

Théorie Financière Approfondie

Jean-Michel Courtault

Université de Paris Nord

2008-2009

"When the pyres are lighted tonight let the flames purify each of us in his own heart. Let us return to what was and ever should be the office of this abbey. The preservation of knowledge. "Preservation," I say, not "search for." Because there is no progress in the history of knowledge merely a continuous and sublime recapitulation." (The Name of the Rose, Jean-Jacques Annaud)

Organisation du cours

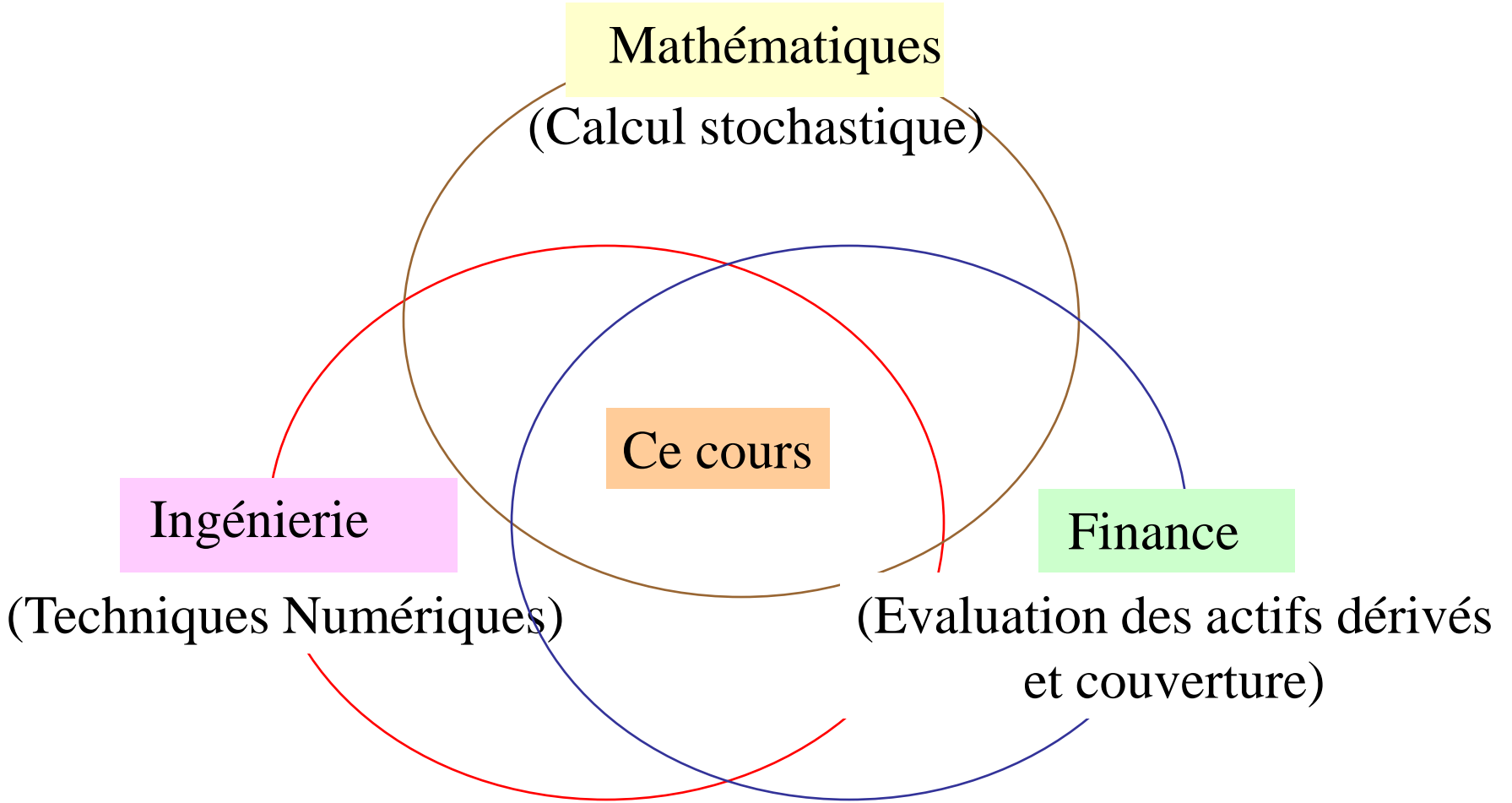
- *CM* : Jean-Michel Courtault

E-mail: courtault.jean-
michel@univ-paris13.fr

Bureau: J 314

- *Contrôle des connaissances*

Partiel: 100%



Qu'allons nous apprendre?

- Éléments de calcul stochastique et ses applications à la finance
- Théorie sous-jacente et outils informatiques pour les processus stochastiques et les simulations de l'évaluation des produits dérivés et des opérations de couverture
- Thèmes: théorie des probabilités de base (théorie de la mesure), théorie des martingales, processus de Markov et contrôle stochastique

Bibliographie

- Stanley Pliska, Introduction to Mathematical Finance
- Steven Shreve, Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer, 2003.
(<http://www.cs.cmu.edu/~chal/shreve.html>)


Plan du Cours

1. Eléments de l'évaluation par l'arbitrage et de la théorie des probabilités
2. Propriété de Markov et options Américaines
3. Techniques Numériques

	Théorie	Application
Temps Discret		

Plan du Cours

Application	Théorie
Evaluation et Couverture <ul style="list-style-type: none">- Option Européenne- Option Américaine- Option Exotique	Espérance Conditionnelle Théorie des Martingales Processus de Markov

