

THÉORÈMES SUR LES INTÉGRALES

Ceci est le chapitre 0 de ce livre. Il expose les conditions dans lesquelles on peut passer à la limite ou dériver sous le signe \int . Les quatre chapitres suivants (**I**, **II**, **III**, et **IV**) en feront un usage constant. Il est donc indispensable de l'avoir soigneusement étudié avant de passer à la suite.

Il comporte de très nombreux exercices qui consistent presque tous à effectuer concrètement des démonstrations qui ne seront reprises que très rapidement aux chapitres suivants.

LEMME (inégalité de la moyenne). *$]a, b[$ est un intervalle non nécessairement borné (c'est-à-dire qu'on peut avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$), $f(t)$ une fonction bornée sur $]a, b[$, et $g(t)$ une fonction telle que l'intégrale $\int_{]a, b[} |g(t)| dt$ soit convergente. Alors l'intégrale $\int_{]a, b[} f(t) g(t) dt$ est absolument convergente et on a*

$$\left| \int_{]a, b[} f(t) g(t) dt \right| \leq \sup_{t \in]a, b[} \{|f(t)|\} \times \int_{]a, b[} |g(t)| dt \quad (1)$$

Démonstration. L'inégalité de la moyenne est connue pour les sommes finies : si $\{a_j\}$ et $\{b_j\}$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) sont deux suites finies, on aura toujours :

$$\left| \sum_{j=1}^{j=n} a_j b_j \right| \leq \max_{j=1}^{j=n} \{|a_j|\} \times \sum_{j=1}^{j=n} |b_j| \quad (2)$$

Or une intégrale est toujours une limite de sommes finies (les sommes de Riemann dans la théorie élémentaire, mais c'est vrai aussi pour n'importe quelle théorie de l'intégrale) ; et les inégalités larges passent à la limite.

Il est *toujours* vrai que l'intégrale est une limite de sommes finies ; la difficulté, dans les diverses théories de l'intégrale, vient de l'existence ou de l'unicité de ces limites. En effet, pour avoir une notion d'intégrale cohérente, il faut que la valeur limite soit indépendante de la discrétisation de la fonction. L'exemple (scolaire) qu'on donne toujours pour illustrer ce problème est la fonction

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ est rationnel;} \\ 0 & \text{si } t \text{ est irrationnel;} \end{cases}$$

Si on construit une somme de Riemann en discrétisant l'intervalle par $t_j = j/N$, on obtient

$$\int_0^1 \chi(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \chi\left(\frac{j}{N}\right) = 1$$

Théorèmes sur les intégrales

tandis que si on discrétise par $t_j = j\pi/N$, on obtient

$$\int_0^1 \chi(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{E(N/\pi)} \frac{\pi}{N} \chi\left(\frac{j\pi}{N}\right) = 0$$

(la sommation s'effectue de $j = 0$ à $j = E(N/\pi)$, où $E(N/\pi)$ désigne la partie entière de N/π). Ainsi la méthode de Riemann ne permet pas de définir de façon cohérente une intégrale de la fonction χ . La fonction χ est l'exemple donné par Henri Lebesgue dans sa première communication sur le sujet à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, d'une fonction qui ne peut pas être intégrée par la méthode de Riemann, mais peut l'être par la sienne.

Dans n'importe quelle approche de l'intégrale, cependant, une fois résolus les problèmes d'existence et d'unicité de la limite, la valeur de l'intégrale sera toujours une limite de sommes finies, auxquelles on peut appliquer l'inégalité (2). Le fait que l'intervalle $]a, b[$ soit infini, ou que la fonction à intégrer devienne infinie en a ou en b , n'y change rien non plus. Par exemple, on aura

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N^2} \frac{1}{N} e^{-j/N}$$

ou bien

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{j/N}}$$

Théorème 1 $[a, b]$ est un intervalle borné, f_n une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si f_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (3)$$

Démonstration. Dire que f_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers f signifie que la suite numérique $u_n = \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers zéro. D'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq u_n \times \int_a^b 1 dt = u_n \times (b - a) \quad (4)$$

Or $b - a$ est fini et u_n tend vers zéro.

