



**HAL**  
open science

## (Cours) Elasticité linéaire

Thierry Désoyer

► **To cite this version:**

Thierry Désoyer. (Cours) Elasticité linéaire. Engineering school. Ecole Centrale de Pékin, 2009, pp.86. cel-00429788

**HAL Id: cel-00429788**

**<https://cel.hal.science/cel-00429788>**

Submitted on 4 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ce cours a été rédigé à l'intention des élèves de 1<sup>ère</sup> année du cycle d'ingénieur de l'École Centrale de Pékin. Il leur est présenté immédiatement après celui de Mécanique des Milieux Continus, dispensé par Jean Garrigues, dont il s'inspire très largement, tant dans ses notions – telle celle de *tenseur* – que dans ses méthodes – telle celle, *thermodynamique*, permettant d'établir les équations constitutives de la thermo-élasticité linéaire.

Les cours de Jean Garrigues sont librement accessibles à l'adresse suivante :

<http://jean.garrigues.perso.ec-marseille.fr/>

Par ailleurs, Jean Garrigues est l'auteur de :

*Fondements de la mécanique des milieux continus*  
(Editions Hermes ; ISBN : 978-2-7462-1607-5)

## Élasticité linéaire

Thierry Désoyer,  
[thierry.desoyer@centrale-marseille.fr](mailto:thierry.desoyer@centrale-marseille.fr)

4 novembre 2009



---

## Avant - propos

Le but de ce cours est :

- de présenter les hypothèses et la démarche méthodologique qui mènent à l'écriture des équations constitutives de la *thermo-élasticité linéaire isotrope*, c'est-à-dire un modèle de comportement thermo mécanique particulier <sup>1</sup> des matériaux en phase solide. La démarche est essentiellement celle de la Thermodynamique des Milieux Continus, associée, en l'occurrence, à deux hypothèses essentielles : celle, thermodynamique, de *nullité de la puissance mécaniquement dissipée* <sup>2</sup>, et celle, cinématique, des *déformations infinitésimales*. On montre comment cette démarche permet d'établir rigoureusement les équations constitutives en tant que conditions suffisantes, voire nécessaires et suffisantes, à la vérification systématique du second principe de la Thermodynamique. Les approximations usuelles de ces équations constitutives – liées à une approximation, usuelle elle aussi, sur la masse volumique – sont également présentées.
- de précisément définir l'ensemble des inconnues, des données et des équations définissant un *problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope*, ces dernières incluant les équations constitutives précédemment établies, dans leurs approximations usuelles. Il est toutefois à noter que le propos est restreint aux structures *homogènes*, c'est-à-dire constituées d'un et un seul matériau thermo-élastique linéaire isotrope.
- de précisément définir l'ensemble des inconnues, des données et des équations définissant un *problème de structure homogène, élastique linéaire isotrope*, celui-ci étant simplement vu comme un cas particulier du précédent où tous les aspects thermiques sont négligés. Les deux méthodes classiques de résolution analytique d'un tel problème sont également présentées : la *méthode des déplacements* (ou méthode de Navier) et la *méthode des contraintes* (ou méthode de Beltrami).
- de détailler deux exemples utiles d'application des méthodes de résolution analytique précédemment définies. Le premier, traité par la méthode des contraintes, est celui de la *traction-compression simple* d'une barre cylindrique homogène ; le second, traité par la méthode des déplacements, celui de la *torsion* d'une barre cylindrique homogène. Il est à noter que, dans les deux cas, le *domaine de validité* de la solution est précisé, d'une part, par rapport à l'hypothèse de comportement élastique, d'autre part, par rapport à l'hypothèse des déformations infinitésimales.

Les deux premiers points ci-dessus font l'objet du Chapitre 1. Le troisième point fait l'objet du Chapitre 2 ; le quatrième, celui du Chapitre 3.

Dans le Chapitre 4, quelques indications sont données sur la façon d'aborder des problèmes sortant du cadre défini aux Chapitres 1 et 2, à savoir :

- des problèmes de structures *hétérogènes*, élastiques linéaires isotropes,
- des problèmes de structures homogènes, élastiques linéaires *anisotropes*,
- des problèmes de structures homogènes, élastiques *non linéaires* isotropes,
- des problèmes de structures homogènes, *non élastiques* isotropes.

---

<sup>1</sup> En l'occurrence, il s'agit du modèle de comportement thermo-mécanique le plus simple que l'on puisse envisager. Il fait intervenir le strict minimum de variables d'état pour un matériau en phase solide, à savoir la température absolue et le tenseur des déformations infinitésimales ; et, moyennant certaines approximations, ses équations constitutives sont linéaires.

<sup>2</sup> Cette hypothèse est en fait la définition la plus générale que l'on puisse donner du comportement élastique.



---

# Chapitre 1

## Équations générales de la thermo-élasticité linéaire isotrope

### 1.1 Problème de structure en thermo-élasticité linéaire isotrope : hypothèses et énoncé qualitatif

En Génie Mécanique ou en Génie Civil, un ingénieur spécialisé en Mécanique des solides a très souvent à résoudre des *problèmes de structures*. Pour ce faire, un ingénieur, en première approximation fait très souvent l'hypothèse suivante :

Hypothèse **H1** : le comportement du matériau constitutif de la structure est *thermo-élastique*

L'hypothèse **H1** d'un comportement thermo-élastique a pour conséquence que *deux variables d'état doivent être obligatoirement considérées*, à savoir :

$$\begin{aligned} \text{la température absolue : } T > 0 & \quad (\text{en } K) \\ \text{un tenseur de déformations : } \mathbf{Y} \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s & \quad (\text{adimensionnel}) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Par la suite, le tenseur de déformations considéré sera celui de Green-Lagrange, soit (voir le cours de Mécanique des milieux continus) :

$$\mathbf{Y} = \text{sym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{U}) + \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_L^T \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{U}) \quad (1-2)$$

où  $\mathbf{grad}_L$  désigne le gradient lagrangien.

En première approximation, un ingénieur a donc à résoudre des problèmes de structures *thermo-élastiques*. Qualitativement, tous ces problèmes s'énoncent de la même façon, à savoir :

Soit une *structure*, c'est-à-dire un *domaine matériel solide*  $\mathcal{D}$  occupant, à l'instant générique  $t$ , un volume  $V_t$ , limité par une surface  $S_t$ .

Sachant que, dans un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ , cette structure est soumise à :

- des *sollicitations mécaniques*, c'est-à-dire :
  - des forces volumiques, agissant dans  $V_t$ ,
  - et/ou des forces surfaciques, agissant sur  $S_t$  ou une partie de  $S_t$ ,
  - et/ou des déplacements, agissant sur  $S_t$  ou une partie de  $S_t$ ,
- des *sollicitations thermiques*, c'est-à-dire :
  - des sources de chaleur volumiques, agissant dans  $V_t$ ,
  - et/ou des sources de chaleur surfaciques, agissant sur  $S_t$  ou une partie de  $S_t$ ,

- et/ou des températures, agissant sur  $S_i$  ou une partie de  $S_i$ ,  
connaissant, de plus, les conditions initiales, trouver,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :
- les champs mécaniques dans  $V_i$  : champs de déplacements et de déformations, champ de contraintes ;
- les champs thermiques dans  $V_i$  : champ de température, champs d'entropie massique et de densité de flux de chaleur.

Un ingénieur peut également faire d'autres hypothèses qui simplifient l'énoncé de tout problème de structure thermo-élastique :

- Hypothèse **H2** : le matériau est *thermiquement et mécaniquement isotrope*.
- Hypothèse **H3** : les déformations et les variations relatives de température sont « petites » ou *infinitésimales*,
- Hypothèse **H4** : la relation liant les contraintes aux déformations et à la température est *linéaire* ; la relation liant l'entropie massique aux déformations et à la température est *linéaire*.

L'hypothèse **H2** ne dépend que du matériau constitutif de la structure. Autrement dit, elle ne dépend ni de la géométrie de la structure, ni des sollicitations mécaniques et thermiques. Elle est valable pour de nombreux matériaux mais pas pour tous. Par exemple, le bambou est un matériau mécaniquement *anisotrope*. L'hypothèse **H2** d'un matériau thermiquement et mécaniquement isotrope a pour conséquence que :

$$T \text{ et } \mathbf{Y} \text{ sont les seules variables d'état à considérer.} \quad (1-3)$$

Si le matériau est mécaniquement et/ou thermiquement anisotrope, il faut ajouter à  $T$  et  $\mathbf{Y}$  une ou plusieurs autres variables d'état, c'est-à-dire une ou plusieurs directions d'anisotropie.

L'hypothèse **H3** dépend du matériau constitutif de la structure et des sollicitations mécaniques et thermiques. Elle est valable, par exemple, si le matériau est très rigide et bon conducteur de la chaleur et si les sollicitations sont « petites ». Elle n'est plus valable si les sollicitations sont « petites » mais le matériau peu rigide ou mauvais conducteur de la chaleur. L'hypothèse **H3** se traduit par :

$$(\mathbf{grad}_L \mathbf{U} : \mathbf{grad}_L \mathbf{U})^{1/2} \ll 1 \quad ; \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1 \quad (1-4)$$

où  $\mathbf{U}$  (en  $m$ ) est le vecteur des déplacements et  $T_0$ , la température initiale. Une conséquence immédiate de Eq. (1-4)-1 est qu'une approximation correcte du tenseur des déformations de Green-Lagrange, voir Eq. (1-2), est le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{Y} \approx \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{U}) \quad (1-5)$$

Dans Eq. (1-5), l'opérateur liant  $\mathbf{U}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est *linéaire*. Pour cette raison, le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est parfois appelé tenseur des déformations *linéarisées*.

Il est généralement admis que l'hypothèse **H4** est physiquement admissible quand l'hypothèse **H3** est vérifiée. La traduction mathématique de cette hypothèse s'écrit simplement en introduisant le *tenseur des contraintes de Cauchy*,  $\boldsymbol{\sigma}$  (en  $N.m^{-2}$  ou  $Pa$ ), et l'entropie massique,  $s$  (en  $J.kg^{-1}$ ) :

$$\begin{array}{ll} \text{le tenseur des contraintes de Cauchy } \boldsymbol{\sigma} & \text{dépend linéairement de } T \text{ et de } \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{l'entropie massique } s & \text{dépend linéairement de } T \text{ et de } \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \quad (1-6)$$

Associées à l'énoncé qualitatif du problème de structure thermo-élastique précédemment présenté, les hypothèses **H2**, **H3** et **H4** donnent l'énoncé qualitatif de tout problème de structure thermo-élastique *linéaire isotrope*.

Un ingénieur doit encore se poser trois questions quand il a obtenu une solution au problème de structure thermo-élastique :

- Question **Q1** : cette solution est-elle *unique*, c'est-à-dire les champs mécaniques et thermiques sont-ils uniques ?
- Question **Q2** : cette solution est-elle compatible avec l'hypothèse **H1**, c'est-à-dire les champs thermiques et mécaniques sont-ils bien tels que, en tout point et à tout instant, le matériau constitutif de la structure reste dans son domaine de comportement thermo-élastique ?

- Question **Q3** : cette solution est-elle compatible avec l'hypothèse **H3**, c'est-à-dire les champs thermiques et mécaniques sont-ils bien tels que les deux conditions définies dans Eq. (1-4) sont vérifiées en tout point et à tout instant ?

Ce n'est que dans le cas où il peut répondre « oui » à ces trois questions qu'un ingénieur peut affirmer que la solution qu'il a trouvée est la seule possible et est physiquement admissible. La traduction mathématique de ces trois questions est abordée dans le paragraphe 1.2.5.

---

### Principaux résultats du paragraphe 1.1

Dans tous les problèmes de structures thermo-élastiques linéaires isotropes, il est supposé que :

- le matériau constitutif de la structure est mécaniquement et thermiquement isotrope,
- en tout point et à tout instant, les variations relatives de température et les déformations sont infinitésimales. Une bonne approximation du tenseur des déformations de Green-Lagrange est alors le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  des déformations infinitésimales (ou linéarisées) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}_L \mathbf{U})$$

- le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  dépend linéairement de  $T$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ; l'entropie massique  $s$  dépend linéairement de  $T$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .
- 

## 1.2 Problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope : énoncé mathématique

### 1.2.1 Configuration d'une structure et description des champs en thermo-élasticité linéaire isotrope

L'hypothèse des déformations infinitésimales, voir Eq. (1-5), a une conséquence importante sur le mode de description des *champs* agissant dans une structure. Pour le comprendre, on rappelle tout d'abord que la *configuration* d'une structure à l'instant générique  $t$ , notée  $\Omega_t$  et de volume  $V_t$ , est définie par l'ensemble des vecteurs positions, par rapport à un quelconque point  $O$ , des particules  $P$  constitutives de la structure :

$$\Omega_t = \{\mathbf{x}_t = \mathbf{OP}_t\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1-7)$$

La configuration à l'instant  $t$  est appelée configuration *actuelle*. La configuration à l'instant initial  $t_0$ , notée  $\Omega_0$ , est appelée configuration *initiale* ou configuration *de référence*. Ces deux configurations sont *a priori* distinctes mais concernent les mêmes particules  $P$ .

Comme il a été montré au Chapitre 1 du cours de Mécanique des Milieux Continus, le champ d'une quelconque grandeur physique  $\Phi$ , scalaire, vectorielle ou tensorielle, agissant dans la structure peut être décrit en repérant les particules  $P$  dans l'une ou l'autre de ces configurations. Quand les particules sont repérées par leurs positions dans la configuration de référence, la description du champ est dite *de Lagrange*,  $\Phi_L(\mathbf{x}_0, t)$  ; quand les particules sont repérées par leurs positions dans la configuration actuelle, la description du champ est dite *d'Euler*  $\Phi_E(\mathbf{x}_t, t)$ .

Les déformations étant supposées infinitésimales, la configuration de référence et la configuration actuelle sont cependant approximativement les mêmes, *si la structure ne subit aucun mouvement de solide rigide*. En première approximation, ces deux configurations peuvent donc être considérées comme identiques : dans toute la suite de ce cours, la configuration d'une structure thermo-élastique linéaire isotrope sera simplement notée  $\Omega$  tel que :

$$\Omega = \{\mathbf{x} = \mathbf{OP}\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1-8)$$

Une conséquence immédiate de cette approximation est qu'il n'est plus nécessaire de préciser la description retenue pour un champ : dans toute la suite de ce cours, le champ d'une quelconque grandeur physique  $\Phi$  sera simplement noté  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ , sa dérivée particulaire se réduisant simplement à :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1-9)$$

Cette remarque vaut également pour les opérateurs et, notamment, pour l'opérateur gradient : dans toute la suite de ce cours, Eq. (1-5) s'écrira simplement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}U) \quad (1-10)$$

Il est important de répéter que les configurations de référence et actuelle ne peuvent être considérées comme identiques que si la structure ne subit aucun mouvement de solide rigide. On rappelle qu'un mouvement de solide rigide peut être caractérisé par un champ de déplacement  $U^r(\mathbf{x}, t)$  tel que  $\text{sym}(\text{grad}U^r) + (1/2)(\text{grad}_L^T U^r) \cdot (\text{grad}_L U^r) = 0, \forall \mathbf{x}$  et  $\forall t$ . De façon générale, le mouvement d'une structure, caractérisé par un champ de déplacement  $U(\mathbf{x}, t)$ , est ainsi la somme d'un mouvement de solide rigide, caractérisé par  $U^r(\mathbf{x}, t)$ , et d'un mouvement « déformant », caractérisé par un champ  $U^d(\mathbf{x}, t)$ , auquel est associé un champ de déformations non nul, soit :

$$U(\mathbf{x}, t) = U^r(\mathbf{x}, t) + U^d(\mathbf{x}, t) \quad (1-11)$$

Très souvent – mais pas toujours –, un ingénieur n'est intéressé que par le mouvement « déformant » d'une structure. En tout état de cause, il lui est toujours possible de résoudre séparément le problème du mouvement de solide rigide d'une structure et celui de son mouvement « déformant », lequel correspond à un *mouvement de solide rigide nul* dans un référentiel donné.

### Principaux résultats du paragraphe 1.2.1

Compte tenu de l'hypothèse des déformations infinitésimales, dans tous les problèmes de structures thermo-élastiques linéaires isotropes, il est supposé que :

- les configurations initiale (ou de référence) et actuelle de la structure sont approximativement les mêmes. À tout instant, la configuration de la structure est donc définie par

$$\Omega = \{\mathbf{x} = \mathbf{OP}\} \subset \mathbb{R}^3$$

où  $O$  est un point quelconque de l'espace euclidien et  $P$  est le point de l'espace euclidien occupé par une quelconque particule de la structure.

- les descriptions de Lagrange et d'Euler du champ d'une quelconque grandeur physique  $\Phi$  n'ont pas à être distinguées. On écrit donc simplement  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ , dont la dérivée particulaire est  $\dot{\Phi} = \partial \Phi / \partial t$ . De la même façon, il n'est plus nécessaire de préciser la configuration sur laquelle un opérateur est exprimé. On peut ainsi simplement écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}U)$$

## 1.2.2 Principes de conservation et second principe de la thermodynamique en thermo-mécanique des milieux continus

Les équations et inéquations présentées dans ce paragraphe ne sont que des cas particuliers des trois principes de conservation et du second principe de la Thermodynamique dont les énoncés généraux ont été donnés dans le cours de Mécanique des Milieux Continus. Ces cas sont « particuliers » car les déformations sont supposées infinitésimales. Une conséquence de cette hypothèse est que le tenseur de la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses (noté  $D$  dans le cours de Mécanique des Milieux Continus) est approximativement égal à la dérivée particulaire du tenseur des déformations infinitésimales :

$$D \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1-12)$$

– **Principe de conservation de la masse**

On note  $\rho(\mathbf{x}, t)$  (en  $kg.m^{-3}$ ) le champ de masse volumique dans  $\Omega$ , voir Eq. (1-8). Compte tenu que les déformations sont supposées infinitésimales, voir Eq. (1-10), l'expression locale du principe de conservation de la masse est donnée par l'équation suivante ( $\mathbf{G}$  désigne le tenseur métrique) :

$$\dot{\rho} = -\rho (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{G}) = -\rho \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-13)$$

où la dérivée particulaire de  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$ , est définie en accord avec Eq. (1-9). Dans Eq. (1-13), le quantificateur «  $\forall$  » indique que cette équation est à vérifier en tout point de la structure et à tout instant. Sachant que, par définition du tenseur des déformations infinitésimales,  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$ , la solution de cette équation différentielle est :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t_0) \exp(-\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t))) \quad (1-14)$$

Une condition nécessaire à la validité de l'hypothèse des déformations infinitésimales est que  $|\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})| \ll 1$ . En première approximation, Eq. (1-14) peut donc se récrire :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t_0) (1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t))) \quad (1-15)$$

L'approximation Eq. (1-15) de la solution de l'équation de conservation de la masse Eq. (1-13) est très souvent retenue par un ingénieur lorsqu'il résout un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Si la structure est *homogène*, c'est-à-dire si la structure est constituée d'un seul matériau thermo-élastique linéaire isotrope, un ingénieur fait aussi très souvent l'hypothèse que le champ de masse volumique initiale est *uniforme*, soit :

$$\rho(\mathbf{x}, t_0) = \rho_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1-16)$$

– **Principe de conservation de la quantité de mouvement ou principe fondamental de la dynamique**

On note  $\mathbf{f}^m$  le vecteur des forces massiques (en  $N.kg^{-1}$ ) agissant localement dans la structure. Ces forces massiques sont considérées comme l'une des *sollicitations mécaniques* appliquées à la structure (voir paragraphe 1.1), c'est-à-dire qu'elles sont une des *données* du problème. Ces forces massiques sont parfois appelées « forces à distance » au sens qu'elles sont dues à un corps extérieur qui n'est pas nécessairement en contact avec la structure et qu'elles agissent dans *toute* la structure, c'est-à-dire qu'elles définissent un champ agissant dans tout  $\Omega$  :  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t)$ . Pour un ingénieur, ce champ est très souvent celui de l'accélération de la pesanteur ( $(\mathbf{f}^m \cdot \mathbf{f}^m)^{1/2} \approx 9,81 N.kg^{-1}$  ou  $m.s^{-2}$  à la surface de la Terre).

L'expression locale du principe de conservation de la quantité de mouvement, ou principe fondamental de la dynamique, est donnée par l'équation suivante :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-17)$$

où  $\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$  (en  $m.s^{-2}$ ) est le champ des accélérations. Le terme  $\rho \ddot{\mathbf{U}}$  correspond à ce que l'on appelle les *quantités d'accélération par unité de volume*. En toute rigueur, ces quantités ne peuvent pas être négligées avant résolution de l'équation aux dérivées partielles Eq. (1-17) (compte tenu d'un modèle de comportement et de conditions initiales et aux limites données). Un ingénieur, cependant, peut n'être intéressé que par ce que l'on appelle la *solution d'équilibre* d'un problème de structure, c'est-à-dire par la solution associée à des quantités d'accélération nulles en tout point de la structure et à tout instant. Cette solution correspond à ce que l'on appelle un problème de *statique des structures*. Dans ce cas, Eq. (1-17), qui équivaut alors à l'expression locale du principe fondamental de la *statique*, se réduit à :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-18)$$

Dans toute la suite de ce cours, seule Eq. (1-18) sera considérée, c'est-à-dire que l'on ne s'intéressera qu'à des problèmes de statique des structures. Il est à noter que le terme  $\rho \mathbf{f}^m$  intervenant dans Eq. (1-18) est parfois remplacé par  $\mathbf{f}^v$ , vecteur des forces volumiques (en  $N.m^{-3}$ ) agissant localement dans la structure.

– **Principe de conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique**

On note  $e(\mathbf{x}, t)$  le champ d'énergie interne massique (en  $J.kg^{-1}$ ) agissant dans  $\Omega$ . L'énergie interne est un *potentiel d'état*, c'est-à-dire une fonction au moins deux fois différentiable des seules variables d'état soit, d'après Eqs. (1-1) et (1-10) :  $e(T(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t))$ . L'expression locale du principe de conservation de l'énergie, ou premier principe de la thermodynamique, est donnée par l'équation suivante :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}(\mathbf{q}) + r \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-19)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur densité de flux de chaleur (en  $W.m^{-2}$ ) et  $r$  (en  $W.m^{-3}$ ) une source de chaleur volumique, parfois appelée taux de production de chaleur à distance.

Comme les forces massiques dans Eq. (1-18), ces sources de chaleur volumique sont considérées comme l'une des *sollicitations*, thermiques en l'occurrence, appliquées à la structure, c'est-à-dire qu'elles sont une des *données* du problème. Ces sources de chaleur volumiques sont dues à un corps extérieur qui n'est pas nécessairement en contact avec la structure et agissent dans *toute* la structure, c'est-à-dire qu'elles définissent un champ agissant dans tout  $\Omega$  :  $r(\mathbf{x}, t)$ . Dans la plupart des problèmes de structures thermo-élastiques, ce champ est supposé nul.

Une autre écriture peut être donnée à l'expression locale du premier principe de la thermodynamique en introduisant le potentiel d'état d'énergie libre massique <sup>1</sup>, qui définit aussi un champ dans toute la structure :  $\psi(T(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t))$ . L'énergie libre massique est définie par :

$$\psi = e - Ts \quad (1-20)$$

où  $s$  est la fonction d'état <sup>2</sup> d'entropie massique (en  $J.K^{-1}.kg^{-1}$ ). En dérivant l'égalité Eq. (1-20) par rapport au temps, on obtient ainsi une nouvelle expression de Eq. (1-19), soit :

$$\text{div}(\mathbf{q}) - r + \rho T \dot{s} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho s \dot{T} - \rho \dot{\psi} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-21)$$

Compte tenu que, par définition d'un potentiel d'état,  $\psi$  ne dépend que de  $T$  et de  $\boldsymbol{\epsilon}$ , sa dérivée particulière est :  $\dot{\psi} = (\partial\psi/\partial T) \dot{T} + (\partial\psi/\partial\boldsymbol{\epsilon}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . L'égalité Eq. (1-21) devient alors :

$$\text{div}(\mathbf{q}) - r + \rho T \dot{s} = \left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left( s + \frac{\partial\psi}{\partial T} \right) \dot{T} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-22)$$

– **Second principe de la thermodynamique**

L'expression locale du second principe de la thermodynamique est donnée par l'inéquation suivante :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T + \text{div}(\mathbf{q}) - r + \rho T \dot{s} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-23)$$

Dans Eq. (1-23), le terme de gauche correspond à la puissance volumique localement dissipée, sous forme de chaleur, par le matériau. Le second principe de la Thermodynamique stipule donc simplement que cette puissance volumique dissipée, ou *dissipation*, ne peut jamais être négative. Compte tenu de Eq. (1-22), Eq. (1-23) peut se récrire :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T + \left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left( s + \frac{\partial\psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-24)$$

Cette inéquation, qui combine les premier et second principes de la Thermodynamique, est connue sous le nom d'*inégalité de Clausius-Duhem*.

Les expressions locales des trois principes de conservation et l'inégalité de Clausius-Duhem ayant été rappelées et précisées compte tenu des hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4** (voir paragraphe 1.1), il est maintenant intéressant de faire un bilan des champs inconnus et des équations de champs. Ainsi :

– les champs inconnus sont :

<sup>1</sup> Il s'agit ici de l'énergie libre de Helmholtz, à distinguer de l'énergie libre de Gibbs.

<sup>2</sup> Une fonction d'état est au moins une fois différentiable. Un potentiel d'état est au moins deux fois différentiable.

- les champs mécaniques  $\rho(\mathbf{x}, t)$  (scalaire),  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  (vectoriel),  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  (tensoriel) et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  (tensoriel),
  - les champs thermiques  $T(\mathbf{x}, t)$  (scalaire),  $s(\mathbf{x}, t)$  (scalaire) et  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  (vectoriel)
- soit 27 champs scalaires inconnus.
- les équations de champ sont :
    - l'équation liant les champs de déformations et de déplacements, Eq. (1-10) (tensorielle)
    - l'équation de conservation de la masse, Eq. (1-12) (scalaire)
    - l'équation de conservation de la quantité de mouvement, Eq. (1-17) (vectorielle)
    - l'équation de conservation de l'énergie, Eq. (1-21) (scalaire)
- soit 14 équations scalaires (l'inégalité de Clausius-Duhem n'est pas comptabilisée car c'est une inéquation).

Il manque donc  $27 - 14 = 13$  équations pour qu'un problème de structure thermo-mécanique linéaire isotrope soit *fermé*, c'est-à-dire pour que le nombre de champs inconnus et le nombre d'équations de champs soient égaux. Ces équations portent sur la densité de flux de chaleur  $\mathbf{q}$  (vectorielle), sur les contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (tensorielle) et sur l'entropie massique  $s$  (scalaire). Elles peuvent être interprétées comme des définitions de ces trois grandeurs en fonction des autres grandeurs mécaniques et/ou thermiques prises en compte dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Elles doivent être *thermodynamiquement admissibles*, c'est-à-dire en accord avec l'inégalité de Clausius-Duhem Eq. (1-24). En pratique, ces équations correspondent à des conditions *suffisantes*, voire à des conditions *nécessaires et suffisantes* à la vérification systématique de l'inégalité de Clausius-Duhem, laquelle n'a donc plus à être prise en compte dans un problème de structure.

Il est important de souligner que le potentiel d'état d'énergie libre massique  $e(T, \boldsymbol{\varepsilon})$  est aussi une inconnue du problème. À la différence des champs inconnus rappelés précédemment, il ne dépend cependant ni de la géométrie de la structure, ni des sollicitations imposées, mais seulement du matériau constitutif de la structure. Comme on le verra dans le paragraphe 1.2.3, une seule expression est possible pour ce potentiel d'état, sachant que l'on a supposé le comportement du matériau thermo-élastique linéaire isotrope.

---

### Principaux résultats du paragraphe 1.2.2

Dans tout problème de statique de structure thermo-élastique linéaire isotrope, les équations et l'inéquation suivantes doivent être vérifiées en tout point et à tout instant :

- Principe de conservation de la masse :

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

- Principe de conservation de la quantité de mouvement, dans le cas particulier où les quantités d'accélération sont supposées nulles (principe fondamental de la statique) :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \mathbf{0}$$

où le champ de forces massiques  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t)$  est une donnée du problème.

- Principe de conservation de l'énergie ou premier principe de la Thermodynamique :

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) - r + \rho T \dot{s} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T}$$

où le champ de sources de chaleur volumiques  $r(\mathbf{x}, t)$  est une donnée du problème.

- Inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T + (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \geq 0$$

### 1.2.3 Comportement thermo-élastique linéaire isotrope : équations constitutives

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer des conditions suffisantes, voire nécessaires et suffisantes, à la vérification  *systématique*  de l'inégalité de Clausius-Duhem, c'est-à-dire, en un quelconque point d'un matériau thermo-élastique linéaire isotrope : quel que soit l'état, caractérisé par  $T$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ; quelle que soit l'évolution, caractérisée par  $\dot{T}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ; quel que soit le gradient de température  $\mathbf{grad} T$ , soit, d'après Eq. (1-24) :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T + (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \geq 0 \quad \forall (T, \boldsymbol{\varepsilon}), \forall (\dot{T}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \forall \mathbf{grad} T \quad (1-25)$$

sachant que le potentiel d'état d'énergie libre massique  $\psi$  et la fonction d'état d'entropie massique  $s$ , par définition, ne dépendent que des variables d'état. On formule également les deux hypothèses suivantes qui, en première approximation et pour la plupart des matériaux usuels, sont en accord avec les résultats expérimentaux :

- les contraintes ne dépendent ni de  $\mathbf{grad} T$ , ni de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , ni de  $\dot{T}$ ,
- la densité de flux de chaleur ne dépend ni de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , ni de  $\dot{T}$ .

L'inégalité Eq. (1-25) devant être en particulier vérifiée quand  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$  et  $\mathbf{grad} T = 0$ , soit :

$$-\rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \geq 0 \quad \forall (T, \boldsymbol{\varepsilon}), \forall \dot{T} \quad (1-26)$$

et  $s$  ne dépendant que de  $T$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , il apparaît alors qu'une première condition nécessaire et suffisante à la vérification systématique de l'inégalité de Clausius-Duhem est :

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1-27)$$

Compte tenu de Eq. (1-27), et sachant que l'on a supposé que ni  $\mathbf{q}$ , ni  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépendent de  $\dot{T}$ , Eq. (1-25) se réduit donc à :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T + (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad \forall (T, \boldsymbol{\varepsilon}), \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \forall \mathbf{grad} T \quad (1-28)$$

Dans Eq. (1-28), la première partie du terme de gauche de l'inégalité,  $-(1/T) \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T$ , correspond à ce que l'on appelle la dissipation *thermique* et la seconde partie,  $(\boldsymbol{\sigma} - \rho (\partial \psi / \partial \boldsymbol{\varepsilon})) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , à la dissipation *intrinsèque*.

Par définition, le comportement thermo-élastique est tel que la dissipation intrinsèque est nulle, soit, sachant que l'on a supposé que  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépend pas de  $\mathbf{grad} T$  :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \forall (T, \boldsymbol{\varepsilon}), \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1-29)$$

Sachant que l'on a également supposé que  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépend pas de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , la seule condition *nécessaire et suffisante* possible pour que l'égalité Eq. (1-29) soit systématiquement satisfaite est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1-30)$$

que l'on peut encore écrire, compte tenu de l'approximation Eq. (1-15) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 (1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1-31)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique initiale. Compte tenu de Eq. (1-30), et sachant que l'on a supposé que  $\mathbf{q}$  ne dépend pas de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , l'expression de la dissipation Eq. (1-28) se réduit à :

$$-\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T \geq 0 \quad \forall (T, \boldsymbol{\varepsilon}), \forall \mathbf{grad} T \quad (1-32)$$

La plus simple condition *suffisante* à la vérification systématique de Eq. (1-32) s'écrit alors :

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} T \quad (1-33)$$

où  $k > 0$  est la conductivité thermique du matériau (en  $W.K^{-1}.m^{-1}$ ).

L'équation Eq. (1-33) est connue sous le nom de *loi de Fourier*. Les équations Eq. (1-27) (scalaire), Eq. (1-30) (tensorielle) et Eq. (1-33) (vectorielle) sont dites *constitutives* du modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope. Les deux premières de ces équations font intervenir le potentiel d'état d'énergie libre massique  $\psi$ , lequel reste à définir pour que les équations constitutives le soient entièrement. On démontre que, l'état d'énergie libre massique – c'est-à-dire la valeur, pour un état  $(T, \boldsymbol{\epsilon})$  donné, de la fonction  $\psi$  – devant être indépendant de la base dans laquelle les composantes de  $\boldsymbol{\epsilon}$  sont exprimées, la fonction  $\psi$  est nécessairement une fonction *mathématiquement isotrope* de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Autrement dit,  $\psi$  ne dépend que de  $T$  et des trois invariants fondamentaux de  $\boldsymbol{\epsilon}$ , soit :  $\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})$  ;  $\text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))$  ;  $\text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))$ . On rappelle également les résultats suivants (voir Annexe A pour la démonstration de ces résultats) :

$$\frac{\partial \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}))}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{G} \ ; \ \frac{\partial \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 2\boldsymbol{\epsilon} \ ; \ \frac{\partial \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 3\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon} \quad (1-34)$$

L'hypothèse **H4** d'un comportement thermo-élastique *linéaire*, traduite mathématiquement par Eq. (1-6), stipule notamment que  $\boldsymbol{\sigma}$  dépend linéairement de  $T$  et de  $\boldsymbol{\epsilon}$ . À strictement parler, cette exigence de linéarité est en fait incompatible avec l'expression Eq. (1-31) du tenseur des contraintes, au sens qu'il n'existe aucun potentiel d'état d'énergie libre  $\psi$  tel que la relation entre  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $T$  et  $\boldsymbol{\epsilon}$  obtenue à partir de Eq. (1-31) soit linéaire en  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Ce problème est résolu moyennant l'approximation que la masse volumique est constante. L'expression Eq. (1-30) du tenseur des contraintes devient alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (1-35)$$

Dans toute la suite de ce cours – et, plus généralement, dans tous les ouvrages traitant de thermo-élasticité linéaire –, Eq. (1-35) sera retenue comme définition du tenseur des contraintes. Il est cependant important de répéter que cette définition repose sur une approximation concernant la masse volumique. Il faut également souligner que Eq. (1-35) n'est pas complètement cohérente avec la définition du comportement thermo-élastique puisqu'elle mène à une dissipation intrinsèque non nulle (et même négative dans certains cas).

Compte tenu que  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $-s$  sont les dérivées partielles de  $\psi$  (à  $\rho_0$  près pour  $\boldsymbol{\sigma}$ , selon Eq. (1-35)), il est alors *nécessaire* que  $\psi$  soit la somme d'une fonction quadratique de  $T$  et des invariants de  $\boldsymbol{\epsilon}$  et d'une fonction linéaire en  $T$  et en  $\boldsymbol{\epsilon}$  pour que  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $s$  soient linéaires en  $T$  et en  $\boldsymbol{\epsilon}$ , c'est-à-dire (le troisième invariant fondamental de  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))$ ), ne peut pas être l'un des arguments de  $\psi$  puisqu'il est cubique en  $\boldsymbol{\epsilon}$ ) :

$$\psi(T, \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}), \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))) = -\frac{1}{2T_0} C_\epsilon (T - T_0)^2 + \frac{1}{2\rho_0} \lambda (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 + \frac{1}{\rho_0} \mu \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon})) - \frac{1}{\rho_0} (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + \psi_0 \quad (1-36)$$

où  $T_0$  (respectivement  $\psi_0$ ) est la température initiale (respectivement l'énergie libre massique initiale) et où  $C_\epsilon > 0$  est la capacité calorifique, ou *chaleur massique*, à déformation constante (en  $J.kg^{-1}.K^{-1}$ ) et  $\alpha > 0$ , le *coefficient de dilatation thermique* (en  $K^{-1}$ ). Quant à  $\mu > 0$  et  $\lambda > -(2/3)\mu$ , ce sont les *coefficients de Lamé* (en  $N.m^{-2}$  ou  $Pa$ ).

Compte tenu de Eq. (1-36), et en accord avec Eq. (1-27), l'entropie massique d'un matériau thermo-élastique linéaire isotrope s'écrit donc :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = C_\epsilon \frac{(T - T_0)}{T_0} + \frac{1}{\rho_0} (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (1-37)$$

Pour établir l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy, il est tout d'abord nécessaire de bien interpréter Eq. (1-35). En effet, selon Eq. (1-36), le potentiel d'état  $\psi$  ne dépend de  $\boldsymbol{\epsilon}$  qu'à travers ses deux premiers invariants fondamentaux. Il faut donc appliquer ici la règle de dérivation des fonctions composées, ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})} \frac{\partial \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))} \frac{\partial \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon}.\boldsymbol{\epsilon}))}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) \quad (1-38)$$

soit, compte tenu de Eq. (1-36) et des résultats rappelés dans Eq. (1-34) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G} \quad (1-39)$$

Les équations Eqs. (1-33), (1-37) et (1-39) sont dites *constitutives* du modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope, c'est-à-dire qu'elles sont valables pour tous les matériaux mécaniquement et thermiquement isotropes dont le comportement, tant que les variations relatives de température et les déformations restent « petites », peut effectivement être considéré comme thermo-élastique linéaire. La seule différence entre tous ces matériaux provient des valeurs de ce que l'on appelle parfois les *paramètres-matériau*, c'est-à-dire que ces valeurs diffèrent d'un matériau à l'autre. Ces paramètres-matériau sont ici au nombre de cinq : la conductivité thermique  $k$ , la chaleur massique  $C_\varepsilon$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  et les deux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Le premier principe de la thermodynamique, voir Eq. (1-22), peut être récrit compte tenu de la loi de Fourier, voir Eq. (1-33), et de l'expression de l'entropie massique, voir Eq. (1-37) :

$$-k \Delta T + \rho C_\varepsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\rho}{\rho_0} (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (1-40)$$

où le symbole «  $\Delta$  » désigne l'opérateur laplacien dans le cas où il concerne un champ scalaire.

L'équation Eq. (1-40) est connue sous le nom d'*équation de la chaleur*. En cohérence avec l'approximation précédemment faite que la masse volumique est constante, cependant, et compte tenu de Eq. (1-35), Eq. (1-40) peut se récrire :

$$-k \Delta T + \rho_0 C_\varepsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r = - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (1-41)$$

Il est important de souligner que Eq. (1-40) est l'expression particulière de l'équation de la chaleur associée aux équations constitutives du modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope. Autrement dit, l'équation de la chaleur aurait une autre expression si le modèle de comportement considéré était autre que celui de thermo-élasticité linéaire isotrope.

### Principaux résultats du paragraphe 1.2.3

Compte tenu de l'approximation  $\rho \approx \rho_0$ , les équations constitutives du modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope, à vérifier en tout point et à tout instant, sont :

– pour la densité de flux de chaleur  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} T \quad \text{avec } k > 0 \quad (\text{loi de Fourier})$$

– pour le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G} \quad \text{avec } \mu > 0, \lambda > -\frac{2}{3}\mu \text{ et } \alpha > 0$$

– pour l'entropie massique  $s$  :

$$s = C_\epsilon \frac{(T - T_0)}{T_0} + \frac{1}{\rho_0} (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad \text{avec } C_\epsilon > 0$$

L'équation de la chaleur associée au modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope, à vérifier en tout point et à tout instant, s'écrit :

$$-k \Delta T + \rho_0 C_\epsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r = - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$$


---

### 1.2.4 Énoncé mathématique d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope

La notion d'*homogénéité* a déjà été évoquée pour établir la solution particulière (et *uniforme*), Eq. (1-16), de l'équation de conservation de la masse. Elle est relative à la structure considérée. Une structure est dite homogène si elle est constituée d'un seul matériau, c'est-à-dire si les paramètres-matériau ont la même valeur en tout point de cette structure. Dans toute la suite de ce cours, les structures seront supposées homogènes.

– **Restriction du nombre de champs inconnus et du nombre d'équations de champs**

Comme on l'a déjà signalé au paragraphe 1.2.2, le nombre de champs scalaires inconnus dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope est de 27. Il est égal au nombre d'équations de champs, compte tenu des équations constitutives du comportement thermo-élastique linéaire isotrope établies au paragraphe 1.2.3.

Une approximation a cependant dû être retenue au paragraphe 1.2.3, voir notamment Eq. (1-35), afin d'obtenir l'expression Eq. (1-39) du tenseur des contraintes de Cauchy et l'expression Eq. (1-41) de l'équation de la chaleur. Cette approximation est que le champ de masse volumique est constant, c'est-à-dire,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , égal au champ de masse volumique initiale. Comme on l'a souligné au paragraphe 1.2.3, cette approximation n'est pas complètement satisfaisante d'un point de vue thermodynamique (elle mène à une dissipation intrinsèque non nulle, voire négative). Malgré cela, cette approximation est très souvent retenue par un ingénieur devant résoudre un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Si la structure est homogène, c'est-à-dire constituée d'un seul matériau thermo-élastique linéaire isotrope, un ingénieur retient même l'hypothèse Eq. (1-16) que le champ de masse volumique est uniforme, soit :

En première approximation, le champ de masse volumique est uniforme (spatialement) et constant (temporellement), c'est-à-dire :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (1-42)$$

L'approximation Eq. (1-42) n'est cependant cohérente avec l'équation de conservation de la masse, voir Eq. (1-13), que si l'on suppose  $\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$  à tout instant, ce qui est mécaniquement irréaliste. En pratique, un ingénieur considère donc que :

$$\begin{aligned} &\text{L'équation de conservation de la masse n'est pas à prendre en considération} \\ &\text{dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope.} \end{aligned} \quad (1-43)$$

Compte tenu de Eq. (1-42) et de Eq. (1-43), le nombre de champs inconnus scalaires et celui des équations de champs scalaires se réduisent donc à 26.

L'expression Eq. (1-37) de l'entropie massique d'un matériau thermo-élastique linéaire isotrope a été utilisée pour établir celle de l'équation de la chaleur, voir Eq. (1-41). La connaissance du champ d'entropie massique est cependant de peu d'intérêt pratique pour un ingénieur, qui renonce donc très souvent à le considérer comme l'un des champs inconnus du problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. En cohérence, un ingénieur ne prend donc pas en considération l'équation de champ correspondant à Eq. (1-37). Le nombre de champs inconnus scalaires et celui des équations de champs scalaires se réduisent donc très souvent, en pratique, à 25.

Il est également important de préciser que l'inégalité de Clausius-Duhem, voir Eq. (1-24), n'est pas prise en considération dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Elle est supposée systématiquement satisfaite compte tenu des équations constitutives établies au paragraphe 1.2.3. Il faut toutefois répéter que cette hypothèse n'est pas complètement cohérente avec celle d'un champ de masse volumique constant, voir paragraphe 1.2.3.

– **Conditions initiales et conditions aux limites**

L'équation de la chaleur, voir Eq. (1-41), fait notamment intervenir la dérivée particulaire du champ de température,  $\dot{T}(\mathbf{x}, t)$ , ainsi que celle du champ des déformations qui est liée, d'après Eq. (1-10), à la dérivée particulaire du champ de déplacements :  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \text{sym}(\text{grad}\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t))$ . Il convient donc notamment d'associer à cette équation des *conditions initiales* portant sur les champs de température et de déplacements. Dans la mesure où le champ de déplacements intéressant un ingénieur est celui des particules constitutives de la structure  $\Omega$  entre l'instant initial  $t_0$  et l'instant générique  $t$ , la condition initiale sur le champ de déplacements s'énonce simplement :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1-44)$$

En ce qui concerne le champ de température, un ingénieur fait très souvent l'hypothèse qu'il est initialement uniforme (et non nul, puisque  $T$  désigne la température absolue, strictement positive par définition), soit :

$$T(\mathbf{x}, t_0) = T_0 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1-45)$$

Compte tenu de Eq. (1-10), on déduit de Eq. (1-44) que  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ . Compte tenu des équations constitutives du modèle de comportement thermo-élastique linéaire isotrope, Eq. (1-33) et Eq. (1-39), on déduit de Eq. (1-45) que  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_0) = 0$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ .

L'équation de la chaleur, par l'intermédiaire de l'opérateur laplacien, fait également intervenir les dérivées spatiales secondes du champ de température. De la même façon, l'équation d'équilibre locale Eq. (1-18) combinée à la relation Eq. (1-39) liant le champ des contraintes à ceux de la température et des déformations, fait intervenir les dérivées spatiales premières du champ de température et, puisque  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t))$ , les dérivées spatiales secondes du champ de déplacement. Il convient donc d'associer à ces équations des *conditions aux limites*, sur toute la frontière  $\partial\Omega$  de la structure.

Pour bien définir les conditions aux limites thermiques, il faut tout d'abord faire une bipartition de  $\partial\Omega$  :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q \quad (1-46)$$

et :

$$\partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset \quad (1-47)$$

Dans Eqs. (1-46) et (1-47),  $\partial\Omega_T$  désigne la partie de la frontière  $\partial\Omega$  où la température est imposée et  $\partial\Omega_q$ , la partie de la frontière où la densité de flux de chaleur normal à  $\partial\Omega$  est imposée.

La condition Eq. (1-47) s'interprète ainsi de la façon suivante : en un quelconque point de  $\partial\Omega$ , il est impossible d'imposer à la fois une température et un flux de chaleur normal.

Mathématiquement parlant, les deux types de conditions aux limites thermiques possibles sont :

- des conditions de type Dirichlet. Elles concernent le champ de température, soit :

$$T = T^d \text{ sur } \partial\Omega_T \quad (1-48)$$

où  $T^d$  est une donnée du problème,

- des conditions de type Neumann. Elles concernent le champ de densité de flux de chaleur, soit :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q^d \text{ sur } \partial\Omega_q \quad (1-49)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega_q$  et où  $q^d$  est une donnée du problème.

Les conditions aux limites mécaniques sont un peu plus délicates à définir. Elles portent sur le champ vectoriel des déplacements et le champ tensoriel des contraintes. Elle nécessite, en chaque point de  $\partial\Omega$ , de distinguer trois directions non coplanaires. Une façon de faire est de repérer tout d'abord chaque point  $Q$  de  $\partial\Omega$  par son vecteur position  $\mathbf{x}^Q$  par rapport à un même point quelconque, ce qui permet d'écrire :

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x}^Q\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1-50)$$

Tous les vecteurs positions  $\mathbf{x}^Q$  étant ensuite exprimés dans une même base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , on peut alors donner une représentation de  $\partial\Omega$  dans cette base, soit :

$$\partial\Omega^{\{\mathbf{e}_i\}} = \{x_i^Q \mathbf{e}_i\} = \partial\Omega^{e_1} \times \partial\Omega^{e_2} \times \partial\Omega^{e_3} \quad (1-51)$$

où les ensembles  $\partial\Omega^{e_i}$  sont simplement définis par :

$$\partial\Omega^{e_i} = \{x_i^Q\} \subset \mathbb{R} \quad (1-52)$$

De la même façon que pour les conditions aux limites thermiques, on peut ainsi faire une bipartition de chacun des  $\partial\Omega^{e_i}$ , soit :

$$\partial\Omega^{e_i} = \partial\Omega_U^{e_i} \cup \partial\Omega_F^{e_i} \quad (1-53)$$

et :

$$\partial\Omega_U^{e_i} \cap \partial\Omega_F^{e_i} = \emptyset \quad (1-54)$$

Dans Eqs. (1-53) et (1-54),  $\partial\Omega_U^{e_i}$  désigne la partie de  $\partial\Omega^{e_i}$  où la  $i$ -ème composante de  $\mathbf{U}$  est imposée et  $\partial\Omega_F^{e_i}$ , la partie de  $\partial\Omega^{e_i}$  où la  $i$ -ème composante du vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est imposée. Il est important de souligner que la condition Eq. (1-54) n'interdit pas qu'en un point donné de  $\partial\Omega$  soient imposées certaines des composantes de  $\mathbf{U}$  (par exemple  $U_1$ ) et les autres composantes de  $\mathbf{F}$  (par exemple  $F_2$  et  $F_3$ ).

Mathématiquement parlant, les deux types de conditions aux limites mécaniques possibles sont :

- des conditions de type Dirichlet. Elles concernent le champ de déplacements (plus précisément : ses composantes dans une base donnée), soit :

$$U_i = U_i^d \text{ sur } \partial\Omega_U^{e_i} \quad (1-55)$$

où  $U_i^d$  est une donnée du problème,

- des conditions de type Neumann. Elles concernent le champ de contraintes (plus précisément : ses composantes dans une base donnée), soit :

$$\sigma_{ij} n_j = F_i^d \text{ sur } \partial\Omega_F^{e_i} \quad (1-56)$$

où  $n_j$  désigne la  $j$ -ème composante de la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  et où  $F_i^d$  est une donnée du problème, parfois appelée densité surfacique de forces ou, plus simplement, *force surfacique*.

En pratique, dans la plupart des problèmes de structure qu'il a à résoudre, un ingénieur peut imposer des conditions aux limites mécaniques plus simples que celles données par Eqs. (1-55) et (1-56). Celles-ci sont basées sur la partition suivante de  $\partial\Omega$  :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F \quad \text{avec} \quad \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset \quad (1-57)$$

Mathématiquement parlant, les deux types de conditions aux limites mécaniques possibles sont alors :

- des conditions de type Dirichlet. Elles concernent le champ de déplacements, soit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U \quad (1-58)$$

où  $\mathbf{U}^d$  est une donnée du problème,

- des conditions de type Neumann. Elles concernent le champ de contraintes, soit :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F \quad (1-59)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  et où  $\mathbf{F}^d$  est une donnée du problème, parfois appelée densité surfacique de forces ou, plus simplement, *force surfacique*.

Il est finalement important de souligner que la vérification des quatre conditions Eqs. (1-46), (1-47) et (1-57) est une condition nécessaire au fait que le problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope soit « bien posé ». Si l'une et/ou l'autre de ces conditions n'est pas vérifiée, il est par exemple possible que la solution du problème ne soit pas unique.

#### – Énoncé du problème

Compte tenu des diverses équations établies précédemment, il est maintenant possible de donner l'énoncé complet d'un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope :

- les inconnues :

Comme on l'a signalé précédemment (voir, notamment, Eqs. (1-42)), les champs de masse volumique et d'entropie massique ne sont généralement pas pris en compte dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Les champs inconnus se réduisent donc à :

$$T(\mathbf{x}, t) , \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) , \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \quad (1-60)$$

- les données :

Les données sont de quatre types. Il faut tout d'abord préciser la géométrie de la structure (données géométriques), laquelle est entièrement définie par sa configuration  $\Omega$ , c'est-à-dire un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  (voir Eq. (1-8)). Il faut ensuite fixer les valeurs des paramètres-matériau (données matérielles), qui sont au nombre de 5 pour un matériau thermo-élastique linéaire isotrope (voir paragraphe 1.2.3), auxquels il est généralement ajouté la masse volumique, voir Eq. (1-42). Il faut également préciser les sollicitations thermiques et mécaniques imposées à la structure (données mécaniques et thermiques), c'est-à-dire des champs agissant dans toute la structure, voir paragraphe 1.2.2, et des conditions aux limites, voir Eqs. (1-48), (1-49), (1-58) et (1-59). Il faut enfin fixer les conditions initiales, voir Eq. (1-44) et, par exemple, Eq. (1-45) (données initiales).

En résumé, les données d'un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope sont :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\mathbf{x} = OP\} \subset \mathbb{R}^3, \text{ de frontière } \partial\Omega ; t_0 \text{ (instant initial) et } t_1 \text{ (instant final)} \\ k &> 0 ; C_\varepsilon > 0 ; \alpha > 0 ; \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu ; \rho_0 > 0 \\ r(\mathbf{x}, t) &\text{ dans tout } \Omega ; \mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t) \text{ dans tout } \Omega \\ T(t) &= T^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_T ; \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{n} = q^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_q \text{ avec } \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega \text{ et } \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset \\ \mathbf{U}(t) &= \mathbf{U}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_F \text{ avec } \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega \text{ et } \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{0} \text{ et, par exemple, } T(\mathbf{x}, t_0) = T_0 \text{ dans tout } \Omega \end{aligned} \quad (1-61)$$

Dans Eq. (1-61), les paramètres-matériau et la masse volumique ont été considérés comme indépendant de  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire qu'on a supposé que le champ associé à chacune de ces grandeurs était *uniforme*. Comme on l'a déjà signalé au début de ce paragraphe, ceci n'est possible que si la structure est *homogène*.

– les équations :

Comme on l'a signalé précédemment, voir notamment (1-43), l'équation de conservation de la masse et l'équation constitutive définissant l'entropie massique ne sont généralement pas considérées dans un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope, pas plus que l'inégalité de Clausius-Duhem. Les seules équations de champs à résoudre sont donc :

- l'équation liant les champs de déformations infinitésimales et de déplacements, voir Eq. (1-10), laquelle est en fait une définition du tenseur des déformations infinitésimales,
- les équations constitutives Eqs. (1-33) et (1-39), lesquelles peuvent également être vues comme des définitions, en thermo-élasticité linéaire isotrope, du vecteur densité de flux de chaleur et du tenseur des contraintes,
- dans le cas où seule une solution d'équilibre est recherchée au problème, l'équation d'équilibre local Eq. (1-18),
- l'équation de la chaleur Eq. (1-41).

En résumé, ces équations – qui sont toutes à vérifier en tout point de la structure et à tout instant, c'est-à-dire  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  – sont :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{sym}(\text{grad} \mathbf{U}) \\
 \mathbf{q} &= -k \text{grad} T \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G} \\
 \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m &= 0 \\
 -k \Delta T + \rho_0 C_\varepsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r &= - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})
 \end{aligned} \tag{1-62}$$

### Principaux résultats du paragraphe 1.2.4

De façon très générale, un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope s'énonce de la façon suivante :

– Étant donnés :

$$\Omega = \{\mathbf{x} = OP\} \subset \mathbb{R}^3, \text{ de frontière } \partial\Omega ; t_0 \text{ (instant initial) et } t_1 \text{ (instant final)}$$

$$k > 0 ; C_\varepsilon > 0 ; \alpha > 0 ; \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu ; \rho_0 > 0$$

$$r(\mathbf{x}, t) \text{ dans tout } \Omega ; \mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t) \text{ dans tout } \Omega$$

$$T(t) = T^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_T ; \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{n} = q^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_q \text{ avec } \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega \text{ et } \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset$$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_F \text{ avec } \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega \text{ et } \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t = t_0) = \mathbf{0} \text{ et } T(\mathbf{x}, t = t_0) = T_0 \text{ dans tout } \Omega$$

– trouver les champs :

$$T(\mathbf{x}, t) , \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) , \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$$

– tels que,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad } \mathbf{U}) ; \mathbf{q} = -k \text{ grad } T ; \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G}$$

$$-k \Delta T + \rho_0 C_\varepsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r = - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$


---

### 1.2.5 Questions Q1, Q2 et Q3 : traduction mathématique

Le problème défini par Eqs. (1-60), (1-61) et (1-62) n'a de solution exacte (analytique) que dans quelques rares cas (voir le Chapitre 2 de ce cours pour des exemples isothermes, c'est-à-dire en négligeant les aspects thermiques). Le plus souvent, on cherche donc à lui trouver des solutions approchées, lesquelles sont obtenues par des méthodes numériques, telle que la méthode des éléments finis.

Une fois qu'il a obtenu une solution exacte ou approchée au problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope qui l'intéresse, un ingénieur doit encore répondre aux trois questions posées dans le paragraphe 1.1 avant de pouvoir se prononcer sur la pertinence physique de cette solution. On se propose, dans ce paragraphe, de donner une traduction mathématique à ces trois questions.

– **Question Q1**

La question **Q1** est celle de l'unicité de la solution du problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope. Cette question est en fait très complexe qui, entre autres, relève de l'analyse fonctionnelle, au sens mathématique de cette expression. Dans le Chapitre 2, on montrera que la solution du problème de structure élastique linéaire isotrope est unique. Dans le cas plus général d'une structure thermo-élastique linéaire isotrope, on se contentera d'admettre le résultat suivant :

- si la frontière  $\partial\Omega$  de la structure est suffisamment régulière pour que la normale extérieure soit définie de façon unique « presque partout » (cette expression étant à comprendre au sens de la théorie des distributions),
- si les paramètres-matériau vérifient les conditions rappelées dans Eq. (1-61), c'est-à-dire :

$$k > 0 ; C_\varepsilon > 0 ; \alpha > 0 ; \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu ; \rho_0 > 0$$

- et si les partitions  $\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q$  et  $\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F$  de  $\partial\Omega$  vérifient les conditions rappelées dans Eq. (1-61), c'est-à-dire :

$$\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega ; \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset ; \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega ; \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

- alors la solution du problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope est unique.

Il faut toutefois signaler que, dans certains cas, l'unicité n'est en fait assurée qu'à un mouvement de solide rigide près et/ou à un champ de température uniforme près. En pratique, ces cas doivent être exclus par un ingénieur (le premier parce qu'il ne l'intéresse généralement pas, voir Eq. (1-11), le second parce qu'il n'a pas de sens physique). Ceci est toujours possible moyennant, en particulier, un choix judicieux des conditions aux limites.

Il faut enfin souligner que le résultat mathématique rappelé ci-dessus est suffisamment général pour qu'un ingénieur n'ait plus à se poser la question de l'unicité dès qu'il a trouvé une solution au problème qui l'intéresse. Autrement dit : si, pour un problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope donné, les conditions rappelées ci-dessus sont toutes vérifiées, un ingénieur peut affirmer *avant* de résoudre ce problème que la solution est unique.