	Théorie	Application
Temps Discret		

- En utilisant un modèle de marche aléatoire en temps discret, nous allons apprendre la théorie élémentaire de l'évaluation et la couverture des instruments dérivés

Instruments dérivés = un instrument dont le prix dépend, ou est dérivé, du prix d'un autre actif [Hull]

Chapitre 1: Théorie de l'arbitrage : Le cas d'une période et d'un nombre fini d'états de la nature

- **Le modèle**
- 2 dates, $t=0$ et $t=1$.
- Un ensemble fini d'états de la nature : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$
- Une mesure de probabilité. $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) > 0 \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

- Un compte bancaire où B_t est le prix exprimé en termes de l'unité de compte (par exemple l'Euro ou le Dollar) en t d'une unité de compte bancaire.

$$B_1 : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \quad \forall \omega \in \Omega, B_1(\omega) > 0$$

- B_1 est la valeur en $t=1$ d'un compte bancaire où l'on a déposé 1 euro en $t=0$.

Le modèle

- Le processus des prix des actifs financiers $S = \{S_t : t = 0, 1\}$ où $S_t = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t))$. $S_n(t)$ est le prix à l'instant t exprimé en termes de l'unité de compte de l'actif risqué n .
- Le prix à l'instant $t = 0$ $S_n(0)$ de ces actifs est strictement positif et connu des investisseurs, alors que le prix en $t=1$ est une variable aléatoire positive ou nulle dont la réalisation est connue des investisseurs en $t=1$:

$$S_n(1): \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

- Un ensemble de choix des portefeuilles $\mathcal{H} \equiv \mathcal{R}^{N+1}$. \mathcal{H} représente l'ensemble des choix institutionnellement possibles. Ceci revient à dire qu'il est possible de vendre à découvert ou d'emprunter autant qu'on voudra et qu'aucune restriction quant à la solvabilité des agents n'est imposée.

Le modèle (Suite)

- Un portefeuille $H = (H_0, H_1, \dots, H_N)$ est un vecteur de $\mathcal{H} \equiv \mathfrak{R}^{N+1}$ donnant la quantité de chaque actif détenu de $t = 0$ à $t = 1$ par un investisseur.
- H_n est le nombre d'unités d'actif n détenu entre $t=0$ et $t=1$. Si $H_n < 0$ alors l'actif n est vendu à découvert (si n est un actif risqué) ou bien il s'agit d'un emprunt (si $n = 0$). Si $H_n > 0$ alors il s'agit d'un achat. H_0 est aussi le nombre d'euros investis dans le compte bancaire puisque le prix unitaire de chaque unité de compte bancaire est égal à un euro en $t = 0$.
- Un droit conditionnel est une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ où $X(\omega) > 0$ est une recette et $X(\omega) < 0$ une dépense.

Valorisation, Gain d'un portefeuille et Actualisation

- **Définition**

- Le processus de valorisation $V = \{V_t : t = 0, 1\}$ décrit la valeur totale (exprimée en termes de l'unité de compte) du portefeuille à chaque date:

$$V_t \equiv H_0 B_t + \sum_{n=1}^N H_n S_n(t) \quad t = 0, 1$$

Processus de gain

- **Définition**

- Le processus de gain G est une variable aléatoire qui décrit le profit total ou la perte (exprimée en termes de l'unité de compte) générée par le portefeuille entre les dates 0 et 1 :

$$G \equiv H_0 (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^N H_n \Delta S_n$$

$$\Delta S_n \equiv S_n(1) - S_n(0)$$

- **Proposition 1:**

$$V_1 = V_0 + G$$

- **Voir toutes les démonstrations dans le polycopié**
- **Toute variation de la valeur du portefeuille, $V_1 - V_0$, doit être due à une perte ou un gain généré par le portefeuille et non à l'addition de fonds d'une source extérieure (revenu du travail par exemple) ou une diminution due à la consommation. Il n'y a donc pas d'épargne ni de désépargne.**

La notion de bien numéraire

- Supposons qu'on ait un panier de fruits composés de 2 Pommes, 3 Oranges et 4 Poires.
- Supposons qu'une Pomme vaille 3 euros, une Orange 6 euros et une Poire 1,5 euro.
- La valeur du panier de fruits en euros est :
$$2 \times 3 + 3 \times 6 + 4 \times 1,5 = 30 \text{ euros}$$
- Si on prend la Poire comme numéraire on peut calculer la valeur du panier de fruits en poires c-à-d compter le nombre de poires équivalent aux fruits dans le panier. Une Pomme valant 3 euros et une Poire 1,5 euro on en déduit qu'une pomme équivaut à 2 poires et comme il y a 2 Pommes dans le panier de fruit on peut considérer que c'est équivalent à $2 \times 2 = 4$ Poires. De même le prix d'une Orange est 6 euros et celui d'une Poire 1,5 euro. On peut donc considérer qu'une Orange équivaut à 4 poires et comme il y a 3 oranges dans le panier de fruits on peut considérer que cela équivaut à $3 \times 4 = 12$. Il y a donc en tout dans le panier de fruits un nombre de poires équivalent à :

$$2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 1 = 20 \text{ poires}$$

La notion de bien numéraire (Suite)