N. B. On peut aussi utiliser cet argument si, au lieu d'une suite de fonctions f_n , on a une famille continue f_α où α est un nombre réel qui tend vers zéro (ou vers l'infini, ou vers n'importe quoi).

⁽¹⁾ Sur une généralisation de l'intégrale définie Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, séance du 29 avril 1901.

Exercices.

1. Dans le polycopié, chapitre **II**, page 57, dans la démonstration du théorème 6, on intervertit une intégration sur un lacet γ avec la sommation d'une série géométrique ; Utiliser le théorème 1 pour justifier cette opération. Généraliser.

2. Dans le polycopié, chapitre **III**, page 106, ligne 16, on peut lire : “lorsqu'un tel lacet est complètement aplati sur le segment, l'intégrale devient celle de 0 à 1 des valeurs limite de $F(z)$ par dessous, plus celle de 1 à 0 des valeurs limite de $F(z)$ par dessus”.

Utiliser le théorème 1 pour prouver la validité de ce passage à la limite.

3. Démontrer qu'une série normalement convergente de fonctions peut être intégrée terme par terme. De façon plus précise : soit une série de fonctions $\sum f_n(x)$, les f_n étant définies et continues sur $[0, A]$. On pose $a_n = \sup_{t \in [0, A]} |f_n(t)|$ et on suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente. Alors, si $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$, la série des $F_n(x)$ est la primitive de la fonction $\sum f_n(x)$.

Voyons maintenant le cas où l'intervalle $]a, b[$ est infini, ou encore le cas où l'intervalle est fini, mais où les fonctions f_n et f peuvent devenir infinies en a ou en b (les intégrales étant cependant convergentes).

Théorème 2 $]a, b[$ est un intervalle non nécessairement borné, f_n une suite de fonctions continues sur $]a, b[$ telles que les intégrales $\int_a^b f_n(t) dt$ soient convergentes.

Si sur tout sous-intervalle borné $[A, B]$ inclu dans $]a, b[$, f_n converge uniformément sur $[A, B]$ vers f , et si en outre il existe une fonction $F(t)$ telle que :

- a) $\forall t \in]a, b[, \quad F(t) \geq 0 ;$
- b) $\forall t \in]a, b[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq F(t) ;$
- c) l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente ;

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (5)$$

Théorèmes sur les intégrales

Démonstration. Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon \quad (6)$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente, on peut trouver A et B tels que $a < A < B < b$, ainsi que $\int_a^A F(t) dt < \frac{\varepsilon}{8}$ et $\int_B^b F(t) dt < \frac{\varepsilon}{8}$. Cela est valable aussi bien si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, que si a et b sont finis mais que $F(t)$ devient infinie en a et b .

Puisque par hypothèse $|f_n(t)| \leq F(t)$, on aura aussi $|f(t)| \leq F(t)$ et par conséquent $|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t)| + |f(t)| \leq 2F(t)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_a^A |f_n(t) - f(t)| dt + \int_B^b |f_n(t) - f(t)| dt &\leq \\ &\leq 2 \cdot \int_a^A F(t) dt + 2 \cdot \int_B^b F(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A et B tels que l'intégrale de $|f_n(t) - f(t)|$ sur $]a, A[\cup]B, b[$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, puisque sur l'intervalle $[A, B]$ (avec A et B ainsi choisis), f_n tend uniformément vers f , on peut dire qu'il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies \int_A^B |f_n(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

En combinant (7) et (8) on obtient ce qu'on voulait.

CQFD

On a évidemment la même chose si au lieu d'une suite f_n , on a une famille continue f_α .

Exercices.

