Introduction à la plasticité

Hervé Oudin

▶ **To cite this version:**

Hervé Oudin. Introduction à la plasticité. École d'ingénieur. Ecole Centrale de Nantes, France. 2009, pp.49. cel-00483603

HAL Id: cel-00483603
https://cel.hal.science/cel-00483603

Submitted on 27 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Introduction à la plasticité

Hervé Oudin

École Centrale de Nantes
2009

Ce document est mis en page à l'aide de la classe Latex *tufte-book* dont les termes de la licence d'utilisation sont disponibles sur le site `http://code.google.com/p/tufte-latex/`. Quant au contenu, il est sous licence Creative Commons : paternité ; pas d'utilisation commerciale ; partage des conditions initiales à l'identique ; 3.0 France `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr`

Table des matières

Table des matières 3

Introduction 5

Généralités 7

Mécanismes physiques de déformation 7
Phénomènes observés ○ Techniques d'essais

Modèles analogiques 8
Modèles linéaires ○ Modèles non linéaires

Plasticité des barres 13

Essai de traction 13

Modélisation du comportement en traction–compression 14
Modèles avec écrouissage ○ Modèles parfaits ○ Critère de plasticité ○ Lois d'écoulement plastique

Résolution explicite d'un problème d'élasto-plasticité 17
Solution analytique ○ Solution éléments finis

Résolution numérique d'un problème élasto-plastique 25
Algorithmes de calcul ○ Projection sur le critère de plasticité ○ Application à la structure treillis

Plasticité des poutres 31

Rappels et notations 31

Modèle élasto-plastique 31
Flexion pure ○ Flexion simple

Modèle simplifié – rotule plastique 36

Plasticité 3D 39

Critères de plasticité 39
Critère de Von Mises ○ Critère de Tresca ○ Prise en compte de l'écrouissage

Loi d'écoulement plastique 43
Définition ○ Principe de Hill ○ Condition de charge ○ Loi de normalité

Résolution numérique 45
Intégration de la loi de comportement ○ Application aux éléments finis

Bibliographie 49

Introduction

L'objectif de ce document est de présenter le modèle de comportement *élasto-plastique classique* dans le cadre des petites transformations.

Le premier chapitre est une rapide introduction des phénomènes physiques. Nous présentons les mécanismes de déformations, les techniques d'essais et quelques modèles rhéologiques.

Le deuxième chapitre concerne l'évolution élasto-plastique des structures treillis constituées de barres. Nous introduisons des notions importantes : critère de plasticité, condition de charge, méthodes itératives de résolution et projection sur le critère à partir d'un exemple simple traité par différentes méthodes.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'évolution élasto-plastique des poutres. Après avoir présenté un modèle élasto-plastique pour des essais de flexion, nous introduisons la notion de rotule plastique. Ce modèle simplifié est utilisé pour le calcul des charges limites des portiques.

Dans le dernier chapitre, nous formalisons les notions abordées au cours du deuxième chapitre pour les appliquer aux problèmes tri-dimensionnels.

Généralités

Ce premier chapitre distingue les phénomènes mécaniques impliqués dans la plasticité classique où le temps et les vitesses de déformation ne jouent qu'un rôle secondaire de ceux pour lesquels le temps et/ou les vitesses de déformation jouent un rôle important comme les phénomènes de fluage, de fatigue ou de plasticité dynamique.

Mécanismes physiques de déformation

Le comportement macroscopique est en fait le résultat de déformations locales à une échelle microscopique. Cet aspect microscopique est fondamental pour la compréhension physique des phénomènes et relève du domaine des matériaux.

Les concepts présentés dans ce document permettent de modéliser, dans une certaine mesure et de manière macroscopique, l'ensemble de ces phénomènes microscopiques qui sont à l'origine d'un comportement global irréversible.

Dans un premier temps, rappelons le vocabulaire relatif aux phénomènes observés et aux principales techniques d'essai. Pour compléter ces informations, il est possible de consulter les ouvrages [1] [2].

[1] D. François, A. Pineau et A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991

[2] J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985

Phénomènes observés

Les différents phénomènes observés peuvent être classifiés comme suit :

Déformations élastiques — Elles correspondent à des variations des espaces interatomiques et à des mouvements réversibles de dislocations [3]. Ces déformations sont essentiellement instantanément réversibles et la configuration initiale est retrouvée après décharge.

[3] Dislocation : défaut dans la structure du réseau cristallin. Le nombre de dislocations augmente lorsque l'on charge le matériau.

Déformations visqueuses — Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n'y a plus équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux. Lors de ce phénomène favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

Déformations permanentes — Elles correspondent aux *mouvements irréversibles des dislocations*. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques [4]. En pratique ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline et le volume reste inchangé, on parle *d'incompressibilité plastique*.

[4] Plan cristallographique : plan de plus grande densité d'atomes

Écrouissage — Ce phénomène aussi appelé *consolidation* correspond à une augmentation du nombre de point de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l'augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au-delà duquel les déformations ne sont plus réversibles.

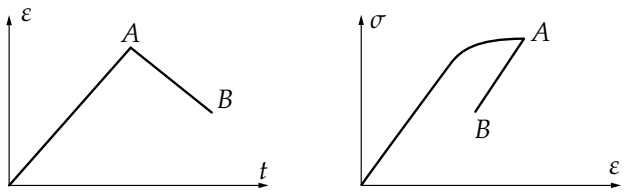
Restauration — Ce phénomène aussi appelé recouvrance correspond à une recristallisation par regroupement de dislocations de signe opposé. Il se produit dans le temps et est favorisé par l'activation thermique.

Techniques d'essais

L'objectif des essais est de fournir à l'ingénieur, les caractéristiques mécaniques du matériau nécessaires aux calculs qu'il compte mener. Lors de ces essais, on observe

les déformations que subit une éprouvette sous l'action d'un système donné de contraintes. Les différents essais d'écrouissage à température constante peuvent être classifiés comme suit :

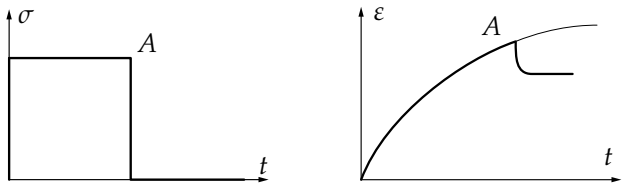
Écrouissage — Essai pour lequel la déformation ε est imposée à vitesse constante ;



(a) imposé (b) mesuré

Fig. 1: écrouissage

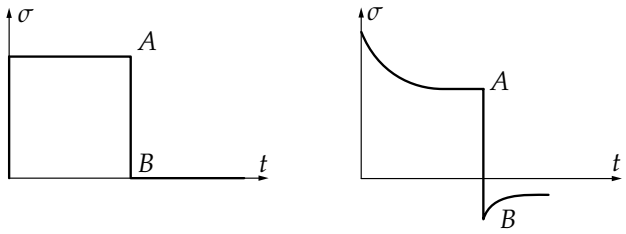
Fluage + recouvrance — Essai pour lequel la contrainte σ est imposée grâce à une fonction échelon suivi d'attente à contrainte nulle. La courbe de réponse caractérise la *déformation retardée* ;



(a) imposé (b) mesuré

Fig. 2: fluage + recouvrance

Relaxation — Essai pour lequel la déformation ε est imposée selon une fonction échelon. La courbe de réponse caractérise la viscosité.



(a) imposé (b) mesuré

Fig. 3: relaxation

Pour être reproductibles, ces essais sont normalisés[5]. Ils peuvent être réalisés sur des éprouvettes de géométrie différente. Citons les essais les plus classiques :

- chargement simple : traction *essai unidimensionnel* ;
- chargement complexe : traction – torsion d'un tube mince, traction – pression d'un tube mince, traction biaxiale, compression triaxiale.

[5] Les différents essais normalisés sont disponibles sur le site de l'AFNOR www.afnor.fr

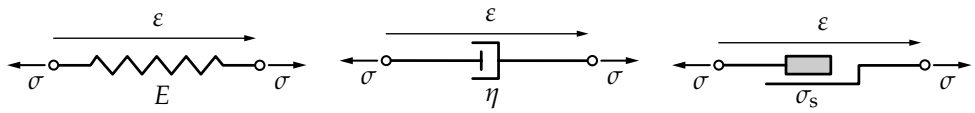
Modèles analogiques

Ces modèles permettent d'avoir une image concrète simplifiée des équations traduisant les lois de comportement générales tensorielles. Les trois éléments mécaniques le plus utilisés sont décrits sur la figure 4.

Modèles linéaires

Ces modèles sont constitués d'assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires.

Fig. 4: éléments d'assemblage

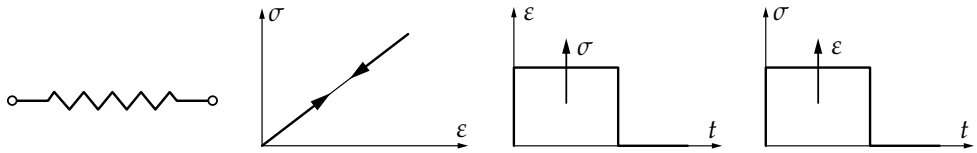


(a) ressort : élasticité linéaire parfaite $\sigma = E\varepsilon$ (b) amortisseur : viscosité linéaire newtonienne $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ (c) patin : modèle rigide plastique parfait $|\sigma| \leqslant \sigma_s$

Élastique parfaite

La relation qui lie les déformations aux contraintes est $\sigma = f(\varepsilon)$ comme indiqué sur la figure 5. La réversibilité est instantanée, le tableau suivant donne l'allure caractéristique des courbes de réponses aux trois types d'essais évoqués précédemment.

Fig. 5: élasticité parfaite



(a) $\sigma = E\varepsilon$ (b) écrouissage (c) fluage (d) relaxation

Viscosité parfaite

Dans ce cas, les contraintes dépendent seulement de la variation temporelle des déformations tel que $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$. Les différentes relations contraintes-déformations sont illustrées sur la figure 6.

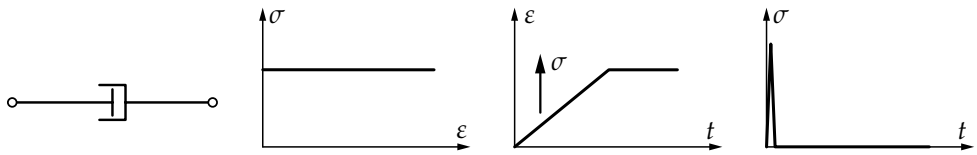
L'essai de fluage impose $\sigma = \sigma_0$, ce qui entraîne :

$$\varepsilon = \sigma_0/\eta t \tag{1}$$

et $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon = \varepsilon_1$, soit un fluage illimité à t_∞.

L'essai de relaxation est théoriquement impossible, on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système, car à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie. Ce que nous modéliserons par une *fonction de dirac*.

Fig. 6: viscosité parfaite



(a) $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ (b) écrouissage (c) fluage (d) relaxation

Visco–élasticité

Dans ce cas, les contraintes dépendent à la fois des déformations et de leur variation temporelle tel que $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$.

Différents modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle. Les allures des courbes de réponse sont données sur la figure 7.

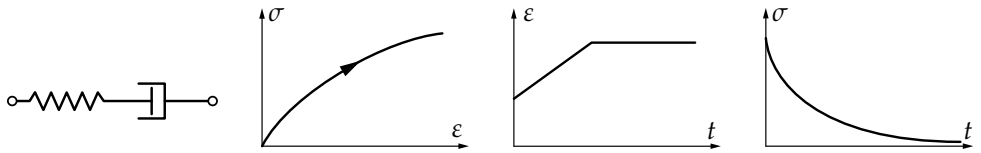
Modèle de Maxwell Le modèle de Maxwell est décrit sur la figure 7. Pour l'essai de fluage $\sigma = \sigma_0$ entraîne :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}t + \frac{\sigma_0}{E} \tag{2}$$

où $\frac{\sigma_0}{E}$ représente une déformation instantanée. Une contrainte $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon =$ cste $= \varepsilon_1$ soit un fluage illimité à t_∞. L'essai de relaxation $\varepsilon = \varepsilon_0$ conduit à :

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} \tag{3}$$

autrement dit, une relaxation complète à t_∞.



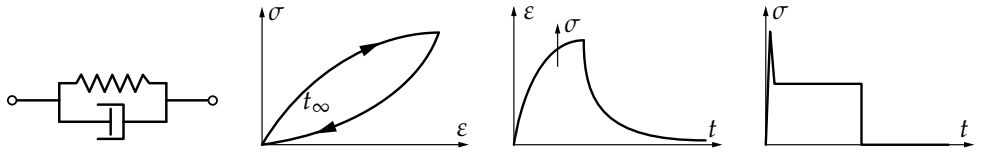
(a) $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$ (b) écrouissage (c) fluage (d) relaxation

Fig. 7: modèle de Maxwell

Modèle de Kelvin-Voigt Ce modèle est décrit sur la figure 8. Pour l'essai de fluage $\sigma = \sigma_0$ entraîne $\varepsilon = \sigma_0/Et$ et $\sigma = 0$ entraîne $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ cste, soit un fluage limité dans le temps.

L'essai de relaxation est théoriquement impossible car on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système puisqu'à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie.

D'autres modèles plus complexes peuvent être construits sur le même principe.

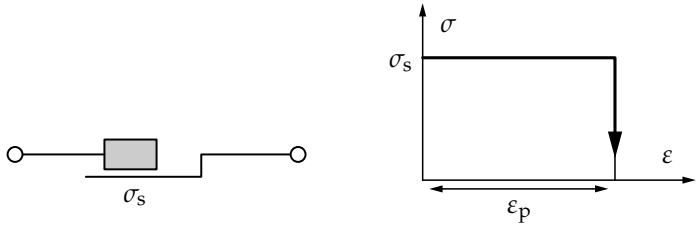


(a) $\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ (b) écrouissage (c) fluage (d) relaxation

Fig. 8: modèle de Kelvin-Voigt

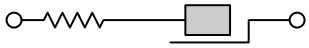
Modèles non linéaires

La non-linéarité peut venir du comportement du ressort ou de l'amortisseur et l'introduction d'un patin, par exemple. Toute combinaison comportant un élément non linéaire aura un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici à la non-linéarité caractérisant la plasticité (patin). Sur les figures 9, 10, 11 et 12 sont représentées les allures de la courbe de réponse à l'essai d'écrouissage pour les modèles que nous rencontrerons par la suite.

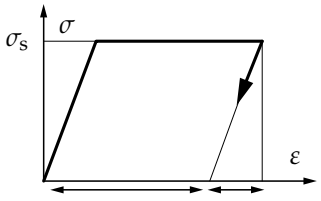


(a) analogie mécanique (b) essai d'écrouissage

Fig. 9: modèle rigide plastique parfait RPP

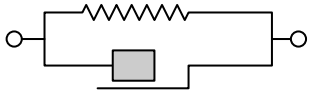


(a) analogie mécanique

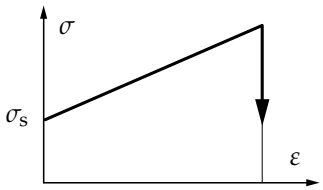


(b) essai d'écrouissage

Fig. 10: modèle élasto-plastique parfait EPP

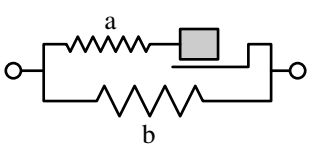


(a) analogie mécanique

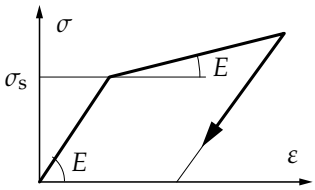


(b) essai d'écrouissage

Fig. 11: modèle rigide plastique avec écrouissage RPE



(a) analogie mécanique



(b) essai d'écrouissage

Fig. 12: modèle élasto-plastique avec écrouissage EPE

Plasticité des barres

Ce chapitre introduit les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction–compression. La modélisation de cet essai permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastique. Ces modèles sont ensuite soumis aux calculs analytique puis numérique des structures treillis.

Essai de traction

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique, à savoir hypothèses de transformations quasi-statiques en petites déformations et à température constante.

