



**HAL**  
open science

## Leçons sur les systèmes étendus

Pierre Collet

► **To cite this version:**

| Pierre Collet. Leçons sur les systèmes étendus. 3rd cycle. Damas (Syrie), 2004, pp.62. cel-00376402

**HAL Id: cel-00376402**

**<https://cel.hal.science/cel-00376402v1>**

Submitted on 17 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LEÇONS SUR LES SYSTÈMES ÉTENDUS

par

**P. COLLET<sup>1</sup>**

Centre de Physique Théorique<sup>2</sup>

Ecole Polytechnique

F-91128 Palaiseau CEDEX

---

<sup>1</sup> courrier électronique : [collet@cpht.polytechnique.fr](mailto:collet@cpht.polytechnique.fr)

<sup>2</sup> UMR 7644 du CNRS.



CHAPITRE I  
INTRODUCTION AUX SYSTÈMES ÉTENDUS.

§ I.1. Systèmes confinés.

Avant d'entrer dans l'étude des systèmes étendus je vais discuter quelques notions importantes sur les systèmes dynamiques et en particulier sur les systèmes à nombre fini de degrés de liberté excités qui vont nous servir par la suite de base pour les généralisations.

Nous utiliserons à titre d'exemple illustratif le mouvement d'un fluide visqueux Newtonien incompressible sur un tore de dimension 2. L'exemple plus concret de la tasse de café "modérément" agitée par une cuillère sera aussi parfois évoqué (bien que ce cas présente des difficultés mathématiques non encore résolues).

Pour étudier un tel système, il faut tout d'abord déterminer l'espace de phase, c'est à dire l'espace de tous les états possibles du système, et ensuite donner l'évolution temporelle de ces états. Dans le cas du tore, l'espace de phase sera l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle sur le tore (ou encore périodiques dans les deux directions). Chaque état du système est un champ de vitesse possible du fluide à un instant donné. La condition de divergence nulle décrit la conservation de la masse dans le cas incompressible.

L'équation d'évolution qui se déduit de la loi de Newton et de relations phénoménologiques entre contraintes et déformations est l'équation de Navier-Stokes. Elle s'écrit pour le champ de vitesse  $\vec{v}$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \bullet \vec{\nabla})\vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (N.S.)$$

où  $\nu$  est la viscosité,  $p$  est la pression, et  $\vec{f}$  une force extérieure (nous avons fixé la densité du fluide égale à l'unité). En présence de bords (par exemple pour la tasse de café) il faut rajouter des conditions aux bords.

L'équation N.S. ne paraît pas close pour la vitesse à cause de la présence du terme de pression. Celui-ci peut être éliminé en utilisant la contrainte de divergence nulle. On obtient par exemple en prenant la divergence de l'équation

$$\Delta p + \operatorname{div} ((\vec{v} \bullet \vec{\nabla})\vec{v}) = \operatorname{div} \vec{f},$$

ce qui permet de déterminer la pression. En principe nous avons donc un système d'équations d'évolution clos pour le champ de vitesses instantané  $\vec{v}$ .

**Remarque I.1.** Le système N.S. est dissipatif. Pour discuter ce point important, commençons par le cas  $\vec{f} = \vec{0}$ . Nous pouvons facilement écrire une équation pour l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale. Il vient après intégration par parties

$$\partial_t \int_{T^2} \vec{v}^2 d^2x = -\nu \int_{T^2} \sum_{i,j} (\partial_i v^j)^2 d^2x \leq 0 .$$

De plus le second membre de l'équation est nul si et seulement si le champ de vecteur  $\vec{v}$  est constant. Autrement dit le système perd de l'énergie cinétique à cause des frottements visqueux et la dynamique converge vers une vitesse constante que l'on peut toujours éliminer par transformation de Galilée. La dynamique asymptotique est donc une dynamique de repos, à vitesse nulle, les frottements ont consommé toute l'énergie cinétique contenue dans le champ de vitesses initial.

Ce phénomène est bien connu et s'observe simplement dans la tasse de café : quand on cesse l'agitation par la cuillère, le café reste encore un peu de temps en mouvement mais s'arrête rapidement. Pour maintenir le système en mouvement, il faut compenser les pertes d'énergie cinétique dues aux frottements visqueux par un apport extérieur, c'est le rôle du travail de la force  $\vec{f}$ . Nous avons en présence d'une force :

$$\partial_t \int_{T^2} \vec{v}^2 d^2x = -\nu \int_{T^2} \sum_{i,j} (\partial_i v^j)^2 d^2x + \int_{T^2} \vec{v} \cdot \vec{f} d^2x ,$$

et nous pouvons maintenant espérer qu'une dynamique asymptotique plus intéressante va s'installer.

**Remarque I.2.** L'espace de phase du système est de dimension infinie. Pour mettre ce fait en évidence nous allons utiliser les séries de Fourier (c'est pourquoi l'exemple du tore est particulièrement commode bien que l'argument soit général). Nous supposons les deux périodes du tore égales à  $2\pi$ . Il vient pour les deux composantes de la vitesse  $v^j$  ( $j = 1, 2$ )

$$v^j(x, y) = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} a_{m,n}^j e^{i(mx+ny)} .$$

Puisque les champs de vitesses sont réels, nous avons les relations

$$a_{m,n}^j = \overline{a_{-m,-n}^j} . \tag{I.1}$$

De plus la condition d'incompressibilité implique les relations

$$ma_{m,n}^1 + na_{m,n}^2 = 0 . \tag{I.2}$$

Malgré ces contraintes, il reste un nombre infini de variables  $a_{m,n}^j$  indépendantes, et donc un espace de phase de dimension infinie qui est l'espace des paires de suites à deux indices de nombres complexes satisfaisant les contraintes précédentes I.1 et I.2.

**Remarque I.3.** En général on impose des conditions de régularité sur les champs de vecteurs, par exemple d'être dans l'espace de Sobolev  $H^1$  ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{n,m \in \mathbf{Z}} (1 + m^2 + n^2) [|a_{m,n}^1|^2 + |a_{m,n}^2|^2] < \infty. \quad (\text{I.3})$$

Le lecteur pourra facilement se convaincre que toutes les contraintes ci-dessus I.1 I.2 et I.3 laissent encore un espace vectoriel de dimension infinie. Encore faudrait-il montrer que toutes ces contraintes sont conservées par l'évolution à tous les temps. Ceci est vrai en dimension 2, et reste un problème ouvert en dimension 3 (en particulier pour (IV.3)).

Si on traduit les équations N.S. sur les composantes de Fourier, on obtient un système infini d'équations différentielles ordinaires couplées. Si on note par  $\vec{q}$  le vecteur d'entiers  $(m, n)$ , ce système s'écrit (après élimination de la pression comme expliqué plus haut)

$$\frac{da_{\vec{q}}^j}{dt} = -\nu \vec{q}^2 a_{\vec{q}}^j - i \sum_{k=1,2} \left( \delta_k^j - \frac{q^j q_k}{\vec{q}^2} \right) \sum_{l=1,2} q_l \sum_{\vec{p} + \vec{r} = \vec{q}} a_{\vec{p}}^l a_{\vec{r}}^k + f_{\vec{q}}^j,$$

où  $\delta_k^j$  est le symbole de Kronecker, et où nous avons noté par  $f_{\vec{q}}^j$  les composantes de la transformée de Fourier de la force  $\vec{f}$ .

Bien que ce système dynamique possède un espace de phase de dimension infinie, il y a dans la dynamique suffisamment de compacité pour qu'il se réduise en quelque sorte à une dynamique de dimension finie. La propriété principale est que le semi-groupe d'évolution associé à la partie linéaire est un opérateur compact. Ceci permet par exemple d'utiliser directement les théorèmes de bifurcation qui sont formulés dans un contexte même un peu plus général (voir [G.H.]). De même les théorèmes de variétés centrales et de formes normales s'appliquent sans difficulté. Il a aussi été possible de démontrer en s'appuyant sur cette même propriété de compacité que pour toutes les valeurs des paramètres (ici la viscosité et la force) le système possède un attracteur compact de dimension de Hausdorff finie. Pour des systèmes analogues on a même pu démontrer l'existence d'une variété inertielle. C'est en quelque sorte une extension de la notion de variété centrale. Il s'agit d'une variété invariante compacte de dimension finie qui contient l'attracteur et qui attire transversalement la dynamique. Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue<sup>1</sup> et aux références qu'il contient pour plus de

---

<sup>1</sup> I.Chueshov. Global attractors for non-linear problems of mathematical physics. Russ. Math. Surv. **48**, 133-161 (1993).

détails. Signalons seulement que pour l'équation de Navier-Stokes en dimension deux ce programme n'est pas encore terminé.

En résumé, de nombreux problèmes provenant directement de questions physiques même si leur espace de phase est réellement de dimension infinie se comportent quant à leur dynamique asymptotique comme des systèmes de dimension finie. L'origine profonde de ce comportement est la compacité des semi-groupes d'évolution linéarisés, qui en dernier ressort repose sur des propriétés d'opérateurs différentiels elliptiques dans des domaines bornés (à frontière pas trop irrégulière).

Une autre façon peut être plus physique de voir les choses repose sur l'amortissement des modes. Il n'y a dans le système qu'un nombre fini de modes excités, les autres modes sont très amortis et sont esclaves des modes excités. Nous reviendrons plus loin un peu plus en détails sur cette idée.

### § I.2. Systèmes étendus.

Tout pourrait donc paraître très satisfaisant mis à part quelques problèmes techniques. Cependant il y a deux difficultés importantes qui surgissent en ce point.

La première est d'un caractère pratique. Supposons par exemple que nous voulions mesurer dans une expérience la dimension d'un attracteur ou le nombre d'exposants de Liapounoff positifs. Pour faire ces mesures il faut disposer d'un signal temporel suffisamment long, et plus l'attracteur est de grande dimension plus il faut un long signal. Ceci pose des bornes concrètes sur les dimensions qui peuvent être mesurées avec fiabilité. Dans l'état actuel des méthodes il est illusoire de prétendre à une mesure fiable de dimension plus grande que 7 à 10. A titre d'illustration donnons quelques conjectures sur des dimensions d'attracteurs :

tasse de café  $\sim 5-10$ ,

atmosphère terrestre  $\sim 1000$ ,

atmosphère de Jupiter  $\sim 10^6$ .

Autrement dit il y a peu d'espoir de faire des mesures fiables de dimension d'attracteur dans des grands systèmes. Il faut cependant remarquer que ce n'est pas la théorie des systèmes dynamiques qui est mise en défaut. Par exemple les attracteurs sont toujours de dimension finie (pourvu que la dynamique ne soit pas singulière), il existe des bornes rigoureuses sur ces dimensions en fonction des paramètres, et toujours au fond pour la même raison liée à la compacité de certains opérateurs. Ce qui se passe c'est que la dynamique devient beaucoup plus compliquée, les attracteurs aussi, et nous savions déjà que l'étude des systèmes dynamiques s'est surtout développée dans les basses dimensions : un et deux pour les transformations, deux et trois pour les champs de vecteurs.

Pour voir un peu plus clairement que le nombre de modes instables croît avec la taille du système, nous pouvons considérer comme exemple simple l'équation de la chaleur instable pour une fonction réelle  $u(t, x)$  sur un cercle de longueur  $L$  :

$$\partial_t u = u'' + \alpha u ,$$

où  $\alpha > 0$  est un paramètre d'instabilité. Ce problème se résout immédiatement en utilisant les séries de Fourier. Si nous posons

$$u(t, x) = \sum_{q \in \mathbf{Z}} u_q(t) e^{2i\pi qx/L} ,$$

il vient l'équation d'évolution des coefficients de Fourier :

$$\frac{du_q}{dt} = \left( \alpha - \frac{4\pi^2 q^2}{L^2} \right) u_q .$$

Nous voyons donc que les modes  $|q| \leq L\sqrt{\alpha}/2\pi$  sont instables et que tous les autres sont stables (et en fait décroissent exponentiellement vite vers zéro). Bien sûr dans une situation non linéaire il y aurait aussi saturation de l'amplitude des modes instables, et les modes stables ne relaxeraient plus en général à zéro mais vers une dynamique essentiellement gouvernée par les modes instables. Nous pouvons aller un peu plus loin avec ce petit modèle. Tout d'abord nous voyons qu'à paramètre ( $\alpha$ ) fixé, le nombre de modes instables croît avec la taille ( $L$ ) du système, ici la croissance est linéaire. Si nous regardons le spectre de l'opérateur linéarisé (ici l'évolution est même linéaire), ce spectre est l'ensemble de nombres complexes

$$\left\{ \alpha - \frac{4\pi^2 q^2}{L^2} \quad ; \quad q \in \mathbf{Z} \right\} . \quad (\text{I.4})$$

Nous voyons que cet ensemble devient très dense si  $L$  est grand. Au voisinage de la partie la plus instable, la distance entre valeurs propres est de l'ordre de  $1/L^2$ . Imaginons un système expérimental dont la dynamique serait décrite par cette équation. Partant d'une situation stable  $\alpha < 0$ , solution stationnaire  $u = 0$ , l'expérience consisterait à tourner le bouton  $\alpha$  vers les valeurs positives pour voir apparaître les bifurcations. Malheureusement la précision de l'expérience étant finie il sera très difficile d'observer le passage dans le demi plan droit (instabilité) d'une seule valeur propre. Si la précision du bouton de contrôle est moins bonne que  $1/L^2$  on aura tendance à faire passer d'un coup beaucoup de valeurs propres dans le demi plan droit ce qui aura tendance à créer dès la déstabilisation expérimentale un attracteur de grande dimension.



La seconde difficulté vient aussi des observations expérimentales. Si nous observons notre tasse de café agitée modérément par la cuillère nous observons des structures de type vortex. Imaginons faire l'analyse de ce système dynamique, nous allons utiliser comme pour le cas du tore une base de développement des solutions, par exemple une base de Fourier. Une étude plus approfondie conduirait à isoler les modes dominants grâce à une réduction de type variété centrale ou inertielle. Mais si on sait dans de nombreux cas montrer que ces modes existent, il est rare de pouvoir les décrire avec précision. Autrement dit nous avons bien des descriptions exactes de la dynamique asymptotique du système, sans aucune perte d'information, mais nous ne savons pas lire sur ces développements certaines informations physiques intéressantes comme les structures.

Ces deux difficultés vont en fait nous guider dans les démarches qui vont suivre. Nous allons essayer de comprendre comment sont produites ces structures. Elles sont en effet nombreuses dans la nature : les vagues sur la mer, certaines organisations nuageuses, la surface du soleil, les raies du zèbre etc. et un grand nombre d'expériences de laboratoire permettent de les observer (voir par exemple [V.D.] pour de nombreuses illustrations). Pour étudier ces phénomènes l'idée de base va être un peu la même qu'en mécanique statistique : nous allons directement essayer d'étudier les systèmes d'extension infinie, en espérant que comme pour les transitions de phases en mécanique statistique, des concepts et des méthodes intéressants vont se dégager. Nous pouvons par exemple déjà penser que l'approximation des grands systèmes sera intéressante dans le cas où la taille du système est beaucoup plus grande que la taille des structures. C'est par exemple le cas pour les vagues sur la mer, pour les tailles des structures nuageuses par rapport au rayon terrestre, mais ce n'est pas le cas pour les vortex de la tasse de café, les ouragans terrestres ou la tache rouge de Jupiter.

Considérer des domaines infinis va nous amener à la fois des difficultés techniques, mais aussi certaines simplifications de calcul. La première difficulté technique est facile à deviner à partir des considérations sur le spectre I.4. En effet, formellement quand  $L$  devient infini ce spectre devient une demi-droite, c'est à dire un spectre continu. Rappelons que la théorie des bifurcations est entièrement basée sur des spectres discrets, elle ne pourra donc au mieux que nous servir de guide. L'autre problème (plus mathématique) qui se posera sera de rétablir les résultats d'existence d'unicité et de régularité des équations d'évolution dans des domaines non bornés et dans des espaces fonctionnels un peu inhabituels. En effet nous ne voulons pas en général considérer des fonctions qui tendent vers zéro à l'infini (comme dans les espaces de type  $L^p$  avec  $p$  fini), mais nous voulons des espaces fonctionnels qui contiennent par exemple des ondes de différentes longueur d'onde.

La simplification de certains calculs va par contre venir du fait qu'en domaine infini nous allons utiliser la transformée de Fourier au lieu des séries de Fourier. On peut

d'ailleurs remarquer à ce sujet que dans la littérature physique on remplace souvent séries de Fourier par intégrale de Fourier ce qui peut être considéré comme faisant tacitement l'approximation d'un domaine infini.

Donnons maintenant quelques idées sur ce que nous allons étudier plus concrètement. Nous allons considérer dans la suite des équations aux dérivées partielles "paraboliques" non linéaires avec variable spatiale dans  $\mathbf{R}^n$  (parabolique est à entendre en un sens élargi car nous allons aussi considérer des équations de degré supérieur au second). Trois groupes de questions principales se posent :

- Existence, unicité, régularité de solutions globales en temps, non triviales à l'infini dans l'espace (ondes). Autrement dit le système dynamique est-il bien défini ?
- En s'inspirant de la théorie des bifurcations : Recherche de solutions physiquement intéressantes, stabilité, instabilité en fonction d'un paramètre (structures).
- Dynamique asymptotique, interaction des structures, chaos spatio temporel etc.

**Remarque I.4.** Même si pour une équation donnée la première question ne peut pas être résolue globalement en temps ou en espace de phase, il peut être quand même intéressant de passer à la seconde. Par exemple si une solution stationnaire est linéairement stable, on peut essayer de montrer qu'elle est localement non linéairement stable, ce qui établit le premier point dans un voisinage de cette solution.

### § I.3. Équations modèles.

Ce programme, appliqué dans des situations venant directement de la physique, est l'objet de nombreux travaux mais mène souvent à des calculs algébriquement compliqués et à des difficultés analytiques pas toujours complètement surmontées à l'heure actuelle. Comme pour les systèmes dynamiques de dimension finie, il s'est développé depuis quelques années un arsenal d'exemples plus simples que les équations des systèmes physiques mais qui au moins qualitativement présentent les mêmes comportements intéressants. Nous allons surtout dans la suite discuter ces modèles qui ont l'avantage de la simplicité. Il nous permettront de mettre en évidence plus facilement les concepts fondamentaux et de faire une discussion mathématique moins lourde. Certains de ces modèles sont des approximations d'équations physiques réelles, d'autres sont des analogues des formes normales des bifurcations usuelles, nous reviendrons plus en détails sur ce point. Nous allons pour l'instant donner quelques exemples que nous rencontrerons souvent (il y en a bien d'autres).