– **Question Q2**

La question **Q2** est celle de la compatibilité de la solution d'un problème donné avec l'hypothèse de comportement thermo-élastique linéaire isotrope du matériau constitutif de la structure. Les expériences de laboratoire montrent en effet que cette hypothèse n'est valable que dans une certaine gamme de température et de déformations. Une façon très générale de traduire ce constat expérimental repose sur la notion d'énergie de déformations massique,  $\chi(\boldsymbol{\epsilon})$ , laquelle, en thermo-élasticité linéaire isotrope, est définie par :

$$\chi(\boldsymbol{\epsilon}) = \psi(T, \boldsymbol{\epsilon}) - \psi_0 + \frac{1}{2T_0} C_\epsilon (T - T_0)^2 + \frac{1}{\rho_0} (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (1-63)$$

À cette énergie de déformations massique est ensuite associée une borne supérieure, souvent appelée *limite* de thermo-élasticité, pouvant dépendre de la température,  $\chi_l(T) > 0$  et telle que, connaissant la solution d'un problème donné (c'est-à-dire, en particulier, connaissant les champs  $T(\mathbf{x}, t)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$ ) :

$$\chi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)) - \chi_l(T(\mathbf{x}, t)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1] \Leftrightarrow$$

l'hypothèse de comportement thermo-élastique est physiquement admissible

Autrement dit, la solution du problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope considéré est physiquement admissible si et seulement si elle vérifie, *en tout point et à tout instant*, l'inégalité ci-dessus. La fonction  $g(T, \boldsymbol{\epsilon}) = \chi(\boldsymbol{\epsilon}) - \chi_l(T)$  est parfois appelée fonction limite, tandis que l'équation  $g(T, \boldsymbol{\epsilon}) = 0$  est souvent appelée *surface limite* de thermo-élasticité : dans l'espace des variables d'état  $(T, \boldsymbol{\epsilon})$ , en effet, cette équation est celle d'une (hyper-)surface.

Les expériences de laboratoire montrent cependant également que, pour la plupart des matériaux, la limite  $\chi_l(T)$  n'est jamais atteinte si le tenseur des déformations infinitésimales est purement sphérique. En termes de fonction limite, ce constat expérimental se traduit simplement de la façon suivante :  $\forall \boldsymbol{\epsilon} = (1/3)\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{G}$ ,  $g(T, \boldsymbol{\epsilon}) < 0 \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\epsilon} = (1/3)\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{G}$ ,  $\chi(\boldsymbol{\epsilon}) < \chi_l(T)$ . En pratique, cependant, on va très souvent au-delà de cette restriction en postulant que la fonction limite (et donc la surface limite) ne dépend pas de la partie sphérique du tenseur des déformations infinitésimales. Ce postulat peut être interprété d'un point de vue énergétique, moyennant une autre écriture de l'énergie de déformations massique, voir Eq. (1-63). Pour obtenir cette nouvelle expression, il faut partir de la partition, unique, du tenseur de déformations en parties sphérique et déviatoire :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} + \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (1-64)$$

De Eq. (1-64), sachant que, par définition d'un déviateur,  $\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) : \mathbf{G} = 0$ , et sachant également que  $\mathbf{G} : \mathbf{G} = 3$ , on déduit immédiatement que :

$$\text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon})) = \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 + \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}))) \quad (1-65)$$

Compte tenu de Eq.(1-65) et de l'expression Eq.(1-36) du potentiel d'état d'énergie libre massique, Eq.(1-63) peut ainsi se récrire :

$$\chi(\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}), \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})))) = \frac{1}{\rho_0} \mu \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}))) + \frac{1}{\rho_0} \frac{3\lambda + 2\mu}{6} (\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))^2 \quad (1-66)$$

Les contributions des parties sphérique et déviatoire de  $\boldsymbol{\epsilon}$  à l'expression de  $\psi$  étant ainsi clairement séparées, soit, pour la partie déviatoire :

$$\chi^d(\text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})))) = \frac{1}{\rho_0} \mu \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}))) \quad (1-67)$$

le postulat que la fonction limite ne dépend pas de la partie sphérique du tenseur des déformations se traduit simplement par :

$$g(T, \boldsymbol{\epsilon}) = \chi^d(\text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})))) - \chi_l(T) = \frac{1}{\rho_0} \mu \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}))) - \chi_l(T) \quad (1-68)$$

Selon Eq.(1-68), la surface limite s'écrit donc :  $g(T, \boldsymbol{\epsilon}) = (1/\rho_0)\mu \text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}))) - \chi_l(T) = 0$ . Or, selon Eq.(1-39), on a :

$$\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2\mu} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1-69)$$

D'après Eq.(1-69), il est donc possible de donner une autre expression à la surface limite, soit :

$$\text{Tr}((\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}))) = 4\mu\rho_0\chi_l(T) \quad (1-70)$$

ce que l'on peut encore écrire, en introduisant, alternativement à  $g(T, \boldsymbol{\epsilon})$ , la fonction limite  $f$  telle que  $f(T, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - (6\mu\rho_0\chi_l(T))^{1/2}$  :

$$f(T, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - (6\mu\rho_0\chi_l(T))^{1/2} = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right)^{1/2} \quad (1-71)$$

La surface limite définie par Eq.(1-71) est connue sous le nom de surface limite de Von Mises ou encore de *critère* de limite de thermo-élasticité *de Von Mises*. Elle fait intervenir la grandeur  $\sigma_{eq}$  qu'on appelle contrainte de Von Mises ou, plus fréquemment, *contrainte équivalente*. Dans Eq.(1-71), le terme  $(6\mu\rho_0\chi_l(T))^{1/2} > 0$ , souvent noté  $\sigma_0(T)$ , est appelé *contrainte limite* à la température  $T$ . C'est un paramètre-matériau, c'est-à-dire une autre donnée du problème défini par Eqs.(1-60), (1-61) et (1-62), laquelle diffère d'un matériau à un autre.

Le critère de Von Mises est très souvent utilisé par un ingénieur pour répondre à la question **Q2** :

$$f(T(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1] \Leftrightarrow \quad (1-72)$$

l'hypothèse de comportement thermo-élastique est physiquement admissible

Par contraposition de l'équivalence Eq.(1-72), on constate qu'il suffit qu'il existe un point de  $\Omega$  et un instant dans l'intervalle de temps où l'évolution de la structure est étudiée pour que l'hypothèse de comportement thermo-élastique (linéaire isotrope) cesse d'être valable. Il faut alors envisager des modèles de comportement plus sophistiqués, tels les modèles de thermo-élasto-plasticité. Ceux-ci sont rapidement évoqués dans le Chapitre 4.

Il faut également souligner qu'il existe d'autres critères (ou surfaces limite) que celui de Von Mises. On peut par exemple citer le critère de Tresca, qui s'écrit :

$$f(T, \boldsymbol{\sigma}) = \max_{i,j=1,2 \text{ ou } 3} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0(T) = 0 \quad (1-73)$$

où  $\sigma_i$  est la  $i$ -ème *contrainte principale*, c'est-à-dire la  $i$ -ème valeur propre du tenseur des contraintes de Cauchy.

Il faut enfin signaler que le critère de Von Mises et le critère de Tresca sont indépendants de  $\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ . On dit d'ailleurs souvent que ces critères sont *insensibles à la pression*, laquelle est simplement définie par  $p = -(1/3)\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ . Autrement dit : quelle que soit la valeur, positive ou négative, de la pression  $p$ , l'état de contrainte purement sphérique défini par  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{G}$  ne vérifie jamais Eq. (1-71), ni Eq. (1-73). Cette particularité des critères de Von Mises et de Tresca traduit correctement la physique du comportement de nombreux matériaux, dont les matériaux métalliques. En revanche, elle n'est pas pertinente pour d'autres matériaux, tels certains géomatériaux, pour qui il faut envisager un critère dépendant de la pression hydrostatique, tel le critère de Mohr-Coulomb :

$$f(T, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + c\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0(T) = 0 \quad (1-74)$$

où  $c > 0$  (adimensionnel), qui peut dépendre de la température, est un paramètre-matériau.

Dans toute la suite de ce cours, seul le critère de Von Mises, qui est le critère le plus souvent utilisé par les ingénieurs, sera considéré.

– **Question Q3**

La question **Q3** est celle de la compatibilité de la solution avec l'hypothèse des variations relatives de température et des déformations *infinitésimales*. Il est simple d'y répondre en ce qui concerne la température : connaissant  $T(\mathbf{x}, t)$ , il suffit de vérifier que  $|T(\mathbf{x}, t) - T_0| \ll T_0$  en tout point et à tout instant pour pouvoir affirmer que l'hypothèse des variations relatives de température infinitésimales est bien satisfaite. En revanche, en ce qui concerne les déformations, il serait faux d'écrire que l'hypothèse des déformations infinitésimales est bien satisfaite si, en tout point et à tout instant,  $(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)) \ll 1$ . Pour le comprendre, il faut repartir de la définition générale du tenseur des déformations de Green-Lagrange, soit (voir également Eq. (1-2)) :

$$\mathbf{Y} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) + \frac{1}{2}(\text{grad}^T\mathbf{U}) \cdot (\text{grad}\mathbf{U}) \quad (1-75)$$

Il apparaît ainsi que, pour que l'hypothèse des déformations infinitésimales soit valide, c'est-à-dire pour que l'approximation suivante soit réaliste :

$$\mathbf{Y} \approx \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) \quad (1-76)$$

il faut et il suffit que (le symbole «  $\|\cdot\|$  » désigne la norme euclidienne) :

$$\|(\text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) - \text{asym}(\text{grad}\mathbf{U})) \cdot \text{grad}\mathbf{U}\| \ll \|\text{sym}(\text{grad}\mathbf{U})\| \quad (1-77)$$

soit encore :

$$\|\text{grad}\mathbf{U}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\text{sym}(\text{grad}\mathbf{U})\| \ll 1 \text{ et } \|\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U})\| \ll 1 \quad (1-78)$$

C'est donc la norme de  $\text{grad}\mathbf{U}$  qui doit être très petite devant l'unité pour que l'hypothèse des déformations infinitésimales soit valide, et non pas seulement celle de sa partie symétrique. De façon équivalente, ce sont les normes de la partie symétrique et de la partie antisymétrique du gradient de  $\mathbf{U}$  qui doivent être petites devant l'unité pour que l'hypothèse des déformations infinitésimales soit valide. Bien qu'il ne soit pas orthogonal<sup>3</sup>, le tenseur  $\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U})$  est parfois qualifié, dans le cas où  $\|\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U})\| \ll 1$ , de tenseur des *rotations infinitésimales*.

Pour répondre à la question **Q3**, un ingénieur doit donc connaître le champ de température  $T(\mathbf{x}, t)$ , le champ des déformations infinitésimales,  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t))$  et le champ de  $\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t))$ , soit :

$$|T(\mathbf{x}, t) - T_0| \ll T_0, \quad \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)\| \ll 1, \quad \|\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t))\| \ll 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\Leftrightarrow$  l'hypothèse des variations relatives de température infinitésimales et des déformations infinitésimales est valide

(1-79)

Il faut toutefois souligner que, dans Eq. (1-79), le symbole «  $\ll$  » n'est pas précisément défini. Il est généralement admis que, quelle que soit la grandeur positive  $Y$ , celle-ci est « très petite » devant une valeur donnée  $Y_0$  (c'est-à-dire  $Y/Y_0 \ll 1$ ) si  $Y/Y_0 \leq 10^{-1}$ .

<sup>3</sup> On rappelle qu'un tenseur  $\mathbf{X}$  est orthogonal si et seulement si  $\det\mathbf{X} = \pm 1$  et  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{G}$ . Un tenseur orthogonal est une rotation si son déterminant vaut +1. Un tenseur orthogobal est un retournement si son déterminant vaut -1.

**Principaux résultats du paragraphe 1.2.5**

– Réponse à la question **Q1** :

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est unique si :

$$k > 0 ; C_\varepsilon > 0 ; \alpha > 0 ; \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu ; \rho_0 > 0$$

$$\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega ; \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset$$

$$\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega ; \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

– Réponse à la question **Q2** :

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse d'un comportement thermo-élastique si et seulement si (critère de Von Mises) :

$$f(T(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)) = \sigma_{eq}(\mathbf{x},t) - \sigma_0(T(\mathbf{x},t)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1]$$

où  $\sigma_{eq} = ((3/2) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}))^{1/2}$  est la contrainte équivalente.

– Réponse à la question **Q3** :

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse de variations relatives de température et de déformations infinitésimales si et seulement si :

$$|T(\mathbf{x},t) - T_0| \ll T_0 , \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\| \ll 1 , \|\mathbf{asym}(\mathbf{grad}U(\mathbf{x},t))\| \ll 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1]$$


---

**Résumé du Chapitre 1 :**

De façon très générale, un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope s'énonce de la façon suivante :

– Étant donnés :

$$\Omega = \{\mathbf{x} = OP\} \subset \mathbb{R}^3, \text{ de frontière } \partial\Omega ; t_0 \text{ (instant initial) et } t_1 \text{ (instant final)}$$

$$k ; C_\varepsilon ; \alpha ; \mu \text{ et } \lambda ; \rho_0 > 0$$

$$r(\mathbf{x}, t) \text{ et } \mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t) \text{ dans tout } \Omega \text{ et à tout instant } t \in [t_0, t_1]$$

$$T(t) = T^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_T \text{ et } \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{n} = q^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_q \text{ à tout instant } t \in [t_0, t_1]$$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_U \text{ et } \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d(t) \text{ sur } \partial\Omega_F \text{ à tout instant } t \in [t_0, t_1]$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t = t_0) = 0 \text{ et } T(\mathbf{x}, t = t_0) = T_0 \text{ dans tout } \Omega$$

– trouver les champs :

$$T(\mathbf{x}, t) , \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) , \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) , \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$$

– tels que,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad} \mathbf{U}) ; \mathbf{q} = -k \text{ grad} T ; \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G}$$

$$-k \Delta T + \rho_0 C_\varepsilon \frac{T}{T_0} \dot{T} - r = - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est unique si :

$$k > 0 ; C_\varepsilon > 0 ; \alpha > 0 ; \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu$$

$$\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega ; \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset$$

$$\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega ; \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse d'un comportement thermo-élastique si et seulement si (critère de Von Mises) :

$$f(T(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) = \sigma_{eq}(\mathbf{x}, t) - \sigma_0(T(\mathbf{x}, t)) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1]$$

La solution d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse de variations relatives de température infinitésimales et de déformations infinitésimales si et seulement si :

$$|T(\mathbf{x}, t) - T_0| \ll T_0 , \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)\| \ll 1 , \|\text{asym}(\text{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t))\| \ll 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1]$$



---

## Chapitre 2

# Méthodes de résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope

### 2.1 De la thermoélasticité à l'élasticité

Dans un certain nombre de cas pratiques, un ingénieur ayant à résoudre un problème de structure peut aller au-delà de l'hypothèse **H1** d'un comportement thermo-élastique (voir paragraphe 1.1) en supposant que *les effets thermiques sont négligeables*. Les trois autres hypothèses pouvant être faites par un ingénieur sont alors réduites en conséquence, soit :

- (voir **H2**, paragraphe 1.1) : le matériau est mécaniquement isotrope,
- (voir **H3**, paragraphe 1.1) : les déformations sont infinitésimales,
- (voir **H4**, paragraphe 1.1) : la relation liant les contraintes aux déformations est linéaire.

Le comportement ainsi défini est l'*élasticité linéaire isotrope*, parfois appelée élasticité de Hooke.

Supposer que les effets thermiques sont négligeables revient formellement à considérer que, en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega$  et à tout instant  $t \in [t_0, t_1]$ , le champ de température est celui (uniforme) de la température initiale,  $T(\mathbf{x}, t) = T_0$ , et le champ de densité de flux de chaleur est nul,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0$ . Certaines des données et des équations de champs du problème de structure thermo-élastique linéaire isotrope ne sont alors plus à prendre en compte, soit (voir paragraphe 1.2.4) : les paramètres-matériau  $k$ ,  $C_\varepsilon$  et  $\alpha$  ; le champ de sources de chaleur volumiques  $r(\mathbf{x}, t)$  ; les conditions aux limites thermiques ; les conditions initiales thermiques ; la loi de Fourier ; l'équation de la chaleur. En clair, un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope est entièrement défini par :

- inconnus :  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) ; \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) ; \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$
  - données :  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  ;  $t \in [t_0, t_1]$  ;  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ 
    - dans  $\Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :  $\mu > 0$  et  $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$  ;  $\rho > 0$  ;  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}, t)$
    - sur  $\partial\Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :  $U_i(t) = U_i^d(t)$  sur  $\partial\Omega_U^{e_i}$  et  $\sigma_{ij}(t)n_j = F_i^d(t)$  sur  $\partial\Omega_F^{e_i}$
- (2-1)
- avec  $\partial\Omega_U^{e_i} \cup \partial\Omega_F^{e_i} = \partial\Omega$  et  $\partial\Omega_U^{e_i} \cap \partial\Omega_F^{e_i} = \emptyset$
- équations :
    - dans  $\Omega$  et  $\forall t \in [t_0, t_1]$  :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U})$  ;  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$  ;
    - $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0$

## 2. MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE STRUCTURE HOMOGENÈ EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

Les deux coefficients de Lamé,  $\lambda$  et  $\mu$ , apparaissent dans Eq. (2-1). En pratique, ces deux paramètres matériau sont souvent remplacés par le module d'Young  $E$  (en  $N.m^{-2}$  ou  $Pa$ ) et le coefficient de Poisson  $\nu$  (adimensionnel). Les relations liant ces deux nouveaux paramètres-matériau aux coefficients de Lamé sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Leftrightarrow \quad E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (2-2)$$

Sachant que  $\mu > 0$  et  $\lambda > -(2/3)\mu$  (voir Eq. (2-1)), on déduit de Eq. (2-2) que  $E > 0$  et  $\nu \in ]-1, 1/2[$ . La relation constitutive liant les tenseurs de contraintes et de déformations, plus connue sous le nom de *loi de Hooke*, a donc deux expressions équivalentes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2-3)$$

Il est important de noter que, compte tenu des conditions imposées aux coefficients de Lamé – ou, de façon équivalente, au module d'Young et au coefficient de Poisson –, la loi de Hooke est nécessairement *biunivoque* : à un tenseur de déformations donné est associé un et un seul tenseur de contraintes et inversement. Ce résultat peut se démontrer simplement en partant de la décomposition, unique, du tenseur des déformations en parties déviatoire et sphérique, soit (voir également Eq. (1-64)) :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{G} + \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2-4)$$

Sachant que le tenseur des contraintes peut aussi être décomposé en parties déviatoire et sphérique, soit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2-5)$$

on obtient alors, en combinant Eqs. (2-3)-1, (2-4) et (2-5) :

$$\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = 2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = (3\lambda + 2\mu) \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2-6)$$

Il apparaît ainsi que la relation entre la partie déviatoire du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations est bien biunivoque si et seulement si  $\mu \neq 0$ . Le premier principe de la Thermodynamique permet ensuite de préciser le signe de  $\mu$ , soit, ainsi qu'on l'a déjà signalé,  $\mu > 0$ . De la même façon, la relation entre la trace du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations est bien biunivoque, selon Eq. (2-6)-2, si et seulement si  $\lambda \neq (-2/3)\mu$ , le premier principe de la Thermodynamique permettant ensuite de préciser que  $\lambda > (-2/3)\mu$ . Sous ces conditions, les relations Eq. (2-6) peuvent être inversées, ce qui donne, compte tenu de Eq. (2-2) :

$$\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1+\nu}{E} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1-2\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2-7)$$

En combinant Eqs. (2-4) et (2-7), on obtient finalement l'inverse de la loi de Hooke, soit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \quad (2-8)$$

Il est à noter que la loi de Hooke est parfois présentée de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}:\boldsymbol{\epsilon} \quad (2-9)$$

où le tenseur  $\mathbf{C}$ , d'ordre 4, est le *tenseur des rigidités*, défini<sup>1</sup> par :

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \mu \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \quad (2-10)$$

<sup>1</sup> D'autres définitions sont possibles pour le tenseur des rigidités. On ne donne ici que la plus usuelle.

Dans Eq. (2-10), le symbole «  $\boxtimes$  » désigne un produit tensoriel particulier tel que, dans une base orthonormée quelconque :

$$[\mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G}]_{ijkl} = G_{ik}G_{jl} + G_{il}G_{jk} \quad (2-11)$$

Tel qu'il est défini dans Eq. (2-10), le tenseur des rigidités a la symétrie mineure gauche, la symétrie mineure droite et la symétrie majeure, soit :

$$C_{ijkl} = \underset{\substack{\text{sym. min.} \\ \text{gauche}}}{C_{jikl}} = \underset{\substack{\text{sym. min.} \\ \text{droite}}}{C_{jilk}} = \underset{\text{sym. maj.}}{C_{jilk}} = C_{lkji} \quad (2-12)$$

De plus, compte tenu des conditions imposées aux coefficients de Lamé,  $\mathbf{C}$  est défini strictement positif, c'est-à-dire :

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad (2-13)$$

Son inverse, souvent noté  $\mathbf{C}^{-1}$ , est défini par :

$$\mathbf{C}^{-1} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{1}{4\mu} \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \quad (2-14)$$

ou encore, compte tenu de Eq. (2-2) :

$$\mathbf{C}^{-1} = -\frac{\nu}{E} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{2E} \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \quad (2-15)$$

Comme  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  a les symétries mineures droite et gauche, la symétrie majeure et est défini strictement positif.

Le problème de l'unicité de la solution du problème de structure élastique linéaire isotrope est abordé dans le paragraphe suivant de ce Chapitre (voir paragraphe 2.2). Le problème de la compatibilité de la solution avec l'hypothèse de comportement élastique (voir question **Q2**, paragraphe 1.2.5) et celui de la compatibilité de la solution avec l'hypothèse des déformations infinitésimales (voir question **Q2**, paragraphe 1.2.5) sont traduits mathématiquement de la même façon que dans le paragraphe 1.2.5, le champ de température étant, en tout point et à tout instant, celui (uniforme) de la température initiale,  $T(\mathbf{x}, t) = T_0$ .

Il est finalement intéressant de noter, à propos du problème de structure défini dans Eq. (2-1) que si le champ de forces massiques est constant dans le temps (ce qui est fréquemment le cas en pratique), les équations sont totalement indépendantes du temps. La variable temps peut alors être omise<sup>2</sup>, le problème se réduisant à la recherche des champs  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  et  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  pour un champ de forces massiques et des conditions aux limites donnés.

<sup>2</sup> Une condition *nécessaire* à cette omission est que les sollicitations à l'instant final  $t_1$  soient telles que, en tout point de la structure et à l'instant  $t_1$ , le comportement du matériau est élastique. Cette condition n'est cependant *pas suffisante* : même si elle est satisfaite, il peut exister des instants  $t < t_1$  pour lesquels les sollicitations sont telles que le comportement du matériau n'est plus élastique dans toute la structure. En d'autres termes, il est crucial de connaître la chronologie des sollicitations ou du *chargement* pour savoir si la variable temps peut effectivement être omise. Dans toute la suite de ce Cours, on ne considèrera, de fait, que des chargements dépendant de façon monotone du temps, pour lesquels cette omission est effectivement licite.

### Principaux résultats du paragraphe 2.1

De façon très générale, un problème de statique de structure en élasticité linéaire isotrope (ou élasticité de Hooke) s'énonce de la façon suivante :

– Étant donné :

$$\Omega = \{\mathbf{x} = OP\} \subset \mathbb{R}^3, \text{ de frontière } \partial\Omega$$

$$\mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu \Leftrightarrow E > 0 \text{ et } \nu \in ]-1, 1/2[ ; \rho > 0 ; \mathbf{f}^m(\mathbf{x}) \text{ dans tout } \Omega$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U \text{ et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \partial\Omega_F \text{ avec } \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega \text{ et } \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

– trouver les champs :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$$

– tels que,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) ; \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0 ; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \text{ avec } \mathbf{C} = \lambda \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \mu \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G}$$

La solution d'un problème de structure en élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse d'un comportement élastique si et seulement si (critère de Von Mises) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \sigma_{eq}(\mathbf{x}) - \sigma_0 < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

La solution d'un problème de structure en élasticité linéaire isotrope est compatible avec l'hypothèse de variations de déformations infinitésimales si et seulement si :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\| \ll 1, \|\text{asym}(\text{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}))\| \ll 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$


---

## 2.2 Unicité de la solution et théorème de superposition en élasticité linéaire isotrope

### 2.2.1 Unicité de la solution

Comme on l'a signalé au paragraphe 2.1, le tenseur des rigidités  $\mathbf{C}$ , voir Eq. (2-10), est défini strictement positif. Cette propriété de  $\mathbf{C}$  a notamment pour conséquence que la solution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope est unique en termes de champs de déformations et de contraintes. Le champ de déplacements, en revanche, n'est généralement pas unique, au sens qu'il n'est généralement connu qu'à un mouvement de solide rigide près (sauf si certaines précautions sont prises sur les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire sur  $\partial\Omega_U$ ). L'unicité de la solution peut se montrer de la façon suivante :

**Démonstration** de l'unicité de la solution du problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope.

Supposons qu'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope admette deux solutions distinctes,  $\mathbf{U}^1(\mathbf{x})$  (resp.  $\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x})$ ) et  $\mathbf{U}^2(\mathbf{x})$  (resp.  $\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x})$ ), c'est-à-dire deux solutions dont la différence est non nulle, au moins dans un sous domaine de  $\Omega$ . Ces deux solutions vérifient les mêmes conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \mathbf{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \mathbf{U}^2 &= \mathbf{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \partial\Omega_F \end{aligned} \tag{2-16}$$

d'où l'on déduit, notant  $\delta\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^2(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^1(\mathbf{x})$  (resp.  $\delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \delta\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}) - \delta\boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x})$ ) la différence de ces deux solutions :

$$\delta\mathbf{U} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_U \text{ et } \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (2-17)$$

Ces deux solutions vérifient également les équations du problème :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^1 &= \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}^1) ; \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^1) + \rho\mathbf{f}^m = 0 ; \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}^2) ; \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^2) + \rho\mathbf{f}^m = 0 ; \boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (2-18)$$

d'où l'on déduit que :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}\delta\mathbf{U}) ; \text{div}(\delta\boldsymbol{\sigma}) = 0 ; \delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}:\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}:\text{sym}(\text{grad}\delta\mathbf{U}) \quad (2-19)$$

Il est à noter qu'il n'est pas interdit, dans Eq. (2-19), que le champ  $\delta\mathbf{U}(\mathbf{x})$  inclue un champ de déplacements correspondant à un mouvement de solide rigide, soit  $\delta\mathbf{U}^R(\mathbf{x})$ . Il est également à noter que, compte tenu que le tenseur des rigidités a la symétrie mineure droite, Eq. (2-19)-3 peut se récrire :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U} \quad (2-20)$$

En combinant Eq. (2-19)-2 et Eq. (2-20), on obtient ainsi :

$$\text{div}(\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) = 0 \quad (2-21)$$

Le produit scalaire de chacun des deux membres de Eq. (2-21) par  $\delta\mathbf{U}$  donne alors :

$$\delta\mathbf{U} \cdot (\text{div}(\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) = 0 \quad (2-22)$$

Or :

$$\delta\mathbf{U} \cdot (\text{div}(\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) = \text{div}(\delta\mathbf{U} \cdot (\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) - (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) \quad (2-23)$$

ce qui conduit à une équation équivalente à Eq. (2-22) :

$$\text{div}(\delta\mathbf{U} \cdot (\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) = (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) \quad (2-24)$$

Cette dernière égalité étant à vérifier en tout point de  $\Omega$ , on en déduit que :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\delta\mathbf{U} \cdot (\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) dV = \int_{\Omega} (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) dV \quad (2-25)$$

soit encore, par application du théorème de la divergence au terme de gauche de Eq. (2-25) :

$$\int_{\partial\Omega} (\delta\mathbf{U} \cdot (\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U})) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) dV \quad (2-26)$$

ou encore, compte tenu de Eq. (2-20) :

$$\int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{U} \cdot (\delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) dV \quad (2-27)$$

Or,  $\partial\Omega = \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F$  et  $\partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$ , d'où, selon Eq. (2-17) :

$$\int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{U} \cdot (\delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial\Omega_U} \delta\mathbf{U} \cdot (\delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\partial\Omega_F} \delta\mathbf{U} \cdot (\delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (2-28)$$

Finalement, Eq. (2-26) se réduit donc à :

$$\int_{\Omega} (\text{grad}\delta\mathbf{U}:\mathbf{C}:\text{grad}\delta\mathbf{U}) dV = 0 \quad (2-29)$$

Puisque  $\mathbf{C}$  est défini strictement positif (voir Eq. (2-13)), Eq. (2-29) ne peut être vérifiée que si  $\delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^2 - \mathbf{U}^1$  est nulle en tout point de  $\Omega$ . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse formulée au début de cette démonstration, à savoir que  $\mathbf{U}^2$  et  $\mathbf{U}^1$  sont deux solutions distinctes du problème (raisonnement par l'absurde). La solution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope est donc bien unique en termes de champs de déformations et de contraintes. Sauf conditions aux limites en déplacements particulières, le champ de déplacements, en revanche, n'est pas unique, au sens qu'il n'est connu qu'à un mouvement de solide rigide près.