Considérons une éprouvette de traction sous la forme d'un cylindre homogène droit de section S_0 et de longueur ℓ_0. Cette éprouvette est soumise à un effort de traction F comme sur la figure 13. Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée). Nous posons $\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \Delta\ell/\ell_0$ et $\sigma = \sigma_{xx} = F/S_0$. Considérons les graphes (σ, ε) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation lors du chargement, nous obtenons les allures de la figure 14.

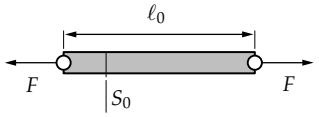


Fig. 13: éprouvette de traction

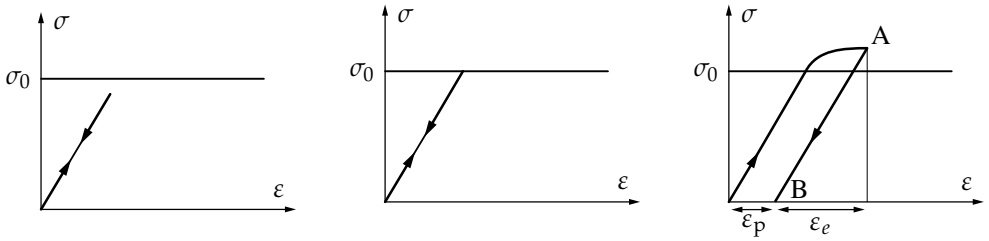


Fig. 14: traction avec décharge

(a) essai 1 : $\sigma < \sigma_0$ (b) essai 2 : $\sigma = \sigma_0$ (c) essai 3 : $\sigma > \sigma_0$

1. $\sigma < \sigma_0$: le système se situe dans le domaine élastique et le comportement du matériau est réversible. Il est supposé par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire, soit $\sigma = E\varepsilon_e$ où E est le module d'Young du matériau ;
2. $\sigma = \sigma_0$: cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité σ_0, seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle et correspond à une fraction de déformation permanente ;
3. $\sigma > \sigma_0$: la décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) ne subsiste que la déformation plastique ou déformation permanente ε_p.

En tout point de la courbe, la déformation est $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$. Effectuons maintenant une série de charges–décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure 15. Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage. En première approximation, nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone ;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

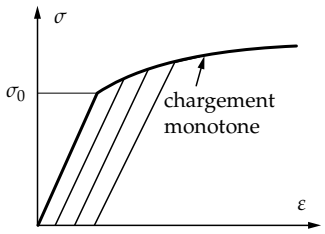


Fig. 15: réponse à une série de charges-décharges consécutives

Par conséquent, connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone.

En fait le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité. Prenons l'exemple d'un chargement cyclique pour montrer que la connaissance de l'état actuel (σ, ε_p) ne suffit pas *a priori* pour définir le domaine d'élasticité actuel. Sur la figure 16, après décharge nous obtenons le point O', la déformation plastique est définie par le segment OO'. Or dans cet état, la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage. Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental. De plus, il faut distinguer deux cas :

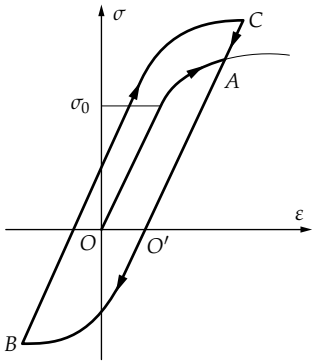


Fig. 16: historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC

Charge plastique — Il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.

Charge ou décharge élastique — Il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

En résumé, l'évolution plastique ne peut se traduire que par des lois incrémentales reliant à un instant donné les incréments des paramètres d'écrouissage et de déformation plastique à partir de l'état actuel. Pour l'étude des problèmes quasi–statique d'élasto-plasticité (sans vieillissement ni viscosité), nous utilisons donc un temps cinématique t pour repérer les états successifs du matériau en fonction de l'historique des sollicitations.

Modélisation du comportement en traction–compression

Pour modéliser la courbe d'écrouissage de l'essais de traction–compression obtenue pour un chargement monotone, le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite. La figure 17 représente un modèle multi-linéaire. Dans la suite, nous limiterons la présentation à des modèles bi-linéaires ayant la même limite d'élasticité initiale en traction et en compression.

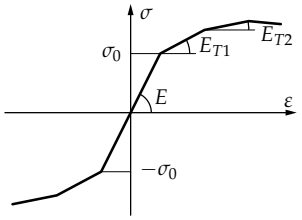
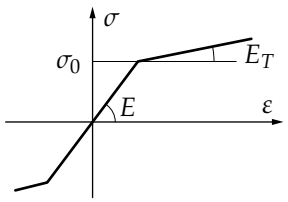


Fig. 17: modèle d'écrouissage multi-linéaire

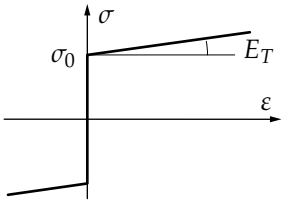
Modèles avec écrouissage

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques : c'est, par exemple, le cas pour les problèmes de mise en forme.

Lorsqu'il y a écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. Ils sont basés sur l'utilisation de la courbe d'écrouissage du chargement monotone, illustrée sur la figure 18.



(a) élasto-plastique avec écrouissage (EPE)



(b) rigide-plastique avec écrouissage (RPE)

Fig. 18: modèles d'écrouissage monotone

Écrouissage isotrope Ce modèle suppose une dilatation homothétique du domaine d'élasticité par rapport au domaine initial supposé connu. Le coefficient de dilatation dans le cas de l'écrouissage linéaire est défini par le module tangent E_T.

Pour un essai cyclique, l'hypothèse d'écrouissage isotrope donne une courbe similaire à celle représentée sur la figure 19. La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction. On note que dans ce modèle l'énergie de déformation élastique pouvant être absorbée est de plus en plus importante et toujours identique en traction et compression.

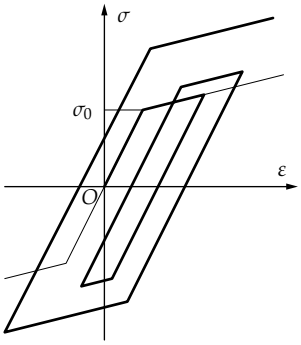


Fig. 19: hypothèse d'écrouissage isotrope

Écrouissage cinématique Ce modèle suppose une translation sans déformation du domaine d'élasticité initial supposé connu. La translation est définie à partir de la courbe d'écrouissage monotone.

Le modèle cinématique respecte l'effet Bauschinger couramment observé pour les matériaux métalliques, à savoir un durcissement dans un sens (sens de l'écoulement plastique) et un adoucissement d'égale amplitude dans le sens contraire (décharge élastique). La courbe correspondant à un essai cyclique avec écrouissage cinématique est indiquée sur la figure 20. L'amplitude du domaine d'élasticité reste constante mais l'énergie élastique absorbée et pouvant être restituée dans un sens est toujours différente de celle dans l'autre sens. En pratique, lors d'un essai cyclique, aucune de ces allures ne peut être observée. Il est possible de combiner ces deux modèles d'écrouissage pour essayer de se rapprocher au mieux de la réponse au chargement cyclique donné.

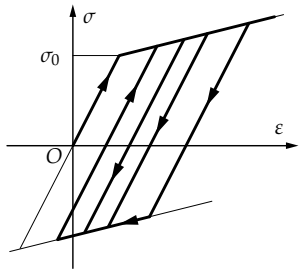
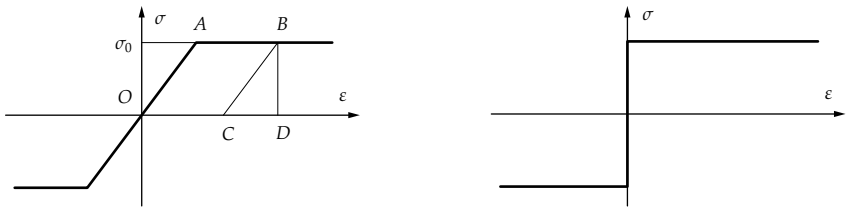


Fig. 20: hypothèse d'écrouissage cinématique

Modèles parfaits

Ces modèles négligent l'écrouissage du matériau. Le modèle élasto-plastique parfait est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.



(a) modèle élasto-plastique parfait EPP (b) modèle rigide-plastique parfait RPP

Fig. 21: modèle de courbe d'écrouissage monotone

Pour ce modèle, donnons une interprétation énergétique de la courbe d'écrouissage :

- OABD : énergie totale, ou travail des efforts intérieurs pour atteindre B ;
- OABC : énergie de dissipation plastique ;
- BCD : énergie de déformation élastique, elle est restituée à la décharge.

Le modèle rigide plastique parfait est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites [6]. Pour ces deux modèles, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau et perte d'équilibre.

[6] Lorsque l'écrouissage n'est pas négligé, l'énergie élastique restituée après plastification est toujours plus importante dans le sens de la déformation plastique.

Critère de plasticité

Ce qui précède nous permet de définir pour l'essai de traction–compression, les conditions de plastification (seuil de plasticité σ_s) et l'évolution du seuil en fonction des paramètres d'écrouissage $\sigma_s(h)$, h contient l'historique du chargement suivit pour obtenir l'état actuel.

Définition Le critère de plasticité est la fonction $f(\sigma, h)$ telle que :

- si $f(\sigma, h) < 0$, l'état actuel (σ, h) est intérieur au domaine d'élasticité ;

– si $f(\sigma, h) = 0$, l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles. Pour l'essai de traction–compression, le domaine d'élasticité est défini par :

$$\{\sigma \in \Re; f(\sigma, h) := |\sigma| - \sigma_s(h) \leqslant 0\} \tag{4}$$

Il nous reste à définir l'évolution du seuil de plasticité $\sigma_s(h)$. Représentons la courbe d'écrouissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire. Ce modèle est caractérisé par σ_0, la limite d'élasticité initiale, E, le module d'élasticité et E_T, le module tangent. Soit un incrément de charge $\mathrm{d}\sigma$ pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Nous avons :

$$\mathrm{d}\sigma = E_T \mathrm{d}\varepsilon \tag{5}$$

or :

$$\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\varepsilon_p + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\sigma \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T \mathrm{d}\varepsilon_p \tag{6}$$

d'où :

$$\mathrm{d}\sigma = H \mathrm{d}\varepsilon_p \quad \text{avec} \quad H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \tag{7}$$

Le quantité H est dite *module d'écrouissage*.

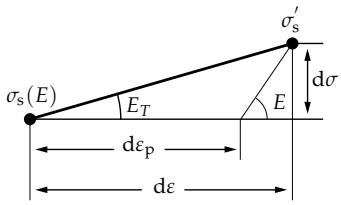


Fig. 22: incrément purement élastique

Résumé Utilisons le temps cinématique afin de définir les incréments. Le modèle bi-linéaire implique :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_e \tag{8}$$

où E est le module d'élasticité, et :

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\varepsilon} \tag{9}$$

avec E_T, module tangent, et :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p; \qquad \dot{\sigma} = H\dot{\varepsilon}_p \tag{10}$$

et H, module d'écrouissage défini dans l'équation (7).

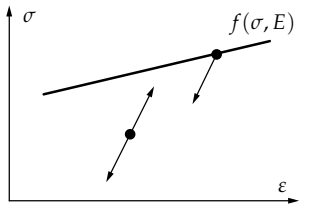


Fig. 23: incrément purement élastique

Lois d'écoulement plastique

Précisons maintenant comment s'effectuent les déformations pour un incrément de charge $\mathrm{d}\sigma$ pris à partir d'un état actuel quelconque (σ, h).

- incrément purement élastique $f(\sigma + \mathrm{d}\sigma, E) \leqslant 0$: cette condition recouvre les deux possibilités représentées sur la figure 23 en traction :
  - l'état actuel est à l'intérieur du domaine d'élasticité et la charge ou la décharge est élastique ;
  - l'état actuel est sur la frontière du domaine d'élasticité et il y a décharge élastique, soit $\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\varepsilon_e = \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma$ et $\sigma_s(h)$ inchangé.
- incrément élasto-plastique $f(\sigma + \mathrm{d}\sigma, E) > 0$: cette condition est illustrée sur la figure 24 :

  $$\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\varepsilon_p + \mathrm{d}\varepsilon_e; \qquad \mathrm{d}\varepsilon_e = \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma; \qquad \mathrm{d}\varepsilon_p = \frac{1}{H}(\sigma + \mathrm{d}\sigma - \sigma_s(E)) \tag{11}$$

  Le nouvel état de contrainte $\sigma' = \sigma + \mathrm{d}\sigma$ est situé sur la frontière du domaine d'élasticité. C'est la valeur du critère pour l'incrément de charge suivant.
- $H = 0$: cas des matériaux supposé parfaitement plastique alors la déformation plastique est infinie, il y a écoulement libre du matériau.

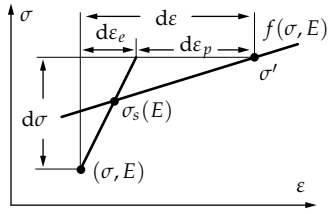


Fig. 24: incrément élasto-plastique

Résolution explicite d'un problème d'élasto-plasticité

Appliquons ce qui précède au calcul des structures composées de barres ne travaillant qu'en traction–compression. Pour illustrer les méthodes de résolution explicites, traitons le problème d'évolution élasto-plastique d'une structure treillis simple par une méthode analytique puis par la méthode des éléments finis.

La structure étudiée est représentée sur la figure 25. L'état initial est supposé naturel, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effort dans les barres. Ces dernières sont réalisées dans un même matériau et ont une section S identique. La charge est supposée appliquée infiniment lentement afin que le problème soit quasi-statique. Nous effectuerons un cycle complet charge–décharge.

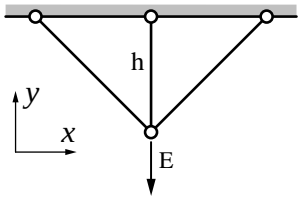


Fig. 25: structure treillis et cycle de charge-décharge

Solution analytique

La solution analytique est basée sur les méthodes de résolution présentées en résistance des matériaux, l'intérêt pour nous est de pouvoir suivre les calculs pas à pas.

Pour simplifier, supposons dans un premier temps que le matériau est parfaitement plastique, autrement dit, il n'y a pas d'écrouissage. La courbe d'écrouissage du matériau est représentée sur la figure 18(b) où le module d'élasticité est E et la limite en traction, σ_0.

Phase élastique

Analyse du problème Nous avons trois inconnues N_1, N_2 et N_3, représentant les efforts dans les barres, pour deux équations d'équilibre dans le plan. Par conséquent, le système est hyperstatique de degré un. Les équations d'équilibre ont la forme suivante (voir figure 26) :

$$-N_1\frac{\sqrt{2}}{2}+N_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0; \qquad N_1\frac{\sqrt{2}}{2}+N_3\frac{\sqrt{2}}{2}+N_2-F=0 \tag{12}$$

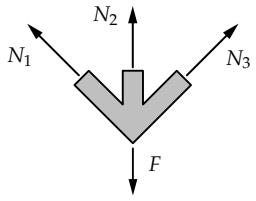


Fig. 26: équilibre des forces

soit, plus simplement :

$$N_3=N_1; \qquad N_2=F-\sqrt{2}N_1 \tag{13}$$

Résolution Prenons N_1comme inconnue hyperstatique. L'énergie de déformation s'écrit dans ce cas d'étude :

$$2W=\frac{1}{ES}\left(h\sqrt{2}N_1^2+hN_2^2+h\sqrt{2}N_3^2\right) \tag{14}$$

et par conséquent, en fonction de l'inconnue N_1, grâce à l'équation (13) :

$$2W=\frac{h}{ES}\left(2\sqrt{2}N_1^2+(F-\sqrt{2}N_1)^2\right) \tag{15}$$

Appliquons le théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial W}{\partial N_1}=0 \quad \Rightarrow \quad (2\sqrt{2}+2)N_1=F\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad N_1=\frac{F}{2+\sqrt{2}} \tag{16}$$

d'où, finalement :

$$N_3=N_1; \qquad N_2=\frac{F\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \tag{17}$$

Domaine de validité La solution obtenue est valable si les trois barres restent dans le domaine élastique défini comme suit :

$$\left\{N_i \in \Re^3; f(N_i) = |N_i| - \sigma_0 S \leqslant 0\right\} \tag{18}$$

Pour simplifier la représentation du domaine d'élasticité nous tenons compte de la condition de symétrie $N_3 = N_1$. Le domaine d'élasticité peut alors se représenter dans le plan (N_1, N_2) par un carré de coté $2\sigma_0 S$ (figure 27).