#### Équation de Swift Hohenberg.

C'est une équation pour un champ réel  $u(t, x)$ , avec  $x \in \mathbf{R}$  et  $t \in \mathbf{R}^+$ . Elle dépend d'un paramètre  $\eta \in \mathbf{R}$  et est donnée par

$$\partial_t u = [\eta - (1 + \partial_x^2)^2] u - u^3. \quad (S.H.)$$

La partie linéaire provient d'une approximation d'un problème de convection. La partie non linéaire est plus ad-hoc, elle défavorise les grands champs.

### Équations de Ginzburg Landau.

L'équation de Ginzburg Landau complexe décrit l'évolution d'un champ complexe  $A(t, x)$  avec  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{R}^+$ . Elle dépend de deux paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$  et s'écrit

$$\partial_t A = (1 + i\alpha)\Delta A + A - (1 + i\beta)A|A|^2. \quad (G.L.C.)$$

On la rencontre parfois avec des coefficients différents mais elle peut toujours être ramenée à cette forme par des changements d'échelles et multiplication de la solution par une phase qui dépend du temps. Elle apparaît souvent (ainsi que des équations reliées) comme une "forme normale" d'instabilité (voir plus loin). Faisant tendre les paramètres vers l'infini et en changeant d'échelle on obtient comme limite formelle l'équation de Schrödinger non linéaire. Si  $\alpha = \beta = 0$  on parle simplement de l'équation de Ginzburg Landau (G.L.) et si de plus le champ  $A$  est réel, on parle de l'équation de Ginzburg Landau réelle (G.L.R.).

### Équation de Burgers.

C'est une équation pour un champ réel  $u(t, x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $t \in \mathbf{R}^+$ . C'est ce qui s'obtient naïvement en transposant l'équation de Navier-Stokes en dimension 1 :

$$\partial_t u = u'' + uu'. \quad (B.)$$

Il manque bien sûr la pression ce qui rend son comportement assez différent de l'équation de Navier-Stokes. Elle a cependant été beaucoup étudiée. Si on lui ajoute une force aléatoire on obtient un modèle d'interface rugueuse. On la rencontre avec d'autres coefficients mais on peut se ramener à cette forme par changement d'échelles. Si le champ réel  $\phi$  satisfait l'équation

$$\partial_t \phi = \phi'' + \phi'^2/2,$$

sa dérivée  $u = \phi'$  satisfait l'équation de Burgers.

### Équation de Kuramoto Shivashinski.

C'est à nouveau une équation pour un champ réel  $u(t, x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $t \in \mathbf{R}^+$ . Elle s'écrit

$$\partial_t u = -\partial_x^4 u - \partial_x^2 u + u\partial_x u. \quad (K.S.)$$

Elle a été introduite pour décrire les propagations de flamme, mais on la rencontre aussi comme "forme normale". Sa non linéarité est plus physique (comparer a S.H.). Si le champ  $\phi$  satisfait l'équation

$$\partial_t \phi = -\partial_x^4 \phi - \partial_x^2 \phi + (\partial_x \phi)^2 ,$$

la fonction  $u = 2\phi'$  satisfait (K.S.).

### Équations de réaction diffusion.

C'est une famille innombrable d'équations que l'on rencontre en chimie, en biologie, en écologie et dans bien d'autres domaines. Elles décrivent par exemple l'évolution des concentrations chimiques, densités de populations etc. Elles sont obtenues à partir des équations cinétiques des réactions chimiques en ajoutant les termes de diffusion des différentes espèces avec éventuellement des coefficients de diffusion différents. Si le système contient  $s$  espèces chimiques, son état à un instant  $t$  est décrit par un champ  $\vec{C}(t, x) \in \mathbf{R}^s$ , avec  $x \in \mathbf{R}^n$  et  $t \in \mathbf{R}^+$  ( $n = 3$  en général). L'équation est donnée par une matrice  $D$  et un champ de vecteurs  $\vec{F}$  sur  $\mathbf{R}^s$ . La matrice  $D$  est de dimension  $s \times s$  et nous la supposons pour simplifier constante, diagonale et à coefficients strictement positifs sur la diagonale (les coefficients de diffusion). Nous supposons aussi que le champ de vecteurs  $\vec{F}$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $t$  mais il pourra dépendre de paramètres. Il contient diverses informations sur la cinétique chimique : loi d'action de masse, coefficients cinétiques, ou la dynamique des espèces : interaction prédateurs-proies etc. L'équation de réaction diffusion s'écrit

$$\partial_t \vec{C} = D \Delta \vec{C} + \vec{F}(\vec{C}) . \quad (R.D.)$$

Nous laissons le lecteur imaginer les variantes : couplages avec la température, l'hydrodynamique, l'électrochimie, milieux poreux etc. L'un des premiers articles fondamentaux sur les structures dans les domaines étendus est du à A.Turing et porte sur ces équations<sup>1</sup>.

**Remarque I.5.** Pour toutes ces équations, en domaine fini il faudrait bien sûr rajouter des conditions aux bords appropriées.

**Remarque I.6.** Certaines de ces équations sont de type gradient, c'est à dire qu'il existe une fonctionnelle  $\mathcal{L}$  telle que l'équation s'écrit

$$\partial_t u = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} .$$

---

<sup>1</sup> A.Turing. The chemical basis of morphogenesis. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **237B**, 37 (1952).

C'est le cas par exemple de (G.L.R.) avec

$$\mathcal{L}(u) = - \int \left( \frac{\vec{\nabla} u^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right) d^n x .$$

Cette propriété est très utile en domaine fini ou en domaine infini dans certains espaces fonctionnels. Elle permet par exemple de démontrer plus facilement l'existence globale en temps des solutions. Pour les solutions en domaine infini qui vont nous intéresser (type ondes), les potentiels sont en général infinis et il ne semble pas exister de manière commode et globale de les renormaliser. L'utilité de ces potentiels et fonctions de Lyapounoff sera donc plus limitée. Cependant nous verrons que pour certaines équations on peut parler de moyennes de ces fonctionnelles par unité de longueur.

## CHAPITRE II

### EXEMPLES D'INSTABILITÉS.

#### § II.1. Écoulement de Poiseuille : Stabilité globale.

Pour se familiariser un peu avec les principaux problèmes nous allons d'abord faire l'analyse de l'une des instabilités classiques : l'instabilité de Poiseuille. Il s'agit de l'instabilité qui se développe pour un écoulement d'un fluide visqueux incompressible bidimensionnel dans une bande de largeur constante  $h$ .

Nous partons donc de l'équation de Navier-Stokes à deux dimension dans une bande infinie dans la première direction  $x$  et comprise entre  $-h$  et  $+h$  dans la deuxième direction  $y$ . Rappelons que ces équations décrivent l'évolution du champ de vitesses  $\vec{v}(t, x, y)$ . La condition d'incompressibilité s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 ,$$

et les conditions au bord pour un fluide incompressible imposent

$$\vec{v}(t, x, \pm h) = \vec{0} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \forall t \in \mathbf{R}^+ .$$

Quand aux équations d'évolution elles s'écrivent :

$$\partial_t \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} p , \quad (N.S.)$$

où  $p$  est la pression et  $\nu$  la viscosité. Rappelons que de la condition de divergence nulle (qui est maintenue dans la dynamique), il suit que le flux au travers d'une section perpendiculaire est constant, c'est à dire que le nombre

$$\Phi = \int_{-h}^h v_1(t, x, y) dy$$

ne dépend pas de  $x$ .

Il est facile de vérifier que la seule solution stationnaire  $\vec{v}_0 = (v_1, v_2)$  est donnée par

$$v_1 = \frac{3\Phi(h^2 - y^2)}{4h^3} \quad v_2 = 0 \quad p_0 = \frac{-3\Phi\nu x}{2h^3} .$$

Puisque la solution est stationnaire, le flux  $\Phi$  ne dépend pas non plus du temps, et remarquons que la pression est donnée à une constante près.

Nous voulons maintenant analyser la stabilité de la solution stationnaire vis à vis de perturbations. Il va bien sûr falloir préciser quel type de perturbations nous allons faire. Dans un premier temps nous allons considérer des perturbations qui tendent vers zéro à l'infini et en particulier nous allons supposer que ces perturbations ne modifient pas le flux (si il est fixé à l'infini, il est fixé partout et indépendant du temps).

Si nous écrivons la solution de l'équation de Navier-Stokes pour une fonction de la forme  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w}$  et  $p = p_0 + q$  il vient pour les fonctions  $\vec{w}$  et  $q$  l'équation

$$\partial_t \vec{w} = \nu \Delta \vec{w} - (\vec{w} \bullet \vec{\nabla}) \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \bullet \vec{\nabla}) \vec{w} - (\vec{w} \bullet \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} q \quad (\text{II.1})$$

ainsi que la contrainte d'incompressibilité

$$\text{div } \vec{w} = 0$$

et les conditions au bord  $\vec{w}(t, x, \pm h) = 0$ . Notons que dans ces équations il n'y a aucune approximation, simplement un changement (translation) de fonction inconnue. Observons qu'en changeant les échelles, nous pouvons toujours supposer  $\nu = 1$  et  $h = 1$ . La dépendance dans le flux et le nombre de Reynolds est maintenant uniquement concentrée dans la fonction  $\vec{v}_0 h / \nu$ . Nous noterons désormais par  $u(y)$  la fonction  $v_1 h / \nu$ , elle est donnée par

$$u(y) = R(1 - y^2) ,$$

où  $R = 3\Phi/4\nu$  est le nombre de Reynolds.

Dans un premier temps nous pouvons faire une analyse de stabilité en utilisant l'énergie cinétique. Il vient en utilisant l'équation N.S. , l'incompressibilité et en intégrant par parties

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \vec{w}^2 dx dy = - \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \sum_{i,j=1}^2 (\partial_i w_j)^2 dx dy - \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} w_1 w_2 u'(y) dx dy .$$

Rappelons l'inégalité de Poincaré à une dimension pour une fonction  $f$  de carré sommable ainsi que sa dérivée sur  $[-1, 1]$  et nulle au bord :

$$\int_{-1}^1 |f(y)|^2 dy \leq \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 |f'(y)|^2 dy .$$

Observons que

$$|w_1 w_2 u'(y)| \leq \|u'\|_\infty \frac{|w_1|^2 + |w_2|^2}{2} \leq R(|w_1|^2 + |w_2|^2) .$$

Nous avons finalement

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \bar{w}^2 dx dy \leq - \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \sum_{j=1}^2 (\partial_1 w_j)^2 dx dy - \int_{\mathbf{R}} dx \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\partial_2 w_j)^2 - R w_j^2] dy .$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (par rapport à  $y$ ) dans la dernière intégrale, nous déduisons que si

$$R < \frac{\pi^2}{4}$$

nous avons

$$\partial_t \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \bar{w}^2 dx dy \leq \eta \int_{\mathbf{R} \times [-1,1]} \bar{w}^2 dx dy$$

où  $\eta = \pi^2/4 - R > 0$ . En particulier la norme  $L^2$  de la perturbation tend exponentiellement vite vers zéro et nous concluons que la solution stationnaire est même globalement non linéairement stable.

## § II.2. Analyse linéaire de l'instabilité de Poiseuille.

Les estimations faites dans le calcul précédent sont trop pessimistes, et la région de stabilité dans le paramètre  $R$  est beaucoup plus grande. Pour trouver sa frontière nous allons maintenant faire une analyse de stabilité linéaire. Pour cela nous linéarisons l'équation de Navier-Stokes autour de la solution stationnaire, ce qui revient à linéariser l'équation II.1 pour  $w$  autour de zéro.

Il vient

$$\partial_t \vec{w} = \nu \Delta \vec{w} - (\vec{w} \bullet \vec{\nabla}) \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \bullet \vec{\nabla}) \vec{w} - \vec{\nabla} q \quad (\text{II.2})$$

avec toujours l'équation d'incompressibilité

$$\text{div } \vec{w} = 0$$

et les conditions au bord  $\vec{w}(t, x, \pm 1) = 0$ .

Comme les équations II.2 sont invariantes par translation en  $x$ , nous pouvons prendre la transformée de Fourier dans cette variable (autrement dit nous allons essayer de diagonaliser simultanément les translations et l'opérateur d'évolution qui commutent). Nous appellerons  $k$  la variable conjuguée et nous noterons de la même façon une fonction et sa transformée de Fourier. Il vient pour les différentes composantes

$$\partial_t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2 w_1 + w_1'' - w_2 u' - i k u w_1 - i k q \\ -k^2 w_2 + w_2'' - i k u w_2 - q' \end{pmatrix} .$$



De même pour l'équation d'incompressibilité

$$ikw_1 + w_2' = 0. \quad (\text{II.3})$$

Nous allons bien sûr chercher un comportement exponentiel en  $t$  (c'est à dire plus correctement le spectre de l'opérateur donné par le membre de droite de l'équation II.2) et nous allons donc remplacer  $\partial_t$  par  $\lambda$ . En ajoutant la dérivée de la première équation multipliée par  $i$  à la deuxième multipliée par  $k$  nous éliminons la pression. Il vient

$$\lambda(iw_1' + kw_2) = -ik^2w_1' + iw_1''' - iw_2u'' - iw_2'u' + ku'w_1 + kww_1' - k^3w_2 + kw_2'' - ik^2uw_2.$$

Finalement en multipliant par  $k$  et en utilisant l'incompressibilité il vient pour  $f = w_2$

$$\lambda(-f'' + k^2f) = -f^{(4)} + 2k^2f'' + ikuf'' - iku''f - k^4f - ik^3uf. \quad (\text{O.S.})$$

Cette équation est équivalente à l'équation dite de Orr Sommerfeld qui est habituellement formulée pour la fonction courant  $\phi = -if/k$ .

Passons maintenant aux conditions aux bords. Nous devons bien sûr avoir

$$w_1(k, \pm 1) = w_2(k, \pm 1) = 0$$

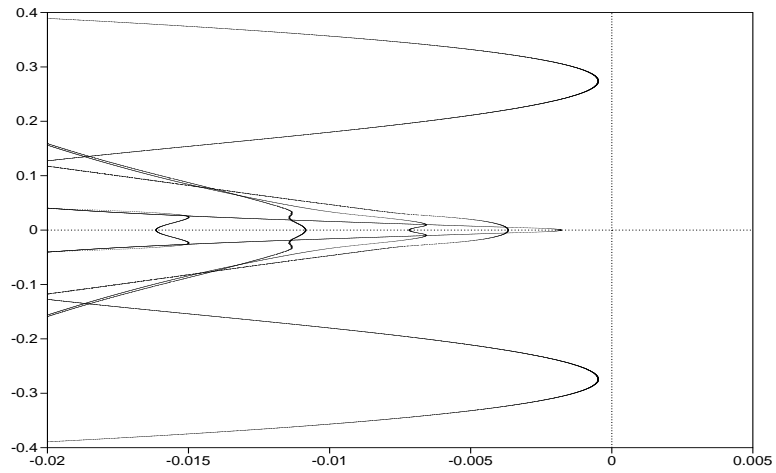
ce qui implique en utilisant II.3 pour tout nombre d'onde  $k$  les conditions

$$f(\pm 1) = f'(\pm 1) = 0.$$

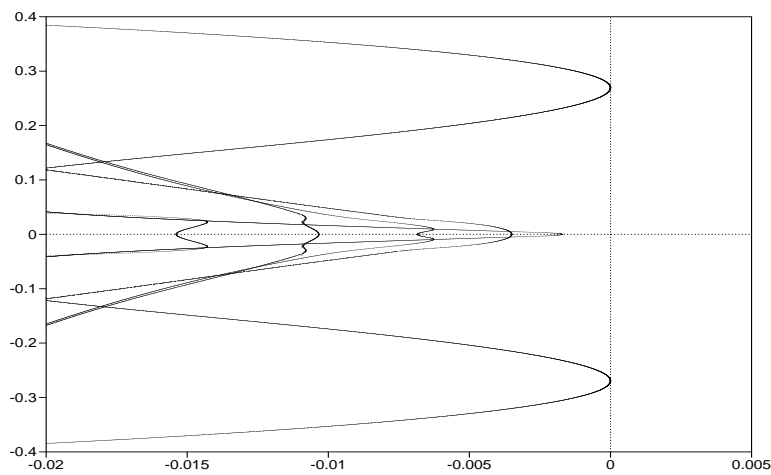
Nous avons donc bien à  $k$  fixé pour la fonction  $f$  un problème spectral du quatrième ordre avec quatre conditions au bord. Notons que pour avoir un problème spectral au sens usuel, il faudrait inverser l'opérateur  $k^2 - d^2/dx^2$ . En général on préfère garder le problème sous cette forme dite de problème de vecteur propre généralisé. Nous devons déterminer pour chaque  $k$  le spectre des  $\lambda$  puis prendre l'union de ces ensembles (noter que cette union est symétrique par rapport à l'axe réel car l'équation initiale est une équation réelle). Si l'ensemble ainsi obtenu est contenu dans l'intérieur du demi plan gauche, nous avons stabilité linéaire. L'instabilité apparaît quand cet ensemble (qui dépend de  $R$ ) croise l'axe imaginaire pur.

Les solutions de l'équation O.S. avec les conditions au bord ci-dessus ne sont pas connues explicitement. Divers approximations ont été étudiées, nous renvoyons à [D.R.] pour des détails et des références. Cette équation a été étudiée numériquement par divers auteurs (voir aussi [D.R.] pour des références). Le seuil critique est donné par  $R_c = 5772,22..$  et le nombre d'onde critique (aussi appelé nombre de Strouhal quand il est sans dimension comme ici) est  $k_c = \pm 1.02056..$  Nous donnons dans les figures

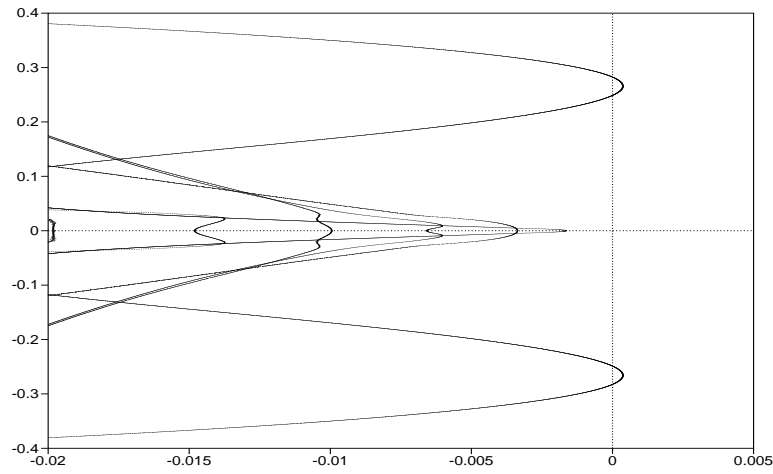
II.1-II.3 la partie du spectre proche de l'axe imaginaire pur pour différentes valeurs de  $R$  proches de  $R_c$ .