- Si maintenant le prix d'une Pomme passe à 6 euros, celui d'une Orange à 4 euros et celui d'une poire à 2 euros alors le prix du panier de fruits passe de 30 euros à :

$$2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 2 = 32 \text{ euros}$$

- Le prix du panier de fruits en terme des poires passe de 20 poires à :

$$2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 16 \text{ poires}$$

- L'augmentation de la valeur en euros s'explique par la variation des prix nominaux de chaque fruit :

$$2 \times (6-3) + 3 \times (4-6) + 4 \times (2-1,5) = 2 = 32 - 30$$

- La diminution de la valeur en poires du panier de fruits s'explique par la variation des prix relatifs de chaque fruit :

$$2 \times (3-2) + 3 \times (2-4) + 4 \times (1-1) = -4 = 16 - 20$$

Le processus de prix actualisés

- Appliquons maintenant ces notions aux actifs financiers et prenons comme numéraire le compte bancaire. C'est évidemment possible dans la mesure où nous avons supposé que le prix d'une unité de compte bancaire était toujours strictement positif.
- **Définition :**
- Le processus de prix (des actifs risqués) actualisés $s^* = \{S_t^* : t = 0, 1\}$ est tel que $S_t^* = (S_1^*(t), \dots, S_N^*(t))$ et $S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t$ où $n = 1, \dots, N$ et $t = 0, 1$. $S_n^*(t)$ est parfaitement défini car $B_t > 0$ pour tout $t = 0, 1$.

- Chaque unité d'actif risqué équivaut à $S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire car $S_n^*(t)$ est le nombre d'unités de compte-bancaire que l'on peut échanger contre une unité d'actif risqué. En effet, la vente à l'instant t d'une unité d'actif risqué rapporte $S_n(t)$ unités de compte (par exemple l'Euro) ce qui permet d'acheter en t $S_n(t)/B_t$ unités de compte-bancaire.

Le processus de valorisation actualisée

- **Définition :**
- Le processus de valorisation actualisée

$$V^* = \{V_t^* : t = 0, 1\} \text{ est tel que } V_t^* \equiv H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(t) \text{ où } t = 0, 1.$$

Ici V_t^* est la valeur du portefeuille exprimée en terme du numéraire. Ceci revient à compter le nombre d'unités de compte-bancaire équivalentes détenues en portefeuille. Tout d'abord il y a H_0 unités de compte bancaire. Ensuite, chaque unité d'actif risqué n équivaut à $S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire : par conséquent, H_n unités d'actif risqué n sont équivalentes à $H_n \times S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire.

Le processus de gains actualisés

- **Définition :**

- Le processus de gains actualisés G^* est donné par

$$G^* \equiv \sum_{n=1}^N H_n \Delta S_n^* \text{ où } \Delta S_n^* \equiv S_n^*(1) - S_n^*(0) .$$

- G^* nous donne le nombre d'unités de compte-bancaire rapporté par le portefeuille. Tout d'abord le compte bancaire ne rapporte aucune unité de compte-bancaire : il y a dans le portefeuille autant d'unités de compte-bancaire en $t = 0$ qu'en $t = 1$ soit H_0 . Ensuite, chaque unité d'actif risqué n rapporte ΔS_n^* unités de compte-bancaire. En effet, une unité d'actif risqué n équivaut à $S_n^*(1)$ unités de compte bancaire en $t = 1$ alors qu'elle n'équivalait qu'à $S_n^*(0)$ unités de compte bancaire en $t = 0$: on peut donc considérer que chaque unité d'actif risqué n rapporte $S_n^*(1) - S_n^*(0) \equiv \Delta S_n^*$ unités de compte bancaire.

- **Proposition 2 :**

$$V_t^* = V_t / B_t \quad t = 0, 1$$

- **Proposition 3 :**

$$V_1^* = V_0^* + G^*$$

- **Exemple 1:** Supposons $K = 2$, $N = 1$, $B_1 = 10/9$ dans tous les états de la nature.

		$t = 1$	
	$t = 0$	ω_1	ω_1
S_t	$S_0 = 5$	$20/3$	$40/9$
B_t	$B_0 = 1$	$10/9$	$10/9$
S_t^*	$S_0^* = 5$	6	4

		$t = 1$	
	$t = 0$	ω_1	ω_2
V_t	$V_0 = H_0 + 5H_1$	$V_1(\omega_1) = \frac{10}{9}H_0 + \frac{20}{3}H_1$	$V_1(\omega_2) = \frac{10}{9}H_0 + \frac{40}{9}H_1$
V_t^*	$V_0^* = H_0 + 5H_1$	$V_1^*(\omega_1) = H_0 + 6H_1$	$V_1^*(\omega_2) = H_0 + 4H_1$
G		$G(\omega_1) = \frac{1}{9}H_0 + \frac{5}{3}H_1$	$G(\omega_2) = \frac{1}{9}H_0 - \frac{5}{9}H_1$
G^*		$G^*(\omega_1) = H_1$	$G^*(\omega_2) = -H_1$

- Vérification des propositions 1 à 3:

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 &\equiv \left(\frac{10}{9} H_0 + H_1 S_1 \right) - (H_0 + 5H_1) \\ &= \frac{1}{9} H_0 + H_1 (S_1 - 5) \equiv G \end{aligned}$$

$$\frac{V_0}{B_0} \equiv \frac{H_0 + 5H_1}{1} = H_0 + 5H_1 \equiv V_0^* \quad \frac{V_1}{B_1} \equiv \frac{\frac{10}{9} H_0 + H_1 S_1}{\frac{10}{9}} = H_0 + H_1 S_1 \equiv V_1^*$$

$$\begin{aligned} V_1^* - V_0^* &\equiv (H_0 + H_1 S_1^*) - (H_0 + 5H_1) \\ &= H_1 (S_1^* - 5) \equiv G^* \end{aligned}$$

- Notons également que $G^*(\omega) \neq \frac{G(\omega)}{B_1(\omega)}$

Par exemple, pour $H = (1, 0)$ on a $G^* = 0$
alors que $G = 1/9$.

