

VIII. DISTRIBUTIONS (THÉORIE).

1. Introduction.

La théorie mathématique des distributions est une synthèse de tous les procédés qui permettent de donner un sens aux intégrales divergentes, aux dérivées de fonctions non dérivables, etc.

Une distribution est un modèle mathématique pour une distribution de charges électriques, d'où le nom. N'importe quelle distribution peut se représenter intuitivement comme une certaine répartition de charges dans l'espace, soit continue, soit discrète. Lorsqu'on écrit l'équation de l'électrostatique

$$\Delta U = 4\pi\rho \tag{1.1}$$

le paramètre ρ représente la “densité de charges”. Mais si les charges sont discrètes, on doit prendre pour ρ une combinaison de charges ponctuelles dont chacune est représentée par la pseudodensité δ . La théorie des distributions permet d'englober les deux cas sous un concept unique.

Il est évident que pour le physicien il n'y a pas de séparation objective entre les densités continues et les distributions de charges discrètes : une charge placée au point $x = 0$ (sur la droite, pour fixer les idées) pourrait aussi bien se représenter par une densité continue

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{1.2}$$

avec σ suffisamment petit, que par $\delta(x)$. Mais les règles de calcul avec δ sont bien plus simples qu'avec ρ .

Si on veut représenter un dipôle (deux charges opposées très proches), on a le choix entre les modèles mathématiques suivants (figure 1) :

— une densité continue dipolaire, telle que par exemple $\rho(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma^3) x e^{-x^2/2\sigma^2}$; cette densité présente un minimum très aigu pour $x = -\sigma$ (charge négative) et un maximum très aigu pour $x = +\sigma$ (charge positive) ;

— une distribution discrète $\frac{1}{2\sigma} [\delta(x - \sigma) - \delta(x + \sigma)]$ (charge positive en $x = \sigma$ et charge négative en $x = -\sigma$) ;

— une nouvelle distribution dite dipolaire, qui est la limite de l'une ou l'autre des deux précédentes lorsque σ tend vers zéro (les deux limites, prises au sens des distributions, sont égales).

La troisième représentation n'est pas plus juste que les deux premières, mais les règles de calcul sont bien plus simples avec elle. Les distributions peuvent toujours être dérivées, et on verra que la distribution dipolaire est égale à $-\delta'$.

2. Définition mathématique des distributions.

Nous avons vu à la fin du chapitre précédent que les fonctions $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$ n'avaient pas de limite au sens usuel, mais que les intégrales $\int I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$ en avaient pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De la même façon, la famille des fonctions 1.2 n'a pas de limite au sens usuel (sa limite dans un autre sens serait δ), mais les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \varphi(x) dx \quad (2.1)$$

en ont une lorsque $\sigma \rightarrow 0$ pour n'importe quelle fonction continue φ (pourvu évidemment qu'elle ne croisse pas comme e^{+x^2} à l'infini).

Il en est de même pour les dipôles considérés dans la section 1 (figure 1). Les fonctions $\rho(x) = (1/\sqrt{2\pi} \sigma^3) x e^{-x^2/2\sigma^2}$ n'ont pas de limite quand $\sigma \rightarrow 0$, mais les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} x e^{-x^2/2\sigma^2} \varphi(x) dx \quad (2.2)$$

en ont une pour n'importe quelle fonction φ continuellement dérivable (et raisonnable à l'infini).

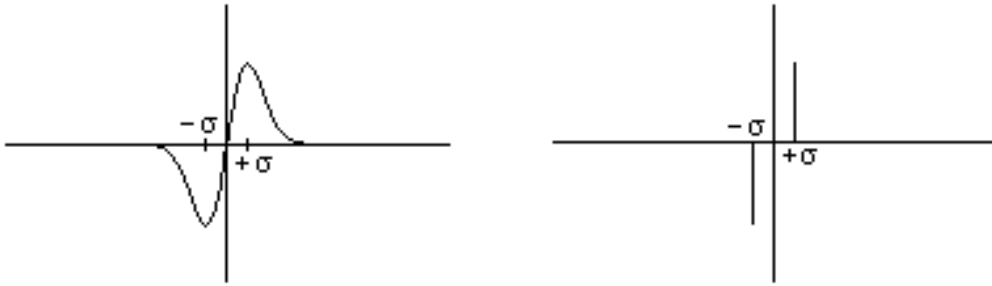
On peut calculer facilement la limite de 2.1 et 2.2. On remarque que la famille de fonctions 1.2 tend uniformément vers zéro dans tout intervalle de la forme $] -\infty, -a]$ ou $[+a, +\infty[$; d'autre part, si φ est continue, elle est pratiquement égale à $\varphi(0)$ au voisinage de $x = 0$, de sorte que 2.1 se décompose en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+\infty} \quad (2.3)$$

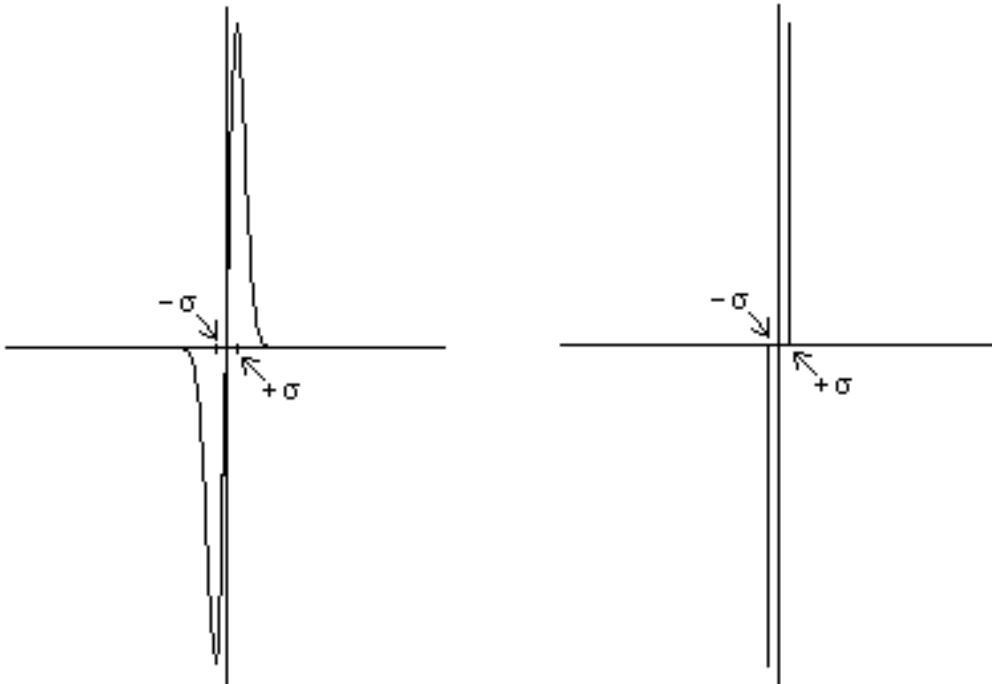
où le premier et le troisième terme tendent vers zéro et où le deuxième est équivalent à

$$\varphi(0) \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \quad (2.4)$$

Distributions (théorie)



Densité de charge continue (à gauche) et distribution discrète (à droite) représentant un même dipôle. La distance entre les charges est 2σ .



Dipôle de même moment que ci-dessus, mais la demi-distance σ entre les deux charges est plus petite (les charges sont donc plus grandes). Lorsqu'on fait tendre σ vers zéro et les charges vers l'infini, le moment dipolaire restant constant, on obtient une limite (au sens des distributions).

figure 1

Un calcul direct (faire dans l'intégrale le changement de variable $x = \sigma y$) montre que l'intégrale ci-dessus tend vers 1 quand σ tend vers zéro. Autrement dit, la limite de 2.1 est tout simplement $\varphi(0)$ (si φ est continue en $x = 0$)

On remarque que la densité qui intervient dans 2.2 est au signe près la dérivée de celle qui intervient dans 2.1 :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} x e^{-x^2/2\sigma^2} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (2.5)$$

Par conséquent, en faisant dans 2.2 une intégration par parties on se ramène à 2.1 et on voit que la limite de 2.2 est $\varphi'(0)$.