### 2.2.2 Théorème de superposition

Le théorème de supersposition, parfois présenté comme un « principe », découle directement de la linéarité de la loi de Hooke. Plus précisément, il stipule que la *correspondance* entre les données du problème (champ de forces massiques et conditions aux limites) et sa solution  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))$  est *linéaire*. Autrement dit, pour une structure  $\Omega$  donnée :

- si  $(\mathbf{U}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $P^1$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^{m1}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega ; \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^{1d} \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^{d1} \text{ sur } \partial\Omega_F,$$

- si  $(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $P^2$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^{m2}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega, ; \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^{2d} \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^{d2} \text{ sur } \partial\Omega_F,$$

- alors,  $\forall \Lambda^1 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \Lambda^2 \in \mathbb{R}$ ,  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \mathbf{U}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $\Lambda^1 P^1 + \Lambda^2 P^2$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \mathbf{f}^{m1}(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \mathbf{f}^{m2}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega ; \mathbf{U} = \Lambda^1 \mathbf{U}^{1d} + \Lambda^2 \mathbf{U}^{2d} \text{ sur } \partial\Omega_U ;$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \Lambda^1 \mathbf{F}^{d1} + \Lambda^2 \mathbf{F}^{d2} \text{ sur } \partial\Omega_F,$$

La démonstration de ce théorème ne pose pas de problème, qui découle directement, comme on l'a déjà signalé, de la linéarité de la loi de Hooke. On laisse le soin au lecteur de la faire. Il est important de noter que le théorème de superposition n'est applicable que si la partition de la frontière  $\partial\Omega$  est la même pour les problèmes  $P^1$ ,  $P^2$  et  $\Lambda^1 P^1 + \Lambda^2 P^2$ .

---

#### Principaux résultats du paragraphe 2.2

- La solution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope existe et est unique si :

$$\mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{3}\mu \Leftrightarrow E > 0 \text{ et } \nu \in ]-1, 1/2[ \Leftrightarrow \mathbf{C} \text{ défini strictement positif}$$

$$\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega ; \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

- Théorème de supersposition :

- si  $(\mathbf{U}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $P^1$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^{m1}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega ; \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^{1d} \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^{d1} \text{ sur } \partial\Omega_F,$$

- si  $(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $P^2$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^{m2}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega, ; \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^{2d} \text{ sur } \partial\Omega_U ; \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^{d2} \text{ sur } \partial\Omega_F,$$

- alors,  $\forall \Lambda^1 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \Lambda^2 \in \mathbb{R}$ ,  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \mathbf{U}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}))$  est la solution du problème  $\Lambda^1 P^1 + \Lambda^2 P^2$  associé aux données :

$$\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = \Lambda^1 \mathbf{f}^{m1}(\mathbf{x}) + \Lambda^2 \mathbf{f}^{m2}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega ; \mathbf{U} = \Lambda^1 \mathbf{U}^{1d} + \Lambda^2 \mathbf{U}^{2d} \text{ sur } \partial\Omega_U ;$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \Lambda^1 \mathbf{F}^{d1} + \Lambda^2 \mathbf{F}^{d2} \text{ sur } \partial\Omega_F.$$

## 2.3 Méthode des déplacements pour la résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope

Dans la plupart des cas pratiques, le problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope défini par Eq. (2-1) n'admet pas de solution analytique. Un ingénieur cherche alors à lui trouver une solution approchée en mettant en œuvre des méthodes numériques, telle la méthode des éléments finis. Il existe cependant un certain nombre de problèmes, correspondant à des géométries de structures particulières associées à certaines conditions aux limites, pour lesquels une solution analytique peut être assez simplement trouvée (laquelle est alors *la* solution du problème puisque celle-ci est unique, voir paragraphe 2.2.1).

Une première méthode de recherche d'une éventuelle solution analytique à un problème de structure donné est basée, en tout premier lieu, sur le choix d'une expression analytique du champ de déplacement  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  compatible avec les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_U$ , dites conditions aux limites en déplacements. Cette méthode est appelée *méthode des déplacements*. Le choix du champ de déplacements (de son expression analytique) sur lequel elle repose est essentiellement guidé par la géométrie de la structure (sa configuration  $\Omega$ ) et les conditions aux limites en déplacements qui lui sont imposées. Il est important de comprendre que, à l'exception des conditions aux limites en déplacements, ce choix n'obéit à aucune règle stricte : de fait, il est essentiellement intuitif. Et ce n'est qu'après avoir « testé » les équations du problème et les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_F$ , dites conditions aux limites en contraintes, telles qu'elles s'écrivent compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  qu'un ingénieur peut savoir si ce choix était pertinent ou non.

En clair, pour un ensemble donné de données, voir Eq.(2-1), la méthode des déplacements suit la procédure suivante :

- 1°) Choix d'un champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ ,
- 2°) Expression des champs de déformations,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ <sup>3</sup>, et de contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  (voir également Eq. (2-1)) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) \ ; \ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

- 3°) Test sur les conditions aux limites en contraintes compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 2°), c'est-à-dire (voir également Eq. (2-1)) :

$$\text{Est-ce que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \ ?$$

- 4°) Test sur les équations d'équilibre local compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 2°), c'est-à-dire (voir également Eq. (2-1)) :

$$\text{Est-ce que } \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \Omega \ ?$$

Dans cette procédure, les étapes 3°) et 4°) sont cruciales. Un ingénieur peut en effet affirmer que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  est le champ de déplacements solution du problème qu'il a à résoudre si et seulement si il peut répondre « oui » à la question 3°) *et* à la question 4°). Par contraposition : si un ingénieur doit répondre « non » à la question 3°) ou à la question 4°), alors le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  qu'il a initialement choisi n'est pas la solution du problème qu'il a résoudre.

Il est important de noter que cette procédure peut être modifiée, grâce à l'équation liant les champs de déplacements et de déformations, en substituant  $\mathbf{U}$  à  $\boldsymbol{\sigma}$  dans l'équation d'équilibre local. Plus précisément, sachant que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{U}) \tag{2-30}$$

la loi de Hooke peut se récrire, sachant également que  $\text{Tr}(\text{sym}(\text{grad}\mathbf{U})) = \text{Tr}(\text{grad}\mathbf{U})$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\text{grad}\mathbf{U}) \mathbf{G} + \mu \text{grad}\mathbf{U} + \mu \text{grad}^T \mathbf{U} \tag{2-31}$$

<sup>3</sup> Le champ de déplacements doit être « suffisamment régulier » pour que le champ des déformations puisse être défini. Plus précisément : le champ des déplacements doit être différentiable « presque partout » dans  $\Omega$  (cette expression étend à comprendre au sens de la théorie des distributions) pour que l'on puisse lui associer un champ de déformations. Un tel champ de déplacements, s'il vérifie également les conditions aux limites en déplacements, est dit *cinématiquement admissible*.

## 2. MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE STRUCTURE HOMOGÈNE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

---

Compte tenu que la structure est homogène, c'est-à-dire que les coefficients de Lamé ne dépendent pas de  $\mathbf{x}$ , l'équation d'équilibre locale devient alors :

$$\lambda \operatorname{div}(\operatorname{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G}) + \mu \operatorname{div}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) + \mu \operatorname{div}(\mathbf{grad}^T \mathbf{U}) + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad (2-32)$$

Or :

$$\operatorname{div}(\operatorname{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G}) = \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\mathbf{grad}^T \mathbf{U}) = \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) \quad (2-33)$$

et, par définition de l'opérateur laplacien, noté  $\Delta$  :

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) = \Delta \mathbf{U} \quad (2-34)$$

Compte tenu des relations Eqs. (2-33) et (2-34), l'équation d'équilibre local Eq. (2-32) peut ainsi se récrire :

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad (2-35)$$

L'équation vectorielle Eq. (2-35) – équivalente, dans une base quelconque, à trois équations scalaires – est connue sous le nom d'*équations de Navier*. Ces équations permettent une nouvelle formulation de la méthode des déplacements, très souvent préférée à celle précédemment donnée :

Pour un ensemble donné de données, voir Eq.(2-1), la méthode des déplacements combinée aux équations de Navier suit la procédure suivante :

- 1°) Choix d'un champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ ,
- 2°) Test sur les équations de Navier compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , c'est-à-dire (voir également Eq. (2-35)) :

$$\text{Est-ce que } (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad ?$$

- 3°) Expression du champ de contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  (voir également Eq. (2-31)) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G} + \mu \mathbf{grad} \mathbf{U} + \mu \mathbf{grad}^T \mathbf{U}$$

- 4°) Test sur les conditions aux limites en contraintes compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 3°), c'est-à-dire (voir également Eq. (2-1)) :

$$\text{Est-ce que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \quad ?$$

Dans cette nouvelle formulation de la méthode des déplacements, ce sont les étapes 2°) et 4°) qui sont cruciales. Un ingénieur peut en effet affirmer que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  qu'il a initialement choisi est le champ de déplacements solution du problème qu'il a à résoudre si et seulement si il peut répondre « oui » à la question 2°) et à la question 4°).

### Principaux résultats du paragraphe 2.3

La méthode des déplacements est une méthode de résolution analytique d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope reposant sur les équations de Navier :

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{f}^m = 0$$

Cette méthode suit la procédure suivante :

- 1°) Choix d'un champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ ,
- 2°) Test sur les équations de Navier compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  au 1°), c'est-à-dire :

$$\text{Est-ce que } (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad ?$$

- 3°) Expression du champ de contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  au 1°), soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G} + \mu \mathbf{grad} \mathbf{U} + \mu \mathbf{grad}^T \mathbf{U}$$

- 4°) Test sur les conditions aux limites en contraintes compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 3°), c'est-à-dire :

$$\text{Est-ce que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F ?$$

Un ingénieur peut affirmer que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  qu'il a choisi au 1°) est le champ de déplacements solution du problème qu'il a à résoudre si et seulement si il peut répondre « oui » à la question 2°) et à la question 4°).

## 2.4 Méthode des contraintes pour la résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope

Une deuxième méthode de recherche d'une éventuelle solution analytique à un problème de structure donné est basée, en tout premier lieu, sur le choix d'une expression analytique du champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  compatible avec les conditions aux limites en contraintes et l'équation d'équilibre local. Cette méthode est appelée *méthode des contraintes*. Le choix du champ de contraintes (de son expression analytique) sur lequel repose la méthode des contraintes est essentiellement guidé par la géométrie de la structure (sa configuration  $\Omega$ ) et les conditions aux limites en contraintes qui lui sont imposées. Et ce n'est qu'après avoir « testé » les équations du problème et les conditions aux limites en déplacements telles qu'elles découlent du choix fait pour  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  qu'un ingénieur peut savoir si ce choix était pertinent ou non.

En clair, pour un ensemble donné de données, voir Eq.(2-1), la méthode des contraintes suit la procédure suivante :

- 1°) Choix d'un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en contraintes et les équations d'équilibre local, soit :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \quad ; \quad \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

- 2°) Expression du champ de déformations,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  et de l'inverse de la loi de Hooke (voir Eq. (2-8)), soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

- 3°) Expression du champ de déplacements,  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  et de la relation liant ces deux champs (voir Eq. (2-30)), soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad} \mathbf{U})$$

étant donné que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  doit vérifier les conditions aux limites en déplacements, soit  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ .

Une difficulté surgit cependant dans l'étape 3°) ci-dessus, dans la mesure où un champ de tenseurs symétriques donné n'est pas toujours la partie symétrique du gradient d'un champ de vecteurs. Pour dépasser cette difficulté, il convient de chercher à établir des conditions sur le champ  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , dites *conditions de compatibilité géométrique*, c'est-à-dire des conditions nécessaires à l'existence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  compatibles avec l'équation  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad} \mathbf{U})$ . En l'occurrence, de telles conditions existent bien, qui sont d'ailleurs nécessaires et suffisantes et s'écrivent :

$$\text{rot}(\text{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2-36)$$

Ceci peut se démontrer de la façon suivante :

—

**Établissement** de Eq. (2-36) en tant que conditions *nécessaires* à l'existence de  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ . Le problème à résoudre s'énonce formellement de la façon suivante : soit  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  un champ de tenseurs symétriques. Montrer

que, si le champ vectoriel  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$  existe, alors, *nécessairement*, la relation Eq. (2-36) est vérifiée. Si le champ vectoriel  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$  existe, alors, par définition de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}\mathbf{U} + \mathbf{grad}^T\mathbf{U}) \quad (2-37)$$

Cette égalité implique :

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \mathbf{rot}(\mathbf{grad}^T\mathbf{U}) \quad (2-38)$$

Or, on peut montrer que, quel que soit le champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\mathbf{V}) = 0 \quad (2-39)$$

La relation Eq. (2-38) se réduit donc à :

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}(\mathbf{grad}^T\mathbf{U}) \quad (2-40)$$

En transposant cette égalité, il vient alors :

$$\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}^T(\mathbf{grad}^T\mathbf{U}) \quad (2-41)$$

Or, on peut également montrer que, quel que soit le champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  :

$$\mathbf{rot}^T(\mathbf{grad}^T\mathbf{V}) = \mathbf{grad}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) \quad (2-42)$$

La relation Eq. (2-41) peut donc se récrire :

$$\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{rot}\mathbf{U}) \quad (2-43)$$

De cette égalité, on déduit que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \mathbf{rot}(\mathbf{grad}(\mathbf{rot}\mathbf{U})) \quad (2-44)$$

Puisque  $\mathbf{rot}\mathbf{U}(\mathbf{x})$  est un champ vectoriel, on peut lui appliquer le résultat rappelé dans Eq. (2-39). L'égalité Eq. (2-44) se réduit donc finalement à :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (2-45)$$

La condition Eq. (2-45) (voir Eq. (2-36)) est donc bien *nécessaire* à l'existence, pour un champ  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  donné, d'un champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$ .

**Démonstration** du fait que Eq. (2-36) est une condition *suffisante* à l'existence de  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ . Le problème à résoudre s'énonce formellement de la façon suivante : soit  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  un champ de tenseurs symétriques vérifiant Eq. (2-36). Montrer qu'il existe un champ vectoriel  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$ .

L'égalité Eq. (2-36) stipule que le champ  $\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon}$  est irrotationnel. Or, on peut montrer qu'à tout champ tensoriel irrotationnel est associé un champ de vecteur  $\mathbf{W}$  tel que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{W} \text{ tel que } \mathbf{rot}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}\mathbf{W} \quad (2-46)$$

Sachant que, quel que soit le tenseur symétrique  $\mathbf{S}$ ,  $(\mathbf{rot}^T\mathbf{S}) : \mathbf{G} = 0$ , on déduit de Eq. (2-46) que  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  est un champ vectoriel à divergence nulle<sup>4</sup>, ce qui équivaut à :

$$\exists \mathbf{V} \text{ tel que } \mathbf{W} = \mathbf{rot}\mathbf{V} \quad (2-47)$$

---

<sup>4</sup> Les champs vectoriels à divergence nulle sont parfois appelés champs *conservatifs*.

Si l'égalité Eq. (2-36) est vérifiée, il existe donc nécessairement un champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  tel que :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad rot V} \quad (2-48)$$

Il reste à montrer que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 1/2\mathbf{V}(\mathbf{x})$  est bien tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$ . Pour cela, il suffit de vérifier que l'égalité Eq. (2-48) est bien satisfaite lorsque  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym}(\mathbf{grad U})$ , c'est-à-dire que :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \frac{1}{2} \mathbf{grad rot U} \quad (2-49)$$

L'égalité Eq. (2-49) est effectivement vraie pour tout champ de vecteurs. En effet, sachant que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{sym}^T(\mathbf{grad U})$ , on a :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{rot}^T \mathbf{sym}^T(\mathbf{grad U}) \quad (2-50)$$

soit encore, puisque  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{grad U} - \mathbf{asym}(\mathbf{grad U})$  :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{rot}^T \mathbf{grad}^T U - \mathbf{rot}^T \mathbf{asym}^T(\mathbf{grad U}) \quad (2-51)$$

Le résultat rappelé dans Eq. (2-42) permet de récrire Eq. (2-51), soit :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{grad rot U} - \mathbf{rot}^T \mathbf{asym}^T(\mathbf{grad U}) \quad (2-52)$$

ou encore, puisque  $\mathbf{asym}^T(\mathbf{grad U}) = -\mathbf{asym}(\mathbf{grad U})$  :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{grad rot U} + \mathbf{rot}^T \mathbf{asym}(\mathbf{grad U}) \quad (2-53)$$

Or, du résultat rappelé dans Eq. (2-39), on déduit que :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{asym}(\mathbf{grad U}) = -\mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) \quad (2-54)$$

ce qui permet de récrire l'égalité Eq. (2-53) :

$$2 \mathbf{rot}^T \mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \mathbf{grad rot U} \quad (2-55)$$

qui est bien identique à Eq. (2-49). La condition Eq. (2-45) est donc bien *suffisante* à l'existence d'un champ vectoriel  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Les équations de compatibilité géométrique Eq. (2-36) assurent donc l'existence d'un champ de déplacements tel que  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$ . Une dernière étape reste à franchir pour que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  puisse effectivement être déterminé, à savoir établir le système d'équations aux dérivées partielles dont il est solution. Compte tenu que :

$$\mathbf{grad U} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym}(\mathbf{grad U}) \quad (2-56)$$

ce problème se ramène à l'établissement d'une équation liant le champ inconnu  $\mathbf{asym}(\mathbf{grad U}(\mathbf{x}))$  à celui, connu, des déformations. Pour cela, il faut repartir de l'équation Eq. (2-49), soit, puisque  $\mathbf{sym}(\mathbf{grad U}) = \boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{grad rot U} \quad (2-57)$$

et revenir à la définition de l'opérateur rotationnel, soit  $\mathbf{rot U} = -\mathbf{grad U} : \mathbf{H}$ , où  $\mathbf{H}$  est le tenseur d'orientations (voir cours de Mécanique des milieux continus). L'équation Eq. (2-57) peut ainsi se récrire :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{grad U} : \mathbf{H}) \quad (2-58)$$

soit encore, d'après Eq. (2-56) :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}((\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym}(\mathbf{grad U})) : \mathbf{H}) \quad (2-59)$$

Or, on peut montrer que quel que soit le tenseur symétrique  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}:\mathbf{H} = 0$ . L'équation Eq. (2-59) se réduit donc à :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) : \mathbf{H}) \quad (2-60)$$

Le champ  $\mathbf{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))$  peut donc bien être déterminé, selon Eq. (2-60), à partir de celui des déformations,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ . Il suffit ensuite de reporter la solution de Eq. (2-60) dans Eq. (2-56) pour obtenir une équation où la seule inconnue est le champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ .

Dans la plupart des ouvrages traitant de l'élasticité de Hooke, les conditions de compatibilité géométrique Eq. (2-36) sont présentées sous une autre forme :

$$\mathbf{grad} \mathbf{div}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{grad}^T \mathbf{div}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (2-61)$$

L'équivalence de Eq. (2-36) et Eq. (2-61) peut se montrer en posant :

$$\mathbf{T} = \mathbf{rot}(\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \mathbf{T}' = \mathbf{grad} \mathbf{div}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{grad}^T \mathbf{div}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-62)$$

puis en montrant que l'identité  $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G}$  est vraie quel que soit le tenseur symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et, finalement, que  $\mathbf{T} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{T}' = \mathbf{0}$ . On laisse le soin au lecteur de détailler cette démonstration.

Compte tenu de l'inverse de la loi de Hooke (voir Eq. (2-8)), les conditions de compatibilité géométrique peuvent être exprimées en fonction du tenseur des contraintes, soit :

$$(1 + \nu) (\mathbf{grad} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{grad}^T \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) + \nu \Delta \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2-63)$$

Les équations d'équilibre local doivent impérativement être vérifiées par le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  si l'on veut que celui-ci soit solution du problème de structure considéré. Or, celles-ci s'écrivent (voir également Eq. (2-1)) :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\rho \mathbf{f}^m \quad (2-64)$$

Par combinaison de Eq. (2-63) et Eq. (2-64), on déduit ainsi que <sup>5</sup> :

$$(1 + \nu) \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) - \nu \Delta \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + (1 + \nu) \rho (\mathbf{grad} \mathbf{f}^m + \mathbf{grad}^T \mathbf{f}^m) = \mathbf{0} \quad (2-65)$$

Le produit scalaire de l'équation tensorielle Eq. (2-65) par  $\mathbf{G}$  donnant :

$$\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \Delta \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -\rho \mathbf{div}(\mathbf{f}^m) \quad (2-66)$$

on peut finalement récrire Eq. (2-65) de la façon suivante :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) + \frac{\nu}{1 - \nu} \rho \mathbf{div}(\mathbf{f}^m) \mathbf{G} + \rho (\mathbf{grad} \mathbf{f}^m + \mathbf{grad}^T \mathbf{f}^m) = \mathbf{0} \quad (2-67)$$

L'équation tensorielle Eq. (2-67) – équivalente, dans une base quelconque, à six équations scalaires car le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique – est connu sous le nom d'*équations de Michell*. Dans le cas, fréquent en pratique, où le champ de forces massiques  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x})$  est uniforme, elle se simplifie grandement, soit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) = \mathbf{0} \quad (2-68)$$

L'équation tensorielle Eq. (2-68) est connue sous le nom d'*équations de Beltrami-Michell*.

Il est important de souligner que les équations de Michell et de Beltrami-Michell associent les conditions de compatibilité géométrique Eq. (2-61) (ou, de façon équivalente, Eq. (2-36)) et les équations d'équilibre local Eq. (2-64). De ce fait, elles permettent une formulation complète de la méthode des contraintes :

Pour un ensemble donné de données, voir Eq.(2-1), la méthode des contraintes suit la procédure suivante (dans le cas où le champ de forces massiques est uniforme) :

<sup>5</sup> On rappelle que le champ de masse volumique a été supposé *uniforme* en première approximation ; voir Eq. (1-42).

- 1°) Choix d'un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  vérifiant les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en contraintes<sup>6</sup>, soit :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ; \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F$$

- 2°) Test sur les équations de Beltrami-Michell compte tenu du choix fait pour le champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , soit :

$$\text{Est-ce que } \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \mathbf{grad grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ?$$

- 3°) Expression du champ de déformations,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  et de l'inverse de la loi de Hooke (voir également Eq. (2-8)), soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

- 4°) Expression du champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  en tant que solution de :

$$\mathbf{grad U} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym}(\mathbf{grad U}) \quad \text{étant donné que le champ } \mathbf{asym}(\mathbf{grad U}(\mathbf{x}))$$

$$\text{est lui-même solution de : } \mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{asym}(\mathbf{grad U}) : \mathbf{H})$$

et étant donné également que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  doit vérifier les conditions aux limites en déplacements, soit  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ .

L'étape 2°) est cruciale dans la méthode des contraintes, en ce sens qu'un ingénieur peut affirmer que le champ de contraintes qu'il a proposé au 1°) est la solution du problème considéré si et seulement si il peut répondre « oui » à la question posée. Inversement, si un ingénieur doit répondre « non » à la question posée au 2°), il est inutile qu'il considère les points 3°) et 4°) : le champ de contraintes qu'il a proposé au 1°) n'est pas solution du problème considéré.

---

<sup>6</sup> Un tel champ de contraintes est dit *statiquement admissible*.

**Principaux résultats du paragraphe 2.4**

La méthode des contraintes est une méthode de résolution analytique d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope reposant, dans le cas où le champ de forces massiques est uniforme, sur les équations de Beltrami-Michell :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \text{grad grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) = \mathbf{0}$$

Cette méthode suit la procédure suivante :

- 1°) Choix d'un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  vérifiant les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en contraintes :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ; \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F$$

- 2°) Test sur les équations de Beltrami-Michell compte tenu du choix fait pour le champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  :

$$\text{Est-ce que } \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \text{grad grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ?$$

- 3°) Expression du champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  et de l'inverse de la loi de Hooke, soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

- 4°) Expression du champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  en tant que solution de :

$$\text{grad} \mathbf{U} = \boldsymbol{\varepsilon} + \text{asym}(\text{grad} \mathbf{U}) \quad \text{étant donné que le champ } \text{asym}(\text{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))$$

$$\text{est lui-même solution de : } \text{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \text{grad}(\text{asym}(\text{grad} \mathbf{U}) : \mathbf{H})$$

et étant donné également que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  doit vérifier les conditions aux limites en déplacements :  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ .

---

**Résumé du Chapitre 2 :**

– De façon très générale, un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope (ou élasticité de Hooke) s'énonce de la façon suivante :

– inconnues :  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) ; \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) ; \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$

– données :  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  ;  $\mu > 0$  ;  $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$  ;  $\rho > 0$  ;  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x})$  ;

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U ; \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \text{ sur } \partial\Omega_F ; \quad \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega ; \quad \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$$

– équations (dans  $\Omega$ ) :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\mathbf{grad} \mathbf{U})$  ;  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$  ;  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0$

– Le théorème de superposition stipule que la *correspondance* entre les données du problème (champ de forces massiques et conditions aux limites) et sa solution  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))$  est *linéaire*.

– La *méthode des déplacements* est une méthode de résolution analytique d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope qui suit la procédure suivante (le champ choisi au 1°) est la solution du problème si et seulement si la réponse est « oui » aux questions posées au 2°) et au 4°) :

– 1°) Choix d'un champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ ,

– 2°) Test sur les *équations de Navier* compte tenu du choix fait au 1°), c'est-à-dire :

$$\text{Est-ce que } (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \text{ div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{f}^m = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ?$$

– 3°) Expression du champ de contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , compte tenu du choix fait au 1°), soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G} + \mu \mathbf{grad} \mathbf{U} + \mu \mathbf{grad}^T \mathbf{U}$$

– 4°) Test sur les conditions aux limites en contraintes compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 3°), c'est-à-dire :

$$\text{Est-ce que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F ?$$

– La *méthode des contraintes* est une méthode de résolution analytique d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope qui suit la procédure suivante (le champ choisi au 1°) est la solution du problème si et seulement si la réponse est « oui » à la question posée au 2°) :

– 1°) Choix d'un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  vérifiant les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en contraintes, c'est-à-dire tel que  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}^m = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F$ ,

– 2°) Test sur les *équations de Beltrami-Michell* compte tenu du choix fait au 1°), c'est-à-dire :

$$\text{Est-ce que } \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \mathbf{grad} \mathbf{grad}(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ?$$

– 3°) Expression du champ de déformations,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , compte tenu du choix fait au 1°) soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

– 4°) Expression du champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  en tant que solution de :

$$\mathbf{grad} \mathbf{U} = \boldsymbol{\varepsilon} + \text{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \quad \text{avec } \mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$$

où le champ  $\text{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))$  est solution de  $\text{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\text{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) : \mathbf{H})$ .

2. MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE STRUCTURE HOMOGENE EN  
ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

---

---

## Chapitre 3

# Résolution de quelques problèmes de structures homogènes en élasticité linéaire isotrope

—

**Notations :** Dans tout ce Chapitre, on opte pour les conventions d'écriture suivantes <sup>1</sup>, valables quel que soit le système de coordonnées considéré, c'est-à-dire, en particulier, quelle que soit la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  considérée :

- quel que soit le champ scalaire  $a(\mathbf{x})$ , de composante  $a(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\frac{\partial a}{\partial x_i}$  est noté  $a_{,i}$ ,  $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}$  est noté  $a_{,ij}$ , ...
- quel que soit le champ vectoriel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , de composantes  $a_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$  est noté  $a_{i,j}$ ,  $\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_k}$  est noté  $a_{i,jk}$ , ...
- quel que soit le champ tensoriel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , de composantes  $a_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$  est noté  $a_{ij,k}$ ,  $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$  est noté  $a_{ij,kl}$ , ...

Par ailleurs :

- quel que soit le champ vectoriel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , la matrice  $(1, 3)$  <sup>2</sup> de ses composantes est notée  $[a]_{\bullet}$ .
- quel que soit le champ tensoriel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , la matrice  $(3, 3)$  de ses composantes est notée  $[a]_{\bullet\bullet}$ .

On rappelle également que :

- le tenseur métrique  $\mathbf{G}$  a pour composantes  $\delta_{ij}$  dans toute base orthonormée,
- les composantes du gradient d'un champ scalaire  $a(\mathbf{x})$  (resp. d'un champ vectoriel ou tensoriel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ) sont égales à  $a_{,i}$  (resp. à  $a_{i,j}$  ou  $a_{i,j,k}$ ) si et seulement si le système de coordonnées considéré est le système de coordonnées *cartésiennes orthonormées*. Pour les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, le lecteur trouvera l'expression des composantes du gradient d'un champ scalaire (resp. d'un champ vectoriel ou tensoriel) en Annexe B.

—

---

<sup>1</sup> Ces conventions sont également retenues dans la plupart des ouvrages traitant de l'élasticité linéaire.

<sup>2</sup> Une telle matrice est parfois appelée *matrice ligne*.

