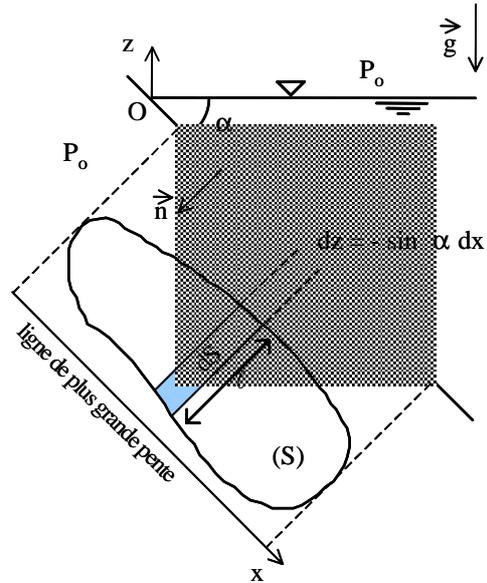
a) Cas d'une paroi plane

On considère les notations définies sur la figure ci-contre. D'après ce qui précède, la résultante des forces de pressions sur la surface d'aire (S) s'écrit

$$\vec{F} = -\rho g \vec{n} \iint_S z dS = \rho g \sin \alpha \vec{n} \iint_S x dS$$

et en notant x_G l'abscisse du barycentre G de (S) et P_G la pression en ce point, il vient

$$\vec{F} = \underbrace{\rho g \sin \alpha x_G}_{P_G} S \vec{n}$$



“La pression moyenne exercée par un fluide au repos sur une surface plane est égale à la pression qui règne au barycentre de cette surface”.

Le centre de poussée P, point d'application de la résultante \vec{F} , est obtenu en exprimant le moment de \vec{F} par rapport à l'axe horizontal Oy perpendiculaire au plan xOz:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{M}| &= \rho g \sin \alpha \iint_S x^2 dS = \rho g \sin \alpha I \\ |\vec{M}| &= F x_p = \rho g \sin \alpha x_G S x_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_p = \frac{I}{S x_G}$$

où I représente le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe Oy. En notant I_G le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe horizontal passant par G, on obtient, d'après le théorème de Huyghens:

$$I = I_G + S x_G^2$$

Par suite x_p a pour expression: (11.10)

$$x_p = x_G + \frac{I_G}{S x_G}$$

qui montre, comme on pouvait s'y attendre, que le centre de poussée se situe en dessous du centre de gravité.

b) Cas d'une paroi gauche

Dans ce cas, les forces élémentaires $d\vec{F}$ ne sont pas parallèles entre elles. On définit alors la poussée en projection sur un axe vertical et sur un axe horizontal.

• Poussée horizontale $dF_x = -\rho g z dS \cos \theta = -\rho g z dS_x$

On est donc ramené au calcul de la poussée sur une surface plane verticale.

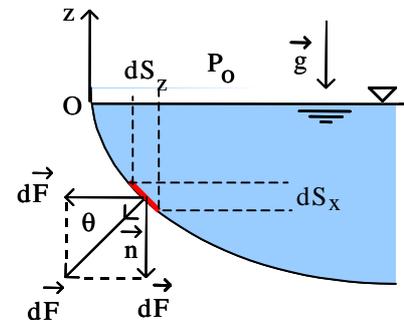
“La composante horizontale de la force de pression sur une surface quelconque (S) est égale à la poussée qui s’exercerait sur la projection verticale de (S)”.

☞ Conséquence immédiate: “La composante horizontale de la résultante de pression sur les parois d’un récipient est nulle”; un liquide au repos ne peut pas engendrer le mouvement horizontal d’un récipient.

• Poussée verticale $dF_z = -\rho g z dS \sin \theta = -\rho g z dS_z$

“La composante verticale de la force de pression sur une surface quelconque (S) est égale au poids de la colonne verticale de liquide limitée par la surface (S) et la surface libre”.²¹

☞ Conséquence immédiate: “La composante verticale de la résultante des forces de pression exercées par un liquide au repos sur les parois d’un récipient est égale au poids du liquide”.



11.2.3 Application à la mesure de la pression statique

a) Baromètre de Torricelli

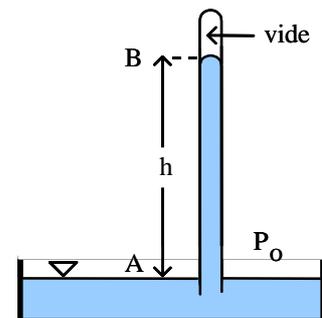
Le baromètre de Torricelli permet de mesurer une pression absolue.

$$\left. \begin{array}{l} P_A - P_B = \rho g (z_A - z_B) \\ P_B = 0 \end{array} \right\} \rightarrow P_A = P_o = \rho g h$$

L’expérience indique que la pression atmosphérique normale ($1,013 \cdot 10^5$ Pa) vaut

$$\frac{P_o}{\rho_{H_2O} g} = 10,33 \text{ m d'eau}$$

ou $\frac{P_o}{\rho_{Hg} g} = 0,76 \text{ m de mercure}$



La correspondance entre les différentes unités de pression utilisées en Mécanique des Fluides est donnée dans un tableau à la fin de cette section.

b) Tube piézométrique

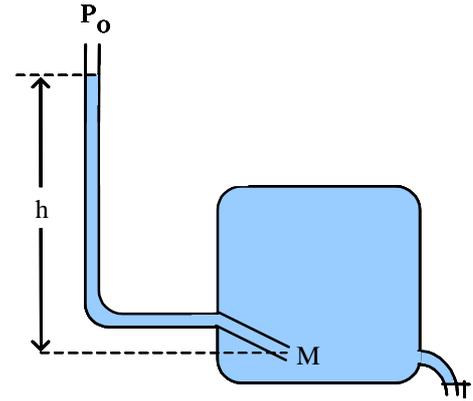
On définit une pression relative P_r en un point M quelconque comme l’écart de la pression vraie P_M en ce point et une pression de référence, en général la pression atmosphérique P_o supposée constante.

²¹ Il s’agit d’un récipient baigné dans une atmosphère à pression constante. Dans le cas contraire, il faut évidemment tenir compte de la différence de pression entre la face extérieure du récipient et la pression à la surface libre.

Les manomètres industriels sont gradués en pression relative.

Un dispositif simple et pratique pour mesurer la pression relative dans un liquide consiste en un simple tube ouvert au sommet et relié au réservoir du liquide (tube piézométrique)

$$P_r = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pression} \\ \text{absolue}}}{P_M} - P_o = \rho g h$$

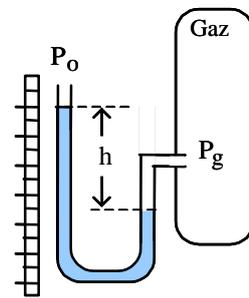


c) Tube en U

Il s'agit d'une variante adaptée à la mesure de la pression relative dans les gaz.

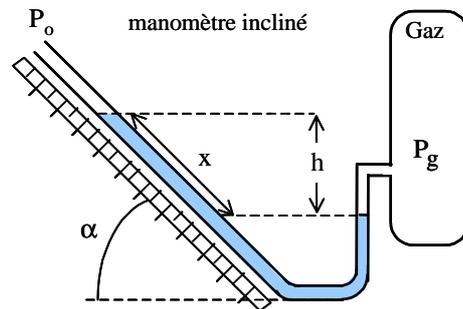
$$P_r = P_g - P_o = \rho g h$$

La dénivellation est d'autant plus importante (lisible) que la masse volumique du liquide utilisé est faible



La précision de la lecture peut être améliorée en inclinant le tube d'un angle α ; la sensibilité est alors amplifiée d'un facteur $1/\sin\alpha$.

$$P_r = P_g - P_o = \rho g x \sin \alpha$$



d) Micromanomètre

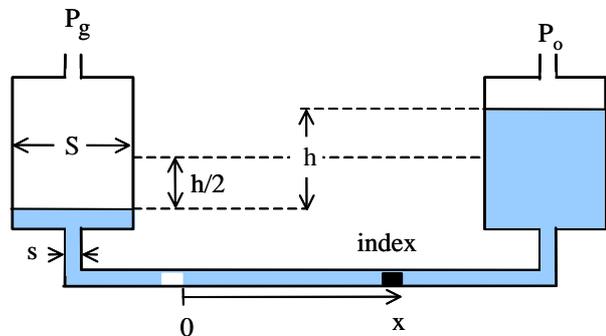
$$P_g - P_o = \rho g h$$

Le déplacement x est obtenu par l'écriture du bilan de masse de part et d'autre de l'index.

$$S \frac{h}{2} = s x \rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{S}{s} h$$

et donc $P_g - P_o = 2 \rho g \frac{s}{S} x$

On amplifie ainsi la sensibilité d'un facteur $2s/S$.



e) Unités de pression

- La pression a pour dimension $[M.L^{-1}.T^{-2}]$. L'unité légale est le Pascal; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$.

On utilise aussi fréquemment le bar; $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

- Dans le système CGS parfois encore utilisé, l'unité de pression est la barye; $1 \text{ barye} = 1 \text{ g.cm}^{-1}.s^{-2}$.

• Nous avons vu que la pression relative lue sur un manomètre à liquide s'exprime en hauteur de ce liquide. On transforme aisément la hauteur h de liquide en unité S.I. en utilisant la relation de l'hydrostatique: $P=(\rho g)h$

Le tableau ci-dessous donne les facteurs de conversion entre les différentes unités courantes.

Multiplier le nombre de → Pour obtenir le nombre de ↓	Pascal	barye	cm d'eau	cm de mercure	atmosphère	lb/sq. inch (psi)
Pascal	1	10^{-1}	98,1	1 333	$1,013 \cdot 10^5$	6,895
barye	10	1	981	$1,333 \cdot 10^4$	$1,013 \cdot 10^6$	$6,895 \cdot 10^4$
cm d'eau	$1,020 \cdot 10^{-2}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$	1	13,59	1 033	70,31
cm de mercure	$7,50 \cdot 10^{-4}$	$7,50 \cdot 10^{-5}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$	1	76	5,172
atmosphère	$0,987 \cdot 10^{-5}$	$0,987 \cdot 10^{-6}$	$9,68 \cdot 10^{-4}$	$1,316 \cdot 10^{-2}$	1	$6,805 \cdot 10^{-2}$
lb/sq. inch (psi)	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$1,450 \cdot 10^{-5}$	$1,422 \cdot 10^{-2}$	1,934	14,70	1

11.2.4 Phénomènes de tension superficielle

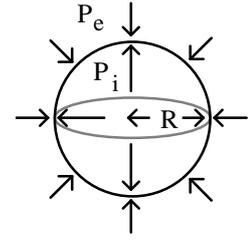
Les forces intermoléculaires sont faibles dans les gaz; elles sont même nulles si la pression est suffisamment basse, les molécules étant alors assez éloignées les unes des autres pour que les forces soient inopérantes. Elles sont au contraire relativement importantes dans les corps condensés dans lesquels elles assurent une forte cohésion (liquides et solides).

Cette différence entraîne une anisotropie locale des contraintes d'origine moléculaires au voisinage d'une interface gaz-liquide. Celle-ci est alors le siège d'une tension superficielle σ définie par analogie à la tension d'une membrane élastique uniformément tendue.

Imaginons une coupure rectiligne de longueur ℓ faite dans une telle membrane. Il faut exercer sur chaque lèvre de la coupure une force \vec{F} normale à la coupure et de module indépendant de l'orientation de la coupure. La tension, la même quel que soit le lieu de la coupure, est par définition:

$$\sigma = F / \ell \quad [N.m^{-1}] \equiv [Pa.m]$$

Considérons, par exemple, une bulle de savon. Elle est constituée d'une double interface. Puisque cette double *membrane* est tendue, la pression à l'intérieur de la bulle est supérieure à la pression extérieure (analogie avec un ballon gonflé).



La force de pression exercée sur un hémisphère est $(P_i - P_e) \pi R^2$, où R est le rayon de la bulle. Si l'on coupait la bulle suivant un grand cercle,

pour maintenir les deux hémisphères en contact, il faudrait exercer, de chaque lèvre des 2 interfaces (gaz extérieur-liquide et liquide-gaz intérieur) de la coupure, une force $2 \times (2\pi R \times \sigma)$, précisément égale à la force de pression précédente. Ainsi:

$$(P_i - P_e) \pi R^2 = 4\pi R \sigma \quad \text{d'où} \quad P_i - P_e = \frac{4\sigma}{R} \quad (11.11)$$

D'une manière plus générale, si l'on considère une interface quelconque, il y a toujours *accroissement de pression quand on traverse l'interface du côté convexe vers le côté concave*. On démontre (théorème de Laplace) que cet accroissement de pression est donné par la relation:

$$P_i - P_e = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (11.12)$$

où σ est la tension superficielle de l'interface (caractérisée par deux corps), R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de l'interface au point considéré.

En particulier, dans le cas de la sphère, $R_1 = R_2 = R$, et l'on a:

$$P_i - P_e = \frac{2\sigma}{R} \quad (11.13)$$

et pour une bulle de savon, constituée de 2 interfaces voisines (σ commun et $R_1 \sim R_2$), on retrouve la relation (11.11).

Quelques valeurs usuelles de la tension superficielle à 20 °C

L'air étant en contact avec le liquide, on trouve les valeurs suivantes (en N.m^{-1}):

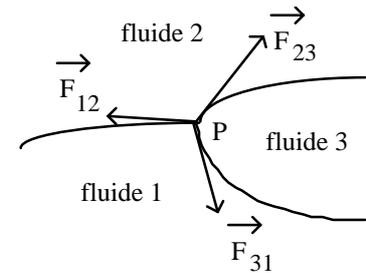
Eau	$7,28 \cdot 10^{-2}$	Eau de savon	$3,0 \cdot 10^{-2}$	Benzène	$2,88 \cdot 10^{-2}$
Alcool éthylique	$2,28 \cdot 10^{-2}$	Mercure	$48,4 \cdot 10^{-2}$		

Ces valeurs varient peu avec la nature du gaz mais sensiblement avec la température.

a) Cas de trois fluides

Examinons le cas de trois fluides se raccordant selon une arête. L'équilibre d'un élément d'arête $\delta\ell$ s'exprime par $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} = \vec{0}$, avec:

$$\begin{cases} F_{12} = \sigma_{12} \delta \ell \\ F_{23} = \sigma_{23} \delta \ell \\ F_{31} = \sigma_{31} \delta \ell \end{cases}$$



Il faut, pour que l'équilibre soit réalisé, que chacun des modules des tensions soit inférieur à la somme des deux autres. Par exemple, dans le cas d'une goutte d'huile à la surface de l'eau:

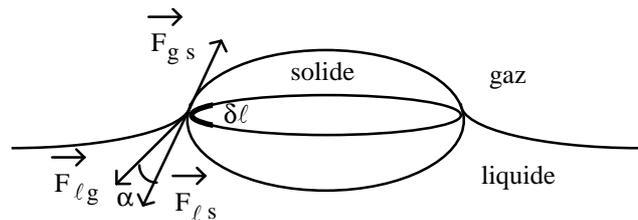
$$\sigma_{\text{eau-air}} = 7,510^{-2} \text{ N.m}^{-1} \quad \sigma_{\text{eau-huile}} = 1,810^{-2} \text{ N.m}^{-1} \quad \sigma_{\text{huile-air}} = 3,210^{-2} \text{ N.m}^{-1}$$

On a donc $\sigma_{\text{eau-air}} > \sigma_{\text{eau-huile}} + \sigma_{\text{huile-air}}$, et l'équilibre est donc impossible. La goutte d'huile va s'étaler sur l'eau, l'aire de contact huile-air augmentant indéfiniment.

b) Cas de deux fluides et d'un solide

On admet qu'il existe, entre chacun des fluides et le solide, une tension interfaciale tangente aux surfaces de séparation. Les forces $\vec{F}_{\ell s}$ entre liquide et solide et $\vec{F}_{g s}$ entre gaz et solide ont nécessairement la même direction et des sens opposés, mais leurs intensités sont ordinairement différentes.

L'équilibre de l'élément $\delta \ell$ s'écrit donc en projection (figure) $\sigma_{g s} = \sigma_{\ell s} + \sigma_{\ell g} \cos \alpha$. L'angle de raccordement de l'interface liquide-gaz doit donc satisfaire à la condition:



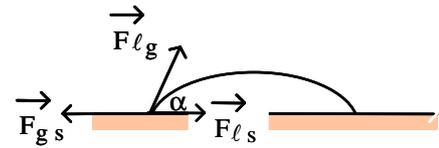
$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{g s} - \sigma_{\ell s}}{\sigma_{\ell g}}$$

Ainsi, pour qu'il y ait équilibre sur le solide, il faut que $\sigma_{g s} < \sigma_{\ell s} + \sigma_{\ell g}$.

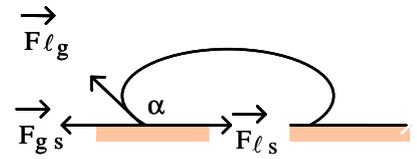
Si cette condition n'est pas satisfaite, le liquide s'étale sur le solide. On dit alors que "le liquide *mouille parfaitement* le solide". C'est le cas de certaines huiles sur du verre et des métaux.

Si la condition d'équilibre est satisfaite, deux cas sont à considérer.

• Dans le cas le plus fréquent, on a $\sigma_{\ell s} < \sigma_{gs} < \sigma_{\ell s} + \sigma_{\ell g}$, et l'angle de raccordement est inférieur à 90° . On dit que “le liquide *mouille* imparfaitement le solide”.



• Si $\sigma_{\ell s} > \sigma_{gs}$, l'angle de raccordement est supérieur à 90° . On dit que “le liquide ne mouille pas le solide”. C'est le cas du mercure sur du verre ($\alpha \sim 135^\circ$).



Chapitre 12 Quelques solutions exactes de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires dont la résolution analytique est généralement impossible. Cependant, pour certaines configurations simples, elles peuvent se réduire à un système linéaire dont l'intégration permet d'obtenir des solutions exactes. Cette possibilité sera illustrée sur quelques cas simples de la classe, quelque peu académique (mais fort instructive), des écoulements parallèles²² de fluide isovolume.

Nous allons d'abord préciser ce qu'on entend par "écoulements parallèles" et montrer que les équations prennent dans ce cas une forme particulièrement simple (§12.1). Quelques exemples de solutions analytiques sont ensuite présentés. La comparaison de la solution obtenue pour un écoulement de fluide visqueux isovolume dans une conduite cylindrique (§12.4) et de la réalité expérimentale sera une bonne occasion pour présenter quelques notions élémentaires sur la turbulence des fluides (§12.5).

12.1 Les écoulements parallèles

Un écoulement est dit "*parallèle*" lorsqu'une seule composante du vecteur vitesse est non nulle. Toutes les particules fluides suivent alors des trajectoires parallèles.

12.1.1 Équations pour les écoulements parallèles en canal

Considérons, à titre de premier exemple, un écoulement rectiligne parallèle à l'axe Ox dans le repère cartésien rectangulaire $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les composantes du vecteur vitesse sont:

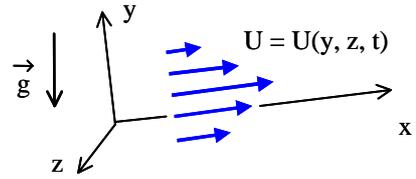
$$\begin{cases} U = U(x, y, z, t) \\ V = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

²² Pour une présentation plus générale et plus complète des solutions analytiques des équations de Navier-Stokes, on pourra consulter la référence [7].

Pour un fluide isovolume, l'équation de continuité se réduit dans cette situation à:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Les profils de vitesse restent donc identiques d'une section droite à une autre: $\vec{V} = U(y, z, t) \vec{e}_x$



Considérons maintenant l'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes (Annexe 1). En définissant le potentiel de pesanteur Φ par $\vec{g} = -\text{grad } \Phi$ et la *pression étoilée* P^* par $P^* = P + \rho \Phi$, il vient pour un fluide isovolume:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial P^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P^*}{\partial z} &= 0 \end{aligned}} \quad (12.1)$$

Il apparaît que

- la pression étoilée ne peut évoluer que dans la direction de l'écoulement: $P^* = P^*(x, t)$. Elle représente la seule source de mouvement. De plus, P^* varie linéairement en x ; il suffit pour s'en convaincre de dériver par rapport à x la première équation de (12.1)

- les termes inertiels non linéaires ($U \partial / \partial x + V \partial / \partial y + W \partial / \partial z$) sont identiquement nuls.

- le transport diffusif est nul dans la direction de l'écoulement ($\partial^2 / \partial x^2 = 0$). Les contraintes visqueuses ne peuvent transférer de la quantité de mouvement que dans les directions perpendiculaires à la direction de l'écoulement (si le cisaillement est non nul).

Nous pourrions tirer parti de ces simplifications dans les exemples de résolution d'écoulements entre deux plaques planes ([§12.2](#)).

- **Remarque 1:** Si P^* est constant (pression uniforme dans un fluide non pesant, ou équilibre hydrostatique), le système (12.1) dégénère pour donner l'équation de la chaleur²³:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (12.2)$$

- **Remarque 2:** Si le mouvement est permanent ($\partial / \partial t = 0$), les pressions et les tensions visqueuses dominent seules la situation. Si $\partial P^* / \partial x$ (qui est constant rappelons-le) a une valeur connue $\delta P^* / L$, le profil de vitesse

²³ Ce nom vient du fait qu'il s'agit effectivement de l'équation qui traduit l'évolution temporelle de la température d'une plaque plane (dans le plan yOz) par conduction de la chaleur: $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right)$

satisfait à une équation de Poisson:

$$\Delta U(y, z) = \frac{\delta P^*}{\mu L} \quad (12.3)$$

12.1.2 Équations pour les écoulements parallèles en rotation

Envisageons à présent un écoulement plan de rotation autour d'un axe Oz. Dans cette situation, il est plus commode d'exprimer les équations de Navier-Stokes dans un repère de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

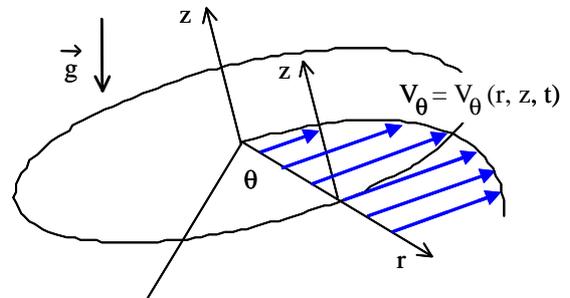
Les composantes du vecteur vitesse sont:

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = V_\theta(r, \theta, z, t) \\ V_z = 0 \end{cases}$$

Pour un fluide isovolume, l'équation de continuité se réduit dans cette situation à (Annexe 2):

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Les profils de vitesse sont donc identiques dans tous les plans azimutaux: $\vec{V} = V_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta$



L'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes s'écrit alors (Annexe 2):

$$\begin{cases} \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Il suffit de dériver l'équation de la vitesse orthoradiale par rapport à θ pour constater que $\partial P^* / \partial \theta$ est indépendant de θ ; la symétrie cylindrique impose alors $\partial P^* / \partial \theta = 0$. Ainsi $P^* = P^*(r, t)$. On peut montrer par ailleurs que V_θ ne dépend pas de z ; il suffit de dériver la première équation par rapport à z et de rapprocher le résultat de la dernière équation. Ainsi $V_\theta = V_\theta(r, t)$.

Nous venons de montrer que la symétrie axiale porte à la fois sur la cinématique et sur la dynamique. Le mouvement satisfait donc le système suivant:

$$\boxed{\begin{cases} \rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P^*}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \end{cases}} \quad (12.4)$$

Contrairement au cas d'un écoulement rectiligne, où la cinématique est couplée avec la gradient longitudinal (constant) de pression étoilée (et ne peut être déterminée qu'avec la donnée de ce paramètre), ici la vitesse seule est en cause dans la deuxième équation. Si, muni de conditions initiale et aux limites, on sait intégrer cette équation, la distribution radiale de P^* en résulte immédiatement selon la première équation qui exprime l'équilibre entre force centrifuge et gradient de pression étoilée.

12.1.3 Équations pour les écoulements parallèles en conduite

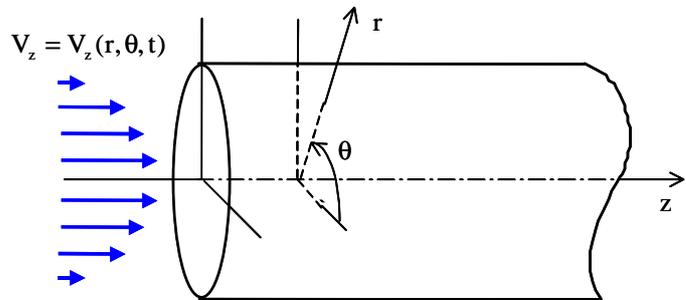
Envisageons à présent un écoulement parallèle dans un conduit cylindrique rectiligne. Là encore un repère de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est bien adapté. Les composantes du vecteur vitesse sont:

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = 0 \\ V_z = V_z(r, \theta, z, t) \end{cases}$$

Pour un fluide isovolume, l'équation de continuité se réduit dans cette situation à:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Les profils de vitesse sont inchangés d'une section droite à une autre: $\vec{V} = V_z(r, \theta, t) \vec{e}_z$



L'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes se réduit à:

$$\begin{cases} \frac{\partial P^*}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial P^*}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP^*}{dz} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right] \end{cases} \quad (12.5)$$

Les trois formulations réduites que nous venons de considérer sont associées à des configurations géométriques simples. Il convient maintenant, pour intégrer les équations et obtenir des solutions particulières, de définir précisément les conditions initiales et aux limites, et donc de spécifier des problèmes particuliers.