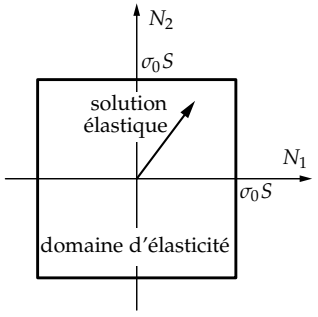


Fig. 27: domaine d'élasticité

Pour représenter, dans ce plan, la solution élastique, exprimons N_2 en fonction de N_1 à partir de la solution obtenue, autrement dit par l'élimination de F. La solution élastique est représentée par la droite $N_2 = 2N_1$. La barre 2 plastifie donc la première, la charge correspondant est donnée par $N_2 = \sigma_0 S$ d'où $F_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sigma_0 S$. Le champ de déplacement en fin de phase élastique peut être calculé à partir de la loi de comportement élastique et des relations déplacements–déformations :

– lois de comportement élastique :

$$\varepsilon_i = \frac{N_i}{ES} \tag{19}$$

– relations déplacements–déformations :

$$\varepsilon_1 = \frac{v/\sqrt{2}}{v\sqrt{2}} = \frac{v}{2h}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{v}{h} \tag{20}$$

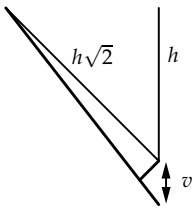


Fig. 28: compatibilité des déformations

En fin de phase élastique, le déplacement s'écrit[7] :

$$v = h\varepsilon_2 = \frac{h}{ES}\sigma_0 S = \frac{\sigma_0 h}{E} \tag{21}$$

[7] La méthode de résolution n'est pas unique. La relation de compatibilité des déformations qui s'écrit ici $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ aurait permis de trouver la relation $N_2 = 2N_1$ en phase élastique.

Phase élasto-plastique

Continuons le chargement pour des valeurs du chargement F supérieures au chargement limite F_1.

Analyse et résolution du problème Pour un accroissement de charge dF positif, nous supposons que la barre 2 reste en plasticité (elle ne subit pas de décharge). Le matériau étant élasto-plastique parfait, l'effort dans cette barre est constant et vaut $\sigma_0 S$. Nous avons donc deux inconnues N_1, N_3 pour deux équations d'équilibre :

$$N_3 = N_1; \qquad \sigma_0 S = F - \sqrt{2}N_1 \tag{22}$$

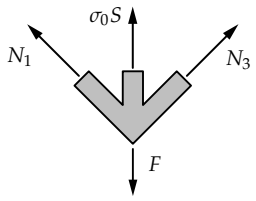


Fig. 29: inconnues lors de la phase élasto-plastique

ce qui entraîne :

$$N_3 = N_1 = \frac{F - \sigma_0 S}{\sqrt{2}} \tag{23}$$

Validité de la solution Cette solution est correcte si les fonctions critère $|N_i| - \sigma_0 S \leqslant 0$ ainsi que la condition de charge $\mathrm{d}\varepsilon_{p2} > 0$ sont satisfaites. Le critère est équivalent à $F < F_2$ avec $F_2 = (1+\sqrt{2})\sigma_0 S$. La condition de charge nécessite le calcul de $\mathrm{d}\varepsilon_{p2}$, or on ne peut pas calculer directement l'accroissement de déformation de la barre 2 à partir de la loi de comportement car le matériau est élasto-plastique parfait. Il faut utiliser la relation de compatibilité des déformations $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ et la loi de comportement des barres 1 et 3 qui restent élastiques durant cette phase.

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = \frac{2N_1}{ES} = \frac{\sqrt{2}}{ES}(F - \sigma_0 S); \qquad \frac{N_2}{ES} = \frac{\sigma_0}{E} \tag{24}$$

or $\varepsilon_2 = \varepsilon_{e2} + \varepsilon_{p2}$ donc :

$$\varepsilon_{p2} = \frac{1}{E}\left(\frac{F\sqrt{2}}{S} - (1+\sqrt{2})\sigma_0\right) \tag{25}$$

Pour $\mathrm{d}F > 0$, la condition de charge $\mathrm{d}\varepsilon_{p2} > 0$ est vérifiée. La solution obtenue est donc valable tant que $F < F_2$. Pour $F = F_2$, la structure est complètement plastifiée. Le matériau étant élasto-plastique parfait, il y a ruine de la structure. Tout accroissement de charge $\mathrm{d}F > 0$ conduit à un écoulement plastique infini.

Avant d'aborder le problème de la décharge, traçons les diagrammes d'évolution de la flèche et des efforts en fonction de la charge. Le calcul de la flèche pour $F = F_2$ ne peut se faire qu'à partir de la loi de comportement des barres 1 et 3 qui sont restées élastiques, ce qui conduit à :

$$v = 2h\varepsilon_1 = \frac{2hN_1}{ES} = \frac{2\sigma_0 h}{E} \tag{26}$$

Les diagrammes d'efforts correspondants sont indiqués sur la figure 31.

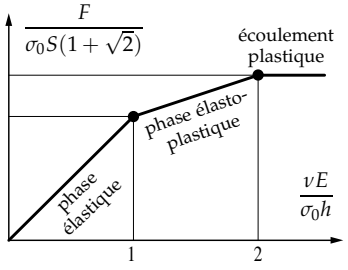
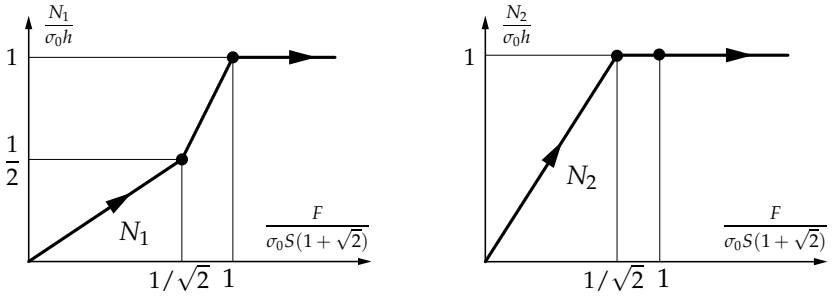


Fig. 30: diagramme de la flèche



(a) barre 1 (b) barre 2

Fig. 31: diagrammes d'efforts

Décharge élastique

Partons de l'état obtenu pour $F = F_2$ (juste avant la ruine) et appliquons un incrément de charge $\mathrm{d}F < 0$.

Analyse et résolution du problème Nous supposons que les barres 1 et 3 restent élastiques et la barre 2 qui était plastifiée subit une décharge élastique. Le problème est donc régi par les mêmes équations que celles établies en phase élastique. Réutilisons les résultats obtenus sous forme incrémentale :

$$\mathrm{d}N_1 = \mathrm{d}N_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\mathrm{d}F; \qquad \mathrm{d}N_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\mathrm{d}F; \qquad \mathrm{d}v = \frac{h}{ES}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\mathrm{d}F \tag{27}$$

Validité de la solution Cette solution est valable tant que les barres restent dans le domaine élastique, il faut donc vérifier :

$$\forall i, \quad |N_i| - \sigma_0 S \leqslant 0 \quad \text{avec} \quad N_i = N_i|_{F=F_2} + \mathrm{d}N_i \tag{28}$$

C'est donc la barre 2 qui plastifiera la première en compression pour un accroissement $-2\sigma_0 S$ de l'effort normal N_2. Soit $\mathrm{d}N_2 = -2\sigma_0 S$, par conséquent :

$$\mathrm{d}F = -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}2\sigma_0 S = -(2+\sqrt{2})\sigma_0 S \tag{29}$$

d'où :

$$F_3 = F_2 + \mathrm{d}F = -\sigma_0 S \tag{30}$$

charge de plastification en compression. Nous pouvons, à partir de cette solution, calculer l'état de la structure lorsqu'elle est déchargée, soit un incrément $\mathrm{d}F = -F_2$. Les contraintes dans les barres ne sont pas nulles :

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= \sigma_0 S - \frac{1}{2+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})\sigma_0 S = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\sigma_0 S \\ N_2 &= \sigma_0 S - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})\sigma_0 S = (1-\sqrt{2})\sigma_0 S \end{aligned} \tag{31}$$

Lorsque la structure est déchargée, les barres 1 et 3 sont en traction et la barre 2 est en compression. Il est alors possible de vérifier que le système mécanique satisfait les équations d'équilibre puisque $N_2 = \sqrt{2}N_1$. Les contraintes résiduelles proviennent des déformations plastiques qui ne vérifient pas les conditions de compatibilité puisqu'en effet $\varepsilon_{p2} \neq 0$ et $\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p3} = 0$ entraînent $\varepsilon_{p2} \neq 2\varepsilon_{p1}$.

Définition Les auto-contraintes sont les contraintes résiduelles obtenues après décharge complète d'une structure ayant plastifié. Elles ont pour origine les déformations plastiques qui ne satisfont pas les équations de compatibilité. Ces contraintes forment un système mécanique équilibré.

Avant d'aborder le problème d'un chargement cyclique traçons les diagrammes d'évolution de la flèche et des efforts obtenus après décharge de la structure.
Le calcul de la flèche résiduelle se résume à $v_{\text{rés}} = v|_{F=F_2} + \mathrm{d}v$ d'où :

$$v_{\text{rés}} = 2\frac{\sigma_0 h}{E} - \frac{h}{ES}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})\sigma_0 S = \frac{\sigma_0 h}{E}(2-\sqrt{2}) \tag{32}$$

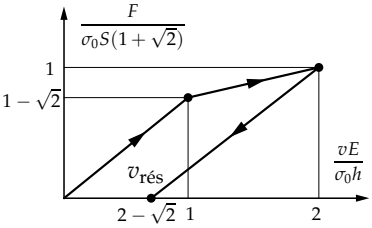
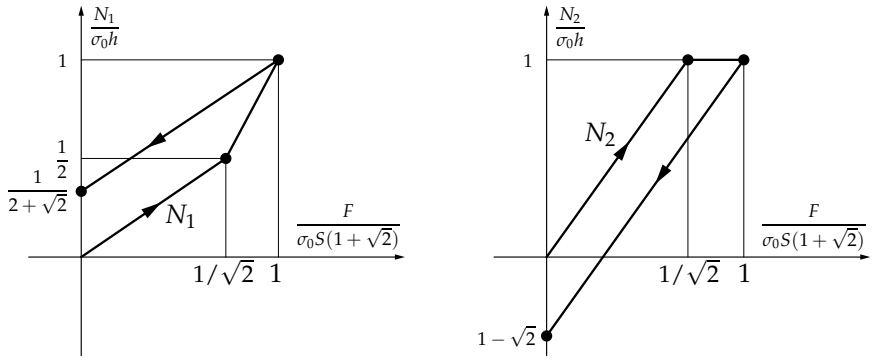


Fig. 32: diagramme de la flèche et flèche résiduelle

Les diagrammes d'efforts respectifs sont indiqués sur la figure 33.



(a) barre 1 (b) barre 2

Fig. 33: diagrammes d'efforts

Chargement cyclique Le plus simple pour étudier le chargement cyclique est de faire l'étude dans le plan des contraintes (N_1, N_2). Le domaine d'élasticité est représenté par un carré de côté $2\sigma_0 S$. Ce domaine reste le même car il n'y a pas d'écrouissage. Les trajets de charge–décharge élastiques sont représentés par des segments de droites intérieurs au domaine d'élasticité de pente 2 puisque $N_2 = 2N_1$. Les trajets élasto-plastiques se situent sur la frontière du domaine car il n'y a pas d'écrouissage.

L'état de contraintes résiduelles est représenté par la droite $N_2 = -\sqrt{2}N_1$ [8]. Ces informations permettent de construire la solution graphique représentée sur la figure 34. Les chiffres représentent les phases successives du chargement cyclique :

- 1 – 3 – 5 : charge et décharge élastique ;
- 3 – 4 – 6 : évolution élasto-plastique (barre 2 plastifiée).

[8] Cette droite passe par l'origine car l'état initial à été supposé non contraint

Les lettres représentent différents états de la structure :
- O : état initial
- A,A′ : fin de phase élastique en traction
- B : limite de ruine en traction
- C,C′ : décharge de la structure $(F = 0)$
- D : fin de phase élastique en compression
- E : limite de ruine en compression.

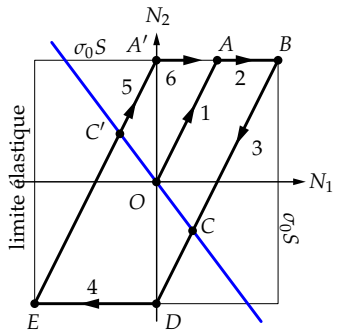
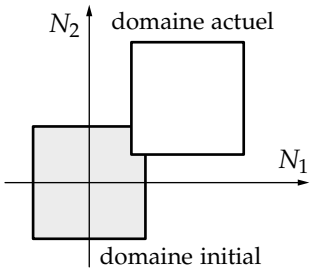


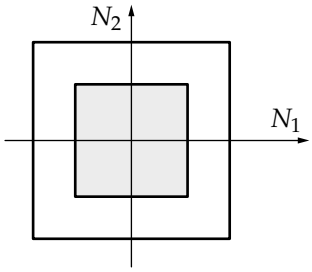
Fig. 34: diagramme de la flèche. La ligne bleue indique l'état de contraintes résiduelles

Prise en compte de l'écrouissage Si le matériau est écrouissable, le critère de plasticité évolue lors des incréments de charge plastique. Les deux figures 35 représentent l'évolution du domaine dans le plan des contraintes (N_1, N_2), selon la modélisation retenue : écrouissage cinématique et écrouissage isotrope.

Fig. 35: évolution du domaine d'élasticité dans le plan des contraintes



(a) écrouissage cinématique, translation du domaine



(b) écrouissage isotrope, dilatation du domaine

Pour simplifier les calculs qui suivent, nous supposerons que la courbe d'écrouissage de l'essai de traction monotone est bi-linéaire et caractérisée par les paramètres usuels σ_0, E et $E_T = 0{,}1E$ (figure 18(a)). Regardons comment sont modifiés les calculs conduits en élasto-plasticité parfaite.

1. phase d'élasticité : la solution est identique $F_1' = F_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sigma_0 S$
2. phase d'élasto-plasticité : la loi de comportement dans la barre 2 devient $\sigma_2 = \sigma_0 + H\varepsilon_{p2}$. En pratique, ε_2 est calculé à partir de la relation de compatibilité $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Il est donc plus simple pour la solution analytique d'exprimer σ_2 en fonction de ε_2, soit :

$$\sigma_2 = \sigma_0' + E_T\varepsilon_2 \tag{33}$$

avec $\sigma_0' = \sigma_0(1 - \frac{E_T}{E}) = 0{,}9\sigma_0$ d'où :

$$N_2 = \sigma_2 S = \sigma_0' S + \frac{2E_T N_1}{E} \tag{34}$$

Reportons dans l'équation d'équilibre :

$$N_2 = F - \sqrt{2}N_1; \quad N_1\left(\frac{2E_T}{E} + \sqrt{2}\right) = F - \sigma_0' S \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{F - 0{,}9\sigma_0 S}{0{,}2 + \sqrt{2}} \tag{35}$$

Il y a plastification des barres 1 et 3 lorsque $N_1 = \sigma_0 S$.
Soit $F_2' = (1{,}1 + \sqrt{2})\sigma_0 S > F_2$ alors pour $F = F_2'$, $N_3 = N_1 = \sigma_0 S$ et $N_2 = 1{,}1\sigma_0 S$.