Le bilan de ces quelques exemples montre que selon les cas, il faut que φ soit continue, ou continuellement dérivable, ou (pour I_α) suffisamment dérivable. Il fallait aussi qu'elle soit raisonnable à l'infini. Pour être sûr de couvrir tous ces cas, on suppose que φ est dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Toutes les distributions envisagées jusqu'ici étaient alors des limites d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx$$

pour $n \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$. Il est clair que les propriétés de linéarité des intégrales passent à la limite. On généralise donc la notion d'intégrale en disant que les expressions suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (2.6 a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\delta'(x) \varphi(x) dx = \varphi'(0) \quad (2.6 b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_\alpha(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \quad (2.6 c)$$

sont des *fonctionnelles linéaires* ou des *formes linéaires* sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela signifie qu'elles dépendent linéairement de la variable φ , qui est une fonction, mais aussi un vecteur de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'exemple standard de fonctionnelle linéaire est l'intégrale: $f \mapsto \int f(x) dx$ est la fonctionnelle linéaire type. La théorie des distributions est une tentative réussie d'étendre la notion usuelle d'intégrale.

On donne alors la définition mathématique suivante :

Définition. On appelle *distribution* une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Distributions (théorie)

Autrement dit, une distribution est une application T de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} (ou parfois \mathbb{C}) :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & T(\varphi) \end{array} \quad (2.7)$$

qui est *linéaire* :

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 + \varphi_2) &= T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \\ T(\lambda\varphi) &= \lambda T(\varphi) \end{aligned}$$

et aussi *continue* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi) \quad (2.8)$$

Au premier abord, il peut paraître curieux qu'on exige la continuité pour une application linéaire, mais l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — tout comme les espaces $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ — est un espace vectoriel de dimension infinie. Sur un tel espace, il peut y avoir des fonctions linéaires discontinues. Il n'y a pas besoin de chercher loin pour en trouver : prenons la fonctionnelle linéaire

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \end{array}$$

Cette fonctionnelle est simplement l'intégrale. Elle est discontinue si on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ avec la notion de limite en moyenne quadratique (mais elle serait continue avec la limite en moyenne tout court). En effet, soit par exemple la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{1+|x|} & \text{si } |x| \leq n; \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

Un calcul simple donne $A(f_n) = 2$. Mais d'autre part

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx = \frac{2}{\ln^2(n+1)} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]$$

ce qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On a donc ainsi un exemple pour lequel $\|f_n\|_2$ tend vers zéro alors que $A(f_n) = 2$ ne tend pas vers zéro. On voit que la continuité d'une application linéaire n'a rien d'automatique.

L'exemple choisi est l'intégrale ; c'est l'exemple le moins artificiel possible, puisque l'idée essentielle de la théorie des distributions est d'étendre la notion d'intégrale sous la forme plus générale de fonctionnelle linéaire : $\int f(x) dx$ est une fonctionnelle linéaire de f . Dans cette ordre d'idées, la continuité de ladite fonctionnelle linéaire exprime le passage à la limite sous

le signe f : les créateurs de la théorie des distributions sont partis du principe que si on veut étendre la notion d'intégrale à des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens usuel, ces nouvelles intégrales doivent avoir la propriété du passage à la limite, sinon elles sont peu intéressantes. C'est pour cette raison qu'on exige la continuité.

La limite des $T(\varphi_n)$ ne pose aucun problème, car ils forment une suite numérique : la limite est la limite au sens usuel pour les suites de nombres. Par contre il faut préciser ce qu'on entend par la limite de la suite φ_n , car il s'agit d'une suite de fonctions de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si on adopte l'un des deux sens usuels, à savoir

a) la limite dite *simple* : pour tout x fixé, la suite numérique $\varphi_n(x)$ tend vers le nombre $\varphi(x)$;

b) la limite *uniforme* : la suite numérique $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$ tend vers zéro ;

ou bien encore le sens défini pour les espaces $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, qui s'applique aussi dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on ne pourra pas construire une théorie cohérente des distributions. Il a fallu des années de recherches⁽¹⁾ pour trouver la bonne notion de limite et pour *démontrer* qu'avec cette bonne notion de limite tout marche bien.

Voici cette notion de limite. On introduit les nombres suivants, appelés les *semi-normes* de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{N}_{j,k}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ (1 + |x|^k) \left| \frac{d^j}{dx^j} \varphi(x) \right| \right\} \quad (2.9)$$

où j et k sont des entiers ($\in \mathbb{N}$). La définition même de l'espace de Schwartz garantit que ces nombres sont tous finis⁽²⁾. On dit alors que la suite φ_n tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si pour *tout* couple d'entiers j et k (≥ 0), la suite numérique $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n)$ tend vers zéro :

$$\mathcal{S}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0 \iff \forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n) = 0 \quad (2.10)$$

On a introduit les notations $\mathcal{S}\text{-}\lim$ et $\mathbb{R}\text{-}\lim$ pour rendre plus visible la différence. La définition 2.10 est donnée pour les suites φ_n qui tendent

⁽¹⁾ Voir les mémoires de Laurent SCHWARTZ (*Un mathématicien dans le siècle*, Éditions Odile Jacob, Paris, 1997), chapitre VI, pages 223 – 266.

⁽²⁾ La logique suivie jusqu'ici dans ce cours peut donner le sentiment que l'introduction de ces semi-normes est naturelle ou évidente compte tenu de la structure de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; ou encore, le fait qu'elles soient toutes finies peut sembler une coïncidence extraordinaire. Mais la voie suivie pour la découverte n'est pas celle adoptée pour ce cours : l'espace de Schwartz a été construit à partir de la nécessité d'avoir ces semi-normes, et non l'inverse.

Distributions (théorie)

vers zéro, mais cela suffit puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel : il revient évidemment au même de dire que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ou que $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$. En outre, pour une forme *linéaire* T , il revient au même de dire que $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ ou $T(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$; autrement dit, pour qu'une forme *linéaire* soit continue, il suffit qu'elle soit continue en 0. Ainsi, une distribution est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que, si $\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$.

3. Exemples.

Pour illustrer cela, on va immédiatement essayer cette définition sur les exemples déjà évoqués.

Soit d'abord $T(\varphi) = \varphi(0)$ ($T = \delta$ de Dirac).

a) T est définie sur tout $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: si φ est élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est une fonction définie sur \mathbb{R} et a donc une valeur bien déterminée en $x = 0$;

b) T est linéaire ; en effet, si φ_1 et φ_2 sont deux éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, leur somme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ est la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, donc en particulier pour $x = 0$; de même pour $\lambda \varphi$.

c) Enfin, T est continue, au sens de 2.10 : si pour tous j, k on a $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n) \rightarrow 0$, alors on l'a en particulier pour $j = k = 0$, c'est-à-dire $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$; cela veut dire que φ_n converge uniformément vers zéro pour tout x , donc en particulier pour $x = 0$.

Le cas $T(\varphi) = -\varphi'(0)$ est analogue ($T = \delta'$, dérivée de δ).

a) T est définie sur tout $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: si φ est élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est une fonction définie sur \mathbb{R} et infiniment dérivable, donc φ' a une valeur bien déterminée en $x = 0$;

b) T est linéaire ; en effet, si φ_1 et φ_2 sont deux éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, leur somme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ est la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, et on a alors aussi $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x)$ pour tout x , en particulier pour $x = 0$; de même pour $\lambda \varphi$.

c) Enfin, T est continue : si pour tous j, k on a $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n) \rightarrow 0$, alors on l'a en particulier pour $j = 1$ et $k = 0$, c'est-à-dire $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n'(x)| \rightarrow 0$; cela veut dire que φ_n' converge uniformément vers zéro pour tout x , donc en particulier pour $x = 0$.

Le cas des distributions I_α ($\alpha < 1$) est à peine plus compliqué. Souvenons-nous que $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$ est la transformée de Fourier de $e^{-\varepsilon|\xi|}/[(i\xi)^\alpha]_2$.