12.2 Écoulements entre deux plaques planes

12.2.1 Écoulement dans un canal bidimensionnel

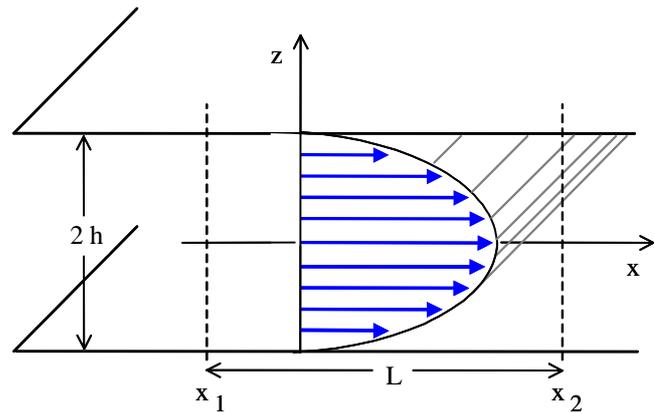
Nous allons traiter maintenant, à titre d'illustration, le cas de l'écoulement stationnaire (les conditions

initiales sont donc caduques) et parallèle d'un fluide visqueux entre deux plaques planes parallèles infinies et immobiles (canal bidimensionnel infini). Dans cette configuration (axes définis sur le schéma), les effets de bords sont repoussés à l'infini dans la direction y, et aucune force motrice n'est active dans cette direction (P^* ne dépend que de x); l'écoulement est donc indéfini dans cette direction, et ceci se traduit nécessairement par $\partial/\partial y=0$. Les équations (12.1) se ramènent ainsi à:

$$\mu \frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{dP^*}{dx} \quad \text{avec } U=U(z) \text{ et } P^*=P^*(x) \quad (12.6)$$

Cette équation possède un premier membre qui ne dépend que de z et un second membre qui n'est fonction que de x. En conséquence, ces deux membres doivent être constants. Il est alors facile d'intégrer cette équation:

$$U(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} z^2 + C_1 z + C_2$$



Les conditions aux limites sont ici les conditions cinématiques d'adhérence qui expriment qu'au contact d'une paroi un fluide visqueux a pour vitesse la vitesse de la paroi (conformément à l'analyse présentée à la fin du §8.2.2):

$$U(z = -h) = 0 \text{ et } U(z = h) = 0$$

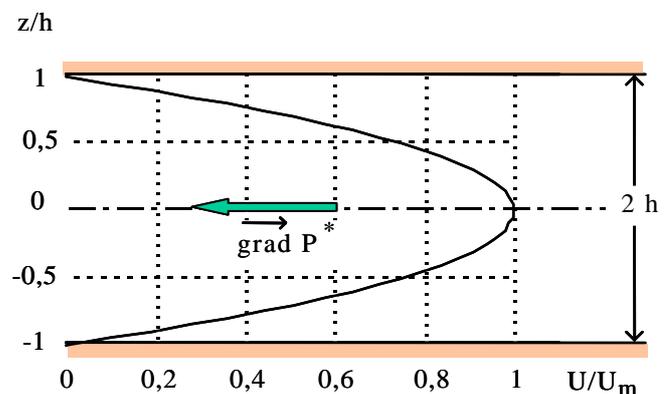
On en déduit les constantes d'intégration:

$$C_1 = 0; C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} h^2$$

et l'on obtient donc un profil de vitesse parabolique:

$$U(z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} (h^2 - z^2) \quad (12.7)$$

Le gradient de pression étoilée est nécessairement orienté vers l'amont; il est supposé donné a priori et sa valeur $-dP^*/dx = (P_1^* - P_2^*)/L$ détermine complètement le profil de vitesse. La viscosité équilibre le gradient de pression qui engendre le mouvement.



Le maximum de vitesse est localisé sur le plan à mi-distance entre les deux plaques:

$$U_m = U(0) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} h^2 \quad (12.8)$$

La vitesse de débit par unité de largeur est donnée par:

$$U_d = \int_y^{y+1} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^h U(z) dz \right] dy$$

et l'on obtient:

$$U_d = -\frac{1}{3\mu} \frac{dP^*}{dx} h^2 = \frac{2}{3} U_m \quad (12.9)$$

Le débit-masse par unité de largeur dans une section droite est donc:

$$Q_m = \rho U_d (2h \times 1) = \frac{1}{3\nu} \frac{P_1 - P_2}{L} h^2 \quad (12.10)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime simplement puisque le tenseur des taux de déformation n'a qu'une composante non nulle:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} \mapsto \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dP^*}{dx} z \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dP^*}{dx} z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le cisaillement est nul à mi-distance entre les deux plaques et maximal sur les particules fluides au contact des parois. La contrainte visqueuse exercée par les parois sur le fluide au contact est:

- sur la paroi supérieure: $\bar{\tau}|_{z=h} = \tau_{ij}|_{z=h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{dP^*}{dx} h \bar{e}_x + 0 \bar{e}_y + 0 \bar{e}_z$

- sur la paroi inférieure: $\bar{\tau}|_{z=-h} = \tau_{ij}|_{z=-h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{dP^*}{dx} h \bar{e}_x + 0 \bar{e}_y + 0 \bar{e}_z$

Cette contrainte pariétale est souvent exprimée sous la forme adimensionnelle d'un *coefficient de frottement*. En prenant comme référence la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho U_d^2$ et en utilisant l'expression (12.9), on obtient:

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_d^2} = \frac{6\mu}{\rho U_d h} = 6/Re \quad (12.11)$$

Le frottement pariétal est inversement proportionnel au nombre de Reynolds de l'écoulement.

12.2.2 Écoulement de Couette

Une variante de l'exemple précédent, appelée écoulement de Couette, est importante en théorie de la lubrification. Il s'agit du cas où les plaques sont en mouvement relatif uniforme dans leur plan. L'équation générale réduite (12.6) est encore valable, mais les conditions aux limites deviennent:

$$U(z=-h) = 0 ; U(z=h) = U_0$$

où U_0 est la vitesse de la plaque supérieure, le repère étant lié à la plaque inférieure.

Le profil de vitesse

$$U(z) = \underbrace{-\frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} (h^2 - z^2)}_{\text{Parois fixes}} + \underbrace{\frac{U_0}{2h} (z+h)}_{\text{Couette}} \quad (12.12)$$

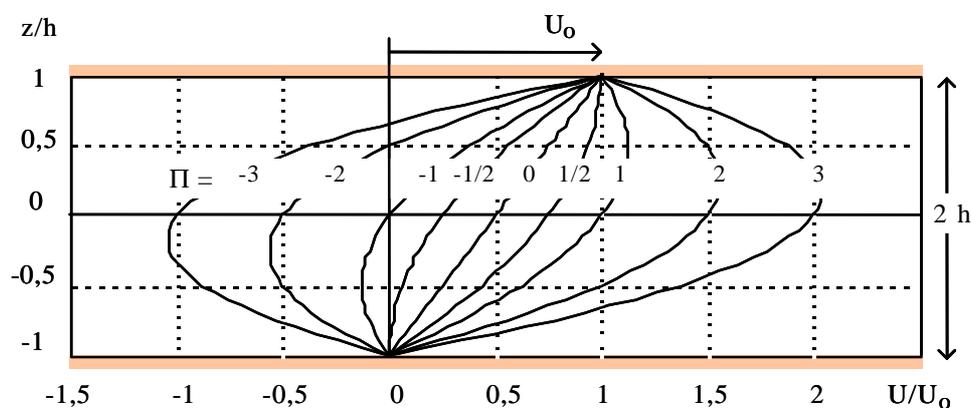
apparaît alors comme la superposition d'un profil correspondant à un écoulement de Couette en l'absence de gradient de pression et du profil de vitesse pour un écoulement visqueux entre deux parois fixes.

On peut introduire un gradient de pression adimensionnel $\Pi = -\frac{h^2}{\mu U_0} \frac{dP^*}{dx}$ et mettre la solution (12.12) sous

la forme:

$$U(z) = \frac{U_0}{2} \Pi \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] + \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{z}{h} \right)$$

La figure ci-dessous montre les profils de vitesse pour le cas $U_0 > 0$ et pour différentes valeurs du gradient de pression adimensionnel. Lorsque la pression est motrice ($\Pi > 0$), elle travaille dans le sens de l'entraînement visqueux généré par la plaque mobile et la vitesse est positive dans tout l'écoulement. Pour $\Pi = 0$, on obtient un profil linéaire induit par le seul entraînement visqueux.



Dans le cas d'un gradient de pression adverse et inférieur à $-1/2$, la vitesse devient négative au voisinage de la paroi fixe; la contrainte visqueuse a alors une amplitude insuffisante pour compenser la contrainte de pression.

12.2.3 Premier problème de Stokes

Ce problème est aussi appelé, dans la littérature, *problème de Rayleigh*. En fait sa solution est due à Stokes. Il s'agit du cas instationnaire représenté par la mise en mouvement d'une plaque plane infinie qui limite un demi-espace occupé par un fluide visqueux initialement au repos. A l'instant initial t_0 , la plaque est brusquement mise en translation dans son plan à la vitesse uniforme U_0 .

- Analyse cinématique et dynamique

Le fluide est initialement au repos et, d'après la condition d'adhérence, la mise en mouvement de la plaque entraîne la pellicule fluide au contact. Le cisaillement induit génère une contrainte visqueuse orientée dans la direction x . C'est la seule force motrice et le fluide ne peut se mettre en mouvement que dans cette direction: $\vec{V}=U(x,y,z,t)\vec{e}_x$. La plaque étant indéfinie dans les directions x et y : $\vec{V}=U(z,t)\vec{e}_x$. Dans ces conditions, les équations du mouvement s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial z} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial z} \end{array} \right. \quad (12.13)$$

On voit que P^* ne peut dépendre que de x . De plus, puisque l'équation de continuité indique que U ne dépend pas de x , la seconde équation impose que $\partial P^* / \partial x$ est nécessairement constant, cette constante étant évidemment celle correspondant à la situation initiale de repos hydrostatique: $\partial P^* / \partial x = 0$.²⁴

Le problème est donc réduit à la résolution de l'équation unidimensionnelle purement cinématique (dite *équation de la chaleur*)

$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad U = U(z, t) \quad (12.14)$$

²⁴ En outre, un gradient de pression étoilée non nul serait incompatible avec une configuration indéfinie dans la direction x .

associée aux conditions aux limites:

$$\begin{cases} U(z, t) = 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ U(0, t) = U_0 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (12.15)$$

• Résolution

Profitons de cet exercice pour utiliser la notion d'échelle présentée au [chapitre 10](#). La seule échelle de vitesse évidente du problème est U_0 . On peut aussi définir une échelle de longueur δ caractérisant, à un instant t , l'épaisseur de fluide concernée par l'entraînement visqueux. Cette échelle est nécessairement construite à l'aide de la viscosité ν :

$$\delta \propto \nu^a t^b$$

et l'homogénéité dimensionnelle impose $a = b = 1/2$. Nous définissons $\delta = 2(\nu t)^{1/2}$ (le facteur 2 simplifiera les écritures), et nous cherchons donc $U(z, t)$ sous la forme adimensionnelle:

$$\frac{U}{U_0} = f(\eta) \quad \text{avec } \eta = z/\delta \quad \text{et } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(+\infty) = 0 \end{cases} \quad (12.16)$$

Les dérivées partielles de U s'écrivent maintenant

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{U_0 \eta}{2t} f'(\eta) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{U_0}{\delta} f'(\eta) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{U_0}{\delta^2} f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{U_0}{\delta^2} f''(\eta) \end{cases}$$

et l'équation (12.14) prend donc la forme

$$\nu \frac{U_0}{\delta^2} f''(\eta) + \frac{U_0 \eta}{2t} f'(\eta) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\frac{U_0}{4t} [f''(\eta) + 2\eta f'(\eta)] = 0} \quad (12.17)$$

Une première intégration donne: $f'(\eta) = C_1 e^{-\eta^2}$

et, en intégrant une seconde fois: $f(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-u^2} du + C_2$

Les conditions aux limites (12.16) permettent de déterminer les constantes:

$$\begin{cases} f(0) = 1 = C_2 \\ f(+\infty) = 0 = C_1 \int_0^\infty e^{-u^2} du + C_2 = C_1 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] + 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

On obtient donc

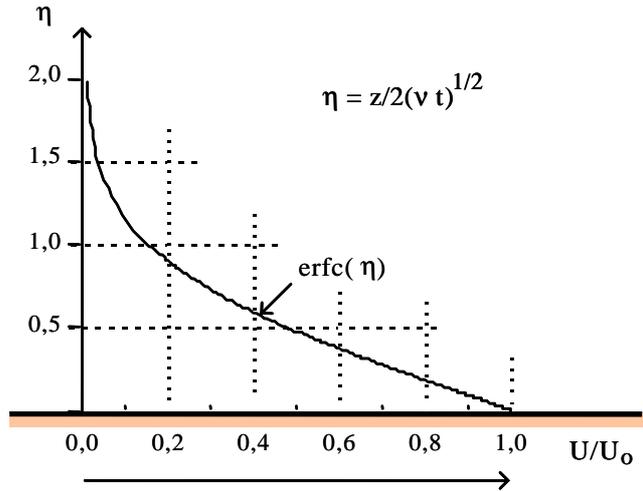
$$\boxed{f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta)} \quad (12.18)$$

où erf désigne la fonction d'erreur et erfc la fonction d'erreur complémentaire.

Le champ de vitesse s'exprime finalement en fonction de la seule variable adimensionnelle de similitude η et prend à chaque instant le profil simple

$$\frac{U}{U_o} = 1 - \text{erf}(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{2(\nu t)^{1/2}}$$

La vitesse du fluide n'est que de 1% de celle de la plaque pour $\eta = 2$, c'est-à-dire pour $z = 2 \delta = 4 (\nu t)^{1/2}$, et la couche "concernée" par le mouvement de la plaque s'épaissit comme la racine du temps.



12.3 Diffusion d'un filament tourbillonnaire

Considérons maintenant l'exemple d'un écoulement plan en rotation autour de l'axe \vec{e}_z . Nous avons vu (§12.1.2) que le problème est purement cinématique; il est décrit par l'équation:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) \tag{12.19}$$

et le gradient de pression étoilée, radial centrifuge, est déterminé a posteriori par:

$$\frac{\rho V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P^*}{\partial r} \tag{12.20}$$

• **Solution stationnaire**

Dans le cas d'une solution stationnaire ($\partial / \partial t = 0$), la solution est immédiate:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \quad \mapsto \quad \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} = r C_1 \quad \mapsto \quad V_\theta(r) = \underbrace{\frac{C_1}{2}}_{\substack{\text{rotation} \\ \text{solide}}} r + \underbrace{\frac{C_2}{r}}_{\substack{\text{tourbillon} \\ \text{bi dimensionnel}}}$$

La partie solide du mouvement ne présente pas d'intérêt et nous n'allons considérer que le dernier terme de cette solution (ce qui revient à admettre que le mouvement doit être nul à l'infini; soit $C_1 = 0$). La constante C_2 peut s'exprimer en fonction de la circulation Γ sur un cercle de rayon r :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta(r) r d\theta = 2\pi C_2 \quad \mapsto \quad C_2 = \Gamma / 2\pi$$

Ainsi, l'une des solutions stationnaires de l'équation (12.19) s'écrit:

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (12.21)$$

Il s'agit d'un écoulement irrotationnel, sauf sur l'axe \vec{e}_z où le rotationnel est infini. Notons qu'en admettant l'existence d'une telle solution stationnaire, la viscosité est exclue du problème et l'écoulement obtenu est dépourvu d'amortissement dissipatif. Nous allons maintenant considérer que, sauf sur l'axe $r=0$, la solution (12.21) peut représenter la condition initiale d'un problème instationnaire à solution dissipative telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\theta}(r, t) = 0$$

• Solution instationnaire

L'équation pour la quantité de mouvement orthoradial

$$\frac{\partial V_{\theta}}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_{\theta})}{\partial r} \right) \quad (12.22)$$

est maintenant associée aux conditions aux limites:

$$\begin{cases} V_{\theta}(r, 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} V_{\theta}(r, t) = 0 \end{cases} \quad (12.23)$$

Ici encore, nous allons rechercher une solution adimensionnelle. Il est naturel de considérer comme échelle de vitesse la vitesse locale à l'instant initial: $U_0 = \Gamma/2\pi r$. La solution doit faire intervenir t , r et la viscosité cinématique ν . Le seul nombre sans dimension que l'on puisse former avec ces trois quantités est $\eta = r^2/\nu t$.

Le problème doit pouvoir se ramener à la recherche de la solution d'une équation de la forme:

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(\eta)$$

En substituant cette expression dans (12.22), on trouve facilement:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] \quad (12.24)$$

avec, d'après (12.23):

$$\begin{cases} f(\eta) = 1 & \text{pour } \eta \rightarrow \infty \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (12.25)$$

Les dérivées partielles de V_{θ} deviennent:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{r^2}{\nu t^2} f' \\ \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2r}{\nu t} f' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \left(\frac{2r}{\nu t} \right)^2 f'' + \frac{2}{\nu t} f' \end{cases}$$

et, en reportant ces expressions dans (12.22), on obtient:

$$\frac{r^2}{\nu t^2} [4f''(\eta) + f'(\eta)] = 0$$

En dehors de l'axe singulier $r = 0$, une première intégration donne:
dont la solution est:

$$4f'(\eta) + f(\eta) = C_1$$

$$f(\eta) = C_1 + C_2 \exp(-\eta/4)$$

Les constantes d'intégration sont obtenues par les conditions aux limites (12.25):

pour $\eta \rightarrow +\infty$ $f(\eta) = 1 = C_1$

et $f(0) = 0 = C_1 + C_2$

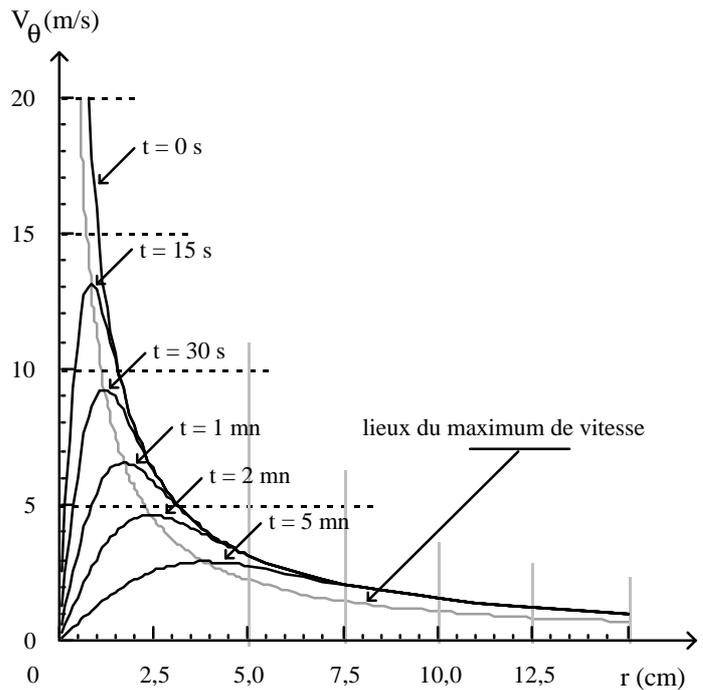
et le profil de vitesse a pour expression:

$$V_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} [1 - \exp(-r^2 / 4\nu t)] \tag{12.26}$$

Cette solution est due à Oseen et Hamel. Elle est représentée à différents instants sur la figure ci-contre pour un tourbillon d'eau à 20°C ($\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) dont la circulation initiale est $\Gamma = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On voit que la vitesse s'annule instantanément sur l'axe. A un instant donné, elle est maximale à $r \sim 2,242 (\nu t)^{1/2}$.

En identifiant le "cœur du tourbillon" à la région comprise entre l'axe et le maximum de vitesse, on observe que son diamètre augmente en même temps que sa vitesse de rotation diminue (courbe en tireté).



A r fixé, la vitesse décroît régulièrement au cours du temps et devient moitié de la vitesse initiale à $t = -r^2 / 4\nu \ln(1/2) \sim 0,36 r^2 / \nu$.

Le rotationnel de ce champ de vitesse

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi \nu t} \exp(-r^2 / 4\nu t) \vec{e}_z$$

est initialement nul partout et infini sur l'axe (filament tourbillonnaire). Aux instants ultérieur, il vaut $\Gamma / 4\pi \nu t$ sur

l'axe et décroît régulièrement pour s'annuler à l'infini: *le tourbillon diffuse instantanément dans tout le fluide.*

12.4 Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

Nous envisageons maintenant l'écoulement parallèle et stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un tube cylindrique axisymétrique. Cet exemple de résolution analytique des équations de Navier-Stokes est particulièrement important puisqu'il constitue un problème de base de l'hydraulique industrielle. Nous verrons que la solution obtenue n'est correcte que dans une gamme limitée de variation du nombre de Reynolds et cette constatation nous conduira à considérer, au moins de façon qualitative, la notion de turbulence fluide

Nous avons vu que, dans la configuration considérée, le problème se réduit à celui de la résolution de l'équation (12.5) qui s'écrit pour un écoulement permanent

$$\frac{dP^*}{dz} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right]$$

où le gradient de P^* , qui constitue la force motrice, est constant et supposé connu. Nous noterons désormais $G = -dP^*/dz$ la *chute linéique de pression étoilée*; c'est-à-dire qu'entre deux sections distantes de $(z_2 - z_1) = L$, $G = (P_1^* - P_2^*)/L$.

Si les conditions aux limites (la qualité de surface de la paroi du conduit) sont elles aussi homogènes dans la direction orthoradiale, la solution doit être indépendante de θ et l'équation linéaire réduite

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = -\frac{G}{\mu} r \quad (12.27)$$

est associée à une condition d'adhérence à la paroi: $V_z(r=R)=0$ } (12.28)
 et à une condition de vitesse axiale finie: $V_z(r=0) < \infty$ }

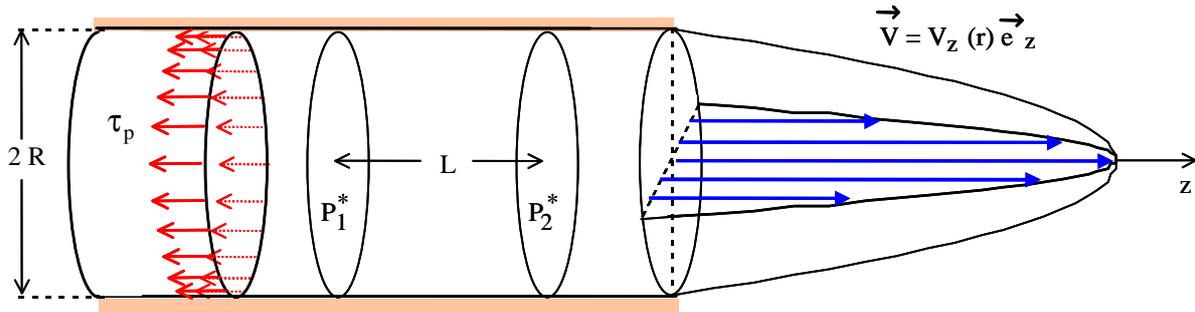
• Résolution

L'intégration de l'équation (12.27) conduit immédiatement à la solution générale

$$V_z(r) = -\frac{G}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

La condition axiale impose $C_1 = 0$, et la condition pariétale implique: $0 = -\frac{G}{4\mu} R^2 + C_2$, d'où le profil

parabolique: $V_z(r) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2)$ (12.29)



12.4.1 Grandeurs cinématiques et dynamiques

• Vitesse maximale, vitesse de débit et débit volume

Le maximum du champ de vitesse est localisé sur l'axe de la conduite:

$$V_{\max} = V_z(0) = \frac{GR^2}{4\mu} \quad (12.30)$$

et, en notant \vec{n} le vecteur unitaire normal à une section droite, la vitesse de débit est donnée par:

$$U_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R V_z(r) r \, dr = \frac{GR^2}{8\mu} = \frac{V_{\max}}{2} \quad (12.31)$$

d'où l'expression du débit volume (déterminée par Poiseuille en 1840):

$$Q_v \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = S U_d = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} \quad (12.32)$$

On voit que la mesure de la chute linéique de pression et du débit constituent un moyen d'accéder expérimentalement à la viscosité. Le profil de vitesse peut être écrit sous la forme

$$V_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2 U_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (12.33)$$

• Contrainte tangentielle visqueuse à la paroi

Le tenseur des taux de déformation a, dans le cas présent, une seule composante non nulle (l'expression de ses composantes en coordonnées cylindriques est donnée en Annexe 2):

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la contrainte visqueuse pariétale exercée par la paroi sur le fluide s'écrit simplement:

$$\vec{\tau}|_{r=R} = 2\mu \overline{\overline{D}}|_{r=R} \cdot \vec{e}_r = 0\vec{e}_r + 0\vec{e}_\theta + 2\mu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_z = -\frac{GR}{2} \vec{e}_z$$

Le fluide au contact subit donc une contrainte retardatrice d'intensité:

$$\tau_p = \frac{GR}{2} = \frac{4\mu U_d}{R} \quad (12.34)$$

• Coefficient de frottement

En définissant la “pression dynamique” de référence²⁵ par $\frac{1}{2}\rho U_d^2$, on exprime la contrainte pariétale sous la forme adimensionnelle d’un *coefficient de frottement*:

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_d^2} = 16 \frac{\mu}{\rho D U_d} = \frac{16}{Re} \quad (12.35)$$

où Re est le nombre de Reynolds de l’écoulement construit sur le diamètre D de la conduite et la vitesse de débit.

• Force totale de frottement exercée sur une longueur L de conduite

La force visqueuse totale exercée sur une longueur L de conduite est

$$F = \int_0^{2\pi} R d\theta \int_z^{z+L} \tau_p dz = 2\pi R \tau_p L = \pi R^2 G L \quad (12.36)$$

Cette force est bien sûr orientée vers l’amont; réciproquement, la force exercée par le fluide sur la paroi tend à entraîner celle-ci dans le sens de l’écoulement: $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = F \vec{e}_z$

12.4.2 Grandeurs énergétiques

• Dissipation volumique locale

Du point de vue énergétique, on peut expliciter la dissipation volumique intrinsèque Φ_1 que nous avons identifié comme un terme puits dans l’équation d’énergie cinétique (7.27).

$$\Phi_1 = \overline{\tau:D} = 2\mu D_{ij} D_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 = \frac{16\mu U_d^2}{R^4} r^2 \quad (12.37)$$

soit, en utilisant l’expression (12.34) de la contrainte pariétale:

$$\Phi_1 = \frac{4U_d \tau_p}{R^3} r^2 \quad (12.38)$$

• Dissipation volumique totale sur une longueur L de conduite

La quantité d’énergie cinétique dissipée par le travail des contraintes visqueuses dans un volume fluide limité par deux sections droites distantes de L et la paroi solide s’écrit:

$$\overline{\Phi}_{1L} = \int_z^{z+L} dz \int_0^R \Phi_1 2\pi r dr = 2L\pi U_d R \tau_p = \frac{2L}{R} Q_v \tau_p \quad (12.39)$$

ou encore, en introduisant le coefficient de frottement à l’aide de l’expression (12.34)

$$\frac{\overline{\Phi}_{1L}}{\rho g Q_v} = 4C_f \frac{L}{D} \frac{U_d^2}{2g} \quad (12.40)$$

Dans cette dernière expression, le premier membre a la dimension d’une longueur; il représente, sous la forme d’une hauteur ΔH de fluide, la quantité d’énergie dissipée par l’action des contraintes visqueuses, et définit, dans le langage des hydrauliciens, la *perte de charge*.