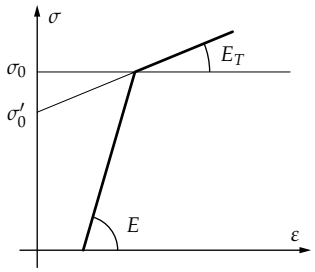


Fig. 36: loi de comportement

3. phase de plasticité : l'écrouissage permet de poursuivre le chargement pour des valeurs de $F > F_2'$. L'évolution est alors complètement plastique :

$$N_3 = N_1 = \sigma_0' S + E_T S\varepsilon_1; \qquad N_2 = \sigma_0' S + E_T S\varepsilon_2; \qquad \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \tag{36}$$

L'équation d'équilibre :

$$\sigma_0' S + 2E_T S\varepsilon_1 = F - \sqrt{2}(\sigma_0' S + E_T S\varepsilon_1) \tag{37}$$

permet de calculer ε_1 puis ε_2, N_1 et N_2, soit, pour $F = 2{,}9\sigma_0 S$:

$$\varepsilon_1 = \frac{2 - 0{,}9\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{E_T}; \qquad N_1 = \frac{3{,}8}{2+\sqrt{2}}\sigma_0 S; \qquad N_2 = \frac{5{,}8 - 0{,}9\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\sigma_0 S \tag{38}$$

4. phase de décharge élastique : les équations de décharge élastique ne sont pas modifiées, ce qui change, c'est le domaine de validité défini par le domaine d'élasticité. Supposons que la décharge est appliquée en fin de phase 2, autrement dit $F = F_2'$ et $N_3 = N_1 = \sigma_0 S$ ou $N_2 = 1{,}1\sigma_0 S$. Les barres 1 et 3 n'ayant pas plastifié, la limite élastique n'est pas modifiée :

$$\forall i = 1, \ldots, 3 \quad |N_i| - \sigma_0 S \leqslant 0 \tag{39}$$

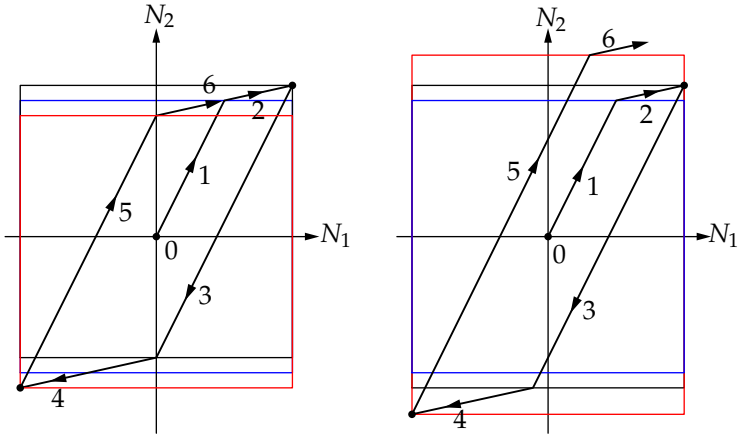
Par contre, la barre 2 a plastifié et la limite élastique en compression dépend du type d'écrouissage. Pour un écrouissage cinématique, $|\mathrm{d}N_2| \leqslant 2\sigma_0 S$ or $\mathrm{d}N_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\mathrm{d}F$, soit :

$$\mathrm{d}F = -(2+\sqrt{2})\sigma_0 S \tag{40}$$

Pour un écrouissage isotrope en compression, $N_{2s} = -N_2|_{F=F_2'} = -1{,}1\sigma_0 S$ et par conséquent $\mathrm{d}N_2 = -2{,}2\sigma_0 S$, soit :

$$\mathrm{d}F = -2{,}2\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sigma_0 S \tag{41}$$

Les calculs suivants sont identiques, là encore il est plus simple de faire une étude graphique dans le plan (N_1, N_2). Les figures 37(a) et 37(b) représentent, pour les deux modèles d'écrouissage, le cycle de chargement limite tel que les barres 1 et 3 ne plastifient pas.



(a) écrouissage cinématique (b) écrouissage isotrope

Fig. 37: modèles d'écrouissage : en bleu : domaine initial, en rouge : domaine d'élasticité D1, en noir : domaine d'élasticité D2

Écrouissage cinématique – écrouissage isotrope On note que pour l'écrouissage cinématique, le cycle se stabilise dès la fin du premier cycle. Pour l'écrouissage isotrope, il y a augmentation de la limite élastique à chaque cycle, ce qui nécessite des charges de plus en plus importantes pour pouvoir réaliser chaque nouveau cycle.

Solution éléments finis

Montrons comment résoudre de façon explicite le même problème à partir d'un modèle éléments finis. Intéressons-nous directement au modèle avec écrouissage, et ne traitons que le chargement monotone croissant. Le cas des chargements cycliques s'en déduisant aisément

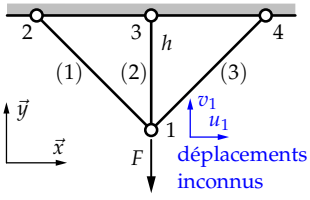


Fig. 38: discrétisation éléments finis

Phase élastique

Le modèle proposé comporte trois éléments finis (1), (2), (3) pour quatre nœuds soit huit variables déplacements. Compte tenu des conditions aux limites aux nœuds 1, 2 et 3, nous obtenons un système de deux équations sur les déplacements inconnus :

$$\mathbf{K}_{\text{red}}\mathbf{X_I} = \boldsymbol{\phi}_D \tag{42}$$

avec $\mathbf{X_I} = (u_1\ v_1)^T$ et $\boldsymbol{\phi}_D = (0\ -F)^T$.

Matrice raideur Pour l'élément 1, la matrice raideur s'écrit :

$$\mathbf{K}_1 = k_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{43}$$

avec $k_1 = \frac{ES}{h\sqrt{2}}$ sur (u_1, v_1). Concernant l'élément 2, la matrice raideur est $\mathbf{K}_2 = k_2$ avec $k_2 = \frac{ES}{h}$ sur v_1. De même, la matrice raideur de l'élément 3 est :

$$\mathbf{K}_3 = k_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{44}$$

avec $k_3 = \frac{ES}{h\sqrt{2}}$ sur (u_1, v_1), d'où la matrice raideur assemblée réduite :

$$\mathbf{K}_{\text{red}} = \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{45}$$

et ce, toujours sur les variables (u_1, v_1).

Résolution La résolution se résume simplement à :

$$\mathbf{K}_{\text{red}}\mathbf{X_I} = \boldsymbol{\phi}_D \tag{46}$$

avec $\boldsymbol{\phi}_D = (0\ -F)^T$, soit :

$$\mathbf{X_I} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \frac{Fh}{ES} \end{pmatrix} \tag{47}$$

Validité de la solution Cette solution est valable tant que les barres restent dans le domaine élastique et par conséquent, il faut s'assurer que la contraintes appartiennent au domaine élastique :

$$\forall i, \quad |N_i| - \sigma_0 S \leqslant 0 \tag{48}$$

Calculons les efforts dans les barres en utilisant la loi de comportement :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{ES}{h\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{F}{2+\sqrt{2}} \\ N_2 &= -\frac{ES}{h} v_1 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{F\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{49}$$

Les relations entre N et F étant explicites (résolution analytique), la barre 2 plastifie la première pour le chargement :

$$F_1' = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sigma_0 S \tag{50}$$

Phase élasto-plastique

Utilisons la loi de comportement dans la barre 2 sous la forme de la figure 36 :

$$\sigma_2 = \sigma_0' + E_T\varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_0' = \sigma_0(1 - \frac{E_T}{E}) = 0,9\sigma_0 \tag{51}$$

La raideur de l'élément 2 s'écrit alors $k_2 = \frac{E_T S}{h}$ et le vecteur force généralisé :

$$\boldsymbol{\phi}_D = -\begin{pmatrix} 0 \\ F - \sigma_0' S \end{pmatrix} \tag{52}$$

Résolution Le problème élasto-plastique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{h\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{ES}{h\sqrt{2}} + \frac{E_T S}{h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ F - \sigma_0' S \end{pmatrix} \tag{53}$$

d'où la solution :

$$v_1 = -\frac{F - \sigma_0' S}{\frac{ES}{h\sqrt{2}} + \frac{E_T S}{h}} \tag{54}$$

Validité de la solution La solution (54) est valable pour $F > F_1'$ et tant que $N_1 - \sigma_0 S \leqslant 0$. Les efforts dans les barres sont donnés par les lois de comportement :

$$N_1 = -\frac{ES}{2h} v_1; \qquad N_2 = \sigma_0' S - \frac{E_T S}{h} v_1 \tag{55}$$

Du fait de la résolution analytique, les relations entre N et F sont explicites et nous déduisons que les barres 1 et 3 plastifient pour :

$$F_2' = \sigma_0' S + \sigma_0 S \left(\sqrt{2} + 2\frac{E_T}{E}\right) \tag{56}$$

Phase plastique

Pour $F > F_2'$, toutes les barres sont plastifiées. Les équations du problème sont donc de la forme :

$$\frac{E_T S}{h\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ F - \sigma_0' S - 2(\sigma_0' S \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix} \tag{57}$$

d'où :

$$v_1 = -\left(F - \sigma_0' S(1 + \sqrt{2})\right) \frac{h}{E_T S} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \tag{58}$$

Les efforts dans les barres sont donnés par les lois de comportement :

$$N_1 = \sigma_0' S - \frac{E_T S}{h} \frac{v_1}{2}; \qquad N_2 = \sigma_0' S - \frac{E_T S}{h} v_1 \tag{59}$$

Le modèle éléments finis explicite nous permet de résoudre de façon identique les problèmes d'évolution élasto-plastique des structures treillis, car la méthode de résolution est basée sur l'analyse des expressions formelles des efforts.

D'un point de vue purement numérique, cette écriture analytique est impossible. Il faut procéder par incrément de charge et tester numériquement que chaque élément de la structure reste dans ou sur la frontière du domaine d'élasticité.

Résolution numérique d'un problème élasto-plastique

Les méthodes de résolution numérique d'un problème élasto-plastique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Pour fixer les idées, nous présentons dans un premier temps un algorithme utilisant la matrice raideur élastique à chaque itération.

Algorithmes de calcul

Soit un incrément de charge $\Delta\mathbf{F}$ appliqué à la structure, la solution élastique correspondante est donnée par :

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{K}_e^{-1}\Delta\mathbf{F} \tag{60}$$

avec $\mathbf{K}_e$, matrice raideur de la structure élastique. À cette solution correspond pour chaque élément fini un incrément de déformation :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} \tag{61}$$

avec $\mathbf{B}$, matrice des relations déformations–déplacements de l'élément considéré.

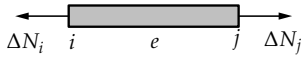


Fig. 39: efforts élémentaires

C'est l'algorithme de projection sur le critère de plasticité qui nous permet de déterminer l'état de contrainte correspondant. Ayant calculé $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, nous calculons pour chaque élément le vecteur des forces nodales élémentaires qui équilibrent cet incrément de contrainte :

$$\Delta\boldsymbol{\phi}_e = \begin{pmatrix} -\Delta N_i \\ \Delta N_j \end{pmatrix} \tag{62}$$

L'assemblage des vecteurs élémentaires permet de définir un vecteur force nodale équivalent à l'état de contrainte calculé à partir des lois de comportement. Le résidu est donc défini par :

$$\mathbf{R} = \Delta\mathbf{F} - \Delta\boldsymbol{\phi} \tag{63}$$

Si le résidu est nul (à la précision près), c'est que la solution obtenue est bonne (cela correspond à un incrément de charge élastique de la structure), si le résidu est non nul (supérieur à la précision voulue), il faut itérer en cherchant la nouvelle solution de :

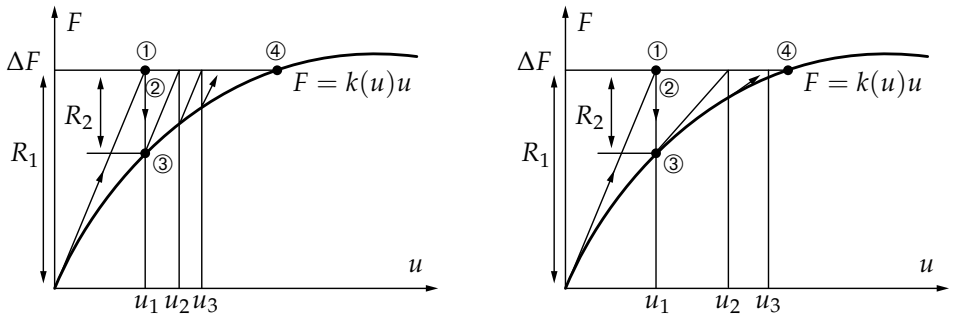
$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{R} \tag{64}$$

- maillage éléments finis et matrice raideur de la structure élastique $\mathbf{K}_e$
- définition de l'historique de chargement (incréments de charge)

1: **pour** chaque incrément $\Delta\mathbf{F}$ **faire**
2: initialisation du résidu : $\mathbf{R} \leftarrow \Delta\mathbf{F}$
3: **tant que** $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon$ **faire**
4: calcul de $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{R}$ et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
5: projection sur le critère et calcul de $\Delta\boldsymbol{\phi}$
6: nouveau résidu $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \Delta\boldsymbol{\phi}$
7: **fin tant que**
8: résultats
9: **fin pour**

Alg. 1: algorithme de projection avec matrice élastique

La figure 40(a) schématise le processus mis en œuvre dans l'algorithme 1. La courbe $F = k(u)u$, solution du problème non linéaire, est représentée dans le cas mono-dimensionnel.



(a) matrice élastique

(b) matrice tangente : Newton-Raphson

Fig. 40: types de projection avec ① solution élastique, ② projection sur le critère, ③ charge nodale équivalente et ④ solution cherchée

Une amélioration évidente consiste à utiliser la matrice raideur *tangente* de la structure dans l'état actuel. Cette matrice tient compte des éléments plastifiés. D'une part, le calcul de la matrice tangente et la résolution à chaque itération ont un coût informatique, d'autre part, dans le cas de la décharge élastique, l'utilisation de la matrice raideur initiale donne de meilleurs résultats.

En pratique, un algorithme de résolution peut utiliser une combinaison des deux processus. Nous donnons l'algorithme 2 et la figure 40(b) correspondant à la méthode de Newton-Raphson.

- maillage éléments finis
- définition des lois de comportement (σ_0, E, E_T)
- définition de l'historique de chargement

1: **pour** chaque incrément $\Delta\mathbf{F}$ **faire**
2: initialisation du résidu : $\mathbf{R} \leftarrow \Delta\mathbf{F}$
3: incrément de contrainte élastique $\mathrm{d}\sigma_e = E\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$
4: **tant que** $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon$ **faire**
5: calcul de $\mathbf{K}(\mathbf{u})$
6: calcul de $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{u})^{-1}\mathbf{R}$ et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
7: projection sur le critère et calcul de $\Delta\boldsymbol{\phi}$
8: nouveau résidu $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} - \Delta\boldsymbol{\phi}$
9: **fin tant que**
10: résultats
11: **fin pour**

Alg. 2: algorithme de projection et matrice tangente

Dans ces deux algorithmes, la seule nouveauté par rapport à un calcul d'élasticité linéaire est la projection sur le critère de plasticité et le calcul de la force nodale équivalente.

Pour le test de convergence sur le résidu, différentes normes peuvent être utilisées, les deux plus courantes sont :

- de type valeur maximale : $\|\mathbf{R}\| = \max(|R_i|)$
- de type moindre carrés : $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\mathbf{R}^2}$

Pour travailler avec des nombres sans dimension nous testons $\|\mathbf{R}\| / \|\mathbf{\Delta F}\|$. Il existe deux façons de définir le résidu :

- sur les degrés de libertés de la structure (ne tient pas compte des conditions aux limites)
- sur tous les degrés de liberté (tient compte des réactions aux appuis)

Si le résidu prend en compte les efforts de liaison, il tient compte implicitement de l'erreur commise sur le champ des déplacements. Comme l'indique la figure 41, pour une précision donnée l'erreur sur la solution sera plus petite.

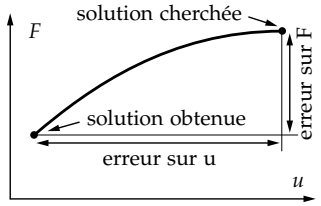


Fig. 41: erreur de résolution

Projection sur le critère de plasticité

Soit un état actuel (σ, h), le problème posé consiste à calculer pour chaque élément le nouvel état correspondant à un accroissement de déformation $\Delta\varepsilon$.

La figure 42 représente le principe de projection sur la frontière du domaine d'élasticité pour un accroissement de déformation $d\varepsilon$ donné avec ① solution élastique, ② projection sur le critère et ③ solution cherchée. Nous avons représenté le cas le plus général d'un élément en cours de plastification. L'accroissement de contrainte élastique est défini par $d\sigma_e = E d\varepsilon$.

