

III. CALCUL DES RÉSIDUS

1. Séries de Laurent.

Nous avons vu en **II. 4** (théorème **6**) qu'une fonction analytique dans un disque y était développable en série entière. Nous allons voir

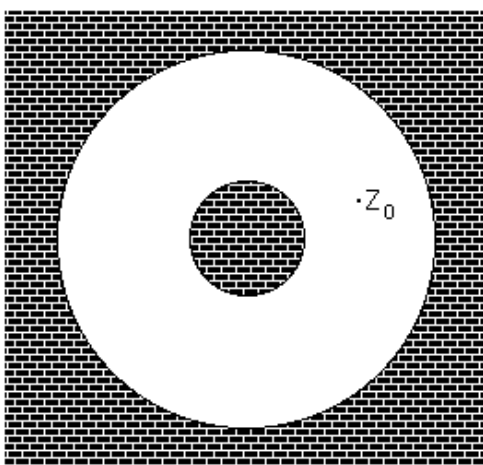


figure 1

maintenant qu'on peut généraliser ce résultat lorsque la fonction $f(z)$ est analytique dans une couronne comme celle représentée sur la figure ci-contre (fig. 1). Commençons par établir une version étendue de la formule de Cauchy. Si z_0 est un point de la couronne, on peut dire d'après la formule de Cauchy **II.4.1** que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

où γ est le bord d'un domaine entièrement contenu dans la couronne

(parcouru en sens direct). Les chemins représentés sur les figures 2, 3, et 4, sont des exemples de tels chemins. On comprend aisément en comparant les figures 4 et 5, que le lacet γ est homologiquement équivalent (dans la couronne) à la concaténation des deux lacets γ_1 et γ_2 , et on en déduit que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.1.)$$

N.B. Attention à l'orientation! Le lacet γ_1 est orienté dans le sens positif, tandis que le lacet γ_2 est orienté dans le sens négatif (voir les figures 4 et 5); si on oriente γ_2 dans le sens positif, il faudra mettre le signe $-$ devant l'intégrale correspondante dans 1.1.

Pour utiliser cette formule de Cauchy généralisée, il ne faut pas oublier que le point z_0 doit impérativement se trouver entre les chemins γ_1 et γ_2 , de même que dans la formule de Cauchy simple (**II.4.1**), il est impératif que le point z_0 se trouve à l'intérieur du domaine délimité par le chemin.

De même qu'en **II.4** nous avons utilisé la formule de Cauchy simple pour obtenir un développement en série, nous allons maintenant utiliser la

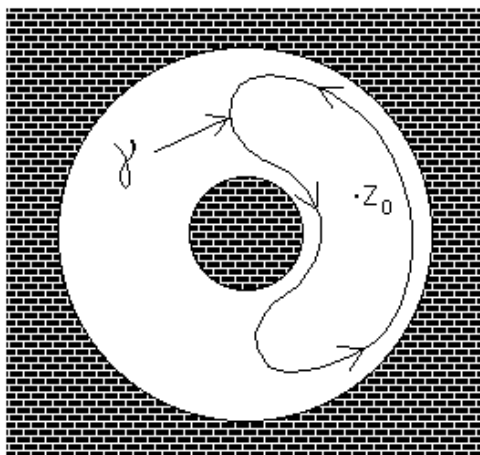


figure 2

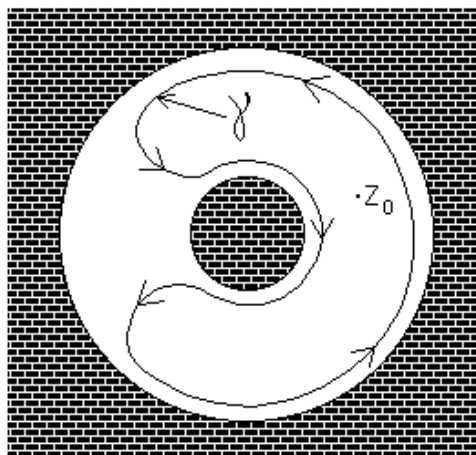


figure 3

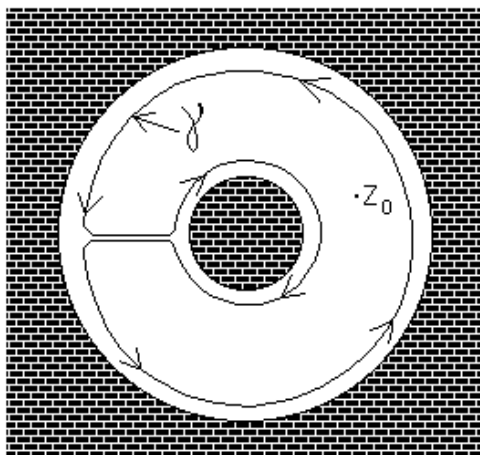


figure 4

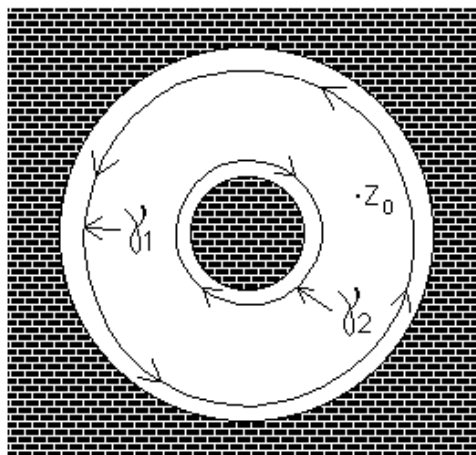


figure 5

Ces figures montrent pourquoi la concaténation des deux lacets séparés γ_1 et γ_2 de la figure 5 (noter que γ_1 est orienté positivement tandis que γ_2 est orienté négativement) est homologiquement équivalente au lacet γ de la figure 2.

formule généralisée. Pour fixer les idées, supposons que la couronne soit de centre 0, de petit rayon r , et de grand rayon R (si le centre était un point z_1 autre que 0, il suffirait de remplacer dans ce qui suit z par $z - z_1$ et z_0 par $z_0 - z_1$). Dans l'intégrale $\int_{\gamma_1} f(z)/(z - z_0) dz$, substituons

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z_0/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} \quad (1.2.)$$

(ceci ne diffère pas de ce qui avait été fait en **II.4**), et dans l'intégrale

Calcul des résidus

$\int_{\gamma_2} f(z)/(z - z_0) dz$, substituons

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - z/z_0} = -\frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_0^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_0^{n+1}} \quad (1.3.)$$

Ceci par contre diffère de ce qui avait été fait en **II.4**, car on obtient une série en puissances de $1/z_0$. Pour pouvoir intervertir la sommation de série avec l'intégration, il faut que chaque série soit normalement convergente sur le chemin d'intégration concerné; or la série 1.2 converge pour $|z| > |z_0|$, il suffit donc de choisir le chemin γ_1 de telle sorte qu'il reste à l'extérieur du disque $|z| > |z_0|$ (cette condition est satisfaite si γ_1 reste assez proche du bord extérieur de la couronne) et le chemin γ_2 de telle sorte qu'il reste à l'intérieur du disque $|z| < |z_0|$ (cette condition est satisfaite si γ_2 reste assez proche du bord intérieur de la couronne).

On obtient alors :

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z_0^n} \quad (1.4.)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\gamma_2} f(z) \cdot z^{n-1} dz \quad (1.5.)$$

Si on prend pour γ_1 un cercle de rayon ρ_1 , pour γ_2 un cercle de rayon ρ_2 , de sorte que $r < \rho_2 < |z_0| < \rho_1 < R$, et qu'on appelle M_ρ le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle $|z| = \rho$, on obtient des inégalités analogues à **II.4.5** :

$$|a_n| \leq \frac{M_{\rho_1}}{\rho_1^n} \quad \text{et} \quad |b_n| \leq M_{\rho_2} \cdot \rho_2^n \quad (1.6.)$$

On constate dans 1.4 que $f(z_0)$ est donné par la somme de *deux* séries, l'une entière ($\sum a_n z_0^n$), et l'autre entière en $1/z_0$ ($\sum b_n/z_0^n$)

Ce résultat est connu sous le nom de

Théorème de Pierre Laurent (1) : *une fonction $f(z)$ analytique dans une couronne $r < |z| < R$ est dans cette couronne égale à la somme d'une série entière en z et d'une série entière en $1/z$, de sorte que la série entière en z converge dans le disque $|z| < R$ et la série entière en $1/z$ dans le disque $|1/z| < 1/r$ (c'est-à-dire à l'extérieur du disque $|z| > r$).*

On appelle *série de Laurent* une série de puissances de z , $\sum c_n z^n$, mais qui (à la différence des séries entières), comporte aussi bien des puissances négatives que positives de z . La somme des termes correspondant à $n \geq 0$ est

appelée la *partie entière* ou *régulière*, et la somme des termes correspondant à $n \leq -1$ est appelée la *partie singulière*. L'égalité 1.4 est appelée le développement de $f(z_0)$ en série de Laurent. Les a_n sont les coefficients de la partie régulière, les b_n ceux de la partie singulière. On voit sans difficulté qu'il ne peut pas y avoir plusieurs développements de Laurent différents : si une série de la forme 1.7 est identiquement nulle (dans une couronne de centre 0), alors ses coefficients c_n sont tous nuls ; par exemple en utilisant les inégalités 1.6.

Pour compléter la démonstration du théorème, il reste seulement à vérifier les affirmations concernant la convergence. Cela résulte des inégalités 1.6. En effet, on peut prendre dans ces inégalités ρ_1 aussi proche qu'on veut de R et ρ_2 aussi proche qu'on veut de r . La formule de Cauchy-Hadamard (II, théorème 2), combinée avec les inégalités 1.6 donne :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_{\rho_1}^{1/n} / \rho_1 = \frac{1}{\rho_1}$$

qui prouve que le rayon de convergence de la série en z est supérieur ou égal à ρ_1 ; ce dernier pouvant être pris aussi proche qu'on veut de R , cela entraîne évidemment que le rayon de convergence est au moins égal à R , autrement dit que la série est convergente pour $|z| < R$. On voit de la même façon

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_{\rho_2}^{1/n} \cdot \rho_2 = \rho_2$$

qui prouve que le rayon de convergence de la série en $1/z$ est supérieur ou égal à $1/\rho_2$, etc.

Remarque : Les déductions précédentes ne montrent pas que les rayons de convergence sont *égaux* à (respectivement) $1/r$ et R ; il se peut évidemment, si $f(z)$ est analytique pour $r < |z| < R$, qu'elle soit prolongeable sur un domaine plus grand. Nous y reviendrons quand nous discuterons des singularités des fonctions analytiques.

2. Théorème des résidus.

Nous avons observé en II.5 (voir II.5.1) que l'intégrale $1/z^n$ sur un lacet entourant l'origine est nulle sauf pour $n = 1$. Ceci a une conséquence remarquable si on le combine avec le théorème de Laurent. Soit en effet $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $r < |z| < R$, et soit γ un lacet simple contenu dans cette couronne et entourant le petit disque $|z| \leq r$, qu'on supposera orienté comme toujours dans le sens direct (par exemple le lacet γ_1 de la figure 5, ou le lacet $-\gamma_2$ qui lui est homologiquement équivalent).