²⁵ Il s’agit explicitement d’une densité volumique d’énergie cinétique. Nous verrons au chapitre 14 que cette grandeur est représentative de la pression dynamique en un point d’arrêt de l’écoulement.

Dans la pratique de l'étude des écoulements en charge, l'usage veut qu'on utilise, plutôt que le coefficient de frottement C_f , un *coefficient de pertes de charge* défini par:

$$\lambda = 4C_f \quad (12.41)$$

La perte de charge comptée sur une longueur L de conduite prend s'écrit donc sous la forme:

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U_d^2}{2g} \quad (12.42)$$

dite "formule de Darcy". Le coefficient de pertes de charge λ caractérise l'importance des pertes énergétiques par dissipation visqueuse dans une conduite rectiligne. La solution analytique que nous avons obtenue donne, en utilisant (12.35)

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (12.43)$$

12.4.3 Limites de validité

Remarque 1:

L'expression intégrale (12.42) a été établie pour une conduite cylindrique circulaire pleinement occupée par le fluide. Dans le cas de conduites non circulaires ou partiellement remplies, elle reste utilisable sous réserve de substituer D par le *diamètre hydraulique* D_h défini comme 4 fois le rapport de l'aire de la section de la conduite au périmètre mouillé:

$$D_h = 4A / \mathcal{P}$$

On définit également le rayon hydraulique comme étant la rapport de la section mouillée B (section droite du liquide) sur le périmètre mouillé \mathcal{P} (périmètre de la conduite en contact avec le liquide). $R_h = B / \mathcal{P}$

Le rayon hydraulique est le quart du diamètre hydraulique, alors que le rayon est la moitié du diamètre. Pour une section circulaire, le rayon hydraulique R_h vaut la moitié du rayon géométrique R : $R_h = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$

Remarque 2:

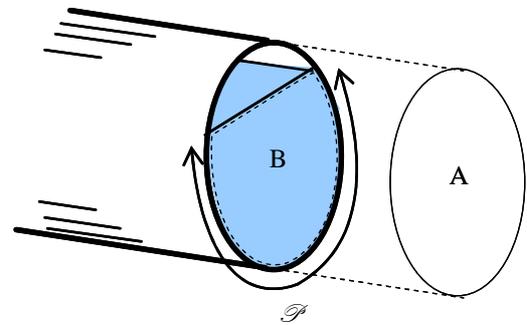
Le coefficient de frottement C_f a été déterminé en supposant implicitement que la contrainte pariétale est définie sur une paroi lisse. Dans le cas où les aspérités de paroi ont une hauteur statistique ε *significative devant le diamètre de la conduite*, il est clair que le coefficient de frottement doit en dépendre. D'une manière générale pour une conduite *rugueuse*, C_f doit dépendre, non seulement du nombre de Reynolds de l'écoulement, mais aussi du paramètre ε/D caractéristique de la rugosité pariétale. Ainsi

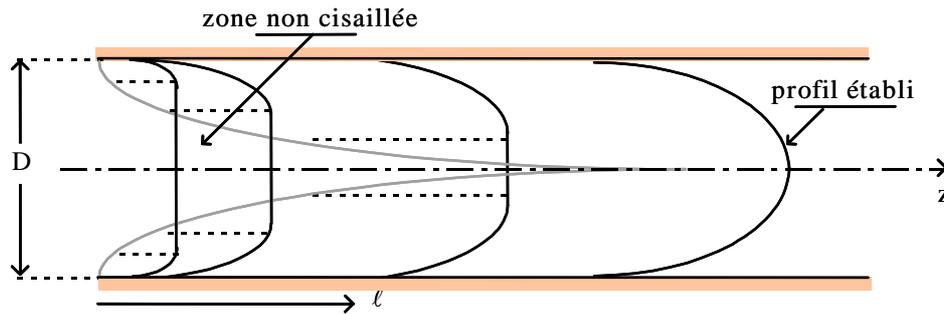
$$\lambda = f(Re, \varepsilon/D) \quad (12.45)$$

Remarque 3:

Lorsque la conduite est courte, des effets d'entrée peuvent exister. C'est certainement le cas lorsque la distance l entre la section considérée et l'entrée du conduit est faible devant le diamètre D , au point de mettre en défaut l'hypothèse d'écoulement parallèle. L'expérience montre que les effets d'entrée ne jouent plus dès que

$$\frac{l}{D} > 0,058Re \quad (12.46)$$





La zone cisailée, où les contraintes visqueuses sont actives, correspond au développement d'une couche limite annulaire qui s'élargit vers l'aval.

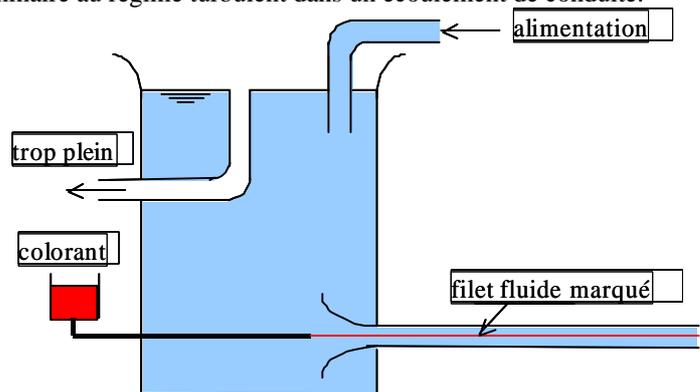
Remarque 4:

La solution analytique $\lambda = 64/Re$ est parfaitement confirmée par les mesures expérimentales en conduite lisse tant que Re est inférieur à une valeur critique. Au-delà de cette valeur, on observe que le régime laminaire par lignes fluides parallèles est instable. L'écoulement présente un aspect désorganisé caractéristique du régime turbulent et la solution analytique n'est plus valable.

12.5 Notions de turbulence

12.5.1 Généralités

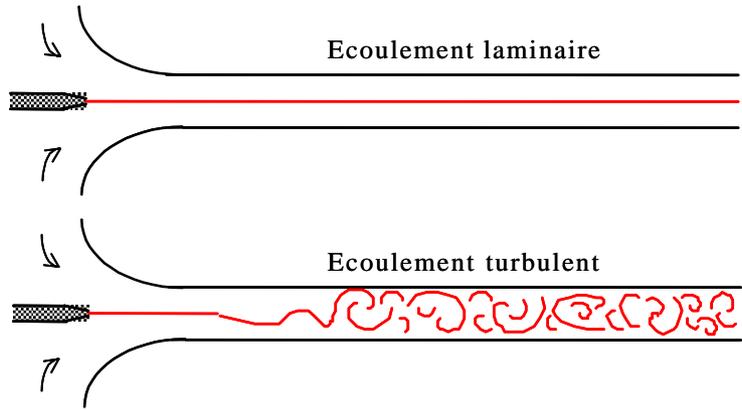
L'étude des écoulements turbulents a été initiée par les travaux d'Osborne Reynolds (1883) et portant précisément sur le critère de transition du régime laminaire au régime turbulent dans un écoulement de conduite. Son installation expérimentale est schématisée sur la figure ci-contre. Elle comporte un réservoir de liquide sous pression contrôlée débouchant sur un conduit cylindrique horizontal long. Un tube mince permet l'injection d'un colorant permettant de visualiser un filet fluide.



L'expérience montre que pour $Re < 2000-2100$ l'écoulement reste parfaitement laminaire; le filet de colorant reste mince régulier et parallèle à la paroi et une perturbation introduite dans l'écoulement s'amortit progressivement.

Lorsque Re est de l'ordre de 2100 à 3600, des "paquets" d'écoulement perturbé sont transportés dans la conduite. Ces poches sporadiques de turbulence, séparées par des poches d'écoulement laminaires, sont typiques d'un régime de transition. La mesure expérimentale du coefficient de frottement donne des résultats très dispersés.

Pour des nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement devient pleinement turbulent. Le mouvement est irrégulier et désorganisé. Une mesure fine de la composante axiale de la vitesse montre que des fluctuations aléatoires dans l'espace et dans le temps se superposent au mouvement moyen de l'écoulement. Le colorant est très rapidement dispersé.



La structure aléatoire spatio-temporelle d'un écoulement n'est pourtant pas un critère décisif pour lui conférer le caractère turbulent. Certains mouvements constitués par la superposition d'un grand nombre d'ondes ayant des vecteurs de propagation, des amplitudes et des phases différentes peuvent présenter une telle caractéristique d'apparence aléatoire, mais décomposable en modes élémentaires associés à des déplacements parfaitement définis des particules fluides. C'est le cas des mouvements aléatoires irrotationnels, c'est-à-dire des écoulements associés à un potentiel des vitesses tel que $\vec{V} = \text{grad } \Phi$.

Les écoulements turbulents sont plus spécifiquement caractérisés à un champ de vorticité aléatoire dans l'espace et le temps. On représente classiquement un tel écoulement comme la superposition de structures tourbillonnaires tridimensionnelles de dimensions très différentes, associées à un processus non linéaire de transferts d'énergie.

Pour certaines options, les écoulements turbulents font l'objet de cours spécifiques en 3ème année de la formation ingénieur. Nous nous limiterons ici à la présentation de la solution pratique apportée par les hydrauliciens pour les écoulements en charge. Celle-ci se révèle souvent très satisfaisante, quoiqu'elle laisse entière la question de savoir qu'elle est la nature exacte de la turbulence... question qui est de toute façon encore sans réponse définitive.

12.5.2 Formules empiriques pour les écoulements en conduites

Lorsque l'écoulement est bien établi, le profil de vitesse moyenne (au sens statistique) est assez bien approché par une loi en puissance de la forme:

$$V_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n} \tag{12.47}$$

l'exposant étant une fonction faible du nombre de Reynolds.

$Re = U_d D / \nu$	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	10^5	$1,1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$
n	6	6,6	7	8,8	10	10

Il faut bien comprendre que cette formulation empirique n'est pas utilisable d'un point de vue local. On remarque en effet que $\partial V_z / \partial r$ est nul à la paroi, ce qui exclut la possibilité d'en déduire la contrainte pariétale, mais par contre, ne l'est pas sur l'axe de la conduite.

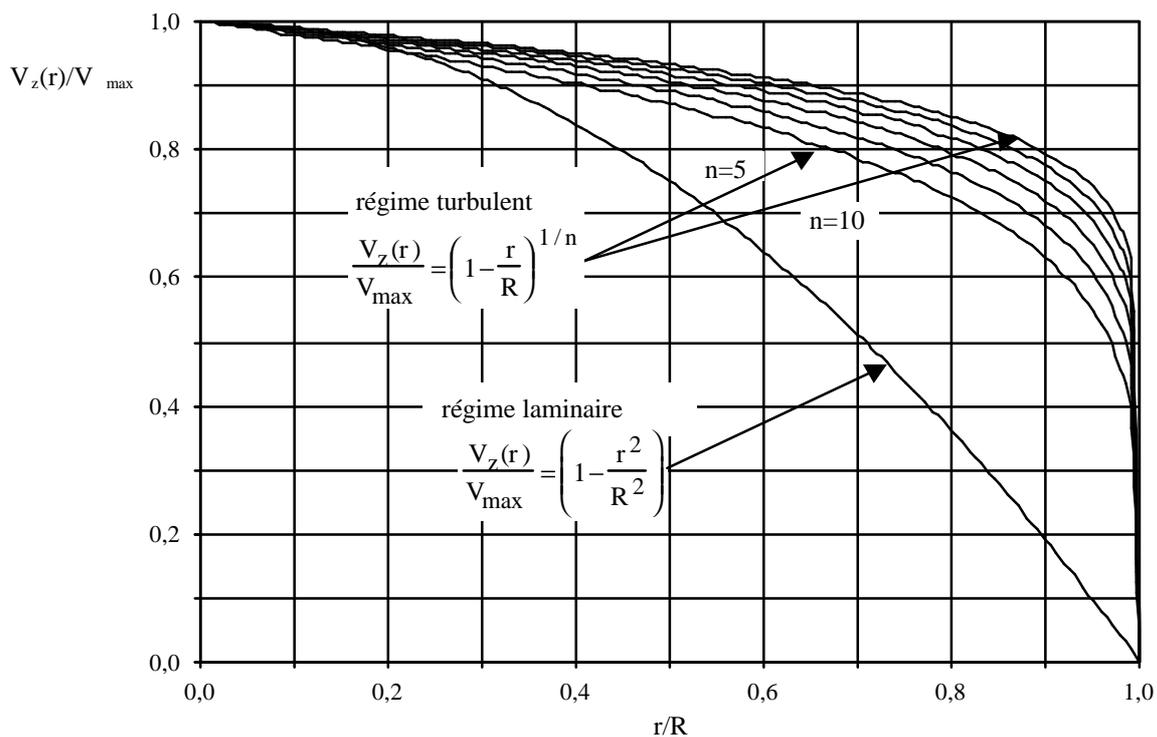
D'un point de vue global, la formule (12.47) donne cependant des résultats satisfaisants. En particulier, la vitesse de débit est assez bien approchée:

$$U_d = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} r dr \quad \mapsto \quad \frac{U_d}{V_{\max}} = \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)} \quad (12.48)$$

Pour des conduites lisses, si le nombre de Reynolds est compris entre 3400 et 10^5 , on pourra déterminer le coefficient de perte de charge à l'aide de la formule empirique directe de Blasius: $\lambda = (100\text{Re})^{-1/4}$ (12.49)

Si le nombre de Reynolds est supérieur à 10^5 , on utilisera la formule itérative de von Kármán:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left(\frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{2.51} \right) \quad (12.50)$$

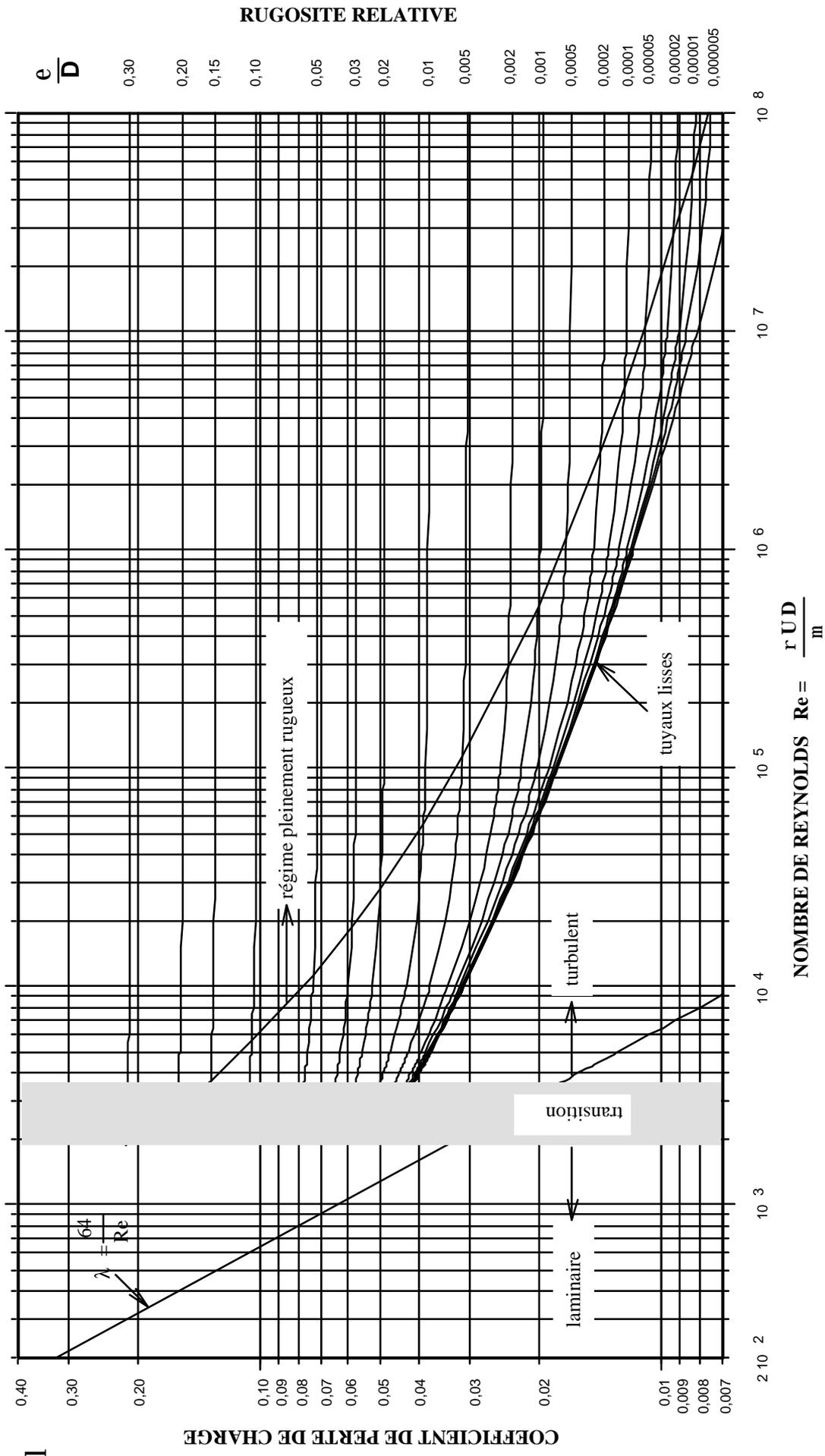


L'influence de la qualité de surface des conduites sur la dissipation d'énergie a été étudiée par Darcy puis par Nikuradse. Dans les expériences de Nikuradse, les conduites étaient rendues artificiellement rugueuses en collant des grains de sable calibrés sur les parois. Les rugosités relatives ϵ/D ainsi obtenues variaient entre 10^{-3} et $3,3 \cdot 10^{-2}$. Dans les conduites industrielles, la qualité de surface est souvent de nature différente. On utilise le plus souvent la formule de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon/D}{3,71} \right) \quad (12.51)$$

Le diagramme de la page suivante est une traduction graphique de la relation de Colebrook. Le paramètre de rugosité ε/D est donné pour chaque type de canalisation dans le tableau qui fait suite, mais les valeurs peuvent varier de façon significative. De ce fait, le coefficient λ n'est jamais déterminé à moins de 5 à 10% près. De plus, la rugosité évolue dans le temps du fait de la corrosion ou de l'encrassement²⁶ et il faut prendre cet aspect en considération lorsqu'on doit concevoir et dimensionner une installation qui doit fonctionner sur une longue période de temps.

²⁶ On trouvera dans la référence [9] des abaques donnant l'évolution de la rugosité en fonction de l'âge des conduites pour différents types de matériaux.



Coefficient de perte de charge λ en régime laminaire (solution de Poiseuille) et en régime turbulent rugueux (formule de Colebrook).

Matériaux	Valeur de ϵ (en mm)	Matériaux	Valeur de ϵ (en mm)
Acier laminé neuf	0,045	Fer galvanisé	0,15
“ “ rouillé	0,25	Fonte nue neuve	0,24
“ “ incrusté	2	“ “ rouillée	1,2
Acier riveté	1,8	Fonte asphaltée	0,12
Béton	0,12	Fonte bitumée	0,0024
Bois	0,6	Laiton poli	0,0015
Ciment lissé	0,3	Laiton industriel	0,025
Cuivre	0,0015	Verre	0,001

Valeurs de la rugosité ϵ (en mm) pour différents matériaux de revêtement intérieur des tuyaux.

Chapitre 13 Notions de bilans intégraux

13.1 Introduction

Les équations générales locales de la Mécanique des Fluides ont été établies au [chapitre 7](#) à partir d'une analyse de bilan global sur un volume de contrôle arbitraire. Nous avons souligné le caractère non linéaire et couplé de ces équations et montré les difficultés d'aboutir, sauf dans quelques cas particulièrement simples, à une solution locale exacte.

Nous allons revenir maintenant sur les formulations intégrales. Très souvent en effet, on peut se satisfaire d'une solution intégrale traduisant le bilan global des grandeurs matérielles sur un domaine fluide fini. En particulier, s'agissant des écoulements internes, il est rarement indispensable de connaître la structure fine de l'écoulement en tous points. Il est alors judicieux de considérer l'ensemble du système fluide comme une "boîte noire" et de tenter d'établir, entre les sections d'entrée et les sections de sortie, des relations globales sur les grandeurs macroscopiques (débit moyen, flux moyens de quantité de mouvement et d'énergie).

L'enveloppe du volume de contrôle est constituée par des parois solides étanches et fixes (conduites, réservoirs...) ou mobiles (tête de piston, rotor de pompe ou de turbine, pales de ventilateur ou d'hélice, machines en général) et des sections fluides constituant les entrées et sorties du système (sections droites choisies "loin de toute perturbation" dans une conduite), ou une région de repos hypothétique (la surface libre d'un réservoir de "grandes dimensions" ou l'infini dans l'atmosphère). On peut considérer les surfaces mobiles en tant que telles, mais il est souvent judicieux de les exclure artificiellement du volume de contrôle supposé fixe. On définit alors une surface fluide fictive autour des parties mobiles (voir l'exemple représenté sur le schéma de la page suivante), la machine étant alors représentée par ses effets intégraux sur cette surface.

Rappelons la forme générale de l'équation intégrale de bilan d'une grandeur matérielle de densité volumique ρf sur un volume fluide \mathcal{V} d'enveloppe (fermée !) \mathcal{S} .

$$\iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho f}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}(t)} \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{S} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}(t)} \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS$$

où $\mathbf{S}(\vec{x}, t)$ est la densité volumique de sources-puits internes pour ρf et $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$ est le flux, sur l'enveloppe \mathcal{S} , dû aux sources-puits externes.

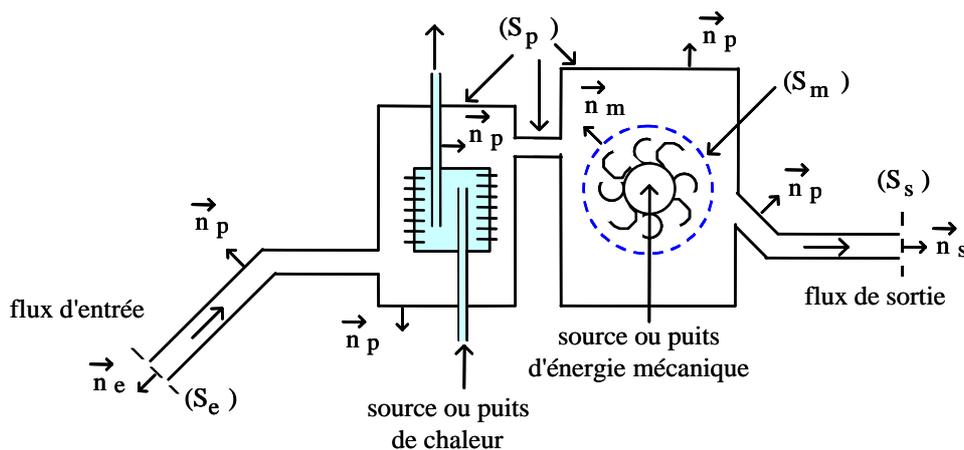
Si le volume de contrôle est fixe, et en discernant les parties de \mathcal{S} constituées de parois solides fixes (S_p) des sections de sortie (S_s) et d'entrée (S_e) du fluide et des surfaces associées à la présence de machines (S_m), $\mathcal{S} = S_p \cup S_s \cup S_e \cup S_m$, on peut écrire:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} F}_{①} + \underbrace{\iint_{S_p} \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}_p) dS}_{②} + \underbrace{\iint_{S_s} \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}_s) dS}_{③} + \underbrace{\iint_{S_e} \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}_e) dS}_{④} = \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{S} d\mathcal{V}}_{⑤} + \underbrace{\iint_{S_p \cup S_s \cup S_e} \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS}_{⑥} + \underbrace{\Phi_m}_{⑦} \quad (13.1)$$

où l'on a posé:

$$F(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho f d\mathcal{V} \quad \text{l'intégrale sur } \mathcal{V} \text{ de la densité volumique } \rho f(\vec{x}, t)$$

$$\Phi_m(t) = \iint_{S_m} (\vec{\phi} - \rho f \vec{V}) \cdot \vec{n}_m dS \quad \text{le résultat intégral de l'action des machines sur } S_m.$$



Exemple schématique d'un écoulement interne

• Remarque 1:

Le terme d'instationnarité ① est nul dans le cas d'un écoulement en régime permanent. C'est dans le cadre de cette approximation que la méthode des bilans intégraux conduit à des résultats pratiques utiles. Cette restriction soulève la question de l'applicabilité de cette méthode dans le cas des écoulements en régime turbulent, dont nous avons évoqué le caractère intrinsèquement instationnaire. On parle alors d'écoulements (éventuellement) stationnaires en moyenne si la mesure des grandeurs matérielles, faite sur un temps suffisamment long devant la période typique des fluctuations turbulentes, n'évolue pas de façon notable au cours du temps.

• **Remarque 2:**

Les termes ②, ③ et ④ correspondent au transport advectif de la quantité ρf par l'écoulement. Les parois solides fixes constituent toujours une ligne de courant puisque la condition d'étanchéité s'écrit: $\vec{V}_p \cdot \vec{n}_p = 0$. Le terme ② est donc identiquement nul.

Le choix des sections d'entrée et de sortie étant libre, on choisit de préférence des sections droites dans lesquelles les filets fluides peuvent être considérés comme étant rectilignes et parallèles. Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{V}_e \cdot \vec{n}_e &= -V_e < 0 \\ \vec{V}_s \cdot \vec{n}_s &= V_s > 0\end{aligned}$$

D'une façon générale, si f est la densité massique d'une grandeur, on définit le flux moyen de cette grandeur dans une section (S_e , par exemple) par

$$\langle \rho_e f_e V_e \rangle = \frac{1}{S_e} \iint_{S_e} \rho_e f_e |\vec{V}_e \cdot \vec{n}_e| dS \quad (13.2)$$

où l'intégrale est l'intensité du débit de cette grandeur dans la section.

On pourra donc écrire:

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} = \langle \rho_s f_s V_s \rangle S_s - \langle \rho_e f_e V_e \rangle S_e$$

qui montre que le transport advectif intégral se réduit au bilan algébrique du débit entre la section d'entrée et la section de sortie.