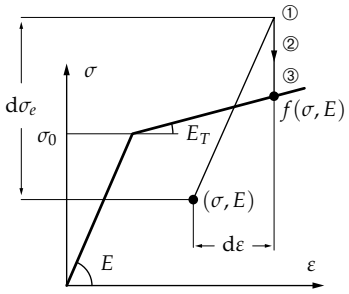


Fig. 42: principe de projection sur la frontière du domaine d'élasticité

En nous aidant de la figure 43, posons :

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma + d\sigma_e - \sigma_h}{d\sigma_e} = 1 + \frac{\sigma - \sigma_h}{d\sigma_e} \tag{65}$$

Par conséquent $X = R d\varepsilon$ soit $BC = (1-R)d\sigma_e$ et $B\sigma' = RE_T d\varepsilon$ d'où :

$$\sigma' = \sigma + (1-R)E d\varepsilon + RE_T d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad d\sigma = (1-R)E d\varepsilon + RE_T d\varepsilon \tag{66}$$

et :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_e &= \frac{1}{E} d\sigma \Rightarrow d\varepsilon_e = \left(1 - R + R\frac{E_T}{E}\right) d\varepsilon \\ d\varepsilon_p &= d\varepsilon - d\varepsilon_e \Rightarrow d\varepsilon_p = R\left(1 - \frac{E_T}{E}\right) d\varepsilon \end{aligned} \tag{67}$$

Le modèle d'écrouissage (cinématique ou isotrope) autorise le calcul de la valeur de σ_h. Les expressions (67) permettent de déterminer les incréments de contrainte, de déformations plastique et élastique. Il reste à ajouter la condition de charge pour obtenir l'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

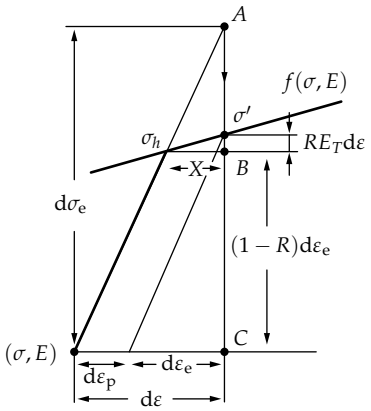


Fig. 43: détail de la figure 42

Alg. 3: algorithme de projection

- initialisation

pour chaque élément **faire**
- calcul de l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon = (u_j - u_i)/\ell$
- incrément de contrainte élastique $d\sigma_e = E d\varepsilon$
- **si** $|\sigma| \geqslant |\sigma_h|$ **alors**
  - élément plastique
  - **si** ($\sigma > 0$ et $d\sigma_e < 0$) ou ($\sigma < 0$ et $d\sigma_e > 0$) **alors**
    - décharge élastique $R = 0$
  - **sinon**
    - poursuite de plastification R = 1
  - **fin si**
- **sinon**
  - élément élastique
  - **si** $\sigma + d\sigma_e < \sigma_h$ **alors**
    - élément reste élastique $\Rightarrow R = 0$
  - **sinon**
    - élément en cours de plastification $\Rightarrow R = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_e}$
  - **fin si**
- **fin si**
- $d\varepsilon_p = R(1 - \frac{E_T}{E})d\varepsilon$ et $d\varepsilon_e = d\varepsilon - d\varepsilon_p$
- $d\sigma = (1-R)E d\varepsilon + RE_T d\varepsilon$ et $\sigma = \sigma + d\sigma \Rightarrow d\phi_e = (-S d\sigma \; S d\sigma)^T$
- Calcul de σ'_0 en fonction de l'écrouissage et $d\varepsilon_p$

fin pour

Application à la structure treillis

Appliquons les algorithmes 1, 2 et 3 au calcul numérique de la structure treillis. Nous présentons les calculs pour un incrément de charge $dF = 1{,}9\sigma_0 S$.

Première itération

Par définition, le résidu et la matrice raideur s'écrivent :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}9\sigma_0 S \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{K}_e = \frac{ES}{h}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{68}$$

La résolution du système linéaire respectif permet de trouver l'incrément en déplacement, soit :

$$\Delta v = -1{,}9\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\frac{\sigma_0 S h}{ES} = -1{,}113\frac{\sigma_0 h}{E} \tag{69}$$

ainsi que le chargement dans la direction normale :

$$\Delta N_{1e} = -\frac{ES}{2h}\Delta v = 0{,}56\sigma_0 S; \qquad \Delta N_{2e} = -\frac{ES}{h}\Delta v = 1{,}113\sigma_0 S \tag{70}$$

Test Il s'avère que le premier élément n'a pas plastifié puisque $N_{1e} = \Delta N_{1e} < \sigma_0 S$, ce qui implique $N_1 = 0{,}56\sigma_0 S$. De la même manière, le deuxième élément a plastifié puisque $N_{2e} = \Delta N_{2e} > \sigma_0 S$ et il faut donc projeter sur la fonction seuil avec $\frac{E_T}{E} = 0{,}1$, tel que :

$$R = 1 - \frac{1}{1{,}113} = 0{,}1015 \rightarrow \Delta\varepsilon_{2p} = 0{,}1015(1-0{,}1)\frac{-\Delta v}{h} = 0{,}1017\frac{\sigma_0}{E} \tag{71}$$

mais aussi :

$$N_2 = \sigma_0 S + RE_T S\Delta\varepsilon_2 \tag{72}$$

ce qui entraîne :

$$N_2 = \sigma_0 S\left(1 + 1{,}113R\frac{E_T}{E}\right) = \sigma_0 S(1+0{,}0113) \quad \text{et} \quad \sigma'_{o(\varepsilon p2)} = 1{,}0113\sigma_0 \tag{73}$$

Nouveau résidu Soit $\mathbf{F}_\mathrm{N}$, la force nodale équivalente à N_1, N_2 :

$$\mathbf{F}_\mathrm{N} = -\begin{pmatrix} 0 \\ N_2 + 2\frac{N_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ N_2 + \sqrt{2}N_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}803\sigma_0 S \end{pmatrix} \tag{74}$$

Par conséquent, le nouveau résidu s'écrit :

$$\mathbf{R} = \Delta\mathbf{F} - \mathbf{F}_\mathrm{N} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0967\sigma_0 S \end{pmatrix} \tag{75}$$

Deuxième itération

Nous repartons du résidu trouvé à la fin de l'itération précédent et conservons la matrice $\mathbf{K}_e$, ce qui entraîne $\Delta v = -0{,}0566\frac{\sigma_0 h}{E}$, autrement dit :

$$\Delta N_{1e} = 0{,}0283\sigma_0 S; \qquad \Delta N_{2e} = 0{,}0566\sigma_0 S \tag{76}$$

Test De la même manière que précédemment, il faut positionner les efforts intérieurs aux barre par rapport au critère de plastification. L'élément 1 n'a toujours pas plastifié puisque $N_{1e} = N_1 + \Delta N_{1e} < \sigma_0 S$ d'où $N_1 = 0{,}588\sigma_0 S$. L'élément 2, quant à lui, poursuit sa plastification $N_2 = \sigma'_{0(\varepsilon p2)} S$ et $\Delta N_{2e} > 0$ et par conséquent $R = 1$, d'où :

$$\Delta\varepsilon_{2p} = (1-0{,}1)\frac{-\Delta v}{h} = 0{,}05094\frac{\sigma_0}{E} \tag{77}$$

L'effort dans la barre 2 a l'expression suivante :

$$N_2 = \sigma_0' S + E_T S \Delta\varepsilon_2 \tag{78}$$

ce qui entraîne :

$$N_2 = \sigma_0 S \left(1{,}0113 + 0{,}057\frac{E_T}{E}\right) = 1{,}017\sigma_0 S \quad \text{et} \quad \sigma'_{o(\varepsilon p2)} = 1{,}017\sigma_0 \tag{79}$$

Nouveau résidu Le résidu devient :

$$\mathbf{R} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}9\sigma_0 S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}849\sigma_0 S \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}051\sigma_0 S \end{pmatrix} \tag{80}$$

Troisième itération

Les calculs sont identiques, on trouve :

$$\Delta v = -0{,}03\frac{\sigma_0 h}{E}; \qquad N_1 = 0{,}603\sigma_0 S; \qquad N_2 = 1{,}02\sigma_0 S \tag{81}$$

ainsi que la mise à jour du résidu :

$$\mathbf{R} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}027\sigma_0 S \end{pmatrix} \tag{82}$$

Les résultats des calculs sont représentés sur la figure 44. Avec $\mathbf{K}_e$, la converge est sûre mais lente. L'utilisation de la matrice tangente nous conduirait directement à la solution cherchée.

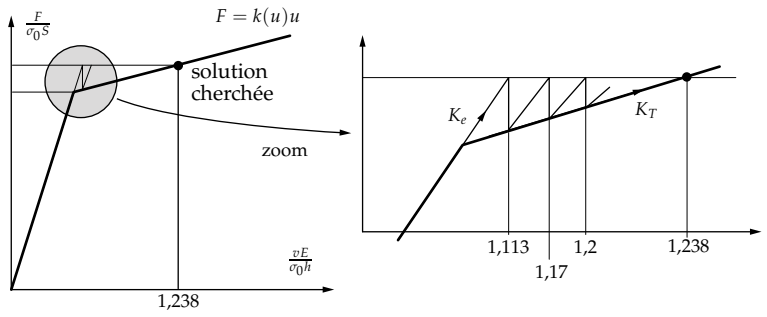


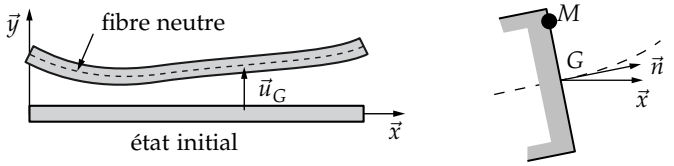
Fig. 44: processus de convergence

Plasticité des poutres

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'évolution élasto-plastique des poutres. La loi de comportement généralisée élasto-plastique est obtenue à partir d'un modèle en flexion pure (moment de flexion constant). L'application de cette loi en flexion simple nous amène à introduire la notion de rotule plastique. Nous présentons alors le modèle simplifié basé sur l'utilisation des rotules plastiques. Ce modèle est appliqué à l'étude élasto-plastique des structures portiques.

Rappels et notations

Considérons une poutre longue rectiligne en flexion dans le plan (xoy) dans le cadre des hypothèses de Bernoulli et des petits déplacements qui entraînent $\vec{\theta} = v_{,x}\vec{z}_0$ et $\vec{u}(M,t) = (-yv_{,x}, v, 0)^T$.



(a) champs de déplacement (b) section droite

Fig. 45: modèle de Bernoulli : flexion plane

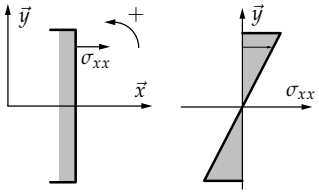
Les petites déformations supposent $\varepsilon_{xx} = -yv_{,xx}$. Le milieu est isotrope homogène élastique et l'état de contrainte est uni-axial, soit $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$. Intégrons les contraintes sur la section pour obtenir la loi de comportement généralisée élastique des poutres :

$$M_f = EIv_{,xx} \tag{83}$$

Cette loi relie les deux grandeurs utilisées lors des calculs, le moment de flexion et la flèche. En statique, l'équation d'équilibre des moments donne :

$$T = -M_{f,x} = -EIv_{,xxx} \tag{84}$$

On note la contrainte généralisée $\tilde{\sigma} = M_f$, la déformation généralisée $\tilde{\varepsilon} = v_{,xx}$ et la loi de comportement généralisée $\tilde{\sigma} = EI\tilde{\varepsilon}$. La loi de comportement du matériau étant définie au niveau local, exprimons les relations entre la contrainte physique et la contrainte généralisée, relations utiles par la suite pour exprimer les lois de comportement élasto-plastique :



(a) section (b) contraintes

Fig. 46: essai de flexion

$$\tilde{\sigma} = EI\tilde{\varepsilon} = EI\left(-\frac{\varepsilon_{xx}}{y}\right) = -\frac{EI}{y}\frac{\sigma_{xx}}{E} \tag{85}$$

ce qui entraîne les champs de contraintes et de déformations suivants :

$$\sigma_{xx} = -\frac{y}{I}\tilde{\sigma}; \qquad \varepsilon_{xx} = -y\tilde{\varepsilon} \tag{86}$$

Modèle élasto-plastique

Ce sont les champs $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\varepsilon}$ qui sont utilisés lors des calculs. Notre objectif est donc d'exprimer la loi de comportement généralisée élasto-plastique $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ en fonction de la loi de comportement du matériau.

Pour simplifier la présentation nous supposons le matériau élasto-plastique parfait. La courbe d'écrouissage du matériau identifiée par un essai de traction est représentée sur la figure 21(a).

Flexion pure

Évolution élastique Considérons un essai de flexion pure réalisé sur une *poutre de section symétrique*. Le moment de flexion M est uniforme le long de la poutre.

Pour cet essai, représenté sur la figure 47, l'effort tranchant est nul. La solution obtenue avec les hypothèses de Bernoulli est donc exacte pour les matériaux incompressibles et quasi-exacte pour les matériaux compressibles.

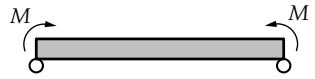
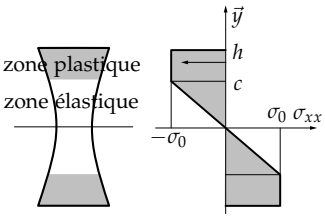


Fig. 47: essai de flexion pure

Compte tenu de la répartition des contraintes dans la section et des hypothèses de symétrie, les fibres les plus éloignées situées à une distance $\pm h$ de la fibre moyenne plastifient les premières. Par conséquent, il y a début de plastification lorsque $(\sigma_{xx})_{y=\pm h} = \sigma_0$, soit $\tilde{\sigma}_0 = \frac{I}{h}\sigma_0$ où $\tilde{\sigma}_0$ est le moment de début de plastification. La déformation généralisée correspondante est $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{1}{Eh}\sigma_0$.

Évolution élasto-plastique Pour $M > \tilde{\sigma}_0$, il y a évolution élasto-plastique du matériau à partir des fibres extérieures. Le moment étant uniforme sur la longueur, dans toute section de la poutre, nous obtenons l'état de contrainte de la figure 48(b).



(a) section (b) contraintes
Fig. 48: flexion pure et zones plastiques symétriques

Le matériau étant élasto-plastique parfait au delà de la cote c, la contrainte dans la zone plastique est uniforme $\sigma_{xx} = \pm\sigma_0$.

Conservons l'hypothèse de Bernoulli pour exprimer c en fonction des variables généralisées et σ_0. En c, $\sigma_{xx} = -\sigma_0$ et $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ec\tilde{\varepsilon}$ ce qui entraîne, $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$ [9]. Comme en élasticité, pour écrire la loi de comportement généralisée, il faut intégrer sur une section le champ des contraintes afin d'obtenir une relation entre le moment de flexion et la courbure :

$$\tilde{\sigma} = M_f = \int_{-h}^{h} -y\sigma_{xx}\mathrm{d}S = 2\int_{0}^{h} -y\sigma_{xx}\mathrm{d}S \tag{87}$$

et puisque la section est supposée symétrique :

$$\tilde{\sigma} = 2\int_{0}^{c} -y\left(-\frac{y}{c}\sigma_0\right)\mathrm{d}S + 2\int_{c}^{h} y\sigma_0\mathrm{d}S \tag{88}$$

Notons respectivement le moment quadratique de la zone élastique $I(c)$, le moment statique de la zone élastique $Z(c)$ et le moment statique de la section $Z(h)$:

$$I(c) = 2\int_{0}^{c} y^2\mathrm{d}S; \qquad Z(c) = 2\int_{0}^{c} y\mathrm{d}S; \qquad Z(h) = 2\int_{0}^{h} y\mathrm{d}S \tag{89}$$

Nous obtenons la loi de comportement généralisée élasto-plastique $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$, en fonction du module d'élasticité E et de limite en traction σ_0 :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0\left(\frac{I(c)}{c} + Z(h) - Z(c)\right) \tag{90}$$

avec $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$. Montrons que $\tilde{\sigma}$ est une fonction croissante de $\tilde{\varepsilon}$. Il suffit de montrer que c'est une fonction décroissante de c.