4. Utiliser le théorème ci-dessus pour faire une démonstration courte du théorème 4 du chapitre **IV** (pages 111-112).

Indications : Prendre comme suite f_n les fonctions :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq n; \\ 0 & \text{si } t > n; \end{cases}$$

Je rappelle aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

5. Au chapitre **IV** du polycopié, page 127 (en haut), justifier le passage à la limite pour $\alpha \rightarrow 0$.

On peut aussi énoncer une variante du théorème 2 : on y a supposé que les f_n tendent uniformément vers f sur tout sous-intervalle $[A, B]$ et que les $|f_n|$ sont toutes majorées par $F(t)$. Pour appliquer ce théorème, il faudra donc vérifier soigneusement que *pour tout* sous-intervalle $[A, B]$ la suite numérique $u_n(A, B) = \sup_{t \in [A, B]} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers zéro. Mais souvent on peut trouver plus directement une fonction $F(t) \geq 0$ dont l'intégrale sur $]a, b[$ est convergente et une suite numérique u_n qui tend vers zéro telles que

$$\forall t \in]a, b[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t) - f(t)| \leq u_n F(t)$$

Dans ce cas la conclusion est la même, puisque, toujours d'après l'inégalité de la moyenne, on pourra écrire :

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq u_n \times \int_a^b F(t) dt \quad (9)$$

On peut donc énoncer :

Théorème 3 $]a, b[$ est un intervalle non nécessairement borné, f_n une suite de fonctions continues sur $]a, b[$ telles que toutes les intégrales $\int_a^b f_n(t) dt$ soient convergentes.

S'il existe une fonction $F(t) \geq 0$ dont l'intégrale sur $]a, b[$ est convergente, ainsi qu'une suite numérique u_n qui tend vers zéro, telles que

$$\forall t \in]a, b[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t) - f(t)| \leq u_n F(t) \quad (10)$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Exercices.

6. Au chapitre **III**, page 96, on obtient les égalités (5.7) par un passage à la limite sous les intégrales. Utiliser le théorème 3 ci-dessus pour le justifier en détail, en majorant la différence

$$\left| \frac{e^{-t}}{1+zt} - \frac{e^{-t}}{1-at} \right|$$

(ne pas oublier que sur la partie courbe des chemins Γ_1 et Γ_2 , t est complexe!)

Les théorèmes 1, 2 et 3 couvrent pratiquement tous les cas concrets qu'on peut rencontrer. Les passages à la limite dans les intégrales servent presque toujours à établir des égalités : formule d'Euler (**IV**, **théorème 5** ; voir exercice 4), formule de Hankel (**IV**, section 6 ; voir exercice 5), calcul de la discontinuité de la fonction d'Euler (**III**, page 95 ; voir exercice 6), calculs d'intégrales diverses (**III**, sections 3 et 5), etc. etc. Ils ont donc une utilité pratique considérable pour les calculs.

Dans tous ces cas, la condition de convergence uniforme (l'existence de la suite numérique u_n dans les théorèmes 1, 2 et 3) n'est pas plus difficile à obtenir que la limite point-par-point ; c'est-à-dire qu'il ne coûte pas plus cher, dans tous ces exemples, de vérifier que $u_n = \sup_t |f_n(t) - f(t)|$ tend vers zéro, que de vérifier que pour tout t fixé, $|f_n(t) - f(t)|$ tend vers zéro (convergence "simple" ou "point-par-point"). C'est pourquoi ces théorèmes élémentaires sont largement suffisants pour faire des calculs.

Pourtant, la condition de convergence uniforme n'est pas du tout nécessaire, et Lebesgue a démontré⁽²⁾ la version suivante du théorème 2, où les hypothèses sont fortement affaiblies :

Théorème 4 (dit "de convergence dominée"). $]a, b[$ étant un intervalle non nécessairement borné, et f_n une suite de fonctions intégrables (au sens de Lebesgue, c'est-à-dire pratiquement n'importe quoi pourvu que l'intégrale de la valeur absolue converge) sur $]a, b[$

Si pour presque tout⁽³⁾ t fixé dans $]a, b[$, la suite numérique $f_n(t)$ tend vers $f(t)$ (c'est-à-dire que f_n tend point-par-point, et non uniformément, vers f) et s'il existe une fonction $F(t)$ telle que

⁽²⁾ Dans son livre *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*, Gauthiers-Villars, Paris, 1904.