•

• **Remarque 3:**

Le terme ⑤ exprime l'intégrale des flux sur les parois solides mobiles ou sur les surfaces fluides (S_m) construites arbitrairement pour expulser du volume de contrôle les parois mobiles. Celles-ci sont caractéristiques de la présence éventuelle de machines ayant une action motrice ou résistante sur le système fluide considéré. Le terme intégral Φ_m est en général déterminé à partir des caractéristiques globales de la machine (puissance électrique associée à un rendement...)

• **Remarque 4:**

Les deux termes ⑤ représentent les productions ou destructions volumiques et surfaciques et dépendent bien sûr de la grandeur f considérée. Nous allons expliciter successivement les bilans intégraux de masse, d'énergie ([chapitre 14](#)) et de quantité de mouvement ([chapitre 15](#)).

13.2 Bilan intégral de masse

Nous partons de l'expression intégrale de l'équation de conservation de la masse dans un volume \mathcal{V} . En notant M la masse totale du volume fluide de contrôle, on a

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

soit, pour un volume indépendant du temps:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}}_{\dot{M}} + \iint_{S_p \cup S_s \cup S_e \cup S_m} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{13.3}$$

Le flux de masse au travers des surfaces fluides (S_m) est intégralement nul (parce qu'elles sont choisies comme telles). Par ailleurs, la condition d'étanchéité des parois solides²⁷ impose $\vec{V}_p \cdot \vec{n}_p = 0$. Ainsi:

$$\dot{M} + \iint_{S_s} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_s dS + \iint_{S_e} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_e dS = 0$$

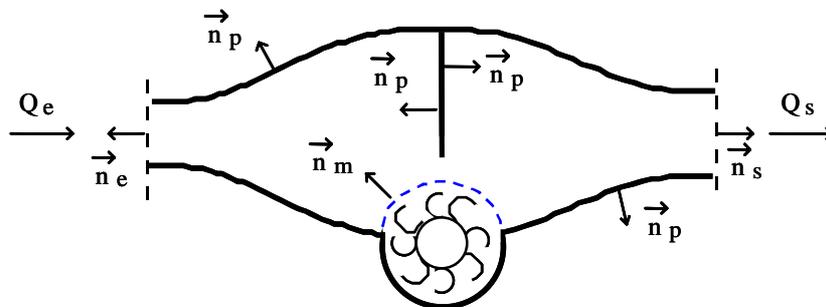
D'après la définition générale (13.2), le flux moyen de masse ($\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$) dans une section (S_e par exemple) est:

$$\langle \rho_e V_e \rangle = \frac{1}{S_e} \iint_{S_e} \rho_e |\vec{V}_e \cdot \vec{n}_e| dS \tag{13.4}$$

où l'intégrale définit le débit masse Q (kg/s) dans la section.

On écrira donc:

$$\boxed{\dot{M} + Q_s - Q_e = 0} \quad \text{avec} \quad Q = \langle \rho V \rangle S \tag{13.5}$$



²⁷ Plus généralement, cette condition d'étanchéité est applicable sur tout ou partie d'un tube de courant.

Cas stationnaire:

$$\boxed{Q_s = Q_e = \text{cste}} \quad (13.6)$$

Le débit masse est conservé entre la section d'entrée et la section de sortie; de manière plus générale, *dans un écoulement stationnaire, le débit masse se conserve dans un tube de courant.*

Si, en outre, le fluide est isovolume, c'est le *débit volume* Q_v qui se conserve:

$$Q = \rho_o U_d S = \text{cste} \quad \mapsto \quad \boxed{Q_v = U_d S = \text{cste}} \quad (13.7)$$

où

$$U_d \equiv \langle V \rangle = \frac{1}{S} \iint_S |\vec{V} \cdot \vec{n}| dS \quad \text{est la vitesse de débit.} \quad (13.8)$$

On voit donc que le débit moyen peut être mesuré en n'importe quelle section d'un système fluide à entrée-sortie. On peut, selon les installations, procéder par pesée de la masse de fluide écoulée pendant un intervalle de temps connu, utiliser un débitmètre constitué d'une roue à aube et d'un compte-tours étalonné (système des pompes à carburant). Nous verrons qu'on peut aussi mesurer un débit de liquide dans une conduite à l'aide d'un Venturi, d'un diaphragme calibré ou d'un rotamètre.

Chapitre 14 Bilans d'énergie cinétique

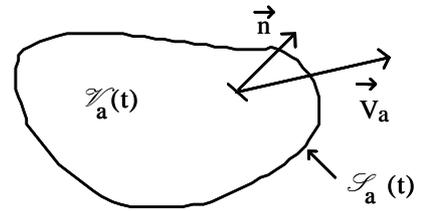
14.1 Formulation générale

14.1.1 Bilan macroscopique sur un volume arbitraire

Nous partons de la formulation locale (7.27) du théorème de l'énergie cinétique, dans laquelle la dérivée particulière est exprimée à l'aide de l'expression (5.24), soit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \vec{V} \right) = \rho \vec{V} \cdot \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V} - \operatorname{div} P \vec{V} + P \operatorname{div} \vec{V} - \bar{\bar{\tau}} : \bar{\bar{D}}$$

Intégrons cette équation sur un volume fluide arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ dont l'enveloppe $\mathcal{S}_a(t)$, de normale extérieure \vec{n} , se déplace à la vitesse \vec{V}_a (figure).



$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) d\mathcal{V}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{2}} =$$

$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \rho \vec{V} \cdot \vec{f} d\mathcal{V}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} P \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{5}} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} P \operatorname{div} \vec{V} d\mathcal{V}}_{\textcircled{6}} - \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \bar{\bar{\tau}} : \bar{\bar{D}} d\mathcal{V}}_{\textcircled{7}} \quad (14.1)$$

Examinons chacun des termes tour à tour.

- **termes ① et ②**: On peut exprimer le terme ① à l'aide du théorème de transport (5.1):

$$\dot{K} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS$$

où \dot{K} est le taux de variation de l'énergie cinétique dans le domaine \mathcal{V}_a . Ce terme n'est nul identiquement en régime stationnaire que si le domaine d'intégration \mathcal{V}_a est figé ($\vec{V}_a = \vec{0}$).

On écrira donc:

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) d\mathcal{V}}_{\dot{K} \text{ taux de variation de l'énergie cinétique dans } \mathcal{V}_a} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} \frac{1}{2} \rho V^2 (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux d'énergie cinétique à travers l'enveloppe } \mathcal{S}_a}$$

• **terme** $\textcircled{3}$: Ce terme représente la puissance des forces de volume. Dans le cas où elles se réduisent à la seule force de pesanteur ($\vec{f} = \vec{g}$), on peut introduire le potentiel de pesanteur $-gz$ où z est l'élévation:

$$\rho \vec{V} \cdot \vec{g} = -\rho \vec{V} \cdot \text{grad}(gz) = -\text{div}(\rho g z \vec{V}) + g z \text{div}(\rho \vec{V})$$

et, en utilisant l'équation de continuité ($\text{div} \rho \vec{V} = -\partial \rho / \partial t$):

$$\rho \vec{V} \cdot \vec{g} = -\text{div}(\rho g z \vec{V}) - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t}$$

Écrivons l'intégrale sur $\mathcal{V}_a(t)$:

$$\textcircled{3} = - \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \rho g z \vec{V} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho g z) d\mathcal{V}$$

et exprimons le dernier terme à l'aide du théorème de transport (5.1), soit

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} (\rho g z) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho g z) d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}_a(t)} (\rho g z) (\vec{V}_a \cdot \vec{n}) dS$$

On obtient:

$$\textcircled{3} = - \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_a(t)} (\rho g z) d\mathcal{V}}_{\dot{\pi} \text{ taux de variation de l'énergie potentielle dans } \mathcal{V}_a} - \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} \rho g z (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux d'énergie potentielle à travers l'enveloppe } \mathcal{S}_a}$$

• **terme** $\textcircled{4}$: Ce terme traduit la puissance des contraintes visqueuses $\vec{\tau} = \vec{\tau} \cdot \vec{n}$ sur l'enveloppe \mathcal{S}_a

$$\textcircled{4} = \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \vec{\tau} \cdot \vec{V} dS$$

• **terme** $\textcircled{5}$: Puissance des forces de pression sur l'enveloppe \mathcal{S}_a .

• **terme** $\textcircled{6}$: Puissance de compression/détente des forces de pression dans le volume, noté \mathcal{E} .

• **terme** $\textcircled{7}$: Taux intégral de dissipation irréversible d'énergie, noté $\overline{\Phi_1}$, due au travail des contraintes visqueuses dans le volume;

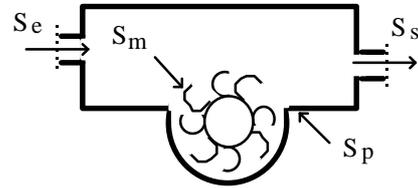
Récapitulons:

$$\dot{K} + \dot{\pi} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z \right) (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} P \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_a(t)} \vec{\tau} \cdot \vec{V} dS}_{\textcircled{3}} + \mathcal{E} - \overline{\Phi_1} \quad (14.2)$$

14.1.2 Formulation pour les écoulements internes

Nous allons considérer maintenant un système fluide dont la surface de contrôle comporte :

- des surfaces d'entrée (S_e) et de sortie (S_s),
- des surfaces solides étanches et fixes (S_p),
- des surfaces solides mobiles (S_m) d'éventuelles machines.



Explicitons les trois intégrales de surface de (14.2) dans cette configuration typique des écoulements internes.

$$\text{sur les surfaces d'entrée } (S_e) \text{ et de sortie } (S_s): \quad \vec{V}_a = \vec{0},$$

$$\text{sur les surfaces solides fixes } (S_p): \quad \vec{V} = \vec{V}_a = \vec{0}$$

$$\text{sur les surfaces solides mobiles } (S_m): \quad \vec{V} = \vec{V}_a$$

$$\bullet \text{ terme ①:} \quad \textcircled{1} = \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z \right) (\vec{V} - \vec{V}_a) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_e \cup S_s} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z \right) \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\bullet \text{ terme ②:} \quad \textcircled{2} = \iint_{\mathcal{S}_a(t)} P \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_e \cup S_s} P \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_m} P \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

• terme ③:

Dans la plupart des cas pratiques, on choisit des sections droites (S_e) et (S_s) de façon que la vitesse soit parallèle à la direction \vec{n} . Par conséquent (si le nombre de Reynolds n'est pas trop faible) la puissance des contraintes exercées sur ces sections est essentiellement celle des forces de pression (le terme ②). On peut donc négliger la puissance des contraintes visqueuses dans ces sections:

$$\textcircled{3} = \iint_{\mathcal{S}_a(t)} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dS = \underbrace{\iint_{S_e \cup S_s} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dS}_{\text{négligeable}} + \iint_{S_m} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dS \approx \iint_{S_m} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, dS$$

Introduisons ces résultats dans le bilan intégral (14.2); il vient:

$$\dot{K} + \dot{\pi} + \iint_{S_e \cup S_s} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho g z \right) \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \underbrace{\iint_{S_m} (-P \cdot \vec{n} + \vec{\tau}) \cdot \vec{V} \, dS}_{\mathcal{F}_m} + \mathcal{F}_c - \overline{\Phi}_1 \quad (14.3)$$

ou encore, en utilisant la notation (13.2) des grandeurs moyennes dans les sections d'entrée et sortie:

$$\underbrace{\dot{K} + \dot{\pi}}_{\substack{\text{taux de variation de} \\ \text{l'énergie cinétique} \\ \text{et potentielle dans} \\ \text{le volume}}} + \underbrace{\left[\langle \frac{1}{2} \rho V^3 \rangle S + \langle (P + \rho g z) V \rangle S \right]_c^e}_{\substack{\text{différence des flux moyens} \\ \text{d'énergie mécanique entre} \\ \text{la sortie et l'entrée}}} = \underbrace{\mathcal{F}_m}_{\substack{\text{puissance fournie} \\ \text{ou consommée} \\ \text{par les machines}}} + \underbrace{\mathcal{F}_c}_{\substack{\text{puissance reçue} \\ \text{par détente} \\ \text{ou perdue} \\ \text{par compression}}} - \underbrace{\overline{\Phi}_1}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{dissipée dans} \\ \text{le volume}}} \quad (14.4)$$

Nous allons encore réduire l'écriture du bilan en considérant le cas plus restreint des écoulements stationnaires de fluides isovolumes.

14.2 Relation de Bernoulli pour les fluides visqueux

14.2.1 Établissement de la relation intégrale

Dans le cas d'un écoulement stationnaire de fluide visqueux isovolume ($\rho = \text{constante}$), le bilan intégral d'énergie cinétique dans un domaine fixe ($\vec{V}_a = \vec{0}$) se réduit à

$$\left[\frac{1}{2} \rho \langle V^3 \rangle S + \langle P^* V \rangle S \right]_e = \mathcal{E}_m - \overline{\Phi}_1 \quad (14.5)$$

où nous avons utilisé la notation de *pression étoilée* $P^* = P + \rho g z$.

Si P^* est constant dans les sections d'entrée et de sortie, cette dernière expression prend le nom de *relation de Bernoulli "généralisée"*. Nous allons voir que cette approximation est bien justifiée dans ces sections si le nombre de Reynolds de l'écoulement n'est pas trop faible.

• Relation entre la pression étoilée et la courbure d'une ligne de courant

Si on peut négliger localement les effets visqueux l'équation locale de quantité de mouvement se réduit à:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad } P^* \quad (14.6)$$

Nous allons projeter cette relation sur les axes du repère local orthonormé $(\vec{\ell}, \vec{n})$ tel que $\vec{\ell}$ est tangent à la ligne de courant et \vec{n} orienté vers le centre de courbure local dans le plan osculateur (schéma). Dans ce repère $\vec{V} = V \vec{\ell}$ et le terme d'accélération s'écrit:

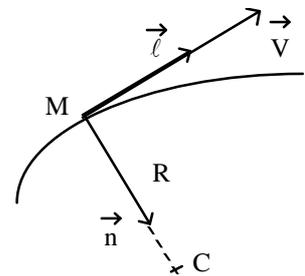
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{\ell} + V \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{\ell} + \frac{V^2}{R} \vec{n}$$

où R est le rayon de courbure local. La projection de l'équation (14.6) dans la direction \vec{n} est:

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = -\rho \frac{V^2}{R} \quad (14.7)$$

Remarquons que, dans le cas d'un fluide visqueux, les forces de frottement sont essentiellement liées au cisaillement local et donc pratiquement normales à \vec{n} . L'équation (14.7) reste donc encore une excellente approximation.

Ainsi, dans la direction normale aux lignes de courant la pression étoilée varie comme l'inverse du rayon de courbure local, les basses pressions étant vers le centre de courbure. Cette remarque justifie de choisir, pour l'étude intégrale d'un écoulement interne, des sections d'entrée et de sortie telles que les filets fluides soient rectilignes et parallèles. **La pression étoilée est alors constante dans ces sections.** C'est le cas dans les conduites rectilignes assez loin de toute perturbation (coudes, vannes, bifurcations...).



• **Coefficient d'énergie cinétique α**

Il est d'usage de définir le coefficient cinétique

$$\alpha = \frac{\langle V^3 \rangle}{\langle V \rangle^3}, \text{ soit avec notre notation de la vitesse de débit} \quad \alpha = \frac{\iint V^3 dS}{S U_d^3} \quad (14.8)$$

On pourra vérifier, à l'aide des résultats obtenus au [chapitre 12](#) pour les écoulements en conduites, qu'en régime laminaire (profil de vitesse parabolique) $\alpha = 2$. En régime turbulent, le profil en loi de puissance $V_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$ conduit à $\alpha = \frac{(1+n)^3 (1+2n)^3}{4n^4 (3+n)(3+2n)}$.

Re = $U_d D / \nu$	4 10 ³	2,3 10 ⁴	10 ⁵	1,1 10 ⁶	2 10 ⁶	3,2 10 ⁶
n	6	6.6	7	8.8	10	10
α	1,08	1,06	1,06	1,04	1,03	1,03

On voit que, pour la plupart des applications industrielles, il est légitime d'approximer $\alpha \sim 1$ si le régime d'écoulement est turbulent.

Finalement, *sous réserve d'un choix judicieux des sections d'entrée et sortie*, on pourra écrire la relation de bilan d'énergie pour un écoulement interne stationnaire de fluide isovolume sous la forme:

$$\left[\left(\frac{\alpha}{2} \rho U_d^2 + P + \rho g z \right) U_d S \right]_e^s = \mathcal{S}_m - \overline{\Phi}_1 \quad (14.9)$$

• **Notion de charge**

En divisant par le débit masse $Q = Q_e = Q_s = \rho U_d S$ et par g , on obtient:

$$\left[\alpha \frac{U_d^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right]_e^s = \frac{\mathcal{S}_m}{gQ} - \frac{\overline{\Phi}_1}{gQ} \quad (14.10)$$

où chaque terme à la dimension d'une longueur:

la hauteur dynamique	}	La somme de ces trois hauteurs est appelée la charge technique.
la hauteur piézométrique		
la hauteur géométrique ou élévation		
la charge de la machine	}	> 0 pour une machine motrice (pompe, ventilateur) < 0 pour une machine résistante (turbine, éolienne)
la perte de charge		
		toujours positive.

On distingue les pertes de charge qui interviennent dans les parties du volume de contrôle constituées de segments linéaires de conduites de celles qui se produisent dans des régions où les filets fluides ne sont pas

parallèles (coudes, élargissements, rétrécissements, bifurcations, vannes, diaphragmes, crépines... toute singularité géométrique de l'écoulement autre que celles qui correspondent aux machines). Les premières sont appelées, notées ΔH_r , "*pertes de charge régulières*", les secondes, notées ΔH_s , sont appelées "*pertes de charge singulières*".

La variation globale de la charge technique dans le volume de contrôle est donc égale à la somme algébrique des charges fournies ou consommées par les machines diminuée de la somme des pertes régulières et des pertes singulières:

$$\left(\alpha \frac{U_d^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right)_s - \left(\alpha \frac{U_d^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right)_e = \sum \Delta H_m - \sum \Delta H_r - \sum \Delta H_s \quad (14.11)$$

a) La charge des machines ΔH_m $\Delta H_m = \frac{\mathcal{P}_m}{gQ}$ (14.12)

La puissance \mathcal{P}_m de la (ou des) machine(s) est, le plus souvent, la grandeur à déterminer sur la base d'un débit imposé par les exigences de service d'une installation.

b) Les pertes de charge régulières ΔH_r

Il s'agit des dissipations "en ligne". Rappelons-en l'expression (12.42), connue sous le nom de *formule de Darcy*, établie à la fin du [chapitre 12](#):

$$\Delta H_r = \lambda \frac{L}{D} \frac{U_d^2}{2g} \quad (14.13)$$

où λ est le *coefficient de pertes de charge régulières*.

c) Les pertes de charge singulières ΔH_s

L'expression (14.13) n'est plus utilisable puisque la longueur L et le diamètre D ne sont plus définis. On peut cependant utiliser une expression analogue en définissant un *coefficient de pertes singulières* ξ , la perte de charge singulière étant exprimée comme une fraction de la hauteur dynamique de référence²⁸:

$$\Delta H_s = \xi \frac{U_d^2}{2g} \quad (14.14)$$

Le coefficient ξ est une caractéristique de la singularité. Sa valeur numérique peut parfois être calculée analytiquement, mais le plus souvent, elle est déterminée expérimentalement. On trouvera dans la référence [8] les valeurs de ce coefficient pour la plupart des géométries simples et des éléments normalisés de la plomberie industrielle.

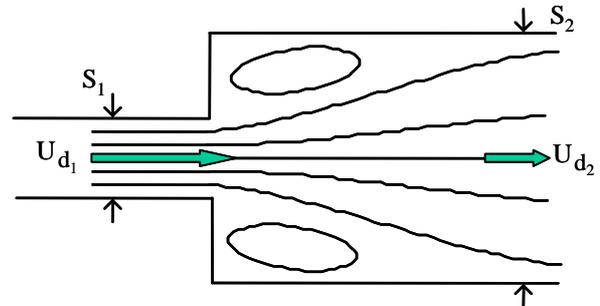
Nous donnons ci-dessous les valeurs du coefficient ξ pour quelques éléments typiques.

²⁸ En cas d'ambiguïté, la hauteur dynamique de référence est conventionnellement exprimée (sauf mention contraire précisée par le fabricant) à l'aide de la vitesse de débit prise *en aval de la singularité*.

• **Élargissement brusque:** Un calcul simple basé sur le bilan de quantité de mouvement (voir §15.2.2) permet d'obtenir l'expression (15.16) de la perte de charge. En régime turbulent, celle-ci se réduit à la relation (15.17) dite *relation de Borda*²⁹:

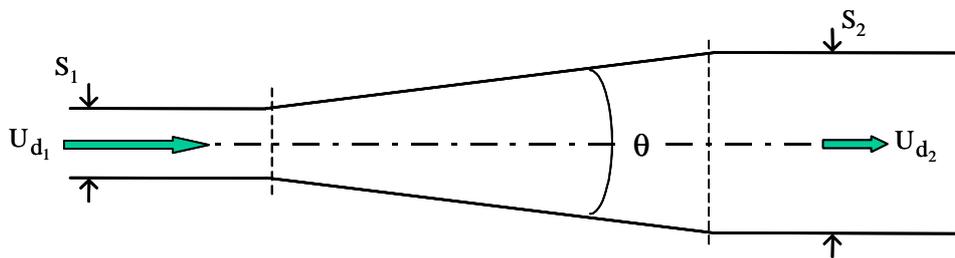
$$\Delta H = \underbrace{\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2}_{\xi} \frac{U_{d_1}^2}{2g} \quad (14.15)$$

Lorsque $S_2 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque la conduite de section S_1 débouche dans un réservoir de grandes dimensions, le coefficient de perte de charge tend vers le coefficient cinétique α_1 (voir §15.2.2). Cette perte de charge correspond à la dissipation de toute l'énergie cinétique du fluide par les contraintes visqueuses.



• **Diffuseurs:** Si l'élargissement est graduel, l'élément est appelé *diffuseur* et la perte de charge associée peut se mettre sous la forme:

$$\Delta H = k \underbrace{\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2}_{\xi} \frac{U_{d_1}^2}{2g} \quad (14.16)$$



Le coefficient k augmente avec θ selon le tableau ci-dessous. Au-delà d'une certaine valeur de θ , le fluide ne suit plus la paroi, il se produit un décollement et l'on est ramené au cas de l'élargissement brusque. L'angle θ le plus favorable, réalisant une perte de charge minimale, est compris entre 6° et 8° pour S_1/S_2 compris entre $1/10$ et $2/3$. Pour $\theta = 8^\circ$, la longueur de cône produisant la perte minimale est de l'ordre de 7 fois la différence des diamètres.

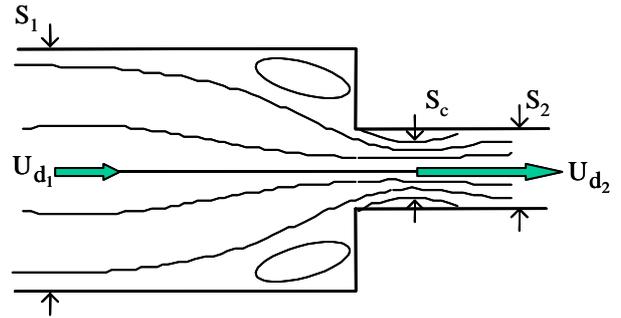
angle θ	5°	6°	7°	8°	10°	16°	18°	20°	30°	40°
k	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9

²⁹

Barré de Saint-Venant, interprétant les expériences de Borda, propose de corriger la relation de Borda en augmentant le coefficient de perte de charge de la quantité $\left(\frac{1}{3} \frac{S_1}{S_2}\right)^2$ de façon à compenser les approximations qui conduisent à la relation théorique (14.15). La perte de charge corrigée est donc: $\Delta H = \left[\left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 + \frac{1}{9} \right] \frac{U_{d_1}^2}{2g}$

• **Rétrécissement brusque:**

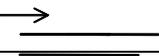
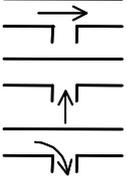
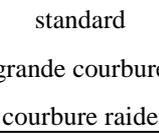
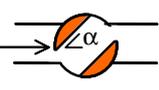
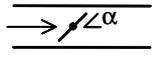
Dans ce cas, un décollement se produit sur l'arête annulaire. Les pertes de charge sont surtout associées dans ce cas à l'écoulement en aval de la contraction. Si S_c désigne l'aire de la section contractée, la perte de charge est exprimée par la relation:



$$\Delta H = \underbrace{\left[\left(\frac{S_2}{S_c} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right]}_{\xi} \frac{U_{d_2}^2}{2g} \tag{14.17}$$

Pour une réduction circulaire à bord franc, on prend généralement un coefficient de contraction $C_c = S_c/S_2 \sim 0,62$, ce qui conduit à un coefficient de perte de charge $\xi \sim 0,5$. Pour une réduction profilée: $\xi \sim 0,04$.