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}c} = \sigma_0\left(-\frac{I(c)}{c^2} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}I(c)}{\mathrm{d}c} - \frac{\mathrm{d}Z(c)}{\mathrm{d}c}\right) \tag{91}$$

or :

$$I(c) = 2\int_{0}^{c} y^2\mathrm{d}S = 2\int_{0}^{c} y^2L(y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad Z(c) = 2\int_{0}^{c} y\mathrm{d}S = 2\int_{0}^{c} yL(y)\mathrm{d}y \tag{92}$$

[9] Cette relation reste vraie pour un matériau écrouissable. L'hypothèse de Bernoulli suppose des déformations plastiques suffisamment sympathiques pour que la planéité des sections droites soit vérifiée.

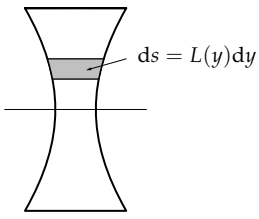


Fig. 49: élément de surface

ce qui entraîne :

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}I(c)}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}Z(c)}{\mathrm{d}c} = 2cL(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}c} = -\sigma_0\frac{I(c)}{c^2} < 0 \tag{93}$$

Ce résultat est conforme à l'intuition car une augmentation de charge ne peut qu'augmenter la zone plastique.

La figure 50 représente la loi de comportement généralisée $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$. Pour $c = h$, on retrouve $\tilde{\sigma}_0$ (moment de début de plastification). Pour $c \longrightarrow 0$, il y a plastification complète de la section. Le moment correspondant est le moment limite $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_0 Z(h)$.

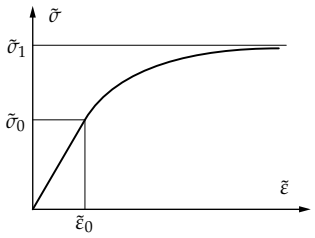


Fig. 50: loi de comportement généralisée $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$

Le caractère asymptotique est dû à l'existence d'une mince zone au voisinage de la fibre moyenne qui reste toujours élastique ($\sigma_{xx} = 0$). En flexion pure, la section ne peut pas plastifier complètement. Ce résultat purement théorique n'a pas de réalité physique. Rappelons que la loi de comportement généralisée des poutres longues est un modèle basé sur des hypothèses simplificatrices contradictoires du point de vue physique.

Une décharge élastique conduirait au diagramme des contraintes résiduelles de la figure 51. On comprend aisément qu'il n'est pas possible d'utiliser ce modèle pour traiter des problèmes cycliques, sans parler de l'introduction de l'écrouissage.

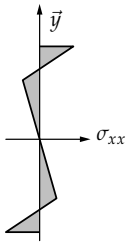


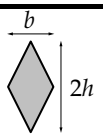
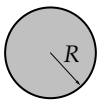
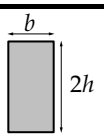
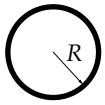
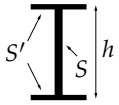
Fig. 51: superposition des diagrammes élasto-plastique et élastique correspondant à un chargement $-M$

Le rapport $\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0}$ est le facteur de forme plastique de la section :

$$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} = \frac{hZ(h)}{I} \tag{94}$$

Il caractérise la réserve vis-à-vis de la plastification totale d'une section donnée. Plus ce rapport est élevé, plus la phase élasto-plastique est grande, autrement dit, un rapport élevé confère une plus grande sécurité par rapport au chargement élastique limite. En contrepartie, la charge limite élastique sera plus petite, il faut donc trouver le bon compromis.

Le tableau 1 indique les facteurs de forme plastiques classés par ordre décroissant pour différentes sections.

					
$\frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0}$	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{\pi R^3}{4}$	$\frac{2}{3}bh^2$	$\pi e R^2$	$h\left(S' + \frac{S}{6}\right)$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma_0}$	$\frac{1}{3}bh^2$	$\frac{4\pi R^3}{3}$	bh^2	$4eR^2$	$h\left(S' + \frac{S}{4}\right)$
$\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0}$	2	$\frac{16}{3\pi} \simeq 1{,}7$	1,5	$\frac{4}{\pi} = 1{,}27$	$\frac{12 + 3S/S'}{12 + 2S/S'}$

Tab. 1: facteurs de forme plastiques pour différentes sections

Plus ce rapport tend vers l'unité, meilleure est la section du point de vue élastique (toutes les fibres plastifient en même temps). Dans ce cadre, la section 5 du tableau 1 est optimale.

Application : section rectangulaire

Il s'agit de la section 3 du tableau 1. avec les caractéristiques géométriques :

$$\begin{cases} I = \frac{2}{3}bh^3 \\ z(h) = bh^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}_0 = \frac{2}{3}bh^2\sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_1 = bh^2\sigma_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma_0} = 1{,}5 \tag{95}$$

Par conséquent, la loi de comportement généralisée élasto-plastique (90) s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 b \left(h^2 - \frac{c^2}{3} \right) \quad \text{avec} \quad c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}} \tag{96}$$

soit :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\varepsilon}} \right)^2 \right) \tag{97}$$

où $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\sigma_0}{Eh}$ représente la courbure de début de plastification. Les calculs se présentent de la même façon pour d'autres sections.

Il est donc possible de modéliser, pour un chargement monotone, le comportement élasto-plastique d'une poutre soumise à un moment de flexion uniforme sur sa longueur. Ce modèle construit sur les hypothèses de Bernoulli en élasticité, suppose que les déformations plastiques les respectent aussi.

Flexion simple

En pratique, il est rare d'obtenir un état de contrainte constant par morceaux. Cela signifie que les zones plastiques sont réduites à des sections dont la position évolue au cours du chargement.

étudions le cas d'une poutre de section rectangulaire sur deux appuis chargée en son centre par une force supposée ponctuelle. Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure 52. Les zones plastiques apparaissent dans la section $x = \ell/2$ où le moment est maximal. Puis les zones plastiques s'étendent aux sections voisines avec l'augmentation du chargement.

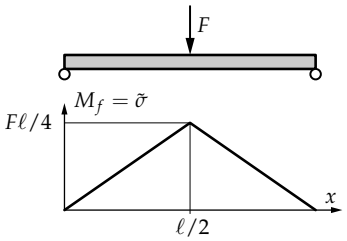
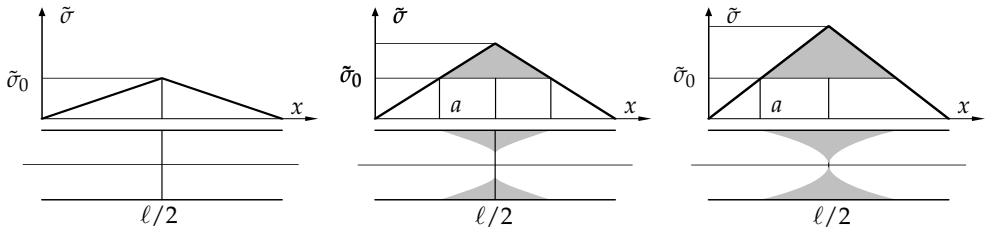


Fig. 52: essai de flexion simple

Modélisation Pour étudier l'évolution élasto-plastique, nous adoptons la loi de comportement élasto-plastique obtenue en flexion pure. Les effets de l'effort tranchant dans la zone plastique sont négligés.

Le début de la phase élasto-plastique correspond à $M_f = \tilde{\sigma}_0$ et $F_0 = \frac{4\tilde{\sigma}_0}{\ell}$ et la section $x = \ell/2$ est complètement plastifiée pour $M_f = \tilde{\sigma}_1$ et $F_1 = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{\ell}$. Le figure 53 représente l'évolution de la zone plastique selon les phases du chargement.



(a) phase élastique (b) phase élasto-plastique (c) fin de plastification

Fig. 53: évolution des zones de plastification en flexion simple

Étude de la zone plastique L'abscisse de la première section plastifiée est simple à exprimer $a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F}$. La forme de cette zone est définie par la cote $c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}}$, or pour $a \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sigma_0}{E\tilde{\varepsilon}_0}\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)} \quad \Rightarrow \quad c = h\sqrt{3\left(1 - \frac{Fx}{2\tilde{\sigma}_1}\right)} \tag{98}$$

or $F_1 = \frac{4\tilde{\sigma}_1}{\ell}$ d'où :

$$c(x) = h\sqrt{3\left(1 - \frac{2F}{F_1}\frac{x}{\ell}\right)} \tag{99}$$

La figure 54 représente la zone plastique qui est limitée par une parabole d'équation $c(x)$ définie pour $F_0 < F \leqslant F_1$.

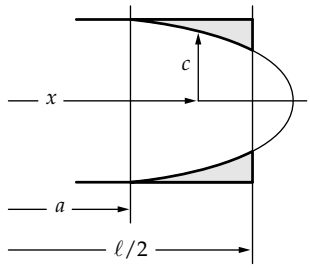


Fig. 54: zone plastique en flexion simple

Étude de la déformation L'étude de la déformation est conduite sur deux zones :

– zone élastique pour $x \leqslant a$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI}x = \frac{\tilde{\sigma}_0}{EI}\frac{x}{a} = \tilde{\varepsilon}_0\frac{x}{a} \tag{100}$$

– zone élasto-plastique pour $a \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_1}\right)}} \tag{101}$$

La figure 55 représente l'évolution de la courbure pour les trois phases de chargement de la figure 53. Pour $F = F_1$, la courbure a un comportement asymptotique et tend vers l'infini. Tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons articulés.

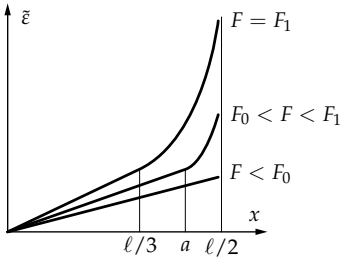


Fig. 55: essai de flexion pure

Pour obtenir l'expression de la flèche, il faut intégrer les relations qui définissent la courbure en fonction de x.

Phase élastique — Le chargement est tel que $F \leqslant F_0$ et la loi de comportement généralisée indique $\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{EI} = \frac{F}{2EI}x$ avec $v(0) = 0$ et $v_{,x}(\ell/2) = 0$ pour cause de symétrie. Par conséquent, la flèche prend la forme suivante :

$$v(x) = \frac{F\ell^3}{4EI}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{x}{4\ell}\right) \tag{102}$$

Phase élasto-plastique — Le chargement est alors $F_0 < F < F_1$ avec $a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F}$. Les fonctions de répartition sont définies dans les équations (100) et (101). Les quatre constantes sont calculées en écrivant la condition d'appui en $x = 0$, la condition de symétrie en $x = \ell/2$ et la continuité de la flèche et de la rotation en $x = a$. Tous calculs faits, nous obtenons :

– pour $x \leqslant a$:

$$v(x) = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{6a}x^3 + \tilde{\varepsilon}_0 a\left(\sqrt{3 - \frac{\ell}{a}} - \frac{3}{2}\right)x \tag{103}$$

– pour $a \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$v(x) = \tilde{\varepsilon}_0\frac{a^2}{3}\left(3 - 2\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \tilde{\varepsilon}_0 a\sqrt{3 - \frac{\ell}{a}}x - \frac{5}{3}\tilde{\varepsilon}_0 a^2 \tag{104}$$

Traçons l'évolution de la flèche en milieu de poutre :

– pour $F = F_0$:

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{F_0\ell^3}{48EI} = -\frac{\sigma_0\ell^2}{12Eh} \tag{105}$$

– pour $F = F_1$:

$$a = \frac{2\tilde{\sigma}_0}{F_1} = \frac{\ell}{2}\frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\sigma}_1} = \frac{\ell}{3} \quad \Rightarrow \quad v\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{5}{3}\tilde{\varepsilon}_0 a^2 = -\frac{5\sigma_0\ell^2}{27Eh} \tag{106}$$

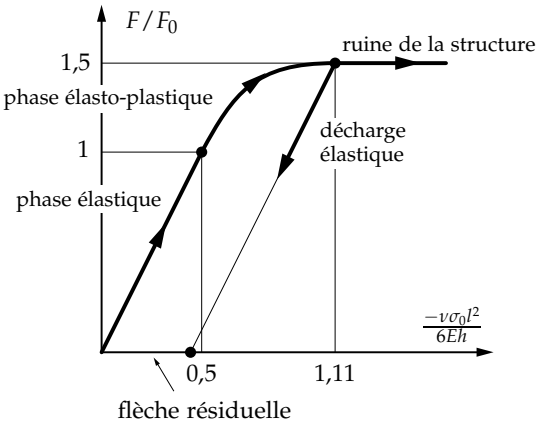


Fig. 56: phases d'évolution et flèche résiduelle

La flèche résiduelle après décharge élastique est :

$$v_r\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5\sigma_0\ell^2}{27Eh} - \frac{F_1\ell^3}{48EI} = \frac{\sigma_0\ell^2}{Eh}\left(\frac{5}{27} - \frac{1}{8}\right) \tag{107}$$

L'essai de flexion simple que nous venons d'étudier a mis en évidence le comportement asymptotique de la courbure. Les deux parties de la poutre de part et d'autre de la section $\ell/2$ peuvent tourner, le moment restant constant (matériau parfaitement plastique). Nous modélisons cette propriété par une rotule plastique (rotule avec frottement sec).

Modèle simplifié – rotule plastique

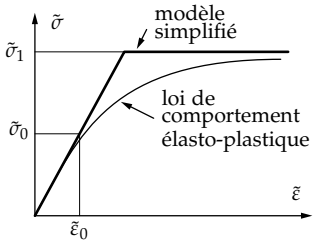


Fig. 57: loi de comportement généralisée approchée pour un matériau élasto-plastique parfait

Pour le calcul des portiques, le modèle de comportement élasto-plastique que nous venons de présenter est trop complexe. Le calcul pratique s'appuie sur un modèle simplifié basé sur une approximation linéaire par morceaux de la loi de comportement généralisée.

La figure 57 représente la loi de comportement généralisée approchée pour un matériau élasto-plastique parfait. Ce modèle revient à négliger l'évolution élasto-plastique dans les sections en cours de plastification. C'est le modèle utilisé pour les calculs de charges limites. D'après ce diagramme, il y a rotule plastique dans une section lorsque celle ci est complètement plastifiée. La rotule plastique introduit une discontinuité du taux de rotation de la fibre moyenne. Du point de vue rhéologique, une rotule plastique serait modélisée par une rotule avec frottement sec.

- Si $|\tilde{\sigma}| < \tilde{\sigma}_1$, la rotule est bloquée et la section a un comportement élastique $\tilde{\sigma} = EI\tilde{\varepsilon}$;
- Si $|\tilde{\sigma}| = \tilde{\sigma}_1$, la rotation est libre et le moment reste constant $\tilde{\sigma} = \pm\tilde{\sigma}_1$.

Fig. 58: rotule plastique

En toute rigueur, la notion de *rotule plastique* ne peut être introduite que si la flèche, avant plastification complète d'une section, reste petite. Dans le cas général, rien ne permet de prétendre que la flèche reste finie. Si l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée, le modèle présenté n'a plus de sens.

Le modèle *rotule plastique* ne dit rien sur la répartition des contraintes σ_{xx}. Ce modèle ne permet que le calcul des charges limites (charge de ruine d'une structure).

Application

Étudions l'évolution de la poutre schématisée par la figure 59 lorsque le chargement augmente. Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont sa rigidité en flexion EI et son moment limite de plastification $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_0 Z(h)$.