Calcul des résidus

L'intégrale de $f(z) dz$ le long d'un tel lacet γ n'a évidemment aucune raison d'être nulle, puisque la fonction $f(z)$ n'est pas supposée analytique dans le disque $|z| < r$. Mais si on développe $f(z)$ en série de Laurent conformément à 1.4, on obtient

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} z^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} \frac{1}{z^n} dz = 2i\pi b_1 \quad (2.1.)$$

Ainsi, l'intégrale sur γ de $f(z) dz$ ne dépend que du coefficient b_1 . Cauchy a appelé ce coefficient le *résidu* de la fonction $f(z)$ sur le disque $|z| \leq r$. Les premières approches de Cauchy (y compris le tout premier mémoire de 1814, où ce mot ne figure pas encore) étaient conçues comme des méthodes pour calculer des intégrales définies.

L'idée est la suivante. Dans les cas simples (que nous verrons), il est très facile de calculer le coefficient b_1 ; l'unicité du développement de Laurent garantit que n'importe quelle manière de le calculer donnera le même résultat que les formules 1.5.

La série de Laurent permet d'étudier aisément les points singuliers isolés d'une fonction analytique. Dire que z_0 est un point singulier isolé de la fonction $f(z)$, équivaut à dire que $f(z)$ est analytique dans une couronne de la forme $0 < |z - z_0| < R$. Le fait que le point singulier soit isolé se traduit par le fait que la partie singulière de la série de Laurent $\sum_{n \geq 0} b_n / (z - z_0)^n$ a un rayon de convergence infini, ou encore $\limsup |b_n|^{1/n} = 0$. On distingue les points singuliers isolés en deux classes :

- si les b_n sont tous nuls pour $n > n_0$ (mais que $b_{n_0} \neq 0$) on dit que z_0 est un pôle d'ordre n_0 .
- si une infinité des b_n sont non nuls, on dit que z_0 est un point singulier essentiel.

Nous verrons cela plus concrètement à l'occasion d'exemples.

Bien entendu, les points singuliers ne sont pas forcément isolés. Lorsqu'on dit "soit $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $r < |z| < R$ ", les points singuliers de $f(z)$ peuvent former un ensemble absolument arbitraire dans le disque $|z| \leq r$. Pour donner un exemple, considérons les fonctions $1/(1 - z^n)$; ces fonctions sont toutes analytiques dans le disque $|z| < 1$, mais aussi à l'extérieur de ce disque. Leurs points singuliers sont sur le cercle $|z| = 1$, ce sont les racines de l'unité. Posons

$$\Phi_n(z) = \prod_{j=1}^{j=n} \frac{1}{1 - z^j} \quad \text{et} \quad \Psi_n(z) = \prod_{j=1}^{j=n} \frac{1}{1 - z^{-j}}$$

Ces fonctions Φ_n et Ψ_n sont elles aussi analytiques à l'intérieur et à l'extérieur du cercle $|z| = 1$. Leurs points singuliers sont tous les nombres complexes de la forme $e^{2i\pi(j/k)}$ avec $1 \leq j \leq k \leq n$. On peut montrer que lorsque n tend vers l'infini, $\Phi_n(z)$ tend dans $|z| < 1$ vers une limite analytique, et $\Psi_n(z)$ tend dans $|z| > 1$ vers une limite également analytique. La limite $\Psi(z) = \lim \Psi_n(z)$ est donc un exemple de fonction analytique dans l'extérieur du cercle $|z| = 1$, mais pour laquelle tous les points du cercle $|z| = 1$ sont singuliers.

Toutefois les fonctions telles que $\Psi(z)$ sont peu courantes : en Mathématique on se sert plutôt de fonctions assez simples, de sorte qu'en pratique,

les fonctions qu'on risque de rencontrer effectivement ont généralement un nombre fini de points singuliers isolés. Supposons que la fonction $f(z)$, qui est analytique dans la couronne $r < |z| < R$, n'ait dans le disque $|z| \leq r$ qu'un nombre fini de points singuliers z_1, z_2, \dots (voir figure 6 ci-contre).

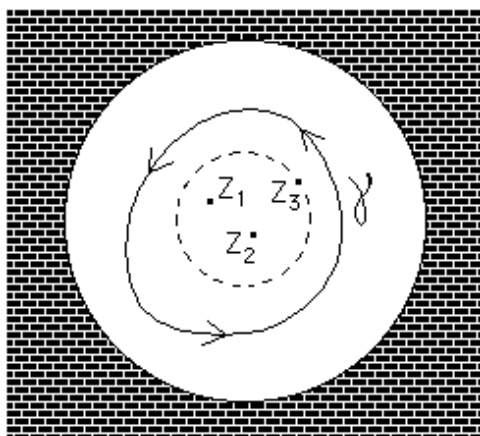


figure 6

fonction analytique dans le disque $|z| \leq r$, dont seuls les points isolés z_1, z_2, \dots sont exclus. La série $\sum b_n/z^n$ ne convergera pas pour $|z| \leq r$ (plus exactement, elle deviendra divergente pour $|z|$ inférieur au module du point singulier le plus éloigné de 0), mais autour de chacun des z_j il y a bien une couronne $0 < |z - z_j| < \varepsilon$ dans laquelle $f(z)$ est analytique, et où on peut donc aussi développer $f(z)$ en série de Laurent. Autour de chaque z_j , on a donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{(j)}}{(z - z_j)^n}$$

Bien entendu, les coefficients $a_n^{(j)}$ et $b_n^{(j)}$ sont différents pour chaque j et différents aussi de a_n et b_n , mais il existe une relation entre eux, dont la plus simple et de très loin la plus importante est :

Théorème 2 : Si $f(z)$ est analytique dans le disque $|z| < R$, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers z_1, z_2, \dots isolés et tous contenus dans le disque $|z| \leq r$ (avec $r < R$), alors le résidu du développement de Laurent

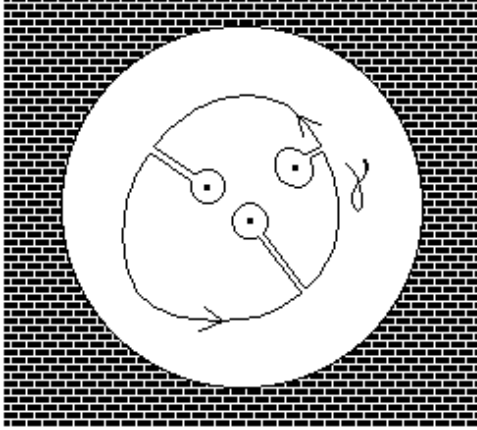


figure 7

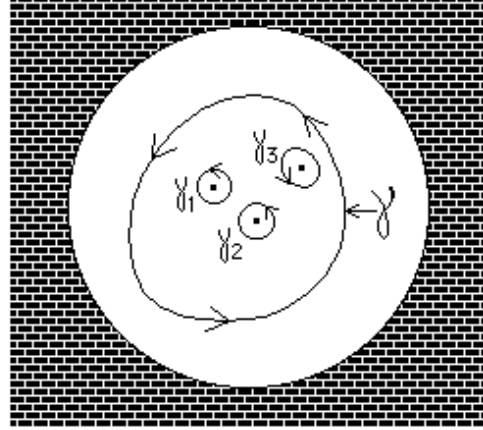


figure 8

de $f(z)$ sur la couronne $r < |z| < R$ est égal à la somme des résidus de $f(z)$ en chacun des points singuliers z_j .

Démonstration : Soit γ un chemin simple contenu dans la couronne $r < |z| < R$ parcouru en sens direct, et γ_j des chemins simples, également parcourus en sens direct, entourant chacun le seul point singulier z_j (voir figure 8). Il est immédiat que la concaténation $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$ est homotologiquement équivalente à γ (il suffit de regarder la figure 7 pour comprendre pourquoi).

Par conséquent :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sum_j \gamma_j} f(z) dz = \sum_j \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Il existe bien sûr pour chaque n une relation analogue entre les coefficients a_n , b_n et les coefficients $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$. Pour l'obtenir, remarquons que $f(z)/z^{n+1}$ a, outre les points z_1, z_2, \dots , aussi 0 pour point singulier. Supposons que 0 est distinct de tous les z_j (c'est-à-dire que 0 n'est pas un point singulier de $f(z)$). Comme pour les γ_j , on va considérer un lacet γ_0 entourant seulement 0 (et aucun des z_j). Alors :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sum_j \gamma_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \end{aligned} \quad (2.2)$$

où cette fois la sommation inclut $j = 0$. Le terme correspondant à $j = 0$ est simplement $f^{(n)}(0)/n!$. Pour les autres termes, puisqu'on a supposé les z_j tous différents de 0, on peut développer $1/z^{n+1}$ au voisinage de chacun des z_j en série entière :

$$\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{[z_j + (z - z_j)]^{n+1}} = \frac{1}{z_j^{n+1}} \cdot \frac{1}{[1 + \frac{z - z_j}{z_j}]^{n+1}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}^{(j)} (z - z_j)^{\ell} \quad (2.3)$$

avec

$$c_\ell^{(j)} = \frac{(-1)^\ell \binom{n+\ell}{\ell}}{z_j^{n+\ell+1}} \quad (2.4)$$

La série de Laurent de $f(z)/z^{n+1}$ au voisinage de z_j s'obtient alors en faisant le produit de la série de Laurent de $f(z)$ par celle (entière) de $1/z^{n+1}$ obtenue en 2.3. L'intégrale $(1/2i\pi) \int_{\gamma_j} f(z)/z^{n+1} dz$ sera le coefficient de $1/(z-z_j)$ dans le produit de ces deux séries, soit :

$$\int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(j)} c_{k-1}^{(j)} \quad (2.5)$$

où les $c_{k-1}^{(j)}$ sont les coefficients mentionnés en 2.4. Il ne reste plus qu'à faire la somme de ces résultats pour $j = 0, 1, 2, \dots$. Si l'un des z_j est confondu avec 0, le raisonnement précédent doit être un peu modifié, mais reste valable dans son principe.

On obtient une relation analogue pour les b_n

Nous mentionnons ces relations pour rappeler une fois de plus la propriété fondamentale des fonctions analytiques, que leur comportement dans une région est lié au comportement dans les autres. Mais, sauf problème très spécial, seule la relation énoncée par le théorème ci-dessus est intéressante.

On peut aussi énoncer le théorème précédent sous la forme du très célèbre :

Théorème 3 (des résidus) : *Soit Ω un domaine du plan et $f(z)$ une fonction analytique dans Ω moins un nombre fini de points. Alors l'intégrale de $f(z) dz$ sur un lacet entourant ces points est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en ces points.*

3. Calculs d'intégrales définies.

La première application du théorème des résidus est le calcul d'intégrales définies. Les premières publications de Cauchy sur le sujet se présentent en effet ainsi : “*Mémoire sur les intégrales définies*” (1814)⁽¹⁾ *Mémoire sur les intégrales définies où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres* (1825)⁽²⁾, etc. Nous consacrons la présente section à cette première application, mais nous verrons par la suite des applications bien plus intéressantes.