⁽³⁾ L'expression *presque partout* signifie en dehors d'un ensemble négligeable. Cette notion est expliquée au chapitre **I**, pages 20–21.

- a) pour tout t dans $]a, b[$, $F(t) \geq 0$;
 b) pour presque tout t dans $]a, b[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq F(t)$;
 c) la fonction F est intégrable sur $]a, b[$ (i.e. l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente) ;
 alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

La démonstration de ce théorème est possible dans le cadre de la théorie de Lebesgue, mais utilise des propriétés fines du continuum des nombres réels, essentiellement le fait⁽⁴⁾ que, si f_n tend point-par-point vers f , alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout intervalle fini $[A, B] \subset]a, b[$ il existe un ensemble $E(\varepsilon, A, B) \subset [A, B]$ de longueur totale inférieure à ε tel que la convergence de f_n vers f soit uniforme sur $[A, B] - E(\varepsilon, A, B)$.

exercice : En admettant ce théorème d'EGOROFF, et en admettant aussi qu'on peut prendre $F(t)$ continue, prouver le théorème de convergence dominée (reprendre la démonstration du théorème 2, et au lieu de découper l'intégrale en trois morceaux (sur $]a, A[$, $[A, B]$, et $]B, b[$), la découper en quatre (sur $]a, A[$, $[A, B] - E(\varepsilon, A, B)$, $E(\varepsilon, A, B)$ et $]B, b[$).

On considère maintenant une intégrale dépendant d'un paramètre :

$$\Phi(x) = \int_{]a, b[} f(x, t) dt \quad (11)$$

À quelles conditions peut-on sans risque d'erreur dériver sous l'intégrale ? Voici d'abord un théorème facile à démontrer dans un cadre élémentaire. Comme dans les théorèmes 3 et 4, l'intervalle $]a, b[$ n'est pas nécessairement borné, et s'il l'est, les fonctions à intégrer peuvent devenir infinies en a ou en b , mais de sorte que l'intégrale soit convergente.

Théorème 5 (dérivation d'une intégrale). Si dans (11) la fonction $f(x, t)$ possède, pour tout $x \in U$ et pour tout $t \in]a, b[$, une dérivée $\partial f / \partial x$ par rapport à x , ainsi qu'une dérivée seconde $\partial^2 f / \partial x^2$, et s'il existe une fonction $F(t)$ telle que

- a) $\forall t \in]a, b[$, $F(t) \geq 0$;
 b) $\forall t \in]a, b[$, $\forall x \in U$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq F(t)$;
 c) l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente ;

alors :

$$\frac{d\Phi}{dx}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (12)$$

⁽⁴⁾ Ce fait est connu sous le nom de *théorème d'EGOROFF*.

Théorèmes sur les intégrales

Démonstration.

Toujours le même schéma. D'après la formule des accroissements finis, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \forall t \in]a, b[, \quad \forall x \in U, \\ \left| f(x+h, t) - f(x, t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{2} h^2 \sup_{y \in U} \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y, t) \right| \right\} \\ \leq \frac{1}{2} h^2 F(t) \end{aligned} \quad (13)$$

d'où (par l'inégalité de la moyenne)

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |h| \int_a^b F(t) dt \quad (14)$$

Puisque l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est finie, le second membre ci-dessus tend vers zéro à cause du facteur h , donc aussi le premier, ce qui prouve

- a) que $\Phi(x)$ est dérivable sur U ;
- b) que sa dérivée est bien $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$. CQFD

Cette version du théorème de dérivation est une version faible car on exige des conditions sur la dérivée seconde. En pratique toutefois, c'est-à-dire dans les cas qu'on risque de rencontrer effectivement, cela n'est qu'exceptionnellement une gêne. Cette version a en outre l'avantage de pouvoir être démontrée par une simple application de l'inégalité de la moyenne.