Par conséquent, d'après **VI.3.5** (théorème 3 du chapitre **VI**) on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

Posons alors que la distribution $T = I_\alpha$ ($\alpha < 1$) est définie comme étant

$$T(\varphi) = \mathbb{R}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \quad (3.2)$$

D'après 3.1, cela équivaut à

$$T(\varphi) = \mathbb{R}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

Or, contrairement à l'intégrale 3.2 dans laquelle la fonction à intégrer n'a pas de limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut passer à la limite sous le signe \int dans l'intégrale 3.3 (la fonction sous le signe \int dans 3.3 satisfait effectivement les conditions requises par les théorèmes généraux, grâce à la présence de la fonction $\widehat{\varphi}(\xi)$). Par conséquent :

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(i\xi)^\alpha]_2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

On peut donc oublier maintenant 3.2 et 3.3, et considérer que 3.4 définit $T = I_\alpha$. On constate alors

a) que T est bien définie sur tout $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (théorèmes 1 et 2 du chapitre **VI**)

b) que T est linéaire : si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, on aura aussi $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2$ et bien entendu l'intégrale 3.4 est linéaire ; de même pour $\lambda \varphi$.

c) Que T est continue : on peut réécrire 3.4 sous la forme

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(i\xi)^\alpha]_2} \frac{1}{1 + \xi^{m+2}} \cdot (1 + \xi^{m+2}) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

(où m est un entier qu'on choisira judicieusement) de sorte qu'en appliquant l'inégalité de la moyenne à cette dernière expression on obtient

$$|T(\varphi)| \leq \mathcal{N}_{0,m+2}(\widehat{\varphi}) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(i\xi)^\alpha]_2} \frac{1}{1 + \xi^{m+2}} d\xi$$

Il suffit de choisir m en fonction de α pour assurer la convergence de l'intégrale ci-dessus (par exemple on prend pour m le plus petit entier supérieur à $1 - \alpha$). On a alors l'inégalité

$$|T(\varphi)| \leq M \cdot \mathcal{N}_{0,m+2}(\widehat{\varphi})$$

où M est la valeur de l'intégrale en question, et ne dépend pas de φ . Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{S}\text{-lim } \varphi_n = 0 \iff \mathcal{S}\text{-lim } \widehat{\varphi}_n = 0$, ce qui provient d'un théorème de la section suivante.

4. La continuité dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dans la définition des distributions, il y a trois conditions; a) T est une *application* de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} ; b) cette application est *linéaire*; c) elle est *continue*. C'est évidemment c) qui est la nouveauté, difficile à comprendre. C'est pourquoi on y consacrera toute la présente section.

Si u_n est une suite de nombres, on dit que u_n tend vers u si $\forall \varepsilon, \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow |u - u_n| \leq \varepsilon$. En français, cela veut dire : plus n est grand, plus $|u - u_n|$ est petit, c'est-à-dire plus u_n est proche de u ; quand n est *très* grand, u_n est *très* proche de u . La proximité se traduit par la petitesse de $|u - u_n|$, qui est la distance de u à u_n . On voit ainsi que la notion de limite présuppose une notion de proximité.

Lorsqu'on dit qu'une suite de fonctions f_n a pour limite uniforme une fonction f , cela veut dire que plus n est grand, plus le nombre $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$ est petit. Cette fois, c'est le nombre $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$ qui mesure la distance de f_n à f . C'est-à-dire que f_n est proche de f si $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$ est petit (cela signifie que, indépendamment de x , les nombres $f_n(x)$ et $f(x)$ sont tous proches, leur distance est petite uniformément en x).

Au chapitre VI nous avons vu deux autres notions de limite; la limite *en moyenne*, et la limite *en moyenne quadratique*. Dans ces deux cas, la distance était respectivement $\|f_n - f\|_1$ et $\|f_n - f\|_2$. La fonction f_n est alors proche de f si $\|f_n - f\|_{1,2}$ est petit. Concrètement, cela signifie que les nombres $f_n(x)$ et $f(x)$ sont proches pour la plupart des valeurs de x ; contrairement à la proximité uniforme, il peut y avoir des valeurs de x pour lesquelles les nombres $f_n(x)$ et $f(x)$ sont éloignés l'un de l'autre, mais ces valeurs se regroupent sur des intervalles très courts (d'autant plus courts que n est plus grand).

Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est l'ensemble des semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$ qui définit la proximité. La proximité est plus complexe que dans le cas des proximités uniforme ou en moyenne, car il n'y a plus un nombre unique qui mesure simplement la distance : deux fonctions φ et ψ de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont proches si tous les nombres $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi - \psi)$ sont petits, mais on ne demande pas qu'ils soient tous aussi petits en même temps, c'est-à-dire uniformément en j, k . Ainsi, dire que φ_n tend dans $\mathcal{N}_{j,k}$ vers φ (ce qui en langage mathématique s'écrit $\mathcal{S}\text{-lim } \varphi_n = \varphi$) signifie que plus n est grand, plus les nombres

$\mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n - \varphi)$ sont petits, ou en langage mathématique :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{R}\text{-}\lim \mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n - \varphi) = 0 \quad (4.1)$$

Si on revient à la définition des semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$, 4.1 signifie que tous les nombres $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1 + |x|^k) |\varphi_n^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)|\}$ tendent vers zéro quand n tend vers l'infini ($\varphi^{(j)}$ désignant la j^{e} dérivée de φ). Ou encore : que les fonctions $(1 + |x|^k) \varphi_n^{(j)}(x)$ tendent toutes uniformément vers $(1 + |x|^k) \varphi^{(j)}(x)$. Cette notion de limite est donc bien plus forte que la limite uniforme : on ne demande pas seulement que φ_n tende uniformément vers φ , mais qu'en outre toutes les dérivées de φ_n tendent uniformément vers les dérivées correspondantes de φ , et aussi que ces dérivées multipliées par n'importe laquelle des fonctions $1 + |x|^k$ tende uniformément vers la limite correspondante. Dire que φ_n tend uniformément vers φ signifie seulement que $\mathcal{N}_{0,0}(\varphi_n - \varphi)$ tend vers zéro. en résumé : $\mathcal{S}\text{-}\lim \varphi_n = \varphi$ entraîne $\text{u-lim } \varphi_n = \varphi$, mais non l'inverse.

En utilisant judicieusement l'inégalité de la moyenne, on peut facilement montrer que la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entraîne aussi la convergence dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ ou dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi = \mathcal{S}\text{-}\lim \varphi_n \iff \varphi = \mathbb{L}_1\text{-}\lim \varphi_n \text{ et } \varphi = \mathbb{L}_2\text{-}\lim \varphi_n \quad (4.2)$$

Il suffit en effet de vérifier que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot [(1+x^2)|\varphi(x)|] dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \times \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1+x^2)|\varphi(x)|\} = \pi \mathcal{N}_{0,2}(\varphi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

et de manière analogue

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^2} \cdot [(1+|x|)|\varphi(x)|]^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx \times \sup_{x \in \mathbb{R}} \{(1+|x|)^2 |\varphi(x)|^2\} = 2 \mathcal{N}_{0,1}(\varphi)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

En résumant 4.3 et en prenant la racine carrée dans 4.4 on a donc :

$$\|\varphi\|_1 \leq \pi \mathcal{N}_{0,2}(\varphi) \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_2 \leq \sqrt{2} \mathcal{N}_{0,1}(\varphi) \quad (4.5)$$

En conclusion : *la convergence d'une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ entraîne sa convergence uniforme, sa convergence en moyenne, et sa convergence en moyenne quadratique.*

Voyons maintenant la continuité. Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est continue au point x_0 si pour toute suite x_n qui tend vers x_0 , $f(x_n)$ tend

vers $f(x_0)$. Par analogie on dit qu'une fonction \mathcal{F} de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue au "point" φ si pour toute suite φ_n qui tend dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ , $\mathcal{F}(\varphi_n)$ tend dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(\varphi)$. Il est un peu gênant d'appeler \mathcal{F} une fonction alors que sa variable et sa valeur sont elles-mêmes des fonctions; c'est pourquoi on préfère appeler \mathcal{F} une *transformation* ou un *opérateur*. Pour la même raison, on a préféré appeler *fonctionnelle* ou *forme* linéaire les applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

Un exemple de transformation ou d'opérateur est la transformation de Fourier. Nous avons vu au chapitre **VI** que la transformation de Fourier \mathcal{F} était une application continue de $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Il résultait en effet de la relation de Parseval que $\|\widehat{f}\|_2 = 2\pi\|f\|_2$, ce qui entraîne évidemment que si $\|f_n - f\|_2$ tend vers zéro, il en sera de même de $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2$. Nous allons maintenant prouver aussi que

Théorème 1. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Autrement dit, si φ_n tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\varphi_n}$ tend également vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Une remarque en passant : d'après ce qui précède, on peut immédiatement dire que si φ_n tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors φ_n tend vers zéro dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, et donc aussi que $\widehat{\varphi_n}$ tend vers zéro dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$; cela veut dire que la transformation \mathcal{F} est continue si on considère la limite selon les $\mathcal{N}_{j,k}$ dans l'espace de départ et la limite selon $\|\cdot\|_2$ dans l'espace d'arrivée. Mais on ne peut pas en conclure la continuité pour la limite selon les $\mathcal{N}_{j,k}$ dans l'espace d'arrivée, car la convergence selon les $\mathcal{N}_{j,k}$ entraîne la convergence selon $\|\cdot\|_2$, mais non l'inverse. C'est pourquoi il faut procéder directement.