• **Éléments divers (Re > 10⁵):**

Type d'élément	X	
Diaphragme 	$\left(1 + 0,707 \sqrt{1 - \frac{s}{S}} \right)^2 \left(\frac{s}{S} \right)^2$	
Raccord 	0,04	
T standard 	0,1 à 0,4	
	1,5	
	1,3	
Coude normalisé 90° 	standard grande courbure	0,75 à 0,9 0,45
	courbure raide	1,3
	Retour 180° faible courbure	1,5
Vanne à boisseau 	α	ξ
	5°	0,05
	10°	0,31
	15°	0,88
	20°	1,84
	30°	6,15
Vanne papillon 	α	ξ
	5°	0,24
	10°	0,52
	15°	0,90
	20°	1,54
	30°	3,91
	45°	18,0

14.2.2 Exemple et interprétation graphique

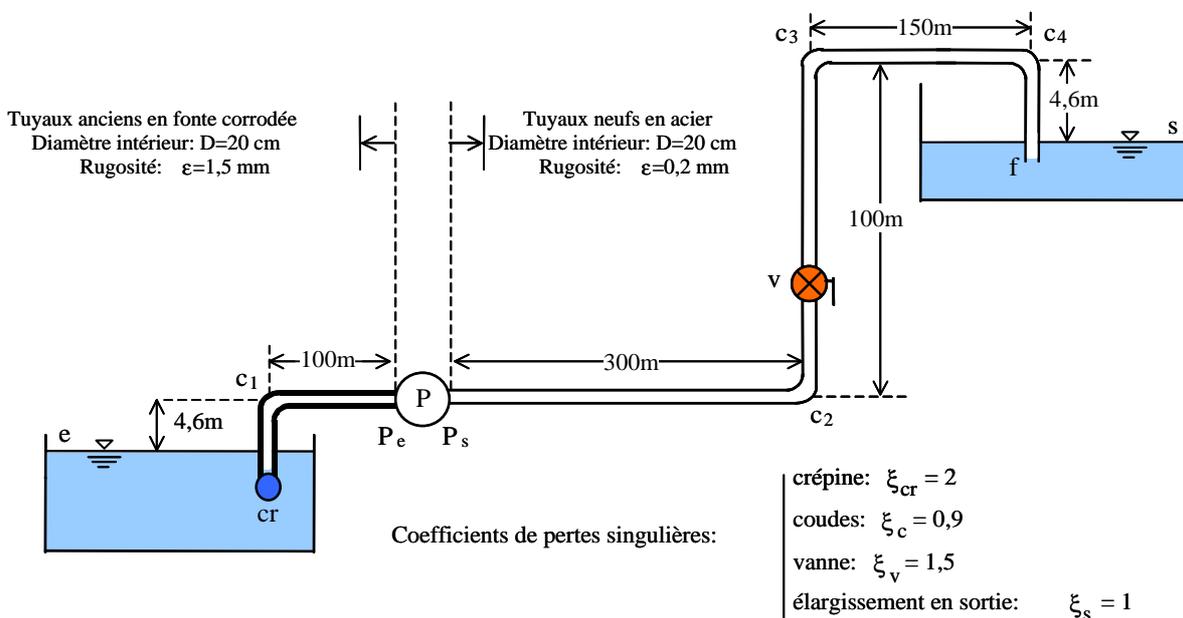
Examinons le problème de la détermination de la puissance d'une pompe P à installer sur un circuit de façon à assurer un débit d'eau $Q_v = 250 \text{ m}^3/\text{heure}$ sur un dénivelé $\Delta z = 100 \text{ m}$. Le circuit est constitué d'une crépine d'aspiration, de deux qualités de conduites, de quatre coudes identiques et d'une vanne (voir la figure). Les rugosités absolues (mm) et les coefficients de pertes singulières ont été obtenus par consultation des ouvrages techniques (références [8] et [9]).

Nous allons utiliser la relation intégrale (14.11), mais, avant toute chose, il convient de définir le volume de contrôle. Aux extrémités du conduit les pressions ne sont pas connues et le coefficient cinétique α est difficile à estimer. Il est plus judicieux de considérer comme sections d'entrée et sortie les deux surfaces libres des bassins: la pression y est constante et, compte tenu de leurs dimensions, les vitesses de débit peuvent être négligées.

$$P_e = P_s \quad U_{d_e} \sim 0 \quad U_{d_s} \sim 0$$

La relation de Bernoulli se réduit donc à:

$$z_s - z_e = \Delta H_{\text{pompe}} - \sum \Delta H_f - \sum \Delta H_s \quad (14.18)$$



• Vitesse de débit et nombre de Reynolds:

$$U_d = \frac{Q_v}{\pi D^2 / 4} = \frac{250 / 3600}{\pi (0,2)^2 / 4} = 2,21 \text{ m.s}^{-1} \quad \rightarrow \quad Re = \frac{\rho U_d D}{\mu} = \frac{(10^3) (2,21) (0,2)}{10^{-3}} \approx 4,4210^5$$

L'écoulement est pleinement turbulent

• **Pertes de charge régulières:**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_2}{D} = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 10^{-3} \\ \text{Re} = 4,42 \cdot 10^5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Colebrook} \\ \mapsto \lambda_2 \approx 0,020 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_1}{D} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 7,5 \cdot 10^{-3} \\ \text{Re} = 4,42 \cdot 10^5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Colebrook} \\ \mapsto \lambda_1 \approx 0,035 \end{array}$$

$$\mapsto \sum \Delta H_f = \sum \lambda \frac{L}{D} \frac{U_d^2}{2g} = 0,035 \underbrace{\frac{100+4,6}{0,2} \frac{(2,21)^2}{2(9,81)}}_{\Delta H_1 = 4,56 \text{ m}} + 0,02 \underbrace{\frac{300+100+150+4,6}{0,2} \frac{(2,21)^2}{2(9,81)}}_{\Delta H_2 = 13,81 \text{ m}} = 18,37 \text{ mètres d'eau}$$

• **Pertes de charge singulières:**

$$\sum \Delta H_s = \sum \xi \frac{U_d^2}{2g} = (2+4 \times 0,9+1,5+1) \frac{(2,21)^2}{2(9,81)} = 2,02 \text{ mètres d'eau}$$

• **Charge de la pompe:**

$$\Delta H_{\text{pompe}} = z_s - z_e + \sum \Delta H_f + \sum \Delta H_s = 100 + 18,37 + 2,02 = 120,39 \text{ mètres d'eau}$$

La pompe doit donc développer une pression

$$\Delta P_{\text{pompe}} = \rho g \Delta H_{\text{pompe}} = 10^3 \times 9,81 \times 120,39 = 1,18110^6 \text{ Pa} = 11,81 \text{ bars}$$

et donc une puissance

$$P_m = \rho g \Delta H_{\text{pompe}} Q_v = \Delta P_{\text{pompe}} Q_v = 1,18110^6 \times (250/3600) = 8,20 \cdot 10^4 \text{ W}$$

La pompe devra donc délivrer une puissance hydraulique d'au moins 82 kW pour assurer le débit exigé. Compte tenu de son rendement ($\eta \sim 0,9$), on choisira une pompe dont la puissance électrique est supérieure à 91 kW.

• **Tracé de la ligne de charge de l'installation:**

Le tracé de la charge technique le long du circuit développé permet de visualiser l'importance des pertes de charge. On choisit en général l'origine des hauteurs géométriques à la cote de la section d'entrée du système fluide.

La charge technique est définie par: $H = \alpha \frac{U_d^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z$ (en mètres de fluide).

$$H_e = z_e = 0 \text{ (en prenant comme référence de pression } P_e = P_s = P_{\text{atm}} = 0)$$

$$H_{\text{sortie du coude 1}} = H_e - \left(\xi_{cr} + \lambda_1 \frac{L}{D} + \xi_c \right) \frac{U_d^2}{2g} = 0 - \left(2 + 0,035 \frac{4,6}{0,2} + 0,9 \right) \frac{(2,21)^2}{2 \times 9,81} = -0,92 \text{ mètres}$$

$$H_{\text{entrée pompe}} = H_{\text{sortie coude 1}} - \lambda_1 \frac{L}{D} \frac{U_d^2}{2g} = -0,92 - 0,035 \frac{100 (2,21)^2}{0,2 \cdot 2 \times 9,81} = -5,28 \text{ mètres}$$

$$H_{\text{sortie pompe}} = H_{\text{entrée pompe}} + \Delta H_{\text{pompe}} = -5,28 + 120,39 = 115,11 \text{ mètres}$$

$$H_{\text{sortiecoude2}} = H_{\text{sortiepompe}} - \left(\lambda_2 \frac{L}{D} + \xi_c \right) \frac{U_d^2}{2g} = 115,11 - \left(0,02 \frac{300}{0,2} + 0,9 \right) \frac{(2,21)^2}{2 \times 9,81} = 107,41 \text{ mètres}$$

$$H_{\text{sortiecoude3}} = H_{\text{sortiecoude2}} - \left(\lambda_2 \frac{L}{D} + \xi_v + \xi_c \right) \frac{U_d^2}{2g} = 107,41 - \left(0,02 \frac{100}{0,2} + 1,5 + 0,9 \right) \frac{2,21^2}{2 \times 9,81} = 104,32 \text{ mètres}$$

$$H_{\text{sortiecoude4}} = H_{\text{sortiecoude3}} - \left(\lambda_2 \frac{L}{D} + \xi_c \right) \frac{U_d^2}{2g} = 104,32 - \left(0,02 \frac{150}{0,2} + 0,9 \right) \frac{(2,21)^2}{2 \times 9,81} = 100,36 \text{ mètres}$$

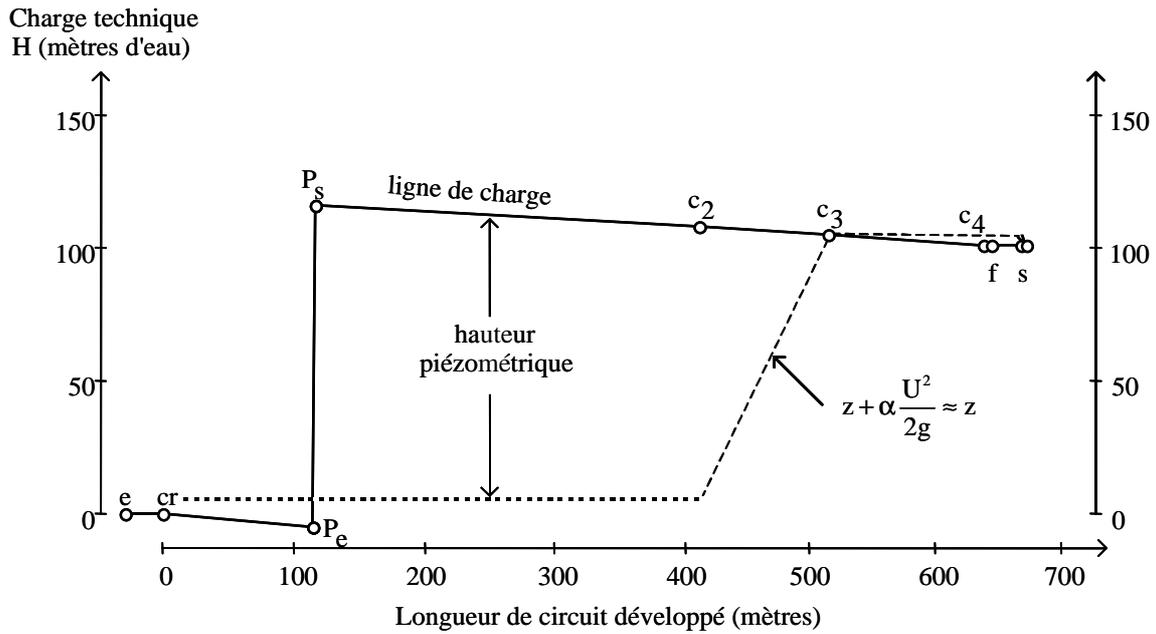
$$H_s = H_{\text{sortiecoude4}} - \left(\lambda_2 \frac{L}{D} + \xi_s \right) \frac{U_d^2}{2g} = 100,36 - \left(0,02 \frac{4,6}{0,2} + 1 \right) \frac{(2,21)^2}{2 \times 9,81} = 100,00 \text{ mètres} = z_s$$

Les résultats numériques sont regroupés dans le tableau ci-dessous. La hauteur piézométrique est déterminée par différence entre la charge technique d'une part et les hauteurs dynamiques et géométriques d'autre part.

En fait, l'installation ne peut pas fonctionner correctement. On observe en effet que la pression absolue à l'entrée de la pompe équivaut à une hauteur de 0,20 m d'eau, soit une pression inférieure à la pression de vapeur saturante (0,33 m d'eau). Le phénomène de cavitation résultant conduirait à un dysfonctionnement de l'installation.

	$\alpha \frac{U_d^2}{2g}$ (m)	$\frac{P}{\rho g}$ (m)	z (m)	H (m)	$\frac{P_{\text{abs}}}{\rho g}$ (m)
Surface e	0,00	0,00	0	0,00	10,33
Crépine cr	0,25	-0,25	0	0,00	10,08
Sortie coude c ₁	0,25	-5,77	4,6	-0,92	4,56
Entrée pompe	0,25	-10,13	4,6	-5,28	0,20
Sortie pompe	0,25	110,26	4,6	115,11	120,59
Sortie coude c ₂	0,25	102,56	4,6	107,41	112,89
Sortie coude c ₃	0,25	-0,53	104,6	104,32	9,80
Sortie coude c ₄	0,25	-4,49	104,6	100,36	5,84
Extrémité f	0,25	0,00	100	100,25	10,33
Surface s	0,00	0,00	100	100,00	10,33

Les résultats sont représentés graphiquement sur la figure ci-dessous. Les pentes de la ligne de charge permettent d'appréhender l'importance des pertes et de les localiser.



14.3 Relation de Bernoulli pour les fluides parfaits

14.3.1 La formulation locale pour un fluide isovolume

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide non visqueux, la relation intégrale (14.9) établie au § 14.2.1 prend une forme locale particulièrement simple. Nous allons l'établir en partant de l'équation locale de quantité de mouvement (7.18):

$$\underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\vec{f}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \text{grad} P}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \text{div} \tau}_{\textcircled{4}}$$

① Le terme d'accélération est exprimé sous la forme de Lamb (3.14):

$$\textcircled{1} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} V^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V}$$

② Les forces de volume dérivent d'un potentiel Φ . Pour la seule force de pesanteur, en notant \vec{k} le vecteur unitaire vertical ascendant et z l'élévation, on a $\Phi = gz$:

$$\textcircled{2} = \vec{g} = -g \vec{k} = -g \text{grad} z = -\text{grad}(gz)$$

③ Si le fluide est incompressible et indilatable: $\rho = \text{constante}$

$$\textcircled{3} \equiv -\frac{1}{\rho} \text{grad} P = -\text{grad} \left(\frac{P}{\rho} \right)$$

④ Si les contributions visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie, de gravité et de pression, l'approximation du fluide parfait est acceptable:

$$\textcircled{4} \equiv \frac{1}{\rho} \text{div} \tau = \vec{0}$$

Dans le cadre de ces hypothèses,

- les forces de volume dérivent d'un potentiel,
- le fluide est isovolume et non visqueux,

l'équation locale de quantité de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) + (\overline{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V} = \vec{0} \quad (14.19)$$

On peut projeter cette expression sur la ligne de courant locale. Désignons par \vec{s} le vecteur unitaire et $\partial/\partial s$ la dérivée suivant cette direction: $\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overline{\text{grad}}$. La projection de (14.19) suivant la direction \vec{s} donne:

$$\vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{s} \cdot \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) + \underbrace{\vec{s} \cdot [(\overline{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V}]}_{\substack{\text{nul puisque } \vec{s} \text{ et } \vec{V} \\ \text{sont colinéaires}}} = 0$$

et, en intégrant entre deux points quelconques de la ligne de courant:

$$\int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) \right] ds = \text{cste}$$

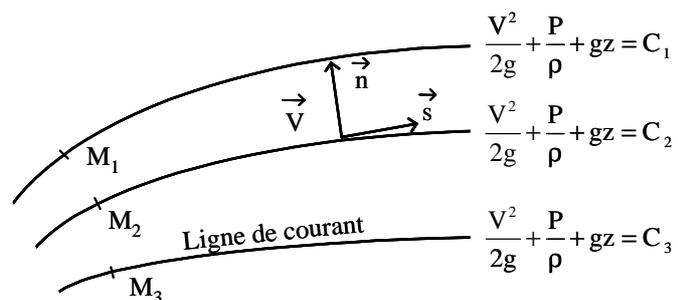
on obtient:
$$\int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) = \text{cste} \quad (14.20)$$

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire, la quantité entre parenthèses est constante **le long d'un filet fluide:**

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(g z)$
 - le fluide est isovolume $\rho = \text{constante}$
 - le fluide est dénué de viscosité $\vec{\tau} = \vec{0}$
 - l'écoulement est stationnaire $\partial/\partial t = 0$
- (14.21)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = \text{constante sur une ligne de courant}$$

En général la constante, que nous noterons C, change d'une ligne de courant à une autre. La variation de C dans la direction normale à la ligne de courant est obtenue en projetant (14.20) suivant la normale \vec{n} :



$$\vec{n} \cdot \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) + \vec{n} \cdot [(\overline{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V}] = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial n} + \vec{n} \cdot [(\overline{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V}] = 0$$

14.3.2 Écoulements irrotationnels de fluides parfaits isovolumes

Le cas particulier $\overline{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$ correspond à la classe, très importante en Mécanique des Fluides, des écoulements **irrotationnels**. Pour ce type d'écoulements, la constante de Bernoulli est la même pour toutes les lignes de courant:

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(g z)$
- le fluide est isovolume $\rho = \text{constante}$
- le fluide est dénué de viscosité $\overline{\tau} = \vec{0}$
- l'écoulement est stationnaire $\partial / \partial t = 0$
- l'écoulement est irrotationnel $\overline{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$

(14.22)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = \text{constante dans tout l'écoulement}$$

Lorsque l'écoulement irrotationnel est **instationnaire** on peut encore obtenir une expression simple. Dans ce cas, la vitesse dérive d'un potentiel $\vec{V} = \overline{\text{grad}} \varphi$ et la relation (14.19) se réduit alors à

$$\overline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) = \vec{0}$$

La quantité entre parenthèse est une fonction du temps uniquement:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = f(t)$$

On peut encore simplifier l'écriture en posant $\hat{\varphi} = \varphi - \int f(t) dt$. Ainsi:

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(g z)$
- le fluide est isovolume $\rho = \text{constante}$
- le fluide est dénué de viscosité $\overline{\tau} = \vec{0}$
- l'écoulement est irrotationnel $\overline{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$

(14.23)

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = 0 \text{ dans tout l'écoulement}$$

14.3.3 Le cas des fluides barotropes

Les expressions précédentes de la relation de Bernoulli ont été obtenues dans l'hypothèse du fluide isovolume. On peut étendre la relation de Bernoulli à des écoulements de fluides compressibles barotropes, c'est-à-dire à des évolutions dans lesquelles la pression ne dépend que de la masse volumique: $P = P(\rho)$.

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on considère un gaz parfait en évolution isotherme:

$$P = \rho R \Theta \quad ; \quad \Theta = \text{constante}$$

ou isentropique:

$$P / \rho^\gamma = \text{constante}$$

On peut alors écrire

$$\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} P = \overline{\text{grad}} \left(\int \frac{dP}{\rho} \right)$$

et les formulations (14.21), (14.22) et (14.23) deviennent respectivement:

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(gz)$
- le fluide est barotrope $P = P(\rho)$
- le fluide est dénué de viscosité $\vec{\tau} = \vec{0}$
- l'écoulement est stationnaire $\partial / \partial t = 0$

(14.24)

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + gz = \text{constante sur une ligne de courant}$$

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(gz)$
- le fluide est barotrope $P = P(\rho)$
- le fluide est dénué de viscosité $\vec{\tau} = \vec{0}$
- l'écoulement est stationnaire $\partial / \partial t = 0$
- l'écoulement est irrotationnel $\overline{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$

(14.25)

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + gz = \text{constante dans tout l'écoulement}$$

- les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{g} = -\overline{\text{grad}}(g z)$
- le fluide est barotrope $P = P(\rho)$
- le fluide est dénué de viscosité $\vec{\tau} = \vec{0}$
- l'écoulement est irrotationnel $\overline{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \mapsto \vec{V} = \overline{\text{grad}} \varphi$

(14.26)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + g z = \text{constante dans tout l'écoulement}$$

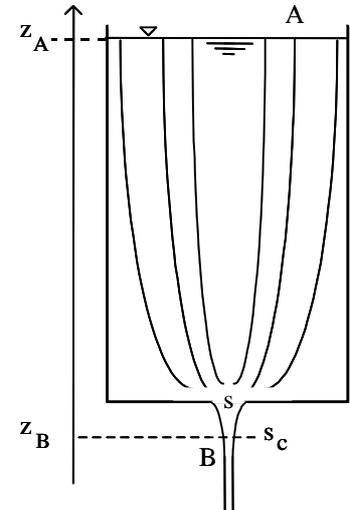
14.4 Exemples d'application

Nous considérons ici des écoulements **permanents** de fluides **isovolumes**.

14.4.1 Écoulements par des orifices

a) Relation de Torricelli

La figure ci-contre représente l'écoulement, sous l'action de la pesanteur, d'un liquide qui s'écoule d'un réservoir par un orifice de section s . On pourra considérer que l'écoulement est stationnaire si le niveau du réservoir est maintenu constant ou si le temps de vidange est suffisamment grand devant le temps d'observation. Si l'on accepte l'approximation du fluide parfait, les conditions d'application de (14.21) sont réunies et l'on peut appliquer la relation de Bernoulli entre deux points d'une ligne de courant. Soient A un point de la surface libre et B un point du liquide au voisinage de la section de sortie, on écrira:



$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B \quad (14.27)$$

On peut considérer que la pression qui règne au voisinage du jet libre est égale à celle qui règne à la surface libre du réservoir ouvert sur l'atmosphère $P_A = P_B$.

Si la surface libre du réservoir est importante par rapport à la section de sortie, la vitesse de V_A est négligeable devant la vitesse V_B . En posant $z_A - z_B = h$, on obtient la relation de Torricelli:

$$V_B = \sqrt{2gh} \quad (14.28)$$

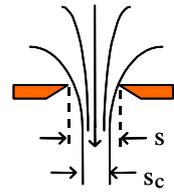
En fait, la pression P_B n'est égale à la pression atmosphérique qu'à l'interface jet-air³⁰. La pression (étoilée si le jet n'est pas vertical) n'est constante dans toute la section considérée que si les filets fluides sont rectilignes et parallèles. Une visualisation de l'écoulement permettrait de voir que les lignes de courant convergent avant d'atteindre l'orifice et leur convergence se poursuit au-delà. Le jet se contracte jusqu'à une section dite *section contractée* (s_c) pour prendre ensuite une forme sensiblement cylindrique. On appelle *coefficient de contraction* le rapport

$$C_c = \frac{s_c}{s}$$

Pour un orifice en paroi mince et un jet d'eau, l'expérience donne $C_c \sim 0,61$. Le débit théorique à la sortie est donc: $Q_v = s_c V_B = C_c s \sqrt{2gh}$. En fait, l'hypothèse de fluide parfait conduit à une légère surestimation de ce débit; les frottements sur la paroi (même très mince) et sur l'air sont faibles: l'expérience indique un coefficient cinétique α compris entre 0,98 et 1. Le débit volume à l'orifice est donc

$$Q_v = C_d s \sqrt{2gh}$$

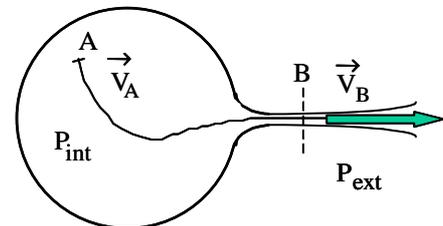
où $C_d = \alpha C_c$ est le *coefficient de débit*.



b) Écoulement d'un gaz à partir d'un réservoir en surpression

La figure ci-contre représente l'écoulement d'un gaz par l'orifice d'un réservoir dans lequel règne une pression uniforme P_{int} . À l'extérieur, la pression ambiante P_{ext} peut aussi être considérée comme uniforme. Si le jet est subsonique, on observe que les lignes de courant du jet sont rectilignes et parallèles dans la zone proche; la pression étoilée est donc invariante dans une section droite du jet:

$$P_B^* = P_{ext}^* = P_{ext} + \rho g z_B.$$



Sur la ligne de courant entre le point A intérieur et le point B extérieur, on peut écrire:

$$\frac{1}{2} \rho V_A^2 + P_{int} + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + P_{ext} + \rho g z_B$$

En outre dans le cas des gaz, les termes $\rho g z$ correspondant à l'énergie potentielle de pesanteur sont négligeables devant les termes de pression et d'énergie cinétique. De plus, si le réservoir est assez grand, la vitesse V_A est faible devant V_A (sauf peut-être dans la phase ultime d'une vidange complète) et l'on peut négliger $\frac{1}{2} \rho V_A^2$. Dans ces conditions:

$$V_B \approx \sqrt{\frac{2(P_{int} - P_{ext})}{\rho}} \quad (14.29)$$

³⁰

Il y a en fait une très légère surpression due à la tension superficielle du liquide au contact de l'air.

Ce résultat est applicable à des écoulements de gaz si les effets de compressibilité restent faibles. Il en est ainsi lorsque la vitesse reste très inférieure à la célérité du son $c = (\gamma P_{\text{ext}} / \rho)^{1/2}$. On peut considérer que c'est le cas si le nombre de Mach de l'écoulement $Ma = V_b / c$ est inférieur à 0.2. La variation relative de densité est de l'ordre de grandeur du carré du nombre de Mach: $\Delta\rho / \rho \sim Ma^2 = 0,2^2 = 4\%$.