Arbitrage, Dominance et loi du prix unique

- Nous allons définir plusieurs concepts qui permettent d'identifier des situations où l'investisseur peut gagner de l'argent sans risque et sans mise de fonds.
- Nous établirons des relations entre ces notions. Nous allons montrer en particulier que l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne qu'il n'y a pas de portefeuille dominant et qu'en l'absence de portefeuille dominant la loi du prix unique est vérifiée.

Loi du prix unique

- **Définition:**
- On dit que la loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas deux portefeuilles \hat{H} et \tilde{H} tels que :

$$\forall \omega \in \Omega, \hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega)$$

$$\hat{V}_0 \neq \tilde{V}_0$$

- Ceci signifie que deux portefeuilles identiques (c'est-à-dire rapportant la même chose dans tous les états de la nature) doivent coûter la même chose.

- **Proposition 4:**

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas de portefeuille $H \in \mathfrak{R}^{N+1}$ tel que $V_0 \neq 0$ et $V_1 = 0$.

- **Proposition 5:**

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas de portefeuille $H \in \mathfrak{R}^{N+1}$ tel que $V_0^* \neq 0$ et $V_1^*(\omega) = 0 \forall \omega \in \Omega$.

- Dans cet exemple, la loi du prix unique est vérifiée:

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
B_t	1	2	2
$S_1(t)$	10	12	8
V_t	$H_0 + 10 H_1$	$2 H_0 + 12 H_1$	$2 H_0 + 8 H_1$

$$\begin{cases} 2H_0 + 12H_1 = 0 \\ 2H_0 + 8H_1 = 0 \end{cases}$$

- Une solution unique $H = (0, 0)$. On a $V_0 = 0$.

- Dans cet exemple, la loi du prix unique n'est pas vérifiée:

		t = 1		
	t = 0	ω_1	ω_2	ω_3
B_t	1	1	1	2
$S_1(t)$	10	8	12	20
$S_2(t)$	5	12	8	20
V_t	$H_0 + 10 H_1 + 5 H_2$	$H_0 + 8 H_1 + 12 H_2$	$H_0 + 12 H_1 + 8 H_2$	$2 H_0 + 20 H_1 + 20 H_2$

$$\begin{cases} H_0 + 8H_1 + 12H_2 = 0 \\ H_0 + 12H_1 + 8H_2 = 0 \\ 2H_0 + 20H_1 + 20H_2 = 0 \end{cases}$$

- $H = (-20 \lambda, \lambda, \lambda)$ est solution et $V_0 = -20 \lambda + 10 \lambda + 5 \lambda = -5 \lambda \neq 0$.

La notion de portefeuille dominant

- **Définition :**

On dit que le portefeuille \hat{H} domine \tilde{H} si et seulement si $\hat{V}_0 = \tilde{V}_0$ et $\hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega) \forall \omega \in \Omega$.

- **Proposition 6:**

Les assertions suivantes sont équivalentes:

Il existe un portefeuille dominant.

Il existe un portefeuille H tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$

Il existe un portefeuille H tel que $V_0 < 0$ et $V_1(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$

Il existe un portefeuille H tel que $\forall \omega \in \Omega, G(\omega) > 0$

- **Proposition 7:** Les assertions suivantes sont équivalentes:

Il existe un portefeuille dominant.

Il existe un portefeuille H tel que $V_0^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

Il existe un portefeuille H tel que $V_0^* < 0$ et $V_1^*(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

Il existe un portefeuille H tel que $\forall \omega \in \Omega, G^*(\omega) > 0$

- **Proposition 8:**

S'il n'existe pas de portefeuille dominant, alors la loi du prix unique est vérifiée.

Exemple 2:

$$r = 0 \quad N = 2 \quad K = 2 \quad S_1(0) = 2 \quad S_1(1)(\omega_1) = 2 \quad S_1(1)(\omega_2) = 1$$
$$S_2(0) = 3 \quad S_2(1)(\omega_1) = 2 \quad S_2(1)(\omega_2) = 1$$

La loi du prix unique n'est pas vérifiée : $H = (0, 1, -1)$ est tel que $V_0 = -1$ et $V_1(\omega_1) = 0 = V_1(\omega_2)$.

Il existe un portefeuille dominant : $H = (1, 1, -1)$ est tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega_1) = V_1(\omega_2) = 1 > 0$.

Notons que la réciproque est fausse.

Exemple 3:

$$r=1 \quad N=1 \quad K=2 \quad S_0=10 \quad S_1(\omega_1)=12 \quad S_1(\omega_2)=8$$

$$V_0 = H_0 + 10H_1$$

$$V_1(\omega_1) = 2H_0 + 12H_1$$

$$V_1(\omega_2) = 2H_0 + 8H_1$$

On veut trouver un portefeuille $H = (H_0, H_1)$ tel que

$$(I) \begin{cases} V_1(\omega_1) = X_1 \\ V_1(\omega_2) = X_2 \end{cases}$$

Il existe une solution unique (pour $X = (X_1, X_2)$ donné) à ce système d'équations

$$H_0 = \frac{3X_2 - 2X_1}{2} \quad H_1 = \frac{X_1 - X_2}{4}$$

Par conséquent le prix d'un portefeuille quelconque rapportant $X = (X_1, X_2)$ est indépendant de $H = (H_0, H_1)$

La loi du prix unique est vérifiée puisque deux portefeuilles rapportant la même chose doivent coûter la même chose (en fait ici, deux portefeuilles différents auront des paiements différents car le système (I) admet une solution unique).