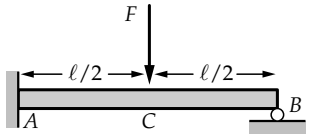


Fig. 59: flexion simple

Phase 1

Le système est hyperstatique d'ordre 1 puisqu'il y a trois inconnues pour les deux équations d'équilibre suivantes :

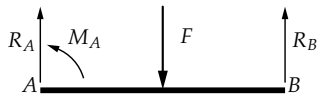


Fig. 60: phase 1 : efforts transmis

$$R_A + R_B - F = 0; \qquad M_A + F\frac{\ell}{2} - R_A\ell = 0 \tag{108}$$

Résolution Prenons R_B comme inconnue hyperstatique. L'énergie de déformation s'écrit :

$$2W = \frac{1}{EI}\int_0^\ell M_f^2 \mathrm{d}x \tag{109}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_f &= (\ell - x)R_B - (\ell/2 - x)F \qquad \forall x \in [0, \ell/2] \\ M_f &= (\ell - x)R_B \qquad\qquad\qquad\quad \forall x \in [\ell/2, \ell] \end{aligned} \tag{110}$$

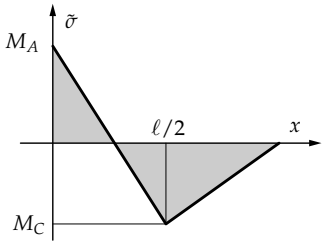


Fig. 61: phase 1 : moment de flexion

Appliquons le théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial W}{\partial R_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{5F}{16}; \qquad R_A = \frac{11F}{16}; \qquad M_A = \frac{3F\ell}{16} \tag{111}$$

Domaine de validité La solution obtenue est valable si $|M_f| < \tilde{\sigma}_1$. Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure 61 avec $M_C = -\frac{5}{32}F\ell$. C'est la section A qui plastifie la première puisque la première rotule plastique apparaît à l'encastrement pour $M_A = \tilde{\sigma}_1$, soit $F_1 = \frac{16}{3}\frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell}$.

Phase 2

La phase 2 est effective pour $F > F_1$. Du fait de la première rotule plastique, le système initial de la figure 59 est maintenant isostatique du fait de la présence d'une rotule plastique en A : le diagramme des efforts transmis correspondant est indiqué sur la figure 62.

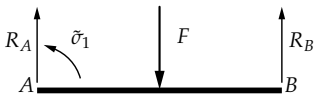


Fig. 62: phase 2 : efforts transmis

Résolution Les équations d'équilibre nous donnent :

$$R_A = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell} + \frac{F}{2}; \qquad R_B = -\frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell} + \frac{F}{2} \tag{112}$$

Domaine de validité Le diagramme du moment de flexion est représenté sur la figure 63 avec $M_C = \frac{\tilde{\sigma}_1}{2} - \frac{F\ell}{4}$. La section C plastifie pour $M_C = -\tilde{\sigma}_1$ tant que $F < F_2$ avec $F_2 = 6\frac{\tilde{\sigma}_1}{\ell}$

Quand $F > F_2$, il y a ruine de la structure, F_2 est la charge limite de cette structure.

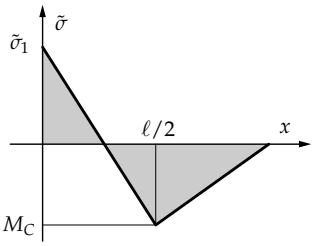


Fig. 63: phase 2 : moment de flexion

Plasticité 3D

Reprenons les notions introduites dans le deuxième chapitre lorsque nous avons modélisé l'essai de traction–compression. Nous avions alors considéré un état de contrainte uni axial ce qui nous avait permis de travailler avec des fonctions scalaires. En réalité l'espace des contraintes est de dimension six puisque le tenseur des contraintes est supposé symétrique, généralisons les deux notions suivantes :

- critère de plasticité et son évolution (écrouissage) ;
- lois d'écoulement plastique.

Nous présentons le principe d'utilisation de ces notions dans un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis.

Critères de plasticité

Nous rappelons que l'expérience met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité à l'intérieur duquel les déformations sont réversibles. La définition donnée au chapitre peut être généralisée.

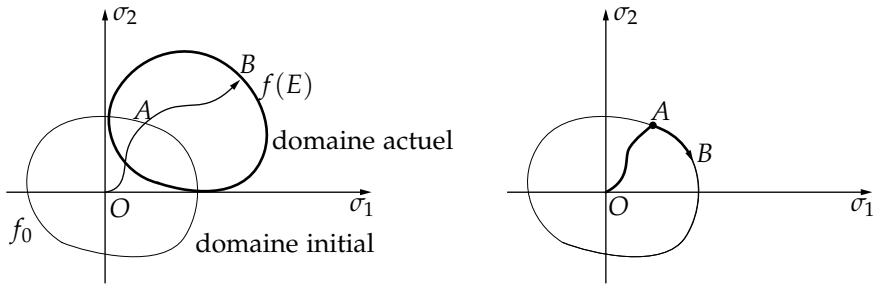
Définition Le critère de plasticité est la fonction scalaire $f(\overline{\overline{\sigma}}, h)$ [10] telle que :

- si $f(\overline{\overline{\sigma}}, h) < 0$ l'état actuel $(\overline{\overline{\sigma}}, h)$ est intérieur au domaine d'élasticité.
- si $f(\overline{\overline{\sigma}}, h) = 0$ l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles.

[10] La fonction $f(\overline{\overline{\sigma}}, h)$ est aussi appelée fonction de charge

Les paramètres d'écrouissage h caractérisent l'évolution de ce domaine en fonction de l'historique du chargement suivit pour obtenir l'état actuel. Nous avons schématisé l'évolution avec et sans écrouissage du domaine d'élasticité représenté dans le plan des contraintes σ_1, σ_2. Sur les figures 64(a) et 64(b), OA représente l'évolution élastique et AB, l'évolution plastique. Nous notons $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$, le critère définissant le domaine d'élasticité initial.



(a) matériau élasto-plastique avec écrouissage

(b) matériau élasto-plastique parfait

Fig. 64: modèles de plasticité 3D

Propriété $f(\overline{\overline{\sigma}}, h)$ doit respecter les symétries matérielles. Si le matériau est isotrope (dans l'état initial et après déformations élastiques), la quantité $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$ doit être invariante dans tout changement de base et symétrique des contraintes principales.

En conséquence pour un matériau isotrope, $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$ s'exprime en fonction des seuls invariants de $\overline{\overline{\sigma}}$.

Pour rappel, une fonction scalaire d'un tenseur est *invariante* si sa valeur ne change pas lors d'un changement de base. Le polynôme caractéristique $P = \det(\overline{\overline{\sigma}} -$

$\lambda\overline{\overline{1}}$) est un invariant de $\overline{\overline{\sigma}}$. Tous les coefficients suivants sont des invariants de $\overline{\overline{\sigma}}$:

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}\,; \quad I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\overline{\overline{\sigma}} - \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}^2)\,; \quad I_3 = \det\overline{\overline{\sigma}} \tag{113}$$

En plasticité sont utilisés les invariants définis par les traces des premières puissances du tenseur des contraintes :

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}\,; \quad I_2' = \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}^2\,; \quad I_3' = \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}^3 \tag{114}$$

La représentation de la fonction $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$ dans $\Re^3$ espace des contraintes principales est une surface pour laquelle, les plans $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ sont des plans de symétrie, et l'axe $(1,1,1)$ est un axe de symétrie ternaire [11].

[11] Quand le modèle d'écrouissage conserve l'isotropie, les propriétés pour le critère $f(\overline{\overline{\sigma}}, h)$ sont identiques.

Les principaux critères sont :

- pour les matériaux homogènes isotropes : Von Mises (1910), Tresca (1870)
- pour les matériaux orthotropes : Hill (1950)
- pour les sols : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager (1950)

Ces critères sont anciens, ils restent cependant largement utilisés car les méthodes d'identification des paramètres caractérisant le comportement élasto-plastique ont fait leurs preuves pour ces critères. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'élaborer des critères modélisant mieux le comportement des matériaux. Cependant il reste toujours la difficulté de définir des processus expérimentaux simples et fiables permettant d'identifier les paramètres du modèle que l'on veut utiliser.

Critère de Von Mises

L'expérience montre que pour les métaux, tout état de contraintes *hydrostatique* [12] est admissible, c'est-à-dire qu'il appartient au domaine d'élasticité, autrement dit quelque soit la charge, il n'y a pas de déformations plastiques. Par conséquent, le domaine d'élasticité est représenté par un ouvert non borné d'axe $(1,1,1)$ dans l'espace des contraintes principales $\Re^3$. Il s'avère donc que l'expression du critère $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$ doit être indépendante de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

[12] Un état de contraintes hydrostatique est caractérisé par :
$\sigma = \begin{bmatrix} P & & \\ & P & \\ & & P \end{bmatrix}$
Il correspond au problème d'une sphère soumise à une pression uniforme P.

Pour exprimer le critère, nous utilisons donc le tenseur déviateur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} = \overline{\overline{\sigma}} - \boxed{\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\overline{\overline{\sigma}})\overline{\overline{1}}} \leftarrow \text{partie sphérique} \tag{115}$$

et sa partie sphérique est notée $\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{s}$ [13]. Le critère de Von Mises est la forme la plus simple utilisant le premier invariant non nul du déviateur des contraintes $I_2'(\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}) = \mathrm{tr}(\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}^2) = \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}$. Soit la fonction de charge $f_0(\overline{\overline{\sigma}}) = \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} - k^2$. Plaçons-nous dans le cas d'un essai de traction :

[13] Premier invariant du déviateur $I_1(\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}) = \mathrm{tr}(\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}) = 0$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \tag{116}$$

d'où $f_0(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{2}{3}\sigma^2 - k^2$, k apparaît comme $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$, avec σ_0 limite élastique en traction. En pratique, la définition du domaine d'élasticité utilisant le critère de Von Mises est la suivante :

$$\left\{ \overline{\overline{\sigma}};\ \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}} - \sigma_\mathrm{s} \leqslant 0 \right\} \tag{117}$$

Le seuil σ_s à la dimension d'une contrainte que l'on peut identifier à σ_0 dans le cas de l'essai de traction. La grandeur $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}} : \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}$ est appelée contrainte équivalente de Von Mises. Appliquons le critère de Von Mises à l'essai de cisaillement simple indiqué sur la figure 65 :

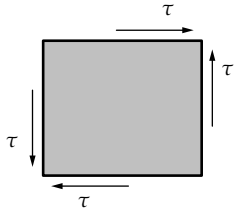


Fig. 65: cisaillement simple

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} = \overline{\overline{\sigma}} \tag{118}$$

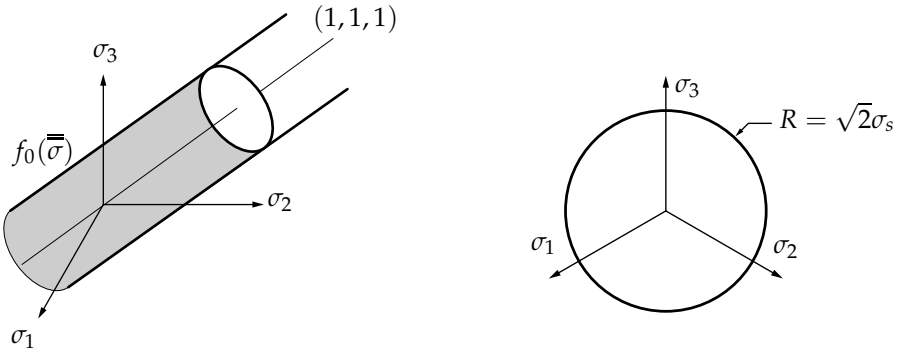
La fonction de charge s'écrit $f_0(\overline{\overline{\sigma}}) = \sqrt{3\tau^2} - \sigma_{\mathrm{s}}$. La limite d'élasticité en cisaillement simple pour le critère de Von Mises est donc définie par $\sigma_{\mathrm{s}}/\sqrt{3}$. Exprimons la fonction de charge initiale $f_0(\overline{\overline{\sigma}})$ dans $\Re^3$, espace des contraintes principales :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3-\sigma_2-\sigma_1}{3} \end{bmatrix} \tag{119}$$

d'où :

$$\sigma_{\mathrm{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \quad \text{et} \quad f_0(\overline{\overline{\sigma}}) = \sigma_{\mathrm{VM}} - \sigma_{\mathrm{s}} \tag{120}$$

La représentation graphique de la fonction de charge initiale dans l'espace des contraintes principales $\Re^3$ est une surface cylindrique non bornée d'axe $(1,1,1)$ de rayon $\sqrt{2}\sigma_{\mathrm{s}}$ comme indiqué sur la figure 66(a).



(a) matériau élasto-plastique avec écrouissage

(b) vue dans le plan $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

Fig. 66: fonction de charge initiale dans l'espace des contraintes principales pour le critère de Von Mises

Critère de Tresca

Pour ce critère, le domaine d'élasticité est défini dans $\Re^3$, espace des contraintes principales, par :

$$\left\{\overline{\overline{\sigma}}\ ;\ \forall i,j \in [1,3],\ \left|\sigma_i - \sigma_j\right| - \sigma_{\mathrm{s}} \leqslant 0\right\} \tag{121}$$

Il est simple de voir que pour l'essai de traction, le seuil σ_{s} est la limite élastique σ_0. La contrainte équivalente de Tresca est définie par :

$$\sigma_T = \max_{ij} \left|\sigma_i - \sigma_j\right| \tag{122}$$

L'addition d'un tenseur sphérique quelconque au tenseur des contraintes ne modifie pas la valeur de la contrainte équivalente de Tresca. Tout état de contraintes hydrostatique est donc admissible. Comme pour Von Mises ce critère est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Pour l'essai de cisaillement simple, une représentation de Mohr (figure 67) permet de voir que l'expression du critère de Tresca est $|2\tau| - \sigma_{\mathrm{s}} \leqslant 0$. La limite d'élasticité en cisaillement simple est donc $\sigma_{\mathrm{s}}/2$.

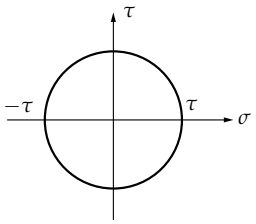
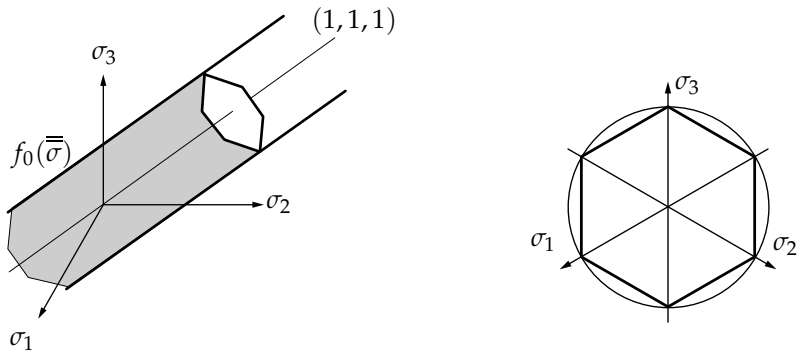


Fig. 67: représentation de Mohr



(a) matériau élasto-plastique avec écrouissage

(b) vue dans le plan $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

Fig. 68: fonction de charge initiale dans l'espace des contraintes principales pour le critère de Tresca

La représentation graphique de la fonction de charge initiale dans $\Re^3$, espace des contraintes principales, est une surface cylindrique de base hexagonale non bornée d'axe $(1,1,1)$ indiquée sur la figure 68.

Le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises et l'écart maximal entre les deux critères est $1 - \sqrt{3}/2$, soit un écart de l'ordre de 13%. Il est dit critère de cisaillement maximal : si les contraintes principales sont ordonnées $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, le critère ne fait plus apparaître que le cisaillement maximal $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Prise en compte de l'écrouissage

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'état actuel du critère est lié à l'état d'écrouissage (h) du matériau qui évolue au cours des déformations plastiques.

Écrouissage isotrope Le modèle isotrope consiste à faire dépendre le seuil $\sigma_s(h)$ de l'état d'écrouissage. Ce qui conduit à une dilatation du domaine d'élasticité définie par :

- Von Mises : $f(\overline{\overline{\sigma}}, E) = \sigma_{\text{VM}} - \sigma_s(h)$ avec $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\overline{\sigma_d}} : \overline{\overline{\sigma_d}}}$
- Tresca : $f(\overline{\overline{\sigma}}, h) = \sigma_{\text{T}} - \sigma_s(h)$ avec $\sigma_T = \max_{ij} \left|\sigma_i - \sigma_j\right|$

Pour ces deux critères, le seuil σ_s apparaît comme la limite élastique σ_0 de l'essai de traction. Pour exprimer $\sigma_s(h)$, nous pouvons utiliser une relation de la forme de celle établie au chapitre 2, à savoir $\sigma_s(h) = \sigma_0 + H\varepsilon_p$ [14].

[14] Ce modèle ne respecte pas l'effet de Bauschinger. Il ne doit pas être utilisé pour les problèmes de plasticité cyclique.