Ainsi pour un écoulement d'air ($\gamma = 1,4$) à 20°C ($\rho = 1,205 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) sous la pression normale ($P_{\text{ext}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)

$$c = (1,4 \times 101325 / 1,205)^{1/2} = 343,1 \text{ m/s}$$

La vitesse maximale en sortie est donc

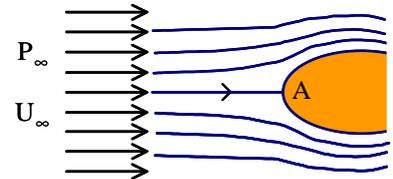
$$(V_b)_{\text{max}} = 0,2 \times 343,1 = 68,6 \text{ m/s}$$

correspondant à une surpression maximale dans le réservoir

$$(P_{\text{int}} - P_{\text{ext}})_{\text{max}} = \frac{1}{2} \rho (V_b)_{\text{max}}^2 = 0,5 \times 1,205 \times (68,6)^2 = 2837 \text{ Pa} = 0,028 \text{ atm}$$

14.4.2 Pression d'arrêt

Considérons maintenant l'écoulement uniforme d'un fluide isovolume en incidence sur un obstacle. Désignons par U_∞ et P_∞ la vitesse uniforme et la pression à l'infini en amont (très loin de la perturbation due à l'obstacle). A l'approche de l'obstacle, le courant fluide se divise pour contourner l'obstacle. Il existe donc une ligne fluide qui sépare les particules passant



d'un côté de celles qui passent de l'autre côté du corps solide. Soit A le point (que nous supposons fixe) où cette ligne de séparation rencontre l'obstacle. La vitesse s'annule en ce point A appelé *point de stagnation* ou *point d'arrêt*. Sur la ligne de courant qui passe par le point d'arrêt la relation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 + P_\infty + \rho g z_\infty = P_A + \rho g z_A$$

Si les forces de pesanteur sont négligeables (dans les gaz en général) ou si la dénivellation $z_\infty - z_A$ est faible, on approxime:

$$P_A = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad (14.30)$$

La pression P_A définit la pression d'arrêt et l'élévation de pression $P_A - P_\infty = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ est communément appelée *surpression d'arrêt* ou *pression dynamique*. Si l'on place la main de façon à intercepter un jet d'eau dont la vitesse de moyenne est $U_d = 20 \text{ m/s}$, la différence moyenne de pression entre les deux faces de la main est (coef. cinétique pour un jet turbulent $\alpha \sim 1$):

$$\Delta P = P_A - P_\infty = \frac{1}{2} \rho \alpha U_d^2 \approx 0,5 \times 1000 \times (20)^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 2 \text{ atm}$$

Si la “surface mouillée” de la main est $S = 150 \text{ cm}^2$, la force correspondante sera

$$F = \Delta P S = 2 \cdot 10^5 \times 150 \cdot 10^{-4} = 3000 \text{ N}$$

soit une force équivalant au poids d’une masse de plus de 300 kg. Pour un jet d’air de même vitesse, la surpression d’arrêt n’est que de

$$(\Delta P)_{\text{air}} = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}}} (\Delta P)_{\text{eau}} = \frac{1,205}{998,2} \times 2 \cdot 10^5 \approx 241 \text{ Pa}$$

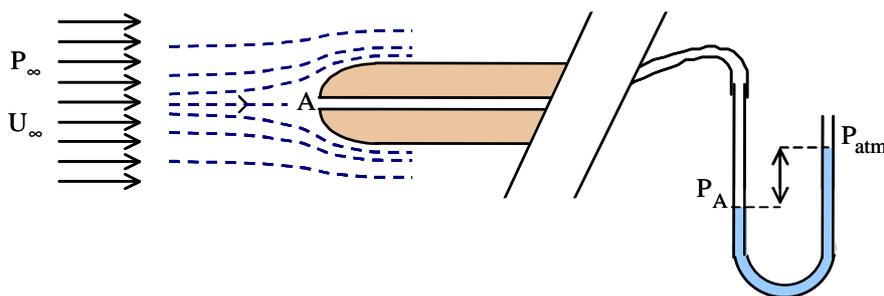
soit, pour la même main, une force équivalant au poids d’une masse de moins de 370 grammes.

On comprend pourquoi les jets d’air ne sont pas utilisés pour disperser une manifestation. Soulignons encore que l’application de la relation (14.30) à un gaz n’est justifiée que si les effets de compressibilité sont négligeables ($Ma \ll 1$).

14.4.3 Mesures de la pression dans un écoulement

• Mesure de la pression d’arrêt

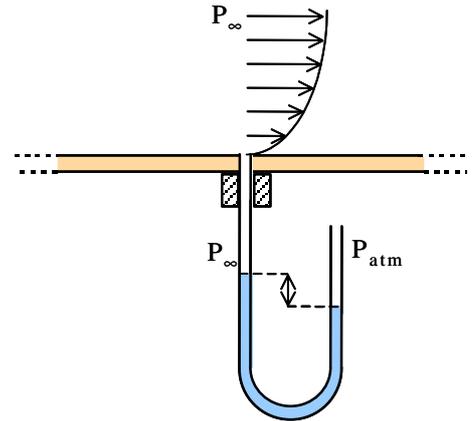
Le résultat précédent peut être exploité en disposant au point d’arrêt d’un obstacle un orifice relié par un conduit mince à un capteur de pression (un tube manométrique par exemple). On peut ainsi mesurer la pression d’arrêt P_A . Une telle sonde est appelée *tube de Pitot*.



• Mesure de la pression statique

La pression thermodynamique dans un fluide en mouvement est, par définition, celle qu’indiquerait un manomètre qui se déplacerait à la vitesse du fluide. Cette définition explique pourquoi cette pression est souvent appelée *pression statique*. La figure ci-dessous présente un dispositif qui, bien qu’en déplacement relatif par rapport au fluide, permet de mesurer la pression statique. Le dispositif est constitué d’un orifice, sans saillie ni bavure, percé dans une paroi parallèle à la vitesse de l’écoulement, et relié à un capteur de pression.

Si l'orifice est suffisamment petit, l'expérience montre qu'il existe un fluide mort à l'intérieur du trou. Les lignes de courant, dans la zone de passage au voisinage immédiat de l'orifice sont, comme dans la couche limite le long de la paroi plane, parallèles aux lignes de courant au loin de l'obstacle. De ce fait, la pression dans le trou est la même que dans l'écoulement non perturbé (P_8).



Très souvent les mesures de pression d'arrêt et de pression statique sont effectuées simultanément à l'aide d'une seule sonde dite *sonde de Prandtl*. Cette sonde est constituée d'un tube cylindrique profilé pour éviter le décollement de l'écoulement au voisinage du bord d'attaque, et percé de plusieurs orifices latéraux permettant la mesure de pression statique.

L'orifice d'arrêt et les orifices latéraux sont reliés à un manomètre différentiel. Si la sonde est placée dans la direction dans une région où la vitesse et la pression sont uniformes, la mesure de la différence entre la pression d'arrêt P_A et la pression statique P_O est donnée par la relation de Bernoulli:

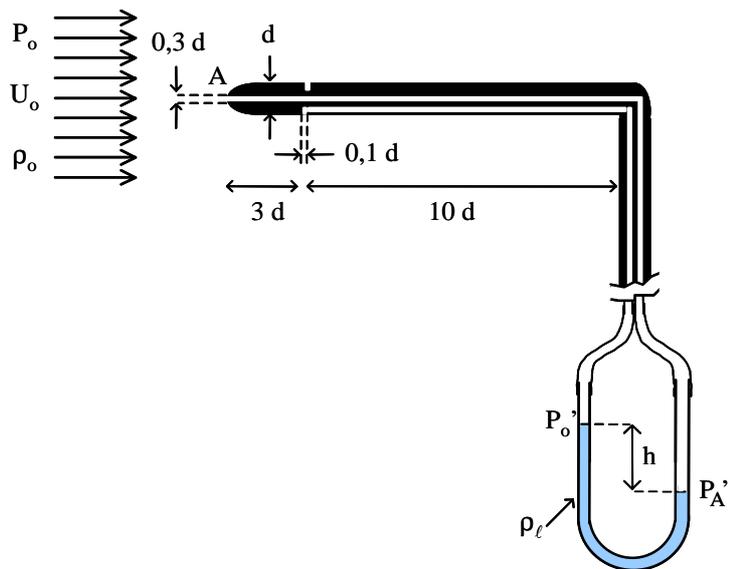
$$P_A - P_O = \frac{1}{2} \rho_o U_o^2$$

et conduit à la connaissance de la vitesse U_o .

La sonde de Prandtl, associée à un manomètre différentiel est donc un vélocimètre. La vitesse est déterminée par

$$\left. \begin{aligned} U_o &= \sqrt{\frac{2(P_A - P_O)}{\rho_o}} \\ P_A - P_{O'} &= \rho_\ell g h = P_A - P_O + \rho_o g h \end{aligned} \right\} \rightarrow U_o = \sqrt{2 \frac{\rho_\ell - \rho_o}{\rho_o} g h} \quad (14.31)$$

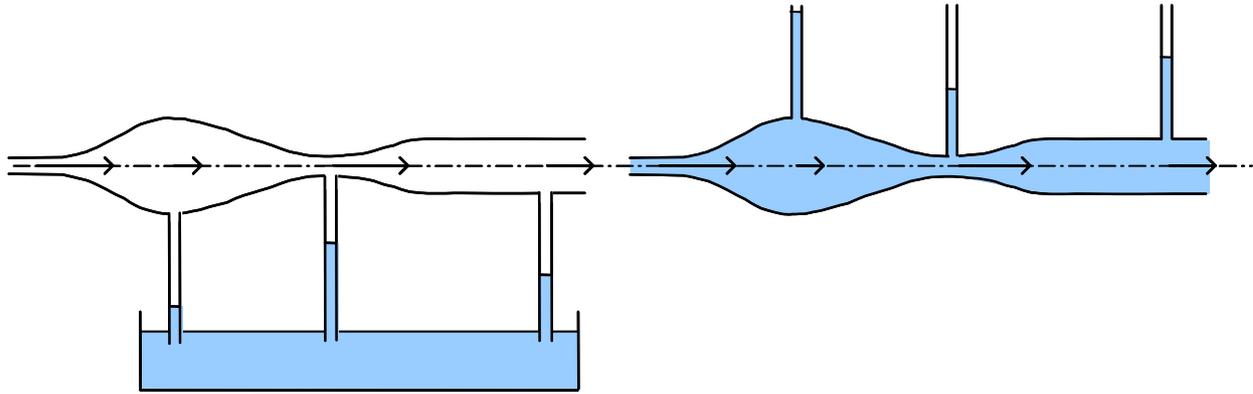
La mesure n'est strictement correcte que si l'axe du tube est parallèle à la vitesse, mais l'utilisation de plusieurs trous latéraux rend la sonde assez peu sensible aux faibles inclinaisons: elle reste exacte à 1 % près pour une inclinaison de 15 degrés.



14.4.4 Mesures des débits

a) Venturi

Dans un tube de courant d'un écoulement subsonique, la vitesse de débit augmente lorsque la section diminue, alors que la pression diminue en même temps que la section. Le débitmètre Venturi utilise ces résultats.



Considérons maintenant l'écoulement permanent d'un fluide incompressible non visqueux dans le conduit d'axe horizontal et de section lentement variable représenté sur la figure. La relation de Bernoulli (version fluide parfait) s'écrit, entre deux points de la ligne de courant axiale:

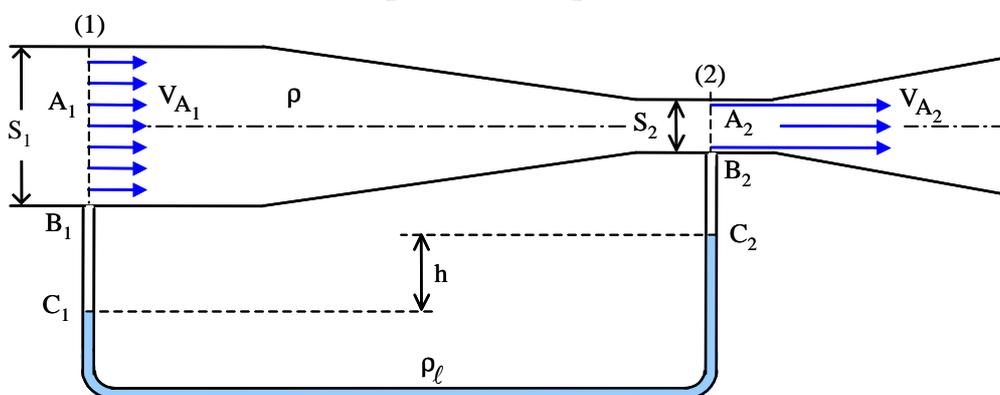
$$\frac{1}{2} \rho V_{A_1}^2 + P_{A_1} = \frac{1}{2} \rho V_{A_2}^2 + P_{A_2} \quad (14.32)$$

Si on accepte l'hypothèse du fluide parfait, la condition d'adhérence à la paroi est relaxée et ce modèle conduit à considérer que le profil de vitesse doit être uniforme dans une section droite de section constante ou à un col. Dans ces conditions, la vitesse axiale est égale à la vitesse de débit³¹, et la conservation du débit entre les sections (1) et (2) donne:

$$\rho V_{A_1} S_1 = \rho V_{A_2} S_2 \quad (14.33)$$

En éliminant V_{A_1} entre ces deux dernières relations, on exprime V_{A_2} en fonction de la chute de pression ($P_{A_1} - P_{A_2}$):

$$V_{A_2} = \left[\frac{2 (P_{A_1} - P_{A_2})}{\rho [1 - (S_2/S_1)^2]} \right]^{1/2} \quad (14.34)$$



³¹

C'est pourquoi les coefficients cinétiques α ont été pris égaux à 1 dans (14.32).

Il reste à déterminer la chute de pression entre les deux sections. Examinons la possibilité d'appliquer la relation de Bernoulli successivement entre les points A₁ et B₁, B₁ et C₁, C₁ et C₂, C₂ et B₂, B₂ et A₂. L'analyse est synthétisée dans le tableau ci-dessous.

Bernoulli entre:	A ₁ et B ₁	B ₁ et C ₁	C ₁ et C ₂	C ₂ et B ₂	B ₂ et A ₂
Écoulement localement irrotationnel	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
justification:	écoulement uniforme $V_{A_1} = V_{B_1}$	repos $V_{B_1} = V_{C_1} = 0$	repos $V_{C_1} = V_{C_2} = 0$	repos $V_{C_2} = V_{B_2} = 0$	écoulement uniforme $V_{B_2} = V_{A_2}$
Pressions	$P_{A_1}^* = P_{B_1}^*$	$P_{B_1}^* = P_{C_1}^*$	$P_{C_1}^* = P_{C_2}^*$	$P_{C_2}^* = P_{B_2}^*$	$P_{B_2}^* = P_{A_2}^*$
justification:	lignes de courant rectilignes et parallèles	repos	repos	repos	lignes de courant rectilignes et parallèles

On remarque que B₁ est un point singulier où apparaît une discontinuité de vitesse (mais pas de discontinuité de pression). Ceci est une conséquence de l'hypothèse de fluide parfait et de la condition de glissement qui en résulte à la paroi. Ainsi, V_{B_1} est pris égale à la vitesse axiale V_{A_1} en appliquant la relation de Bernoulli entre A₁ et B₁, mais prise égale à 0 en appliquant la relation de Bernoulli entre B₁ et C₁. Notons qu'il n'est pas légitime d'appliquer la relation directement entre A₁ et C₁ puisque l'écoulement est localement rotationnel au passage de la discontinuité³².

L'application de la relation de Bernoulli successivement entre chacun des couples de point voisins le long du manomètre différentiel conduit à

$$P_{A_1} - P_{A_2} = (\rho_\ell - \rho) g h \quad (14.35)$$

Finalement, la substitution dans (14.34) donne

$$V_{A_2} = \left[\frac{2(\rho_\ell - \rho)}{\rho} \frac{g h}{[1 - (S_2/S_1)^2]} \right]^{1/2} \quad (14.36)$$

La mesure du débit est donc obtenue par simple lecture de la dénivellation dans le manomètre. Même si la perte de charge est faible dans le convergent, les approximations faites entraînent une surestimation de quelques % du débit et il convient donc d'étalonner le débitmètre Venturi par mesure directe et d'introduire un coefficient correcteur C_q . L'expression du débit masse réel est finalement:

$$Q = C_q \rho S_2 \left[\frac{2(\rho_\ell - \rho)}{\rho} \frac{g h}{[1 - (S_2/S_1)^2]} \right]^{1/2} \quad (14.37)$$

³²

Ces remarques valent évidemment aussi bien à la section (2).

b) Rotamètre

Un *rotamètre* est un débitmètre constitué d'un tube vertical transparent faiblement conique et d'un flotteur. C'est la position verticale du flotteur dans l'écoulement qui permet la détermination du débit. Pour accroître la stabilité du flotteur on le munit de rainures inclinées par rapport à son axe; le fluide en mouvement lui donne ainsi un mouvement de rotation autour de cet axe, d'où le nom de *rotamètre*.

Si ΔP représente la chute de pression entre l'amont et l'aval, S_f la section maximale du flotteur, \mathcal{V}_f son volume et ρ_f sa densité, on exprime l'équilibre vertical en écrivant

$$-\Delta P S_f = (\rho_f - \rho) g \mathcal{V}_f \quad (14.38)$$

Soit $s(z) = S(z) - S_f$ l'aire de la section annulaire de passage du fluide. La vitesse de débit est donnée par l'expression suivante³³ semblable à (14.34) établie pour le Venturi:

$$U_d = \left[\frac{2}{\rho} \frac{(-\Delta P)}{[1 - (s/S)^2]} \right]^{1/2} \quad (14.39)$$

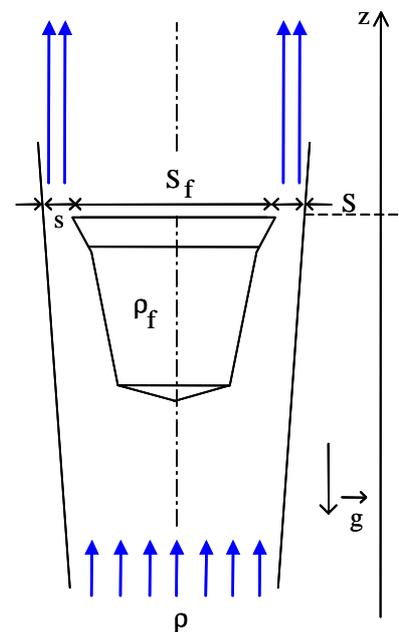
La substitution de l'expression (14.37) de ΔP donne

$$U_d = \left[2g \frac{\rho_f - \rho}{\rho} \frac{\mathcal{V}_f}{[1 - (s/S)^2] S_f} \right]^{1/2} \quad (14.40)$$

Comme précédemment, les erreurs induites par les hypothèses du calcul sont corrigées par l'utilisation d'un coefficient de débit C_q obtenu par étalonnage. Le débit masse réel est donc donné par une expression très semblable à (14.37):

$$Q = C_q \rho \frac{s}{[1 - (s/S)^2]^{1/2}} \left[2g \frac{\rho_f - \rho}{\rho} \frac{\mathcal{V}_f}{S_f} \right]^{1/2} \quad (14.41)$$

Ainsi Q est une fonction de $s(z)$ et de $s(z)/S(z)$ donc de la position verticale z du flotteur dans le tube. On peut graduer le tube pour permettre une lecture directe du débit.

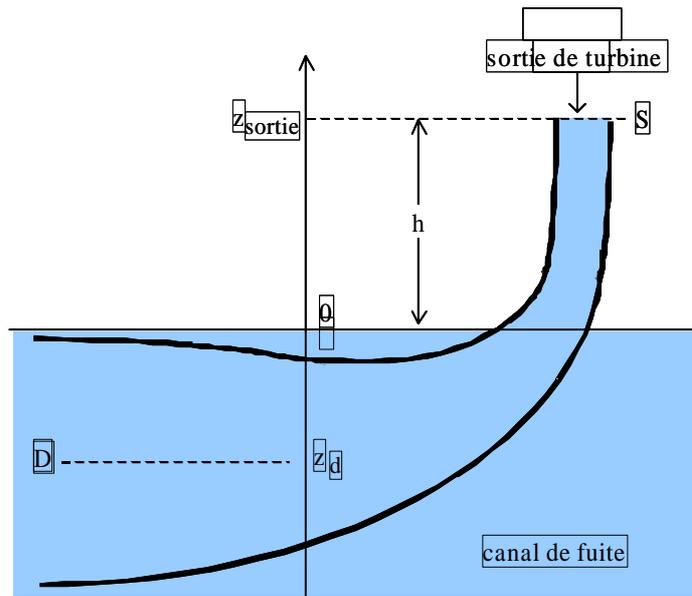


³³ Un calcul détaillé est présenté dans le polycopié de Travaux Pratiques de Mécanique des Fluides de 1ère année. On y présente également la méthode qui permet d'utiliser un diaphragme comme débitmètre.

c) Diffuseurs

La puissance d'une turbine est proportionnelle à la différence de pression ($P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}$). Pour une alimentation donnée (hauteur d'eau au-dessus de la turbine), c'est-à-dire $P_{\text{entrée}}$ fixée, la puissance récupérée est plus importante si on peut diminuer P_{sortie} .

Au lieu d'évacuer l'eau en sortie de turbine par un jet libre dans l'atmosphère ($P_{\text{sortie}} = P_{\text{atm}}$), jet qui s'écoulerait ensuite dans un cours d'eau récepteur (canal de fuite), on dispose un diffuseur qui permet d'abaisser la pression de sortie ($P_{\text{sortie}} < P_{\text{atm}}$).



Un diffuseur est un élément de conduit dont la section augmente de façon progressive. Considérons un diffuseur qui débouche sur un canal de fuite comme présenté sur la figure. Dans l'approximation du fluide parfait, l'application de la relation de Bernoulli entre la section S de sortie de la turbine et la section D d'échappement s'écrit:

$$\frac{1}{2} \rho V_{\text{sortie}}^2 + P_{\text{sortie}} + \rho g z_{\text{sortie}} = \frac{1}{2} \rho V_d^2 + P_d + \rho g z_d \quad (14.40)$$

Si la section de sortie est très largement dimensionnée on peut négliger V_d^2 devant V_{sortie}^2 . On peut aussi supposer (en première approximation) que $z_d \approx 0$ et que $P_d \approx P_{\text{atm}}$. La relation de Bernoulli se réduit alors à

$$P_{\text{sortie}} \approx P_{\text{atm}} - \left(\frac{1}{2} \rho V_{\text{sortie}}^2 + \rho g h \right) \quad (14.41)$$

Ainsi, la pression à l'entrée du diffuseur est inférieure à la pression atmosphérique de la quantité $\frac{1}{2} \rho V_d^2 + \rho g h$. En l'absence de diffuseur, l'échappement se ferait à l'air libre à une hauteur h au-dessus du canal de fuite. On perdrait alors toute l'énergie cinétique de l'eau à la sortie S et l'énergie potentielle correspondant à la chute de hauteur h . Le diffuseur permet d'obtenir une dépression en sortie de turbine et d'éviter ainsi ces pertes.

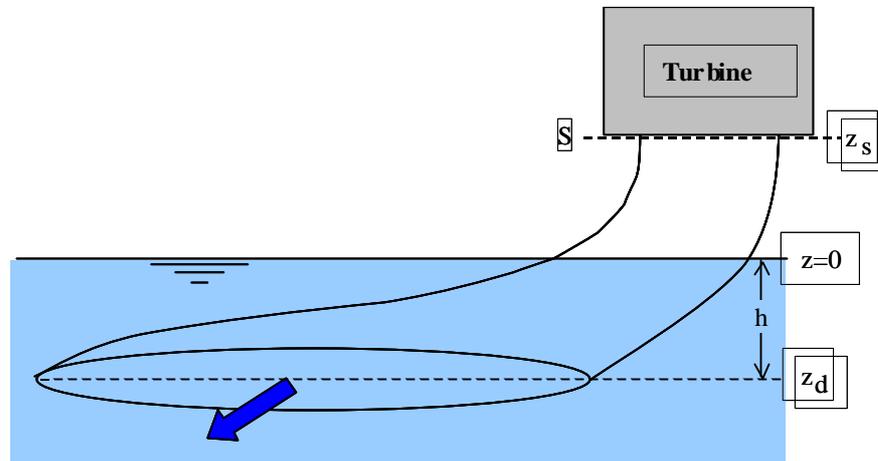
Le résultat (14.41) est assez approximatif puisqu'on a en fait :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_d = \frac{S_{\text{sortie}}}{S_d} V_{\text{sortie}} \neq 0 \\ z_d = -1 \times 1/2 \text{ diamètre vertical du diffuseur } (< 0) \\ P_d = P_{\text{atm}} - \rho_{\text{eau}} g z_d > P_{\text{atm}} \end{array} \right.$$

En outre, la perte de charge ΔH dans le diffuseur a été négligée comme tenu de l'hypothèse de fluide parfait. Sans ces approximations, on obtiendrait :

$$P_{\text{sortie}} = P_{\text{atm}} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} \rho_{\text{eau}} V_{\text{sortie}}^2 \left(\frac{S_d^2 - S_{\text{sortie}}^2}{S_d^2} \right) + \rho_{\text{eau}} g h \right]}_{<0} + \frac{\Delta H}{>0}$$

Il faut donc que ΔH soit faible (faible longueur de conduite entre la sortie de turbine et le diffuseur) et $S_d^2 \gg S_{\text{sortie}}^2$. Le mieux est d'utiliser un diffuseur de forme oblongue comme celui-ci :



Il faut s'assurer qu'aucun décollement n'a lieu dans le diffuseur; l'augmentation de section doit donc être très progressive. De plus, comme toujours en présence d'une dépression dans un liquide, il faut vérifier que la pression reste partout supérieure à la pression de vapeur saturante à la température de fonctionnement. Dans le cas contraire un phénomène de cavitation entraînerait une discontinuité de l'écoulement et un dysfonctionnement du diffuseur.

Chapitre 15 Bilans de quantité de mouvement

15.1 Théorème des quantités de mouvement pour les écoulements stationnaires isovolumes

Nous allons d'abord présenter l'expression générale du bilan macroscopique de quantité de mouvement applicable à tous les écoulements stationnaires de fluides isovolumes.

La relation intégrale que nous allons obtenir est particulièrement importante puisqu'elle permet de déterminer les efforts qu'exerce un écoulement sur un obstacle ou sur les parois d'un conduit, ou réciproquement, les efforts exercés par une paroi solide sur le fluide au contact. Quelques illustrations sont données au §15.2

15.1.1 Établissement de la relation intégrale

Nous partons de la forme locale générale (7.18) de l'équation de quantité de mouvement, dans laquelle la dérivée particulaire est exprimée à l'aide de l'expression (5.24), soit:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = \rho \vec{f} - \text{grad} P + \text{div} \vec{\tau}$$

Intégrons cette équation sur un volume fluide fixe \mathcal{V} . Soit \vec{n} la normale extérieure de l'enveloppe \mathcal{S} de ce volume de contrôle.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}} P \vec{n} dS + \iint_{\mathcal{S}} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS \quad (15.1)$$

Pour un **écoulement stationnaire d'un fluide isovolume** la relation intégrale (15.1) se réduit à:

$$\rho \iint_{S_c \cup S_s} (\vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{S_c \cup S_s \cup S_p} P^* \vec{n} dS + \iint_{S_p} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS \quad (15.2)$$

où la force de gravité a été intégrée dans P^* .

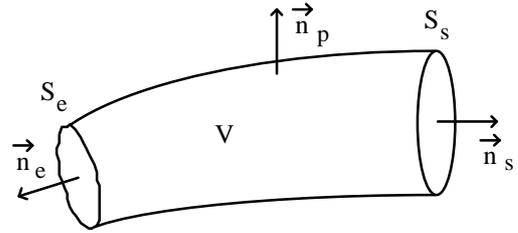
Un exemple de mise en œuvre de cette équation est présenté au § 15.2.2.

15.1.2 Cas particulier des écoulements internes

Nous partons de la forme locale générale (7.18) de l'équation de quantité de mouvement, dans laquelle la dérivée particulaire est exprimée à l'aide de l'expression (5.24), soit:

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = \rho \vec{f} - \overline{\text{grad} P} + \overline{\text{div} \tau}$$

Intégrons cette équation sur un volume fluide fixe \mathcal{V} . Soit \vec{n} la normale extérieure de l'enveloppe \mathcal{S} de ce volume de contrôle (figure).