La version classique exige des hypothèses bien plus faibles, mais ne peut être démontrée que dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue :

Théorème 6 (Henri Lebesgue, 1904) *On suppose seulement que pour presque tout t dans $]a, b[$, et tout x dans U , la fonction $f(x, t)$ de (11) possède une dérivée partielle $\partial f / \partial x$ et qu'il existe une fonction $F(t)$ telle que*

- a) *pour presque tout t dans $]a, b[$, $F(t) \geq 0$;*
- b) *pour presque tout t dans $]a, b[$ et tout x dans U , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq F(t)$;*
- c) *l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente (dans la théorie de Lebesgue on dit plutôt que F est intégrable sur $]a, b[$).*

La conclusion est alors la même qu'au théorème 5.

Démonstration.

Ce théorème se démontre aisément comme corollaire du théorème de convergence dominée (voir plus haut) : soit h_n une suite numérique qui tend vers zéro (mais on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \neq 0$). On a

$$\frac{\Phi(x+h_n) - \Phi(x)}{h_n} = \int_a^b \frac{f(x+h_n, t) - f(x, t)}{h_n} dt$$

D'après les hypothèses, lorsque h_n tend vers zéro, la suite $[f(x+h_n, t) - f(x, t)]/h_n$ tend presque partout vers $\partial f/\partial x$; en outre d'après la formule des accroissements finis et du fait que $|\partial f/\partial x| \leq F(t)$, on a aussi pour presque tout $t \in]a, b[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall x \in U$:

$$\left| \frac{f(x+h_n, t) - f(x, t)}{h_n} \right| \leq F(t)$$

de sorte que d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x+h_n) - \Phi(x)}{h_n} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

On a ainsi montré que *pour n'importe quelle* suite h_n qui tend vers zéro, le rapport $[\Phi(x+h_n) - \Phi(x)]/h_n$ tend vers $\int_a^b [\partial f/\partial x] dt$, ce qui signifie que Φ est dérivable et que sa dérivée est $\int_a^b [\partial f/\partial x] dt$. CQFD

Exercices

7. Au chapitre **VI**, page 153, ligne 9, est écrit : “Si les conditions pour pouvoir dériver sous le signe \int sont satisfaites, ...”. Préciser ces conditions à partir des théorèmes 5 et 6.

8. Au chapitre **VI**, pages 158-159, la démonstration du théorème 1 utilise l'inégalité de la moyenne et cela revient à redémontrer implicitement le théorème 5 ci-dessus. Refaire cette démonstration en utilisant cette fois les théorèmes 5 et 6 ci-dessus.

9. Soit la fonction

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{t^2 + 1} dt = \pi e^{-|x|}$$

(le calcul de l'intégrale se fait par la méthode des résidus, ce qui est un autre exercice). On voit, à cause de la valeur absolue $|x|$ dans l'expression à droite, que cette fonction n'est pas dérivable en zéro. Montrer que, justement, l'intégrale ne satisfait pas les conditions exigées pour le théorème 6 (et encore moins pour le théorème 5).

10. Au chapitre **III**, pages 85 et 86, on calcule l'intégrale

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^4 + 1} dx = \pi \cos\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-|t|/\sqrt{2}}$$

(attention ! le rôle des variables x et t est inversé par rapport à l'énoncé du théorème 6 ci-dessus). Vérifier directement sur l'expression à droite, que $\Psi(t)$ est deux fois dérivable en $t = 0$, mais pas trois fois (en $t \neq 0$, elle est infiniment dérivable). Constater par ailleurs que l'intégrale satisfait aux conditions des théorèmes 5 et 6 pour dériver une première fois ; ensuite, que pour dériver une seconde fois, elle ne satisfait plus aux conditions du théorème 5 mais encore à celles du théorème 6. Enfin, que pour dériver une troisième fois, elle ne satisfait même plus aux conditions du théorème 6.