Écrouissage cinématique Dans le modèle cinématique l'état d'écrouissage sera caractérisé par un tenseur $\overline{\overline{\alpha}}(h)$, qui conduit à une translation du domaine d'élasticité alors défini par $f(\overline{\overline{\sigma}}, h) = f_0(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\alpha}}(h))$. Ce modèle respecte l'effet Bauschinger, mais ne conserve pas l'isotropie du matériau au cours des déformations plastiques. De plus il faut pouvoir déterminer expérimentalement les paramètre d'écrouissage caractérisant le tenseur $\overline{\overline{\alpha}}(h)$.

Autres critères Les autres critères sont souvent construits à partir des deux précédents. Ainsi le critère de Hill utilisé pour les matériaux anisotropes est une généralisation du critère de Von Mises.

En mécanique des sols, les critères les plus utilisés sont de type courbe intrinsèque. Le critère de Coulomb est construit à partir de celui de Tresca et le critère de Drucker-Prager à partir de celui de Von Mises. Il existe bien évidemment plusieurs autres critères [15].

[15] B. Halphen et J. Salençon. *Élastoplasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987

Loi d'écoulement plastique

Les lois d'écoulement plastique peuvent être présentées à partir du Principe de Hill ou principe du travail plastique maximal.

Définition

Par définition, le travail plastique par unité de volume produit par un incrément de contrainte $\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$ est :

$$D_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} \tag{123}$$

avec $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}}$, déformation plastique associée à $\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$.

Principe de Hill

Il s'énonce comme suit :

$$\forall \overline{\overline{\sigma}}^* \in \text{domaine d'élasticité}, \quad D_{\mathrm{p}} > \overline{\overline{\sigma}}^* : \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} \tag{124}$$

Ce principe exprime que pour toute variation de contrainte, le travail plastique dissipé dans la déformation plastique est à tout instant supérieur au travail plastique de tout état de contrainte admissible. Ce que nous pouvons écrire :

$$D_{\mathrm{p}} = \max_{\sigma^* \in f(\sigma,E)} \left\{ D_{\mathrm{p}}(\dot{\sigma}^*, \dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}) \right\} \tag{125}$$

Ce principe à deux conséquences immédiates : le domaine d'élasticité est convexe et l'incrément de déformation plastique est normal à la surface de charge. Pour une surface régulière la normale est définie de façon unique par :

$$\frac{\partial f(\overline{\overline{\sigma}}, E)}{\partial \overline{\overline{\sigma}}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}_{\sigma} f(\overline{\overline{\sigma}}, E) \tag{126}$$

S'il existe des points singuliers la normale n'est pas définie de façon unique. Elle appartient au cône défini par les normales des surfaces régulières qui se rejoignent aux points singuliers. Nous avons représenté cette propriété sur la figure 69.

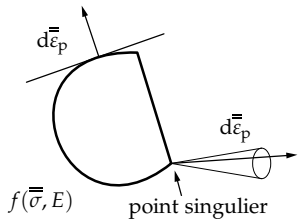


Fig. 69: définition du point singulier : pas de normale unique. Au point singulier, la direction de déformation plastique appartient à un cône

Pour illustrer notre propos traitons deux exemples simples définis dans un espace à deux dimensions.

Cas d'un domaine circulaire Ce domaine est défini par :

$$\left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \in \Re^2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2 \leqslant 0 \right\} \tag{127}$$

Par conséquent, la fonction de charge s'écrit $f(\overline{\overline{\sigma}}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2$ et son gradient :

$$\overline{\overline{\mathrm{grad}}}_{\sigma} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial \sigma_1 \\ \partial f/\partial \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 \\ 2\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{128}$$

et en tout point de la frontière, nous avons la propriété suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{129}$$

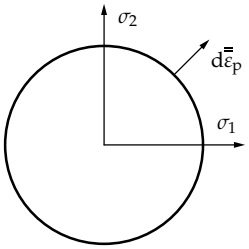


Fig. 70: domaine admissible circulaire

Cas d'un domaine carré Le domaine est alors défini par :

$$\left\{(\sigma_1,\sigma_2)\in\Re^2;|\sigma_1|-b\leqslant 0 \text{ et } |\sigma_2|-b\leqslant 0\right\} \tag{130}$$

En A, la fonction de charge est $f_1(\overline{\overline{\sigma}})=\sigma_1-b$ et le gradient s'écrit :

$$\overline{\overline{\text{grad}}}_\sigma(f)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{131}$$

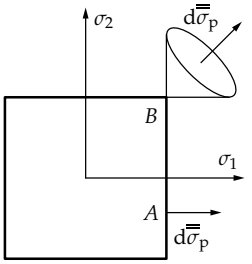


Fig. 71: domaine admissible carré

Par contre, en B, le gradient n'est pas défini : il s'agit d'un point singulier.

Nous utilisons les deux fonctions de charge $f_1(\overline{\overline{\sigma}})=\sigma_1-b$ et $f_2(\overline{\overline{\sigma}})=\sigma_2-b$ pour définir en B une direction de déformation plastique appartenant au cône défini par les normales aux fonctions de charge en B :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{132}$$

Le principe de Hill nous permet donc de formuler les règles d'écoulement plastique que sont la condition de charge et la loi de normalité.

Condition de charge

À partir d'un état actuel $(\overline{\overline{\sigma}},h)$, nous cherchons dans quelles conditions il y aura déformation plastique. Cette condition exprime le fait qu'on aura déformation plastique quand l'état de contrainte est situé sur la frontière du domaine d'élasticité et a tendance à en sortir pour un incrément de contrainte donné. Il est simple de faire le parallèle avec la loi d'écoulement plastique présentée dans le cas monodimensionnel de l'essai de traction.

- si $f(\overline{\overline{\sigma}},h)=0$, $\overline{\overline{\sigma}}$ appartient à la frontière du domaine d'élasticité ;
- si $\frac{\partial f}{\partial\overline{\overline{\sigma}}}:\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}>0$, il y a charge et $\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$ est dirigé vers l'extérieur du domaine. Ceci a pour conséquences $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}=\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{e}+\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}$ avec $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}$, tenseur des déformations plastiques permanentes et $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{e}=k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$, tenseur des déformations élastiques ;
- sinon il y a décharge, la déformation est purement élastique ce qui entraîne $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}=\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_e=k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$ avec k, opérateur d'élasticité ;
- si $f(\overline{\overline{\sigma}},h)<0$, $\overline{\overline{\sigma}}$ appartient à l'intérieur du domaine d'élasticité. La déformation est purement élastique : $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}=\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_e=k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$.

Loi de normalité

Cette loi précise la direction de l'écoulement plastique :

- pour une frontière $f(\overline{\overline{\sigma}},h)$ régulière :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}=\lambda\overline{\overline{\text{grad}}}_\sigma f \quad\text{avec}\quad \begin{cases}\lambda=0 & \text{si } f(\overline{\overline{\sigma}},h)<0\\ \lambda>0 & \text{si } f(\overline{\overline{\sigma}},h)=0\end{cases} \tag{133}$$

- pour une frontière singulière : $\forall i\in[1,n]$, $f_i(\overline{\overline{\sigma}},h)$:

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{\overline{\text{grad}}}_\sigma f_i \quad\text{avec}\quad \begin{cases}\lambda_i=0 & \text{si } f_i(\overline{\overline{\sigma}},h)<0\\ \lambda_i>0 & \text{si } f_i(\overline{\overline{\sigma}},h)=0\end{cases} \tag{134}$$

Von Mises La fonction seuil s'écrit :

$$f(\overline{\overline{\sigma}})=\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}:\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}-k^2 \tag{135}$$

et par différenciation

$$\mathrm{d}\,(\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}) = 2\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} = \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{1}} \tag{136}$$

Il s'avère en plus que $\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} : \overline{\overline{1}} = \mathrm{tr}\,\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} = 0$ d'où $\overline{\overline{\mathrm{grad}}}_\sigma(f) = 2\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d}$ et par conséquent :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p} = \lambda\overline{\overline{\sigma}}_\mathrm{d} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \text{ si } f(\overline{\overline{\sigma}}, E) < 0 \\ \lambda > 0 \text{ si } f(\overline{\overline{\sigma}}, E) = 0 \end{cases} \tag{137}$$

Tresca La fonction seuil s'écrit :

$$f(\overline{\overline{\sigma}}, E) = \sigma_\mathrm{T} - \sigma_\mathrm{s}(E) \quad \text{avec} \quad \sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j| \tag{138}$$

Il y a six fonctions de charge correspondant chacune d'elle à une face de l'hexagone : $f_1 = \sigma_1 - \sigma_2$, $f_2 = \sigma_2 - \sigma_1$, $f_3 = \sigma_1 - \sigma_3$, $f_4 = \sigma_3 - \sigma_1$, $f_5 = \sigma_2 - \sigma_3$ et $f_6 = \sigma_3 - \sigma_2$ d'où la forme de $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \overline{\overline{\sigma}}}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}1} \\ \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}2} \\ \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{p}3} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En pratique, un point sur la surface de charge ne peut se situer qu'à l'intersection de deux faces de l'hexagone ce qui entraîne qu'au plus deux coefficients λ_i sont non nuls.

Sur ces deux exemples de critère, il est simple de vérifier que les déformations plastiques définies à partir de la loi de normalité, sont effectivement incompressibles soit $\mathrm{tr}(\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p}) = 0$.

Les règles d'écoulement plastique énoncées nous permettent donc de dire quand il y a écoulement plastique et définissent la direction de cet écoulement. Si le matériau est parfaitement plastique il y a écoulement libre, l'amplitude est indéterminée. S'il y a écrouissage, l'amplitude de la déformation plastique s'exprimera en fonction de l'accroissement de contrainte subi par le matériau.

Résolution numérique

Un problème d'élastoplasticité est un problème d'évolution quasi-statique à partir d'un état initial donné. Le trajet de chargement étant défini, le problème consiste à trouver $\vec{u}, \overline{\overline{\varepsilon}}, \overline{\overline{\sigma}}$ solution de :

$$\begin{array}{ll} \forall M \in D \quad \vec{\mathrm{div}}\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} & \text{équation locale} \\ \forall M \in \Gamma_u \quad \vec{u} = \vec{u}_\mathrm{d} \\ \forall M \in \Gamma_\sigma \quad \overline{\overline{\sigma}}\vec{n} = \vec{T}_\mathrm{d} & \text{conditions aux limites} \\ \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}_\mathrm{s}\vec{u} & \text{relations déplacements - déformations} \\ \overline{\overline{\sigma}} = \mathrm{fct}(\overline{\overline{\varepsilon}}) & \text{loi de comportement} \end{array} \tag{139}$$

Précisons la forme de la loi de comportement. En élasticité, nous avons $\overline{\overline{\sigma}} = k\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{e} = k\overline{\overline{\varepsilon}}$ alors qu'en élasto-plasticité $\overline{\overline{\sigma}}$ appartient au domaine d'élasticité d'où $f(\overline{\overline{\sigma}}, E) \leqslant 0$:

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} = \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{e} + \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p} \tag{140}$$

avec $\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{e} = k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}$:

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_\mathrm{p} = \lambda\overline{\overline{\mathrm{grad}}}_\sigma f \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } f(\overline{\overline{\sigma}}, E) < 0 \\ \lambda > 0 & \text{si } f(\overline{\overline{\sigma}}, E) = 0 \end{cases} \tag{141}$$

La difficulté essentielle en plasticité vient de la forme différente que peut prendre la loi de comportement au cours du processus d'évolution. L'idée est de se ramener à un problème élastique en transformant l'écriture de la loi de comportement en une relation globale de la forme :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} = k_{\mathrm{ep}}(\overline{\overline{\sigma}}, E)\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} \tag{142}$$

Cette écriture est souvent appelée intégration de la loi de comportement. Dés lors, nous pouvons utiliser les méthodes classiques mises en œuvre dans un code éléments finis pour résoudre le problème pour un incrément de charge donné.

Intégration de la loi de comportement

Traitons le cas du critère de Von Mises. Pour ce critère la loi d'écoulement plastique est de la forme :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} = \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{e}} + \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{e}} = k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \lambda\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} \tag{143}$$

Calculons :

$$\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} = k^{-1}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} + \lambda\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} \tag{144}$$

or $\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}}$ puisqu'en effet :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} = \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{1}} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \overline{\overline{1}} = 0 \tag{145}$$

Plaçons-nous sur la frontière du domaine d'élasticité :

$$\frac{3}{2}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} - \sigma_{\mathrm{s}}^2 = 0; \qquad \overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} = 0 \tag{146}$$

Nous en déduisons :

$$\lambda = \frac{3}{2\sigma_{\mathrm{s}}^2}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} \tag{147}$$

Pour le critère de Von Mises la loi d'écoulement plastique à la frontière du domaine d'élasticité est de la forme :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} = k^{-1}\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} + \left(\frac{3}{2\sigma_{\mathrm{s}}^2}\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} : \mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{\sigma}}_{\mathrm{d}} \tag{148}$$

Cette équation différentielle permet d'exprimer la loi de comportement élasto-plastique intégrée :

$$\mathrm{d}\overline{\overline{\sigma}} = k_{\mathrm{ep}}(\overline{\overline{\sigma}}, h)\mathrm{d}\overline{\overline{\varepsilon}} \tag{149}$$

Le calcul doit être fait dans un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité.

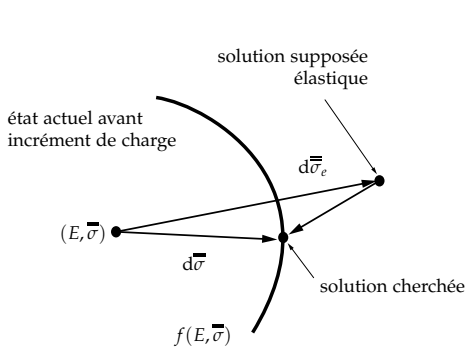
Application aux éléments finis

Les méthodes de résolution numérique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Les algorithmes de calcul ont été présentés à la section *Résolution numérique d'un problème élasto-plastique*. Or pour calculer le résidus d'équilibre il est nécessaire d'effectuer une projection sur la frontière du domaine d'élasticité le principe est le suivant :

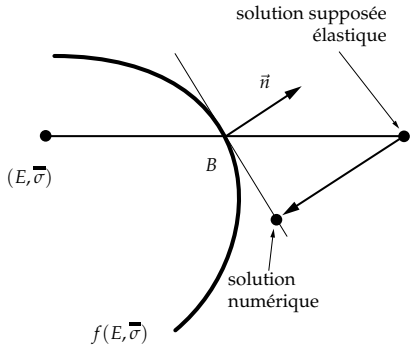
Alg. 4: Principe de projection sur la frontière

- Connaissant l'incrément de déplacement d$\mathbf{U}$ solution de $\mathbf{K}_{ep}\mathrm{d}\mathbf{U} = \mathrm{d}\mathbf{F}$
1: **pour** chaque élément **faire**
2: évaluer aux points de Gauss : $\mathrm{d}\sigma_e = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{U}$
3: solution élastique : $\sigma_e = \sigma + \mathrm{d}\sigma_e$
4: **si** $f(\overline{\overline{\sigma}}, E) < 0$ **alors**
5: solution élastique convenable
6: **sinon**
7: état de contrainte non admissible
8: projection de la solution sur la frontière du domaine d'élasticité (figure 72(a)) ;
9: **fin si**
10: **fin pour**

Fig. 72: projection sur le critère



(a) projection de la solution sur la frontière du domaine d'élasticité



(b) projection sur le critère et approximation numérique

Il faut effectuer une projection de la solution sur la frontière du domaine d'élasticité. Le schéma idéal de projection est visualisé sur la figure 72(a). Numériquement on sait évaluer la position du point B et la normale en B au critère d'où le schéma numérique de projection sur le critère indiqué sur la figure 72(b). L'état de contrainte obtenu à la suite de ces calculs n'équilibre plus l'incrément de charge appliqué. D'où le calcul du résidu d'équilibre utilisé dans le schéma numérique.

Pour de plus amples détails, le lecteur peut se rapporter à l'ouvrage de J. Owen [16].

[16] J. Owen et E. Hinton. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press, New York, 1980

Bibliographie

D. François, A. Pineau et A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991.

B. Halphen et J. Salençon. *Élastoplasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.

J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.

J. Owen et E. Hinton. *Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice*. Pineridge Press, New York, 1980.