En revanche, il existe $H = (H_0, H_1)$ tel que $V_0 = 0$ et $V_1 \gg 0$

Par exemple $H = (10, -1)$ est tel que $V_0 = 0$ et $V_1 = (8, 12)$

Par conséquent, la loi du prix unique ne suffit pas à empêcher l'existence de portefeuilles dominants.

Arbitrage

- **Définition:**

Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille H tel que :

$$(i) \quad V_0 \leq 0, \quad V_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad E_P V_1 > 0$$

(opportunité d'arbitrage du premier type)

ou

$$(ii) \quad V_0 < 0, \quad V_1 \geq 0$$

(opportunité d'arbitrage du deuxième type)

- **Proposition 9:**

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- Il existe des opportunités d'arbitrage.

- Il existe un portefeuille H tel que

$$V_0 = 0$$

$$V_1 \geq 0 \text{ et } E_P V_1 > 0$$

- Il existe un portefeuille H tel que

$$G \geq 0 \text{ et } E_P G > 0$$

- **Proposition 10:**

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- Il existe des opportunités d'arbitrage.

- Il existe un portefeuille H tel que

$$V_0^* = 0$$

$$V_1^* \geq 0 \text{ et } E_P V_1^* > 0$$

- Il existe un portefeuille H tel que

$$G^* \geq 0 \text{ et } E_P G^* > 0$$

- **Proposition 11:**

S'il existe un portefeuille dominant alors il existe une opportunité d'arbitrage.

Cette proposition revient à dire (c'est la contraposée de la proposition 11) qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage il ne peut exister de portefeuille dominant (et par conséquent, d'après la proposition 7, la loi du prix unique est vérifiée).

- Notons que la réciproque est fausse.

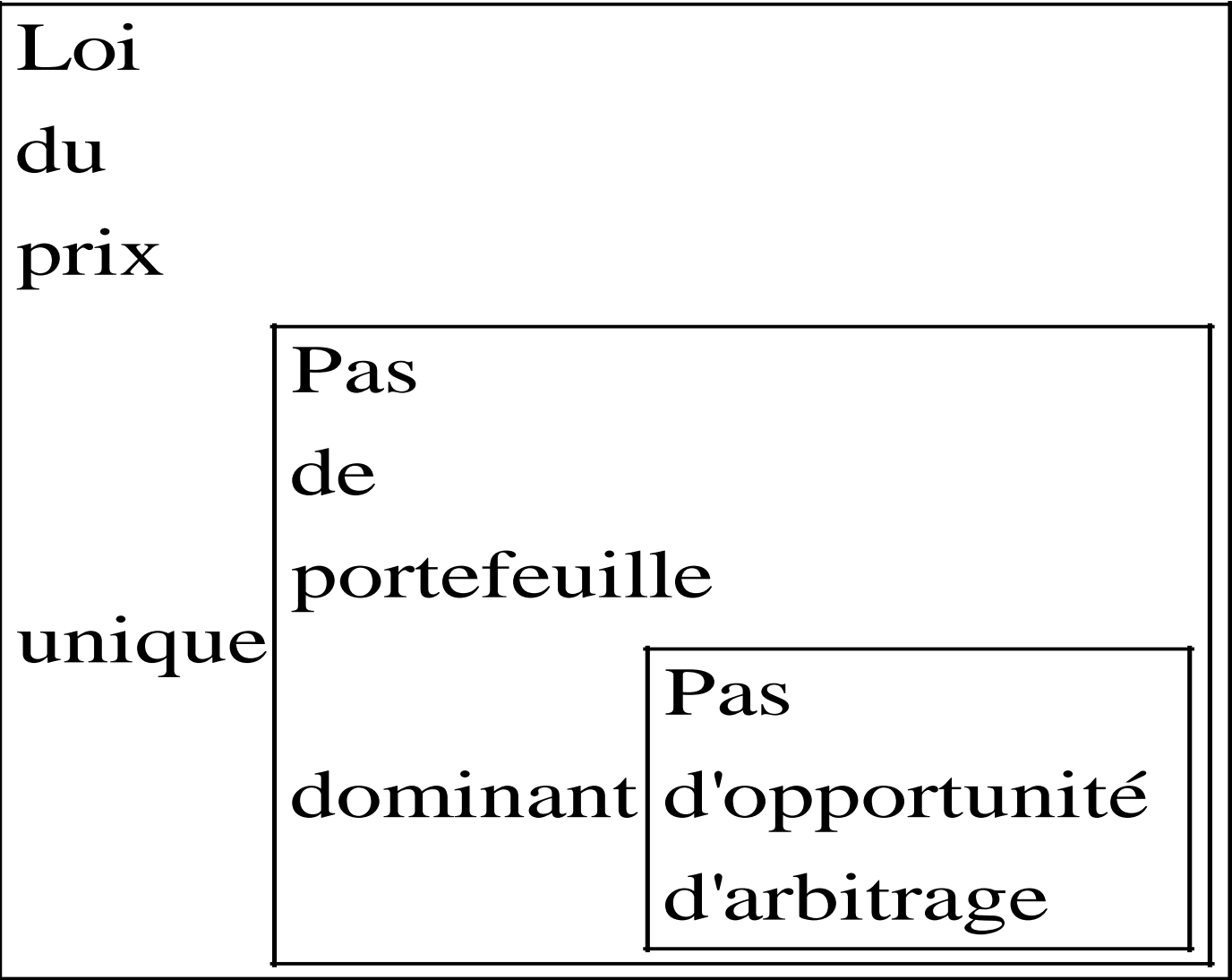
Exemple 4 : En effet, soient $K=2$, $N=1$, $r=0$, $S_0=10$, $S_1(\omega_1)=12$, $S_1(\omega_2)=10$