**Fig. II.1.** Spectre de l'opérateur de Orr Sommerfeld pour  $R=5500$ .

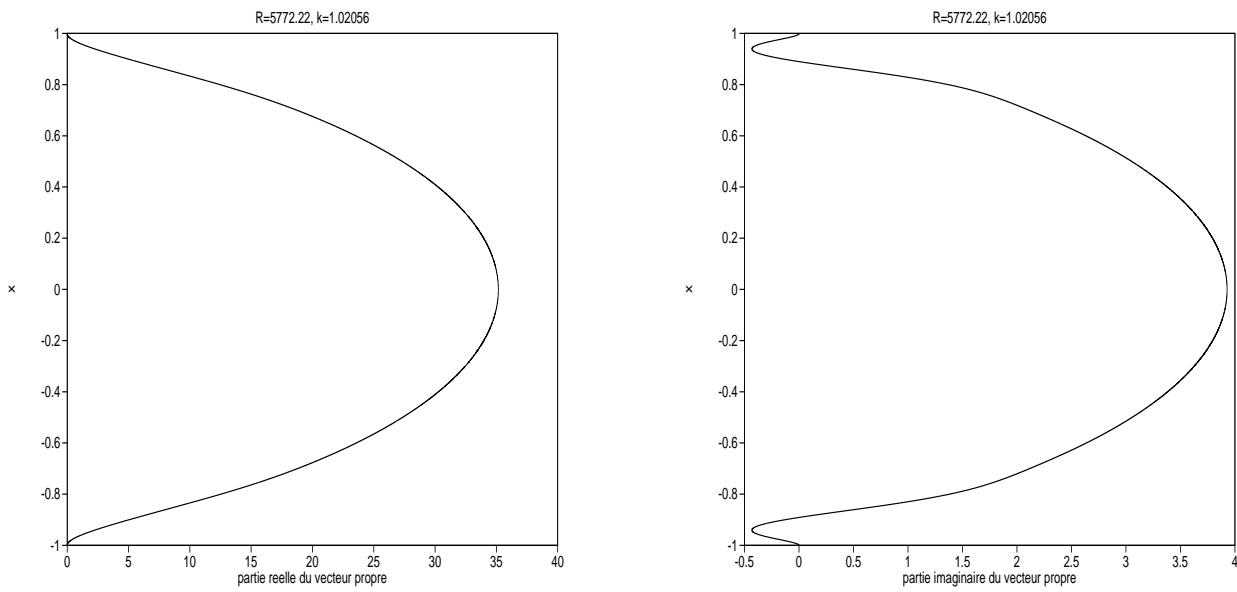


**Fig. II.2.** Spectre de l'opérateur de Orr Sommerfeld pour  $R=R_c=5772,22\dots$



**Fig. II.3.** Spectre de l'opérateur de Orr Sommerfeld pour  $R=6000$ .

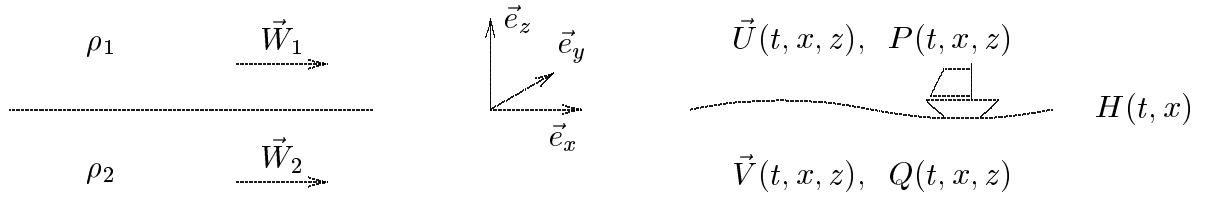
Dans les figures II.4 nous donnons le graphe de la partie réelle et de la partie imaginaire du vecteur propre correspondant au nombre d'onde critique.



**Fig. II.4.** Partie réelle et partie imaginaire du vecteur propre critique de l'opérateur de Orr Sommerfeld.

§ II.3. Instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Considérons deux fluides parfaits incompressibles de densité  $0 < \rho_1 < \rho_2$ . La dynamique du fluide léger est décrite par sa vitesse au point  $M$  notée  $\vec{U}(t, M)$  et sa pression sera notée  $P(t, M)$ . De manière analogue, la dynamique du fluide lourd est décrite par sa vitesse  $\vec{V}(t, M)$  et sa pression est notée  $Q(t, M)$ . Dans un système de coordonnées où l'axe  $z$  est vertical et les axes des  $x$  et  $y$  horizontaux, l'interface entre les deux fluides est donnée par sa hauteur  $z = H(t, x, y)$ . Nous faisons ici l'hypothèse que cette interface est un graphe, les phénomènes beaucoup plus complexes de déferlement sont laissés de côté. Nous supposons toujours le fluide léger au dessus du fluide lourd,  $\vec{U}$  et  $P$  sont donc définis dans le domaine  $z \geq H$ , tandis que  $\vec{V}$  et  $Q$  sont donc définis dans le domaine  $z \leq H$ . Les vecteurs unitaires selon les axes seront notés  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  ce dernier pointant vers le haut.



Les équations d'évolution sont les équations d'Euler :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{U} &= -(\vec{U} \bullet \vec{\nabla}) \vec{U} - \frac{1}{\rho_1} \vec{\nabla} P + \vec{g} \quad z \geq H \\ \partial_t \vec{V} &= -(\vec{V} \bullet \vec{\nabla}) \vec{V} - \frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} Q + \vec{g} \quad z \leq H \end{aligned}$$

avec  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  ( $g$  accélération de la pesanteur), il faut ajouter les conditions d'incompressibilité

$$\text{div}(\vec{U}) = 0 \quad \text{si } z \geq H \quad \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad \text{si } z \leq H,$$

les conditions au bord cinématiques en  $z = H$

$$\vec{U} \bullet \vec{n} = \vec{V} \bullet \vec{n} = \frac{\partial H}{\partial t} n_z$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à l'interface, et finalement la condition au bord pour les forces en  $z = H$  qui s'écrit

$$\frac{\sigma}{R} = P - Q$$

où  $\sigma > 0$  est la tension de surface entre les deux fluides et  $R$  le rayon de courbure de l'interface.

Il existe une solution stationnaire simple de ce système d'équations où l'interface est horizontale et fixe (nous la prendrons en  $H = 0$ ), le fluide léger possède une vitesse constante  $W_1$  dans la direction horizontale des  $x$  et le fluide lourd une vitesse constante  $W_2$  dans la même direction. Il est facile de vérifier que les équations d'évolution et les conditions au bord sont satisfaites avec  $P = -\rho_1gz$  et  $Q = -\rho_2gz$ . Nous allons maintenant analyser la stabilité linéaire de cette solution stationnaire.

Puisque les deux vitesses constantes ont été choisies dans la direction des  $x$  nous allons simplifier l'analyse en ne considérant que le problème dans le plan  $(x, z)$ . Il est facile de voir que la direction transverse ne modifie pas fondamentalement le résultat. Nous utiliserons souvent les indices 1 et 2 pour noter les composantes des vecteurs dans les directions  $x$  et  $z$  respectivement.

Nous allons donc chercher comment évoluent des solutions de la forme

$$\begin{aligned}\vec{U} &= W_1\vec{e}_x + \epsilon\vec{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2) & P &= -\rho_1gz + \epsilon p + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \vec{V} &= W_2\vec{e}_x + \epsilon\vec{v} + \mathcal{O}(\epsilon^2) & Q &= -\rho_2gz + \epsilon q + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

et

$$H = \epsilon h + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où  $\epsilon$  est un petit nombre.

En reportant dans les équations d'évolution, contrainte d'incompressibilité et conditions au bord, et en ne conservant que les termes d'ordre  $\epsilon$  (ordre le plus bas non trivial), nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{u} &= -W_1\partial_x\vec{u} - \frac{1}{\rho_1}\vec{\nabla}p & \text{div}(\vec{u}) &= 0 & \text{pour } z \geq 0 \\ \partial_t\vec{v} &= -W_2\partial_x\vec{v} - \frac{1}{\rho_2}\vec{\nabla}q & \text{div}(\vec{v}) &= 0 & \text{pour } z \leq 0\end{aligned}$$

et de plus en  $z = \epsilon h$

$$\partial_t h = -W_1\partial_x h + u_2 = -W_2\partial_x h + v_2$$

ainsi que

$$\sigma\partial_x^2 h = (p - q) - (\rho_1 - \rho_2)gh.$$

Pour analyser l'évolution de ce système, il est commode de prendre la transformée de Fourier en  $x$  et en  $t$ . Autrement dit une fonction  $F(t, x, z)$  est remplacée par une superposition de fonctions de la forme

$$e^{i\omega t} e^{ikx} f(z),$$

avec  $k$  réel. Pour simplifier nous noterons de la même façon les fonctions et leurs transformées de Fourier.

Considérons tout d'abord les équations d'évolution pour  $u$ . Il vient pour les deux composantes de la vitesse pour le fluide léger

$$\begin{aligned} i\omega u_1 &= -ikW_1 u_1 - \frac{ik}{\rho_1} p \\ i\omega u_2 &= -ikW_1 u_2 - \frac{1}{\rho_1} \frac{dp}{dz} \end{aligned}$$

et pour la condition d'incompressibilité

$$iku_1 + \frac{du_2}{dz} = 0 .$$

Nous pouvons exprimer  $p$  en fonction de  $u_1$  à partir de la première équation,  $u_2$  en fonction de  $dp/dz$  avec la deuxième équation et en reportant dans la troisième équation nous obtenons une équation pour  $u_1$  qui s'écrit après simplification

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} - k^2 u_1 = 0 .$$

Cette équation est à résoudre pour  $z > 0$  (fluide léger) et doit donner une solution bornée. Nous avons donc

$$u_1 = A e^{-|k|z}$$

où  $A$  est une constante à déterminer (qui dépend de  $k$  et  $\omega$ ). En utilisant les équations de départ, nous obtenons

$$p = -\frac{\rho_1}{k} (kW_1 + \omega) A e^{-|k|z}$$

et

$$u_2 = i \frac{k}{|k|} A e^{-|k|z} .$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul similaire pour le fluide lourd ( $z < 0$ ) qui donne les résultats suivants :

$$v_1 = B e^{|k|z} \quad q = -\frac{\rho_2}{k} (kW_2 + \omega) B e^{|k|z} \quad v_2 = -i \frac{k}{|k|} B e^{|k|z} .$$

Nous pouvons maintenant exploiter la condition au bord cinématique en  $z = 0$ , il vient après transformation de Fourier en  $t$  et  $x$

$$i\omega h = -ikW_1 h + i\frac{k}{|k|}A = -ikW_2 h - i\frac{k}{|k|}B$$

d'où nous obtenons

$$A = h\frac{k}{|k|}(W_1 k + \omega), \quad B = -h\frac{k}{|k|}(W_2 k + \omega).$$

Il nous reste finalement à reporter ces résultats dans la dernière condition au bord, et après quelques réarrangements nous obtenons (si  $h(\omega, k) \neq 0$ )

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 + 2\omega k(\rho_1 W_1 + \rho_2 W_2) + k^2(\rho_1 W_1^2 + \rho_2 W_2^2) - \sigma k^2 |k| + (\rho_1 - \rho_2)g|k| = 0.$$

Cette équation qui relie  $k$  et  $\omega$  pour que nous ayons une solution de nos équations est appelée la **relation de dispersion** du problème. Si pour un  $k$  donné nous avons une solution  $\omega(k)$  de cette équation, nous obtenons une solution de nos équations dont chaque composante de vitesse ou chaque pression est donnée par

$$e^{i\omega(k)t} e^{ikx} f(k, z)$$

avec la fonction  $f(k, z)$  adéquate déterminée ci-dessus. En particulier, si pour chaque  $k$  réel, toutes les solutions  $\omega(k)$  de la relation de dispersion sont réelles, il n'y a pas d'instabilité. Par contre si il existe un nombre d'onde  $k$  pour lequel nous obtenons une solution  $\omega(k)$  avec une partie imaginaire strictement négative nous obtenons une instabilité. Notons que puisque la relation de dispersion est à coefficients réels, si nous avons une solution  $\omega$  non réelle, sa complexe conjuguée est aussi solution et nous pouvons alors assurer qu'il existe une solution avec partie imaginaire négative.

Pour déterminer les conditions de stabilité et d'instabilité, nous devons donc chercher sous quelle condition il existe au moins une valeur de  $k$  telle que la relation de dispersion a une solution non réelle. Dans le cas présent, c'est une équation quadratique en  $\omega$ , et il nous suffit donc d'examiner son discriminant. Si il est positif pour tout nombre d'onde  $k$ , les deux solutions en  $\omega$  sont toujours réelles, et il n'y a pas d'instabilité. Si il est négatif pour certains  $k$ , les deux solutions sont non réelles et nous avons instabilité de ces modes. Après quelques simplifications il vient

$$\Delta(k) = |k| [\sigma k^2 (\rho_1 + \rho_2) - |k| \rho_1 \rho_2 (W_1 - W_2)^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2)g].$$

Le signe de cette expression est donné par le signe du trinôme du second degré en  $|k|$  qui est clairement positif pour  $|k|$  grand. Nous avons donc à déterminer si il a des

racines réelles (dans ce cas l'une est certainement positive puisque la somme des racines est positive). Pour décider si il existe ou non des racines réelles, il suffit de calculer le discriminant de ce trinôme qui est donné par

$$\tilde{\Delta} = \rho_1^2 \rho_2^2 (W_1 - W_2)^4 + 4\sigma(\rho_1 + \rho_2)^2(\rho_1 - \rho_2)g.$$

Nous pouvons maintenant conclure que si

$$(W_1 - W_2)^2 \leq 2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{g\sigma(\rho_2 - \rho_1)}$$

la solution stationnaire laminaire à interface plane est stable. Sinon elle est instable pour certains modes.

Au seuil d'instabilité nous obtenons un nombre d'onde critique

$$k_c = \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\sigma}}$$

et une pulsation critique

$$\omega_c = k_c \frac{\rho_1 W_1 + \rho_2 W_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Pour le cas du vent soufflant sur une mer au repos, on obtient une vitesse critique du vent égale à 23,4 km/h, une longueur d'onde critique ( $2\pi/k_c$ ) de 1,71 cm, et une vitesse critique des ondes ( $\omega_c/k_c$ ) de 0,82 cm/s. L'instabilité semble se produire pour des vitesses du vent plus faibles, de nombreux effets ont été négligés dans notre calcul : viscosité, turbulence de l'air, etc.

Dans le cas où le fluide lourd se trouve au dessus du fluide léger ( $\rho_1 > \rho_2$ ) nous obtenons toujours une instabilité, même dans le cas où les deux fluides sont au repos ( $W_1 = W_2 = 0$ ). Dans ce cas on parle de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. La relation de dispersion pour l'instabilité des fluides au repos devient

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - |k|(\sigma k^2 - (\rho_1 - \rho_2)g) = 0$$

et nous voyons que tous les modes tels que

$$|k| \leq \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}}$$

sont instables, autrement dit nous avons instabilité des grandes longueurs d'ondes. On trouve dans le commerce un petit dispositif avec des liquides non miscibles colorés qui exploite cet effet en relation avec la variation en température de la densité des liquides.

De nombreuses autres instabilités classiques sont décrites dans la littérature. Avec des variantes spécifiques au problème étudié, les calculs sont analogues aux calculs précédents. Nous renvoyons à [Ch.], [L.] et [D.R.] pour les détails.



## CHAPITRE III

### ÉTUDE DES INSTABILITÉS.

Nous avons vu dans le chapitre précédent deux exemples d'instabilités de systèmes étendus que nous avons traité en utilisant la transformée de Fourier. Nous allons maintenant reprendre l'étude des instabilités sous une forme générale afin de dégager des idées un peu plus synthétiques.

#### § III.1. Stabilité linéaire.

Pour cela nous allons commencer par un exemple simple : l'équation de Swift-Hohenberg

$$\partial_t v = \left[ \eta - (1 + \partial_x^2)^2 \right] v - v^3 \quad (SH)$$

où  $v(t, x)$  est une fonction réelle de la variable spatiale  $x \in \mathbf{R}$ , et du temps  $t \in \mathbf{R}^+$ , et  $\eta$  est un paramètre réel.

Il est immédiat de vérifier que la fonction  $v_0 = 0$  est une solution stationnaire de SH. Il se pose donc la question de la stabilité de cette solution. Si nous linéarisons formellement l'équation autour de cette solution (c'est à dire que nous posons  $v = v_0 + u$  et gardons seulement les termes linéaires en  $u$ ) nous obtenons l'équation d'évolution linéarisée pour les perturbations :

$$\partial_t u = \mathcal{L}u = \left[ \eta - (1 + \partial_x^2)^2 \right] u. \quad (III.1)$$

**Remarque III.1.** Quand on reporte  $v = v_0 + u$  dans l'équation de départ, le terme indépendant de  $u$  dans le développement en  $u$  disparaît car  $v_0$  est solution de l'équation. Dans le cas particulier étudié ici ce fait est trivial car  $v_0 = 0$ .

**Remarque III.2.** Ici l'équation de départ est invariante par translation et la solution stationnaire étudié est homogène. L'équation linéarisée est une équation à coefficients constants et nous pourrons à nouveau l'étudier en utilisant la transformation de Fourier.

**Remarque III.3.** Nous sommes partis d'une équation réelle pour un champ réel. L'opérateur  $\mathcal{L}$  est donc un opérateur réel et son spectre sera symétrique par rapport à l'axe réel.

**Remarque III.4.** Il faudrait bien sûr préciser les espaces fonctionnels utilisés, les domaines d'opérateurs, fermetures etc.

Si nous prenons la transformée de Fourier, l'équation d'évolution pour la transformée de Fourier  $\mathcal{F}u$  de la perturbation s'écrit

$$\partial_t \mathcal{F}u(t, k) = \omega(k) \mathcal{F}u(t, k) \quad \text{où} \quad \omega(k) = \left[ \eta - (1 - k^2)^2 \right],$$

ce qui s'intègre immédiatement en

$$\mathcal{F}u(t, k) = e^{\omega(k)t} \mathcal{F}u(0, k)$$

et en principe par transformation de Fourier inverse il est possible d'obtenir la fonction  $u(t, x)$ . Dans la pratique ce calcul est rarement possible et nous allons discuter le problème en utilisant au maximum les informations simples qui se lisent dans l'espace de Fourier pour obtenir des résultats dans l'espace direct sur la fonction  $u(x, t)$ . Deux cas se présentent naturellement.