$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} d\mathcal{V}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} P \vec{n} dS}_{\textcircled{4}} + \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS}_{\textcircled{5}} \quad (15.3)$$

• **terme ①**: Comme le volume \mathcal{V} est fixe: $\textcircled{1} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d\mathcal{V}$ noté $\dot{\mathcal{F}}$, est la variation de la quantité de mouvement $\vec{\mathcal{F}}$ attachée au volume \mathcal{V} . Ce terme est nul en régime stationnaire.

• **terme ②**: Le flux de quantité de mouvement est identiquement nul à travers une ligne de courant ($\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$); cette condition d'étanchéité s'applique aussi sur les parois solides non poreuses. Ainsi:

$$\textcircled{2} = \iint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_e} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}_e dS + \iint_{S_s} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}_s dS + \underbrace{\iint_{S_p} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}_p dS}_{\text{nul}}$$

ou encore, en utilisant la notation (13.2) pour les flux moyens dans les sections (S_e) et (S_s)

$$\textcircled{2} = \langle (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}_e \rangle_{S_e} + \langle (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n}_s \rangle_{S_s}$$

• **terme ③**: Ce terme désigne la résultante des forces à distance s'exerçant sur \mathcal{V} , c'est-à-dire le poids de la masse \mathcal{M} du fluide dans le volume de contrôle:

$$\textcircled{3} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{g} d\mathcal{V} = \vec{g} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \mathcal{M} \vec{g}$$

• **terme ④**: Il représente la résultante des forces de pression sur l'enveloppe \mathcal{S} . Explicitons, pour les écoulements internes, les résultantes partielles sur les sections d'entrée (S_e) et de sortie (S_s) du système fluide et

sur les parties solides (S_p) de l'enveloppe:

$$\textcircled{4} = \iint_{\mathcal{S}} P \bar{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{S_e} P \bar{\mathbf{n}}_e \, dS + \iint_{S_s} P \bar{\mathbf{n}}_s \, dS + \iint_{S_p} P \bar{\mathbf{n}}_p \, dS$$

ou encore, en définissant la moyenne des forces de pression dans les sections (S_e) et (S_s)

$$\textcircled{4} = \langle P \bar{\mathbf{n}}_e \rangle_{S_e} + \langle P \bar{\mathbf{n}}_s \rangle_{S_s} + \iint_{S_p} P \bar{\mathbf{n}}_p \, dS$$

• **terme** $\textcircled{5}$: Ce terme est la résultante des contraintes visqueuses sur l'enveloppe \mathcal{S} .

Très généralement l'action des contraintes visqueuses sur les sections d'entrée-sortie (S_e et S_s) est très négligeable devant leur contribution intégrale sur les parois solides. On pourra donc approximer:

$$\textcircled{5} = \iint_{\mathcal{S}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS \approx \iint_{S_p} \bar{\boldsymbol{\tau}} \, dS$$

Il reste à reporter tous ces résultats dans le bilan intégral (15.3); il vient:

$$\dot{\mathcal{S}} + \langle (\rho \bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_e \rangle_{S_e} + \langle (\rho \bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_s \rangle_{S_s} = \mathcal{M} \bar{\mathbf{g}} - \langle P \bar{\mathbf{n}}_e \rangle_{S_e} - \langle P \bar{\mathbf{n}}_s \rangle_{S_s} + \underbrace{\iint_{S_p} \bar{\boldsymbol{\tau}} \, dS - \iint_{S_p} P \bar{\mathbf{n}}_p \, dS}_{\bar{\mathbf{F}}_{p \rightarrow f}}$$

En notant $\bar{\mathbf{F}}_{p \rightarrow f}$ la résultante des forces exercées par les parois sur le fluide, on obtient:

$$\left[\langle (\rho \bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_e \rangle + \langle P \bar{\mathbf{n}}_e \rangle \right]_{S_e} + \left[\langle (\rho \bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_s \rangle + \langle P \bar{\mathbf{n}}_s \rangle \right]_{S_s} = \mathcal{M} \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}}_{p \rightarrow f} - \dot{\mathcal{S}}$$

Si on choisit, contrairement à la convention usuelle, d'orienter les normales **dans le sens de l'écoulement**, $\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_e = -V_e$ et $\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_s = V_s$, et l'on peut écrire finalement:

$$\boxed{\left[\left(\langle \rho V^2 \rangle + \langle P \rangle \right) S \bar{\mathbf{N}} \right]_e^s = \mathcal{M} \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}}_{p \rightarrow f} - \dot{\mathcal{S}}} \quad (15.4)$$

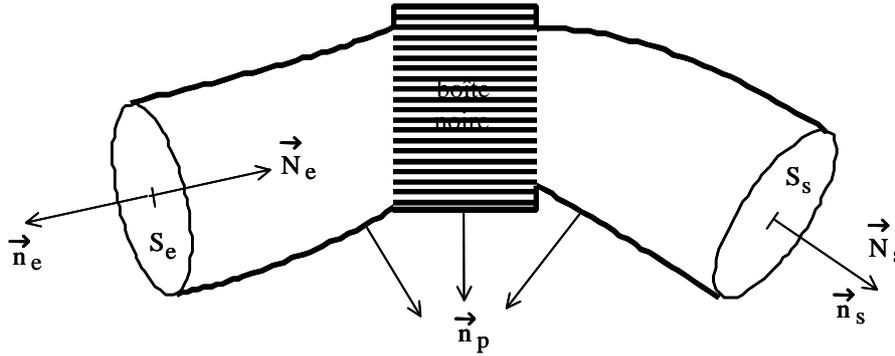
VALABLE UNIQUEMENT POUR LES ECOULEMENTS INTERNES

où, pour éviter toute confusion, on note $\bar{\mathbf{N}}$ les vecteurs unitaires orientés dans le sens de l'écoulement. Cette relation constitue la forme intégrale du théorème d'Euler.

Cas des écoulements internes stationnaires de fluides isovolumes

Si maintenant on considère la forme (15.4), l'hypothèse de stationnarité impose que $\dot{\mathcal{S}} = \vec{0}$, et puisque la masse volumique est constante

$$\left[\left(\rho \langle V^2 \rangle + \langle P \rangle \right) S \bar{\mathbf{N}} \right]_e^s = \mathcal{M} \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}}_{p \rightarrow f} \quad (15.5)$$



• **Pression moyenne dans les sections d'entrée-sortie**

Les filets fluides étant localement rectilignes et parallèles dans les sections d'entrée-sortie, la pression étoilée y est invariante. Dans la section (S_e) par exemple:

$$\langle P \rangle_e = \langle P^* - \rho g z \rangle_e = \langle P^* \rangle_e - \rho g \langle z \rangle_e = P_e$$

où P_e est la pression prise au centre de la section.

• **Coefficient cinétique b**

Il est d'usage de définir le coefficient cinétique

$$\beta = \frac{\langle V^2 \rangle}{\langle V \rangle^2}, \text{ soit avec notre notation de la vitesse de débit} \quad \beta = \frac{\iint V^2 dS}{S U_d^2} \quad (15.6)$$

On pourra vérifier, à l'aide des résultats obtenus au [chapitre 12](#) pour les écoulements en conduites, qu'en régime laminaire (profil de vitesse parabolique) $\beta = 4/3$. En régime turbulent, le profil en loi de puissance

$$V_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n} \text{ conduit à } \beta = \frac{(1+n)^2 (1+2n)^2}{2n^2 (2+n)(2+2n)}.$$

$Re = U_d D / \nu$	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	10^5	$1,1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$
n	6	6,6	7	8,8	10	10
β	1,03	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01

On voit que, pour la plupart des applications industrielles, il est légitime d'approximer $\beta \sim 1$ si le régime d'écoulement est turbulent.

Finalement, *sous réserve d'un choix judicieux des sections d'entrée et sortie*, on pourra écrire le bilan intégral de quantité de mouvement pour un écoulement interne stationnaire de fluide isovolume sous la forme:

$$\left[(\rho \beta U_d^2 + P) S \vec{N} \right]_s - \left[(\rho \beta U_d^2 + P) S \vec{N} \right]_e = \mathcal{M} \vec{g} + \vec{F}_{p \rightarrow f} \quad (15.7)$$

ou encore, en introduisant le débit masse $Q = \rho U_d S$

$$\boxed{\left[(\beta U_d Q + PS) \vec{N} \right]_s - \left[(\beta U_d Q + PS) \vec{N} \right]_e = \mathcal{M} \vec{g} + \vec{F}_{p \rightarrow f}} \quad (15.8)$$

VALABLE UNIQUEMENT POUR LES ECOULEMENTS INTERNES, STATIONNAIRES ISOVOLUMES

Cette relation permet, par exemple, de déterminer la force exercée par un fluide sur une paroi: $\vec{F}_{f \rightarrow p} = -\vec{F}_{p \rightarrow f}$

15.2 Exemples d'application

15.2.1 Poussée dans un coude

On cherche à déterminer, la force exercée sur un coude 90° réducteur horizontal par un écoulement d'eau (isovolume) en régime permanent.

Il convient d'abord de choisir correctement le volume de contrôle pour pouvoir appliquer l'équation intégrale de quantité de mouvement établie au § précédent.

Les sections d'entrée et de sortie de la "boîte noire" doivent être prises suffisamment loin du coude pour s'assurer que les filets fluides sont rectilignes et parallèles entre elles.

Dans ces conditions, la pression étoilée est constante dans chacune de ces sections et les contraintes visqueuses y sont négligeables devant les forces de pression.

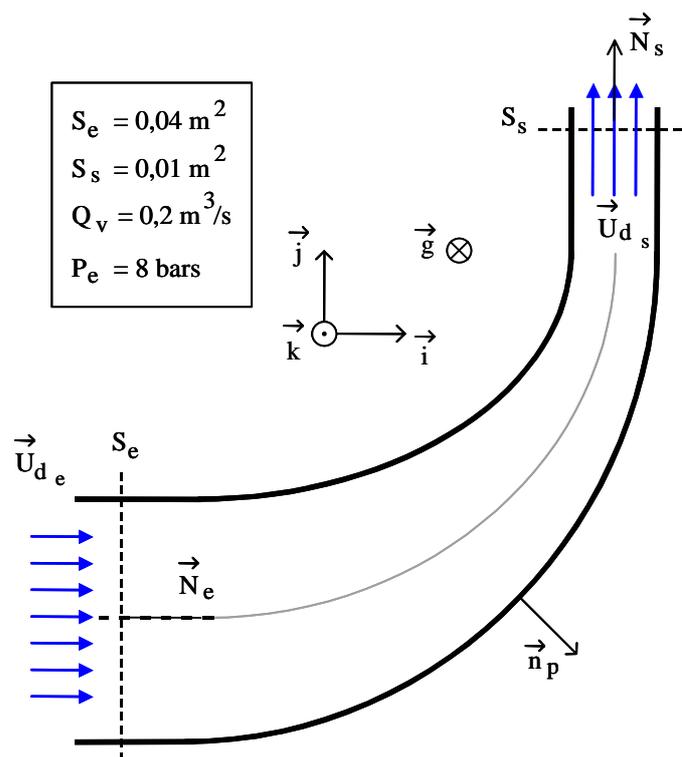
Il s'agit d'un écoulement interne et la relation (15.8) est alors directement utilisable:

$$\vec{F}_{f \rightarrow p} = \mathcal{M} \vec{g} + (\beta_e U_{d_e} Q + P_e S_e) \vec{N}_e - (\beta_s U_{d_s} Q + P_s S_s) \vec{N}_s$$

où $\vec{F}_{f \rightarrow p}$ est la force exercée par le fluide sur le coude: $\vec{F}_{f \rightarrow p} = - \iint_{S_p} (\vec{\tau} - P \vec{n}_p) dS$,

\mathcal{M} est la masse de fluide entre les sections d'entrée et de sortie,

P_e et P_s sont les pressions sur le plan horizontal médian respectivement en (S_e) et (S_s).



Projetons sur les 3 axes:

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{i} : F_x = \beta_e U_{d_e} Q + P_e S_e \\ \text{sur } \vec{j} : F_y = -\beta_s U_{d_s} Q - P_s S_s \\ \text{sur } \vec{k} : F_z = -\mathcal{M} g \end{cases} \quad (15.9)$$

• **Le bilan de masse** s'écrit: $Q = \rho S_e U_{d_e} = \rho S_s U_{d_s} \mapsto$

$$\begin{cases} U_{d_e} = \frac{Q}{\rho S_e} = \frac{0,2}{0,04} = 5 \text{ms}^{-1} \\ U_{d_s} = \frac{Q}{\rho S_s} = \frac{0,2}{0,01} = 20 \text{ms}^{-1} \end{cases} \quad (15.10)$$

Les nombres de Reynolds sont:

$$\begin{cases} \text{Re}_e = \frac{U_{d_e} (4S_e / \pi)^{1/2}}{\nu} = \frac{5(4 \times 0,04 / \pi)^{1/2}}{10^{-6}} = 1,1310^6 \\ \text{Re}_s = \frac{U_{d_s} (4S_s / \pi)^{1/2}}{\nu} = \frac{20(4 \times 0,01 / \pi)^{1/2}}{10^{-6}} = 2,2610^6 \end{cases}$$

L'écoulement étant pleinement turbulent, on prendra $\beta_e = \beta_s = 1$.

• **La relation de Bernoulli**, appliquée entre (S_e) et (S_s) sur la ligne de courant horizontale médiane, donne:

$$\rho \frac{V_e^2}{2} + P_e = \rho \frac{V_s^2}{2} + P_s$$

Pour un écoulement turbulent, on peut utiliser (12.48): $\frac{U_d}{V_{\max}} = \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)}$

et l'on prendra ici $n=10 \mapsto \frac{U_{d_e}}{V_e} = \frac{U_{d_s}}{V_s} = \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)} = 0,87 \Rightarrow \frac{V_e^2}{2} \approx \frac{2}{3} U_{d_e}^2$ et $\frac{V_s^2}{2} \approx \frac{2}{3} U_{d_s}^2$

La relation de Bernoulli donne donc:

$$P_s = P_e - \frac{2}{3} \rho (U_{d_s}^2 - U_{d_e}^2) \mapsto P_s = 5,510^5 \text{ Pa} \quad (15.11)$$

• La substitution des expressions (15.10) et (15.11) dans (15.9) donne, dans le plan horizontal:

$$\begin{cases} F_x = \frac{\rho Q_v^2}{S_e} + P_e S_e \\ F_y = -\left(\frac{\rho Q_v^2}{S_s} + P_s S_s \right) \end{cases}, \text{ soit numériquement: } \begin{cases} F_x = 3,310^4 \text{ N} \\ F_y = -0,9510^4 \text{ N} \end{cases}$$

• **Remarque 1:** Dans le cas d'un coude à section constante, la vitesse de débit est conservée et (15.11) se réduit à $P_e = P_s$. On trouve alors $F_x = \frac{\rho Q_v^2}{S} + PS = -F_y$.

• **Remarque 2:** En prenant $n = 10$, nous avons considéré que les profils de vitesse turbulente, dans les sections (S_e) et (S_s), suivent la loi empirique de puissance (12.47). Ceci peut nous permettre d'estimer (de façon très approximative) le coefficient de perte de charge ξ dans le coude. Il suffit d'écrire la relation intégrale de Bernoulli sur le tube de courant entre (S_e) et (S_s):

$$\alpha_e \frac{U_{d_e}^2}{2g} + \frac{P_e}{\rho g} = \alpha_s \frac{U_{d_s}^2}{2g} + \frac{P_s}{\rho g} + \Delta H_{e \rightarrow s} \quad \text{avec} \quad \alpha_e = \alpha_s \approx 1 \quad \text{et} \quad \Delta H_{e \rightarrow s} = \xi \frac{U_{d_s}^2}{2g}$$

soit:

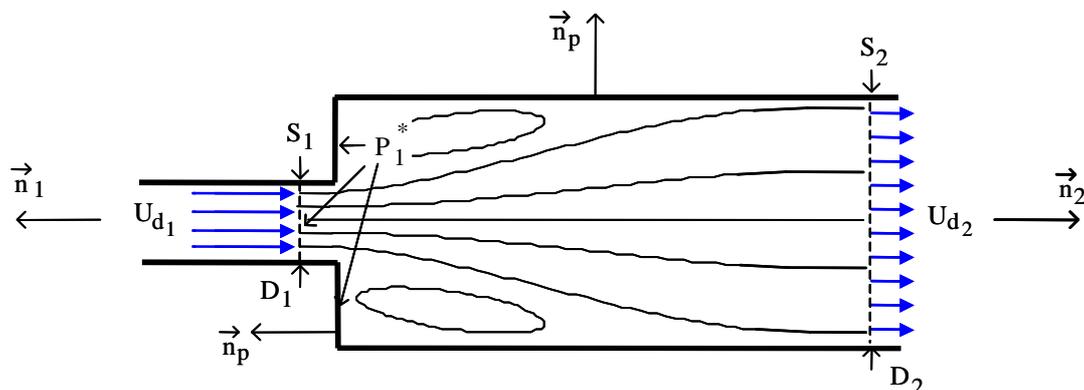
$$P_s = P_e - \frac{1}{2} \rho \left((1 + \xi) U_{d_s}^2 - U_{d_e}^2 \right)$$

dont la comparaison avec (15.11) conduit à:

$$\xi = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{S_s^2}{S_e^2} \right) \mapsto \xi \approx 0,31$$

15.2.2 Perte de charge dans un élargissement brusque

Considérons deux conduites cylindriques de section (S_1) et (S_2) raccordées sur le même axe et telles que $S_2 > S_1$. L'expérience montre que l'écoulement se sépare sur l'arête annulaire du raccordement. Dans la région décollée, on observe la formation d'un tourbillon torique qui induit une perte de charge. A une distance $\ell \sim 20 D_2$, la perturbation est "oubliée" et l'écoulement est à nouveau établi (le profil de vitesse n'évolue plus).



Pour calculer la perte de charge dans cette singularité, et le coefficient associé, nous allons écrire les bilans intégraux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique entre une section en amont et une section en aval dans lesquelles l'écoulement est établi (pas d'évolution longitudinale des profils de vitesse, filets fluides rectilignes et parallèles, écoulement unidimensionnel).

• **Bilan de masse:** $Q = \rho_1 U_{d_1} S_1 = \rho_2 U_{d_2} S_2$ et nous supposons $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

• **Bilan de quantité de mouvement:** Nous partons cette fois de la formulation générale (15.2) dans laquelle le frottement pariétal est négligé. Ceci est justifié par le fait que la recirculation est une zone où les vitesses sont localement faibles, au point qu'on peut la considérer comme une zone d'eau morte.

$$\rho \iint_{S_1 \cup S_2} (\vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_p} P^* \vec{n} dS \quad (15.12)$$

Explicitons cette relation, sachant que $\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 < 0$ et $\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 > 0$, et que P^* est constant dans les sections droites. Il vient:

$$\rho \beta_1 U_{d_1}^2 S_1 \vec{n}_1 + \rho \beta_2 U_{d_2}^2 S_2 \vec{n}_2 = -P_1^* S_1 \vec{n}_1 - P_2^* S_2 \vec{n}_2 - \iint_{S_p} P^* \vec{n} dS \quad (15.13)$$

Dans la zone d'eau morte on peut approximer que la pression est proche de la situation hydrostatique (cette hypothèse s'appuie sur des observations expérimentales); ainsi la pression étoilée sur la section annulaire d'aire $S_2 - S_1$ est assimilable à P_1^* . La projection de (15.13) sur l'axe de la conduite est donc:

$$\begin{aligned} -\rho \beta_1 U_{d_1}^2 S_1 + \rho \beta_2 U_{d_2}^2 S_2 &= P_1^* S_1 - P_2^* S_2 + P_1^* (S_2 - S_1) \\ \rho (\beta_2 U_{d_2}^2 S_2 - \beta_1 U_{d_1}^2 S_1) &= (P_1^* - P_2^*) S_2 \end{aligned} \quad (15.14)$$

• **Bilan d'énergie:** La relation de Bernoulli sur le tube de courant limité par les parois entre (S_1) et (S_2) est (14.11):

$$\left(\alpha_1 \frac{U_{d_1}^2}{2g} + \frac{P_1^*}{\rho g} \right) = \left(\alpha_2 \frac{U_{d_2}^2}{2g} + \frac{P_2^*}{\rho g} \right) + \Delta H_{1 \rightarrow 2} \quad (15.15)$$

avec $\Delta H_{1 \rightarrow 2} = \xi \frac{U_{d_1}^2}{2g}$.

La substitution de $(P_1^* - P_2^*)$ de (15.14) dans (15.15) donne finalement:

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = \underbrace{\left[\alpha_1 + (2\beta_2 - \alpha_2) \frac{S_2^2}{S_1^2} - 2\beta_1 \frac{S_1}{S_2} \right]}_{\xi} \frac{U_{d_1}^2}{2g} \quad (15.16)$$

Les applications les plus courantes en hydraulique concernent des écoulements turbulents. A quelques % près on approxime en général $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$. On obtient alors la relation dite de *Borda-Belanger*:

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = \frac{(U_{d_1} - U_{d_2})^2}{2g} \quad (15.17)$$

Le coefficient de perte de charge, selon que l'on considère la vitesse de référence en amont ou en aval de l'élargissement, est alors donné par:

$$\Delta H = \underbrace{\left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2}_{\xi} \frac{U_{d_1}^2}{2g} \quad \Delta H = \underbrace{\left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2}_{\xi} \frac{U_{d_2}^2}{2g} \quad (15.18)$$

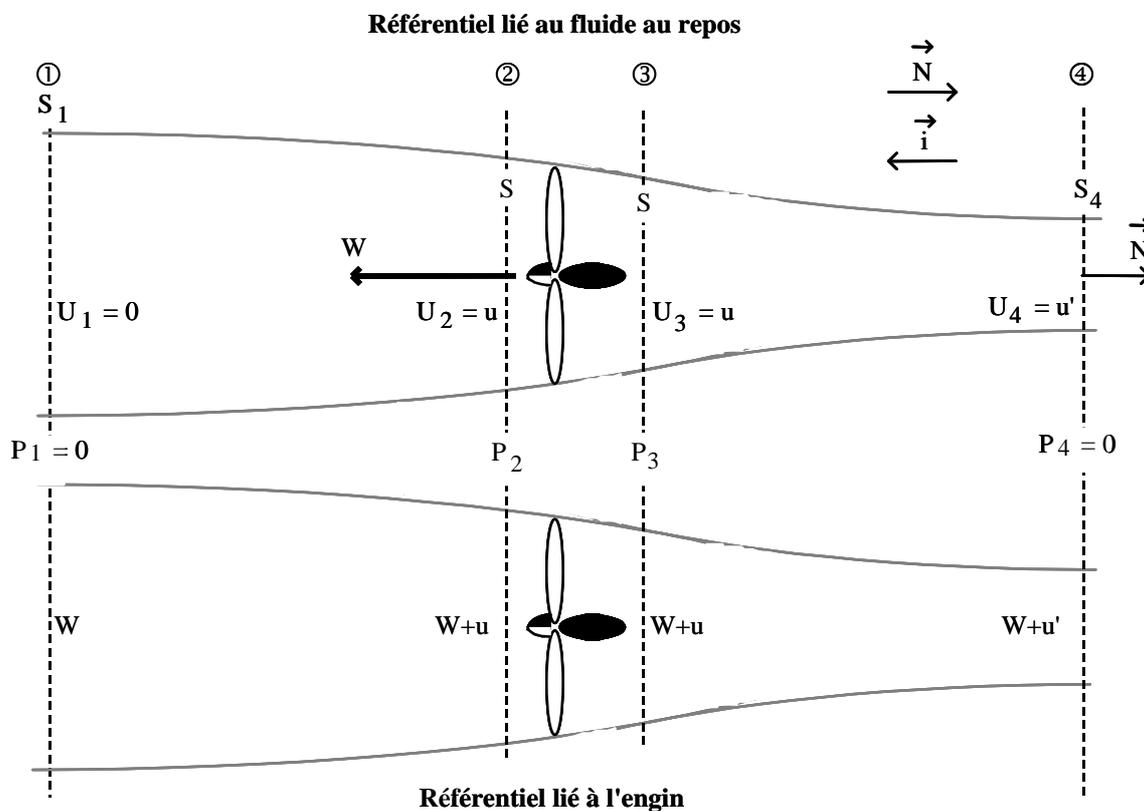
La perte de charge s'annule lorsque $S_1 = S_2$ et elle est maximale lorsque $S_2 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque le conduit 1 débouche dans un réservoir de très grande section.

15.2.3 Puissance d'une hélice

Une hélice propulsive communique au fluide ambiant de la quantité de mouvement dans la direction de son axe. Il en résulte, par réaction, une poussée Π qui est transmise au bateau ou à l'avion (ou au support du ventilateur). Nous allons expliciter la force propulsive Π et le rendement η de propulsion de l'hélice.

Nous considérons une hélice qui se déplace à la vitesse constante W dans un fluide incompressible. Pour simplifier, la pression de référence à grande distance de l'hélice sera prise arbitrairement à zéro. A l'infini amont, le fluide est au repos, et loin en aval sa vitesse est u' . Au voisinage de l'hélice en amont (section ② d'aire S), la vitesse du fluide est u . Immédiatement en aval (section ③), on peut considérer pratiquement que la section de débit est aussi S ; ceci impose, par conservation de la masse, que la vitesse dans la section ③ est également u . Toutes les vitesses et pressions définies ici sont les valeurs moyennes dans les sections.

Plaçons nous maintenant dans le référentiel en translation horizontale uniforme lié à l'hélice. La vitesse du fluide dans les différentes sections est indiquée sur le schéma du bas. La vitesse évolue entre les sections ① et ② d'une part, et entre les sections ③ et ④ d'autre part car l'écoulement amont converge vers l'hélice.



Les bilans intégraux de quantité de mouvement et d'énergie entre les sections ② et ③ vont nous permettre de déterminer la poussée reçue par l'hélice et la puissance utile au déplacement.