### 3.1 Barre cylindrique homogène en traction-compression simple

#### 3.1.1 Données du problème

On considère le domaine solide  $\mathcal{D}$  constitué par une barre cylindrique de section rectangulaire (largeur  $b$ , épaisseur  $l$ ) et de hauteur  $h$  (voir Fig. 3.1). Les points de cette barre sont repérés dans un système de coordonnées cartésiennes, l'origine  $O$  étant au barycentre de la surface inférieure ( $S_0$  sur la Fig. 3.1). Quel que soit  $M \in \mathcal{D}$ , on a ainsi :  $\mathbf{OM} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ . Dans ce système de coordonnées, la configuration  $\Omega$  de la barre est défini par :

$$\Omega = [-b/2, b/2] \times [-l/2, l/2] \times [0, h] \subset \mathbb{R}^3 \quad (3-1)$$

La frontière  $\partial\mathcal{D}$  de la barre est constituée par six surfaces planes (voir Fig. 3.1) :

$$\partial\mathcal{D} = S_0 \cup S_h \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \quad (3-2)$$

À chacune de ces surfaces peut être associée une partie de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

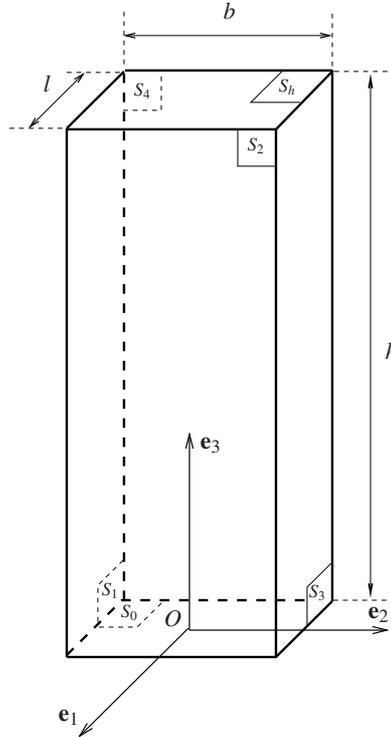


FIG. 3.1 – Géométrie de la barre : largeur  $b$ , épaisseur  $l$ , hauteur  $h$ . Tout point  $M$  de la barre est repéré dans un système de coordonnées cartésiennes, l'origine étant au barycentre de la surface  $S_0$ , soit  $\mathbf{OM} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$  avec  $x_1 \in [-l/2, l/2]$ ,  $x_2 \in [-b/2, b/2]$ ,  $x_3 \in [0, h]$ . La frontière de la barre est constituée par les six surfaces planes  $S_0, S_h, S_1, S_2, S_3, S_4$ .

Par exemple, sachant que, dans le système de coordonnées cartésiennes retenu, la surface  $S_0$  est définie par l'ensemble des points tels que  $x_3 = 0$ , la représentation  $\partial\Omega_0$  de cette surface est :

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^{e_1} \times \partial\Omega_0^{e_2} \times \partial\Omega_0^{e_3} \text{ avec } \partial\Omega_0^{e_1} = [-l/2, l/2]; \partial\Omega_0^{e_2} = [-b/2, b/2]; \partial\Omega_0^{e_3} = \{0\} \quad (3-3)$$

Dans le souci de simplifier l'écriture des équations, on ne distinguera plus, dans la suite de ce paragraphe, les surfaces de leur représentation. On écrira ainsi :

$$\partial\Omega = S_0 \cup S_h \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \quad (3-4)$$

Les autres données du problème sont :

- $\mu > 0$  ;  $\lambda > -(2/3)\mu$  ;  $\rho > 0$ .
- $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = 0$  dans tout  $\Omega$ , ce qui revient à négliger les effets de la gravité (terrestre, par exemple). Compte tenu que le champ de forces massiques est supposé négligeable, la masse volumique est en fait une donnée inutile.
- les conditions aux limites, qu'il faut soigneusement préciser :
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_h$ . Plus précisément, pour tout  $\mathbf{x}$  appartenant à  $S_h$ , on suppose que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = F^d(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3$ . De plus, le champ de forces surfaciques  $\mathbf{F}^d(\mathbf{x}) = F^d(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3$  est supposé constant ou *uniforme*<sup>3</sup>, c'est-à-dire indépendant de  $\mathbf{x}$  ; par la suite, on le notera simplement  $\mathbf{F}^d = F^d \mathbf{e}_3$  avec  $F^d > 0$  en *traction* et  $F^d < 0$  en *compression*. À noter également que, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  considérée, les composantes de la normale unitaire extérieure à  $S_h$  sont  $[n]_{\bullet} = (0, 0, 1)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_1$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, -1, 0)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_2$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (1, 0, 0)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_3$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, 1, 0)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_4$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (-1, 0, 0)$ ,
  - Conditions aux limites mixtes sur  $S_0$  (voir Eqs. (1-55) et (1-56)), soit, d'après Eq. (3-3) :

$$\sigma_{1j}n_j = \sigma_{2j}n_j = 0 ; U_3 = 0 \text{ avec } [n]_{\bullet} = (0, 0, -1) \quad (3-5)$$

On peut remarquer que la condition aux limites en déplacement sur  $S_0$  interdit à la barre tout mouvement de translation suivant  $\mathbf{e}_3$ .

### 3.1.2 Résolution du problème

On choisit de résoudre le problème par la méthode des contraintes. On suit donc la procédure définie au paragraphe 2.4 :

- 1°) Choix d'un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  vérifiant les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en contraintes :

Le choix du champ de contraintes peut ici être guidé en remarquant que, en l'absence de forces massiques, les équations d'équilibre local se réduisent à :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (3-6)$$

soit encore, par définition de l'opérateur  $\mathbf{div}$  et sachant que le système de coordonnées considéré est le système de coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{Id} = 0 \text{ soit, en termes de composantes } \sigma_{ij,j} = 0 \quad (3-7)$$

Il apparaît ainsi qu'un champ de contraintes *uniforme* vérifie trivialement les équations d'équilibre local. Il reste toutefois à vérifier qu'un tel champ est bien compatible avec les conditions aux limites en contraintes. Pour la partie  $S_h$  de la frontière de  $\Omega$ , où  $[n]_{\bullet} = (0, 0, 1)$  et  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = F^d \mathbf{e}_3$ , on a :

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]_{\bullet} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} ; [F^d]_{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F^d \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

d'où l'on déduit que, nécessairement  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  et  $\sigma_{33} = F^d$ . De ce premier résultat, on déduit également que, sur la partie  $S_0$  de la frontière de  $\Omega$ , où  $[n]_{\bullet} = (0, 0, -1)$ , il existe nécessairement un champ de forces surfaciques uniforme  $\mathbf{F} = -\sigma_{33} \mathbf{e}_3 = -F^d \mathbf{e}_3$ . Ce champ est opposé à celui agissant sur  $S_h$  ce qui assure l'équilibre *global* de la structure (sachant que les champs de forces surfaciques agissant sur les autres parties de la frontière de  $\Omega$  sont nuls).

<sup>3</sup> Dans certains ouvrages, un tel champ est dit *homogène* et non pas uniforme.

### 3. RÉOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE STRUCTURES HOMOGENÈS EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

On montre facilement que les conditions aux limites en contraintes sur  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  font que, nécessairement,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ . Le seul champ de contraintes uniforme vérifiant les conditions aux limites est donc tel que :

$$[\sigma]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_{33} = F^d \quad (3-9)$$

On peut noter que, selon Eq. (3-9), la seule valeur propre non nulle de  $\sigma$ , c'est-à-dire la seule *contrainte principale* non nulle, est  $\sigma_{33}$ . On dit d'un tel tenseur qu'il est *uniaxial*. On déduit également de Eq. (3-9) que la base propre orthonormée de  $\sigma$  est  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ <sup>4</sup> ou, de façon équivalente, que les vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  sont les *directions de contraintes principales*.

– 2°) Test sur les équations de Beltrami-Michell compte tenu du choix fait pour le champ  $\sigma(\mathbf{x})$  :

$$\text{Est-ce que } \Delta \sigma + \frac{1}{1+\nu} \text{grad grad}(\text{Tr}(\sigma)) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ? \quad (3-10)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes du gradient de  $\sigma$  sont  $[\text{grad } \sigma]_{ijk} = \sigma_{ij,k}$ . Compte tenu que le champ de contraintes proposé au 1°) est uniforme, c'est-à-dire indépendant de  $\mathbf{x}$ , toutes ces composantes sont nulles. On a donc  $[\text{grad grad } \text{Tr}(\sigma)]_{ij} = 0$  et, puisque, par définition, l'opérateur laplacien est tel que  $\Delta \sigma = \text{div}(\text{grad } \sigma)$ ,  $[\Delta \sigma]_{ij} = 0$ . La réponse à la question posée dans Eq. (3-10) est donc « oui », ce qui assure que le champ de contraintes proposé au 1°) est la solution du problème. Il reste à préciser le champ de déformations et le champ de déplacements associés à ce champ de contraintes, soit, suivant la procédure définie au paragraphe 2.4 :

– 3°) Expression du champ de déformations,  $\epsilon(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\sigma(\mathbf{x})$  et de l'inverse de la loi de Hooke, soit,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\epsilon = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{G} + \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad (3-11)$$

Compte tenu de Eq. (3-9), d'où l'on déduit notamment que  $\text{Tr}(\sigma) = \sigma_{33}$ , les composantes du champ de déformations dans la base orthonormée associée au système de coordonnées cartésiennes retenu sont donc :

$$[\epsilon]_{\bullet\bullet} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

Comme celui des contraintes, le champ des déformations est uniforme. En revanche, contrairement au tenseur des contraintes, il n'est pas uniaxial : ses composantes  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{33}$ , bien qu'égales, sont non nulles. Ces composantes, négatives dans le cas de la traction ( $F^d > 0$ ) si  $\nu > 0$ <sup>5</sup>, traduisent un phénomène connu sous le nom d'*effet Poisson* : l'augmentation de la longueur de la barre ( $\epsilon_{33} > 0$ ) suivant la direction des forces appliquées, soit  $\mathbf{e}_3$ , s'accompagne d'une diminution de ses dimensions dans les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . Plus précisément, d'après Eq. (3-12), on a :

$$-\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} = \nu \quad (3-13)$$

D'un point de vue expérimental, Eq. (3-13) s'interprète de la façon suivante : une barre étant soumise à une traction simple suivant une direction  $\mathbf{e}_3$ , la mesure simultanée de la composante  $\epsilon_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \epsilon \cdot \mathbf{e}_3$  du tenseur des déformations et, quel que soit  $\mathbf{e}_1$  orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ , de la composante  $\epsilon_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \epsilon \cdot \mathbf{e}_1$  permet de mesurer ou d'*identifier* le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la barre. De la même façon, puisque  $\sigma_{33} = E \epsilon_{33}$  selon Eq. (3-12), la mesure simultanée de  $\epsilon_{33}$  et de  $\sigma_{33}$  permet d'identifier le module d'Young du matériau constitutif de la barre. Il est toutefois important de rappeler que les relations Eq. (3-12) et Eq. (3-13) sont valables si et seulement si le matériau obéit à la loi de Hooke, c'est-à-dire si et seulement si il est isotrope et son comportement élastique linéaire.

<sup>4</sup> Plus précisément,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base propre orthonormée de  $\sigma$ . En effet, compte tenu que  $\sigma$  n'a qu'une valeur propre non nulle, de vecteur propre unitaire associé  $\pm \mathbf{e}_3$ , tout vecteur unitaire  $\mathbf{f}_1$  orthogonal à  $\mathbf{e}_3$  est également vecteur propre de  $\sigma$ , le troisième vecteur propre unitaire,  $\mathbf{f}_2$ , étant alors tel que  $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$  et  $\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_3 = 0$  avec  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2$  si  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3)$  est directe.

<sup>5</sup> Pour tous les matériaux « usuels », tels les métaux et alliages, le coefficient de Poisson  $\nu$  est positif. Il n'en demeure pas moins que la Thermodynamique n'interdit pas des valeurs de  $\nu$  négatives : comme on l'a signalé dans le paragraphe 2.1,  $\nu \in ]-1, 1/2[$ .

– 4°) Expression du champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  en tant que solution de :

$$\mathbf{grad}\mathbf{U} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) \quad (3-14)$$

étant donné que le champ  $\mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}))$  est lui-même solution de :

$$\mathbf{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) : \mathbf{H}) \quad (3-15)$$

et étant donné également que le champ  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  doit vérifier les conditions aux limites en déplacements, soit  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ .

Pour résoudre Eq. (3-15), on rappelle tout d'abord que, quel que soit le champ tensoriel (ordre 2)  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , son rotationnel est défini par :  $\mathbf{rota} = -\mathbf{grada}:\mathbf{H}$  où  $\mathbf{H}$  est le tenseur d'orientation, dont les composantes dans toute base orthonormée directe sont :

$$\begin{aligned} H_{ijk} &= 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k \\ H_{ijk} &= 1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ ou } (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ H_{ijk} &= -1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \text{ ou } (3, 2, 1) \end{aligned} \quad (3-16)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, où  $[\mathbf{grada}]_{ijk} = a_{ij,k}$ , les composantes du rotationnel de  $\mathbf{a}$  sont donc simplement définies par  $[\mathbf{rota}]_{il} = -a_{ij,k} H_{jkl}$ .

Comme on l'a vu au 3°), le champ de déformations est uniforme. Son gradient est donc nul. En conséquence, son rotationnel l'est aussi. L'équation Eq. (3-15) se réduit donc à :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) : \mathbf{H}) = 0 \quad (3-17)$$

Dans le souci de simplifier l'écriture des équations, on pose désormais :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}) \quad (3-18)$$

En termes de composantes dans la base orthonormée considérée, et compte tenu de la définition Eq. (3-18), Eq. (3-17) s'écrit :

$$\omega_{jk,p} H_{jki} = 0 \quad (3-19)$$

soit encore, compte tenu du rappel fait dans Eq. (3-16) :

$$\begin{aligned} \omega_{23,1} - \omega_{32,1} &= 0; & \omega_{23,2} - \omega_{32,2} &= 0; & \omega_{23,3} - \omega_{32,3} &= 0 \\ \omega_{31,1} - \omega_{13,1} &= 0; & \omega_{31,2} - \omega_{13,2} &= 0; & \omega_{31,3} - \omega_{13,3} &= 0 \\ \omega_{12,1} - \omega_{21,1} &= 0; & \omega_{12,2} - \omega_{21,2} &= 0; & \omega_{12,3} - \omega_{21,3} &= 0 \end{aligned} \quad (3-20)$$

Or, de par sa définition Eq. (3-18),  $\boldsymbol{\omega}$  est antisymétrique. Ses composantes sont donc telles que  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  (d'où, notamment,  $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$ ). Les équations Eq. (3-20) se réduisent donc à :

$$\begin{aligned} \omega_{23,1} &= \omega_{23,2} = \omega_{23,3} = 0 \\ \omega_{31,1} &= \omega_{31,2} = \omega_{31,3} = 0 \\ \omega_{12,1} &= \omega_{12,2} = \omega_{12,3} = 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

d'où l'on déduit que le champ  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$  est lui aussi uniforme, dont les composantes dans la base orthonormée considérée sont :

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

En termes de composantes, Eq. (3-14) s'écrit :

$$U_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3-23)$$

où les  $\varepsilon_{ij}$  et les  $\omega_{ij}$  sont indépendants de  $\mathbf{x}$ . Plus précisément, pour la composante  $U_3$  du champ de déplacements, on a :

$$U_{3,1} = -\omega_{13} \quad ; \quad U_{3,2} = -\omega_{23} \quad ; \quad U_{3,3} = \varepsilon_{33} \quad (3-24)$$

De Eq. (3-24)-1, on déduit que  $U_3 = -\omega_{13}x_1 + f(x_2, x_3)$ , d'où  $U_{3,2} = f_{,2}$ . Combiné à Eq. (3-24)-2, ce premier résultat donne  $f(x_2, x_3) = -\omega_{23}x_2 + g(x_3)$ , d'où  $U_{3,3} = g_{,3}$ . Combiné à Eq. (3-24)-3, ce deuxième résultat donne  $g(x_3) = \varepsilon_{33}x_3 + A$  où  $A$  est une constante. On a donc finalement :

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = -\omega_{13}x_1 - \omega_{23}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 + A \quad (3-25)$$

Ce champ doit vérifier les conditions aux limites en déplacements sur  $S_0$ , voir Eq. (3-5), c'est-à-dire :  $U_3(x_1, x_2, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in [-l/2, l/2]$  et  $\forall x_2 \in [-b/2, b/2]$ . D'après Eq. (3-25), on a donc :

$$-\omega_{13}x_1 - \omega_{23}x_2 + A = 0 \quad \forall x_1 \in [-l/2, l/2], \quad \forall x_2 \in [-b/2, b/2] \quad (3-26)$$

d'où l'on déduit que, nécessairement,  $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$  et  $A = 0$ . La composante  $U_3$  du champ de déplacements solution du problème s'écrit donc simplement :

$$U_3(x_3) = \varepsilon_{33}x_3 \quad (3-27)$$

De la même façon, on montre que les deux autres composantes du champ de déplacements s'écrivent, sachant que  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  :

$$U_1(x_1, x_2) = \varepsilon_{11}x_1 + \omega_{12}x_2 + B \quad ; \quad U_2(x_1, x_2) = -\omega_{12}x_1 + \varepsilon_{11}x_2 + C \quad (3-28)$$

où les constantes  $\omega_{12}$ ,  $B$  et  $C$  restent indéterminées compte tenu qu'aucune condition aux limites n'est associée à  $U_1$  ni à  $U_2$ . Ce résultat s'interprète de la façon suivante : le champ de déplacements solution du problème n'est connu qu'à un mouvement de solide rigide près, caractérisé par une translation  $\mathbf{T}$  de composantes  $[T]_i = (B, C, 0)$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et, si  $|\omega_{12}| \ll 1$ , une rotation  $\mathbf{R}$  autour de  $\mathbf{e}_3$ , dont les composantes dans la même base sont <sup>6</sup> :

$$[R]_{\bullet\bullet} \approx \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & 0 \\ -\omega_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

En résumé, et sachant que  $\varepsilon_{11} = -\nu\varepsilon_{33}$ , les composantes du champ de déplacements solution du problème sont :

$$[U]_{\bullet} = \begin{pmatrix} -\nu\varepsilon_{33}x_1 + \omega_{12}x_2 + B \\ -\omega_{12}x_1 - \nu\varepsilon_{33}x_2 + C \\ \varepsilon_{33}x_3 \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

### 3.1.3 Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales

Comme on l'a précisé au paragraphe 2.1, la solution de tout problème d'élasticité linéaire n'est physiquement acceptable que si elle est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique et l'hypothèse de déformations infinitésimales, soit :

---

<sup>6</sup> Une condition nécessaire à ce que  $\mathbf{R}$  soit une rotation est que son déterminant soit égal à 1. Or, le déterminant de la matrice définie dans Eq. (3-29) vaut  $1 + \omega_{12}^2$ . Cette matrice n'est donc qu'*approximativement* celle des composantes d'une rotation – d'où le symbole «  $\approx$  » – si et seulement si  $|\omega_{12}| \ll 1$ .

– Compatibilité de la solution avec l'hypothèse de comportement élastique

On rappelle (voir paragraphe 2.1) que la solution d'un problème d'élasticité linéaire est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement, en tout point  $\mathbf{x}$  de la structure considérée :

$$f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \sigma_{eq}(\mathbf{x}) - \sigma_0 < 0 \text{ avec } \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-31)$$

où  $\sigma_0 > 0$  est un paramètre matériau appelé contrainte limite (d'élasticité).

Dans le cas de la traction-compression simple, on a montré que le champ de contraintes est uniforme et uniaxial. De l'expression de ses composantes dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , voir Eq. (3-9), on déduit immédiatement celles de son déviateur  $\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = -(1/3)\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{G} + \boldsymbol{\sigma}$  dans la même base, soit :

$$[\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})]_{\bullet\bullet} = -\frac{1}{3}\sigma_{33} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

d'où l'on déduit que  $\sigma_{eq} = |\sigma_{33}|$  ou encore, puisque  $\sigma_{33} = F^d$ , voir Eq. (3-9),  $\sigma_{eq} = |F^d|$ . Il apparaît ainsi que la solution du problème de traction-compression simple d'une barre établie au paragraphe 3.1.2 est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement si :

$$F^d < \sigma_0 \text{ dans le cas de la traction ; } -F^d < \sigma_0 \text{ dans le cas de la compression} \quad (3-33)$$

De ce résultat, on peut finalement déduire la force limite  $\mathcal{F}_0^d$  (en N) à partir de laquelle la barre n'a plus un comportement élastique. On peut en effet associer au champ de forces surfaciques  $\mathbf{F}^d = F^d \mathbf{e}_3$  agissant sur  $S_h$  une force résultante  $\mathcal{F}^d = \mathcal{F}^d \mathbf{e}_3$ , laquelle est simplement définie par :

$$\mathcal{F}^d = \int_{S_h} \mathbf{F}^d dS \quad (3-34)$$

soit, puisque le champ  $\mathbf{F}^d(\mathbf{x})$  est uniforme et  $S_h = [-l/2, l/2] \times [-b/2, b/2] \times \{h\}$ ,  $\mathcal{F}^d = F^d lb$ . La force limite vaut donc  $\mathcal{F}_0^d = \sigma_0 lb$ .

*Application numérique :*

Pour un acier « ordinaire »,  $\sigma_0 = 200 \text{ MPa}$ . Pour une barre d'acier « ordinaire » telle que  $l = 5 \text{ mm}$  et  $b = 10 \text{ mm}$  et soumise à traction ou compression simple, la force limite vaut donc  $10 \text{ kN}$ . Tant que la force de traction (resp. l'opposée de la force de compression) appliquée à la barre n'atteint pas cette valeur, le comportement de son matériau constitutif (l'acier « ordinaire ») reste élastique.

– Compatibilité de la solution avec l'hypothèse des déformations infinitésimales

On rappelle (voir paragraphe 2.1) que la solution d'un problème d'élasticité linéaire est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement, en tout point  $\mathbf{x}$  de la structure considérée :

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})\| \ll 1 \text{ et } \|\mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x}))\| \ll 1 \quad (3-35)$$

Dans le cas de la traction-compression simple, on a montré que le champ de déformations  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  et celui de  $\mathbf{asym}(\mathbf{grad}\mathbf{U})$ , noté  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ , voir Eq. (3-18), sont uniformes. À partir de l'expression de leurs composantes dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , voir Eqs. (3-12) et (3-22) (avec  $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ ), on peut reformuler Eq. (3-35), soit :

$$\frac{|\sigma_{33}|}{E} (1 + 2\nu^2)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \text{ et } \sqrt{2} |\omega_{12}| \ll 1 \quad (3-36)$$

ou encore, puisque  $\sigma_{33} = F^d$  :

$$\frac{|F^d|}{E} (1 + 2\nu^2)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \text{ et } \sqrt{2} |\omega_{12}| \ll 1 \quad (3-37)$$

Comme on l'a signalé dans le paragraphe 1.2.5, il est généralement admis que, quelle que soit la grandeur positive  $Y$ , celle-ci est « très petite » devant une valeur donnée  $Y_0$  (c'est-à-dire  $Y/Y_0 \ll 1$ ) si  $Y/Y_0 \leq 10^{-1}$ . On peut ainsi préciser les conditions nécessaires et suffisantes à la compatibilité de la solution du problème de traction-compression d'une barre avec l'hypothèse des déformations infinitésimales :

$$\frac{|F^d|}{E} (1 + 2\nu^2)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-1} \text{ et } \sqrt{2} |\omega_{12}| \leq 10^{-1} \quad (3-38)$$

Dans la mesure où  $\omega_{12}$  est une constante quelconque, l'inégalité Eq. (3-38)-2 peut toujours être satisfaite. L'inégalité Eq. (3-38)-1, en revanche, n'est satisfaite que si le champ de forces surfaciques  $\mathbf{F}^d(\mathbf{x}) = F^d \mathbf{e}_3$  reste inférieure à une valeur dépendant, par l'intermédiaire du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , du matériau constitutif de la barre. On peut, là encore, réexprimer Eq. (3-38)-1 en termes de force résultante  $\mathcal{F}^d = \mathcal{F}^d \mathbf{e}_3$ , voir Eq. (3-34) :

$$|\mathcal{F}^d| \leq 10^{-1} \frac{E}{(1 + 2\nu^2)^{\frac{1}{2}}} lb \quad (3-39)$$

*Application numérique :*

Pour un acier « ordinaire »,  $E = 200 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0,3$  (d'où  $(1 + 2\nu^2)^{1/2} \approx 1$ ). Pour une barre d'acier « ordinaire » telle que  $l = 5 \text{ mm}$  et  $b = 10 \text{ mm}$  et soumise à traction ou compression simple, la force maximale compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales vaut donc environ  $1000 \text{ kN}$ . Cette valeur est environ cent fois plus grande que celle de la force limite  $\mathcal{F}_0^d$ , ce qui signifie qu'elle n'est jamais atteinte en pratique : l'hypothèse des déformations infinitésimales est donc bien pertinente.

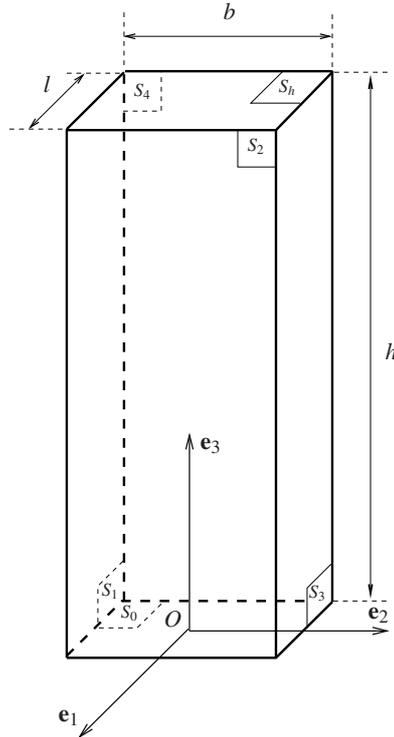
Il faut finalement souligner que, dans le cas de la compression et si  $h \gg \inf(b, l)$ , un phénomène est expérimentalement constaté que l'on appelle *flambage* ou *flambement* : au-delà d'une certaine force résultante appliquée, la barre *fléchit*, c'est-à-dire, en particulier, que le champ de contraintes n'y est plus uniforme. La modélisation mathématique de ce phénomène n'est pas abordée dans ce cours.

On peut également noter que la solution précédente est, en fait, indépendante de la forme de la section  $S_0$  : il suffit de remplacer le produit  $lb$  par l'aire de la section.

**Principaux résultats du paragraphe 3.1**

En élasticité linéaire isotrope, la solution du problème de statique d'une barre cylindrique (voir la Figure ci-dessous pour les données géométriques et le système de coordonnées cartésiennes retenu) soumise à traction-compression simple, c'est-à-dire avec les conditions aux limites suivantes :

- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = F^d \mathbf{e}_3$  sur  $S_h$  ( $F^d > 0$  en traction ;  $F^d < 0$  en compression),
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $S_1, S_2, S_3, S_4$ ,
- $\sigma_{1j}n_j = \sigma_{2j}n_j = 0$  ;  $U_3 = 0$  sur  $S_0$



est donnée par (en supposant le champ de forces massiques  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x})$  nul en tout point de la barre) :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F^d \end{pmatrix} ; [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu F^d}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu F^d}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F^d}{E} \end{pmatrix} ; [U]_{\bullet} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu F^d}{E} x_1 + \omega_{12} x_2 + B \\ -\omega_{12} x_1 - \frac{\nu F^d}{E} x_2 + C \\ \frac{F^d}{E} x_3 \end{pmatrix}$$

où  $\omega_{12}$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes indéterminées, associées à un mouvement de solide rigide. Cette solution est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement si :

$$|F^d| < \sigma_0 \text{ où } \sigma_0 \text{ est la contrainte limite (paramètre-matériau)}$$

Cette solution est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement si (dans le cas où  $\omega_{12} = 0$  et en admettant que  $10^{-1} \ll 1$ ) :

$$|F^d| \leq 10^{-1} \frac{E}{(1 + 2\nu^2)^{\frac{1}{2}}}$$

## 3.2 Barre cylindrique homogène en torsion

### 3.2.1 Données du problème

On considère le domaine solide  $\mathcal{D}$  constitué par une barre cylindrique de section circulaire (longueur  $L$ , rayon  $R$ ; voir Fig. 3.2). Les points de cette barre sont repérés dans un système de coordonnées cylindriques. L'origine  $O$  étant au barycentre de la surface inférieure ( $S_0$  sur la Fig. 3.2), on a ainsi, quel que soit  $M \in \mathcal{D}$  :  $\mathbf{OM} = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ . Dans ce système de coordonnées, la configuration  $\Omega$  de la barre est définie par :

$$\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^3 \quad (3-40)$$

La frontière  $\partial\mathcal{D}$  de la barre est constituée par les deux surfaces planes  $S_0$  et  $S_L$  (voir Fig. 3.2) et la surface latérale, notée  $S_{lat}$ , d'équation  $r = R$  dans le système de coordonnées considéré :

$$\partial\mathcal{D} = S_0 \cup S_L \cup S_{lat} \quad (3-41)$$

À chacune de ces surfaces peut être associée une partie de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Par exemple, sachant que, dans le système de coordonnées cylindriques retenu, la surface  $S_0$  est définie par l'ensemble des points tels que  $z = 0$ , la représentation  $\partial\Omega_0$  de cette surface est :

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^{e_r} \times \partial\Omega_0^{e_\theta} \times \partial\Omega_0^{e_z} \text{ avec } \partial\Omega_0^{e_r} = [0, R] ; \partial\Omega_0^{e_\theta} = [0, 2\pi] ; \partial\Omega_0^{e_z} = \{0\} \quad (3-42)$$

Dans le souci de simplifier l'écriture des équations, on ne distinguera plus, dans la suite de ce paragraphe, les surfaces de leur représentation. On écrira ainsi :

$$\partial\Omega = S_0 \cup S_L \cup S_{lat} \quad (3-43)$$

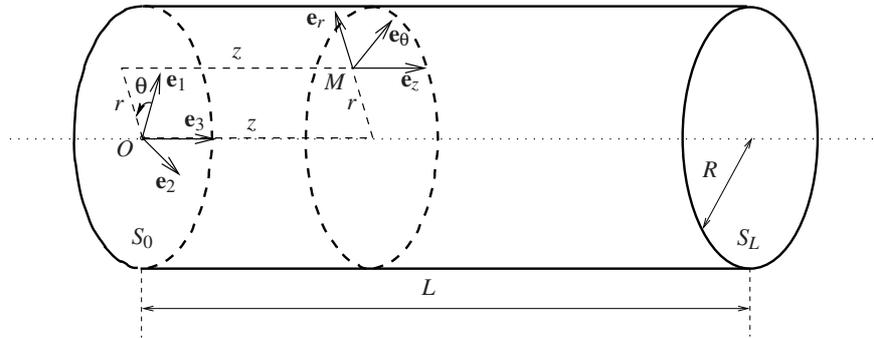


FIG. 3.2 – Géométrie de la barre : longueur  $L$ , rayon  $R$ . Tout point  $M$  de la barre est repéré dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'origine  $O$  étant au barycentre de la surface  $S_0$ , on a  $\mathbf{OM} = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$  avec  $r \in [0, R]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, L]$ . La frontière de la barre est constituée par les deux surfaces planes  $S_0$  et  $S_L$  et par la surface latérale, notée  $S_{lat}$ , d'équation  $r = R$  dans le système de coordonnées cylindriques considéré.