**Premier cas**  $\eta < 0$ .

Dans ce cas  $\omega(k) < 0$  pour tout  $k$  et nous avons donc  $\mathcal{F}u(t, k)$  qui tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Autrement dit la perturbation relaxe vers zéro (au moins au niveau linéaire). Cependant il s'agit là d'un résultat ponctuel pour la transformée de Fourier. Que pouvons nous dire dans l'espace direct ? Tout d'abord, si la donnée initiale  $u(0, x)$  est de carré sommable, en utilisant l'égalité de Parseval nous avons convergence vers zéro de la norme  $L^2$  de  $u(t, x)$  (cette convergence est même exponentielle en  $t$  puisque pour tout nombre d'onde  $k$  nous avons  $\omega(k) \leq \eta < 0$ ) :

$$\int |u(t, x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}u(t, k)|^2 dk = \int |\mathcal{F}u(0, k)|^2 e^{2\omega(k)t} dk \leq e^{2\eta t} \int |u(0, x)|^2 dx.$$

Grâce aux propriétés spéciales de l'équation considérée, nous pouvons obtenir des résultats plus intéressants. Partons à nouveau d'une donnée initiale  $u(0, x)$  telle que sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}u(0, k)$  soit de carré sommable. Dans ce cas la fonction  $u(t, x)$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini uniformément en  $x$  ainsi que toutes ses dérivées. En effet nous avons

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} e^{\omega(k)t} \mathcal{F}u(0, k) dk$$

ce qui implique par l'inégalité de Schwartz

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int e^{\omega(k)t} |\mathcal{F}u(0, k)| dk \leq \frac{1}{2\pi} \left( \int e^{2\omega(k)t} dk \right)^{1/2} \left( \int |\mathcal{F}u(0, k)|^2 dk \right)^{1/2}$$

dont le résultat suit par estimation directe. La démonstration est similaire pour les dérivées.

Les calculs sont rarement aussi explicites, et le problème général de stabilité linéaire se réduit à un problème spectral que nous pouvons formuler ainsi :

**Critère de stabilité linéaire :** *Une solution stationnaire est linéairement stable si le générateur infinitésimal de l'évolution linéarisée autour de cette solution a un spectre contenu dans le demi plan gauche ouvert.*

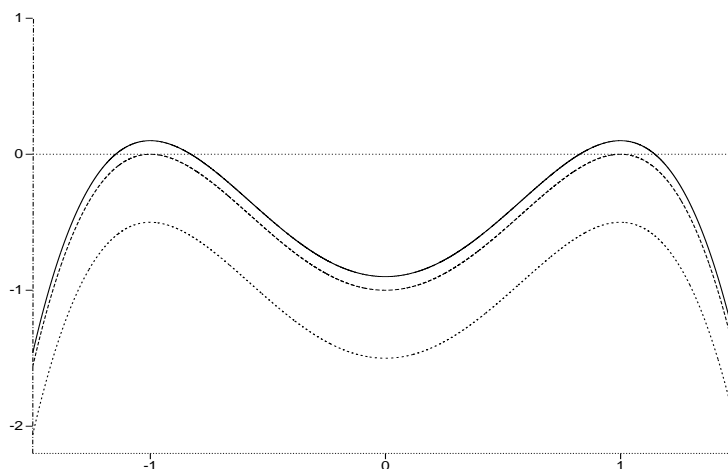
**Remarque III.5.** Ce critère doit bien sûr être formulé dans un espace fonctionnel adéquat et il est très important de se rappeler que le spectre d'un opérateur dépend de l'espace fonctionnel utilisé, c'est à dire physiquement du type de perturbations considérées. Il est intuitivement clair qu'un espace de perturbations trop petit aura tendance à conduire à un résultat de stabilité et un espace de perturbations trop grand à un résultat d'instabilité. Notons qu'ici par exemple le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}$  est le même dans les espaces  $L^2$  et  $L^\infty$ .

Au delà de la stabilité linéaire l'étude devient beaucoup plus délicate et est rarement envisagée dans la littérature. Il faut distinguer deux niveaux de questions. On peut d'abord se demander si il y a stabilité non linéaire locale. C'est à dire si dans un espace fonctionnel un petit voisinage de la solution stationnaire stable est attiré par celle-ci au cours du temps (bassin d'attraction non trivial de la solution stationnaire). Notons que sous des hypothèses de régularité naturelles ceci est toujours vrai pour les systèmes dynamiques de dimension finie. La deuxième question plus ambitieuse est de démontrer une stabilité globale dans l'espace de phase. En utilisant des inégalités d'énergie locale il est possible de démontrer ce résultat pour l'équation SH avec  $\eta < 0$ . Dans ce domaine on utilise en général une fonctionnelle de Lyapounoff (quand elle existe). Un exemple typique d'application aux systèmes dynamiques finis est fourni par l'utilisation des méthodes d'énergie à la démonstration de la stabilité de la solution stationnaire de l'équation de Navier Stokes à petit nombre de Reynolds en volume fini (nous avons fait un calcul analogue au chapitre précédent).

**Remarque III.6.** Le même genre de considérations pourrait être développé pour définir et étudier la stabilité autour de solutions plus complexes : stationnaires mais non spatialement homogènes, périodiques dans le temps etc.

**Deuxième cas**  $\eta > 0$ .

Reprenons l'exemple de l'équation SH. Si le paramètre  $\eta$  est positif, les estimations précédentes ne sont plus très utiles car elles donnent une borne qui croît exponentiellement vite avec le temps. Pour comprendre un peu mieux les phénomènes, il est commode de considérer le graphe de la fonction  $\omega(k)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\eta$ .



**Fig. III.1.** Graphe de la fonction  $\omega(k)$  en fonction de  $k$  pour  $\eta = -0.5, 0, 0.5$ .

Nous voyons immédiatement que pour  $\eta > 0$  petit, ce sont seulement les nombres d'onde voisins de  $k = \pm 1$  qui sont instables. Autrement dit dans ce régime et au niveau linéaire, ce sont seulement les nombres d'onde  $k \approx \pm 1$  qui peuvent croître, pour les autres, l'amplitude relaxe exponentiellement vite vers zéro comme dans le cas stable. Bien sur nous allons devoir par la suite compléter cette image par la considération des non linéarités. Mais pour le moment nous en tirons une première conséquence fondamentale : **l'instabilité sélectionne des nombres d'onde particuliers**, ici  $k \approx \pm 1$ . C'est l'explication de l'apparition de structures d'échelle spatiale bien définie (de l'ordre de l'inverse de ces nombres d'onde sélectionnés, ici 1) dans un milieu parfaitement homogène. Il est aussi naturel de penser que ce sont ces modes instables qui vont dominer la dynamique comme dans le cas des bifurcations habituelles. Nous reviendrons plus loin en détail sur ce point.

Pour le moment limitons nous à l'analyse linéaire. La théorie spectrale n'est plus vraiment suffisante pour obtenir les détails sur le comportement de la solution et nous allons à nouveau dans notre exemple utiliser la transformée de Fourier.

Pour simplifier la discussion, considérons une donnée initiale  $u(0, x)$  dont la transformée de Fourier est  $C^\infty$  avec un support compact contenu dans l'intervalle  $[0, 2]$  ( $u$  n'est pas réelle), et supposons que  $\mathcal{F}u(0, 1) \neq 0$ . En utilisant la méthode du col<sup>1</sup> il vient facilement pour  $\eta > 0$  et uniformément en  $x$  sur tout compact

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-\pi\omega''(1)t}} e^{ix} e^{\omega(1)t} \{ \mathcal{F}u(0, 1) + \mathcal{O}(t^{-1}) \} .$$

<sup>1</sup> D.Gottlieb, Steven A . Orszag. Numerical analysis of spectral methods : theory and applications. Philadelphia, SIAM, 1977.

Pour tout  $x$  fixé nous avons donc croissance exponentielle de la solution. Dans tout domaine fini fixé nous voyons apparaître la “structure”  $e^{ix}$ , mais cette structure n’apparaît pas ici avec une amplitude uniforme sur toute la droite, en effet puisque la fonction  $u(t, \cdot)$  est de carré sommable elle doit tendre vers zéro à l’infini. Notons aussi que par un calcul direct, si nous prenons comme donnée initiale  $u(0, x) = e^{ikx}$  nous obtenons

$$u(t, x) = e^{\omega(k)t} e^{ikx} ,$$

autrement dit le taux de croissance pour une onde plane dépend du nombre d’onde. Pour un paquet d’onde comme dans le cas précédent c’est le nombre d’onde correspondant au taux de croissance maximal qui domine.

### § III.2. Instabilités absolues et convectives.

Pour systématiser un peu la discussion nous allons introduire des notations plus générales. Supposons que nous étudions l’évolution d’un champ vectoriel réel  $\vec{v}(x, t)$  avec pour simplifier  $x \in \mathbf{R}$ . Nous allons aussi supposer que l’équation d’évolution est invariante par translation spatiale et a la forme suivante :

$$\partial_t \vec{v} = \mathcal{L}(\eta, \partial_x) \vec{v} + \vec{N}L(\vec{v})$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel linéaire (matriciel) dépendant d’un paramètre  $\eta$ , et  $\vec{N}L$  est une partie non linéaire (c’est à dire au moins quadratique).

Dans ce cas, la fonction  $\vec{v} = 0$  est une solution stationnaire homogène de l’équation d’évolution.

Par exemple, nous utiliserons plus loin l’exemple suivant où  $\vec{v}$  est un vecteur de dimension deux :  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  et l’équation s’écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^6 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta - 1 & 0 \\ 0 & \eta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \end{pmatrix} . \quad (\text{III.2})$$

Dans le chapitre précédent, nous avons vu un cas où après transformation de Fourier, il restait pour chaque nombre d’onde un vecteur de dimension infinie.

L’équation d’évolution linéarisée pour les perturbations autour de la solution stationnaire homogène  $\vec{v} = 0$  s’écrit alors

$$\partial_t \vec{u} = \mathcal{L}(\eta, \partial_x) \vec{u} .$$

Comme l’opérateur  $\mathcal{L}$  commute aux translations nous pouvons le diagonaliser partiellement en utilisant la transformation de Fourier. Il vient alors

$$\partial_t \mathcal{F} \vec{u} = \mathcal{L}(\eta, ik) \mathcal{F} \vec{u} .$$

Pour chaque nombre d'onde  $k$  il reste à déterminer le spectre de la matrice  $\mathcal{L}(\eta, ik)$  qui dépendra en général de  $\eta$  et de  $k$ . Nous obtenons des valeurs propres  $\lambda_1(\eta, k), \dots, \lambda_r(\eta, k)$ . En faisant varier  $k$  dans  $\mathbf{R}$  ces valeurs propres donnent des courbes dans le plan complexe dont l'union est le spectre de  $\mathcal{L}$  (en fait dans l'espace  $L^2$ ). Notons que de la réalité de l'opérateur  $\mathcal{L}$  il suit que le spectre de  $\mathcal{L}(\eta, ik)$  est le complexe conjugué du spectre de  $\mathcal{L}(\eta, -ik)$ . Finalement ce spectre dépend du paramètre  $\eta$ , et si il est entièrement contenu dans l'intérieur du demi plan gauche nous dirons que la solution homogène  $\vec{v} = 0$  est linéairement stable. Notons que si l'opérateur  $\mathcal{L}$  dépend continuellement de  $\eta$ , son spectre a la même propriété.

Nous allons supposer maintenant que la solution triviale  $\vec{v} = 0$  est stable pour  $\eta$  suffisamment négatif. Le cas intéressant est l'apparition d'une instabilité pour une première valeur critique  $\eta_c$  du paramètre, autrement dit la plus petite valeur critique telle que le spectre atteint l'axe imaginaire pur. Ou plus pratiquement qu'il existe un nombre d'onde  $k_c$  (voire plusieurs) et une valeur propre  $\lambda_j(\eta_c, k_c)$  (voire plusieurs) de partie réelle nulle.

Dans l'exemple III.2 les deux valeurs propres sont données par

$$\lambda_{\pm}(\eta, k) = \eta - (k^3 \mp 1)^2 + ik^3,$$

et nous déduisons immédiatement  $\eta_c = 0$  et  $k_c^{\pm} = \pm 1$ . De plus  $\lambda_{\pm}(0, \pm 1) = \pm i$ .

Plaçons nous à la valeur critique du paramètre  $\eta_c$  et notons  $\sigma(k)$  une branche correspondant à une valeur propre critique, c'est à dire qu'il existe un nombre d'onde  $k_c$  tel que  $\Re\sigma(k_c) = 0$ .

**Remarque III.7.**  $\bar{\sigma}$  est aussi une branche critique (pour  $-k_c$ ).

**Remarque III.8.**  $\partial_k \Re\sigma(k_c) = 0$  sinon  $\eta_c$  ne serait pas la valeur du paramètre correspondant à la première instabilité.

Nous allons maintenant faire les hypothèses de non dégénérescence suivantes (cf les hypothèses génériques de la théorie des bifurcations).

**Hypothèses sur l'instabilité linéaire.**

Hi) Il existe un seul nombre d'onde  $k_c$  tel que  $\Re\lambda_j(\eta_c, k_c) = 0$ .

Hii)  $\partial_k^2 \Re\lambda_j(\eta_c, k_c) < 0$ .

Hiii)  $\partial_{\eta} \Re\lambda_j(\eta_c, k_c) > 0$ .

Notons que Hiii) exprime le fait que par variation du paramètre le spectre croise effectivement l'axe imaginaire pur. Hii) est relié au fait que  $\eta_c$  est le plus petit  $\eta$  tel que le spectre rencontre l'axe imaginaire pur.

**Définition III.1**

- Si  $\partial_k \Im\lambda_j(\eta_c, k_c) = 0$  l'instabilité est dite absolue.
- Si  $\partial_k \Im\lambda_j(\eta_c, k_c) \neq 0$  l'instabilité est dite convective.

Pour une discussion détaillée de ces concepts le lecteur pourra se référer à l'article de revue de P.Huerre et P.Monkewitz<sup>1</sup>

Si nous reprenons l'exemple III.2 nous avons  $\sigma(k) = -(k^3 - 1)^2 + ik^3$ ,  $\partial_k^2 \Re\sigma(1) = -18$  et finalement  $\partial_k \Im\sigma(1) = 3i$ . L'instabilité est donc convective. L'instabilité de Poiseuille discutée au chapitre II est de même une instabilité convective.

La différence principale entre instabilités absolues et convectives est l'existence pour ces dernières d'une vitesse intrinsèque de propagation de l'instabilité (vitesse donnée précisément par  $-i\partial_k\sigma(k_c)$ ). Une instabilité absolue se développe dans un référentiel fixe, c'est à dire qu'elle est visible pour un observateur quelconque au repos. Par contre une instabilité convective se développe en se propageant. Un observateur fixe peut donc observer une instabilité qui se développe et qui ensuite s'atténue. En fait si l'on imagine une perturbation initialement locale, elle va croître en amplitude et en taille du support tout en se propageant. Si la vitesse de croissance de la taille du support est inférieure à la vitesse de propagation de l'instabilité (ce qui est le cas près du seuil), on observera dans un référentiel fixe cet effet de passage d'une instabilité qui ensuite s'atténue.

Pour quantifier un peu ces idées nous allons à nouveau faire une analyse de Fourier en nous plaçant à une valeur  $\eta$  du paramètre légèrement supérieure à la valeur critique  $\eta_c$  (bien sûr ce calcul ne sera qu'indicatif puisque si une instabilité se développe il faudra tenir compte des termes non linéaires ce qui sera fait au chapitre suivant). Pour simplifier nous allons seulement considérer la composante sur la valeur propre instable  $\lambda(\eta, k)$ . Partant d'une fonction  $u(0, x)$  régulière et à support compact, nous voulons analyser la fonction

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{\lambda(\eta, k)t} e^{ikx} \mathcal{F}u(0, k) dk .$$

Si nous nous plaçons dans un référentiel qui se déplace à vitesse  $c$ , cette fonction devient

$$u(t, x - ct) = \frac{1}{2\pi} \int e^{\lambda(\eta, k)t} e^{ik(x-ct)} \mathcal{F}u(0, k) dk ,$$

et si nous nous plaçons à l'origine de ce référentiel

$$u(t, -ct) = \frac{1}{2\pi} \int e^{\lambda(\eta, k)t} e^{-ikct} \mathcal{F}u(0, k) dk .$$

Nous allons à nouveau utiliser la méthode du col pour discuter le comportement à grand temps de cette fonction. Pour cela commençons par développer  $\lambda$  autour du point  $(\eta_c, k_c)$ . Il vient

$$\lambda(\eta, k) = A(\eta - \eta_c) - B(k - k_c)^2 + i\{C + D(k - k_c) + E(\eta - \eta_c)\} + \text{termes d'ordres supérieurs}$$

---

<sup>1</sup> P.Huerre, P.Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537 (1990).

ou les coefficients  $A, B, C, D, E$  sont réels. Nous allons négliger dans ce qui suit les termes d'ordres supérieurs. Dans un calcul plus rigoureux il faudrait remplacer  $\lambda$  par sa forme normale au moyen d'un difféomorphisme adéquat de l'espace  $(\eta, k)$ , nous renvoyons pour cela à la théorie des catastrophes qui étudie ce problème en détails<sup>1</sup>. Nous avons aussi omis un certain nombre de termes qui sont nuls par définition de  $\eta_c$  et  $k_c$ . La partie exponentielle de l'intégrale est donc égale à  $e^{\phi(\eta, k)t}$  avec

$$\begin{aligned}\phi(\eta, k) &= A(\eta - \eta_c) - B(k - k_c)^2 + i\{C + D(k - k_c) + E(\eta - \eta_c)\} + ikc \\ &= A(\eta - \eta_c) + i(D - c)(k - k_c) - B(k - k_c)^2 + Z ,\end{aligned}$$

où la constante complexe

$$Z = i(E(\eta - \eta_c) + C - ck_c)$$

ne dépend pas de  $k$ . Le terme correspondant de l'exponentielle va donc se factoriser en dehors de l'intégrale. Nous devons donc maintenant calculer l'asymptotique de

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{t(i(D-c)(k-k_c) - B(k-k_c)^2)} \mathcal{F}u(0, k) dk .$$

Pour cela nous pouvons appliquer la méthode du col. Le col est maintenant complexe et donné par

$$k - k_c = i \frac{D - c}{2B} .$$

Mis à part des préfacteurs sous exponentiels, nous avons donc finalement

$$u(t, -ct) \approx e^{it(E(\eta - \eta_c) + C - ck_c)} e^{t(A(\eta - \eta_c) - (D - c)^2/4B)} .$$

La première exponentielle est une phase, par contre la seconde est une exponentielle réelle qui va nous renseigner sur la croissance de l'instabilité. Par les hypothèses Hii) et Hiii) nous avons  $A > 0$  et  $B > 0$ . Nous concluons donc qu'il n'y a instabilité exponentielle que si la vitesse  $c$  du référentiel mobile satisfait

$$D - \sqrt{4AB(\eta - \eta_c)} \leq c \leq D + \sqrt{4AB(\eta - \eta_c)} .$$

Autrement dit, pour  $\eta - \eta_c$  petit il y a seulement une petite bande de vitesses (largeur  $\mathcal{O}(\sqrt{\eta - \eta_c})$ ) centrée autour de  $D = \partial_k \mathfrak{S}\lambda(\eta_c, k_c)$  pour laquelle nous avons une instabilité. Un calcul plus détaillé permet de déterminer les préfacteurs et la dépendance spatiale. Nous renvoyons à l'article de Huerre et Monkewitz cité précédemment pour plus de détails.