Démonstration du théorème 1. On va établir des inégalités, qui toutes seront déduites de l'*inégalité de la moyenne*. Rappelons que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto D^j f(x)$ (où $D^j f$ est la j^e dérivée de f) est la fonction $\xi \mapsto (i\xi)^j \widehat{f}(\xi)$, et que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est la fonction $\xi \mapsto -iD^k \widehat{f}(\xi)$ (chapitre **VI**, théorème 1). Par conséquent

$$(-i\xi)^k D^j \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} D^k [(ix)^j f(x)] e^{ix\xi} dx \quad (4.6)$$

D'après la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit, on a

$$D^k [(ix)^j f(x)] = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} M_{j,k,\ell} x^{j-k+\ell} D^\ell f(x) \quad (4.7)$$

où les $M_{j,k,\ell}$ sont des constantes (qu'on peut exprimer à l'aide de factorielles de $j, k, \ell, j-k, j-\ell$, etc., mais il ne sert à rien ici d'en avoir une expression

exacte). En écrivant la fonction sous f dans 4.6 sous la forme

$$D^k[(ix)^j f(x)] = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2) D^k[(ix)^j f(x)]$$

et en appliquant l'inégalité de la moyenne, puis 4.7, on obtient

$$\begin{aligned} |\xi|^k |D^j \widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \times \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2) D^k[(ix)^j f(x)]| \\ &\leq \pi \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \left[M_{j,k,\ell} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{j-k+\ell} D^\ell f(x)| + M_{j+2,k,\ell} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{j+2-k+\ell} D^\ell f(x)| \right] \\ &= \pi \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \left[M_{j,k,\ell} \mathcal{N}_{\ell,j-k+\ell}(f) + M_{j+2,k,\ell} \mathcal{N}_{\ell,j+2-k+\ell}(f) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour $k = 0$, l'inégalité 4.8 devient aussi

$$|D^j \widehat{f}(\xi)| \leq \pi \left[M_{j,0,0} \mathcal{N}_{\ell,j}(f) + M_{j+2,0,0} \mathcal{N}_{\ell,j}(f) \right] \quad (4.9)$$

Les inégalités 4.8 et 4.9 sont vraies pour tout $\xi \in \mathbb{R}$; si on les ajoute membre à membre on aboutit à

$$\mathcal{N}_{j,k}(\widehat{f}) \leq \pi \times \sum_{j',k'} C^{\text{te}} \cdot \mathcal{N}_{j',k'}(f) \quad (4.10)$$

où la somme comporte un nombre fini de termes égaux à une constante multipliée par l'une des semi-normes (il importe peu de savoir exactement lesquelles). Si on remplace ci-dessus f par $\varphi_n - \varphi$, on en déduit que $\mathcal{S}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n - \varphi) = 0 \implies \forall j', k', \mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{j',k'}(\varphi_n - \varphi) = 0 \implies \mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{j,k}(\widehat{\varphi_n} - \widehat{\varphi}) = 0$, et d'après 4.10 cela est vrai quels que soient les entiers j et k . CQFD

Un autre opérateur très courant est la dérivation : $\varphi \mapsto d\varphi/dx$. Contrairement à la transformation de Fourier, celui-ci n'est pas continu sur $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$: si on prend par exemple $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{2}x^2 + inx}$, un calcul simple montre que $\|f_n\|_2 = \frac{1}{n} \pi^{1/4}$ qui tend vers zéro, mais la dérivée est $f'_n(x) = (i - \frac{x}{n}) e^{-\frac{1}{2}x^2 + inx}$ et le calcul donne $\|f'_n\|_2 = \sqrt{1 + 1/2n^2} \pi^{1/4}$ qui ne tend pas vers zéro. Mais la dérivation devient continue pour le type très particulier de limite considéré sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

Théorème 2. *L'opérateur de dérivation*

$$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' \end{array}$$

est continu pour la limite définie par les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la relation

$$\mathcal{N}_{j,k}(\varphi') = \mathcal{N}_{j+1,k}(\varphi),$$

qui est évidente compte tenu de la définition des semi-normes. CQFD

5. Intégrales avec poids, et extension.

Il a déjà été dit (section 2) qu'une intégrale est une forme linéaire. Maintenant que nous avons une idée plus claire de la continuité sur les espaces de fonctions, notamment $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous pouvons mieux discuter cela. On va donc reprendre quelques questions déjà discutées dans les sections 2 et 3.

Soit la fonctionnelle :

$$\mathcal{I} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \end{array} \quad (5.1)$$

où E est l'un des espaces de fonctions déjà étudiés, avec la notion particulière de limite qui le caractérise ; par exemple :

- a) $E = \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, où $f_n \rightarrow 0$ signifie $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$;
- b) $E = \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, qui est un sous-espace de $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, où $f_n \rightarrow 0$ signifie $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$;
- c) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, où $f_n \rightarrow 0$ signifie que $\forall j, k \geq 0, \mathcal{N}_{j,k}(f_n) \rightarrow 0$.

La fonctionnelle \mathcal{I} est évidemment linéaire (c'est l'intégrale) ; dans les cas a) et c), elle est continue : c'est quasiment tautologique pour a), et résulte de l'inégalité de la moyenne pour c). Par contre pour b) elle est discontinue (comme on a déjà vu en 2).

Plus généralement, on peut considérer les intégrales avec poids. Une fonction $p(x)$ étant fixée (le poids), on pose

$$\mathcal{J}_p : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx \end{array} \quad (5.2)$$

Ceci est une fonctionnelle linéaire ; elle est définie et continue dans les cas suivants :

- a) $E = \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ et p est une fonction continue bornée ; cela résulte immédiatement de l'inégalité de la moyenne.
- b) $E = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$; cela résulte de l'inégalité de Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx \right| \leq \|p\|_2 \cdot \|f\|_2 .$$

— c) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et p est une fonction à croissance polynômiale; cela résulte de l'inégalité de la moyenne: que p soit à croissance polynômiale signifie qu'il existe une constante M et un entier k tels que $p(x) \leq M(1 + |x|^k)$, donc

$$\mathcal{J}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{1 + |x|^k} \cdot (1 + |x|^k) f(x) dx$$

d'où

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(f)| &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^k) |f(x)| dx \\ &\leq M \cdot \mathcal{N}_{0,k+2}(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + |x|^k}{1 + |x|^{k+2}} dx \end{aligned}$$

L'intégrale obtenue ci-dessus ne dépend que de k (donc de p) et non de f , ce qui suffit pour garantir que $\mathcal{N}_{0,k+2}(f) \rightarrow 0 \implies \mathcal{J}(f) \rightarrow 0$.

On pourrait aussi trouver des cas où \mathcal{J} est discontinue, mais ce sont des amusements pour intellectuels, or nous sommes pressés.

Voici des conclusions plus utiles :

Théorème 3 : *si le poids p est à croissance polynômiale, en particulier si p est un polynôme, la fonctionnelle \mathcal{J}_p définit une distribution.*

Il suffit en effet de remarquer que, conformément à l'étude du cas c) ci-dessus, \mathcal{J}_p est alors continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ CQFD

Toutefois la réciproque est fausse: toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas forcément une intégrale avec poids. La preuve en est déjà la fonctionnelle déjà introduite plus haut

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \quad (5.3)$$

Si on voulait la représenter sous la forme d'une intégrale avec poids, cela donnerait

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx \quad (5.4)$$

ce qui est certes une notation courante, mais dont le sens est donné par la notion de fonctionnelle, et non par la notion d'intégrale.

La notation 5.4 utilise le signe \int dans un sens *étendu* et non dans son sens usuel (celui de l'intégrale de Riemann ou de Lebesgue). Une intégrale est une limite de sommes discrètes, tandis qu'une fonctionnelle linéaire est définie abstraitement. Il est tout à fait légitime d'utiliser la notation 5.4, mais on

Distributions (théorie)

ne peut pas lui appliquer sans discernement les théorèmes qui s'appliquent aux vraies intégrales, tels que par exemple l'inégalité de la moyenne ou l'inégalité de Schwarz, ou encore des théorèmes de passage à la limite. Il faudra appliquer des théorèmes qui sont valables pour les fonctionnelles, et que nous verrons.