En gros, le principe est le suivant : pour des points singuliers isolés de fonctions qui s'expriment par des formules algébriques simples, il est généralement aisé d'obtenir un développement en série de Laurent, surtout

⁽¹⁾ *Œuvres complètes de Cauchy*, série I, tome 1, déjà cité.

⁽²⁾ *Œuvres complètes de Cauchy*, série II, tome 2, pages 343 – 387. La “formule générale” dont il est question dans le titre est le théorème des résidus, non encore nommé ainsi.

Calcul des résidus

lorsqu'on se contente de calculer le terme en $1/(z - z_0)$, alors que les intégrales sont beaucoup plus difficiles.

Voici un exemple : soit l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (3.1)$$

On peut calculer cette intégrale par quadratures ; pour cela, on doit d'abord, sachant que $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$, décomposer la fonction en

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-x\sqrt{2} + 1) + 1}{(-x\sqrt{2} + 1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{(x\sqrt{2} + 1) + 1}{(x\sqrt{2} + 1)^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

que l'on intègre par quadratures avec les fonctions $\arctan(-x\sqrt{2} + 1)$, $\ln(-x\sqrt{2} + 1)$, $\arctan(x\sqrt{2} + 1)$, $\ln(x\sqrt{2} + 1)$. Par la méthode des résidus, il suffit de dire que l'intégrale sur un lacet Γ en demi-cercle (figure 9) est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus des points singuliers situés à l'intérieur du lacet, et qui sont $z_1 = e^{i\pi/4}$ et $z_2 = e^{i3\pi/4}$ (ce sont les deux nombres complexes de partie imaginaire positive, tels que $z^4 + 1 = 0$).

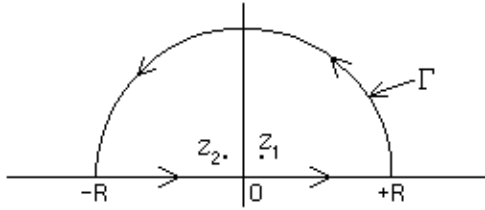


figure 9

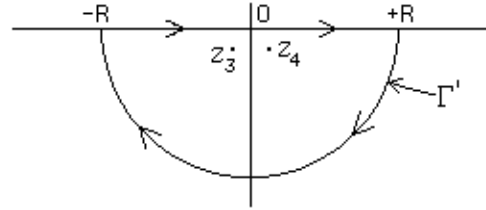


figure 10

Contrairement au calcul précédent qui exigeait des dénominateurs du second degré, on obtient les résidus de la fonction $1/(z^4 + 1)$ par la décomposition en éléments simples complexes du premier degré :

$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \frac{A_3}{z - z_3} + \frac{A_4}{z - z_4} \quad (3.3)$$

où on sait que $A_j = 1/4 z_j^3$ (le coefficient de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$ est donné par la formule $A_j = P(z_j)/Q'(z_j)$). Le coefficient A_j est le résidu, puisque le terme $A_j/(z - z_j)$ de la décomposition est le terme en $1/(z - z_j)$ du développement en série de Laurent. Ainsi les résidus sont obtenus presque sans calculs.

On voit sans difficultés que l'intégrale sur la partie semi-circulaire du chemin Γ tend vers zéro quand le rayon R tend vers l'infini, donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1} \\ &= 2i\pi \cdot \left[\frac{1}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{9\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On aurait tout aussi bien pu passer par l'intermédiaire du lacet Γ' de la figure 10. Dans ce cas, il aurait fallu prendre en compte les résidus aux points $z_3 = e^{i5\pi/4}$ et $z_4 = e^{i7\pi/4}$. Bien entendu, le résultat aurait été le même.

Dans l'exemple que nous venons d'étudier, on pouvait aussi calculer l'intégrale par quadratures. En voici un autre, où on ne le peut pas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^4 + 1} dx \quad (3.5)$$

En tant que fonction de t , cette intégrale est la transformée de Fourier de la fonction $1/(x^4 + 1)$. Nous verrons plus tard que beaucoup de transformées de Fourier se calculent par la méthode des résidus.

La première chose à faire est de chercher les résidus ; les points singuliers sont les mêmes, puisque e^{itz} n'introduit aucun nouveau point singulier. En utilisant à nouveau la décomposition en éléments simples de $1/(z^4 + 1)$ on peut écrire :

$$\frac{e^{itz}}{z^4 + 1} = \left[\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \frac{A_3}{z - z_3} + \frac{A_4}{z - z_4} \right] e^{itz} \quad (3.6)$$

Au voisinage de z_1 , e^{itz} se développe en série entière de $z - z_1$:

$$e^{itz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n e^{itz_1}}{n!} (z - z_1)^n$$

On voit bien que si on multiplie cela par $A_1/(z - z_1)$, le terme en $1/(z - z_1)$ sera $A_1 e^{itz_1} = e^{itz_1}/4z_1^3$. Les autres termes $A_2/(z - z_2), \dots$ sont analytiques au point z_1 , donc ne contribuent qu'à la partie régulière de la série de Laurent. Ainsi le résidu de $e^{itz}/(z^4 + 1)$ au point z_1 est $e^{itz_1}/4z_1^3$. On trouve de la même façon que le résidu aux autres points est $e^{itz_j}/4z_j^3$.

Calcul des résidus

Si nous voulons utiliser le même procédé que dans l'exemple précédent, il faut que l'intégrale sur la partie semi-circulaire du lacet tende vers zéro quand R tend vers l'infini, et pour cela il faut que la fonction sous le signe \int tende vers zéro (assez rapidement). On voit sans difficulté que cela ne peut être le cas que pour l'un à la fois des deux chemins Γ ou Γ' . En effet, si $t \geq 0$, $|e^{itz}|$ reste borné dans le demi-plan $\Im z > 0$ (mais croît exponentiellement vers l'infini dans le demi-plan $\Im z < 0$), tandis que si $t \leq 0$, $|e^{itz}|$ reste borné dans le demi-plan $\Im z < 0$ (mais croît exponentiellement vers l'infini dans le demi-plan $\Im z > 0$). Comme une croissance exponentielle ne peut pas être compensée par $1/(z^4 + 1)$, nous n'avons pas le choix (sauf pour $t = 0$) et nous devons prendre Γ lorsque $t > 0$ et Γ' lorsque $t < 0$. Ceci implique que notre intégrale (divisée par $2i\pi$) sera égale à la somme des résidus du demi-plan $\Im z > 0$ pour $t > 0$, et à la somme des résidus du demi-plan $\Im z < 0$ pour $t < 0$. Toutefois on peut aussi remarquer que si on remplace t par $-t$, la valeur de l'intégrale 3.5 sera transformée en sa conjuguée, donc il suffit de faire le calcul pour $t > 0$. Sachant que $z_1 = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ et $z_2 = e^{i3\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$, cela donne :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^4 + 1} dx &= 2i\pi \left[\frac{e^{itz_1}}{4z_1^3} + \frac{e^{itz_2}}{4z_2^3} \right] \\
 &= \frac{i\pi}{2} [e^{itz_1 - i3\pi/4} + e^{itz_2 - i9\pi/4}] \\
 &= \frac{i\pi}{2} e^{-t/\sqrt{2}} [e^{it/\sqrt{2} - i3\pi/4} + e^{-it/\sqrt{2} - i9\pi/4}] \\
 &= \pi \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-t/\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'intégrale est réelle, donc égale à sa conjuguée ; par conséquent, pour $t < 0$ elle vaudra $\pi \cos(-t/\sqrt{2} - \pi/4) e^{t/\sqrt{2}}$, soit pour t quelconque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^4 + 1} dx = \pi \cos\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-|t|/\sqrt{2}} \tag{3.8}$$

On peut généraliser ces exemples sous la forme suivante :

Théorème 4 : Soit la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$ telle que :

- a) le dénominateur $Q(x)$ n'a que des racines simples z_j ;
- b) le degré de $Q(x)$ dépasse celui de $P(x)$ d'au moins deux unités ;
- c) aucune racine de $Q(x)$ n'est réelle. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{+} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)} = -2i\pi \sum_{-} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)} \tag{3.9}$$

où \sum_+ désigne la sommation sur toutes les racines z_j de partie imaginaire positive, et \sum_- la sommation sur toutes les racines z_j de partie imaginaire négative.

Démonstration : La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$ montre que le résidu au point singulier z_j est $P(z_j)/Q'(z_j)$; le théorème 3 dit que l'intégrale sur le lacet Γ est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus aux points singuliers qu'il entoure, qui sont (pour R assez grand) ceux du demi-plan $\Im z > 0$; il dit aussi que l'intégrale sur le lacet Γ' est égale à $-2i\pi$ fois la somme des résidus aux points singuliers qu'il entoure, qui sont (pour R assez grand) ceux du demi-plan $\Im z < 0$. Il ne reste plus qu'à vérifier que l'intégrale sur la partie semi-circulaire de l'un ou l'autre de ces deux lacets tend vers zéro quand R tend vers l'infini; or cela résulte de l'hypothèse b), puisqu'en paramétrant la partie semi-circulaire de Γ , l'intégrale devient

$$\int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta$$

L'hypothèse b) entraîne que pour z grand on a $|P(z)/Q(z)| \leq M/|z|^2$, donc l'intégrale (en module) est majorée par

$$\int_0^\pi \frac{M}{R^2} R d\theta = \pi \frac{M}{R}$$

Théorème 5 : $P(x)/Q(x)$ étant une fraction rationnelle satisfaisant aux mêmes conditions que dans le théorème 4, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx = \begin{cases} 2i\pi \sum_+ \frac{P(z_j) e^{itz_j}}{Q'(z_j)} & \text{si } t > 0; \\ -2i\pi \sum_- \frac{P(z_j) e^{itz_j}}{Q'(z_j)} & \text{si } t < 0; \end{cases} \quad (3.10)$$

où \sum_+ désigne comme avant la sommation sur toutes les racines z_j de partie imaginaire positive, et \sum_- la sommation sur toutes les racines z_j de partie imaginaire négative.

Démonstration : décomposons $P(z)/Q(z)$ en éléments simples; on obtient

$$\frac{P(z)}{Q(z)} e^{itz} = \sum_{j=1}^N \frac{A_j e^{itz}}{z - z_j}$$

où N est le degré de Q et $A_j = P(z_j)/Q'(z_j)$. Soit z_{j_0} l'un des points

Calcul des résidus

singuliers ; on peut développer e^{itz} en série entière autour de ce point :

$$e^{itz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n e^{itz_{j_0}}}{n!} (z - z_{j_0})^n$$

donc la série de Laurent de la fonction $\frac{A_{j_0} e^{itz}}{z - z_{j_0}}$ est

$$\frac{A_{j_0} e^{itz_{j_0}}}{z - z_{j_0}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n e^{itz_{j_0}}}{n!} (z - z_{j_0})^{n-1}$$

Les autres termes $\frac{A_j e^{itz}}{z - z_j}$ pour $j \neq j_0$ sont analytiques au voisinage de z_{j_0} et y ont donc un développement en série entière, sans partie singulière. On en conclut que la partie singulière du développement en série de Laurent de $[P(z)/Q(z)]e^{itz}$ se réduit au seul terme $A_{j_0} e^{itz_{j_0}} / (z - z_{j_0})$, ce qui prouve que le résidu est $A_{j_0} e^{itz_{j_0}}$.