---

<sup>1</sup> V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zade. *Singularités des applications différentiables*. Mir, Moscou 1986.



## CHAPITRE IV

### SOLUTIONS STATIONNAIRES BIFURQUÉES.

Dans le chapitre précédent nous avons étudié différents types d'instabilités, nous aimerions maintenant décrire la dynamique au delà de ces instabilités. Comme nous l'avons déjà mentionné, le problème nouveau est que le spectre de l'opérateur linéarisé est continu. Nous ne pouvons donc pas à priori utiliser la théorie habituelle des bifurcations qui s'appuie sur un spectre discret (au moins pour la partie du spectre qui devient instable). Nous allons développer dans les chapitres suivants un certain nombre de conséquences de la présence de ce spectre continu. Dans ce chapitre nous allons cependant voir qu'il est encore possible d'utiliser la théorie des bifurcations habituelles mais pour traiter des questions moins globales (qui n'en restent pas moins intéressantes). Pour retrouver un spectre discret, l'idée va être de chercher des solutions qui en quelque sorte compactifient l'espace. Le candidat naturel est la recherche de solutions spatialement périodiques. Si nous fixons la période, nous sommes ramenés à un problème sur un tore qui est une variété compacte et nous pouvons espérer retrouver un spectre discret. Une fois trouvés ces solutions périodiques, nous les considérerons comme solution du système infini et nous pourrons alors poser les questions habituelles de stabilité (linéaire ou non, locale ou globale).

#### § IV.1. Solutions spatialement périodiques

Nous allons à nouveau illustrer les idées et les méthodes sur un cas simple et explicite : l'équation de Swift et Hohenberg S.H. Rappelons qu'elle s'écrit :

$$\partial_t u = \eta u - (1 + \partial_x^2)^2 u - u^3$$

où le champ  $u(t, x)$  est réel,  $\eta$  est un paramètre réel,  $x \in \mathbf{R}$  et  $t \in \mathbf{R}^+$ . Nous avons vu au chapitre précédent que pour  $\eta < 0$  la solution stationnaire  $u = 0$  est stable. Nous allons maintenant nous intéresser aux valeurs  $\eta > 0$  petit, et chercher des solutions stationnaires, spatialement périodiques de période  $2\pi/\alpha$ . Notons que l'équation pour les solutions stationnaires est une équation différentielle non linéaire du quatrième ordre, mais nous n'allons pas utiliser directement ce fait.

Plus précisément nous allons chercher des solutions stationnaires dans l'espace

$$C_{p,p,r}^4([0, 2\pi/\alpha])$$

que nous noterons  $\mathcal{H}_\alpha$ . C'est l'espace des fonctions périodiques réelles paires de période  $2\pi/\alpha$  et dont les dérivées jusqu'au degré 4 sont de carré sommable (sur une période). Nous avons fixé la parité de la fonction pour éviter l'invariance par translation. En effet comme l'équation S.H. est homogène, si nous avons une solution stationnaire, n'importe quelle translatée est aussi une solution stationnaire. Cette translation introduit une valeur propre zéro dans les spectres et il est plus commode de l'éliminer dans un premier temps en brisant l'invariance par translation (il faut naturellement être un peu prudent à ce sujet et utiliser une brisure de la translation pour laquelle il existe encore des solutions). Nous voulons donc étudier dans l'espace  $\mathcal{H}_\alpha$  l'équation

$$\eta u - (1 + \partial_x^2)^2 u - u^3 = 0 . \quad (\text{IV.1})$$

Pour toute valeur de  $\eta$  nous avons la solution  $u = 0$ , et nous pouvons linéariser le premier membre de cette équation autour de cette solution. Nous obtenons un opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha,\eta}$  donné par

$$\mathcal{L}_{\alpha,\eta} v = \eta v - (1 + \partial_x^2)^2 v . \quad (\text{IV.2})$$

Le spectre de cet opérateur dans  $\mathcal{H}_\alpha$  est facile à calculer et utilisant les séries de Fourier. **Ce spectre est discret : nous avons compactifié l'espace.** C'est l'ensemble

$$\left\{ \eta - (1 - n^2 \alpha^2)^2 , n \in \mathbf{N} \right\} ,$$

et les vecteurs propres sont les fonctions  $\cos(n\alpha x)$ .

Si  $\alpha$  est proche de 1 (le nombre d'onde critique du chapitre précédent), la valeur propre maximale vaut

$$\eta - (1 - \alpha^2)^2$$

et nous pouvons espérer voir une bifurcation pour

$$\eta = (1 - \alpha^2)^2$$

qui est la plus petite valeur de  $\eta$  pour laquelle une valeur propre (simple) de  $\mathcal{L}_{\alpha,\eta}$  passe dans le demi plan droit. Ce passage correspond à une valeur propre 0. Il va être maintenant un peu plus commode de changer le paramètre  $\eta$  pour le paramètre  $\zeta$  selon

$$\eta = \zeta + (1 - \alpha^2)^2 .$$

Nous avons maintenant une valeur propre 0 pour  $\zeta = 0$ . Il va être aussi commode de réarranger un peu l'équation pour pouvoir appliquer plus facilement un théorème de bifurcation. Notons que l'opérateur

$$1 + (1 + \partial_x^2)^2$$

est inversible dans  $\mathcal{H}_\alpha$ . Il est facile de vérifier que l'équation IV.1 est équivalente à l'équation  $F(\zeta, u) = 0$  où

$$F(\zeta, u) = u - \left[1 + (1 + \partial_x^2)^2\right]^{-1} \left\{ \left(\zeta + 1 + (1 - \alpha^2)^2\right) - u^3 \right\}. \quad (\text{IV.3})$$

Nous n'avons pas noté explicitement la dépendance en  $\alpha$  car dans tous ces calculs ce paramètre est fixe.

Rappelons maintenant le théorème de bifurcation d'une valeur propre simple<sup>1</sup>.

**Théorème IV.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach réels, et  $V$  un voisinage de 0 dans  $X$ . Soit  $a$  un nombre positif et  $F$  une application de  $(-a, a) \times V$  dans  $Y$  qui satisfait les quatre conditions suivantes (où  $(s, u)$  désigne les points de  $(-a, a) \times V$ ).*

- i)  $F(\zeta, 0) = 0$  pour tout  $\zeta \in (-a, a)$ .
- ii)  $\partial_\zeta F$ ,  $D_u F$  et  $\partial_\zeta D_u F$  existent et sont continues.
- iii)  $\text{Ker}(D_u F(0, 0))$  et  $Y/\text{Range}(D_u F(0, 0))$  sont de dimension 1.
- iv) Si  $\text{Ker}(D_u F(0, 0)) = \mathbf{R} v_0$ , alors  $\partial_\zeta D_u F(0, 0)v_0 \notin \text{Range}(D_u F(0, 0))$ .

Alors si  $Z$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(D_u F(0, 0))$  dans  $X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $(0, 0)$  dans  $\mathbf{R} \times X$ , il existe un intervalle  $(-b, b) \subset (-a, a)$  et deux fonctions continues  $\phi : (-b, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , et  $\psi : (-b, b) \rightarrow Z$  telles que

- 1)  $\phi(0) = 0$  et  $\psi(0) = 0$ .
- 2)  $F^{-1}(0) \cap U = \{(\phi(\tau), \tau v_0 + \tau \psi(\tau)) ; \tau \in (-b, b)\} \cup \{(\zeta, 0) ; (\zeta, 0) \in U\}$ .

De plus si  $F$  est régulière et  $D_u^j F(0, 0)(v_0, \dots, v_0) = 0$  pour  $1 \leq j \leq n$ , alors  $\phi^{(l)}(0) = 0$  et  $\psi^{(l)}(0) = 0$  pour  $0 \leq l \leq n - 1$  et nous avons

$$\frac{1}{n+1} D_u^{n+1} F(0, 0)(v_0, \dots, v_0) + D_u F(0, 0)\psi^{(n)}(0) + \phi^{(n)}(0)\partial_\zeta D_u F(0, 0)v_0 = 0.$$

Nous renvoyons à l'article original de Crandall et Rabinowitz<sup>1</sup> pour la démonstration. Nous allons maintenant appliquer ce théorème dans notre situation.

Nous prenons bien sûr  $X = Y = \mathcal{H}_\alpha$ , et pour  $F$  la fonction donnée dans l'équation IV.3. Les conditions i) et ii) du théorème se vérifient simplement (noter que les fonctions de  $\mathcal{H}_\alpha$  sont bornées et continues). Pour la condition iii) nous avons

$$D_u F(0, 0)v = v - \left[1 + (1 + \partial_x^2)^2\right]^{-1} (1 + (1 - \alpha^2)^2)v.$$

---

<sup>1</sup> M.Crandall, P.Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Funct. Anal. **8**, 321-340 (1971).

Cet opérateur est compact, auto-adjoint et son spectre est l'ensemble des nombres

$$\left\{ 1 - \frac{(1 + (1 - \alpha^2)^2)}{(1 + (1 - n^2\alpha^2)^2)} ; n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Les valeurs propres sont simples, et les vecteurs propres correspondants sont les fonctions  $\cos(n\alpha x)$ . Nous avons donc une valeur propre zéro simple de vecteur propre  $\cos(\alpha x)$ . En utilisant la décomposition en séries de Fourier, il est facile de vérifier la condition iii).

Finalement nous avons

$$\partial_\zeta D_u F(0, 0) = -[1 + (1 + \partial_x^2)^2]^{-1},$$

ce qui implique pour  $v_0 = \cos(\alpha x)$ , puisque l'opérateur  $D_u F(0, 0)$  est auto-adjoint et compact,

$$\partial_\zeta D_u F(0, 0)v_0 = -\frac{v_0}{(1 + (1 - \alpha^2)^2)} \notin \text{Range}(D_u F(0, 0)),$$

et la condition iv) est vérifiée.

Si nous prenons pour  $Z$  le sous espace  $\text{Range}(D_u F(0, 0))$  qui est bien un supplémentaire de  $\text{Ker}(D_u F(0, 0))$  (puisque l'opérateur  $D_u F(0, 0)$  est auto-adjoint), nous déduisons du théorème l'existence d'une solution de l'équation IV.1

$$\tau \cos(\alpha x) + \tau \psi(\tau, x)$$

où le second terme est petit par rapport au premier et où le paramètre  $\tau$  est lié à  $\zeta$  par la relation

$$\zeta = \phi(\tau).$$

Pour en savoir un peu plus sur les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  nous pouvons essayer d'appliquer la deuxième partie du théorème. Il vient facilement

$$D_u^2 F(0, 0)(v, v) = 0$$

et

$$D_u^3 F(0, 0, 0)(v_0, v_0, v_0)(x) = \frac{3}{2} \frac{\cos(3\alpha x)}{1 + (1 - 9\alpha^2)^2} + \frac{9}{2} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + (1 - \alpha^2)^2}.$$

Nous concluons donc que  $\phi'(0) = 0$  et  $\psi'(0) = 0$ . Finalement nous avons aussi la relation

$$\frac{1}{2} \frac{\cos(3\alpha x)}{1 + (1 - 9\alpha^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + (1 - \alpha^2)^2} + D_u F(0, 0)\psi''(0) - \frac{\cos(\alpha x)}{1 + (1 - \alpha^2)^2}\phi''(0) = 0.$$

Projetant cette relation sur  $v_0$  et sur le sous espace orthogonal nous obtenons  $\phi''(0)$  et  $\psi''(0)$ . Finalement par intégration il vient

$$\phi(\tau) = \frac{3\tau^2}{4} + o(\tau^2),$$

et

$$\psi(\tau) = \frac{\tau^2}{64\alpha^2} \frac{\cos(3\alpha x)}{1 - 5\alpha^2} + o(\tau^2).$$

**Remarque IV.1.** Par une méthode analogue nous pourrions déterminer récursivement les dérivées d'ordre supérieur de  $\psi$  et  $\phi$  à l'origine. En particulier les modes de Fourier qui interviennent croissent avec l'ordre de dérivation (voir [C.E.]).

Si nous revenons à nos paramètres initiaux ( $\alpha$  et  $\eta$ ), nous avons en fait deux solutions à cause du carré dans le plus bas ordre non nul de  $\phi$ .

**Théorème IV.2.** *Pour tout nombre réel  $\alpha$  il existe un nombre  $c(\alpha) > 0$  tel que si  $c(\alpha) \geq \eta - (1 - \alpha^2)^2 > 0$ , il existe deux solutions stationnaires de S.H. périodique de période  $2\pi/\alpha$  et de la forme*

$$u(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\eta - (1 - \alpha^2)^2} \cos(\alpha x) + o(\eta - (1 - \alpha^2)^2). \quad (\text{IV.4})$$

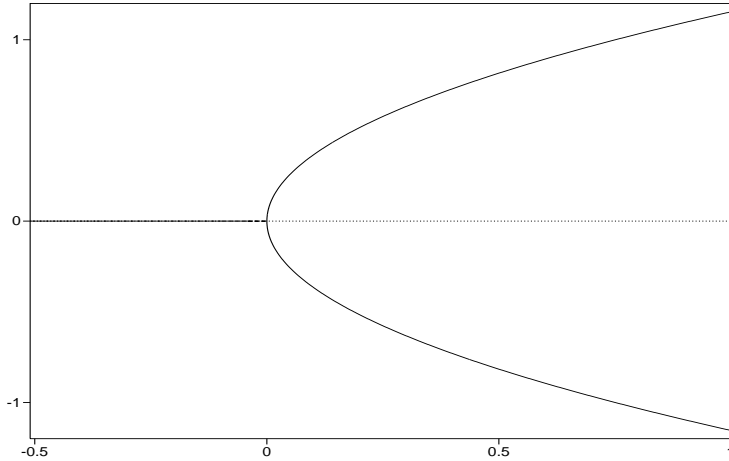
**Remarque IV.2.** Rappelons que nous avons en fait une famille à deux paramètres de solutions puisque nous devons aussi ajouter les translations d'espace.

**Remarque IV.3.** Pour un  $\alpha$  fixé, la valeur critique où apparaît la solution stationnaire ci-dessus est donnée par

$$\eta = (1 - \alpha^2)^2.$$

La première solution qui apparaît est donc celle pour  $\alpha = \pm 1$ , qui correspond aux nombres d'onde critiques que nous avons trouvés au chapitre précédent. Ce fait est aussi évident si nous considérons l'évolution de la relation de dispersion (fonction  $\omega$  voir figure III.1) en fonction de  $\eta$ . Le théorème précédent s'applique pour toutes les valeurs de  $\alpha$ . Cependant pour les valeurs de  $\alpha$  notablement différentes de  $\pm 1$  nous obtiendrons une bifurcation pour des valeurs de  $\eta$  notablement supérieures à zéro. Comme nous verrons plus loin cette zone de paramètres correspond probablement à du chaos spatio-temporel fortement développé ou les solutions stationnaires ne sont plus d'un intérêt majeur.

**Remarque IV.4.** Pour  $\alpha$  fixé, nous pouvons résumer le résultat de bifurcation dans le diagramme de bifurcation suivant.



**Fig. IV.1.** Diagramme de bifurcation de S.H. pour  $\alpha$  fixé : coefficient de  $\cos(\alpha x)$  en fonction de  $\eta - (1 - \alpha^2)^2$ .

**Remarque IV.5.** Nous pouvons aussi réécrire notre problème de solution stationnaire de l'équation IV.1 comme un champ de vecteur de dimension 4. Si nous posons  $u_1 = u$ ,  $u_2 = u'$ ,  $u_3 = u''$  et  $u_4 = u'''$ , nous pouvons réécrire l'équation IV.1 sous la forme

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ (\eta - 1)u_1 - 2u_3 - u_1^4 \end{pmatrix}.$$

Le point  $(0,0,0,0)$  est un point fixe et nous avons montré l'existence d'une bifurcation de Hopf dégénérée en  $\eta = 0$  qui crée une famille à un paramètre de cycles invariants.

**Remarque IV.6.** Il pourrait exister d'autres solutions stationnaires périodiques différentes des solutions précédentes. En faisant quelques hypothèses supplémentaires sur les solutions on pourrait montrer l'unicité locale des solutions de la forme IV.4. Il existe aussi probablement des solutions presque périodiques (nous reviendrons sur ce point au chapitre V).

## § IV.2. Stabilité des solutions spatialement périodiques.

Une question naturelle qui se pose maintenant est celle de la stabilité des solutions que nous venons de trouver. Le Théorème de bifurcation pourrait nous apprendre quelque chose sur la stabilité dans l'espace  $\mathcal{H}_\alpha$ , mais ce n'est pas ce qui nous intéresse principalement. Nous voulons poser la question de la stabilité d'une solution de période  $2\pi/\alpha$  par rapport à des perturbations quelconques (en quelque sorte de période quelconque ou même pas périodiques).

Nous allons noter par  $u_0$  une solution stationnaire périodique (nous ne mentionnerons pas explicitement la dépendance dans la période  $\alpha$  qui restera fixée). Si nous voulons étudier la stabilité linéaire de  $u_0$ , nous reportons dans S.H. une fonction de la forme  $u = u_0 + w$  en supposant la perturbation  $w$  petite, et nous écrivons l'équation d'évolution linéarisée pour  $w$ . Il vient

$$\partial_t w = \mathcal{L}_{\eta,\alpha} w ,$$

avec

$$\mathcal{L}_{\eta,\alpha} w = \left[ \eta - (1 + \partial_x^2)^2 w - 3u_0^2 \right] w . \quad (\text{IV.5})$$

L'opérateur  $\mathcal{L}_{\eta,\alpha}$  est un opérateur différentiel à coefficients périodiques (de période  $2\pi/\alpha$ ) dont nous allons chercher le spectre dans l'espace de toutes les perturbations (et pas seulement des perturbations périodiques).