$H = (-10, 1)$ est une opportunité d'arbitrage:

$$V_0 = -10 + 1 \times 10 = 0$$

$$V_1 = -10 \times 1 + 1 S_1(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ si } \omega_1 \\ 0 \text{ si } \omega_2 \end{cases}$$

En revanche il n'y a pas de portefeuille dominant. D'après la proposition 6 il existe un portefeuille dominant ssi il existe un portefeuille $H = (H_0, H_1)$ tel que $V_0 = H_0 + 10 H_1 = 0$ et $V_1(\omega_1) = H_0 + 12 H_1 > 0$, $V_1(\omega_2) = H_0 + 10 H_1 > 0$. Or il est impossible de satisfaire simultanément les 3 conditions. De la première on tire $H_0 = -10 H_1$ ce qui donne $V_1(\omega_1) = 2 H_1 > 0$ si $H_1 > 0$ et $V_1(\omega_2) = 0$.



Proposition 12:

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il existe $\beta \in \mathfrak{R}^K / \{\mathbf{0}\}$ tel que

$$S_n^*(0) = \sum_{k=1}^K \beta_k S_n^*(1)(\omega_k)$$

pour tout $n = 1, \dots, N$ et $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$

Proposition 13:

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il existe $\beta \in \mathfrak{R}^K / \{\mathbf{0}\}$, $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$ tel que pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^* = \sum_{k=1}^N \beta_k V_1^*(\omega_k)$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^K \beta_k G^*(\omega_k) = 0$$

- Exemple: Dans cet exemple, la loi du prix unique est vérifiée :

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
B_t	1	2	2
$S_1(t)$	10	12	8
$S_1^*(t)$	10	6	4
V_t^*	$H_0 + 10 H_1$	$H_0 + 6 H_1$	$H_0 + 4 H_1$
G^*		$- 4 H_1$	$- 6 H_1$

$$\begin{cases} 10 = \beta_1 \times 6 + \beta_2 \times 4 \\ 1 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = 3 \\ \beta_2 = -2 \end{cases}$$

$$H_0 + 10H_1 = \beta_1 (H_0 + 6H_1) + \beta_2 (H_0 + 4H_1)$$

$$H_0 + 10H_1 = H_0 (\beta_1 + \beta_2) + H_1 (6\beta_1 + 4\beta_2)$$

$$\begin{cases} 6\beta_1 + 4\beta_2 = 10 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

$$0 = \beta_1 (-4H_1) + \beta_2 (-6H_1)$$

$$0 = -2H_1 (2\beta_1 + 3\beta_2)$$

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 3\beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

- Dans cet exemple, la loi du prix unique n'est pas vérifiée :

		t = 1		
	t = 0	ω_1	ω_2	ω_3
B_t	1	1	1	2
$S_1(t)$	10	8	12	20
$S_2(t)$	5	12	8	20
V_t^*	$H_0 + 10 H_1 + 5 H_2$	$H_0 + 8 H_1 + 12 H_2$	$H_0 + 12 H_1 + 8 H_2$	$H_0 + 10 H_1 + 10 H_2$
G^*		$-2 H_1 + 7 H_2$	$2 H_1 + 3 H_2$	$5 H_2$

$$\begin{cases} 10 = \beta_1 \times 8 + \beta_2 \times 12 + \beta_3 \times 10 \\ 5 = \beta_1 \times 12 + \beta_2 \times 8 + \beta_3 \times 10 \\ 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

En faisant la somme des deux premières équations on obtient une incompatibilité :

$$\begin{cases} 15 = 20(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

$$H_0 + 10H_1 + 5H_2 = \beta_1(H_0 + 8H_1 + 12H_2) + \beta_2(H_0 + 12H_1 + 8H_2) + \beta_3(H_0 + 10H_1 + 10H_2)$$

$$H_0 + 10H_1 + 5H_2 = H_0(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + H_1(8\beta_1 + 12\beta_2 + 10\beta_3) + H_2(12\beta_1 + 8\beta_2 + 10\beta_3)$$

$$\begin{cases} 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 10 = 8\beta_1 + 12\beta_2 + 10\beta_3 \\ 5 = 12\beta_1 + 8\beta_2 + 10\beta_3 \end{cases}$$

En faisant la somme des deux dernières équations on obtient une incompatibilité :

$$\begin{cases} 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 15 = 20(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \end{cases}$$

$$0 = \beta_1(-2H_1 + 7H_2) + \beta_2(2H_1 + 3H_2) + \beta_3(5H_2)$$

$$0 = H_1(-2\beta_1 + 2\beta_2) + H_2(7\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3)$$

$$\begin{cases} -2\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ 7\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3 = 0 \end{cases} \quad 5(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0$$

Définition: Le vecteur Π est une mesure linéaire d'évaluation si et seulement si c'est une mesure de probabilité sur Ω telle que :

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) S_n^*(1, \omega) \quad n = 1, \dots, N$$

où $\forall \omega \in \Omega, \Pi(\omega) \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) = 1$

Proposition 14: Π est mesure linéaire d'évaluation si et seulement si pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) V_1^*(\omega)$$

ou encore

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) G^*(\omega) = 0$$

où $\forall \omega \in \Omega, \Pi(\omega) \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) = 1$

• Proposition 15:

Il existe une mesure linéaire d'évaluation si et seulement si il n'existe pas de portefeuille dominant.