• **Bilan de masse:** Nous l'avons déjà exprimé: $Q = \rho_2 U_2 S_2 = \rho_3 U_3 S_3$

et puisque $\rho_2 = \rho_3$ et $S_2 \sim S_3$, on a $U_2 = U_3$

• **Bilan de quantité de mouvement:** Dans la direction horizontale, le bilan intégral de quantité de mouvement entre ② et ③ s'écrit (15.2), en notant S_h l'enveloppe solide de l'hélice:

$$\begin{aligned} \rho \iint_{S_2 \cup S_3} (\vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS &= - \iint_{S_2 \cup S_3 \cup S_h} P^* \vec{n} dS + \iint_{S_h} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{S_2 \cup S_3} P^* \vec{n} dS + \underbrace{\iint_{S_h} (-P^* \vec{n} + \vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS}_{= \vec{F}_{h \rightarrow f} = -\vec{\Pi}} \end{aligned}$$

où $\vec{F}_{h \rightarrow f}$ est la force exercée par l'hélice sur le fluide et $\vec{\Pi}$ l'effort sur l'hélice.

Exprimons les différents termes :

$$\rho \beta_2 (U_2 \vec{i}) (-U_2) S_2 + \rho \beta_3 (U_3 \vec{i}) (U_3) S_3 = -P_2^* (\vec{i}) S_2 - P_3^* (-\vec{i}) S_3 - \Pi \vec{i}$$

Dans ce type d'application, l'écoulement est toujours pleinement turbulent, aussi pouvons-nous approximer $\beta_2 = \beta_3 \sim 1$. Ainsi :

$$-\rho U_2^2 S_2 + \rho U_3^2 S_3 = -P_2^* S_2 + P_3^* S_3 - \Pi$$

et puisque $U_2 = U_3$ et $S_2 \sim S_3$: $\Pi = (P_3^* - P_2^*) S$ (15.19)

• **Bilan d'énergie:** La relation de Bernoulli (14.11), appliquée au tube de courant horizontal entre ② et ③, est ($\alpha_2 = \alpha_3 \sim 1$):

$$\frac{U_3^2}{2g} + \frac{P_3^*}{\rho g} = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2^*}{\rho g} + \frac{\mathcal{E}_m}{\rho g Q_v}$$

où \mathcal{E}_m est la puissance motrice fournie par l'hélice. Puisque $U_2 = U_3$, on obtient:

$$\mathcal{E}_m = Q_v (P_3^* - P_2^*) \quad (15.20)$$

En rapprochant (15.19) et (15.20), on peut décomposer la puissance motrice en deux termes:

$$\mathcal{E}_m = Q_v \Pi / S = \Pi (W + u) = \underbrace{\Pi W}_{P_u} + \underbrace{\Pi u}_{P_e} \quad (15.21)$$

où apparaissent \mathcal{E}_u , interprété comme la puissance utile à la propulsion, et \mathcal{E}_e , l'énergie cinétique communiquée

au fluide par unité de temps et dissipée dans le sillage lointain. On définit le rendement de l'hélice par le rapport

$$\eta = \frac{\mathcal{F}_u}{\mathcal{F}_m} = \frac{\Pi W}{\Pi(W+u)} = \frac{W}{W+u} \quad (15.22)$$

Nous pouvons aller plus loin en recherchant une relation entre les vitesses u et u' . Pour cela nous allons écrire la relation de Bernoulli sur le tube de courant, respectivement entre les sections ① et ②, et les sections ③ et ④.

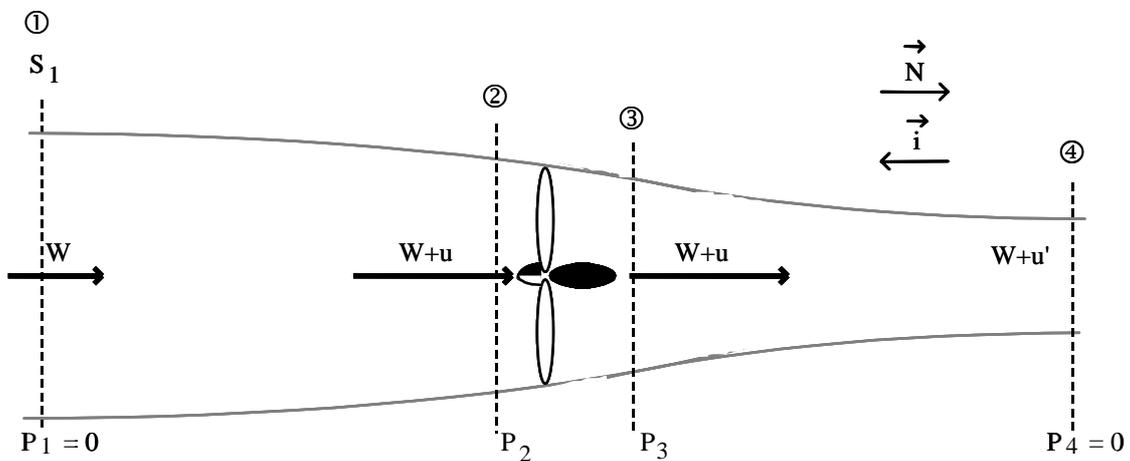
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ entre } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2}: \quad \frac{W^2}{2g} = \frac{(W+u)^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} \\ \bullet \text{ entre } \textcircled{3} \text{ et } \textcircled{4}: \quad \frac{(W+u)^2}{2g} + \frac{P_3}{\rho g} = \frac{(W+u')^2}{2g} \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 - P_2 = \frac{\rho}{2} u' (2W + u') \quad (15.23)$$

La substitution de cette expression de $P_3 - P_2$ dans l'expression (15.19) de la poussée donne:

$$\Pi = \rho S u' \frac{(2W + u')}{2} \quad (15.24)$$

Écrivons pour finir le bilan de quantité de mouvement du fluide contenu dans le tube de courant entre les sections ① et ④. En projection horizontale la relation intégrale (15.8) se réduit à:

$$(W + u')Q - WQ = \Pi$$



Référentiel lié à l'engin

et, en substituant $Q = \rho(W+u)S$, on obtient une autre expression de la poussée:

$$\Pi = \rho S u' (W + u)$$

qu'on peut rapprocher de (15.24). On aboutit alors à: $u = u' / 2$, c'est-à-dire par conservation du débit $S_4 = S/2$.

Section	①	② et ③	④
Vitesse moyenne	W \longrightarrow	W + u	\longrightarrow W + 2u
Aire	2 S	S	S/2

La contraction du tube de courant s'effectue pour moitié en amont et pour moitié en aval. Le rendement propulsif peut maintenant s'exprimer en fonction de W et u' :

$$\eta = \frac{W}{W+u} = \frac{2W}{2W+u'}$$

Il est maximum quand $u' = 0$, mais la poussée est alors nulle. En général, η ne dépasse pas 0,85 pour les avions et 0,60 pour les navires. Pour obtenir u' , il est nécessaire de déterminer expérimentalement la puissance motrice \mathcal{P}_m (ou u).

Annexe 1 Coordonnées cartésiennes

- Système $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

- Tenseur gradient de vitesse $G_{ij} = V_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$

- Tenseur des taux de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) \\ \mathbf{S} & & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(**S** signifie symétrique)

- Tenseur des taux de rotation

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \mathbf{A} & & 0 \end{pmatrix}$$

(**A** signifie antisymétrique)

- Tenseur des contraintes visqueuses newtoniennes

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) & \mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) \\ \mathbf{S} & & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equations du mouvement des fluides newtoniens incompressibles

|| Les forces de volume sont réduites à la seule force de pesanteur
 || μ , K , C_p sont supposés constants
 || Les échanges radiatifs de chaleur sont négligés

• Equation de continuité
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

• Equation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

• Equation de l'énergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} + W \frac{\partial \Theta}{\partial z} = a \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] + \frac{\Phi_1}{\rho C_p}$$

• Fonction de dissipation visqueuse pour les fluides newtoniens

$$\begin{aligned} \Phi_1 = 2\mu &\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right)^2 \right] \\ &+ \mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Annexe 2 Coordonnées cylindriques

- Système $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

- Relation avec les coordonnées cartésiennes:
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

- Tenseur gradient de vitesse:
$$G_{ij} = V_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Tenseur des taux de déformation:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \\ \mathbf{S} & & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Tenseur des taux de rotation:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \\ \mathbf{A} & & 0 \end{pmatrix}$$

- Tenseur des contraintes visqueuses newtoniennes

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} & \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] & \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \\ \mathbf{S} & & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equations du mouvement des fluides newtoniens incompressibles

$\left\| \begin{array}{l} \text{Les forces de volume sont r\u00e9duites \u00e0 la seule force de pesanteur} \\ \mu, K, C_p \text{ sont suppos\u00e9s constants} \\ \text{Les \u00e9changes radiatifs de chaleur sont n\u00e9glig\u00e9s} \end{array} \right.$

• Equation de continuit\u00e9
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

• Equation de quantit\u00e9 de mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \quad + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} = g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \quad + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \\ \quad + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{array} \right.$$

• Equation de l'\u00e9nergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] + \frac{\Phi_1}{\rho C_p}$$

• Fonction de dissipation visqueuse pour les fluides newtoniens

$$\Phi_1 = 2\mu \left\{ \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 + \left[\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 \right\} \\ + \mu \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right]^2 \right\}$$

Annexe 3 Coordonnées sphériques

- Système $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$

- Relation avec les coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \cos\varphi \\ z = r \sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$

- Tenseur gradient de vitesse:

$$G_{ij} = V_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi \cos\theta}{r \sin\theta} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta \cos\theta}{r \sin\theta} \end{pmatrix}$$

- Tenseur des taux de déformation:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right] & \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\varphi}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \mathbf{S} & & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta}{r \tan\theta} \end{pmatrix}$$

- Tenseur des taux de rotation:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] \\ & 0 & -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\varphi}{\sin\theta} \right) \right] \\ \mathbf{A} & & 0 \end{pmatrix}$$

- Tenseur des contraintes visqueuses newtoniennes

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} & \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right] & \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \\ & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) & \mu \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\varphi}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \mathbf{S} & & -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta}{r \tan\theta} \right) \end{pmatrix}$$

Equations du mouvement des fluides newtoniens incompressibles

$\left\| \begin{array}{l} \text{Les forces de volume sont réduites à la seule force de pesanteur} \\ \mu, K, C_p \text{ sont supposés constants} \\ \text{Les échanges radiatifs de chaleur sont négligés} \end{array} \right.$

• Equation de continuité
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

• Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta^2 + V_\varphi^2}{r} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\nabla^2 V_r - \frac{2 V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r \tan \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left[\nabla^2 V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r V_\varphi}{r} + \frac{V_\theta V_\varphi}{r \tan \theta} = g_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left[\nabla^2 V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

• Equation de l'énergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = a \nabla^2 \Theta + \frac{\Phi_1}{\rho C_p}$$

• Fonction de dissipation visqueuse pour les fluides newtoniens

$$\Phi_1 = 2\mu \left\{ \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta}{r \tan \theta} - \frac{\text{div} \vec{V}}{3} \right]^2 \right\} + \mu \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right]^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right]^2 \right\}$$

Dans les équations ci-dessus, l'opérateur ∇^2 est défini par:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Annexe 4 Propriétés physiques des fluides

Température Θ (°C)	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Viscosité cinématique ν (m ² .s ⁻¹)	Conductivité thermique K (J.m ⁻¹ .s ⁻¹ . K ⁻¹)	Diffusivité thermique a (m ² .s ⁻¹)	Nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{a}$
-100	2,040	1,16 10 ⁻⁵	0,57 10 ⁻⁵	1,58 10 ⁻²	0,76 10 ⁻⁵	0,75
-50	1,582	1,45 10 ⁻⁵	0,92 10 ⁻⁵			
0	1,293	1,71 10 ⁻⁵	1,32 10 ⁻⁵	2,41 10 ⁻²	1,84 10 ⁻⁵	0,72
10	1,247	1,76 10 ⁻⁵	1,41 10 ⁻⁵	2,48 10 ⁻²	1,96 10 ⁻⁵	0,72
20	1,205	1,81 10 ⁻⁵	1,50 10 ⁻⁵	2,54 10 ⁻²	2,08 10 ⁻⁵	0,72
30	1,165	1,86 10 ⁻⁵	1,60 10 ⁻⁵			
40	1,127	1,90 10 ⁻⁵	1,69 10 ⁻⁵			
60	1,060	2,00 10 ⁻⁵	1,88 10 ⁻⁵			
80	1,000	2,09 10 ⁻⁵	2,09 10 ⁻⁵			
100	0,946	2,18 10 ⁻⁵	2,30 10 ⁻⁵	3,17 10 ⁻²	3,28 10 ⁻⁵	0,70
200	0,746	2,58 10 ⁻⁵	3,46 10 ⁻⁵			
300	0,616	2,95 10 ⁻⁵	4,81 10 ⁻⁵			
500	0,456	3,58 10 ⁻⁵	7,85 10 ⁻⁵			
1000	0,277	4,82 10 ⁻⁵	17,4 10 ⁻⁵	7,6 10 ⁻²	27,1 10 ⁻⁵	0,64

Coefficient de compressibilité	$\chi = 0,987 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$
Coefficient de dilatation	$\beta = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
Célérité du son	$c = 340,6 \text{ m.s}^{-1}$
Chaleur spécifique à 15 °C	$C_p = 1012 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ $C_v = 718 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ $\gamma = C_p/C_v = 1,402$
Coef. de diffusivité de la vapeur d'eau à 15 °C	$\mathcal{D}_{\text{H}_2\text{O}} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Tableaux A4-1: Propriétés physiques de l'air sec sous une atmosphère (=1,013 10⁵ Pa).

Température Θ (° C)	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Viscosité cinématique ν (m ² .s ⁻¹)	Conductivité thermique K (J.m ⁻¹ .s ⁻¹ . K ⁻¹)	Diffusivité thermique a (m ² .s ⁻¹)	Nombre de Prandtl Pr = $\frac{\nu}{a}$
0	999,9	1,787 10 ⁻³	1,787 10 ⁻⁶	0,56	1,33 10 ⁻⁷	13,4
5	1000,0	1,519 10 ⁻³	1,519 10 ⁻⁶			
10	999,7	1,304 10 ⁻³	1,304 10 ⁻⁶	0,58	1,38 10 ⁻⁷	9,5
15	999,1	1,140 10 ⁻³	1,140 10 ⁻⁶			
20	998,2	1,002 10 ⁻³	1,004 10 ⁻⁶	0,59	1,42 10 ⁻⁷	7,1
25	997,1	0,890 10 ⁻³	0,893 10 ⁻⁶			
30	995,7	0,798 10 ⁻³	0,801 10 ⁻⁶	0,61	1,46 10 ⁻⁷	5,5
35	994,1	0,720 10 ⁻³	0,724 10 ⁻⁶			
40	992,3	0,654 10 ⁻³	0,658 10 ⁻⁶	0,63	1,52 10 ⁻⁷	4,3
50	988,1	0,546 10 ⁻³	0,553 10 ⁻⁶			
60	983,	0,467 10 ⁻³	0,475 10 ⁻⁶	0,65	1,58 10 ⁻⁷	3,0
80	972,	0,355 10 ⁻³	0,366 10 ⁻⁶	0,67	1,64 10 ⁻⁷	2,2
100	958,	0,283 10 ⁻³	0,295 10 ⁻⁶	0,68	1,66 10 ⁻⁷	1,8

Tableau A4-2: Propriétés physiques de l'eau pure sous une atmosphère.

Gaz	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Paramètre de viscosité ⁽³⁴⁾ n	Capacité calorifique Cp (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	Conductivité thermique K (J.m ⁻¹ .s ⁻¹ . K ⁻¹)
Ar		2,22 10 ⁻⁵	0,72	0,518 10 ³	0,0175
Air	1,18	1,85 10 ⁻⁵	0,67	1,012 10 ³	0,0259
He	0,155	1,94 10 ⁻⁵	0,67	5,18 10 ³	0,1504
H ₂	0,082	0,88 10 ⁻⁵	0,68	14,25 10 ³	0,1767
CO ₂	1,14	1,52 10 ⁻⁵	0,79	0,87 10 ³	0,0166
CH ₄		1,09 10 ⁻⁵	0,87	1,41 10 ³	0,0342

Tableau A4-3: Propriétés physiques de quelques gaz usuels à 27°C sous une atmosphère.

(34) Pour ces gaz, on peut utiliser la loi en puissance $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right)^n$ qui donne empiriquement la variation de la viscosité $\mu(\Theta)$ avec une précision de $\pm 4\%$ dans la gamme $250 \leq \Theta \leq 1000$ K ; ici, μ_0 est la viscosité dynamique à la température $\Theta_0 = 293$ K.

Liquide	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Coefficient ⁽³⁵⁾ C	Capacité calorifique Cp (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	Conductivité thermique K (J.m ⁻¹ .s ⁻¹ . K ⁻¹)
H ₂ O	998	1,002 10 ⁻³	Tableau A4-2	4,182 10 ³	0,597
Hg	13 550	1,550 10 ⁻³	1,07	0,139 10 ³	8,36
Ammoniac	608	2,20 10 ⁻⁴	1,05		
C ₆ H ₆	899	0,647 10 ⁻³			0,158
Glycérine	1260	1,49	28,0		0,294
Glycol	1117	2,14 10 ⁻²			
Fréon 12	1327	2,62 10 ⁻⁴	1,76		
Essence	680	2,92 10 ⁻⁴	3,68		
Kérosène	804	1,92 10 ⁻³	5,56		
Méthanol	791	5,98 10 ⁻⁴	4,63		
Huile SAE 10W	870	1,04 10 ⁻¹	15,7		
SAE 10W30	876	1,7 10 ⁻¹	14,0		
SAE 30W	891	2,9 10 ⁻¹	18,3		
SAE 50W	902	8,6 10 ⁻¹	20,2		

(35) Pour ces liquides, on peut utiliser la relation $\frac{\mu}{\mu_0} = \exp \left[C \left(\frac{\Theta_0}{\Theta} - 1 \right) \right]$ qui donne empiriquement la variation de la viscosité $\mu(\Theta)$ avec une précision de $\pm 6\%$ dans la gamme $273 \leq \Theta \leq 373 \text{ K}$; μ_0 est la viscosité dynamique à la température $\Theta_0 = 293 \text{ K}$.

Index

Analyse de similitude:	122
Analyse dimensionnelle	113
Bilan d'énergie cinétique	
Généralités.....	171
Pour les écoulements internes.....	173
Bilan de quantité de mouvement	
Cas des écoulements internes	198
Définition	76
Exemples	
Elargissement brusque.....	203
Poussée sur un coude.....	201
Puissance d'une hélice	205
Forme intégrale (Théorème d'Euler).....	197
Formes locales	78
Bilan intégraux	165
Capacité calorifique	32
Célérité du son	37
Chaleurs spécifiques	37
Cisaillement	50
Coefficient adiabatique	112
Coefficient cinétique b	200
Coefficient d'énergie cinétique a	175
Coefficient de compressibilité	36
Coefficient de dilatation	36
Conductivité thermique	91, 98
Convention de l'indice muet	12
Couette	56
Débit (mesures)	191
Débit masse	169
Débit volume	169
Décomposition du mouvement	52
Dérivée particulaire :	41
Diffuseur	177, 194
Diffusivité matérielle	91, 99
Diffusivité thermique	99, 100, 121
Dilatation	49
Dissipation visqueuse	
Formulation empirique	157
Positivité.....	107
Divergence	19
Echelles	110
Écoulements en conduites	
Profil de vitesse (laminaire).....	156
Profil de vitesse (turbulent)	160
Elargissement brusque	177, 203
Energie cinétique	
Théorème de l'énergie cinétique	79
Energie cinétique	
Définition	31
Energie enthalpique	
Equation de bilan.....	84
Energie interne	
Définition	30
Equation de bilan.....	83
Forme différentielle.....	32
Enthalpie	
Définition	36
Entropie	
Equation de bilan.....	84
Équation d'état	29
Equation de continuité	63, 76, 168
Euler	
Accélération	43
Cinématique Eulerienne	41
Théorème d'Euler	197
Fluides compressibles	
modèle adiabatique.....	134
modèle barotrope.....	133
modèle isotherme	134
Formule de Stokes	22
Formules de Green-Ostrogradski	21
Identités vectorielles	21
Lagrange	40
Laplacien	20
Lignes d'émission	46
Lignes de courant	45
Loi de Fick	91
Loi de Fourier	90
Loi de Newton	
Ecriture.....	93
Exemple de calcul de la contrainte visqueuse .	94
Généralités.....	91
Pour un fluide parfait.....	93
Navier-Stokes	
Diffusion d'un filament tourbillonnaire	152
Écoulement de Couette.....	149
Écoulement de Poiseuille	155
Écoulement entre 2 plaques planes.....	146
Écoulements en conduites	146
Écoulements parallèles	143
Equations générales.....	103
Forme adimensionnelle	117
Généralités.....	101
Limites de validité	158
Pour un fluide isovolume	104
Pour un fluide parfait.....	104
Premier problème de Stokes.....	150

Solutions exactes	143	Relation de Bernoulli	
Nombre d'Euler		Equation	176
Similitude	123	Exemples	186
Nombre de Froude		Pour les fluides parfaits	182
Définition	111	Pour les fluides visqueux.....	174
Interprétation	120	Relation de Torricelli	186
Similitude	123	Rétrécissement brusque	178
Nombre de Lewis.....	99	Rotamètre	193
Nombre de Mach		Rotation.....	48
Similitude	124	Rotationnel.....	20
Nombre de Mach:.....	112	Rugosité	
Nombre de Péclet		Valeurs pour quelques matériaux	164
Définition	112	Sonde de Prandtl	190
Interprétation	121	Statique	
Nombre de Prandtl.....	99	Centrifugation.....	133
Nombre de Reynolds		Équilibres pseudo-statiques.....	132
Définition	112	Mesure de la pression statique.....	137
Ecoulement en conduites	160	Relation fondamentale.....	129
Interprétation	119	Résultante de pression sur une paroi	135
Similitude	123	Tension superficielle	139
Nombre de Strouhal.....	111	Théorème d'Archimède.....	130
Nombre d'Eckert.....	112	Surface portante	
Nombre de Schmidt.....	99	Portance.....	115
Nombre d'Euler		Traînée.....	115
Définition	112	Traînée de frottement	117
Nombres adimensionnels		Traînée de pression.....	117
Pour le transport diffusif.....	99	Taux de d'allongement	53
Tableau des nombre principaux.....	125	Taux de dilatation volumique	62
Pertes de charge		Température	
Charge des machines	176	Equation adimensionnelle	120
Exemple de calcul.....	179	Equation locale.....	84
Ligne de charge	181	Tenseur des contraintes	
Notion de charge	175	Composantes	69
Pertes régulières	176	Généralités.....	67
Pertes singulières.....	176, 178	Symétrie	69
Régime laminaire	158	Tenseur des contraintes visqueuses	
Relation de Blasius	161	Composantes	93
Relation de ColeBrook	161	Définition	72
Relation de Darcy	158	Exemple.....	148
Relation de von Kármán.....	161	Tenseurs	
Pression		Changement de base	14
Définition	93	Contraction	15
Mesure dans un écoulement	189	Divergence d'un tenseur.....	19
Pression d'arrêt	188	Généralités.....	13-18
Pression étoilée		Gradient d'un tenseur	19
Effet de courbure	174	Multiplication contractée.....	16
Pression étoilée		Multiplication tensorielle	15
Définition	130	Opérations sur les tenseurs	15
Pression statique		Taux de déformation	54
Dans un fluide au repos	72	Taux de rotation	54
Définition	70	Tenseur d'orientation	17
Mesure dans un écoulement	189	Tenseur gradient.....	19
Produit mixte de 3 vecteurs	18	Vecteur associé à un tenseur antisymétrique ...	18
Produit vectoriel	17	Théorème d'Archimède	Voir Statique
Quantité de chaleur		Théorème de Vaschy-Buckingham	114
Bilan d'énergie	82	Théorème P	Voir Théorème de Vaschy-
Définition	31	Buckingham	
Loi de Fourier.....	90	Théorèmes de transport	
Rayon hydraulique.....	158	Cas d'un volume de contrôle fixe.....	60
Référentiel.....	43	Cas d'un volume de contrôle matériel.....	60

Cas général d'un volume de contrôle arbitraire	58	Expérience de Reynolds	159
En présence d'une surface singulière	61	Généralités.....	159
En vitesse relative	60	Unités et dimensions.....	109
Formes alternatives.....	61	Venturi	191
Généralités.....	57	Viscosité	
Pour un champ vectoriel	60	Définition	93
Trajectoires.....	44	Dimensions.....	98
Translation.....	47	Vitesse de débit.....	169
Tube de courant.....	46	Volume de contrôle	57
Turbulence			

Bibliographie sommaire

- [1] Germain P., 1973, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 1, Ed. Masson.
- [2] Midoux N., 1985, Mécanique et Rhéologie des Fluides en Génie Chimique, Ed. Lavoisier.
- [3] Reid R.C., J.M. Prausnitz & T.K. Sherwood, 1977, The Properties of Gases and Liquids, Mc Graw Hill.
- [4] Yaws C.L., 1977, Physical Properties, Mc Graw Hill.
- [5] Catchpole J.P. & G. Fulford, 1966, Ind. and Eng. Chem., **58**, 46.
- [6] Danielson D.A., 1992, Vectors and Tensors in Engineering and Physics, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- [7] Roy J.-F., 1981, Fluides Visqueux Incompressibles, Ed. de l'Ecole Nationale des Techniques Avancées, Paris.
- [8] Idel'cik I.E., 1986, Memento des Pertes de Charges, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'EdF, n°13, Ed. Eyrolles.
- [9] Carlier M., 1986, Hydraulique Générale et Appliquée, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'EdF, n°14, Ed. Eyrolles.

Ouvrages conseillés pour les Travaux en Autonomie

- [10] Candel S., 1995, Mécanique des Fluides, Cours, Ed. Dunod.
- [11] Candel S., 1995, Mécanique des Fluides, Problèmes résolus, Ed. Dunod.
- [12] Chassaing P., 1997, Mécanique des Fluides, Eléments d'un premier parcours, Ed. Cépaduès.
- [13] Spurk J.H., 1997, Fluid Mechanics, Problems and solutions, Ed. Springer.
- [14] Morel M.A. et J.-P. Laborde, 1992, Exercices de Mécanique des Fluides, Ed. Eyrolles.
- [15] Meier D. et O. Kempf, 1996, Mécanique des Fluides, Cours avec exercices résolus, Ed. Masson.
- [16] Joulié R., 1998, Mécanique des Fluides Appliquée, Ed. Ellipses.
- [17] Coirier J., 1997, Mécanique des Milieux Continus, Concepts de base, Cours et exercices avec solution Ed. Dunod.
- [18] Ryhming I.L., 1985, Dynamique des Fluides, Ed. Presses Polytechniques Romandes.