Les autres données du problème sont :

- $\mu > 0$  ;  $\lambda > -(2/3)\mu$  ;  $\rho > 0$ .
- $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = 0$  dans tout  $\Omega$ , ce qui revient à négliger les effets de la gravité (terrestre, par exemple). Compte tenu que le champ de forces massiques est supposé négligeable, la masse volumique est en fait une donnée inutile.
- les conditions aux limites :

- Conditions aux limites en déplacements sur  $S_L$ . Plus précisément, pour tout  $\mathbf{x}$  appartenant à  $S_L$ , on suppose que  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \alpha^d r \mathbf{e}_\theta$  où  $\alpha^d$  est une constante. Si  $|\alpha^d| \ll 1$ , ce champ de déplacements imposés correspond approximativement à une « petite » rotation de  $S_L$ , d'un angle  $\alpha^d$ , autour de  $\mathbf{e}_z$ .
- Conditions aux limites en déplacements sur  $S_0$ , soit  $\mathbf{U} = 0$ ,
- Conditions aux limites en contraintes sur  $S_{lat}$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[\mathbf{n}]_\bullet = (1, 0, 0)$ .

On peut remarquer que les conditions aux limites en déplacements sur  $S_0$  interdisent tout mouvement de solide rigide à la barre.

### 3.2.2 Résolution du problème

On choisit de résoudre le problème par la méthode des déplacements. On suit donc la procédure définie au paragraphe 2.3 :

- **1°**) Choix d'un champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  vérifiant les conditions aux limites en déplacements, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{U} = U^d \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_U$

Le choix du champ de déplacements peut être guidé par les conditions aux limites (en déplacements) sur  $S_L$ . Celles-ci sont indépendantes de  $\theta$  ; de plus, dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ , la seule composante non nulle du champ de déplacements imposés est  $U_\theta$ . Il paraît donc réaliste de rechercher une solution ayant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = U_\theta(r, z) \mathbf{e}_\theta \quad (3-44)$$

Les conditions aux limites en déplacement sur  $S_0$ , d'équation  $z = 0$ , sont satisfaites si et seulement si :

$$U_\theta(r, 0) = 0 \quad \forall r \in [0, R] \quad (3-45)$$

Les conditions aux limites en déplacement sur  $S_L$ , d'équation  $z = L$ , sont satisfaites si et seulement si :

$$U_\theta(r, L) = \alpha^d r \quad \forall r \in [0, R] \quad (3-46)$$

Si, de plus, on impose à la fonction  $U_\theta$  d'être au moins une fois différentiable dans tout  $\Omega$ , le champ  $\mathbf{grad}\mathbf{U}(\mathbf{x})$  est défini dans tout  $\Omega$ .

- **2°**) Test sur les équations de Navier compte tenu du choix fait pour  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , c'est-à-dire (sachant que  $\mathbf{f}^m = 0$  par hypothèse) :

$$\text{Est-ce que } (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ? \quad (3-47)$$

Pour un quelconque champ vectoriel, les composantes du gradient et du laplacien en coordonnées cylindriques sont données en Annexe B. Compte tenu du choix fait pour le champ de déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , voir Eq. (3-44), on obtient ainsi :

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \quad ; \quad \Delta \mathbf{U} = (U_{\theta,rr} - \frac{1}{r^2} U_\theta + \frac{1}{r} U_{\theta,r} + U_{\theta,zz}) \mathbf{e}_\theta \quad (3-48)$$

De Eq. (3-48), on déduit que la réponse à la question posée dans Eq. (3-47) est « oui » si et seulement si :

$$U_{\theta,rr} - \frac{1}{r^2} U_\theta + \frac{1}{r} U_{\theta,r} + U_{\theta,zz} = 0 \quad (3-49)$$

Une solution <sup>7</sup> de cette équation est :

$$U_\theta(r, z) = \beta r z \quad \text{soit} \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \beta r z \mathbf{e}_\theta \quad (3-50)$$

<sup>7</sup> Il se peut que l'équation aux dérivées partielles Eq. (3-49) admette plusieurs solutions. Si tel est le cas, cependant, une seule d'entre elles est la solution du problème défini au paragraphe 3.2.2 puisque les conditions aux limites en déplacements interdisent tout mouvement de solide rigide à la barre.

Ce champ vérifie les conditions aux limites en déplacements sur  $S_0$ , voir Eq. (3-45). Il vérifie les conditions aux limites en déplacements sur  $S_L$ , voir Eq. (3-46), si et seulement si  $\beta = \alpha^d/L$ . Le champ de déplacements dont les composantes, dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ , sont :

$$[U]_{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha^d}{L} r z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-51)$$

permet donc de répondre « oui » à la question posée dans Eq. (3-47).

Il reste à vérifier qu'il mène à un champ de contraintes compatibles avec les conditions aux limites en contraintes sur  $S_{lat}$ , suivant la procédure définie au paragraphe 2.3 :

– 3°) Expression du champ de contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , compte tenu de  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  et de la loi de Hooke,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{grad} \mathbf{U}) \mathbf{G} + \mu \mathbf{grad} \mathbf{U} + \mu \mathbf{grad}^T \mathbf{U} \quad (3-52)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques retenu, et compte tenu de l'expression Eq. (3-51) du champ de déplacements, les composantes de  $\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x})$  sont :

$$[\mathbf{grad} \mathbf{U}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^d \frac{z}{L} & 0 \\ \alpha^d \frac{z}{L} & 0 & \alpha^d \frac{r}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-53)$$

d'où l'on déduit, d'après Eq. (3-52), les composantes du champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , sachant que la base associée au système de coordonnées cylindriques est orthonormée :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} \\ 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad (3-54)$$

Contrairement à celui obtenu dans le cas de la traction, voir Eq. (3-9), ce champ de contraintes n'est pas uniforme puisqu'il dépend (linéairement) de  $r$ .

On déduit également les composantes du champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \text{sym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))$  de Eq. (3-53) :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^d \frac{r}{2L} \\ 0 & \alpha^d \frac{r}{2L} & 0 \end{pmatrix} \quad (3-55)$$

– 4°) Test sur les conditions aux limites en contraintes compte tenu de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  obtenu au 3°) :

$$\text{Est-ce que } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F ? \quad (3-56)$$

Sur la frontière  $\partial\Omega_F = S_{lat}$ , les conditions aux limites en contraintes s'écrivent  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in S_{lat}$ . Or, les composantes de la normale unitaire extérieure à  $S_{lat}$  étant  $[\mathbf{n}]_{\bullet} = (1, 0, 0)$ , on a :

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]_{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} \\ 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-57)$$

Les conditions aux limites en contraintes sur  $S_{lat}$  sont donc bien satisfaites par le champ  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  défini par Eq. (3-54). La solution du problème est donc définie par les champs de déplacements, de déformations et de contraintes dont les composantes sont données, respectivement, par Eq. (3-51), Eq. (3-55) et Eq. (3-54).

### 3.2.3 Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales

– Compatibilité de la solution avec l'hypothèse de comportement élastique

On rappelle (voir paragraphe 2.1) que la solution d'un problème d'élasticité linéaire est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement, en tout point  $\mathbf{x}$  de la structure considérée :

$$f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \sigma_{eq}(\mathbf{x}) - \sigma_0 < 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-58)$$

où  $\sigma_0 > 0$  est un paramètre matériau appelé contrainte limite (d'élasticité).

Dans le cas de la torsion, on a montré que les composantes du champ de contraintes dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  sont données par Eq. (3-54). On en déduit immédiatement que ce sont également celles de son déviateur dans la même base puisque, d'après Eq. (3-54),  $\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . On a donc  $\sigma_{eq} = \sqrt{3}(\mu r/L) |\alpha^d|$ , dont la valeur est maximale pour  $r = R$ . Il apparaît ainsi que la solution du problème de torsion d'une barre cylindrique de section circulaire établie au paragraphe 3.2.2 est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement si :

$$|\alpha^d| < \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L}{R} \frac{\sigma_0}{\mu} \quad (3-59)$$

On peut donner une autre interprétation de Eq. (3-58) en termes de moment de torsion limite  $\mathcal{M}_0$  (en  $N.m$ ) agissant sur  $S_L$ <sup>8</sup>, à partir duquel la barre n'a plus un comportement élastique. Pour cela, il faut tout d'abord donner une définition générale :

- à la *force résultante*  $\mathcal{F}$  associée à un champ de forces surfaciques  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  agissant sur une surface  $S$  donnée (généralisation de la notion scalaire vue au paragraphe 3.1.3),
- au *moment résultant*  $\mathcal{M}^A$ , par rapport à un quelconque point  $A$ , associé à ce même champ ( $P$  est un point quelconque de  $S$ ) :

$$\mathcal{F} = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) dS \quad ; \quad \mathcal{M}^A = \int_S \mathbf{AP}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x}) dS \quad (3-60)$$

Dans le cas de la torsion, le champ de forces surfaciques agissant sur  $S_L$  – d'équation  $z = L$  et telle que  $[\mathbf{n}]_\bullet = (0, 0, 1)$  dans le système de coordonnées cylindriques –, est tel que :

$$[\mathbf{F}]_\bullet = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \alpha^d \frac{r}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mu \alpha^d \frac{r}{L} \mathbf{e}_\theta \quad (3-61)$$

Pour calculer la force résultante et le moment résultant associés à ce champ de forces surfaciques, il faut tout d'abord réexprimer  $\mathbf{F}$  dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , auquel est associé la base fixe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  : dans Eq. (3-61), en effet, les composantes de  $\mathbf{F}$  sont données dans une base variable, soit  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Sachant que  $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2$ , on a ainsi :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \hat{F}_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec} \quad \hat{F}_1 = -\mu \alpha^d \frac{r}{L} \sin\theta \quad ; \quad \hat{F}_2 = \mu \alpha^d \frac{r}{L} \cos\theta \quad ; \quad \hat{F}_3 = 0 \quad (3-62)$$

De Eq. (3-62), et compte tenu de la définition générale de la force résultante Eq. (3-60)-1, on déduit immédiatement les composantes de  $\mathcal{F}$  sur  $S_L$  dans la base fixe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , soit :

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = -\frac{\mu \alpha^d}{L} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta = 0 \quad ; \quad \hat{\mathcal{F}}_2 = \frac{\mu \alpha^d}{L} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta dr d\theta = 0 \quad ; \quad \hat{\mathcal{F}}_3 = 0 \quad (3-63)$$

Retenant le barycentre de la surface  $S_L$  (de coordonnées  $(0, 0, L)$  dans la base fixe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ) comme point par rapport auquel le moment résultant est calculé, on obtient :

$$\mathbf{AP}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mu \alpha^d \frac{r^2}{L} \mathbf{e}_3 \quad (3-64)$$

<sup>8</sup> Compte tenu qu'aucune force surfacique n'agit sur  $S_{lat}$ , par définition des conditions aux limites en contraintes, la force résultante et le moment résultant sur cette même surface sont nuls.

### 3. RÉOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE STRUCTURES HOMOGENÈS EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

De Eq. (3-64), et compte tenu de la définition générale du moment résultant Eq. (3-60)-2, on déduit immédiatement les composantes de  $\mathcal{M}^A$  sur  $S_L$  dans la base fixe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  :

$$\hat{\mathcal{M}}_1^A = \hat{\mathcal{M}}_2^A = 0 ; \quad \hat{\mathcal{M}}_3^A = \frac{\mu \alpha^d}{L} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta = \mu \alpha^d \frac{\pi R^4}{2L} \quad (3-65)$$

La seule composante non nulle de  $\mathcal{M}^A$ , soit  $\hat{\mathcal{M}}_3^A$  est très souvent appelée *moment de torsion* (autour le l'axe défini par  $\mathbf{e}_3$ ). Compte tenu de Eq. (3-59), le moment de torsion admet une borne supérieure :

$$\left| \hat{\mathcal{M}}_3^A \right| < \frac{\pi}{2\sqrt{3}} R^3 \sigma_0 \quad (3-66)$$

Dans Eq. (3-66), le terme de droite de l'inégalité est le moment de torsion limite  $\mathcal{M}_0$  (en  $N.m$ ), à partir duquel la barre n'a plus un comportement élastique.

*Application numérique :*

Pour un acier « ordinaire »,  $\sigma_0 = 200 MPa$ . Pour une barre d'acier « ordinaire » telle que  $R = 5 mm$  et  $L = 100 mm$  et soumise à torsion, le moment de torsion limite vaut donc environ  $225 kN.m$ . Tant que le moment de torsion appliqué à la barre n'atteint pas cette valeur, le comportement de son matériau constitutif (l'acier « ordinaire ») reste élastique.

– Compatibilité de la solution avec l'hypothèse des déformations infinitésimales

On rappelle (voir paragraphe 2.1) que la solution d'un problème d'élasticité linéaire est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement, en tout point  $\mathbf{x}$  de la structure considérée :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\| \ll 1 \text{ et } \|\mathbf{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))\| \ll 1 \quad (3-67)$$

Dans le cas de la torsion, on a montré que les composantes du champ de déformations dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  étaient données par Eq. (3-55). On en déduit aussitôt que :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \alpha^d \right| \frac{r}{L} \quad (3-68)$$

dont la valeur est maximale pour  $r = R$ . On peut ainsi reformuler la condition Eq. (3-67)-1 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \alpha^d \right| \frac{R}{L} \ll 1 \quad (3-69)$$

À partir de Eq. (3-53), on peut également donner les composantes de  $\mathbf{asym}(\mathbf{grad} \mathbf{U}(\mathbf{x}))$ , qu'on notera désormais plus simplement  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$  :

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^d \frac{z}{L} & 0 \\ \alpha^d \frac{z}{L} & 0 & \alpha^d \frac{r}{2L} \\ 0 & -\alpha^d \frac{r}{2L} & 0 \end{pmatrix} \quad (3-70)$$

d'où l'on déduit aussitôt que :

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \alpha^d \right| \frac{(4r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \quad (3-71)$$

dont la valeur est maximale pour  $r = R$  et  $z = L$ . On peut ainsi reformuler la condition Eq. (3-67)-2 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \alpha^d \right| \frac{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \ll 1 \quad (3-72)$$

Il apparaît ainsi que que la solution du problème de torsion est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement si :

$$\left| \alpha^d \right| \ll \sqrt{2} \frac{L}{R} \min \left\{ 1, \frac{R}{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \sqrt{2} \frac{L}{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-73)$$

Comme on l'a signalé dans le paragraphe 1.2.5, il est généralement admis que, quelle que soit la grandeur positive  $Y$ , celle-ci est « très petite » devant une valeur donnée  $Y_0$  (c'est-à-dire  $Y/Y_0 \ll 1$ ) si  $Y/Y_0 \leq 10^{-1}$ . On peut ainsi préciser les conditions nécessaires et suffisantes à la compatibilité de la solution du problème de torsion d'une barre de section circulaire avec l'hypothèse des déformations infinitésimales :

$$|\alpha^d| \leq 10^{-1} \sqrt{2} \frac{L}{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-74)$$

On peut, là encore, réexprimer Eq. (3-74) en termes de moment de torsion résultant  $\mathcal{M}_3^A$ , voir Eq. (3-65) :

$$|\mathcal{M}_3^A| \leq 10^{-1} \mu \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{R^4}{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-75)$$

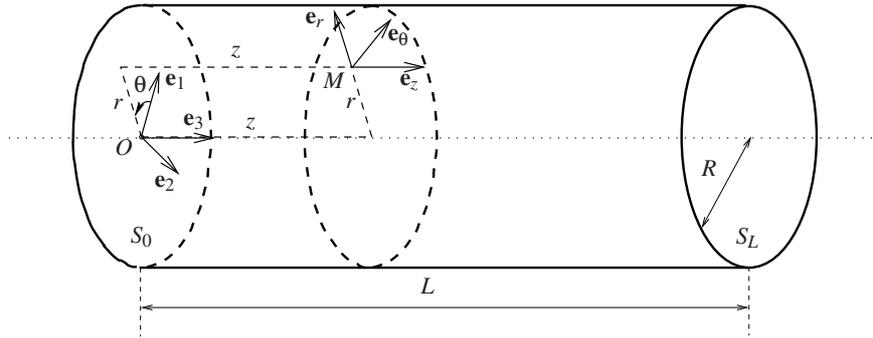
*Application numérique :*

Pour un acier « ordinaire »,  $E = 200$  GPa et  $\nu = 0,3$  d'où  $\mu = E/(2(1 + \nu)) \approx 80$  GPa. Pour une barre d'acier « ordinaire » telle que  $R = 5$  mm et  $L = 100$  mm et soumise à torsion, le moment de torsion maximal compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales vaut donc environ 7500 kN.m. Cette valeur est environ trente fois plus grande que celle du moment de torsion limite  $\mathcal{M}_0$ , ce qui signifie qu'elle n'est jamais atteinte en pratique : l'hypothèse des déformations infinitésimales est donc bien pertinente.

**Principaux résultats du paragraphe 3.2**

En élasticité linéaire isotrope, la solution du problème de statique d'une barre cylindrique (voir la Figure ci-dessous pour les données géométriques et le système de coordonnées cylindriques retenu) soumise à torsion, c'est-à-dire avec les conditions aux limites suivantes :

- Conditions aux limites en déplacements sur  $S_L$ , soit  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \alpha^d r \mathbf{e}_\theta$  où  $\alpha^d$  est une constante,
- Conditions aux limites en déplacements sur  $S_0$ , soit  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ,
- Conditions aux limites en contraintes sur  $S_{lat}$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ .



est donnée par (en supposant le champ de forces massiques  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x})$  nul en tout point de la barre) :

$$[U]_{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha^d}{L} r z \\ 0 \end{pmatrix}; [\varepsilon]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^d \frac{r}{2L} \\ 0 & \alpha^d \frac{r}{2L} & 0 \end{pmatrix}; [\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} \\ 0 & \mu \alpha^d \frac{r}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette solution est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement si ( $\mu$  est le second coefficient de Lamé ou module de cisaillement) :

$$|\alpha^d| < \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L}{R} \frac{\sigma_0}{\mu} \text{ où } \sigma_0 \text{ est la contrainte limite (paramètre-matériau)}$$

Cette solution est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement si (en admettant que  $10^{-1} \ll 1$ ) :

$$|\alpha^d| \leq 10^{-1} \sqrt{2} \frac{L}{(4R^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

### 3.3 Barre cylindrique homogène en flexion pure

#### 3.3.1 Données du problème

On considère le domaine solide  $\mathcal{D}$  constitué par une barre cylindrique de section rectangulaire (largeur  $b$ , épaisseur  $h$ ) et de longueur  $L$  (voir Fig. 3.3). Les points de cette barre sont repérés dans un système de coordonnées cartésiennes, l'origine  $O$  étant au barycentre de la surface inférieure ( $S_0$  sur la Fig. 3.3). Quel que soit  $M \in \mathcal{D}$ , on a ainsi :  $\mathbf{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ . Dans ce système de coordonnées, la configuration  $\Omega$  de la barre est défini par :

$$\Omega = [0, L] \times [-h/2, h/2] \times [-b/2, b/2] \subset \mathbb{R}^3 \quad (3-76)$$

La frontière  $\partial\mathcal{D}$  de la barre est constituée par six surfaces planes (voir Fig. 3.3) :

$$\partial\mathcal{D} = S_0 \cup S_L \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \quad (3-77)$$

À chacune de ces surfaces peut être associée une partie de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Par exemple, sachant que,

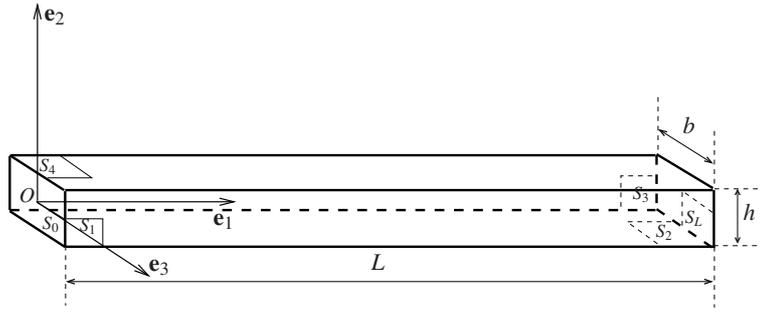


FIG. 3.3 – Géométrie de la barre : largeur  $b$ , épaisseur  $h$ , longueur  $L$ . Tout point  $M$  de la barre est repéré dans un système de coordonnées cartésiennes, l'origine étant au barycentre de la surface  $S_0$ , soit  $\mathbf{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  avec  $x_1 \in [0, L]$ ,  $x_2 \in [-h/2, h/2]$ ,  $x_3 \in [-b/2, b/2]$ . La frontière de la barre est constituée par les six surfaces planes  $S_0, S_L, S_1, S_2, S_3, S_4$ .

dans le système de coordonnées cartésiennes retenu, la surface  $S_0$  est définie par l'ensemble des points tels que  $x_3 = 0$ , la représentation  $\partial\Omega_0$  de cette surface est :

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^{e_1} \times \partial\Omega_0^{e_2} \times \partial\Omega_0^{e_3} \quad \text{avec} \quad \partial\Omega_0^{e_1} = [-h/2, h/2]; \quad \partial\Omega_0^{e_2} = [-b/2, b/2]; \quad \partial\Omega_0^{e_3} = \{0\} \quad (3-78)$$

Dans le souci de simplifier l'écriture des équations, on ne distinguera plus, dans la suite de ce paragraphe, les surfaces de leur représentation. On écrira ainsi :

$$\partial\Omega = S_0 \cup S_L \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \quad (3-79)$$

Les autres données du problème sont :

- $\mu > 0$ ;  $\lambda > -(2/3)\mu$ ;  $\rho > 0$ .
- $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = 0$  dans tout  $\Omega$ , ce qui revient à négliger les effets de la gravité (terrestre, par exemple). Compte tenu que le champ de forces massiques est supposé négligeable, la masse volumique est en fait une donnée inutile.
- les conditions aux limites :
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_L$ . Plus précisément, pour tout  $\mathbf{x}$  appartenant à  $S_L$ , on suppose que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = F^d(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$  avec  $F^d = \beta^d x_2$ . Dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  considérée, les composantes de la normale unitaire extérieure à  $S_L$  sont  $[n]_\bullet = (1, 0, 0)$ ,
  - Conditions aux limites mixtes sur  $S_0$ , soit :  $U_1 = 0$  et  $\sigma_{2j}n_j = \sigma_{3j}n_j = 0$  avec  $[n]_\bullet = (-1, 0, 0)$ ,

- Conditions aux limites en contraintes sur  $S_1$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, 0, 1)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_2$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, -1, 0)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_3$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, 0, -1)$ ,
  - Conditions aux limites en contraintes sur  $S_4$ , soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $[n]_{\bullet} = (0, 1, 0)$ .
- On peut remarquer que la condition aux limites en déplacement sur  $S_0$  interdit toute translation de la barre suivant la direction  $\mathbf{e}_1$ .

### 3.3.2 Résolution du problème

La résolution du problème (méthode des contraintes) fait l'objet d'un TD.

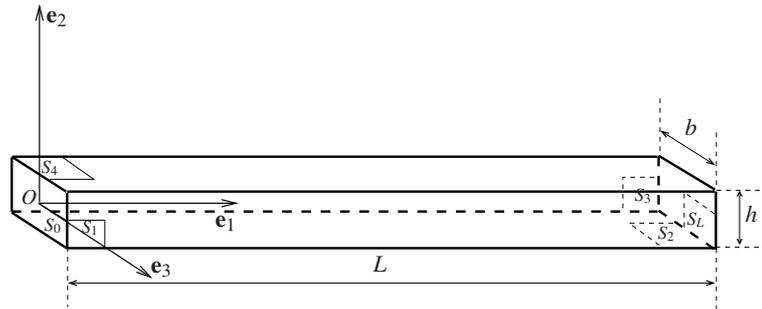
### 3.3.3 Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales

L'établissement des conditions de compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales fait l'objet d'un TD (cf. ci-dessus).

**Principaux résultats du paragraphe 3.3**

En élasticité linéaire isotrope, la solution du problème de statique d'une barre cylindrique (voir la Figure ci-dessous pour les données géométriques et le système de coordonnées cartésiennes retenu) soumise à flexion pure, c'est-à-dire avec les conditions aux limites suivantes :

- Conditions aux limites en contraintes sur  $S_L$ , soit  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \beta^d x_2 \mathbf{e}_1$ ,
- Conditions aux limites mixtes sur  $S_0$ , soit  $U_1 = 0$  et  $\sigma_{2j} n_j = \sigma_{3j} n_j = 0$ ,
- Conditions aux limites en contraintes sur  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  soit  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ .



est donnée par (en supposant le champ de forces massiques  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x})$  nul en tout point de la barre) :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \beta^d x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \beta^d x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \beta^d x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \beta^d x_2 \end{pmatrix}$$

$$[U]_{\bullet} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \beta^d x_1 x_2 \\ -\frac{1}{E} \beta^d \left( \frac{x_1^2}{2} + \nu \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \right) + \omega_{23} x_3 + B \\ -\frac{\nu}{E} \beta^d x_2 x_3 - \omega_{23} x_2 + C \end{pmatrix}$$

où  $\omega_{23}$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes indéterminées associées à un mouvement de solide rigide.

Cette solution est compatible avec l'hypothèse de comportement élastique si et seulement si :

$$|\beta^d| < \frac{2}{h} \sigma_0 \text{ où } \sigma_0 \text{ est la contrainte limite (paramètre-matériau)}$$

Cette solution est compatible avec l'hypothèse des déformations infinitésimales si et seulement si (dans le cas où  $\omega_{23} = 0$  et en admettant que  $10^{-1} \ll 1$ ) :

$$|\beta^d| \leq 10^{-1} E \inf \left\{ \frac{2}{h(1+2\nu^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\sqrt{2}}{(4L^2 + \nu^2 b^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

### 3.4 Élasticité plane

La géométrie de certaines structures permet de formuler des hypothèses simplificatrices sur le champ de déformations ou le champ de contraintes qui correspondent à ce que l'on appelle des problèmes d'*élasticité plane*. Ces problèmes peuvent être résolus soit par la méthode des déplacements, soit par la méthode des contraintes. Les équations de Navier et de Beltrami sont cependant modifiées par rapport à Eq. (2-35) et Eq. (2-67) du fait des hypothèses faites, soit sur le champ de déformations, soit sur le champ des contraintes. Ces nouvelles expressions des équations de Navier et de Beltrami ne sont pas présentées dans ce paragraphe, où l'on se limite à l'énoncé de l'hypothèse des *déformations planes* (resp. l'hypothèse des *contraintes planes*) et sa conséquence sur le champ des contraintes (resp. sur le champ des déformations).