Définition :

Une mesure de probabilité Q sur Ω est une mesure de probabilité risque-neutre si et seulement si :

$$a) \quad Q(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{et} \quad \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$$

$$b) \quad E_Q \left[\Delta S_n^* \right] = 0 \quad n = 1, \dots, N$$

ce qui équivaut à

$$S_n^* (0) = E_Q \left[S_n^* (1) \right] \quad n = 1, \dots, N$$

Théorème fondamental de l'arbitrage

- **Proposition 16:**
- Il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage si et seulement si il existe une mesure de probabilité risque neutre Q .

- Un droit conditionnel est une variable aléatoire X représentant un paiement à la date $t = 1$. Les droits conditionnels font l'objet d'un contrat entre un vendeur et un acheteur en $t = 0$. Le vendeur promet à l'acheteur de lui payer $X(\omega)$ en $t = 1$ si l'état de la nature est $\omega \in \Omega$. Le problème est de déterminer le "juste prix" que l'acheteur doit payer au vendeur en $t = 0$.

- **Définition :**

Un droit conditionnel X est réalisable si et seulement s'il existe un portefeuille H , tel que $V_1 = X$.

On dit encore que H permet d'atteindre X ou que X est accessible.

- **Définition (Principe d'évaluation):**

Supposons la loi du prix unique vérifiée. On appelle le "juste prix" en $t = 0$ d'un droit conditionnel réalisable X la valeur p donnée par la formule :

$$p = V_0 \equiv H_0 B_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n (0)$$

où V_0 est le coût d'un portefeuille H qui permet d'atteindre X .

- **Proposition 17:**
- Si Q est une mesure de probabilité risque-neutre quelconque alors pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^* = E_Q [V_1^*]$$

$$E_Q [G^*] = 0$$

En d'autres termes, sous la mesure de probabilité Q , la valeur actualisée à la date 1 de n'importe quel portefeuille est égale à sa valeur initiale. On déduit de cette proposition que s'il existe une probabilité strictement positive que la valeur du portefeuille augmente, il existe également une probabilité positive que la valeur du portefeuille diminue. Par conséquent, il n'existe pas de portefeuille dominant.

- Vérification:

Supposons $K = 3$, $N = 1$, $r = 1/9$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = 20/3$,
 $S_1(\omega_2) = 40/9$, $S_1(\omega_3) = 30/9$.

L'ensemble des mesures de probabilités risque-neutre est donné par:

$$M = \left\{ Q = \left(\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-3\lambda}{2}, \lambda \right) \text{ où } 0 < \lambda < 1/3 \right\}$$

$$G^*(\omega) = H_1 \Delta S_1^*(\omega) = \begin{cases} H_1 & \text{si } \omega_1 \\ -H_1 & \text{si } \omega_2 \\ -2H_1 & \text{si } \omega_3 \end{cases}$$

$$E_Q[G^*] = \left(\frac{1+\lambda}{2} \right) \times H_1 + \left(\frac{1-3\lambda}{2} \right) \times (-H_1) + \lambda \times (-2H_1)$$

$$= \lambda \left(\frac{H_1 + 3H_1}{2} - 2H_1 \right) + \left(\frac{H_1 - H_1}{2} \right) = 0$$

- **Proposition 18:**
- En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur p en $t = 0$ d'un droit conditionnel réalisable X est donnée par :

$$p = E_Q [X/B_1]$$

où Q est une mesure de probabilité risque neutre quelconque.

- **Proposition 19:**

S'il n'existe pas de portefeuille dominant alors la valeur p en $t = 0$ d'un droit conditionnel réalisable X est donnée par :

$$p = E_{\pi} [X/B_1]$$

où π est une mesure linéaire d'évaluation quelconque.

On ne peut utiliser la méthode d'évaluation précédente lorsque le droit conditionnel X n'est pas réalisable.

Définition :

On dit que les marchés sont complets si tout droit conditionnel X peut être dupliqué par un portefeuille:

$$\forall X \in \mathcal{R}^K \exists H \in \mathcal{R}^{N+1}, V = X.$$

Dans le cas contraire on dit que les marchés sont incomplets.

Proposition 20:

Les marchés sont complets si et seulement si le nombre d'états de la nature est égal au nombre de vecteurs indépendants dans $\{B_1, S_1(1), \dots, S_N(1)\}$

- **Proposition 21:**

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage alors:

Le droit conditionnel X est réalisable si et seulement si $E_Q[X/B_1]$

prend la même valeur pour toute mesure de probabilités risque neutre $Q \in M$

D'après la proposition 20 les marchés sont complets si et seulement si le rang de la matrice des paiements des actifs financiers est égal au nombre d'états de la nature. Ce résultat reste vrai qu'il y ait des opportunités d'arbitrage ou non. Dans le cas d'absence d'opportunités d'arbitrage il existe une façon plus simple de caractériser la complétude des marchés:

Proposition 22:

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage alors:

Les marchés sont complets si et seulement si M contient exactement une seule mesure de probabilité risque neutre.