Il faut encore prouver que l'intégrale sur la partie semi-circulaire de Γ ou Γ' tend vers zéro. Or pour $t > 0$, $|e^{itz}| = e^{-ty}$ (y étant la partie imaginaire de z), ce qui est partout ≤ 1 dans le demi-plan $y > 0$; de même pour $t < 0$, $|e^{itz}|$ est partout ≤ 1 dans le demi-plan $y < 0$. Ainsi la fonction à intégrer est dans chaque cas majorée par M/R^2 , et tout se passe comme dans le théorème 4 (excepté que cette fois on n'a pas le choix entre Γ et Γ').

CQFD

Lorsque les racines du dénominateur $Q(x)$ ne sont pas simples, on peut procéder de façon analogue : on utilisera aussi la décomposition en éléments simples, mais le résidu au point z_j ne sera pas donné par une formule aussi commode. En effet, la partie de la décomposition en éléments simples qui concerne le point z_j sera de la forme :

$$\sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{A_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

où α_j est la multiplicité de la racine z_j . En faisant le produit de cette expression avec la série

$$e^{itz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n e^{itz_j}}{n!} (z - z_j)^n$$

et en regroupant les termes en $1/(z - z_j)$, on aura pour le résidu :

$$\sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{(it)^{k-1} e^{itz_j}}{(k-1)!} A_{j,k}$$

Bien entendu, il n'est pas possible de donner un aperçu exhaustif de toutes les intégrales définies calculables par la formule des résidus. Dans chaque cas particulier il faut trouver l'astuce spécifique la mieux adaptée (généralement un choix astucieux du lacet). La section suivante traite du calcul des résidus; les sections **5** et **6** développent quelques cas particuliers qui pourront donner des idées.

4. Comment calculer pratiquement les résidus.

Les théorèmes 4 et 5 concernaient les cas où le dénominateur de la fonction à intégrer est un polynôme qui n'a que des racines simples; les théorèmes fournissent alors des formules simples. Mais on peut aussi avoir affaire à un dénominateur qui, au lieu d'être un *polynôme*, est une fonction analytique non polynomiale: par exemple si le dénominateur est $e^z + 1$, celui-ci a bien des racines simples (les $z_n = i\pi(2n + 1)$ pour $n \in \mathbb{Z}$), mais leur nombre est infini car $e^z + 1$ n'est pas un polynôme. Il peut aussi arriver que le dénominateur, polynôme ou non, ait des racines doubles, ou triples, etc. Et le numérateur peut aussi être autre chose qu'un polynôme comme dans le théorème 4, ou que le produit d'un polynôme par une exponentielle comme dans le théorème 5. On ne peut évidemment pas énoncer un théorème général qui fournit une formule de résolution pour n'importe quelle intégrale; déjà le fait de pouvoir appliquer le théorème des résidus en prenant un lacet en demi-cercle est particulier aux fonctions du type envisagé par les théorèmes 4 et 5: si le dénominateur est $e^z + 1$, l'intégrale sur le demi-cercle est divergente, et cet artifice, qui marchait très bien pour les polynômes, ne marche plus du tout. En général on devra trouver des lacets astucieux et adaptés au cas qu'on veut traiter.

Si on pose le problème général d'une intégrale sur un intervalle réel, on ne peut espérer se ramener au théorème des résidus qu'en construisant un lacet astucieux qui, ou bien contient l'intervalle d'intégration et donne zéro sur la partie ajoutée (comme dans les théorèmes ci-dessus), ou bien s'y ramène d'une façon ou d'une autre par paramétrage. La résolution d'un tel problème est une question d'imagination et ne peut pas être enfermée dans une formule magique.

On va donc laisser de côté la question du choix astucieux d'un lacet, et expliquer seulement comment calculer les résidus d'une fonction. On va même se restreindre ici au cas où les points singuliers sont isolés, plus précisément au cas où la fonction dont on cherche les résidus est de la forme $f(z)/g(z)$ (quotient de deux fonctions analytiques). Les points singuliers sont alors les zéros du dénominateur g et sont par conséquent forcément isolés. On dit que ce sont des pôles. On verra par la suite quelques cas de

Calcul des résidus

singularités plus compliquées (qui ne sont pas les zéros d'un dénominateur analytique), et qui ne peuvent pas non plus être traités par des formules prévues pour des pôles. Par exemple $z = 0$ est un point singulier de la fonction $\exp\{1/z\}$; ce point est certes isolé, mais on ne peut pas écrire $\exp\{1/z\}$ sous la forme $f(z)/g(z)$ avec f et g analytiques et $g(0) = 0$. La fonction d'Euler $\text{Eu}(z)$ de la section suivante possède aussi un point singulier de ce type, dit *essentiel*. A la section 5, on verra aussi le cas de la fonction $F(z) = [z^\alpha]_1 \cdot [(z-1)^\beta]_1$, dont la singularité n'est pas un point isolé, mais tout un segment (cela n'empêche pas d'avoir un résidu).

Pour une fonction $h(z) = f(z)/g(z)$, c'est-à-dire le quotient de deux fonctions analytiques, il existe une formule générale qu'on trouvera dans la plupart des manuels (la démonstration en est donnée plus bas) :

$$\text{rés}(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (z - z_0)^n h(z) \right\} \quad (4.1.)$$

le nombre n étant la multiplicité du pôle z_0 . Dans le cas particulier d'un pôle simple, cela devient

$$(z - z_0) h(z) = \frac{f(z)}{g(z)/(z - z_0)}$$

et comme la limite de $g(z)/(z - z_0)$ quand z tend vers z_0 est $g'(z_0)$, on voit que 4.1 se réduit à

$$\text{rés}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (4.2.)$$

La formule 4.2 est très facile à utiliser et généralise la formule $P(z_0)/Q(z_0)$ qu'on a vue au théorème 4 pour des polynômes. Par contre, pour $n > 1$, la formule 4.1 est rarement commode, et sa commodité diminue factoriellement en n : non seulement il faut dériver l'expression assez complexe $(z - z_0)^n h(z)$, mais ensuite celle-ci est une forme indéterminée dont il faudra trouver la limite (règle de l'Hospital, développements limités, etc.) Le succès de ce type de formule s'explique ainsi : beaucoup d'étudiants se préparent à leur examen en recherchant de telles formules qu'ils apprennent par coeur (ce sont les "révisions") ; on croit alors qu'avec ces formules, on peut se dispenser d'avoir compris les principes théoriques, et c'est pourquoi, pendant les périodes de bachottage, ces formules sont si prisées (les éditeurs le savent). Mais le jour de l'épreuve, les bachoteurs découvrent avec stupeur que la formule miracle exige *dans les cas concrets* des calculs extrêmement longs auxquels ils ne sont pas entraînés, et se révèle ainsi inutilisable. Il vaut donc mieux *comprendre* ce qui suit, qui n'est guère compliqué, et qui permettra de calculer les résidus bien plus efficacement.

Partons du principe que le résidu de $h = f/g$ au point z_0 est le coefficient du terme en $1/(z - z_0)$ dans le développement de h en série de Laurent. Si z_0 est un pôle d'ordre n , c'est qu'il est un zéro d'ordre n du dénominateur $g(z)$. Autrement dit, le premier terme non nul de la série entière de g autour de z_0 est le terme d'ordre n :

$$g(z) = (z - z_0)^n \times \left\{ a_n + a_{n+1} (z - z_0) + a_{n+2} (z - z_0)^2 + a_{n+3} (z - z_0)^3 + \dots \right. \quad (4.3.)$$

avec $a_n \neq 0$. Par conséquent la fonction réduite

$$\hat{g}(z) = a_n + a_{n+1} (z - z_0) + a_{n+2} (z - z_0)^2 + a_{n+3} (z - z_0)^3 + \dots$$

telle que $g(z) = (z - z_0)^n \cdot \hat{g}(z)$ est analytique dans un disque autour de z_0 , et ne s'y annule pas, en sorte que le quotient $\hat{h}(z) = f(z)/\hat{g}(z)$ est analytique dans ce disque.

On peut alors obtenir la série de Laurent de h en calculant la série entière de $\hat{h}(z)$:

*le coefficient de $1/(z - z_0)$ de la série de Laurent
de $h(z)$ est le même que le coefficient de
 $(z - z_0)^{n-1}$ dans la série entière de $\hat{h}(z)$.*

Ainsi, pour obtenir le résidu de $h(z)$ au point z_0 , il suffit de calculer le développement en série entière de $\hat{h}(z)$ de centre z_0 jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Ceci permet déjà de démontrer la formule 4.1. En effet, la fonction $(z - z_0)^n h(z)$ n'est autre que la fonction $\hat{h}(z)$. Le $(n - 1)$ ième coefficient de Taylor de la série entière de $\hat{h}(z)$ est donc bien $1/(n - 1)!$ fois la $(n - 1)$ ième dérivée de $\hat{h}(z)$ au point z_0 , qu'on peut *en théorie* obtenir comme la limite indiquée dans 4.1. Par contre *en pratique* il est presque toujours bien plus efficace de calculer la série entière de $\hat{h}(z)$ en effectuant la division par puissances croissantes de la série entière de $f(z)$ par celle de $\hat{g}(z)$. Ainsi, si on a

$$\begin{aligned} f(z) &= b_0 + b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + b_3 (z - z_0)^3 + \dots \\ g(z) &= a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + a_{n+2} (z - z_0)^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

on posera $\zeta = z - z_0$ et on effectuera la division

$$\begin{array}{l|l} b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + b_3 \zeta^3 + \dots & a_n + a_{n+1} \zeta + a_{n+2} \zeta^2 + a_{n+3} \zeta^3 + \dots \\ \hline & \frac{b_0}{a_n} + \dots \end{array}$$

Dans certains cas on pourra avoir directement la série entière de la fonction $1/\widehat{g}(z)$, par exemple si c'est une série géométrique ou binômiale. Dans ce cas on peut effectuer le produit des séries de $f(z)$ et de $1/\widehat{g}(z)$, si cela semble moins lourd que la division. Un peu de pratique montrera que ces opérations sont — sauf dans quelques rares cas très particuliers — bien moins pénibles que les calculs de dérivées et de limites exigés par la formule 4.1. La suite du cours fournira quelques occasions de mettre ces conseils en pratique.