Un dernier théorème très utile pour l'étude des fonctions d'une variable complexe, dont beaucoup sont définies comme des intégrales, notamment $\Gamma(z)$, $\mathbb{E}(z, w)$ (chap. **IV**), $\text{Eu}(z)$ (chap. **III** section **5**), mais aussi les fonctions de Bessel, les transformées de Fourier ou de Laplace (chap. **V**), les intégrales de Fresnel, etc.

Théorème 7 *On considère une intégrale dépendant du paramètre complexe z :*

$$\Phi(z) = \int_a^b f(z, t) dt$$

L'intervalle $]a, b[$ peut, comme aux théorèmes 2 à 6, être infini ou, s'il est fini, les fonctions peuvent devenir infinies en a ou en b . On suppose que pour tout $t \in]a, b[$, la fonction $z \mapsto f(z, t)$ est analytique dans un domaine Ω du plan complexe.

S'il existe une fonction $F(t)$ telle que

- a) $\forall t \in]a, b[, \quad F(t) \geq 0$;*
- b) $\forall t \in]a, b[, \quad \forall z \in \Omega, \quad |f(z, t)| \leq F(t)$;*
- c) l'intégrale $\int_a^b F(t) dt$ est convergente ;*

alors la fonction $\Phi(z)$ est analytique dans Ω , et sa dérivée analytique est

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \tag{15}$$

où $\partial f / \partial z$ est, pour t fixé, la dérivée analytique de $z \mapsto f(z, t)$.

Commentaire. On constate que, contrairement aux théorèmes 5 et 6, il n'est pas exigé que la fonction majorante F majore la dérivée $\partial f / \partial z$,

ni la dérivée seconde $\partial^2 f / \partial z^2$, mais qu'elle majore la fonction elle-même. Cela est permis par une propriété remarquable des fonctions analytiques, les *inégalités de Cauchy* (chapitre II, corollaire 6a, page 58). Les inégalités de Cauchy majorent en effet les dérivées d'une fonction analytique : si $M_r(t)$ est le maximum de $|f(z, t)|$ sur le disque $|z - z_0| \leq r$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right| \leq \frac{M_r(t)}{r} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_0, t) \right| \leq \frac{2 M_r(t)}{r^2} \quad (16)$$

(voir chap. II, page 58, 4.5).

Démonstration. Ainsi, puisque la dérivée seconde de $f(z, t)$ en un point $z = z_0$ de Ω est majorée par $2 M_r(t)/r^2$, on peut écrire la formule des accroissements finis sous la forme

$$\left| \frac{f(z+h, t) - f(z, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq 2 M_r(t)/(r/2)^2 \quad (17)$$

l'inégalité étant valable pour $|z - z_0| < \frac{1}{2}r$ (on recouvre le disque de centre z_0 et de rayon r , dans lequel $|f(z, t)|$ est majoré par $M_r(t)$, par des disques de centre z et de rayon $\frac{1}{2}r$, ce qui marche si on prend les z dans le disque de centre z_0 et de rayon $\frac{1}{2}r$). En procédant exactement comme dans la démonstration du théorème 5, on obtient ainsi que $\Phi(z)$ est analytique dans le disque de centre z_0 et de rayon $\frac{1}{2}r$, pourvu que le disque de centre z_0 et de rayon r soit inclu dans Ω , ce qui est toujours possible si r est assez petit (Ω est ouvert). Comme on peut faire cela pour n'importe quel point z_0 de Ω , on a ainsi prouvé que $\Phi(z)$ est analytique au voisinage de *tout* $z_0 \in \Omega$, donc analytique dans Ω . CQFD

On remarquera que, contrairement au théorème 5, le théorème de convergence dominée de Henri Lebesgue n'aurait pas conduit à des hypothèses plus faibles — sauf que les conditions sur $f(z, t)$ de l'énoncé auraient pu n'être supposées que presque partout, ce qui ne se rencontre jamais dans les calculs — : ici nous avons utilisé une majoration de la dérivée seconde comme dans le théorème 5, alors qu'en faisant appel au théorème de convergence dominée, on aurait pu se contenter d'une majoration de la dérivée première ; mais cela n'aurait rien changé, puisqu'il y a les inégalités de Cauchy.