**Remarque IV.7.** Si  $u_0$  est solution stationnaire de S.H., il est immédiat que pour tout réel  $s$  la fonction

$$u_s(x) = u_0(x + s)$$

est aussi solution stationnaire :

$$\eta u_s - (1 + \partial_x^2)^2 u_s - u_s^3 = 0 .$$

En dérivant cette identité par rapport à  $s$  puis en posant  $s = 0$  il vient

$$\eta u'_0 - (1 + \partial_x^2)^2 u'_0 - 3u_0^2 u'_0 = 0 .$$

Autrement dit  $\mathcal{L}_{\eta,\alpha} u'_0 = 0$ . Nous avons donc un vecteur propre de valeur propre zéro, ce qui implique que le spectre de  $\mathcal{L}_{\eta,\alpha}$  ne sera pas contenu dans l'intérieur du demi plan gauche (à moins de prendre un espace de perturbations trop petit et qui ne contiendrait pas  $u'_0$ ). Ce fait est très général : **si une équation d'évolution invariante par translation possède une solution stationnaire non constante, la dérivée de**

**cette fonction est un vecteur propre de valeur propre zéro pour l'opérateur d'évolution linéarisé autour de la solution stationnaire.**

Nous avons donc à trouver le spectre d'un opérateur à coefficients périodiques et nous allons travailler dans l'espace  $L^2$  (pour ne pas trop compliquer l'analyse). Nous pouvons alors utiliser la méthode de Bloch. Pour  $k \in [0, \alpha[$ , nous définissons un opérateur  $\mathcal{L}_{\eta, \alpha, k}$  par

$$\mathcal{L}_{\eta, \alpha, k} f(x) = e^{-ikx} \mathcal{L}_{\eta, \alpha} (e^{ik \cdot} f)(x) = \left[ \eta - (1 + \partial_x^2 + 2ik\partial_x - k^2)^2 - 3u_0^2(x) \right] f(x).$$

Si nous notons par  $\sigma_B(A)$  le spectre d'un opérateur  $A$  dans un espace  $B$  nous avons le théorème suivant.

**Théorème IV.3.**

$$\sigma_{L^2}(\mathcal{L}_{\eta, \alpha}) = \bigcup_{k \in [0, \alpha[} \sigma_{L^2_{2\pi/\alpha}}(\mathcal{L}_{\eta, \alpha, k}),$$

où  $L^2_{2\pi/\alpha}$  désigne l'espace des fonctions de carré sommable et de période  $2\pi/\alpha$ . Nous renvoyons par exemple au livre de Reed et Simon<sup>1</sup> pour la démonstration.

L'application de ce théorème conduit au résultat suivant.

**Théorème IV.4.** *Il existe un nombre  $\eta_0 > 0$ , une fonction  $g(\delta) = \delta/24 + \mathcal{O}(\delta^2)$  tels que si  $\eta \in ]0, \eta_0]$  et*

$$(1 - \alpha^2)^2 \leq g(\eta),$$

*alors les solutions du théorème IV.2 sont linéairement marginalement stables. Si*

$$\eta > (1 - \alpha^2)^2 > g(\eta)$$

*les solutions sont linéairement instables.*

Par marginalement stable nous voulons indiquer explicitement que le spectre de l'opérateur est contenu dans le demi plan gauche mais qu'il touche l'axe imaginaire pur (ici à l'origine).

La démonstration de ce résultat est assez longue. On la trouvera dans [C.E.]. Je vais seulement indiquer ici les principaux points. Pour calculer  $\sigma_{L^2_{2\pi/\alpha}}(\mathcal{L}_{\eta, \alpha, k})$  on peut commencer par scinder cet opérateur en deux morceaux. Tout d'abord un opérateur à coefficients constants

$$\mathcal{L}_{\eta, \alpha, k}^0 = \eta - (1 + \partial_x^2 + 2ik\partial_x - k^2)^2$$

---

<sup>1</sup> M.Reed, B.Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. IV Academic press, New York London 1978.



et un opérateur à coefficients variables qui est simplement la multiplication par  $3u_0^2$ . Le spectre de  $\mathcal{L}_{\eta,\alpha,k}^0$  est facile à déterminer en utilisant les séries de Fourier :

$$\sigma_{L_{2\pi/\alpha}^2}(\mathcal{L}_{\eta,\alpha,k}^0) = \left\{ \eta - (1 - (k + n\alpha)^2)^2 ; n \in \mathbf{Z} \right\} .$$

Donc si  $k + n\alpha \not\approx \pm 1$  nous avons des valeurs propres négatives de module au moins  $\mathcal{O}(1)$  et nous pouvons appliquer la théorie de perturbation pour contrôler le spectre si  $u_0$  est petit. En particulier, pour  $\alpha$  proche de 1,  $k + n\alpha$  ne peut être de l'ordre de  $\pm 1$  que si  $n = \pm 1$  et  $k \simeq 0$  (il y a aussi  $n = 0$  et  $k \simeq 1$  mais par périodicité ceci se ramène au cas précédent). Dans tous les autres cas,  $\sigma_{L_{2\pi/\alpha}^2}(\mathcal{L}_{\eta,\alpha,k}^0)$  est contenu dans l'intérieur du demi plan gauche. Pour  $k \simeq 0$  et  $n \neq \pm 1$  nous pouvons à nouveau appliquer la théorie des perturbations et conclure que les valeurs propres correspondantes ne s'approchent pas de l'axe imaginaire pur. Il reste finalement  $n = \pm 1$  et  $k \simeq 0$ . L'idée est alors de faire une théorie de perturbation dans les deux paramètres petits  $k$  et  $\eta - (1 - \alpha^2)^2$ . Notons que le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_{(1-\alpha^2)^2,\alpha,0}$  est explicitement connu puisque c'est un opérateur à coefficients constants. Ce spectre contient en particulier la valeur propre zéro. Nous renvoyons à [C.E.] pour la suite de la démonstration.

Nous reviendrons plus loin dans le cadre des équations d'amplitude sur ce phénomène d'existence d'une bande de nombres d'ondes de solutions marginalement stables connu sous le nom d'instabilité d'Eckhaus. En particulier, pour  $\eta > 0$  fixé petit, il existe un intervalle de périodes  $\alpha$  autour de  $\pm 1$  tel que la solution stationnaire périodique de période  $\alpha$  est marginalement stable.

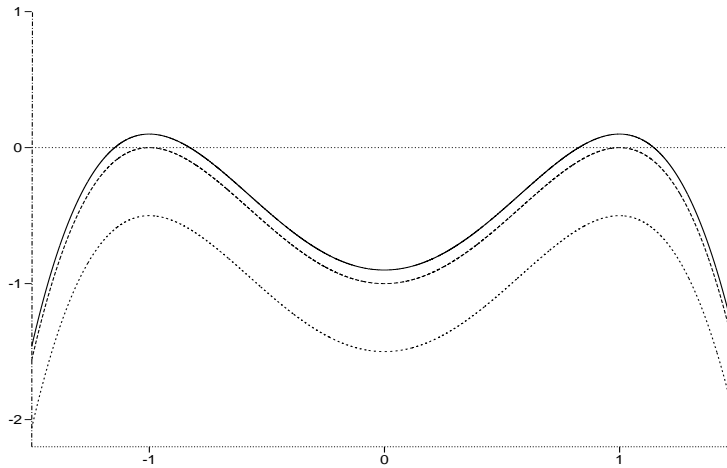
## CHAPITRE V

### DÉVELOPPEMENT MULTI-ÉCHELLE

De nombreuses instabilités apparaissent avec un  $k_c$  non nul. Il y a dans ce cas deux échelles dans le système. La première est une échelle "d'ordre unité", elle correspond à  $1/k_c$ . C'est l'échelle des structures. Une deuxième échelle beaucoup plus grande est liée à la modulation spatiale de ces structures. Dans le cas de l'équation (S.H.) nous avons vu que la relation de dispersion linéaire est donnée par

$$\omega(k) = \eta - (1 - k^2)^2 .$$

Rappelons le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de  $\eta$  :



**Fig. V.1.** Graphe de la fonction  $\omega(k)$  en fonction de  $k$  pour  $\eta = -0.5, 0, 0.5$ .

Si  $\eta > 0$  est petit nous avons une deuxième échelle qui correspond à la largeur de la bande des nombres d'onde instables. Dans cet exemple  $|k_c| = 1$ , l'échelle des structures est donc d'ordre unité et l'échelle des modulations de l'ordre de  $1/\sqrt{\eta}$ . Nous avons donc pour  $\eta$  petit une grande différence entre les deux échelles du problème. C'est une situation que l'on rencontre dans un certain nombre de problèmes intéressants et pour laquelle a été développé une méthode de calcul dite multi-échelle. L'idée de base est que si le système est observé à la grande échelle, la petite échelle doit donner des oscillations si rapides qu'elles doivent en un certain sens se moyenniser. Autrement dit nous allons chercher une **équation effective pour l'évolution à grande échelle**. Pour introduire la méthode nous allons étudier tout d'abord l'un des exemples de base : l'homogénéisation.

### § V.1. Homogénéisation d'une diffusion à coefficient périodique.

Considérons le problème de diffusion de la chaleur dans un milieu unidimensionnel dont la constante de diffusion varie périodiquement rapidement. L'équation de la chaleur s'écrit

$$\partial_t T = \partial_x (D(\epsilon, x) \partial_x T), \quad (\text{V.1})$$

où le coefficient de diffusion est donné par

$$D(\epsilon, x) = a(x/\epsilon)$$

et  $a$  est une fonction périodique (fixons la période à 1) bornée, continue, strictement positive, et  $\epsilon$  est un paramètre que nous allons supposer petit pour le moment. Dans ces conditions le semi-groupe associé à l'équation V.1 est bien défini. Il est en général impossible de résoudre explicitement ce problème. Cependant nous voyons clairement deux échelles. Une première échelle petite  $\epsilon$  et une deuxième échelle d'ordre unité (en fait de l'ordre de la racine de la taille de  $a$ ).

La méthode multi-échelle consiste à écrire une hypothèse formelle pour la forme de la solution et de vérifier que cette hypothèse fonctionne. Il reste ensuite à démontrer rigoureusement que la solution est bien de cette forme ce qui peut être plus délicat. Comme tous les "ansatz" un peu généraux il s'applique dans la plupart des cas, mais parfois il faut utiliser des formes plus subtiles. Nous n'entrerons pas ici dans ces complications.

L'hypothèse multi-échelle consiste à chercher la solution sous forme d'une série dans le petit paramètre  $\epsilon$  (le rapport des échelles) :

$$T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots .$$

La deuxième partie de l'hypothèse consiste à imposer une forme fonctionnelle aux fonctions  $T_j$ . Dans le cas de la diffusion en milieu périodique nous allons essayer

$$T_j = T_j(x/\epsilon, x, t),$$

avec une dépendance périodique (de période 1) dans la première variable. Autrement dit nous allons chercher des fonctions de trois variables  $T_j(x_1, x_2, t)$ , périodiques de période 1 en  $x_1$  et telles que leurs restrictions à  $x_1 = x/\epsilon$  et  $x_2 = x$  fournissent les bonnes approximations d'une solution. D'un point de vue purement mathématique cette hypothèse peut paraître assez bizarre. Par contre physiquement elle est beaucoup mieux justifiée : chaque terme se comporte comme une modulation lente d'une partie rapidement variable. Comme nous l'avons dit plus haut, l'intérêt de l'ansatz multi-échelle

réside surtout dans son succès et dans son aspect systématique. Voyons cela de plus près sur notre exemple. Nous reportons simplement l'ansatz dans l'équation et résolvons ordre par ordre en  $\epsilon$ . Il est commode de remarquer que nous avons formellement

$$\partial_x = \epsilon^{-1}\partial_1 + \partial_2 .$$

L'équation de diffusion se réécrit donc

$$\partial_t T = (\epsilon^{-1}\partial_1 + \partial_2)(a(x_1)(\epsilon^{-1}\partial_1 + \partial_2)T(x_1, x_2, t)) .$$

Dans la suite nous allons considérer cette équation et en particulier supposer que les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes. Remplaçons  $T$  par son développement  $T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots$  et isolons les différentes puissances de  $\epsilon$ .

**Ordre  $\epsilon^{-2}$ .**

$$\partial_1(a(x_1)\partial_1 T_0) = 0 .$$

Ce qui implique puisque les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes

$$a(x_1)\partial_1 T_0 = b(x_2)$$

où  $b(x_2)$  est une fonction pour le moment inconnue. Pour la déterminer observons que puisque par hypothèse  $a$  ne s'annule pas

$$\partial_1 T_0 = \frac{b(x_2)}{a(x_1)} .$$

Puisque nous avons supposé que  $T_0$  est périodique en  $x_1$ , si nous moyennons sur une période le membre de gauche s'annule. Mais puisque la moyenne de  $1/a$  n'est pas nulle nous déduisons  $b = 0$ , et finalement  $\partial_1 T_0 = 0$ .

**Ordre  $\epsilon^{-1}$ .**

$$\partial_2(a(x_1)\partial_1 T_0) + \partial_1(a(x_1)(\partial_1 T_1 + \partial_2 T_0)) = 0 .$$

Le premier terme est nul par le résultat à l'ordre précédent. Nous avons donc

$$\partial_1 T_1 + \partial_2 T_0 = \frac{g(x_2)}{a(x_1)} ,$$

où  $g$  est à nouveau une fonction inconnue. En prenant la moyenne sur une période (que nous noterons  $\langle \rangle$ ) il vient maintenant

$$\partial_2 T_0 = g(x_2) \langle \frac{1}{a} \rangle ,$$

c'est à dire

$$g(x_2) = \frac{\partial_2 T_0}{\langle \frac{1}{a} \rangle},$$

et finalement

$$a(x_1)(\partial_1 T_1 + \partial_2 T_0) = \frac{\partial_2 T_0}{\langle \frac{1}{a} \rangle}.$$

**Ordre  $\epsilon^0$ .**

$$\partial_t T_0 = \partial_2 [a(x_1)(\partial_1 T_1 + \partial_2 T_0)] + \partial_1 [a(x_1)(\partial_1 T_2 + \partial_2 T_1)].$$

En prenant la moyenne sur une période et en utilisant le résultat de l'ordre précédent il vient

$$\partial_t T_0 = \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \partial_2^2 T_0.$$

Autrement dit nous avons trouvé à grande échelle une équation de diffusion avec un coefficient de diffusion effectif qui est l'inverse de la moyenne de l'inverse du coefficient de diffusion.

**Remarque V.1.** Nous avons imposé dès le début que la dépendance en  $x_1$  devait être périodique avec la même période que  $a$ . Ceci nous a permis d'éliminer les termes dits séculaires qui apparaissent comme "constantes" d'intégration. En fait nous pouvons aussi voir cela comme des conditions d'intégrabilité analogues à l'alternative de Fredholm. L'idée est que pour résoudre une équation linéaire, le second membre doit être orthogonal au noyau de l'adjoint de l'opérateur linéaire.

**Remarque V.2.** Le résultat établi plus haut est en fait général pour toutes les valeurs de  $\epsilon > 0$ . Par exemple si nous considérons une diffusion de coefficient  $D(x) > 0$  continu, périodique et borné supérieurement, alors asymptotiquement le système se comporte comme si la diffusion était constante et égale à l'inverse de la moyenne de l'inverse de  $D$ . Ce résultat est aussi vrai pour des coefficients  $D$  presque périodiques. La méthode de renormalisation que nous verrons plus loin fournit une démonstration assez naturelle de ce fait. Pour plus de détails sur des démonstrations plus classiques voir par exemple l'article de Zhivkov<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> V.V.Zhivkov. Asymptotic behavior and stabilization of solutions of a second order parabolic equation with lower order terms. Trans. Moscow Math. Soc. **46**, 69-99 (1984).

§ V.2. Développement multi-échelle de l'équation S.H.

Nous allons maintenant appliquer la méthode multi-échelle à notre problème non linéaire et prendre pour cela l'exemple de l'équation S.H. Ceci va nous conduire à une équation pour la **Modulation Grande Échelle des Structures**. Si nous reprenons l'équation S.H. :

$$\partial_t u = \eta u - (1 + \partial_x^2)^2 u - u^3$$

et sa relation de dispersion autour de la solution nulle :

$$\omega(k) = \eta - (1 - k^2)^2 ,$$

nous pouvons déjà faire un bilan des échelles. Pour cela, considérons la figure V.1. Si  $\eta$  est positif et petit, nous pouvons poser  $\eta = \epsilon^2$  et nous avons alors deux échelles en  $x$  :  $\mathcal{O}(1)$  qui correspond à l'échelle spatiale des instabilités et  $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$  qui correspond à la largeur de la bande instable de nombres d'ondes. Par homogénéité de l'équation nous en déduisons une échelle  $\epsilon^{-2}$  pour le temps et une échelle  $\epsilon$  pour  $u$ .

**Remarque V.3.** La détermination des différentes échelles du problème est un pas important et en général guidé par des considérations simples. Un choix inapproprié des échelles conduit rapidement à un résultat trivial ou à une incohérence dans le calcul multi-échelle. Le choix du paramètre  $\epsilon$  au lieu de  $\eta$  fait disparaître des racines carrées. Il pourrait aussi se justifier par une analogie avec la théorie des bifurcations (voir plus loin). Signalons de plus qu'il faut en général équilibrer les tailles des différents termes de l'équation, c'est pourquoi nous avons pris une échelle  $\epsilon$  pour le champ  $u$ . Un autre choix d'échelle conduit à une équation linéaire ou à une équation sans dérivées spatiales.