5. Fonction d'Euler.

Afin d'illustrer l'ensemble des propriétés des fonctions analytiques que nous avons rencontrées jusqu'ici, je propose un exemple très intéressant et instructif. On appelle *intégrale d'Euler*⁽³⁾ l'intégrale suivante :

$$\text{Eu}(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+zt} dt \quad (5.0)$$

où z est un nombre complexe.

L'intégrale devient divergente lorsque le dénominateur peut s'annuler, c'est-à-dire lorsque z est un nombre réel négatif. Pour toute autre valeur complexe de z , le dénominateur ne peut s'annuler et la fonction $\text{Eu}(z)$ est alors parfaitement définie. Cette fonction est analytique.

Le domaine où tout se passe bien est le plan complexe privé de l'intervalle $] -\infty, 0]$, soit le domaine Ω_1 que nous avons déjà introduit (fin du chapitre II). Commençons par minorer le dénominateur $1+zt$ en cherchant son minimum lorsque t parcourt l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$. Si on sépare partie réelle et partie imaginaire en posant $z = x + iy$, on aura $|1+zt|^2 = 1 + 2xt + (x^2 + y^2)t^2$. Le minimum de cette expression lorsque t parcourt $[0, +\infty[$ est

$$d(z)^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

⁽³⁾ Il y a beaucoup d'intégrales d'Euler. Il ne faut pas confondre celle-ci avec celle de la fonction $\Gamma(x)$ qui sera étudiée au chapitre suivant. Leonhardt Euler, mathématicien suisse (1707 – 1783) a trouvé d'innombrables formules de l'analyse, qu'il a étendues aux nombres complexes sans posséder la notion de fonction analytique; mais toutes les fonctions qu'il envisageait étaient des expressions algébriques (polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, intégrales dépendant d'un paramètre, etc.) Il a donc pratiqué le *prolongement analytique* sans le savoir.

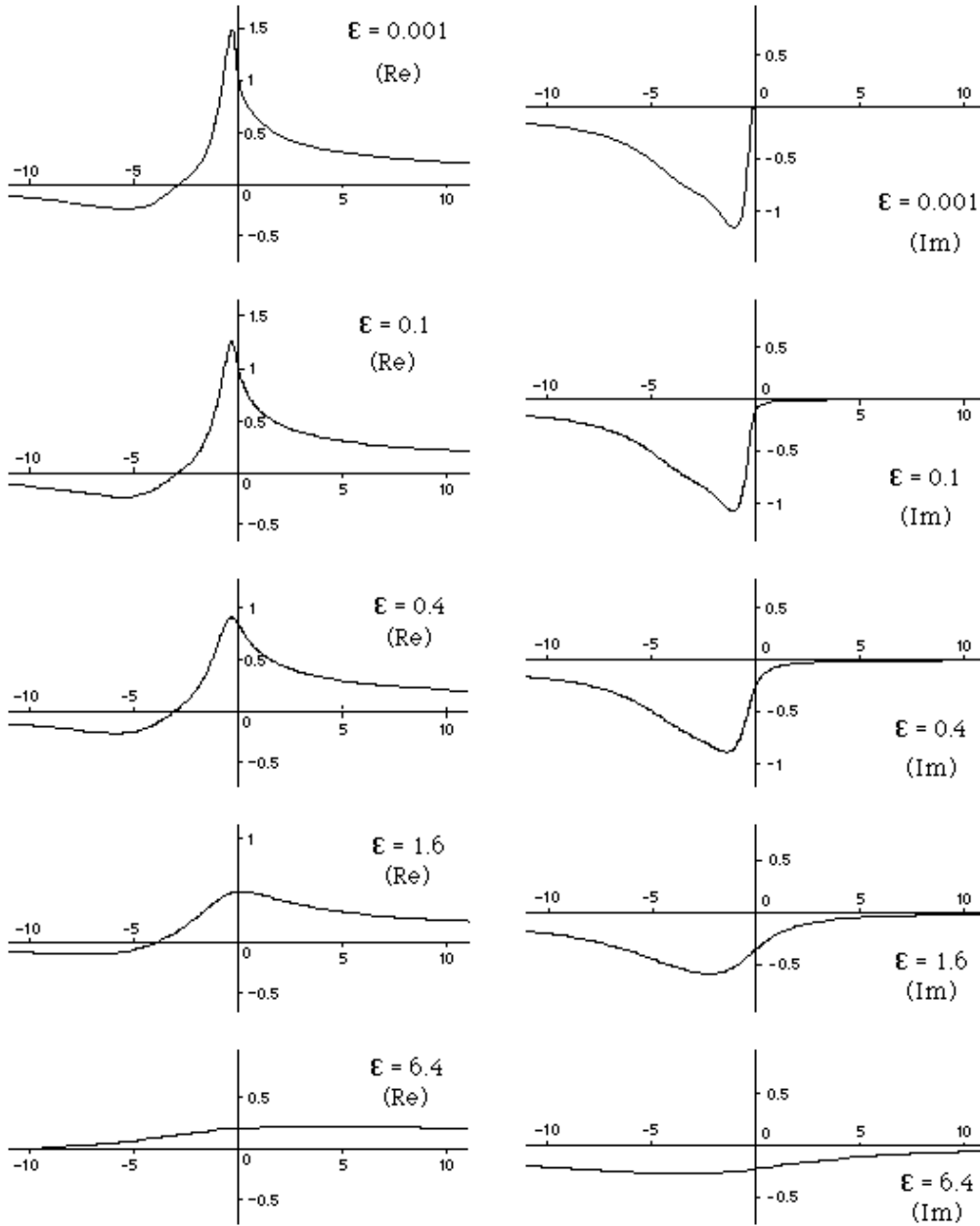


figure 11

Différentes sections horizontales de la fonction $Eu(z)$: chaque graphique représente la fonction $x \mapsto Eu(x + i\epsilon)$, pour différentes valeurs de ϵ (à gauche la partie réelle, à droite la partie imaginaire). Pour $\epsilon < 0$, les figures seraient symétriques car $Eu(\bar{z}) = \overline{Eu(z)}$.

Calcul des résidus

Par conséquent le minimum du module du dénominateur sera

$$d(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ \frac{|\Im z|}{|z|} & \text{si } x < 0; \end{cases} \quad (5.1)$$

On voit aisément que $d(z)$ est > 0 sur Ω_1 , mais devient nul sur $] -\infty, 0[$. Le cas où z tend vers zéro est spécial : l'expression $|\Im z|/|z|$ devient indéterminée, et il n'y a pas de limite. Pour z dans Ω_1 on peut alors avoir une majoration de $|\text{Eu}(z)|$:

$$|\text{Eu}(z)| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{d(z)} dt = \frac{1}{d(z)} \quad (5.2)$$

Voyons maintenant pourquoi $\text{Eu}(z)$ est analytique dans Ω_1 . On va vérifier que $[\text{Eu}(z+h) - \text{Eu}(z)]/h$ a une limite quand h tend vers zéro, et que cette limite est

$$\text{Eu}'(z) = \int_0^\infty \frac{-te^{-t}}{(1+zt)^2} dt \quad (5.3)$$

Il faut donc montrer que

$$\frac{1}{h} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+(z+h)t} - \frac{1}{1+zt} + \frac{th}{(1+zt)^2} \right] e^{-t} dt \quad (5.4)$$

tend vers zéro quand h tend vers zéro. Or l'expression entre crochets ci-dessus devient, si on la réduit au même dénominateur :

$$\frac{h^2 t^2}{[1+(z+h)t][1+zt]^2}$$

Si z est dans Ω_1 , $d(z)$ est > 0 ; puisque h doit tendre vers zéro, on peut le choisir tel que $d(z+h) > \frac{1}{2}d(z)$ ⁽⁴⁾. Par conséquent, le module de l'expression 5.4 est majoré par

$$\int_0^\infty \frac{|h|t^2 e^{-t}}{\frac{1}{2}d(z)^3} dt = \frac{4|h|}{d(z)^3}$$

qui tend bien vers zéro quand $|h|$ tend vers zéro.

On a ainsi montré que $\text{Eu}(z)$ est analytique dans Ω_1 et que sa dérivée y est donnée par 5.3.

⁽⁴⁾ c'est un argument de continuité classique : l'expression 5.1 montre que $z \mapsto d(z)$ est continue sur Ω_1 , donc si $d(z) > 0$, il existe un voisinage de z dans lequel d reste $> \frac{1}{2}d(z)$, et il suffit de prendre h assez petit pour que $z+h$ soit dans ce voisinage.

A priori, il n'y a aucune raison que $\text{Eu}(z)$ puisse se prolonger par continuité sur la demi-droite $] -\infty, 0]$; on va voir, d'ailleurs, qu'on ne le peut effectivement pas, et que la fonction $\text{Eu}(z)$ a un saut de discontinuité à travers cette demi-droite, que nous allons calculer. Pour cela on va considérer un point $z = -a$ (avec a réel > 0) sur cette demi-droite, et chercher les deux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Eu}^+(-a) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \text{Eu}(-a + h) \\ \text{Eu}^-(-a) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \text{Eu}(-a + h) \end{aligned} \quad (5.5)$$

où la notation $h \rightarrow 0+$ signifie que h tend vers 0 dans le demi-plan $\Im z > 0$ (et inversement pour $h \rightarrow 0-$).

On peut donc dire que

$$\text{Eu}^\pm(-a) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 + (-a + h)t} dt \quad (5.6)$$

Malheureusement, on ne peut pas passer à la limite dans l'intégrale, car l'intégrale devient divergente pour $h = 0$: lorsque le point $z = -a + h$ tend vers $-a$, le point complexe $t = -1/z = 1/(a - h)$ où le dénominateur s'annule tend vers $1/a$ et devient donc réel positif.

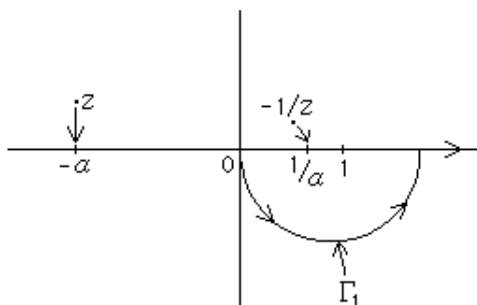


figure 12

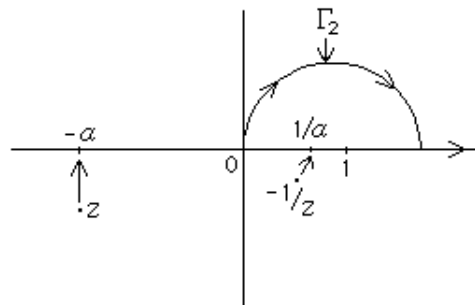


figure 13

Toutefois, la fonction à intégrer, $t \mapsto e^{-t}/(1+zt)$, est analytique dans tout le plan excepté le point $-1/z$. L'intégrale qui apparaît dans 5.6 est l'intégrale de cette fonction sur le chemin $[0, +\infty[$, et la valeur de cette intégrale ne change pas si on la remplace par un chemin homologiquement équivalent. Or, ce qui empêche de passer à la limite sous le signe d'intégration est le fait que le point $t = -1/z = 1/(a-h)$ devient réel lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire que le dénominateur $1 + zt$ devient nul sur le chemin d'intégration $[0, +\infty[$; si donc on remplace ce chemin par un chemin homologiquement équivalent, mais qui évite le point $1/a$, on n'aura plus cet inconvénient et on pourra passer à la limite dans l'intégrale sur un tel chemin. On voit sur

Calcul des résidus

les figures 12 et 13 que les chemins désignés respectivement par Γ_1 et Γ_2 remplissent ces conditions. Lorsque h est de partie imaginaire > 0 , $-1/z$ est aussi de partie imaginaire > 0 , donc au-dessus du point limite $1/a$. Dans ce cas, le chemin Γ_1 (figure 12), qui contourne la singularité par en-dessous, reste homologiquement équivalent au chemin $[0, +\infty[$. De même Γ_2 (figure 13), lorsque h est de partie imaginaire négative.