Remarque sur la formule des accroissements finis appliquée aux fonctions d'une variable complexe. Elle se ramène aux fonctions d'une variable réelle de la manière suivante. Soit h un nombre complexe (celui qui devra tendre vers zéro). Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , on peut considérer la fonction $\varphi(t) = f(z + th)$ de la variable réelle $t \in [0, 1]$; φ dépend ainsi de la variable *réelle* t , mais prend évidemment des valeurs *complexes*. Sa dérivée par rapport à t est $\varphi'(t) = h f'(z + th)$, où f' désigne la dérivée analytique de f . De même pour la dérivée seconde : $\varphi''(t) = h^2 f''(z + th)$. D'autre part $\varphi(0) = f(z)$ et $\varphi(1) = f(z + h)$. La formule des accroissements

Théorèmes sur les intégrales

finis usuelle donne alors, appliquée à φ :

$$|\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} |\varphi''(t)|$$

Si on remplace les fonctions φ , φ' , et φ'' par leurs expressions à partir de f , f' , et f'' , cela se traduit par

$$|f(z+h) - f(z) - hf'(z)| \leq \frac{1}{2}|h|^2 \sup_{t \in [0,1]} |f''(z+th)|$$

Si $z+th$ est, $\forall t \in [0,1]$, contenu dans un disque de centre z_0 et de rayon r , sur lequel le maximum de $|f(z)|$ est M_r , on obtient bien l'inégalité (17).

Exercices

En général, lorsque la fonction $\Phi(z)$ du théorème 7 est analytique dans un domaine Ω , souvent infini, on ne pourra pas majorer en une seule fois la fonction $|f(z,t)|$ par $F(t)$ uniformément dans tout Ω . La plupart des exercices suivants correspondent à cette situation qui est la plus fréquente en pratique. On majorera alors $|f(z,t)|$ par une fonction $F(t)$ dans une partie seulement de Ω . Puis le domaine Ω sera obtenu comme une réunion infinie de parties U_n , $\Omega = \bigcup_n U_n$, sur chacune desquelles on aura une majorante F_n (mais telle que $\sup_n F_n = \infty$). Ainsi on prouvera que $\Phi(z)$ est analytique dans chaque U_n et *par conséquent* aussi dans Ω .

11. Montrer à partir des définitions (1.1) et (1.2) du chapitre **IV** (page 107) que les fonctions $\mathbb{E}(x,y)$ et $\mathbb{F}(x)$ sont analytiques dans le domaine $\{x \in \mathbb{C} \mid \Re x > 0\}$, $\{y \in \mathbb{C} \mid \Re y > 0\}$.

Appliquer le théorème 7 aux domaines $U_n = \{x \in \mathbb{C} \mid \Re x > \frac{1}{n}\}$, pour tout n .

12. Montrer que la fonction d'Euler (cf chap. **III** section 5)

$$\text{Eu}(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+zt} dt$$

est analytique dans $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$.

Appliquer le théorème 7 aux domaines $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z) > \frac{1}{n}\}$, où $d(z)$ est défini par (5.1), page 94 du chapitre **IV**

13. Montrer que l'intégrale de Hankel (6.1), page 121 du chapitre **IV**, définit une fonction analytique dans tout \mathbb{C} .

Appliquer le théorème 7 aux domaines $U_n = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > -n \text{ et } |y| < n\}$