- **Proposition 23:**

Supposons qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage. Le juste prix de X est compris entre la borne supérieure de D et la borne inférieure de C :

$$V_-(\mathbf{X}) \leq p \leq V_+(\mathbf{X})$$

$V_-(X)$ et $V_+(X)$ sont définis par :

$$V_-(X) = \text{Max}\{v \in \mathfrak{R} : \exists H \in \mathfrak{R}^{N+1}, v = V_0 \text{ et } V_1 \leq X\}$$

$$V_+(X) = \text{Min}\{v \in \mathfrak{R} : \exists H \in \mathfrak{R}^{N+1}, v = V_0 \text{ et } V_1 \geq X\}$$

Proposition 24: si $M \neq \emptyset$

alors pour tout droit conditionnel X on a :

$$V_+(X) = \sup_{Q \in M} E_Q[X/B_1]$$

$$V_-(X) = \inf_{Q \in M} E_Q[X/B_1]$$

De plus, si X est réalisable alors

$$V_+(X) = V_-(X) = p$$

Rendement et risque

- Dans cette section nous allons montrer que la prime de risque d'un portefeuille arbitraire est proportionnelle à la covariance entre un rendement correspondant à la densité des prix d'état et le rendement du portefeuille.

- **Définition:**

- Supposons $S_n(0) > 0$ pour tout $n = 1, \dots, N$. Le taux de rendement de l'actif $n = 0, 1, \dots, N$ est défini par :

$$R_n \equiv \frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)} \quad n=1, \dots, N$$

$$R_0 \equiv \frac{B_1 - B_0}{B_0} \quad (= r \text{ lorsque le rendement du compte bancaire est déterministe})$$

- **Définition:**

Supposons $V_0 \neq 0$. Le taux de rendement d'un portefeuille H est donné par:

$$R \equiv \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

où V_t est la valeur du portefeuille H à la date t.

Proposition 25:

Soit H un portefeuille tel que $V_0 \neq 0$. Le taux de rendement du portefeuille est donné par :

$$R = \alpha_0 R_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n R_n$$

$$\alpha_0 \equiv \frac{H_0 B_0}{V_0}$$

$$\alpha_n = \frac{H_n S_n(0)}{V_0}$$

$n = 1, \dots, N$.

α_n est le pourcentage de la valeur du portefeuille investie dans l'actif n :

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n = 1$$

- **Définition:**

Supposons $S_n^*(0) > 0$ pour tout $n = 1, \dots, N$. Le taux de rendement de l'actif $n = 1, \dots, N$ exprimé en terme du numéraire est défini par :

$$R_n^* \equiv \frac{S_n^*(1) - S_n^*(0)}{S_n^*(0)} \quad n = 1, \dots, N$$

C'est le taux de croissance de la valeur de l'actif n exprimé en terme du numéraire. Notons que le rendement du compte bancaire exprimé en terme du numéraire est nul :

$$R_0^* \equiv \frac{1-1}{1} = 0$$

Proposition 26:

$$R_n^* = \frac{(R_n - R_0)}{(1 + R_0)}$$

où $n = 1, \dots, N$

- Définition:

Supposons $V_0^* \neq 0$. Le taux de rendement exprimé en terme du numéraire d'un portefeuille H est donné par:

$$R^* \equiv \frac{V_1^* - V_0^*}{V_0^*}$$

où V_t^* est la valeur du portefeuille H à la date t exprimée en terme du numéraire.

- **Proposition 27:**

- Soit H un portefeuille tel que $V_0^* \neq 0$. Le taux de rendement du portefeuille est donné par :

$$R^* = \sum_{n=1}^N \alpha_n R_n^* \qquad \alpha_n = \frac{H_n S_n^*(0)}{V_0^*}$$

α_n est le pourcentage de la valeur du portefeuille investi dans l'actif n. Notons que

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \neq 1$$

- **Proposition 28:**
- Q est une mesure de probabilité corrigée du risque si et seulement si :

$$E_Q R_n^* = 0 \quad n = 1, \dots, N$$

$$\forall \omega \in \Omega, Q(\omega) > 0 \quad \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$$

- **Proposition 29:**

Si l'actif sans numéraire est certain Q est une mesure de probabilité corrigée du risque si et seulement si :

$$E_Q R_n = r \quad n=1, \dots, N$$

$$\forall \omega \in \Omega, Q(\omega) > 0 \quad \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$$

- **Définition:**

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage.

Soit $L(\omega) \equiv \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ le vecteur de prix d'état.

- On appelle prime de risque d'un actif la différence entre l'espérance mathématique du rendement d'un actif et le taux de rendement sans risque (le taux de rendement du compte bancaire lorsqu'il est déterministe). En quelque sorte c'est le taux de rendement supplémentaire que doit rapporter un actif risqué pour inciter des individus éprouvant de l'aversion au risque à le détenir.

- **Proposition 30:**

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. La prime de risque d'un actif est liée par la relation suivante à la covariance du rendement de cet actif et de la densité des prix d'état :

$$E_P R_n - r = -\text{Cov}_P (R_n, L) \quad n=1, \dots, N$$

- **Proposition 31 :**
- Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Soit R le taux de rendement du portefeuille $H=(H_0, H_1, \dots, H_N)$ et supposons $V_0 > 0$

$$E_P R - r = -\text{Cov}_P (R, L)$$

- **Proposition 32:**

- Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Supposons que le droit conditionnel $a + bL$ ($b \neq 0$)

est généré par un portefeuille dont le taux de rendement est R' et supposons que le taux d'intérêt sans risque est déterministe. Soit R le taux de rendement d'un portefeuille quelconque. Alors :

$$(E_P R - r) = \frac{\text{cov}_P(R, R')}{\text{var}_P R'} (E_P R' - r)$$

On peut montrer également que :

$$(E_P R_n - r) = \frac{\text{cov}_P(R_n, R')}{\text{var}_P R'} (E_P R' - r)$$

$$E_P R^* = \frac{\text{Cov}_P(R^*, R'^*)}{\text{var}_P R'^*} E_P R'^*$$