Si T est une distribution, on peut l'écrire comme fonctionnelle $T(\varphi)$, mais aussi comme dans 5.4 sous la forme :

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \varphi(x) dx \quad (5.5)$$

Une autre notation très commode (qu'on comprendra mieux au chapitre suivant) est la notation "en produit scalaire" $\langle T, \varphi \rangle$. On peut donc indifféremment écrire

$$T(\varphi) \equiv \langle T, \varphi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \varphi(x) dx \quad (5.6)$$

Il faut simplement éviter de prendre au sérieux la variable muette x dans la notation en forme d'intégrale.

Si $\langle T, \varphi \rangle$ est une intégrale avec le poids $p(x)$, on peut prendre $p(x)$ pour $T(x)$ et ainsi $T(x)$ sera une véritable fonction au sens usuel, et 5.5 une véritable intégrale. On dit alors que T est une *distribution régulière*.

Mais si T est une fonctionnelle qui ne se réduit pas à un poids (comme par exemple δ), on ne pourra pas attribuer une valeur numérique à $T(x)$, du moins pas pour tout x . On dit alors que T est une *distribution singulière*. La distribution T n'étant alors pas une fonction au sens usuel, elle n'a pas de valeur numérique et ne se définit que par rapport aux fonctions φ qui sont dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On peut revenir à l'analogie faite au début du chapitre avec l'électrostatique : si T représente une densité continue de charges $p(x, y, z)$, le potentiel de ces charges sera

$$V(X, Y, Z) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p(x, y, z)}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}} dx dy dz$$

Si les charges deviennent ponctuelles ou encore plus singulières (dipôles, quadrupôles, etc.), la densité p cessera d'être une vraie fonction (elle deviendra infinie là où il y a les charges et nulle partout ailleurs), mais le potentiel restera caractéristique de la distribution des charges ; cette dernière sera reconnaissable d'après le potentiel qu'elle crée et qui, lui, est une vraie fonction (quoique ayant des singularités). C'est la même idée que nous suivons ici, mais au lieu de considérer les fonctions $1/\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$,

qui deviennent infinies en $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, et qui par conséquent sont peu commodes pour l'analyse on préfère utiliser l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cette idée de généraliser la notion usuelle de fonction ou d'intégrale interdit d'appliquer des théorèmes qui ont été prévus pour les vraies fonctions et les vraies intégrales, mais évidemment on crée la théorie des distributions de telle manière qu'on puisse disposer de propriétés commodes (en particulier pour les calculs).

Revenons encore sur la propriété la plus importante des distributions : la continuité en tant que fonctionnelle. Elle signifie que si $\mathcal{S}\text{-}\lim \varphi_n = \varphi$, alors $\mathbb{R}\text{-}\lim T(\varphi_n) = T(\varphi)$. Si on interprète la distribution comme une fonction "généralisée" et $\langle T, \varphi_n \rangle$ ou $\langle T, \varphi \rangle$ comme des intégrales généralisées, en utilisant la notation 5.5, on aura

$$\mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \varphi(x) dx \quad (5.7)$$

Cela exprime la propriété de passage à la limite sous le signe \int (remarque déjà faite en **2**). Ainsi, cette propriété qui pour les vraies intégrales exige une vérification soigneuse de sa validité, est ici partie intégrante de la définition. Le passage à la limite sous le signe \int est donc automatique pour les distributions et n'exige aucune précaution (sauf évidemment la garantie que T est bien une distribution).

6. Dernières remarques sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La notion de limite choisie pour l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (celle définie par les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$) est extrêmement restrictive : on a vu que la limite uniforme (qui est déjà la plus forte parmi les limites usuelles) est la limite selon la semi-norme $\mathcal{N}_{0,0}$; dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on exige encore une infinité d'autres semi-normes. Pour qu'une suite φ_n de fonctions tende vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il faut qu'elle tende uniformément vers 0, mais cela ne suffit de loin pas : il faut en plus que toutes ses dérivées tendent uniformément vers 0, et encore que toutes ces dérivées, multipliées par n'importe quel polynôme (ou, ce qui est équivalent, par n'importe quel facteur $1 + |x|^k$), tendent uniformément vers 0. Pour en donner une idée un peu plus concrète, voici des exemples.

a) $\varphi_n(x) = e^{-n} e^{-x^2/n}$; cette suite tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour le vérifier sans calculs, on procède comme suit : posons $X = x/\sqrt{n}$ et $\phi(X) = e^{-X^2}$. Si $\phi^{(j)}(X)$ est la j^{e} dérivée de ϕ , alors

$$\frac{d^j \varphi_n}{dx^j}(x) = \frac{e^{-n}}{n^{j/2}} \phi^{(j)}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

Distributions (théorie)

Le maximum de $|d^j \varphi_n / dx^j|$, c'est-à-dire la semi-norme $\mathcal{N}_{j,0}(\varphi_n)$, est évidemment une expression compliquée, d'autant plus compliquée que j est plus grand. Mais la relation ci-dessus montre que ce maximum est égal à $e^{-n} / n^{j/2}$ fois celui de $|\phi^{(j)}(X)|$, qui est compliqué aussi, mais *qui ne dépend pas de n* . Ainsi

$$\mathcal{N}_{j,0}(\varphi_n) = \frac{e^{-n}}{n^{j/2}} \max \{ |\phi^{(j)}| \}$$

tend bien vers zéro. Avec les facteurs $|x|^k$ on peut écrire

$$|x|^k \frac{d^j}{dx^j} \varphi_n(x) = \frac{e^{-n} n^{k/2}}{n^{j/2}} \cdot |X|^k \phi^{(j)}(X)$$

Comme avant, et bien que cette fois $n^{k/2}$ soit au numérateur, le facteur e^{-n} l'emporte et le coefficient $e^{-n} n^{k/2} / n^{j/2}$ tend vers zéro, tandis que $\max \{ |X|^k |\phi^{(j)}(X)| \}$ reste constant, d'où le résultat.

La vérification est assez longue, car il y a beaucoup de semi-normes : il faut vérifier que *chacun* des $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi_n)$ tend vers zéro. Voici maintenant un contre-exemple.

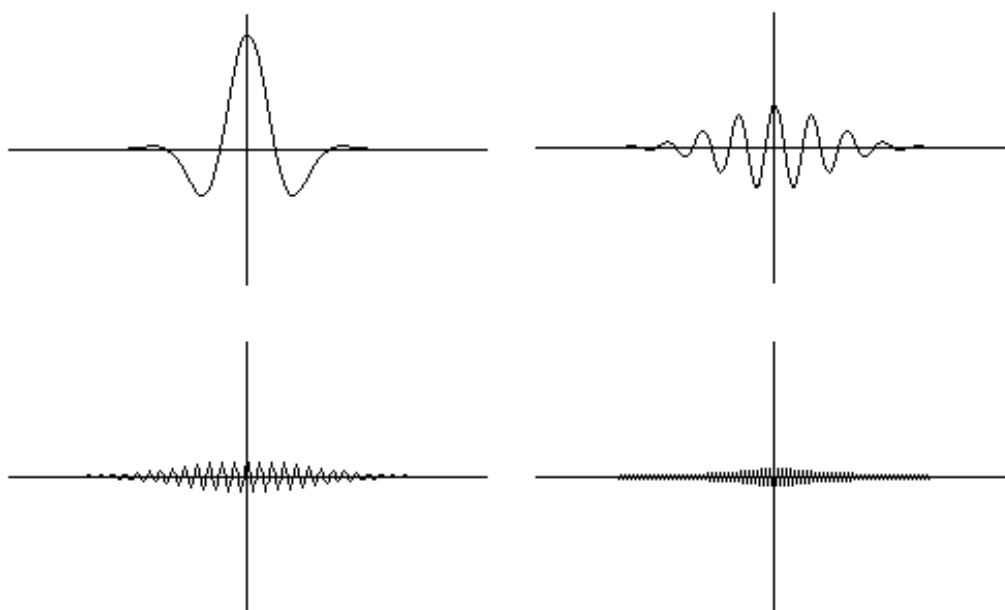


figure 2

Graphiques des quatre premières fonctions de la suite donnée dans l'exemple b) : $\varphi_n(x) = e^{-n} e^{-x^2/n} \cos(3^n x)$. On peut voir que ces fonctions sont uniformément de plus en plus petites mais leurs dérivées de plus en plus grandes.