Le calcul est maintenant tout à fait similaire au calcul précédent. Nous allons chercher  $u$  sous la forme

$$u(t, x) = \epsilon B(\epsilon^2 t, x, \epsilon x)$$

en prenant  $B$  sous la forme d'une série en  $\epsilon$ ,  $B = B_0 + \epsilon B_1 + \dots$ . Comme pour l'homogénéisation nous allons considérer les fonctions  $B_j$  comme dépendant de trois variables indépendantes  $x_1, x_2, x_3$  qu'il faudra ensuite remplacer respectivement par  $\epsilon^2 t, x$  et  $\epsilon x$ . Nous allons donc poser dans l'équation

$$\partial_t = \epsilon^2 \partial_1 \quad \text{et} \quad \partial_x = \partial_2 + \epsilon \partial_3 .$$

Il vient facilement après simplification par  $\epsilon$

$$\epsilon^2 \partial_1 B = \epsilon^2 B - (1 + \partial_2^2)^2 B - 4\epsilon(1 + \partial_2^2) \partial_2 \partial_3 B - \epsilon^2 [4\partial_2^2 \partial_3^2 + 2(1 + \partial_2^2 \partial_3^2)] B - \epsilon^2 B^3 + \mathcal{O}(\epsilon^3) .$$

Il faut maintenant remplacer  $B$  par son développement en série de  $\epsilon$  et résoudre ordre par ordre en  $\epsilon$ .

**Ordre  $\epsilon^0$ .**

Il vient

$$(1 + \partial_2^2)^2 B_0 = 0 ,$$

dont la solution générale réelle est donnée par

$$B_0(x_1, x_2, x_3) = D_0(x_1, x_3)e^{ix_2}x_2 + C_0(x_1, x_3)e^{ix_2} + c.c.$$

où  $C_0$  et  $D_0$  sont des fonctions complexes pour le moment inconnues. Nous allons chercher des solutions bornées et nous allons donc poser  $D_0 = 0$  (élimination du terme séculier), soit finalement

$$B_0(x_1, x_2, x_3) = C_0(x_1, x_3)e^{ix_2} + c.c.$$

**Remarque V.4.** Nous voyons réapparaître ici un phénomène bien connu dans la théorie ordinaire des bifurcations : les nouvelles solutions "bifurquent" dans la direction qui devient instable. L'objet intéressant est l'amplitude de la solution dans cette direction (voir la théorie des variétés centrales et des formes normales). De même il est bien connu que le bon paramètre est la taille de cette amplitude, ce qui peut justifier à posteriori notre choix de  $\epsilon$  pour l'échelle de  $u$ .

**Ordre  $\epsilon^1$ .**

Il vient

$$-(1 + \partial_2^2)^2 B_1 - 2(1 + \partial_2^2)\partial_2\partial_3 B_0 = 0 .$$

Le résultat à l'ordre zéro implique que le second terme est nul, et nous obtenons comme ci-dessus

$$B_1(x_1, x_2, x_3) = D_1(x_1, x_3)e^{ix_2}x_2 + C_1(x_1, x_3)e^{ix_2} + c.c.$$

dont nous éliminons le terme séculier pour obtenir

$$B_1(x_1, x_2, x_3) = C_1(x_1, x_3)e^{ix_2} + c.c. .$$

La fonction  $C_1$  reste pour l'instant inconnue.

**Ordre  $\epsilon^2$ .**

Il vient

$$\partial_1 B_0 = -(1 + \partial_2^2)^2 B_2 - 4(1 + \partial_2^2)\partial_2\partial_3 B_1 - [4\partial_2^2\partial_3^2 + 2(1 + \partial_2^2)\partial_3^2]B_0 + B_0 - B_0^3 .$$

Dans le membre de droite de cette équation nous pouvons annuler les second et quatrième termes en utilisant les relations déjà acquises aux ordres inférieurs. Nous pouvons maintenant réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$-(1 + \partial_2^2)^2 B_2 = e^{ix_2} \{ \partial_1 C_0 - 4\partial_3^2 C_0 - C_0 + 3C_0^2 \overline{C_0} \} - C_0^3 e^{3ix_2} + c.c. .$$

Comme les fonctions  $e^{\pm ix_2}$  sont dans le noyau de l'adjoint de l'opérateur  $(1 + \partial_2^2)^2$  (qui est en fait auto-adjoint), pour éviter l'apparition de termes séculiers non bornés en  $x_2$  pour la fonction  $B_2$ , nous devons annuler les coefficients de ces fonctions dans le second membre de l'équation précédente. Nous obtenons donc une condition de compatibilité qui porte sur la fonction  $C_0$ , et nous pourrions ensuite résoudre pour la fonction  $B_2$  et poursuivre les calculs aux ordres suivants. L'équation de compatibilité s'écrit

$$\partial_1 C_0 = 4\partial_3^2 C_0 + C_0 - 3C_0|C_0|^2 ,$$

et si nous faisons les changements d'échelles (d'ordre unité) et de notations  $x_1 = t$ ,  $x_2 = x/2$  et  $C_0 = A/\sqrt{3}$  il vient finalement l'équation dite de Ginzburg-Landau :

$$\partial_t A = \partial_x^2 A + A - A|A|^2 . \quad (G.L.)$$

**Remarque V.5.** Nous pourrions continuer le développement qui deviendrait rapidement compliqué mais qui présenterait toujours à chaque ordre la même structure :

- 1) Une équation qui implique une condition de solubilité et qui permet de fixer des fonctions inconnues provenant de l'étape précédente,
- 2) La résolution de l'équation à cet ordre qui laisse une partie de solution indéterminée.

Il se pose maintenant bien sûr la question de faire une démonstration rigoureuse de ces résultats. Pour résumer ce que nous avons obtenu jusqu'ici, si nous considérons une fonction  $A$  satisfaisant l'équation (G.L.), la fonction

$$u(t, x) = \epsilon e^{ix} 3^{-1/2} A(\epsilon^2 t, \epsilon x/2) + c.c. \quad (V.2)$$

satisfait l'équation (S.H.) modulo des termes d'ordre supérieur. Autrement dit nous pouvons espérer que si nous partons d'une condition initiale

$$u(0, x) = \epsilon e^{ix} 3^{-1/2} A(0, \epsilon x/2) + c.c.$$

la vraie solution  $u(t, x)$  de (S.H.) va être bien approximée pendant un temps au moins d'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$  par la fonction V.2 où  $A$  est solution de (G.L.) avec condition initiale  $A(0, x)$ . Dans la seconde partie en anglais de ces notes nous donnons un énoncé rigoureux de ce résultat et quelques idées sur sa démonstration.

Il s'agit là d'une situation très analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie des équations d'amplitude et des formes normales pour les bifurcations des systèmes de dimension finie. Remarquons qu'il ne serait pas raisonnable d'espérer plus qu'un résultat de ce type. En effet, même pour la théorie des bifurcations des systèmes dynamiques de dimension finie, il n'y a pas en général de conjugaison régulière à la forme normale



tronquée pour une famille à un paramètre<sup>1</sup>. Au delà d'une période longue (qui dépendra bien sûr du degré d'approximation) la solution exacte et la solution approximée vont en général diverger. On peut même faire une hypothèse quantitative sur le temps de divergence. Si l'erreur est de la forme  $\mathcal{O}(\epsilon^n)$ , et si nous avons une échelle de temps  $\epsilon^h$ , si la solution après bifurcation présente des instabilités (par exemple un système hyperbolique), la différence entre la solution approximée et la vraie solution sera en general de l'ordre de l'unité au bout d'un temps de l'ordre de  $\mathcal{O}(n)\epsilon^{-h} \log \epsilon^{-1}$ .

Dans la littérature (et dans la suite) nous oublierons souvent ce problème et nous ferons comme si V.2 est une vraie solution de l'équation originale (S.H.). Ceci nous amènera donc à étudier en détail les solutions de (G.L.), à partir desquelles nous prétendrons reconstruire des solutions de (S.H.) par la formule V.2. Soulignons à nouveau que ceci n'est pas entièrement rigoureux et qu'il faut voir cette procédure comme la construction d'une bonne approximation (où d'un bon ansatz) de solution.

Le premier avantage de cette démarche est bien sûr que l'équation (G.L.) est plus simple que (S.H.). Nous pouvons donc espérer y mettre en évidence plus facilement des solutions et des phénomènes physiquement intéressants, voire comprendre plus facilement la dynamique globale. L'autre avantage important est le caractère "**universel**" de (G.L.). Il n'existe pas à l'heure actuelle de notion de généricité des instabilités et des équations d'amplitude analogues aux notions de généricité des bifurcations et des formes normales en dimension finie. Cependant dans l'analyse multi-échelle des instabilités il apparaît souvent les mêmes équations. On peut comprendre ce fait d'une manière simple pour (G.L.) si nous regardons d'où viennent les différents termes. La partie diffusion vient directement de la courbure de la relation de dispersion (c'est à dire de la partie réelle de la valeur propre)  $\omega(k)$  au nombre d'onde critique. "Génériquement" cette courbure est non nulle et c'est pourquoi nous obtenons une diffusion. Le terme cubique en  $A$  vient des non-linéarités, mais de la théorie des bifurcations en dimension finie nous savons bien que les non-linéarités cubiques sont génériques. Quand au terme linéaire en  $A$  son signe positif décrit simplement le fait que nous voulons que la solution homogène soit instable. Nous nous attendons donc à trouver (G.L.) (ou quelque chose de cette forme) chaque fois que nous avons une instabilité à nombre d'onde non nul (pour avoir un  $A$  complexe) avec une valeur propre qui touche quadratiquement l'axe imaginaire pur en fonction du nombre d'onde. D'une manière encore plus simpliste on peut se demander comment fabriquer une équation qui mélange diffusion, instabilité et non-linéarité (pour stabiliser la solution). La réponse la plus simple est (G.L.).

De nombreux calculs multi-échelles ont été faits sur les instabilités classiques. Des références sont données dans [C.H.]. Pour le cas particulier de l'écoulement de Poiseuille

---

<sup>1</sup> Y.II'yashenko, S.Yakovenko. Finitely-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields. Russ. Math. Surv. **46**, 1-43 (1991).

étudié au chapitre précédent on pourra consulter l'article de Weinstein<sup>2</sup> et ses références.

---

<sup>2</sup> M.Weinstein. Non linear instability in plane Poiseuille flow: a quantitative comparison between the methods of amplitude expansions and the method of multiple scales. Proc. R. Soc. Lond. **A 375**, 155-167 (1981).

CHAPITRE VI  
SOLUTIONS DE G.L.C.

Dans ce chapitre nous allons commencer à étudier des solutions intéressantes des équations de Ginzburg Landau :

$$\partial_t A = (1 + i\alpha)\Delta A + A - (1 + i\beta)A|A|^2$$

où nous rappelons que  $A$  est un champ complexe et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels.

Il faudra toujours avoir en tête la relation entre ces solutions et les solutions associées pour des équations plus physiques par la reconstruction décrite au chapitre V. Autrement dit il faudra toujours penser l'équation G.L.C. comme une espèce de "forme normale tronquée".

Comme nous l'avons expliqué au premier chapitre, il faut d'abord se préoccuper du bien fondé de cette équation, c'est à dire si elle possède des solutions bornées et régulières à tous les temps pour toutes données initiales (raisonnables). Nous avons en effet le théorème suivant.

**Théorème VI.1.** *En dimension d'espace 1 et 2*

- 1) *Si la donnée initiale  $A(0, \cdot)$  est bornée et uniformément continue, alors la solution correspondante  $A(t, \cdot)$  existe (est unique) et reste éternellement bornée.*
- 2) *Il existe une constante positive  $M = M(\alpha, \beta)$  telle que pour toute donnée initiale  $A(0, \cdot)$  bornée et uniformément continue, il existe un nombre positif  $T(\alpha, \beta, A_0)$  tel que*

$$\sup_{t > T(\alpha, \beta, A_0)} \sup_x |A(t, x)| \leq M(\alpha, \beta) .$$

- 3) *Si de plus, à l'instant zéro toutes les moyennes spatiales suivantes existent :*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \prod_{j=1}^n A^{\#j}(0, x_j + y) dy$$

où  $x_j \in \mathbf{R}^n$  et  $A^{\#j} = A$  ou  $\bar{A}$ , alors ces moyennes existent à tous les temps.

Autrement dit si nous attendons suffisamment longtemps (en fonction de la donnée initiale), la solution possède une borne indépendante de cette donnée initiale.

**Remarque VI.1.** Le troisième résultat permet de définir le spectre de puissance d'une solution selon Wiener<sup>1</sup>.

Il existe en fait de meilleurs résultats concernant en particulier la régularité.

---

<sup>1</sup> D.C. Champeney. Fourier transforms and their physical applications. Academic Press, 1973.

**Théorème VI.2.** *En dimension d'espace 1 et 2*

- 1) *Il existe deux constantes positives  $\delta(\alpha, \beta)$  et  $S(\alpha, \beta)$  et pour toute donnée initiale  $A(0, \cdot)$  il existe un nombre positif  $\Upsilon(\alpha, \beta, A_0)$  tels que pour tout temps  $t > \Upsilon(\alpha, \beta, A_0)$  la fonction  $A(t, x)$  s'étend en une fonction  $\tilde{A}(t, z)$  analytique dans la bande  $|\Im z| < \delta$  et qui satisfait de plus*

$$\sup_{t > \Upsilon(\alpha, \beta, A_0)} \sup_{|\Im z| < \delta} |\tilde{A}(t, z)| \leq S(\alpha, \beta) .$$

- 2) *Il existe un ensemble attractant global (nous renvoyons à la seconde partie en anglais pour la définition et la démonstration).*

**Remarque VI.2.** Dans le premier résultat du théorème précédent il faut bien noter que la fonction  $\tilde{A}(t, z)$  ne satisfait en général l'équation G.L.C. que sur les réels. En dehors des réels, sa partie réelle et sa partie imaginaire satisfont un système d'équations paraboliques non linéaires couplées.

Nous renvoyons à la deuxième partie en anglais pour la discussion de la preuve de ces résultats. Maintenant que nous savons que l'évolution est bien définie, nous pouvons passer à l'étude des solutions.

### § VI.1. Solutions stationnaires bornées de G.L. en dimension 1

Comme dans le cas des systèmes dynamiques de dimension finie, les solutions les plus simples sont les solutions stationnaires. Pour le cas G.L. ( $\alpha = \beta = 0$ ) en dimension 1, nous obtenons l'équation

$$A'' + A - A|A|^2 = 0 . \tag{VI.1}$$

Si nous supposons qu'en tout point de l'axe réel  $A \neq 0$ , nous pouvons introduire l'amplitude et la phase de la fonction  $A(x)$  :

$$A = R e^{i\phi} . \tag{VI.2}$$

En reportant dans l'équation VI.1 et en séparant les parties réelles et imaginaires, il est facile d'obtenir le système d'équations couplées :

$$\begin{cases} R'' - R\phi'^2 + R - R^3 = 0 , \\ R\phi'' + 2R'\phi' = 0 . \end{cases} \tag{VI.3}$$

Nous pouvons directement intégrer la seconde équation, ce qui donne

$$\phi' = \frac{C}{R^2}$$

où  $C$  est une constante d'intégration. En reportant dans la première équation il vient

$$R'' + R - R^3 - \frac{C^2}{R^3} = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Nous pouvons facilement discuter cette équation par analogie avec le problème mécanique du mouvement d'une particule de masse unité dans le potentiel

$$V(q) = \frac{1}{2} \left[ q^2 - \frac{q^4}{2} + \frac{C^2}{q^2} \right].$$

Il est facile de vérifier que si  $|C| > 2/3\sqrt{3}$  il n'existe pas de solutions bornées. Par contre si  $|C| \leq 2/3\sqrt{3}$  il existe des solutions bornées, et en particulier des solutions périodiques en  $x$ . Considérons une de ces solutions  $R(x)$  périodique de période  $\nu$ . Si nous intégrons l'équation pour  $\phi$  il vient

$$\phi(x) = \phi(0) + C \int_0^x \frac{dy}{R^2(y)}. \quad (\text{VI.5})$$

En particulier pour tout  $x$  nous avons

$$\phi(x + \nu) = \phi(x) + \Psi$$

où  $\Psi$  est la constante

$$\Psi = C \int_0^\nu \frac{dy}{R^2(y)}.$$

Nous concluons que  $\phi$  n'est pas périodique sauf dans le cas  $C = 0$  où cette fonction est d'ailleurs constante (l'argument précédent montre que  $\phi$  n'est pas périodique de période  $\nu$  si  $C \neq 0$ , mais de même il ne peut y avoir d'autre période car l'intégrale dans le second membre de VI.5 est positive). Si nous revenons à  $A$  nous avons pour tout entier  $n$  et pour tout  $x$

$$A(x + n\nu) = e^{in\Psi} A(x).$$

Si  $\Psi$  est de la forme  $2\pi p/q$  avec  $p$  et  $q$  entiers, nous avons construit une solution stationnaire périodique. Si  $\nu$  n'est pas de cette forme nous avons une solution stationnaire presque périodique.

Finalement, si  $|C| < 2/3\sqrt{3}$ , il reste encore un cas particulier de solution de type homocline pour VI.4. Cette solution apparaît quand l'énergie satisfait

$$R'^2 + \frac{1}{2} \left[ R^2 - \frac{R^4}{2} + \frac{C^2}{R^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{9} + \frac{3C^2}{2} \right].$$

Si  $x$  tend vers l'infini,  $R$  tend vers  $\sqrt{2/3}$  et  $\phi$  a une limite.

En résumé nous pouvons énoncer le résultat suivant.

**Théorème VI.3.** *Les solutions stationnaires bornées de G.L. qui ne s'annulent pas forment une famille à quatre paramètres de solutions stationnaires presque périodiques et une famille à deux paramètres de solutions de type homocline.*

**Remarque VI.3.** Les quatre paramètres des solutions presque périodiques sont la constante  $C$ , deux constantes d'intégration qui viennent dans la détermination de  $R$  (l'une est par exemple la période, l'autre une amplitude donnée en un point) et finalement la phase initiale  $\phi(0)$ . Les solutions homoclines peuvent être obtenues comme des limites de solutions presque périodiques.

Un cas particulier très important pour la suite correspond à  $R$  constant. Autrement dit dans l'analogie mécanique ceci correspond au fond du puits de potentiel ou à des solutions de période nulle. Dans ce cas la phase a une dérivée constant que nous noterons  $q$ . Ceci nous conduit à une famille à deux paramètres de solutions que nous noterons dans la suite  $A_q(x)$  et qui est donnée par

$$A_q(x) = \sqrt{1 - q^2} e^{i(qx + \phi_0)}. \quad (\text{VI.6})$$

Le nombre  $q$  doit être réel et la condition  $|C| \leq 2/3\sqrt{3}$  nous conduit à l'inégalité  $|q| \leq 1$ . La phase arbitraire  $\phi_0$  est liée à la translation de cette solution et nous l'oublierons dans la suite.