On peut écrire cela sous une forme mathématiquement plus précise en minorant le dénominateur $1+zt$ le long des chemins Γ_1 et Γ_2 . Il suffit d'écrire $|1+zt| = |z| \cdot |t + \frac{1}{z}|$. En effet, $|t + \frac{1}{z}|$ est la distance (euclidienne) du point t sur le chemin au point $-1/z$; il suffit donc que la distance de Γ_1 (ou Γ_2) au point $-1/z$ reste constamment supérieure à un minimum α non nul, pour qu'ait lieu l'inégalité

$$\left| \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{e^{-t}}{1+zt} dt \right| \leq \frac{1}{|z|\alpha} \int_0^\infty e^{-t(s)} |t'(s)| ds$$

où $t(s)$ est un paramétrage de Γ_1 (ou Γ_2). En vertu des théorèmes généraux sur le passage à la limite sous le signe d'intégration, cette inégalité montre clairement ce que nous voulions. Ainsi on peut réécrire 5.5 sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Eu}^+(-a) &= \int_{\Gamma_1} \frac{e^{-t}}{1-at} dt \\ \text{Eu}^-(-a) &= \int_{\Gamma_2} \frac{e^{-t}}{1-at} dt \end{aligned} \tag{5.7}$$

Le saut de discontinuité de la fonction $\text{Eu}(z)$ à travers la coupure $] -\infty, 0[$ au point $-a$ est alors égal à la différence des deux limites :

$$\begin{aligned} \text{saut} = \text{Eu}^+(-a) - \text{Eu}^-(-a) &= \int_{\Gamma_1} \frac{e^{-t}}{1-at} dt - \int_{\Gamma_2} \frac{e^{-t}}{1-at} dt \\ &= \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} \frac{e^{-t}}{1-at} dt \end{aligned} \tag{5.8}$$

Or, le chemin $\Gamma_1 - \Gamma_2$ est formé d'une portion circulaire qui entoure le point $1/a$, et de deux portions rectilignes qui s'annulent mutuellement, puisqu'il s'agit d'un intervalle commun parcouru en des sens opposés. On en déduit que le saut au point $-a$ est égal au résidu de la fonction $e^{-t}/(1-at)$ au point $t = 1/a$, multiplié par $2i\pi$.

Pour calculer ce résidu, il suffit de développer en série au voisinage de $t = 1/a$ et de chercher le coefficient du terme $1/(t - 1/a)$:

$$e^{-t} = e^{-1/a} \cdot e^{-(t-1/a)} = e^{-1/a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (t - \frac{1}{a})^n$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{e^{-t}}{1-at} &= -\frac{1}{a}e^{-1/a} \cdot \frac{e^{-(t-1/a)}}{t-\frac{1}{a}} \\ &= -\frac{\frac{1}{a}e^{-1/a}}{t-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}e^{-1/a} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} (t-\frac{1}{a})^{n-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

La partie $\sum_{n \geq 1}$ est la partie régulière qui ne nous intéresse pas, et on voit ainsi que le résidu est $-\frac{1}{a}e^{-1/a}$.

On a donc démontré que le saut de discontinuité de la fonction $\text{Eu}(z)$ au point $-a$ est égal à $-2i\pi \frac{1}{a}e^{-1/a}$.

Ce saut est à comparer à celui du logarithme : d'après ce qui a été vu à la fin du chapitre **II**, la détermination \ln_1 du logarithme est elle aussi définie sur Ω_1 et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \ln_1(-a+h) - \lim_{h \rightarrow 0-} \ln_1(-a+h) = 2i\pi$$

Par conséquent la fonction $\frac{1}{z}e^{1/z} \ln_1(z)$ aura au point $z = -a$ un saut de discontinuité égal à $-2i\pi \frac{1}{a}e^{-1/a}$, ce qui est exactement la même chose que pour la fonction $\text{Eu}(z)$.

Cela entraîne que la différence $G(z) = \text{Eu}(z) - \frac{1}{z}e^{1/z} \ln_1(z)$, qui est aussi une fonction analytique sur Ω_1 , a une discontinuité nulle à travers la coupure $] -\infty, 0]$.

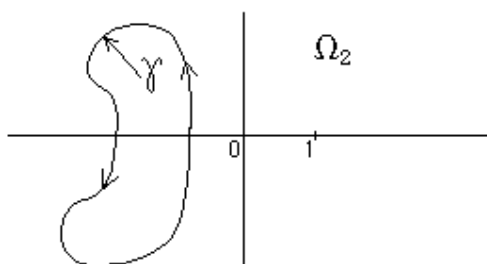


figure 14

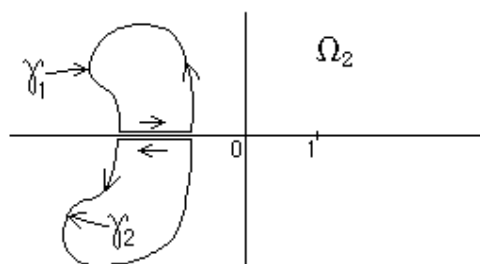


figure 15

Il est facile de se convaincre que $G(z)$ est en fait analytique sur $\mathbb{C} - \{0\}$. Une preuve que $G(z)$ est analytique à travers la coupure serait par exemple que l'intégrale de $G(z) dz$ sur tout lacet γ dont l'intérieur est contenu dans $\mathbb{C} - \{0\}$ soit nulle. Si un lacet ne traverse pas la coupure $] -\infty, 0]$ c'est évident, donc seuls sont à considérer les lacets qui traversent la coupure (figure 14). Or un tel lacet peut être décomposé en deux lacets γ_1 et

Calcul des résidus

γ_2 dont chacun entoure une région entièrement contenue dans Ω_1 (figure 15), mais dont un segment est contenu dans la coupure. Sur ce segment on donne à $G(z)$ la valeur limite obtenue en faisant tendre z d'un seul côté (le dessus pour γ_1 et le dessous pour γ_2) vers le point du segment. Comme les deux limites coïncident, les intégrales sur ces deux portions rectilignes s'annulent mutuellement. L'intégrale de $G(z) dz$ sur γ est alors égale à la somme des intégrales sur γ_1 et γ_2 (si les deux limites n'étaient pas égales, la somme $\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$ serait égale à \int_{γ} plus l'intégrale du saut de discontinuité sur le segment). Comme les domaines délimités par γ_1 et γ_2 sont entièrement contenus dans Ω_1 , les intégrales correspondantes sont nulles, et par conséquent aussi celle sur γ .

On a ainsi prouvé que $G(z)$ est analytique dans $\mathbb{C} - \{0\}$, c'est-à-dire dans la couronne $0 < |z| < \infty$. Donc $G(z)$ peut être développée en série de Laurent (mais $\text{Eu}(z)$ ne pouvait pas l'être).

Cherchons une expression simple de $G(z)$ qui permettra de trouver aisément ce développement. Puisque

$$G(z) = \text{Eu}(z) - \frac{1}{z} e^{1/z} \ln_1(z) \quad (5.10)$$

remplaçons $\text{Eu}(z)$ par l'intégrale 5.0 et supposons z réel positif, de sorte que $\ln_1(z) = \ln(z) = \int_1^z \frac{1}{t} dt$. L'hypothèse que z est réel positif permet aussi d'effectuer dans l'intégrale 5.0 le changement de variable $s = \frac{1}{z} + t$, de sorte que

$$\text{Eu}(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+zt} dt = \frac{1}{z} e^{1/z} \int_{1/z}^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \quad (5.11)$$

On a aussi

$$\ln_1(z) = \ln(z) = \int_1^z \frac{1}{s} ds = \int_{1/z}^1 \frac{1}{s} ds \quad (5.12)$$

En combinant 5.10, 5.11, et 5.12, on obtient

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z} e^{1/z} \left[\int_{1/z}^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds - \int_{1/z}^1 \frac{1}{s} ds \right] \\ &= \frac{1}{z} e^{1/z} \left[\int_{1/z}^1 \frac{e^{-s} - 1}{s} ds + \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Introduisons la constante :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds - \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \quad (5.14)$$

On remarque que les deux intégrales convergent (mais on ne sait pas les calculer par quadratures à partir des fonctions élémentaires). Si on les

calcule numériquement, on obtient la valeur approchée $\gamma \simeq 0.577215$. Avec cette constante, on peut écrire 5.13 sous la forme équivalente

$$G(z) = \frac{1}{z} e^{1/z} \left[-\gamma - \int_0^{1/z} \frac{e^{-s} - 1}{s} ds \right] \quad (5.15)$$

On obtient aisément le développement en série de Laurent de l'expression entre crochets, en intégrant terme par terme la série entière de la fonction $[e^{-s} - 1]/s$ qui est $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} s^{n-1}$; ce qui donne

$$G(z) = \frac{1}{z} e^{1/z} \left[-\gamma - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \frac{1}{z^n} \right] \quad (5.16)$$

On obtient alors la série de Laurent de $G(z)$ en faisant le produit de la série entre crochets et du développement de $\frac{1}{z} e^{1/z}$ en puissances de $1/z$. On voit immédiatement que le terme en $1/z$ dans ce produit a pour coefficient la constante $-\gamma$, qui est donc le résidu de $G(z)$ au point $z = 0$. On constate aussi que la série en puissances de $1/z$ aura une infinité de termes, c'est-à-dire que $z = 0$ est un point singulier essentiel.