b) $\varphi_n(x) = e^{-n} \cos(3^n x) e^{-x^2/n}$. On voit sans calcul que le maximum de cette fonction est (pour tout n) atteint pour $x = 0$, et vaut e^{-n} ; il tend donc vers zéro, donc cette suite de fonctions tend uniformément vers zéro (voir sur la figure 2 les graphiques pour $n = 1, 2, 3, 4$). Par contre sa dérivée est $-e^{-n} 3^n \sin(3^n x) e^{-x^2/n} - e^{-n} (2x/n) \cos(3^n x) e^{-x^2/n}$; on voit que pour $x = 3^{-n}\pi/2$, cette dérivée vaut en valeur absolue $(3/e)^n \exp(\pi^2/4n 3^{2n})$, ce qui tend vers l'infini; donc à plus forte raison son maximum tend vers l'infini. Cela montre que cette suite converge uniformément vers zéro, mais pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Troisième exemple :

c) $\varphi_n(x) = e^{-n} \cos(1.001^n x) e^{-x^2/n}$. Inutile de faire les calculs en détail, mais on devine qu'en dérivant j fois, on aura un facteur $1.001^{jn} e^{-n} = [1.001^j/e]^n$; celui-ci va tendre vers zéro tant que $1.001^j/e < 1$, c'est-à-dire tant que $j < 1/\ln(1.001) \simeq 1000, 499\,917$ (donc $j \leq 1000$), puis tendra vers l'infini quand j sera égal à 1001 ou plus. On a ainsi une suite de fonctions pour lesquelles $\mathcal{N}_{j,0}(\varphi_n)$ tend vers zéro tant que $j \leq 1000$, mais $\mathcal{N}_{1001,0}(\varphi_n)$ tend vers l'infini.

La question qu'on peut se poser est : pourquoi définir la limite de façon aussi restrictive ? Pour y répondre, notons que plus le type de limite est contraignant, moins il y a de suites convergentes. Il y aura donc d'autant plus de fonctionnelles linéaires continues : en effet, T est continue si pour toutes les suites φ_n qui tendent vers zéro, $\langle T, \varphi_n \rangle$ tend vers zéro; il est évident qu'en réduisant l'ensemble des suites qui tendent vers zéro, on rend moins exigeante la condition que doit satisfaire T . Si par exemple on posait pour la limite d'une suite la définition la plus contraignante possible, à savoir : $\varphi_n \rightarrow 0$ si $\forall n, \varphi_n = 0$; alors il n'y aurait qu'une seule suite qui tend vers zéro, et toutes les fonctionnelles linéaires seraient continues. Mais cela ne serait pas intéressant car on ne pourrait pas avoir des règles de calcul opératoires. Les "bonnes règles de calcul" ne peuvent pas être instituées par décret, et sont conditionnées par l'existence effective d'espaces fonctionnels tels que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui ont les bonnes propriétés et qu'il faut découvrir.

Après le succès de la théorie des distributions, les mathématiciens ont cherché à pousser plus loin l'idée de "fonctions généralisées"; dans tous les cas, c'est la nature des limites qui détermine l'efficacité algébrique des nouveaux objets introduits, car on calcule principalement par passage à la limite. Or on n'a pas trouvé mieux que les distributions de Schwartz : ce qui est plus général ne fonctionne qu'avec des règles de calcul compliquées, et ce qui est plus simple est insuffisant pour les applications (essentiellement : intégrales divergentes, fonctions de Green). L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est le meilleur

compromis connu.

Cette relation entre le choix d'un espace fonctionnel possédant un type de limite spécifique, et la nature et les propriétés des fonctionnelles continues qui en résultent, peut encore être mis en évidence en prenant l'espace $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Nous avons vu que la limite dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ est beaucoup moins contraignante que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après les remarques précédentes, on s'attend donc à avoir sur $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ beaucoup moins de fonctionnelles linéaires continues. C'est bien le cas. Un théorème (Fred. Riesz, ~ 1920) qu'on admettra dit que toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ est forcément une intégrale avec poids. De façon précise :

Théorème 4 (F. Riesz). *Soit*

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \langle T, f \rangle \end{array}$$

une fonctionnelle linéaire continue, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, f_n \rangle = 0$$

Alors il existe une fonction p dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}), \quad \langle T, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) dx$$

La démonstration de ce théorème exige des connaissances mathématiques que nous ne verrons qu'au chapitre **X**, c'est pourquoi on ne la donne pas ici. Mais sa signification est claire : si on prend $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ comme espace de référence, les fonctionnelles linéaires continues ne fournissent rien de nouveau par rapport aux fonctions usuelles. Pour avoir “plus” que les simples fonctions, il faut avoir “plus” de fonctionnelles, et donc il faut abaisser la contrainte de la continuité en renforçant la contrainte sur les suites convergentes. Mais la commodité des règles de calcul sur les fonctionnelles sera évidemment liée aux propriétés de l'espace de référence. Par exemple le fait que la transformation de Fourier transforme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en lui-même, et y est continue, permet de définir la transformée de Fourier des distributions, avec des règles de calcul simples et naturelles. S'il n'existait aucun espace autre que $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ sur lequel la transformée de Fourier est continue, on ne pourrait pas étendre la transformation de Fourier aux distributions.

Les distributions sont donc définies abstraitement : on les identifie aux fonctions lorsque (en tant que fonctionnelles) elles sont des intégrales avec poids, et on les considère comme des fonctions généralisées dans le cas

contraire, celui qui justement ne se produit pas sur $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Mais il ne faudra jamais oublier que les distributions ne sont que des artifices mathématiques ; il n'y a pas plus d'information dans l'expression

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \varphi(x) dx = \varphi'(0)$$

que dans l'expression

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-nx^2} \varphi(x) dx = \varphi'(0)$$

La différence est qu'il existe des règles de calcul simples pour les expressions comme la première qui évitent d'avoir à traîner la seconde dans les calculs.

7. Dérivation des distributions.

L'idée de la théorie des distributions est d'étendre les règles de calcul sur les fonctions telles que dérivation, intégration, transformation de Fourier, etc aux fonctionnelles linéaires continues. Pour que ces règles soient cohérentes il faut que, lorsque la fonctionnelle s'identifie à une fonction usuelle (c'est-à-dire lorsqu'elle est une intégrale avec poids), ces opérations coïncident avec leur sens usuel. Donc l'extension des opérations va toujours partir de l'analogie avec les intégrales.

Voyons d'abord la dérivation. Si p est une fonction poids (à croissance polynômiale) et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonctionnelle associée à la dérivée p' sera

$$\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x) \varphi(x) dx$$

Une intégration par parties montre que ceci est égal à

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi'(x) dx ;$$

le produit $p(x) \varphi(x)$ est en effet nul à l'infini. Autrement dit, si $T_p(\varphi)$ désigne la fonctionnelle $\varphi \mapsto \int p(x) \varphi(x) dx$, on aura la relation

$$\langle T_{p'}, \varphi \rangle = -\langle T_p, \varphi' \rangle \quad (7.1)$$

Si p est une fonction poids dérivable, et qu'on l'identifie à la distribution T_p , cela signifie qu'on obtient la dérivée d'une distribution T , en faisant opérer T sur $-\varphi'$. On va donc étendre l'opération de dérivation aux fonctionnelles quelconques en posant :

$$\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (7.2)$$

Distributions (théorie)

En itérant la définition 7.2, la dérivée d'ordre j d'une distribution T sera définie par

$$\langle \frac{d^j T}{dx^j}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T, \frac{d^j \varphi}{dx^j} \rangle \quad (7.2 a)$$

Pour que cette définition de la dérivée soit cohérente, il faut vérifier que la fonctionnelle $\varphi \mapsto \langle T, \frac{d\varphi}{dx} \rangle$ est linéaire et continue. La linéarité est évidente. La continuité résulte directement du théorème 2: si une suite φ_n tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors d'après ce théorème, la suite des dérivées φ'_n , tendra aussi vers zéro, et donc de même $\langle T, \varphi'_n \rangle$, puisque T était supposée être une distribution. Autrement dit: si T est une fonctionnelle linéaire continue, il en est de même de T' .

Cette définition étendue de la dérivée donne des résultats intéressants si on l'applique à des vraies fonctions au sens usuel, mais non dérivables. L'exemple classique est évidemment la fonction de Heaviside

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

celle-ci définit bien une intégrale avec poids:

$$\langle \mathcal{H}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \quad (7.4)$$

Si on applique la définition 7.2, cela donne

$$\langle \mathcal{H}', \varphi \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \quad (7.5)$$

Autrement dit, la dérivée de \mathcal{H} est la distribution δ de Dirac (cf. 2.6 a).