**Remarque VI.4.** Si nous appliquons les idées du chapitre V, à partir d'une solution  $A_q$  de G.L. nous devrions pouvoir construire une bonne approximation d'une solution de S.H. En appliquant la formule V.2 nous construisons la fonction

$$u(x) = 2\epsilon 3^{-1/2} \sqrt{1 - q^2} \cos((1 + iq\epsilon/2)x) = 23^{-1/2} \sqrt{\eta - (1 - \alpha^2)^2} \cos(\alpha x)$$

si comme prévu  $\eta = \epsilon^2$  et  $\alpha = 1 + q\epsilon/2$ , ce qui correspond exactement au premier terme de la formule IV.4. Nous voyons aussi explicitement les avantages et les limitations des considérations du chapitre V : si nous nous limitons à l'équation d'amplitude, nous n'obtenons que le terme dominant de la solution exacte construite au chapitre IV.

Il reste à déterminer les solutions stationnaires de G.L. qui s'annulent en au moins un point. Par translation, il suffit de considérer le cas d'une solution stationnaire  $A(x)$  qui s'annule en zéro. Par le théorème VI.2, cette fonction doit être analytique en  $x$ , et donc il existe un ouvert  $]0, b[$  ( $b > 0$ ) où elle est non nulle. Dans cet ouvert nous pouvons utiliser la représentation amplitude-phase VI.2. Nous avons à nouveau dans cet intervalle la relation

$$\frac{R'^2}{2} + \frac{1}{2} \left[ R^2 - \frac{R^4}{2} + \frac{C^2}{2R^2} \right] = B$$

où  $B$  et  $C$  sont des constantes. Puisque  $R = |A|$  est une fonction continue de  $x$ , en faisant tendre  $x$  vers zéro par valeurs supérieures nous déduisons  $C = 0$ . En considérant  $x > 0$  petit nous déduisons aussi  $B \geq 0$ . Nous pouvons encore écrire l'identité précédente

$$\frac{R'^2}{2} = \frac{1}{4}(1 - R^2)^2 + (B - 1/4).$$

Si  $B > 1/4$ , nous avons donc

$$|R'| \geq \sqrt{2}\sqrt{B - 1/4} > 0,$$

et nous déduisons que  $b = +\infty$  et que la solution n'est pas bornée. Nous devons donc imposer  $0 \leq B \leq 1/4$ . Si  $B = 0$ , en considérant à nouveau  $x > 0$  voisin de 0, nous déduisons qu'il existe un ouvert  $]0, b[$  tel que  $R = 0$ , ce qui implique  $A = 0$  et par l'analyticité du Théorème VI.2 nous déduisons que si  $B = 0$ , la seule solution stationnaire qui s'annule est  $A = 0$ . Il reste donc à analyser  $B \in ]0, 1/4[$ . Comme maintenant  $C = 0$  et donc  $\phi' = 0$  sur  $]0, b[$ , la phase de  $A$  est constante sur cet intervalle, et il suffit donc de considérer une solution  $A$  réelle puisque l'équation G.L. est invariante par multiplication par une phase constante. Nous supposons aussi que  $b$  est tel que l'intervalle  $]0, b[$  est un intervalle maximal où  $A$  ne s'annule pas, c'est à dire que ou bien  $b = \infty$  ou sinon  $A(b) = 0$ . Nous avons donc pour  $A$  réel l'équation

$$A'' + A - A^3 = 0$$

et par analogie mécanique conservation de l'énergie totale :

$$\frac{A'^2}{2} + \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{4} = B.$$

Nous en concluons que si  $B \in ]0, 1/4[$  nous avons des solutions périodiques. Si  $B = 0$  nous retrouvons la solution constante  $A = 0$  qui correspond au fond du puits (et qui peut se voir comme cas particulier de la forme  $A_q$  avec  $q = \pm 1$ ). Finalement pour  $B = 1/4$  nous trouvons des solutions stationnaires constantes au bord du puits :  $A = \pm 1$  et deux solutions stationnaires qui relient les deux solutions précédentes :

$$A(x) = \pm \tanh(x/\sqrt{2}).$$

Mis à part les translatées des solutions précédentes, il n'existe pas d'autres solutions stationnaires bornées de G.L.

§ VI.2. Stabilité des solutions de l'équation G.L.

Nous allons surtout discuter le cas le plus intéressant des solution périodiques  $A_q$  données par VI.6. Nous devons donc reporter dans l'équation G.L. une forme  $A = A_q + v$ , et conserver seulement les termes linéaires en  $v$ . Il est un peu plus commode d'opérer différemment. Tout d'abord pour  $q \in ]-1, 1[$  fixé, nous faisons le changement de fonction

$$A = \sqrt{1 - q^2} e^{iqx} Z .$$

C'est bien sûr un changement inversible de fonction et il nous suffira d'étudier la stabilité pour cette nouvelle fonction. Notons que cette transformation ne restreint pas non plus l'espace de phase, pas exemple toute solution bornée  $A$  se représente par une fonction bornée  $Z$  et réciproquement. L'équation d'évolution pour  $Z$  s'écrit

$$\partial_t Z = Z'' + 2iqZ' + (1 - q^2)Z(1 - |Z|^2) . \tag{VI.7}$$

La solution stationnaire  $A_q$  devient maintenant la solution constante  $Z_0 = 1$  (ou plus généralement  $Z_0 = e^{i\psi}$  avec  $\psi$  constante). Nous voulons maintenant poser  $Z = 1 + w$  et linéariser en  $w$ . Ceci n'est pas directement possible sur l'équation VI.7 à cause de la présence du terme  $|Z|^2$  qui n'est pas différentiable en  $Z$  !. Nous devons donc d'abord introduire les parties réelles ( $U$ ) et imaginaires ( $V$ ) de  $Z$  :

$$Z = U + iV .$$

En reportant dans l'équation VI.7 et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient facilement le système **réel** suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 - 2(1 - q^2) & -2q\partial_x \\ 2q\partial_x & \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + (1 - q^2) (1 - U^2 - V^2) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} . \tag{VI.8}$$

La solution stationnaire qui nous intéresse est maintenant  $Z_0 = (1, 0)$ . Nous voulons donc poser dans le système VI.8  $U = 1 + X$ ,  $V = Y$  et linéariser en  $(X, Y)$ . Il vient facilement

$$\partial_t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 - 2(1 - q^2) & -2q\partial_x \\ 2q\partial_x & \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - (1 - q^2) (2X + X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} 1 + X \\ Y \end{pmatrix} ,$$

et l'équation linéarisée

$$\partial_t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathcal{L}_q(\partial_x) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{VI.9}$$



où

$$\mathcal{L}_q(\partial_x) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 - 2(1 - q^2) & -2q\partial_x \\ 2q\partial_x & \partial_x^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.10})$$

Nous voyons maintenant l'avantage de remplacer la fonction  $A$  par la fonction  $Z$  : l'opérateur  $\mathcal{L}_q(\partial_x)$  commute aux translations. Nous pouvons donc commencer par prendre la transformée de Fourier, il vient alors une matrice qui dépend du nombre d'onde  $k$  :

$$\mathcal{L}_q(ik) = \begin{pmatrix} -k^2 - 2(1 - q^2) & -2iqk \\ 2iqk & -k^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.11})$$

Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_q(\partial_x)$  est l'union sur  $k$  des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{L}_q(ik)$ . Pour chaque  $k$  fixé cette matrice est auto-adjointe (car le système de départ VI.8 est réel). L'équation aux valeurs propres  $\lambda$  s'écrit

$$\lambda^2 + 2\lambda(1 + k^2 - q^2) + k^2(k^2 + 2(1 - 3q^2)) = 0. \quad (\text{VI.12})$$

Il va falloir maintenant discuter en fonction de  $k$  et  $q$  les solutions de cette équation. Les deux solutions sont réelles et nous aurons stabilité linéaire si pour tous les nombres d'onde  $k$  ces deux solutions sont négatives (ou nulles). Comme l'équation VI.12 dépend continuellement de  $k$ , ses deux solutions vont aussi dépendre continuellement de  $k$ . Autrement dit, en faisant varier  $k$ , nous obtiendrons des courbes dans le plan complexe (réduites ici à des segments de droites puisque les solutions sont réelles). Il est facile de voir que si  $|k|$  est suffisamment grand, les deux solutions sont strictement négatives ( $\lambda = -k^2 + \mathcal{O}(|k|)$ ). Donc par continuité, pour avoir une instabilité linéaire (il existe un  $k$  tel que l'une des solutions est strictement positive), il doit exister un nombre d'onde  $k$  tel que l'équation VI.12 admette la solution 0. Nous allons chercher ce  $k$  si il existe. L'équation VI.12 admet la solution  $\lambda = 0$  si et seulement si

$$k^2(k^2 + 2(1 - 3q^2)) = 0.$$

Nous trouvons tout d'abord  $k = 0$  qui correspond à la multiplication de  $Z$  par une phase constante (voir le vecteur propre associé). Si  $(1 - 3q^2) \geq 0$ , c'est la seule possibilité et dans ce cas nous avons stabilité linéaire (marginale) : pour tout nombre d'onde  $k$ , les deux solutions de l'équation VI.12 sont négatives ou nulles.

Si  $q^2 > 1/3$ , nous avons deux autres nombres d'onde qui donnent des valeurs propres zéro. Il est facile de voir que dans ce cas il existe un intervalle de nombres d'onde qui donnent une valeur propre positive. Nous avons donc instabilité linéaire. Ce phénomène de l'apparition d'une instabilité en fonction du nombre d'onde  $q$  de la solution stationnaire s'appelle instabilité d'Eckhaus. Nous pouvons résumer le résultat dans le théorème suivant.

**Théorème VI.4.** Si  $|q| \leq 1/3$ , la solution stationnaire

$$A_q(x) = \sqrt{1 - q^2} e^{iq(x-x_0)}$$

de l'équation G.L. est linéairement (marginale) stable. Si  $|q| > 1/3$  elle est linéairement instable.

**Remarque VI.5.** Au voisinage de  $k = 0$ , pour  $|q| < 1$ , nous avons pour la plus grande valeur propre de  $\mathcal{L}_q(ik)$

$$\lambda(k) = -\frac{1 - 3q^2}{1 - q^2} k^2 + \mathcal{O}(k^4).$$

Le graphe de cette fonction se déforme au passage de  $q^2 = 1/3$  où un maximum en  $k = 0$  devient un minimum et il apparaît deux autres maxima.

**Remarque VI.6.** Pour  $q^2 = 1$ , on calcule facilement au voisinage de  $k = 0$

$$\lambda(k) = -\frac{3}{4} k^4 + \mathcal{O}(k^6).$$

**Remarque VI.7.** L'étude précédente ne couvre pas le cas  $q = \pm 1$  car nous ne pouvons pas alors passer de  $A$  à  $Z$ . Il est facile de faire dans ce cas l'étude directe sur  $A$ . Nous pouvons même au niveau linéaire nous passer de la décomposition en parties réelles et imaginaires. On trouve facilement que l'opérateur linéarisé est donné par  $\partial_x^2 + 1$  ce qui conduit à une instabilité linéaire.

**Remarque VI.8.** Dans le cas stable on peut montrer la stabilité non linéaire dans des espaces fonctionnels adéquats pour de petites perturbations.

**Remarque VI.9.** Il a été démontré récemment que les solutions stationnaires presque périodiques sont instables.

**Remarque VI.10.** Si nous revenons à l'équation S.H. toujours par les idées du chapitre V, nous retrouvons en première approximation les résultats du théorème IV.4, c'est à dire la bande d'Eckhaus.

### § VI.3. Solutions de l'équation G.L.C. en dimension un.

Nous allons maintenant considérer l'équation de Ginzburg Landau complexe en dimension 1

$$\partial_t A = (1 + i\alpha)A'' + A - (1 + i\beta)A|A|^2 .$$

Comme on peut le vérifier facilement, cette équation possède une famille à deux paramètres de solutions de type ondes :

$$B_q(t, x) = \sqrt{1 - q^2} e^{i(qx + \omega t + \phi)}$$

où  $\phi$  est une constante réelle,  $q$  est un paramètre appartenant à l'intervalle réel  $[-1, 1]$ , et le nombre réel  $\omega$  est donné par

$$\omega = (\beta - \alpha)q^2 - \beta .$$

**Remarque VI.11.** Dans le cas  $\alpha = \beta = 0$  nous retrouvons les solutions notées plus haut  $A_q$  de l'équation G.L. Comme dans ce cas, nous ne noterons pas explicitement la dépendance dans la phase  $\phi$  qui peut sauf dans des cas particuliers s'éliminer par translation d'espace (ou de temps).

**Remarque VI.12.** L'équation G.L.C. possède bien d'autres solutions intéressantes, mais nous allons nous limiter pour le moment à l'étude de ces solutions qui sont les plus fondamentales. La question qui va nous occuper est de connaître la stabilité linéaire des solutions  $B_q$ .

L'analyse commence comme pour les solutions  $A_q$  de G.L. : pour un  $q \in ]-1, 1[$  fixé, on commence par écrire la solution générale  $A$  de G.L.C. sous la forme

$$A(t, x) = e^{i(qx + \omega t)} Z(t, x) ,$$

et on écrit l'équation d'évolution pour  $Z$ . La solution particulière qui nous intéresse est alors

$$Z = 1 ,$$

(ou un peu plus généralement une phase constante). Nous écrivons ensuite

$$Z = 1 + X + iY$$

avec  $X$  et  $Y$  réels petits et nous obtenons un système **réel** d'équations linéarisées pour l'évolution de la perturbation  $(X, Y)$ .

**Remarque VI.13.** On rencontre parfois dans la littérature ce calcul fait sous une forme un peu différente. On peut en effet chercher  $Z$  proche de 1 sous la forme

$$Z = Re^{i\phi}$$

avec  $R-1$  et  $\phi$  réels petits. On peut ensuite écrire le système linéarisé pour l'évolution de  $r = R-1$  et  $\phi$ . Avec nos notations, nous avons au plus bas ordre non trivial  $R = 1 + X$  et  $\phi = Y$ .

Revenant à l'équation linéarisée pour l'évolution de la perturbation  $(X, Y)$  il vient

$$\partial_t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 - 2q\alpha\partial_x - 2(1-q^2) & -\alpha\partial_x^2 - 2q\partial_x \\ \alpha\partial_x^2 + 2q\partial_x - 2\beta(1-q^2) & \partial_x^2 - 2q\alpha\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.13})$$

A nouveau, l'opérateur différentiel (matriciel) du second membre de l'équation précédente commute aux translations. Nous pouvons donc commencer par prendre une transformée de Fourier. Pour le nombre d'onde  $k$  il vient la matrice

$$M_q(k) = \begin{pmatrix} -k^2 - 2iq\alpha k - 2(1-q^2) & +\alpha k^2 - 2iqk \\ -\alpha k^2 + 2iqk - 2\beta(1-q^2) & -k^2 - 2iq\alpha k \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est en général plus auto-adjointe, et trouver son spectre en fonction de  $k$  et  $q$  va être plus compliqué que dans le cas G.L.

Observons tout d'abord que pour  $k = 0$ , nous avons une valeur propre nulle qui correspond au changement de la phase constante  $\phi$ . Nous pouvons donc chercher pour  $k$  petit le développement de la valeur propre qui passe par zéro pour  $k = 0$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette branche se met sous la forme

$$\lambda = ikv + uk^2 + \mathcal{O}(k^3)$$

avec

$$v = 2q(\alpha - \beta)$$

et

$$u = -(1 + \alpha\beta) + \frac{q^2}{1 - q^2} (2\beta^2 + 8\alpha^2 + 2 - 6\alpha\beta).$$

Nous observons maintenant que si nous avons stabilité, alors nécessairement  $u \leq 0$ , et si nous avons  $u > 0$  il y a certainement instabilité. Comme le coefficient de  $q^2/(1-q^2)$  dans  $u$  est positif, le pire des cas correspond à  $q = 0$ . Nous en déduisons que si  $\alpha\beta < -1$  il y a instabilité. Une analyse plus détaillée du spectre de la matrice  $M_q(k)$  montre en fait qu'il s'agit là de la réponse globale. Nous pouvons résumer la situation dans l'énoncé suivant.

**Théorème VI.5.** *Pour l'équation G.L.C. avec coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ ,*

- 1) *Si  $\alpha\beta > 1$ , il existe une bande de nombres d'onde  $q$  centrée en 0 telle que les solutions  $B_q$  de G.L.C. sont (marginale)ment stables.*
- 2) *Si  $\alpha\beta < -1$ , toutes les solutions  $B_q$  sont instables.*

**Remarque VI.14.** La dernière solution qui se déstabilise (pour  $\alpha\beta = -1$ ) correspond à  $q = 0$ , c'est à dire à la solution constante.

**Remarque VI.15.** Pour  $\alpha\beta > -1$ , nous avons une bande (marginale)ment stable au milieu de l'intervalle  $[-1, 1]$  de tous les nombres d'onde  $q$  possibles. Il s'agit d'une situation analogue à l'instabilité d'Eckhaus discutée précédemment.

**Remarque VI.16.** La disparition de la bande de nombres d'ondes (marginale)ment stables quand  $\alpha\beta \searrow -1$  porte le nom d'instabilité de Benjamin Feir. C'est aussi un phénomène très fréquent.

## Quelques Références sur les Systèmes Étendus

### Livres

S.Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, Oxford (1961). Reprinted by Dover.

P.Collet, J.-P.Eckmann. *Instabilities and Fronts in Extended Systems*. Princeton University Press, Princeton (1990).

P.G.Drazin, W.H.Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press (1981).

V.Eckhaus. *Studies in Nonlinear Stability Theory*. Springer (1965).

P.C.Fife. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Lecture Notes in Biomathematics **28**, Springer (1979).

U.Frisch *Turbulence : The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge (1995)

D.D.Joseph. *Stability of Fluid Motions vol I and II*. Springer (1976).

C.C.Lin. *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press (1955).

P.Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, New York (1990).

P.Grindrod. *Patterns and Waves*. Clarendon, Oxford (1991).

M.Van Dyke. *An Album of Fluid Motions*. The Parabolic Press, Stanford (1982).

D.Walgraef. *Structures Spatiales Loin de L'équilibre*. Masson, Paris (1988).

### Articles

M.Bramson. *Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equations to Traveling Waves*. Memoir AMS **285**, Vol. 44 (1983).

P.Collet, J.-P.Eckmann *Space-Time behaviour in Problems of Hydrodynamic Type: a Case Study*. Non Linearity **5**, 1265-1302 (1992).

M.C.Cross, P.C.Hohenberg. *Pattern Formation Outside of Equilibrium*. Rev. Mod. Phys. **65**, 851-1113 (1993).

A.C.Newell, T.Passot, J.Lega. *Order Parameter Equations for Patterns*. Ann. Rev. of Fluid Mech. **25**, 399- (1993).