La constante γ introduite ci-dessus mérite une mention spéciale. Elle est connue sous le nom de constante d'Euler, et nous la rencontrerons à nouveau quand nous étudierons la fonction $\Gamma(x)$. On en obtient une autre expression en intégrant par parties les deux intégrales qui figurent au second membre de 5.14 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{-s} - 1}{s} ds &= \int_0^1 [e^{-s} - 1] \frac{d}{ds} \ln(s) ds \\ &= [e^{-s} - 1] \ln(s) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-s} \ln(s) ds \\ \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds &= \int_1^\infty e^{-s} \frac{d}{ds} \ln(s) ds \\ &= e^{-s} \ln(s) \Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-s} \ln(s) ds \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$-\gamma = \int_0^\infty e^{-s} \ln(s) ds \quad (5.17)$$

On montrera aussi (chapitre **IV**, section **4**) que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Cette étude a montré que la fonction $\text{Eu}(z)$ a une singularité assez complexe en $z = 0$, puisqu'il y a à la fois la discontinuité logarithmique le long de $]-\infty, 0[$ et une singularité

Calcul des résidus

essentielle. Toutefois si on se restreint aux valeurs réelles et > 0 de z , la fonction est très régulière car sa limite quand z tend vers 0 (en restant > 0) est 1 ; cela se voit facilement à partir de 5.0 : la fonction sous l'intégrale se majore uniformément en $z \geq 0$ par

$$\frac{e^{-t}}{1+zt} \leq e^{-t} \quad (5.18)$$

donc en appliquant le théorème 2 du chapitre 0 on voit que

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \text{Eu}(z) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \quad (5.19)$$

On peut obtenir un développement limité (à n'importe quel ordre fini) en intégrant terme par terme l'identité

$$\frac{e^{-t}}{1+zt} = \sum_{k=0}^{n-1} (-zt)^k e^{-t} + \frac{(-zt)^n e^{-t}}{1+zt} \quad (5.20)$$

ce qui donne

$$\text{Eu}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-z)^k \int_0^\infty t^k e^{-t} dt + (-z)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-t}}{1+zt} dt \quad (5.21)$$

Or on sait que $\int_0^\infty t^k e^{-t} dt = k!$, d'où

$$\text{Eu}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-z)^k + R_n(z) \quad (5.22)$$

avec pour le reste la majoration (on suppose ici $z > 0$)

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| (-z)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-t}}{1+zt} dt \right| \leq \\ &\leq z^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-t}}{1+zt} dt \leq z^n \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! z^n \end{aligned} \quad (5.23)$$

Notez bien que cette majoration du reste n'est valable que pour $z \geq 0$; pour $z < 0$ ou pour z complexe elle serait fausse.

D'autre part, on ne peut pas faire tendre n vers l'infini pour transformer 5.22 en une série entière car cette série serait divergente pour tout $z > 0$: son rayon de convergence serait nul (ce qui est logique puisque la fonction $\text{Eu}(z)$ n'est pas analytique en $z = 0$).

Cependant, quoique la série *infinie* soit divergente, le développement *limité* 5.22 permet de calculer des valeurs approchées de $\text{Eu}(z)$ pour $z > 0$. En effet pour $0 < z < 1$, la quantité $n! z^n$ qui majore le reste dans 5.23 est minimum lorsque n est égal à la partie entière de $1/z$, et ce minimum est alors de l'ordre de $e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (**exercice** : le vérifier à l'aide de la formule de Stirling). Ainsi pour $z = 0.1$, le développement 5.22 jusqu'à l'ordre $n = 10$ fournit une valeur approchée de $\text{Eu}(0.1)$ à quatre décimales et pour $z = 0.05$, le développement à l'ordre $n = 20$ fournit une valeur approchée à huit décimales.

6. Fonctions puissance non entière.

Une catégorie de fonctions très importante pour les applications est celle des fonctions z^α , α étant un nombre réel ou complexe, non nécessairement entier. Ces fonctions sont multiformes, c'est-à-dire admettent plusieurs déterminations que la notation z^α ne précise pas; c'est pourquoi cette notation est à proscrire, excepté si on la place dans un contexte qui précise la détermination. Ici, nous ferons comme pour le logarithme complexe, nous distinguerons les diverses déterminations par un indice, en écrivant $[z^\alpha]_j$.

On peut définir ces fonctions en les ramenant à un logarithme; il suffit de poser

$$[z^\alpha]_j = e^{\alpha \ln_j(z)} \quad (6.1)$$

Ainsi, la détermination du logarithme étant fixée, celle de $[z^\alpha]_j$ l'est aussi. Comme les diverses déterminations du logarithme diffèrent toujours d'un multiple entier de $2i\pi$, on voit que si α est entier, les différentes déterminations de $[z^\alpha]_j$ sont toutes identiques, et on retrouve alors la fonction $z^\alpha = z \times z \times z \times \cdots \times z$. Si α est rationnel, de la forme irréductible p/q , il arrivera que deux déterminations différentes du logarithme conduisent à la même détermination de $[z^\alpha]_j$: il suffit pour cela que les deux déterminations du logarithme diffèrent d'un multiple de $2i\pi q$.

Les fonctions $[z^\alpha]_j$ sont (avec exp, sin, etc.) les plus fréquemment utilisées en analyse complexe. Il est donc indispensable de savoir les manipuler.

Se ramener à un logarithme par 6.1 est généralement peu commode. La meilleure approche est d'utiliser la représentation trigonométrique des nombres complexes. En effet, si $z = re^{i\theta}$, on aura toujours $[z^\alpha]_j = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. Cette expression sera toujours valable et les diverses déterminations ne différeront que par les valeurs respectives autorisées pour θ .

Les deux déterminations les plus courantes sont

- $[z^\alpha]_1$, définie sur $\Omega_1 = \mathbb{C} -]-\infty, 0[$, pour laquelle on représente z par $re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < +\pi$;
- $[z^\alpha]_2$, définie sur $\Omega_2 = \mathbb{C} - [0, +\infty[$, pour laquelle on représente z par $re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$.

Il n'y a pas de détermination "officielle": pour un problème donné, il faut trouver celle qui convient le mieux, et qui n'est pas forcément l'une des deux précédentes.

Notez bien qu'on pourrait aussi représenter les éléments de Ω_2 par $z = re^{i\theta}$ avec $2\pi < \theta < 4\pi$, ou par $z = re^{i\theta}$ avec $14\pi < \theta < 16\pi$. Cela

Calcul des résidus

conduirait à d'autres déterminations, disons $[z^\alpha]_{101}$ et $[z^\alpha]_{107}$; en prenant $2\pi < \theta < 4\pi$ on aurait :

$$[z^\alpha]_{101} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha e^{i\alpha(\theta-2\pi)} e^{+i\alpha \cdot 2\pi} = [z^\alpha]_1 e^{+i\alpha \cdot 2\pi}$$

et en prenant $14\pi < \theta < 16\pi$

$$[z^\alpha]_{107} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha e^{i\alpha(\theta-14\pi)} e^{+i\alpha \cdot 14\pi} = [z^\alpha]_1 e^{+i\alpha \cdot 14\pi}$$

Ainsi, bien qu'elles soient elles aussi définies sur le domaine Ω_2 , $[z^\alpha]_{101}$ et $[z^\alpha]_{107}$ diffèrent de $[z^\alpha]_2$ par un facteur multiplicatif, qui n'est égal à 1 que si α est entier.

On devine les difficultés qu'on rencontrerait en ne respectant pas scrupuleusement les spécificités de chaque détermination.

Remarque importante : La détermination $[z^\alpha]_1$ est définie pour z réel > 0 , où elle se réduit à la fonction usuelle z^α . Mais la détermination $[z^\alpha]_2$ n'est pas définie pour z réel > 0 . Si on prend z réel > 1 , $[z^\alpha]_1 = z^\alpha$ et $[(z-1)^\alpha]_1 = (z-1)^\alpha$, de sorte que $z^\alpha \cdot (z-1)^\alpha = [z(z-1)]^\alpha = [[z(z-1)]_1]^\alpha$. Cela résulte du fait connu que le produit de puissances est la puissance du produit : $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$, qui est valable **pour a et b réels > 0** . La relation $[z^\alpha]_1 \cdot [(z-1)^\alpha]_1 = [[z(z-1)]^\alpha]_1$ est donc vraie pour z réel > 1 . **Mais elle n'est pas vraie pour n'importe quel z complexe.** Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, la fonction $[z^\alpha]_1$ devient alors \sqrt{z}^1 . Soit $z = re^{i(\pi-\varepsilon)}$, avec ε petit et > 0 . Cela signifie que z est tout près de l'axe réel (juste au-dessus), mais du côté négatif : $z \simeq -r$. Alors $z-1$ aura un module $\rho \simeq r+1$, et un argument ξ également très proche de π ($\xi = \pi - \eta$). On constate que :

$$\begin{aligned}\sqrt{z}^1 &= \sqrt{r} e^{i(\pi-\varepsilon)/2} = i\sqrt{r} e^{-i\varepsilon/2} \\ \sqrt{z-1}^1 &= \sqrt{\rho} e^{i(\pi-\eta)/2} = i\sqrt{\rho} e^{-i\eta/2} \\ \sqrt{z}^1 \cdot \sqrt{z-1}^1 &= -\sqrt{r\rho} e^{-i(\varepsilon+\eta)/2}\end{aligned}$$

ce qui est proche de $-\sqrt{r\rho}$ puisque ε et η sont petits. Mais

$$z(z-1) = r\rho e^{i2\pi-i\varepsilon-i\eta} = r\rho e^{-i\varepsilon-i\eta}$$

et comme $-\pi < -\varepsilon - \eta < +\pi$ (mais non $-\pi < 2\pi - \varepsilon - \eta < +\pi$), on a

$$\sqrt{z(z-1)}^1 = \sqrt{r\rho} e^{-i(\varepsilon+\eta)/2}$$

ce qui est proche de $+\sqrt{r\rho}$.

Ce qui a causé la différence entre les deux expressions est que $\sqrt{z(z-1)}^1$ est égal à $\sqrt{r\rho} e^{-i(\varepsilon+\eta)/2}$ et non à $\sqrt{r\rho} e^{i(2\pi-\varepsilon-\eta)/2}$. Si on avait eu $-\pi <$

$2\pi - \varepsilon - \eta < +\pi$ (c'est-à-dire $\pi < \varepsilon + \eta < 3\pi$, c'est-à-dire encore $-\pi < \theta + \xi < +\pi$), les deux résultats auraient été égaux. On peut donc conclure que l'égalité

$$\sqrt{z(z-1)}^1 = \sqrt{z}^1 \cdot \sqrt{z-1}^1$$

n'a lieu que si $-\pi < \theta + \xi < +\pi$. Un raisonnement géométrique élémentaire permet de voir que cette condition équivaut à $\Re z > \frac{1}{2}$. En conclusion :

- si $\Re z > \frac{1}{2}$, $\sqrt{z(z-1)}^1 = \sqrt{z}^1 \cdot \sqrt{z-1}^1$
- si $\Re z < \frac{1}{2}$, $\sqrt{z(z-1)}^1 = -\sqrt{z}^1 \cdot \sqrt{z-1}^1$
- si $\Re z = \frac{1}{2}$, $z(z-1)$ est réel < 0 et $\sqrt{z(z-1)}^1$ n'est pas définie.

Il ne faut donc jamais appliquer la règle $[(ab)^\alpha]_j = [a^\alpha]_j \cdot [b^\alpha]_j$ dans le domaine complexe.