#### 3.4.1 Déformations planes

Soit un plan  $\mathcal{P}$  défini par l'un de ses points  $O$  et deux vecteurs non colinéaires  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . Les déformations sont dites dans le plan  $\mathcal{P}$  – ou, plus simplement, *planes* – si et seulement si, dans toute base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et en tout point du plan  $\mathcal{P}$ , les composantes du tenseur des déformations infinitésimales sont telles que :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-80)$$

D'après la définition Eq. (3-80), le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspondant à un état de déformations planes peut ainsi être vu comme un tenseur de  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)_s$ . Il est cependant important de souligner que le tenseur des contraintes n'est généralement pas, quant à lui, un tenseur de  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)_s$ . La loi de Hooke, voir Eq. (2-3), donne en effet, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  considérée :

$$\sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \neq 0 \quad \text{si} \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \neq 0 \quad (3-81)$$

Compte tenu que  $(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_{11} = E((1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$  et  $(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_{22} = E((1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$ , Eq. (3-81) peut encore s'écrire :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3-82)$$

En résumé, l'état de contraintes associé à un état de déformations planes n'est généralement pas plan, dont les composantes dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sont :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix} \quad (3-83)$$

#### 3.4.2 Contraintes planes

Soit un plan  $\mathcal{P}$  défini par l'un de ses points  $O$  et deux vecteurs non colinéaires  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . Les contraintes sont dites dans le plan  $\mathcal{P}$  – ou, plus simplement, *planes* – si et seulement si, dans toute base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et en tout point du plan  $\mathcal{P}$ , les composantes du tenseur des contraintes sont telles que :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-84)$$

D'après la définition Eq. (3-84), le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  correspondant à un état de contraintes planes peut ainsi être vu comme un tenseur de  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)_s$ . Il est cependant important de souligner que le tenseur

des déformations n'est généralement pas, quant à lui, un tenseur de  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)_s$ . L'inverse de la loi de Hooke, voir Eq. (2-8), donne en effet, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  considérée :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0 \quad \text{si} \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} \neq 0 \quad (3-85)$$

ce que l'on peut encore écrire, compte tenu que, toujours d'après la loi de Hooke,  $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu\sigma_{22}$  et  $E\varepsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu\sigma_{11}$  :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (3-86)$$

En résumé, l'état de déformations associé à un état de contraintes planes n'est généralement pas plan, dont les composantes dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sont :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{pmatrix} \quad (3-87)$$

3. *RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE STRUCTURES HOMOGENES EN  
ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE*

---

---

## Chapitre 4

# Structures hétérogènes ; comportements autres que l'élasticité linéaire isotrope

---

### Remarque préliminaire :

Bien qu'ils puissent jouer un rôle non négligeable, notamment dans le cas d'un comportement non élastique, les effets thermiques ne sont pas pris en considération dans ce Chapitre. En d'autres termes, et dans la continuité des Chapitres 2 et 3, on s'y limite aux seuls problèmes mécaniques posés par des structures hétérogènes ou des comportements autres que l'élasticité linéaire isotrope.

De plus, ces problèmes sont abordés séparément. Ainsi, dans le paragraphe 4.1, seul le problème de l'hétérogénéité d'une structure est traité, le comportement des deux matériaux constitutifs de la structure étant supposé, par ailleurs, élastique linéaire isotrope. Enfin, seuls des éléments de solution sont apportés aux problèmes de l'élasticité non linéaire (paragraphe 4.3) et du comportement non élastique (paragraphe 4.4) : à elle seule, la résolution complète de l'un ou l'autre de ces problèmes nécessiterait un autre cours.

En bref : les quatre courts paragraphes de ce Chapitre sont clairement insuffisants pour aborder le problème d'une structure hétérogène, non élastique et anisotrope.

---

## 4.1 Structures hétérogènes

Une structure est dite *hétérogène* si elle est constituée d'au moins deux matériaux distincts. On donne un exemple d'une telle structure sur la Fig. 4.1. La surface  $S$ , souvent appelée *interface*, sépare la structure  $\Omega$  en deux sous-structures,  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$ , dont les matériaux sont différents, soit  $E^1 \neq E^2$  et  $\nu^1 \neq \nu^2$ <sup>1</sup>. La normale unitaire à l'interface, arbitrairement orientée de  $\Omega^1$  vers  $\Omega^2$  sur la Fig. 4.1, est notée  $\mathbf{n}$ . Dans toute la suite de ce paragraphe, la discontinuité, encore appelée *saut*, du champ d'une quelconque grandeur physique  $\phi$  sur  $S$  est notée  $[\phi] = \phi^2 - \phi^1$ . Ainsi a-t-on  $[E] = E^2 - E^1$  et  $[\nu] = \nu^2 - \nu^1$ , ou encore, en utilisant le tenseur des rigidités défini par Eq. (2-9),  $[\mathbf{C}] = \mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^1$ . De la même façon, notant  $(\mathbf{U}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}))$  (resp.  $(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}))$ ), la solution continue du problème dans  $\Omega^1 - S$  (resp. dans  $\Omega^2 - S$ ), on a :

$$[\mathbf{U}] = \mathbf{U}^2 - \mathbf{U}^1 \quad ; \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad ; \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (4-1)$$

---

<sup>1</sup> Les masses volumiques de ces deux matériaux peuvent également être différentes. Cette différence doit impérativement être prise en compte lorsque l'on cherche une solution non statique au problème, ce qui n'est pas le cas dans ce paragraphe.

La solution continue du problème dans  $\Omega^1 - S$  et dans  $\Omega^2 - S$  est régie par les équations établies pour les structures thermo-élastiques homogènes, voir Eq. (2-1). Le problème se réduit donc à l'écriture des équations régissant les sauts définis dans Eq. (4-1).

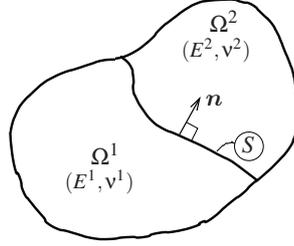


FIG. 4.1 – Exemple de structure hétérogène. L'interface  $S$  sépare la structure  $\Omega$  en deux sous-structures homogènes  $\Omega^1 - S$  et  $\Omega^2 - S$  de modules d'Young et de coefficients de Poisson différents. La normale unitaire à l'interface est arbitrairement orientée de  $\Omega^1$  vers  $\Omega^2$ . La solution du problème est continue sur  $\Omega^1 - S$  et sur  $\Omega^2 - S$  mais *discontinue* sur  $S$ .

Une interface est dite *parfaite* si le saut du champ de déplacements  $y$  est nul. On se limite au cas de ces interfaces parfaites dans la suite de ce paragraphe, c'est-à-dire :

$$[U] = 0 \quad \text{sur tout } S \quad (4-2)$$

Le gradient du champ de déplacements, en revanche, présente un saut sur  $S$ . En conséquence (voir Eq. (1-10)), le champ des déformations infinitésimales présente un saut sur  $S$ , et, par application de la loi de Hooke (voir Eq. (2-3)), celui des contraintes également. Par définition, le saut des contraintes vaut :

$$[\sigma] = C^2 : \epsilon^2 - C^1 : \epsilon^1 \quad \text{sur tout } S \quad (4-3)$$

ce que l'on peut encore écrire, d'après Eq. (4-1)-2 :

$$[\sigma] = C^2 : [\epsilon] - [C] : \epsilon^1 \quad \text{sur tout } S \quad (4-4)$$

Par ailleurs, on peut montrer que les équations d'équilibre local en présence d'un saut des contraintes s'écrivent :

$$[\sigma] \cdot n = 0 \quad \text{sur tout } S \quad (4-5)$$

et que le saut des déformations a nécessairement la forme suivante <sup>2</sup> :

$$[\epsilon] = \text{sym}(g \otimes n) \quad \text{sur tout } S \quad (4-6)$$

où  $g(x)$  est un champ vectoriel à déterminer sur tout  $S$ . L'équation régissant ce champ est obtenue en combinant Eq. (4-4), Eq. (4-5) et Eq. (4-6), ce qui donne :

$$(n \cdot C^2 \cdot n) \cdot g = -n \cdot [C] \cdot \epsilon^1 \quad \text{sur tout } S \quad (4-7)$$

En résumé, les sauts sur une interface parfaite existant au sein d'une structure thermo-élastique linéaire isotrope sont définis par :

$$[U] = 0 ; [\epsilon] = \text{sym}(g \otimes n) ; [\sigma] = C^2 : (\text{sym}(g \otimes n)) - [C] : \epsilon^1 \quad (4-8)$$

où le champ vectoriel  $g(x)$  est solution de Eq. (4-7).

<sup>2</sup> Ces résultats sont dus à J. Hadamard. Il les a établis au tout début du 20<sup>ème</sup> siècle. On les trouve notamment dans son livre intitulé « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique » publié en 1903 chez Hermann (Paris).

## 4.2 Élasticité linéaire anisotrope

D'un point de vue pratique ou expérimental, on peut dire d'un matériau qu'il est *anisotrope* dès lors que la procédure d'identification de l'un de ses paramètres-matériau mène à des résultats qui varient en fonction de la *direction* des sollicitations qui lui sont appliquées (toutes les autres caractéristiques de ces sollicitations étant égales par ailleurs)<sup>3</sup>.

Du point de vue de la modélisation, et de façon très générale, cette caractéristique expérimentale peut bien être prise en compte si l'on admet la possibilité que l'état thermodynamique local du matériau soit caractérisé, entre autres variables d'état, par l'ensemble  $\mathbb{E}^N$  de toutes les *directions matérielles*  $\mathbf{N}$ <sup>4</sup> :

$$\mathbb{E}^N = \{ \mathbf{N} \triangleq \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \text{ où } \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (4-9)$$

En clair, et en toute généralité,  $\mathbb{E}^N$  devient donc lui-même une variable d'état, dite *interne*, en l'occurrence. Ce qui ne va sans poser de problèmes puisque  $\mathbb{E}^N$  est un ensemble infini...

En fait, il est très largement suffisant, pour obtenir un modèle de comportement réaliste d'un matériau anisotrope donné, de ne retenir que « quelques » éléments de  $\mathbb{E}^N$  comme variables d'état caractéristiques de son anisotropie. Et c'est l'observation de la microstructure du matériau et des « directions particulières » qu'elle présente qui permet de sélectionner ces « quelques » éléments.

À titre d'exemple, et pour en venir à l'élasticité linéaire anisotrope, on considère un matériau composite 'matrice + fibres longues' dit « unidirectionnel », au sens que toutes ses fibres ont la même direction matérielle  $\mathbf{N}$  (le bambou est un très bon exemple de ce type de matériau). Pour décrire son comportement mécanique, on retient les variables d'état suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} ; \mathbf{N} \quad (4-10)$$

Le principe d'objectivité requiert alors que le potentiel d'état d'énergie libre massique  $\psi$  soit une fonction mathématiquement isotrope de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de  $\mathbf{N}$ , c'est-à-dire qu'elle soit une fonction :

- des trois invariants de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,
- des trois invariants de  $\mathbf{N}$ ,
- des trois invariants mixtes de  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N})$ , ces derniers étant définis comme suit

$$I_1^{\varepsilon N} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) ; I_2^{\varepsilon N} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) ; I_3^{\varepsilon N} \triangleq \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) \quad (4-11)$$

Il convient toutefois de remarquer que, de par le caractère unitaire de  $\mathbf{N}$ , ses trois invariants sont toujours égaux à 1. De plus, seuls deux des trois invariants mixtes sont indépendants l'un de l'autre puisque, sachant que  $\mathbf{N} \triangleq \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  et  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  :

$$I_3^{\varepsilon N} = \boldsymbol{\varepsilon} : ((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) = \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = I_1^{\varepsilon N} \quad (4-12)$$

Puisque l'on cherche à construire un modèle d'élasticité anisotrope *linéaire*,  $\psi$ , comme dans le cas isotrope, doit être une fonction *quadratique* de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En l'occurrence, il n'y a que cinq invariants ou combinaisons d'invariants vérifiant cette condition, soit :  $(I_1^\varepsilon)^2, (I_1^{\varepsilon N})^2, I_2^\varepsilon, I_2^{\varepsilon N}, I_1^\varepsilon I_1^{\varepsilon N}$ , ce qui donne l'expression suivante pour  $\psi$  :

$$\psi(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_1^{\varepsilon N}, I_2^{\varepsilon N}) = \frac{1}{\rho_0} (\beta_1 (I_1^\varepsilon)^2 + \beta_2 (I_1^{\varepsilon N})^2 + \beta_3 I_2^\varepsilon + \beta_4 I_2^{\varepsilon N} + \beta_5 I_1^\varepsilon I_1^{\varepsilon N}) \quad (4-13)$$

où les  $\beta_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  sont les paramètres-matériau (en *MPa*) caractéristiques de cette anisotropie particulière appelée *isotropie transverse*. Le modèle de comportement d'un matériau élastique linéaire isotrope transverse est finalement donné par (avec, là encore, l'approximation  $\rho = \rho_0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\beta_1 I_1^\varepsilon \mathbf{G} + 2\beta_2 I_1^{\varepsilon N} \mathbf{N} + 2\beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} + 2\beta_4 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})_s + \beta_5 (I_1^{\varepsilon N} \mathbf{G} + I_1^\varepsilon \mathbf{N}) \quad (4-14)$$

<sup>3</sup> Il est bien souvent nécessaire, quand on parle d'anisotropie, de préciser les phénomènes physiques qu'elle concerne. Il est ainsi possible, au moins formellement, d'avoir un matériau élastiquement anisotrope (son module d'young n'a pas la même valeur suivant toutes les directions de l'espace) et thermiquement isotrope.

<sup>4</sup> Si l'on définit cet ensemble par  $\mathbb{E}^N = \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \}$ , on se heurte au problème que deux éléments « opposés » de cet ensemble,  $\mathbf{n}$  et  $-\mathbf{n}$ , caractérisent une *même* direction matérielle.

où  $2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})_s = (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) + (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})^T$ . Cette expression peut se récrire  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{N}) : \boldsymbol{\varepsilon}$ , où le tenseur (d'ordre quatre) des rigidités  $\mathbf{C}(\mathbf{N})$  est défini par :

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}) = 2\beta_1(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) + 2\beta_2(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + \beta_3(\mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G}) + \beta_4(\mathbf{G} \boxtimes \mathbf{N})_s + 2\beta_5(\mathbf{G} \otimes \mathbf{N})_s \quad (4-15)$$

avec, dans une base quelconque :

$$((\mathbf{G} \boxtimes \mathbf{N})_s)_{ijkl} = \frac{1}{2}((\mathbf{G} \boxtimes \mathbf{N})_{ijkl} + (\mathbf{N} \boxtimes \mathbf{G})_{ijkl}) = \frac{1}{2}(G_{ik}N_{jl} + G_{il}N_{jk} + N_{ik}G_{jl} + N_{il}G_{jk}) \quad (4-16)$$

et

$$((\mathbf{G} \otimes \mathbf{N})_s)_{ijkl} = \frac{1}{2}((\mathbf{G} \otimes \mathbf{N})_{ijkl} + (\mathbf{N} \otimes \mathbf{G})_{ijkl}) = \frac{1}{2}(G_{ij}N_{kl} + N_{ij}G_{kl}) \quad (4-17)$$

Dans la plupart des ouvrages de mécanique où le problème de l'anisotropie est abordé, seules les composantes de l'inverse de ce tenseur des rigidités dans une base orthonormée particulière – définie par  $\mathbf{n}$  (ou  $-\mathbf{n}$ ) et deux autres vecteurs unitaires orthogonaux à  $\mathbf{n}$  (ou  $-\mathbf{n}$ ), caractérisant un plan d'*isotropie transverse* – sont données. Cette expression particulière de  $\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{N})$  fait intervenir cinq paramètres-matériau, liés aux  $\beta_i$  mais plus faciles à interpréter qu'eux, que l'on appelle

- module d'Young et coefficient de Poisson longitudinaux (identifiables par un essai de traction suivant la direction  $\mathbf{N}$ ),
- module d'Young et coefficient de Poisson transverses (essai de traction suivant une quelconque direction orthogonale à  $\mathbf{N}$ ),
- module de cisaillement (essai de cisaillement dans un plan quelconque).

La démarche précédente peut être appliquée à des matériaux dont la microstructure présente deux, trois, ... « directions particulières », c'est-à-dire à d'autre type d'anisotropie.

### 4.3 Élasticité non linéaire isotrope

La loi de Hooke est une relation linéaire entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur des déformations infinitésimales, ou *linéarisées*,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Elle ne peut donc pas être utilisée pour décrire le comportement de matériaux isotropes susceptibles de subir des « grandes » déformations élastiques puisqu'alors,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  cesse d'être une approximation réaliste du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{Y}$ , voir Eq. (1-2).

Pour de tels matériaux, dont les élastomères sont un très bon exemple, il convient donc d'utiliser une relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations de Green-Lagrange ou un autre tenseur de déformations <sup>5</sup>. On trouve de nombreux exemples d'une telle relation dans la littérature scientifique qui, dans leur grande majorité, sont *non linéaires*. Plutôt que d'en citer arbitrairement quelques uns, on préfère ici donner la méthodologie qui permet d'établir ces relations, à savoir :

- Choix d'un tenseur des déformations  $\mathbf{X}$ ,
- Construction d'un potentiel d'état d'énergie libre massique en tant que fonction mathématiquement isotrope de  $\mathbf{X}$ , c'est-à-dire en tant que fonction des trois invariants fondamentaux de  $\mathbf{X}$  :

$$\psi(\text{Tr}(\mathbf{X}), \text{Tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}), \text{Tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{X})) \quad (4-18)$$

- Définition du tenseur des contraintes compatible avec la définition générale du comportement élastique, c'est-à-dire avec l'hypothèse d'une dissipation intrinsèque nulle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} \quad (4-19)$$

Il est à noter que, s'agissant de « grandes » déformations, l'approximation faite sur la masse volumique pour obtenir la loi de Hooke n'est, en général <sup>6</sup>, plus du tout légitime : la masse volumique actuel du

<sup>5</sup> Le tenseur de Green-Lagrange, en effet, n'est qu'un tenseur de « grandes » déformations parmi de nombreux autres. Tous ces tenseurs de « grandes » déformations sont cependant équivalents, au sens qu'ils contiennent la même information cinématique. C'est essentiellement pour des raisons de commodité de calculs que, selon les cas, l'un ou l'autre de ces tenseurs est retenu.

<sup>6</sup> Pour certains matériaux, dits quasi-*incompressibles*, la masse volumique peut raisonnablement être considérée comme constante, y compris dans le cas des « grandes » déformations.

matériau,  $\rho$ , est susceptible de prendre des valeurs très différentes de  $\rho_0$ , masse volumique initiale. Il convient également de souligner qu'avec de tels modèles de comportement élastique non linéaire isotrope, la question de la pertinence de la solution avec l'hypothèse des déformations infinitésimales, voir **Q3**, paragraphe 2.1, n'a évidemment plus de raison d'être.

## 4.4 Comportements non élastiques

Dans les Chapitres 1 et 2, on a insisté sur la nécessité qu'il y a, pour un ingénieur, de tester la compatibilité de la solution d'un problème de structure linéaire isotrope avec l'hypothèse de comportement élastique (question **Q2**; voir, par exemple, Eq. (1-72)). La fonction limite d'élasticité de Von Mises a ainsi été introduite :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \text{ avec } \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-20)$$

qui a permis de préciser les états de contraintes compatibles avec l'hypothèse de comportement élastique, à savoir, en un quelconque point de la structure considérée :

$$\text{tant que } \boldsymbol{\sigma} \text{ est tel que } f(\boldsymbol{\sigma}) < 0, \text{ le comportement du matériau est élastique} \quad (4-21)$$

Par simple contraposition de cette proposition, on obtient :

$$\text{dès que } \boldsymbol{\sigma} \text{ est tel que } f(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0, \text{ le comportement du matériau n'est plus élastique} \quad (4-22)$$

Pour de tels états de contraintes, la loi de Hooke n'est donc plus applicable. En d'autres termes, il faut alors modifier l'énoncé mathématique du problème de structure élastique linéaire isotrope, voir Eq. (2-1), c'est-à-dire y intégrer les équations constitutives d'un modèle suffisamment général pour décrire de façon réaliste le comportement mécanique du matériau quel que soit l'état de contraintes.

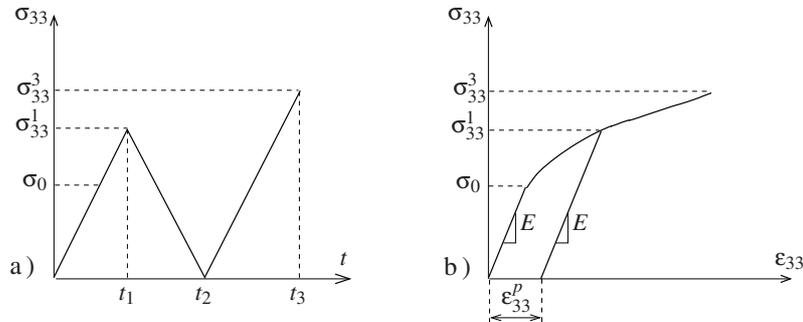


FIG. 4.2 – Essai de traction simple, avec déchargement puis rechargement, sur un matériau à comportement élastoplastique. a) : chargement appliqué, en terme de contrainte axiale  $\sigma_{33}$  ;  $\sigma_{33}^1$  (resp.  $\sigma_{33}^3$ ) est la contrainte appliquée à l'instant  $t_1$  (resp. à l'instant  $t_3$ ) ;  $\sigma_0$  est la contrainte limite d'élasticité initiale, ou *contrainte seuil initial*, c'est-à-dire un paramètre-matériau. b) : courbe-réponse enregistrée  $\sigma_{33}(\epsilon_{33})$ , où  $\epsilon_{33}$  est la déformation axiale mesurée ; par rapport à l'élasticité, la différence essentielle est l'existence, à l'instant  $t_2$  où la contrainte appliquée est nulle, d'une déformation  $\epsilon_{33}^p \neq 0$ , dite déformation *plastique*.

Une illustration d'un comportement non élastique fréquemment observé, appelé comportement *élastoplastique*, est donnée par la Figure 4.2. L'essai est celui de traction simple, c'est-à-dire qu'il correspond à l'état de contrainte uniaxiale et uniforme défini, dans une base donnée, par Eq. (3-9). En revanche, l'état de déformation  $\epsilon_{33}$  n'est généralement <sup>7</sup> pas celui donné par Eq. (3-12), lequel a été obtenu grâce à la loi

<sup>7</sup> L'état de déformation  $\epsilon_{33}$  n'est celui donné par Eq. (3-12) qu'entre l'instant initial et l'instant où la contrainte limite d'élasticité initiale  $\sigma_0$  est atteinte pour la première fois.

d'élasticité linéaire isotrope. On observe ainsi, à l'instant  $t_2$  où la contrainte appliquée est nulle, l'existence d'une déformation  $\epsilon_{33}^p \neq 0$ , dite déformation *plastique*. On constate également, sur la Figure 4.2-b, que la contrainte  $\sigma_{33}$  ne peut plus être considérée comme une fonction de  $\epsilon_{33}$  : à une valeur de  $\epsilon_{33}$  donnée peuvent être associées deux valeurs de contrainte  $\sigma_{33}$  différentes.

On trouve plusieurs exemples de modèle d'élastoplasticité dans la littérature scientifique. En plus de la variable d'état  $\boldsymbol{\epsilon}$ , ils font tous intervenir une ou plusieurs autres variables d'état, dites variables d'état *internes*. Alors qu'il n'est plus une fonction du tenseur des déformations infinitésimales, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  peut ainsi être considéré comme une fonction de  $\boldsymbol{\epsilon}$  et de ces nouvelles variables.

Plutôt que de détailler arbitrairement l'un de ces modèles d'élastoplasticité, on préfère ici donner la méthodologie qui permet de les établir tous, à savoir :

- Prise en compte de la variable d'état interne caractérisant les déformations plastiques, c'est-à-dire du tenseur, symétrique, des déformations plastiques  $\boldsymbol{\epsilon}^p$ . À cette nouvelle variable d'état<sup>8</sup> est associée une hypothèse physiquement pertinente, dite hypothèse de *partition des déformations*, qui stipule que :

$$\forall (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p), \boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p \text{ est tel que } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (4-23)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  est appelé tenseur des *déformations élastiques* et où  $\mathbf{C}$  est le tenseur des rigidités de Hooke, voir Eq. (2-9),

- Construction d'un potentiel d'état d'énergie libre massique en tant que fonction mathématiquement isotrope de  $\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p$ , c'est-à-dire, en toute généralité, en tant que fonction des trois invariants fondamentaux de  $\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p$ . En pratique, dans la plupart des modèles d'élastoplasticité en « petites » déformations, seuls les deux premiers invariants sont considérés :

$$\Psi(\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p), \text{Tr}((\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p))) \quad (4-24)$$

- Expression de la dissipation intrinsèque  $\phi_{int}$  (voir Eq. (1-29) dans le cas élastique), laquelle est *strictement positive* en élastoplasticité. On montre que la forme générale de  $\phi_{int}$  est :

$$\phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (4-25)$$

- Expression du tenseur des contraintes en tant que condition suffisante à la non négativité de la dissipation intrinsèque Eq. (4-25), c'est-à-dire (avec, là encore, l'approximation  $\rho = \rho_0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (4-26)$$

- Construction d'une *équation d'évolution* thermodynamiquement admissible pour la variable interne  $\boldsymbol{\epsilon}^p$ , c'est-à-dire, compte tenu de Eqs. (4-24) et (4-25), de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  telle que :

$$\phi_{int} = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p > 0 \text{ quand } \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \neq 0 \quad (4-27)$$

La principale difficulté rencontrée dans la construction d'un modèle d'élastoplasticité concerne l'équation d'évolution  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  puisque l'inégalité Eq. (4-27) doit être *toujours* satisfaite, c'est-à-dire quel que soit l'état  $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p)$  et quelle que soit l'évolution  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Une condition suffisante à la nullité de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ , en revanche, peut être facilement établie à partir de la fonction limite d'élasticité (celle de Von Mises, par exemple, voir Eq. (4-20)). Dans tous les modèles d'élastoplasticité, et en accord avec Eq. (4-21), il est ainsi supposé que, en un quelconque point de la structure considérée :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0 \quad (4-28)$$

D'après Eq. (4-28), l'équation  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , qui caractérise une hyper-surface dans l'espace des contraintes, joue un rôle crucial en élastoplasticité. Cette hyper-surface est appelée surface limite d'élasticité ou, plus

<sup>8</sup> Dans certains modèles d'élastoplasticité, d'autres variables d'état interne, scalaires ou tensorielles, sont également prises en compte pour décrire certaines particularités du comportement. Ces variables internes « supplémentaires » ne sont pas considérées ici.

souvent, *surface seuil* d'élastoplasticité. Dans la plupart des modèles d'élastoplasticité usuels, elle est obtenue à partir de la fonction seuil de Von Mises, voir Eq. (4-20); on parle alors de *surface seuil de Von Mises*.

Un autre type de comportement non élastique doit également être mentionné : la visco-élasticité. Il n'est observé, aux températures « usuelles », que dans quelques matériaux, dont certains polymères ; en revanche, il est observé dans tous les matériaux, pour des températures voisines de leur température de fusion.

À la différence de l'élastoplasticité, la viscoélasticité se manifeste dès les toutes premières phases du chargement. Du point de vue de la modélisation, elle n'est donc associée à aucune fonction seuil. Comme l'élastoplasticité, en revanche, la visco-élasticité est un phénomène dissipatif, c'est-à-dire qu'elle est associée à une dissipation intrinsèque strictement positive.

Le plus simple modèle de visco-élasticité envisageable ne fait intervenir aucune variable d'état interne. Dans ce cas, l'expression de la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\phi_{int} = (\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4-29)$$

d'où l'on déduit, en tant que condition suffisante à la non négativité de  $\phi_{int}$  quel que soit l'état  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et quelle que soit l'évolution  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (et, là encore, avec l'approximation  $\rho = \rho_0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \kappa \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4-30)$$

où  $\kappa > 0$  est la *viscosité* du matériau (en *Pa.s*).

Il faut enfin souligner que, dans le cas de l'élastoplasticité comme dans celui de la visco-élasticité, il est impératif, à tout instant, de connaître  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . En conséquence, la variable *temps* – qui avait pu être éliminée en élasticité, voir paragraphe 2.1 – doit impérativement être réintroduite dans tout problème de structure élastoplastique ou viscoélastique<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> En fait, le temps doit être pris en compte dès que le modèle de comportement considéré est non élastique. Il apparaît d'ailleurs explicitement dans les équations du problème de structure *thermo-élastique* linéaire isotrope établies au Chapitre 1 de ce Cours (voir, par exemple, Eq. (1-61)).

4. STRUCTURES HÉTÉROGÈNES ; COMPORTEMENTS AUTRES QUE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE ISOTROPE

---

---

## Annexe A

# Tenseurs Euclidiens dans $\mathcal{E}_3$ : compléments d'analyse

*NOTE IMPORTANTE* : Les formules indicielles qui suivent ne sont valables que si les composantes sont données dans une base orthonormée et en utilisant la convention d'Einstein simplifiée (somme sur les couples d'indices muets).