Une autre exemple très simple de fonction non dérivable est la fonction $p(x) = |x|$. C'est bien une fonction à croissance polynômiale, de sorte que l'intégrale avec poids correspondante est une fonctionnelle continue:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+|x|^3} dx \times \mathcal{N}_{0,3}(\varphi) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \mathcal{N}_{0,3}(\varphi)$$

La dérivée de cette distribution est

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

En intégrant par parties les deux intégrales obtenues:

$$\int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx = x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx$$

$$-\int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx = -x\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

Les termes tout intégrés étant nuls, il reste

$$\langle T, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (7.6)$$

qui est l'intégrale avec le poids

$$p(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ +1 & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

La fonction $|x|$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ et sa dérivée coïncide alors avec ce résultat; au point $x = 0$, il n'y a pas de dérivée au sens usuel, et au sens des distributions non plus, puisque les distributions n'ont pas une valeur en chaque point: elles ne sont définies que comme fonctionnelle, ce qui correspond exactement à l'égalité 7.6. Ceci illustre la compatibilité de l'extension.

On sait que pour les fonctions, seules les constantes ont une dérivée nulle, ce qui a pour conséquence que les primitives sont déterminées à une constante additive près. En est-il de même pour les distributions? Cette question théorique est importante, car les distributions ont été inventées en grande partie pour résoudre les équations différentielles, dont les solutions sont déterminées à une constante d'intégration près. Trouver *toutes* les solutions possibles d'une équation différentielle est un problème qui se ramène de près ou de loin à celui de trouver *toutes* les solutions de $dT/dx = 0$.

La théorie des distributions se construit par analogie à partir des intégrales avec poids; il est donc naturel de dire que la distribution nulle est la distribution définie par l'intégrale de poids 0, c'est-à-dire la distribution T telle que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction φ de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De même la distribution correspondant à la constante C doit être l'intégrale de poids $p(x) = C$, soit

$$\langle C, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (7.7)$$

La relation 7.1 identifie la dérivée au sens des distributions à la dérivée au sens usuel, de sorte que, dans la théorie des distributions aussi, les constantes ont une dérivée nulle. Réciproquement, on sait que les fonctions de dérivée nulle sont constantes, mais qu'est-ce qui prouve qu'il n'y aurait pas des distributions singulières à dérivée nulle? Il ne s'agit pas d'une simple évidence, et il faut voir cela de plus près:

Théorème 5. *Toute distribution dont la dérivée est nulle est une distribution du type 7.7.*

Démonstration. Dire que $T' = 0$ équivaut à dire que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\langle T, \varphi' \rangle = 0$. On ne peut en déduire que $T = 0$, car les fonctions φ' , dérivées d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ne peuvent pas être n'importe quelle fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (en langage mathématique: l'application $\varphi \mapsto \varphi'$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas surjective). Cela se voit très bien sur l'exemple suivant: la fonction e^{-x^2} est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais n'est la dérivée d'aucune fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; une primitive en est $\operatorname{erf}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ qui tend rapidement vers zéro pour $x \rightarrow -\infty$, mais non pour $x \rightarrow +\infty$, où elle tend vers $\sqrt{\pi}$. La fonction $\operatorname{erf}(x) - \sqrt{\pi}$ a la même dérivée et tend rapidement vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$, mais non plus pour $x \rightarrow -\infty$. On ne peut trouver aucune constante qui, ajoutée à $\operatorname{erf}(x)$, donne une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une fonction qui tend rapidement vers zéro à la fois pour $x \rightarrow +\infty$ et pour $x \rightarrow -\infty$.

Il est cependant facile de vérifier que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la primitive $\phi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ tend rapidement vers zéro pour $x \rightarrow -\infty$, et la primitive $\phi_2(x) = \int_{+\infty}^x \varphi(t) dt$ tend rapidement vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$ (il suffit d'appliquer l'inégalité de la moyenne et les inégalités $|\varphi(t)| \leq M|t|^{-k}$), mais ces deux primitives ne sont pas forcément égales; toutefois elles diffèrent évidemment d'une constante, puisque toutes deux ont pour dérivée φ : cette constante est $\phi_1 - \phi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$. On voit ainsi que les fonctions qui sont la dérivée d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont caractérisées par le fait que les deux primitives ϕ_1 et ϕ_2 sont, justement, égales, car alors elles tendent rapidement vers zéro à la fois pour $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$; ou encore autrement dit, ces fonctions sont caractérisées par le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0$.

Prenons maintenant une fonction φ_0 particulière de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx = 1$; par exemple $\varphi_0(x) = (1/\sqrt{\pi}) e^{-x^2}$. Étant donnée n'importe quelle fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, posons $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$. Si φ est la dérivée d'une autre fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $A = 0$ d'après ce qui précède. Si tel n'est pas le cas, alors la fonction $\varphi_1 = \varphi - A\varphi_0$ vérifiera la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) dx = 0$ et sera par conséquent la dérivée d'une fonction $\phi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de sorte qu'on aura $\varphi = \phi_1' + A\varphi_0$. Alors, puisque T est une fonctionnelle *linéaire*, on pourra écrire que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \phi_1' \rangle + A\langle T, \varphi_0 \rangle = -\langle T', \phi_1 \rangle + A\langle T, \varphi_0 \rangle.$$

Le terme $\langle T', \phi_1 \rangle$ est nul puisque $T' = 0$, il reste donc

$$\langle T, \varphi \rangle = A\langle T, \varphi_0 \rangle = \langle T, \varphi_0 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx,$$

ce qui montre que T est l'intégrale avec le poids constant $C = \langle T, \varphi_0 \rangle$ (c'est un nombre indépendant de φ qui ne dépend donc que de la distribution T donnée). CQFD

8. Transformation de Fourier des distributions.

Voyons maintenant l'autre opération classique sur les distributions, qui est la transformation de Fourier. C'est toujours l'intégrale avec poids qui sert de base pour l'analogie. Si p est le poids, supposé ici appartenir à $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \widehat{\varphi}(x) dx$$

ce qui conduit à définir la transformée de Fourier d'une distribution comme étant égale à

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \quad (8.1)$$

Pour que cette définition soit cohérente, il faut vérifier que $\varphi \mapsto \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue. Or ceci résulte du théorème 1 : $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est linéaire et continue relativement à la limite dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si donc la suite φ_n tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en sera de même de $\widehat{\varphi_n}$, et donc aussi de $\langle T, \widehat{\varphi_n} \rangle$, puisque T est supposée être une fonctionnelle linéaire continue.

La définition de la transformée de Fourier d'une distribution a évidemment été choisie telle que, lorsque T est une intégrale avec poids p , c'est-à-dire lorsque T s'identifie à une fonction p , on retrouve la transformée de Fourier usuelle.

Voyons quelques exemples.

Exemple 1. Transformée de Fourier de 1.

La constante 1 est une fonction au sens usuel, mais non intégrable de sorte que l'intégrale $\int e^{ix\xi} dx$ diverge⁽³⁾ ; par conséquent la transformation de Fourier ne peut être considérée au sens usuel. Mais la fonction $p(x) = 1$ définit bien un poids : la fonctionnelle

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$$

est continue puisque d'après l'inégalité de la moyenne

$$|\langle 1, \varphi \rangle| \leq \mathcal{N}_{0,2}(\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

⁽³⁾ Cette intégrale divergente a déjà été étudiée au chapitre **VII** : c'est l'intégrale I_α pour $\alpha = 0$.

Distributions (théorie)

D'après la définition 8.1

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x) dx$$

Or d'après la formule d'inversion, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \widehat{\varphi}(x) dx = 2\pi \varphi(t)$$

Il suffit donc de prendre $t = 0$ pour avoir

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = 2\pi \varphi(0),$$

ce qui prouve que

$$\widehat{1} = 2\pi \delta \quad (8.2)$$

Exemple 2. Transformée de Fourier d'un polynôme.