Afin de montrer les méthodes qu'il convient d'employer avec les fonctions puissance, voyons un exemple. Soit

$$F(z) = [z^\alpha]_1 \cdot [(z-1)^\beta]_1$$

C'est donc le produit de deux fonctions puissance. Pour ne pas se tromper dans les valeurs, la meilleure méthode est de représenter z et $z-1$ sous forme trigonométrique, soit $z = re^{i\theta}$ et $z-1 = \rho e^{i\xi}$. $[z^\alpha]_1$ n'est pas définie pour z réel < 0 , et $[(z-1)^\alpha]_1$ n'est pas définie pour z réel < 1 ; donc le produit $F(z)$ des deux est non défini pour z réel < 1 .

Cherchons la discontinuité de $F(z)$ à travers cette coupure. Le plus commode pour comprendre est de procéder en représentation géométrique : le vecteur-image de z est le vecteur d'origine 0 et d'extrémité z , le vecteur-image de $z-1$ est le vecteur d'origine 1 et d'extrémité z (voir figure 16). Lorsque z tend vers un point de l'intervalle $] -\infty, 1]$, il y a deux cas de figure : lorsque ce point est sur $] -\infty, 0[$ (figure 17), et lorsqu'il est sur $]0, 1[$ (figure 18).

La figure 17 montre vers quelle valeur limite tendent les angles θ et ξ (ainsi que les modules r et ρ) lorsque z tend vers un point $-a$ ($a > 0$) de l'intervalle $] -\infty, 0[$:

- si $z \rightarrow -a$ par au-dessus, $\theta \rightarrow +\pi$ et $\xi \rightarrow +\pi$;
- si $z \rightarrow -a$ par en-dessous, $\theta \rightarrow -\pi$ et $\xi \rightarrow -\pi$;

dans les deux cas, $r \rightarrow a^\alpha$ et $\rho \rightarrow (1+a)^\beta$. Par conséquent :

- si $z \rightarrow -a$ par au-dessus, $F(z) \rightarrow a^\alpha (1+a)^\beta e^{i(\alpha+\beta)\pi}$;
- si $z \rightarrow -a$ par en-dessous, $F(z) \rightarrow a^\alpha (1+a)^\beta e^{-i(\alpha+\beta)\pi}$.

Calcul des résidus

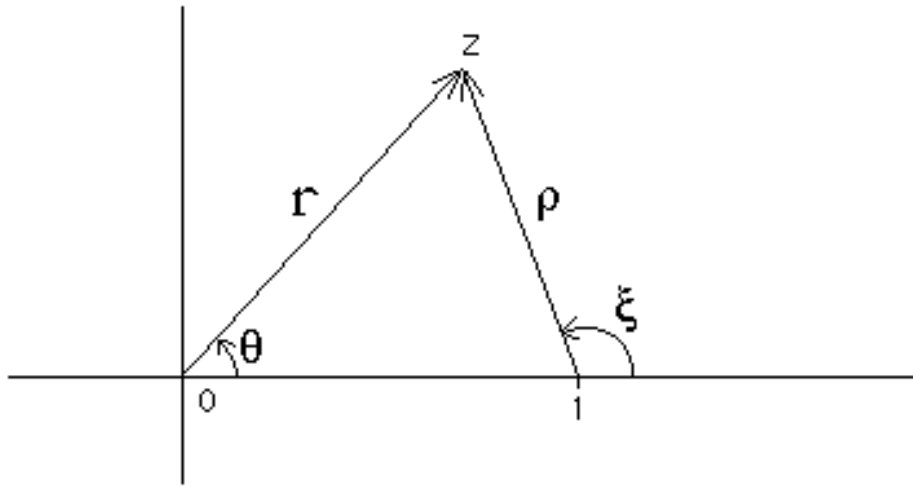


figure 16

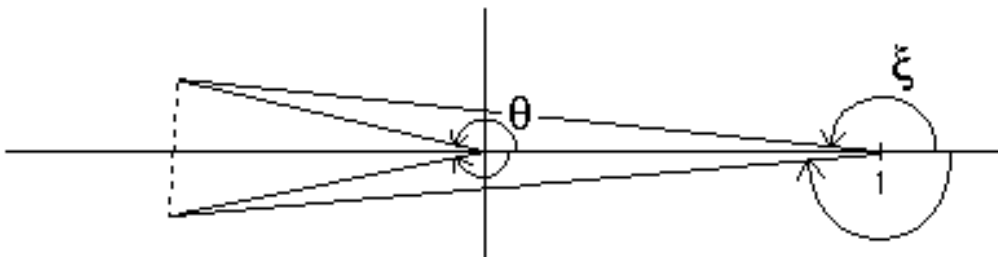


figure 17

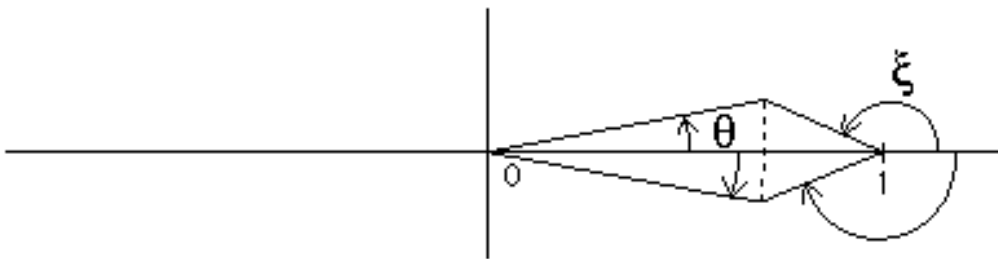


figure 18

Le passage à la limite dans les expressions $[z^\alpha]_1 \cdot [(z-1)^\beta]_1$

On constate que si $\alpha + \beta$ est un entier algébrique, ces deux limites sont égales, c'est-à-dire que dans ce cas il n'y a pas de discontinuité, et la fonction $F(z)$ se prolonge en une fonction analytique dans $\mathbb{C} - [0, 1]$, comme nous l'avons vu à la section 4 pour la fonction $G(z) = \text{Eu}(z) - \frac{1}{z}e^{1/z} \ln_1(z)$.

De même, la figure 18 montre vers quelles valeurs limite tendent les angles θ et ξ (ainsi que les modules r et ρ) lorsque z tend vers un point a du segment $]0, 1[$ ($0 < a < 1$) :

- si $z \rightarrow a$ par au-dessus, $\theta \rightarrow 0^+$ et $\xi \rightarrow +\pi$;
- si $z \rightarrow a$ par en-dessous, $\theta \rightarrow 0^-$ et $\xi \rightarrow -\pi$;

dans les deux cas, $r \rightarrow a^\alpha$ et $\rho \rightarrow (1 - a)^\beta$. Par conséquent :

- si $z \rightarrow a$ par au-dessus, $F(z) \rightarrow a^\alpha(1 - a)^\beta e^{i\beta\pi}$;
- si $z \rightarrow a$ par en-dessous, $F(z) \rightarrow a^\alpha(1 - a)^\beta e^{-i\beta\pi}$.

Ces deux limites sont distinctes, sauf évidemment si β est entier.

Lorsque $\alpha + \beta = k$ est entier, la fonction $F(z)$ est analytique dans $\mathbb{C} - [0, 1]$; elle est donc à plus forte raison analytique dans la couronne $|z| > 1$. Par conséquent, d'après le théorème de Pierre Laurent, elle peut être développée en série de Laurent. Nous nous proposons de trouver cette série, et en particulier le résidu.

Lorsque z est réel > 1 , $[z^\alpha]_1 = z^\alpha$ et $[(z - 1)^\beta]_1 = (z - 1)^\beta$, donc :

$$F(z) = z^\alpha \cdot (z - 1)^\beta = z^{(\alpha+\beta)} \left[1 - \frac{1}{z}\right]^\beta = z^k \left[1 - \frac{1}{z}\right]^\beta \quad (6.2)$$

On a utilisé ici la relation $(ab)^\beta = a^\beta b^\beta$ (valable pour $a > 0$ et $b > 0$ et non pour a et b complexes) : on a en effet remplacé $(z - 1)^\beta$ par $z^\beta \cdot (1 - 1/z)^\beta$, et comme z a été supposé réel > 1 , z et $1 - 1/z$ sont tous deux réels > 0 .

La fonction $X \mapsto (1 - X)^\beta$ est développable en série de Taylor pour X réel et $-1 < X < 1$:

$$(1 - X)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad \text{avec} \quad a_n = (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n+1)}{n!}$$

On suppose ce résultat connu (formule du binôme de Newton étendue au cas d'un exposant non entier).

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n X^n$ est égal à 1, donc la somme de cette série définit **pour X complexe** une fonction $H(X)$ analytique dans le disque $\{X \in \mathbb{C} \mid |X| < 1\}$. Par conséquent la fonction $h(z) = H(1/z)$ est analytique dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$: c'est

Calcul des résidus

la composée de deux fonctions analytiques, $z \mapsto 1/z$ et $X \mapsto H(X)$. On a évidemment :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

D'après 6.2 on conclut que

$$F(z) = z^k h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{k-n} \quad (6.3)$$

pour $z \in]1, +\infty[$.

Et voici le point le plus important de l'argumentation : d'après 6.2, notre fonction $F(z)$ est égale à $z^k h(z)$ pour z réel > 1 ; or l'intervalle $]1, +\infty[$ est un ensemble non discret. Donc $F(z)$ et $z^k h(z)$ sont égales dans tout le domaine complexe $|z| > 1$ (théorème des zéros isolés ou principe du prolongement analytique). Conclusion : la série 6.3 est la série de Laurent de $F(z)$. En particulier, le résidu de $F(z)$ est

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-k)}{(k+1)!} \quad (6.4)$$

On en déduit que, si γ est n'importe quel lacet (simple, et orienté dans le sens direct) entourant le segment $[0, 1]$, l'intégrale de $F(z) dz$ sur ce lacet vaut $2i\pi a_{k+1}$. Lorsqu'un tel lacet est complètement aplati sur le segment, l'intégrale devient celle de 0 à 1 des valeurs limite de $F(z)$ par dessous, plus celle de 1 à 0 des valeurs limite de $F(z)$ par dessus, soit :

$$\begin{aligned} 2i\pi a_{k+1} &= \int_0^1 a^\alpha (1-a)^\beta e^{-i\beta\pi} da + \int_1^0 a^\alpha (1-a)^\beta e^{+i\beta\pi} da \\ &= \int_0^1 a^\alpha (1-a)^\beta [e^{-i\beta\pi} - e^{+i\beta\pi}] da \\ &= -2i \sin(\beta\pi) \int_0^1 a^\alpha (1-a)^\beta da \end{aligned} \quad (6.5)$$

On obtient ainsi la formule suivante, valable pour $\alpha + \beta = k$ entier :

$$\int_0^1 a^\alpha (1-a)^\beta da = -\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} a_{k+1} \quad (6.6)$$

Un cas particulièrement simple (et donc particulièrement intéressant) est celui où $k = -1$; alors $a_{k+1} = a_0 = 1$:

$$\int_0^1 a^\alpha (1-a)^{-1-\alpha} da = -\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (6.7)$$

Bien entendu, il est impossible de calculer ces intégrales par des primitives connues.