En revanche, toutes les formules avec des opérateurs tensoriels tels que «  $\otimes$  », «  $\cdot$  » ou «  $:$  » sont tout à fait générales. D'autre part, l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{V}$  sur lequel sont construits les tenseurs est implicitement de dimension 3, ce qui est suffisant pour la mécanique classique.

Dans le cours de thermo-élasticité linéaire, on a à considérer des applications  $f$  de  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  vers  $\mathbb{R}$  (*a priori* non linéaires) et on a besoin de connaître les variations de  $f(\mathbf{T})$  quand son argument tensoriel du second ordre  $\mathbf{T}$  varie. On définit ainsi la « dérivée généralisée » de cette fonction par rapport à son argument tensoriel <sup>1</sup>.

### A.1 Définition

La description des variations d'un argument tensoriel est plus compliquée que pour les fonctions à variables réelles car les tenseurs du second ordre sont dans un espace de dimension 9, alors que  $\mathbb{R}$  est de dimension 1.

Soit l'application  $f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$ . Une variation arbitraire de l'argument tensoriel du second ordre  $\mathbf{T}$  sera notée  $d\mathbf{T}$ . C'est un tenseur du second ordre, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  de dimension 9, et donc caractérisé par 9 composantes arbitraires. À chaque variation arbitraire du « vecteur »  $d\mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$  correspond une variation  $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$ .

On dit que l'application  $f$  est différentiable en  $\mathbf{T}$  s'il existe une *application linéaire* notée  $\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)$  telle que :

$$\forall d\mathbf{T} \quad f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T}) = \underbrace{\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)}_{df} : d\mathbf{T} + \|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T})$$

où  $O(\mathbf{T})$  est une fonction à valeur scalaire arbitraire qui tend vers 0 quand  $\|\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ . Les règles de l'algèbre tensorielle montrent que l'opérateur linéaire  $\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)$  est un tenseur du second ordre.

Le terme  $df = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T}$  est appelé différentielle de  $f$ . La « dérivée généralisée » de la fonction à valeur

---

<sup>1</sup> On peut définir des « dérivées généralisées » par rapport à des tenseurs de tous ordres (y compris d'ordre 1) de la même manière, mais on se limite ici au seul cas le plus utile dans la suite.

scalaire  $f(\mathbf{T})$  « par rapport au tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  » est un *tenseur du second ordre*<sup>2</sup>, noté  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ . On devrait plutôt l'appeler opérateur linéaire tangent de l'application  $f$ .

**Remarque :**

Il est clair que quand  $\|\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ , le reste  $\|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T})$  tend vers 0 plus vite que le terme  $df = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T}$  qui est linéaire en  $d\mathbf{T}$ . Ainsi, quand  $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ , la différentielle  $df$  s'approche de la variation exacte  $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$ .

On devrait dire : la dérivée en  $\mathbf{T}$  de la fonction  $f(\mathbf{T})$  est l'application  $f' : \mathbb{V}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f' : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2} \longrightarrow f'(\mathbf{T}) = \lim_{\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : d\mathbf{T} + \|\mathbf{T}\| O(\mathbf{T})}{\|d\mathbf{T}\|} = \left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right) : \frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|} \in \mathbb{R}$$

Le tenseur du second ordre  $\frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|}$  (de norme 1) est une « direction unitaire » (dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ , espace vectoriel de dimension 9) dans laquelle on calcule la dérivée de  $f$ . Pour chacune de ces directions, la dérivée de  $f$  est *a priori* différente.

Le tenseur du second ordre  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$  n'est donc pas à proprement parler la dérivée de  $f$ , mais plutôt l'opérateur linéaire tangent qui permet de calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  quand  $\mathbf{T}$  varie dans la « direction unitaire »  $\frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|}$ . Il est néanmoins couramment nommé « dérivée de  $f$  par rapport à  $\mathbf{T}$  ».

## A.2 Calcul des composantes dans une base orthonormée

Si le tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  est défini par ses composantes  $T_{ij}$  dans une base orthonormée fixe  $\{\mathbf{e}_i\}$ , on peut écrire :  $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Une variation arbitraire  $d\mathbf{T}$  est donc définie par 9 variations  $dT_{ij}$  arbitraires et indépendantes de chacune de ses composantes sur la base fixe :

$$d\mathbf{T} = dT_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

À la fonction  $f(\mathbf{T})$  et à la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  choisie, on peut donc associer une fonction  $\tilde{f}_{\mathbf{e}_i} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(\mathbf{T}) = \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33})$$

On a donc

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} : d\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}}{\partial T_{ij}} dT_{ij}$$

On en déduit immédiatement par identification les composantes du tenseur  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$  dans la base orthonormée fixe :

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)_{ij} = \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}}{\partial T_{ij}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df}{d\mathbf{T}} = \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}}{\partial T_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

À titre d'exemple, considérons la fonction  $f$  de  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f(\mathbf{T}) = \text{Tr}(\mathbf{T})$ . Dans une quelconque base orthonormée fixe  $\{\mathbf{e}_i\}$ , on peut lui associer la fonction  $\tilde{f}_{\mathbf{e}_i} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(\mathbf{T}) = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{kk}$$

On a donc

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} : d\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = \frac{\partial T_{kk}}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = \delta_{ki} \delta_{kj} dT_{ij} = \delta_{ij} dT_{ij}$$

---

<sup>2</sup> On n'aura aucune difficulté à généraliser : si  $\mathbf{T}$  est d'ordre  $p$ ,  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$  est d'ordre  $p$  et sa  $p$ -contraction avec  $d\mathbf{T}$  donne le scalaire  $df$ . Notamment, si  $p = 1$ ,  $\frac{df}{d\mathbf{v}}$  est un vecteur.

On en déduit immédiatement par identification des composantes du tenseur  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$  dans la base orthonormée fixe :

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{T}}\right)_{ij} = \frac{\partial \tilde{f}_{e_i}}{\partial T_{ij}} = \delta_{ij}$$

soit, plus généralement :

$$\frac{d\text{Tr}(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}} = \mathbf{G}$$

### A.3 Quelques résultats utiles

Le lecteur vérifiera sans difficulté les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{T} : \mathbf{U})}{d\mathbf{T}} &= \mathbf{U} & \frac{d(\overbrace{\mathbf{T} : \mathbf{T}}^{\|\mathbf{T}\|^2})}{d\mathbf{T}} &= 2\mathbf{T} & \frac{d\|\mathbf{T}\|}{d\mathbf{T}} &= \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \\ \frac{d\text{Tr}(\mathbf{T}^2)}{d\mathbf{T}} &= 2\mathbf{T}^T & \frac{d\text{Tr}(\mathbf{T}^n)}{d\mathbf{T}} &= n(\mathbf{T}^{n-1})^T & & \\ \frac{dT_I}{d\mathbf{T}} &= \mathbf{G} & \frac{dT_{II}}{d\mathbf{T}} &= T_I \mathbf{G} - \mathbf{T}^T & \frac{dT_{III}}{d\mathbf{T}} &= T_{II} \mathbf{G} - T_I \mathbf{T}^T + \mathbf{T}^{2T} \end{aligned}$$

### A.4 Dérivée « contrainte »

En mécanique des milieux continus, la plupart des tenseurs du second ordre  $\mathbf{T}$  sont des tenseurs symétriques restant symétriques dans leurs variations. Ceci implique notamment que la dérivée d'une fonction  $f$  à valeur scalaire d'un tenseur symétrique  $\mathbf{T}$  est « contrainte » au sens que les variations  $d\mathbf{T}$  de  $\mathbf{T}$  le sont, soit, en l'occurrence :  $d\mathbf{T} = d\mathbf{T}^T$ . En d'autres termes,  $d\mathbf{T}$  appartient à un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  soit, en l'occurrence,  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_s$ .

D'autres « contraintes » sur les variations  $d\mathbf{T}$  sont également parfois à prendre en compte, par exemple si  $\mathbf{T}$  est un tenseur sphérique ou déviatoire ou antisymétrique... À chaque fois, la dimension de l'ensemble dans lequel  $d\mathbf{T}$  arbitraire peut évoluer change.

Plutôt que d'établir une définition particulière de l'opérateur linéaire tangent pour chaque type de contrainte, on va établir un théorème permettant « d'ignorer la contrainte » pendant la dérivation puis de la rétablir ensuite. Ce théorème ne vaut cependant que si la « contrainte » peut s'écrire sous la forme d'une égalité (ce qui est bien le cas, par exemple, pour les tenseurs symétriques).

#### A.4.1 Théorème :

Soit  $\tilde{f}$  une fonction de  $m$  variables réelles  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), certaines variables étant liées aux autres par  $r$  « contraintes » d'égalités de la forme  $x_k = h_k(\dots, x_{p \neq k}, \dots)$ . Alors,

$$x_k = h_k(\dots, x_{p \neq k}, \dots) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{f} = \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} dx_i \right]_{\{x_k = h_k(\dots, x_{p \neq k}, \dots); k=1, \dots, r\}} \quad (\text{A.1})$$

Autrement dit, on peut dériver  $\tilde{f}$  comme si les  $x_i$  n'étaient pas liés, puis remplacer ensuite les  $x_k$  liés par leur expression après dérivation.

### A.4.2 Démonstration :

Pour alléger les écritures on suppose que  $\tilde{f}$  a 4 variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$  et qu'il n'y a qu'une seule « contrainte » d'égalité, soit  $x_1 = h_1(x_2, x_3)$ .

On peut définir une fonction  $g$  de 3 variables indépendantes telle que  $\tilde{f}(h_1(x_2, x_3), x_2, x_3, x_4) = g(x_2, x_3, x_4)$ .

Pour une variation arbitraire  $(dx_2, dx_3, dx_4)$  satisfaisant les contraintes, on a évidemment  $d\tilde{f} = dg$  et donc en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \quad \frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4}$$

et donc

$$\begin{aligned} dg &= \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \right) dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \underbrace{\left( \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3} dx_3 \right)}_{dh_1} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \end{aligned}$$

On peut donc calculer la différentielle sous contrainte en posant formellement :

$$d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4, \text{ puis remplacer ensuite } x_1 \text{ par } h_1(x_2, x_3)$$

Les résultats présentés précédemment sont donc encore valables, en appliquant les « contraintes » sur les termes de droite<sup>3</sup>.

### A.4.3 Exemple :

Soit  $f(\mathbf{S})$  une fonction à valeur réelle dont l'argument tensoriel du second ordre  $\mathbf{S}$  est symétrique et reste symétrique dans ses variations.

Si on choisit une base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , on peut lui associer la fonction  $\tilde{f}_{\mathbf{e}_i} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(\mathbf{S}) = \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{31}, S_{32}, S_{33})$$

Les composantes de l'opérateur linéaire tangent (la « dérivée par rapport à  $\mathbf{S}$  »)  $\frac{df}{d\mathbf{S}}$  sont :

$$\left( \frac{df}{d\mathbf{S}} \right)_{ij} = \left[ \frac{\partial \tilde{f}_{\mathbf{e}_i}}{\partial S_{ij}} \right]_{\{S_{21}=S_{12}, S_{23}=S_{32}, S_{13}=S_{31}\}}$$

Par exemple si  $f(\mathbf{S}) = k\mathbf{S} : \mathbf{S}$ , et  $\tilde{f}_{\mathbf{e}_i} = S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2 = S_{pq}S_{pq}$

$$\left( \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}} \right)_{11} = 2S_{11} \quad \left( \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}} \right)_{12} = 2S_{12} \quad \left( \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}} \right)_{21} = 2S_{21} = 2S_{12} \quad \dots$$

On retrouve la formule générale donnée précédemment pour un tenseur non symétrique :  $\frac{d(\mathbf{T} : \mathbf{T})}{d\mathbf{T}} = 2\mathbf{T}$ , qui est donc toujours valable avec la « contrainte »  $\mathbf{T}$  symétrique.

On peut aussi bien faire le calcul en indices pour avoir toutes les composantes :

$$\left( \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{d\mathbf{S}} \right)_{ij} = \frac{d(S_{pq}S_{pq})}{dS_{ij}} = \frac{dS_{pq}}{dS_{ij}} S_{pq} + S_{pq} \frac{dS_{pq}}{dS_{ij}} = \delta_{ip} \delta_{jq} S_{pq} + S_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq} = S_{ij} + S_{ij} = 2S_{ij}$$

<sup>3</sup> Les tenseurs symétriques sont tels que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ , les tenseurs déviatoriques sont tels que  $T_I = 0$ , les tenseurs sphériques sont tels que  $\mathbf{T} = k\mathbf{G}; T_I = 3k; T_{II} = k; T_{III} = k$ , etc

#### A.4.4 Remarque importante

Il est important de noter que la « contrainte » sur les composantes d'un tenseur  $\mathbf{T}$  doit nécessairement être sous la forme d'une *égalité* (voir A.1 page 75) donnant une composante en fonction des autres, sinon la démonstration tombe en défaut.

C'est la cas pour des « contraintes » sur les composantes du type «  $\mathbf{T}$  symétrique », «  $\mathbf{T}$  antisymétrique », «  $\mathbf{T}$  sphérique » ou «  $\mathbf{T}$  déviatorique ».

En revanche, ce n'est notamment pas le cas pour des « contraintes » du type «  $\mathbf{T}$  orthogonal » ou du type «  $\|\mathbf{T}\| = a$  » ou encore «  $\det \mathbf{T} = b$  » pour lesquelles il n'existe pas d'équation de la forme A.1 page 75 qui exprime cette « contrainte ».

### A.5 Fonctions réelles de plusieurs tenseurs

En mécanique, il arrive souvent que des fonctions à valeur scalaire soient à plusieurs arguments tensoriels.

On définit sans difficulté les « dérivées partielles par rapport aux arguments tensoriels » comme la « dérivée » de  $f$  par rapport à chacun des arguments, les autres étant considérés comme constants.

Par exemple si  $f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$  où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont d'ordre 2, la notation  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}}$  est un tenseur (du même ordre que  $\mathbf{P}$ ) qui est la « dérivée de  $f$  par rapport à  $\mathbf{P}$  » à  $\mathbf{Q}$  constant. De même pour  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}}$ .

Pour toute variation arbitraire des arguments tensoriels (liés ou non par une « contrainte »), la différentielle est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} : d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} : d\mathbf{Q}$$

Autre exemple utile :  $f(\mathbf{T}, \mathbf{v})$  où  $\mathbf{T}$  est d'ordre 2 et  $\mathbf{v}$  un vecteur ( $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$  est d'ordre 1) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} : d\mathbf{P} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{v}$$



## Annexe B

# Formulaire

On donne ici (sans démonstration <sup>1</sup>) les expressions des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien dans deux systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

### B.1 Système de coordonnées cylindriques

#### B.1.1 Définition et notations

Un point  $M$  de l'espace est repéré par les 3 réels  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  définis sur la Figure B.1.

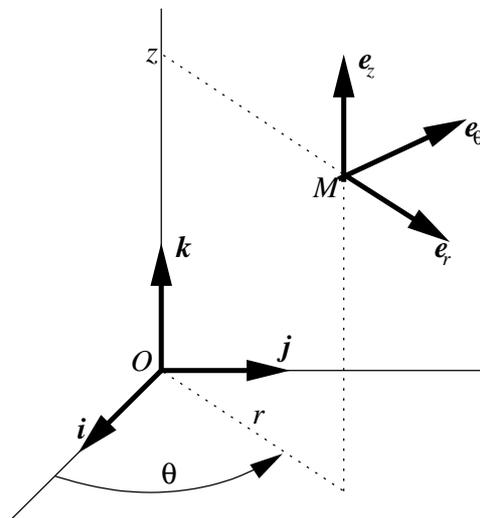


FIG. B.1 – Système de coordonnées cylindriques

À chaque point  $M$  on associe une base locale orthonormée  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  définie par :

$$\mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{OM} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{OM} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_z = \partial_z \mathbf{OM} = \mathbf{k}$$

<sup>1</sup> Elles ont été établies avec la bibliothèque `tens3d` destinée à faciliter le calcul tensoriel sur le logiciel de calcul formel Maple®. Cette bibliothèque est librement téléchargeable sur <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tens3d.html>

Le point courant  $M$  est défini par :

$$\mathbf{OM} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{k}$$

Sur la base locale en  $M$ , on a

$$d\mathbf{M} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$$

### B.1.2 Champs scalaires

Soit  $f$  un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, z) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta + \partial_z f \mathbf{e}_z \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \frac{1}{r} \partial_r f + \partial_{zz} f \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f \end{aligned}$$

### B.1.3 Champs vectoriels

Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel :

$$\mathbf{v} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{v}(M) = v_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$$

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta \right) \mathbf{e}_r + (\partial_z v_r - \partial_r v_z) \mathbf{e}_\theta + \left( \partial_r v_\theta - \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) \right) \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \left( \partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r} \partial_r v_r + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left( \partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r} \partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left( \partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r} \partial_r v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \\ &= \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

### B.1.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit  $\mathbf{T}$  un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$\mathbf{T} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{T}(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, z) & T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{rz}(r, \theta, z) \\ T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) \\ T_{rz}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) & T_{zz}(r, \theta, z) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T} &= \left( \partial_r T_{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \partial_z T_{rz} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( \partial_r T_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta\theta} + 2T_{r\theta}) + \partial_z T_{\theta z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( \partial_r T_{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) + \partial_z T_{zz} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{rot} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) - \partial_z T_{r\theta} & \partial_z T_{rr} - \partial_r T_{rz} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rr} - 2T_{r\theta}) \\ \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) - \partial_z T_{\theta\theta} & \partial_z T_{r\theta} - \partial_r T_{\theta z} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) \\ \frac{1}{r} \partial_\theta T_{zz} - \partial_z T_{\theta z} & \partial_z T_{rz} - \partial_r T_{zz} & \partial_r T_{\theta z} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rr} - 4\partial_\theta T_{r\theta} - 2T_{rr} + 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rr} + \partial_{zz} T_{rr} \\ (\Delta \mathbf{T})_{r\theta} &= (\Delta \mathbf{T})_{\theta r} = \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} + 2\partial_\theta T_{rr} - 2\partial_\theta T_{\theta\theta} - 4T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{r\theta} + \partial_{zz} T_{r\theta} \\ (\Delta \mathbf{T})_{rz} &= (\Delta \mathbf{T})_{zr} = \partial_{rr} T_{rz} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rz} - 2\partial_\theta T_{\theta z} - T_{rz}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rz} + \partial_{zz} T_{rz} \\ (\Delta \mathbf{T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} + 4\partial_\theta T_{r\theta} + 2T_{rr} - 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta\theta} + \partial_{zz} T_{\theta\theta} \\ (\Delta \mathbf{T})_{\theta z} &= (\Delta \mathbf{T})_{z\theta} = \partial_{rr} T_{\theta z} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta z} + 2\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta z} + \partial_{zz} T_{\theta z} \\ (\Delta \mathbf{T})_{zz} &= \partial_{rr} T_{zz} + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} T_{zz} + \frac{1}{r} \partial_r T_{zz} + \partial_{zz} T_{zz} \end{aligned}$$

## B.2 Système de coordonnées sphériques

NOTE IMPORTANTE : Dans la littérature scientifique, il existe deux versions du système de coordonnées sphérique.

Dans celle présentée ici, l'angle  $\varphi$  est mesuré à partir du plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On pourrait les appeler « coordonnées géographiques » ( $\theta$  est la longitude,  $\varphi$  est la latitude, le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est le plan équatorial). Le trièdre  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  est direct.

Dans l'autre version l'angle  $\varphi$  est mesuré sur le méridien de  $M$  à partir du pôle Nord. On a donc :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_\varphi$$

On convertit aisément les formules avec :

$$\cos \varphi \rightarrow \sin \phi \quad \text{et} \quad \sin \varphi \rightarrow \cos \phi$$

### B.2.1 Définition et notations

Un point  $M$  de l'espace est repéré par 3 réels  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  définis sur la figure B.2.

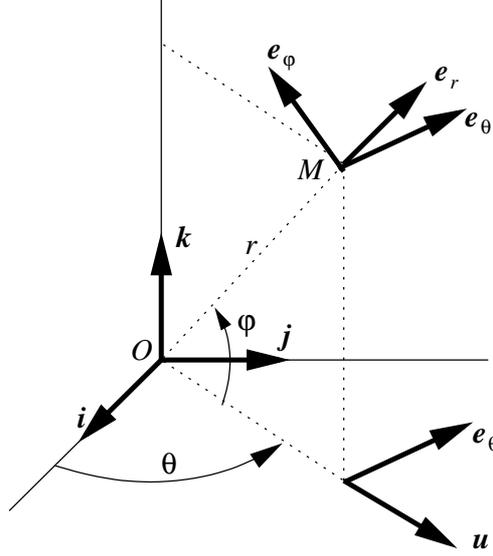


FIG. B.2 – Système de coordonnées sphériques

À chaque point  $M$  on associe une base locale orthonormée  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  définie par :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \partial_r \mathbf{OM} = \cos \varphi \mathbf{u} + \sin \varphi \mathbf{k} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial_\theta \mathbf{OM}}{r \cos \varphi} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial_\varphi \mathbf{OM}}{r} = -\sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{k} = -\cos \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}\end{aligned}$$

Le point courant est :

$$\mathbf{OM} = r \cos \varphi \cos \theta \mathbf{i} + r \cos \varphi \sin \theta \mathbf{j} + r \sin \varphi \mathbf{k} = r \mathbf{e}_r$$

Sur la base locale en  $M$ , on a :

$$d\mathbf{M} = dr \mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r = dr \mathbf{e}_r + r \cos \varphi d\theta \mathbf{e}_\theta + r d\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

### B.2.2 Champs scalaires

Soit  $f$  un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} f &= \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{\partial_\theta f}{r \cos \varphi} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial_\varphi f}{r} \mathbf{e}_\varphi \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{\partial_{\theta\theta} f - \sin \varphi \partial_\varphi f}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{2 \partial_r f}{r} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} f}{r^2}\end{aligned}$$

### B.2.3 Champs vectoriels

Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel :

$$\mathbf{v} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{v}(M) = v_r(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + v_\varphi(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \in \mathbb{V}_3$$

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r \cos \varphi} \partial_\theta v_r - \frac{1}{r} v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_r - v_\varphi) \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi) + \frac{1}{r} v_r & \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\theta \\ \partial_r v_\varphi & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta) & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_\varphi + v_r) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi + 2 v_r}{r}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial_\varphi v_r - v_\varphi}{r} - \partial_r v_\varphi \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \partial_r v_\theta - \frac{\partial_\theta v_r}{r \cos \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \partial_{rr} v_r + \frac{\partial_{\theta\theta} v_r}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_r - 2 \partial_\varphi v_\varphi - 2 v_r}{r^2} + \frac{2 \sin \varphi v_\varphi - 2 \partial_\theta v_\theta - \sin \varphi \partial_\varphi v_r}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_r}{r} \right) \mathbf{e}_r$$

$$+ \left( \partial_{rr} v_\theta + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\theta - 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\varphi - v_\theta}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\theta}{r^2} + \frac{2 \partial_\theta v_r - \sin \varphi \partial_\varphi v_\theta}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left( \partial_{rr} v_\varphi + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\varphi + 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\theta - v_\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\varphi + 2 \partial_\varphi v_r}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_\varphi v_\varphi}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\varphi}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

### B.2.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit  $\mathbf{T}$  un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$\mathbf{T} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{T}(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, \varphi) & T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \left( \partial_r T_{rr} + \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{r} \right) \mathbf{e}_r$$

$$+ \left( \partial_r T_{r\theta} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\theta} - 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + 3 T_{r\theta}}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left( \partial_r T_{r\varphi} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi T_{\theta\theta} - \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\varphi\varphi} + 3 T_{r\varphi}}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{rr} - 2 T_{r\varphi}}{r} - \partial_r T_{r\varphi} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{\partial_\theta T_{rr}}{r \cos \varphi} + \frac{2 T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi (T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\theta} - T_{r\varphi}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\theta} - T_{\theta\varphi}}{r} - \partial_r T_{\theta\varphi} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\theta} - T_{rr}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\varphi\varphi} + 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} - \partial_r T_{\varphi\varphi} & \partial_r T_{\theta\varphi} - \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\varphi}}{r} \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{rr}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{rr} - 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 4 T_{rr} + 2 T_{\theta\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{rr} + 4 \sin \varphi T_{r\varphi} - 4 \partial_{\theta} T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{rr}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{r\theta} = (\Delta \mathbf{T})_{\theta r} &= \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} - 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\varphi} - T_{r\theta}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\theta} - 2 \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} - 4 T_{r\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{rr} - 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 4 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\theta}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{r\varphi} = (\Delta \mathbf{T})_{\varphi r} &= \partial_{rr} T_{r\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\varphi} + 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\theta} - T_{r\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{rr} - 2 \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{r\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{-2 \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 2 \sin \varphi T_{\theta\theta} + 2 \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\varphi}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - 2 T_{\theta\theta} + 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\theta} + 2 T_{rr} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{4 \partial_{\theta} T_{r\theta} + \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi T_{r\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\theta}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\theta\varphi} = (\Delta \mathbf{T})_{\varphi\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - 2 \partial_{\theta} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 2 T_{\theta\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{r\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \sin \varphi T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\varphi}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\varphi\varphi} &= \partial_{rr} T_{\varphi\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\varphi\varphi} + 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} + 2 T_{\theta\theta} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} \\
&\quad + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - 2 T_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\varphi\varphi}}{r}
\end{aligned}$$

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Équations générales de la thermo-élasticité linéaire isotrope</b>	<b>5</b>
1.1	Problème de structure en thermo-élasticité linéaire isotrope : hypothèses et énoncé qualitatif	5
1.2	Problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope : énoncé mathématique	7
1.2.1	Configuration d'une structure et description des champs en thermo-élasticité linéaire isotrope	7
1.2.2	Principes de conservation et second principe de la thermodynamique en thermo-mécanique des milieux continus	8
1.2.3	Comportement thermo-élastique linéaire isotrope : équations constitutives	12
1.2.4	Énoncé mathématique d'un problème de structure homogène en thermo-élasticité linéaire isotrope	15
1.2.5	Questions <b>Q1</b> , <b>Q2</b> et <b>Q3</b> : traduction mathématique	20
<b>2</b>	<b>Méthodes de résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope</b>	<b>27</b>
2.1	De la thermoélasticité à l'élasticité	27
2.2	Unicité de la solution et théorème de superposition en élasticité linéaire isotrope	30
2.2.1	Unicité de la solution	30
2.2.2	Théorème de superposition	32
2.3	Méthode des déplacements pour la résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope	33
2.4	Méthode des contraintes pour la résolution d'un problème de structure homogène en élasticité linéaire isotrope	35
<b>3</b>	<b>Résolution de quelques problèmes de structures homogènes en élasticité linéaire isotrope</b>	<b>43</b>
3.1	Barre cylindrique homogène en traction-compression simple	44
3.1.1	Données du problème	44
3.1.2	Résolution du problème	45
3.1.3	Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales	48
3.2	Barre cylindrique homogène en torsion	52
3.2.1	Données du problème	52
3.2.2	Résolution du problème	53
3.2.3	Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales	54
3.3	Barre cylindrique homogène en flexion pure	59
3.3.1	Données du problème	59
3.3.2	Résolution du problème	60
3.3.3	Compatibilité de la solution avec les hypothèses de comportement élastique linéaire et de déformations infinitésimales	60
3.4	Élasticité plane	62
3.4.1	Déformations planes	62
3.4.2	Contraintes planes	62

<b>4 Structures hétérogènes ; comportements autres que l'élasticité linéaire isotrope</b>	<b>65</b>
4.1 Structures hétérogènes . . . . .	65
4.2 Élasticité linéaire anisotrope . . . . .	67
4.3 Élasticité non linéaire isotrope . . . . .	68
4.4 Comportements non élastiques . . . . .	69
<b>A Tenseurs Euclidiens dans <math>\mathcal{E}_3</math> : compléments d'analyse</b>	<b>73</b>
A.1 Définition . . . . .	73
A.2 Calcul des composantes dans une base orthonormée . . . . .	74
A.3 Quelques résultats utiles . . . . .	75
A.4 Dérivée « contrainte » . . . . .	75
A.4.1 Théorème : . . . . .	75
A.4.2 Démonstration : . . . . .	76
A.4.3 Exemple : . . . . .	76
A.4.4 Remarque importante . . . . .	77
A.5 Fonctions réelles de plusieurs tenseurs . . . . .	77
<b>B Formulaire</b>	<b>79</b>
B.1 Système de coordonnées cylindriques . . . . .	79
B.1.1 Définition et notations . . . . .	79
B.1.2 Champs scalaires . . . . .	80
B.1.3 Champs vectoriels . . . . .	80
B.1.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques . . . . .	81
B.2 Système de coordonnées sphériques . . . . .	81
B.2.1 Définition et notations . . . . .	82
B.2.2 Champs scalaires . . . . .	82
B.2.3 Champs vectoriels . . . . .	83
B.2.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques . . . . .	83