N'importe quel polynôme $P(x) = \sum_j a_j x^j$ est un poids possible, puisqu'on peut déduire de l'inégalité de la moyenne l'inégalité suivante :

$$|\langle P, \varphi \rangle| \leq \mathcal{N}_{0,k+2}(\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(x)|}{1+|x|^{k+2}} dx$$

où k est le degré du polynôme. D'après la définition 8.1

$$\langle \widehat{P}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \widehat{\varphi}(x) dx$$

On sait d'après le théorème 1 du chapitre **VI** que $x^j \widehat{\varphi}(x)$ est la transformée de Fourier de $i^j d^j \varphi / dx^j$. D'après la formule d'inversion, on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^j \widehat{\varphi}(x) dx = 2\pi i^j \frac{d^j \varphi}{dx^j}(0)$$

et donc pour le polynôme $P(x) = \sum_j a_j x^j$ on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \widehat{\varphi}(x) dx = 2\pi \sum_{j=0}^{j=k} a_j i^j \frac{d^j \varphi}{dx^j}(0)$$

Cela montre que

$$\widehat{P} = 2\pi \sum_{j=0}^{j=k} a_j i^j (-1)^j \frac{d^j \delta}{dx^j} = 2\pi P\left(-i \frac{d}{dx}\right) \delta \quad (8.3)$$

L'expression $P(-i \frac{d}{dx})$ est ce qu'on appelle un *opérateur différentiel*: on remplace formellement dans le polynôme $P(X)$ la variable X par $-i \frac{d}{dx}$.

On voit dans ces deux exemples que les opérations sur les distributions (ou, ici, sur les fonctions non intégrables) consistent à toujours se ramener aux opérations correspondantes sur les fonctions φ , pour lesquelles elles sont légitimes; l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a été spécialement fabriqué pour cela.

Exemple 3. Transformée de Fourier de δ et de ses dérivées

Soit $\delta^{(j)}$ la j^{e} dérivée de δ ; par définition on a $\langle \delta^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \varphi^{(j)}(0)$; par conséquent la transformée de Fourier sera définie par

$$\langle \widehat{\delta^{(j)}}, \varphi \rangle = (-1)^j [\widehat{\varphi}]^{(j)}(0)$$

Or la j^{e} dérivée de $\widehat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de $(ix)^j \varphi(x)$, de sorte que

$$\langle \widehat{\delta^{(j)}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^j \varphi(x) dx$$

qui est une intégrale avec poids $p(x) = (-ix)^j$. Autrement dit la transformée de Fourier de $\delta^{(j)}$ est, en tant que fonctionnelle, l'intégrale avec poids $(-ix)^j$, donc en identifiant :

$$\widehat{\delta^{(j)}} = (-ix)^j \quad (8.4)$$

Exemple 4. Transformée de Fourier de $1/[ix^\alpha]_2$

Pour $\alpha < 1$, cette transformée de Fourier est par définition la distribution T telle que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[i\xi^\alpha]_2} d\xi$$

On reconnaît que T est la distribution I_α introduite (pour $\alpha < 1$) à la section **3**, et sur laquelle on reviendra encore. Pour $\alpha \geq 1$ l'intégrale ci-dessus diverge en $\xi = 0$; Au chapitre **VII** nous avons traité ce cas en contournant la singularité dans le plan complexe, mais ci-dessus on ne peut faire cela car les fonctions φ ne sont pas forcément analytiques; la valeur de l'intégrale ne serait plus indépendante du chemin choisi. Mais en calculant l'intégrale selon cet artifice, on trouvait (pour $\alpha > 1$) $I_\alpha(x) = 2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, ce qui est un poids acceptable, même pour $\alpha > 0$. On va donc poser

$$\langle T, \varphi \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx & \text{si } \alpha > 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[i\xi^\alpha]_2} d\xi & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Distributions (théorie)

On vérifiera que les deux expressions sont compatibles quand $0 < \alpha < 1$ (utiliser le théorème 3 du chapitre VI avec un facteur régularisant).

Exemple 5. Transformée de Fourier de e^{ix^2} .

C'est la distribution T définie par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} \hat{\varphi}(x) dx$$

L'intégrale ci-dessus est la limite, lorsque z tend dans \mathbb{C} vers $-i$ en restant de partie réelle > 0 , de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx^2} \hat{\varphi}(x) dx$. Or, tant que $\Re z > 0$, la fonction e^{-zx^2} , contrairement à e^{ix^2} , est intégrable, et sa transformée de Fourier au sens usuel des fonctions est $\sqrt{\pi/z}^1 e^{-x^2/4z}$. Ici $\sqrt{\pi/z}^1$ désigne la détermination $N^{\circ}1$ de la racine carrée, analytique sur $\Omega_1 = \mathbb{C} -]-\infty, 0]$. Par conséquent, pour $\Re z > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx^2} \hat{\varphi}(x) dx = \sqrt{\pi/z}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4z} \varphi(x) dx$$

Dans l'intégrale de droite on peut aussi passer à la limite sous le signe \int (les conditions pour cela sont satisfaites), ce qui donne

$$\langle T, \varphi \rangle = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2/4} \varphi(x) dx \quad (8.5)$$

qui est une intégrale avec le poids

$$p(x) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} e^{-ix^2/4} \quad (8.6)$$

La distribution T est donc une distribution régulière.

Ainsi la transformée de Fourier au sens des distributions de la fonction non intégrable e^{ix^2} , est la fonction 8.6 (également non intégrable)

9. Limites de distributions.

Tout au long de ce cours, nous avons très fréquemment utilisé le passage à la limite pour obtenir des formules intégrales (voir notamment le chapitre IV, fonctions eulériennes). Ces passages à la limite sous le signe \int exigent que soient satisfaites des conditions bien précises, qu'il faut vérifier rigoureusement. Lorsqu'on interprète les distributions comme des extensions de la notion d'intégrale avec poids, le passage à la limite sur les φ (au sens défini par les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$) est automatique et fait partie de la définition même des distributions.

Mais que se passe-t-il si on veut passer à la limite sur les poids (pour un φ fixé)? Soit par exemple p_n une suite de poids. D'après les théorèmes

généraux classiques, si p_n converge uniformément sur tout intervalle borné vers une limite p , alors on aura

$$\mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi(x) dx$$

et cela pour *toute* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mais nous avons vu aussi en section **3** que les intégrales avec poids

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha, \varepsilon}(x) \varphi(x) dx \tag{9.1}$$

avaient pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (pour $\alpha < 1$), alors que les poids $I_{\alpha, \varepsilon}(x)$ eux-mêmes n'en avaient pas (cf chapitre **VII**). Nous avons défini la distribution I_α en disant que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle I_\alpha, \varphi \rangle$ était cette limite. Il serait donc naturel de dire que la distribution I_α est la limite, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, des distributions $I_{\alpha, \varepsilon}$.

C'est pourquoi on pose

Définition. On dit qu'une suite de distributions T_n a pour limite la distribution T si pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

De même, on dira que la famille de distributions T_ε , paramétrée par ε , tend vers la distribution T si pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Au contraire de la limite définie sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la limite ainsi définie est très peu contraignante: selon cette définition, les fonctions $I_{\alpha, \varepsilon}$ (pour $\alpha < 1$) ont une limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$! La limite selon les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$ était la plus contraignante de toutes celles que nous connaissons; à l'inverse, la limite selon la définition ci-dessus est la moins contraignante de toutes. C'est pourquoi on l'appelle la limite *faible*.

Remarques. Cette limite faible suffit pour tous les cas pratiques qu'on peut rencontrer. Mais cet avantage n'est pas une évidence. Dans la définition ci-dessus on a pris soin de préciser que la limite T est une distribution; c'est-à-dire que les T_n et aussi T sont supposées a priori être des fonctionnelles linéaires continues. Lorsque nous voudrions montrer que $T = \lim T_n$ nous devrions montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lim \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, mais aussi, indépendamment, que $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ est une fonctionnelle continue. C'est ce que nous avons fait pour I_α (voir section **3**).

Toutefois on peut démontrer⁽⁴⁾ que si une suite T_n de distributions est telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite numérique $\langle T_n, \varphi \rangle$ est convergente (dans \mathbb{R}), alors

⁽⁴⁾ L. Schwartz, *Théorie des distributions* Éd. Hermann, Paris, 1966, page 74.

Distributions (théorie)

la fonctionnelle $\varphi \mapsto \lim \langle T_n, \varphi \rangle$ est forcément continue. Cela résulte d'un théorème obtenu par le mathématicien polonais Stefan Banach (1892 – 1945)⁽⁵⁾, appelé théorème d'équicontinuité, qui s'applique ici parce que l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifie les conditions requises. S'attarder sur ces questions théoriques est évidemment sans intérêt pour une formation d'ingénieur, et cette subtilité n'est mentionnée ici que pour attirer l'attention sur le caractère non évident de la chose.

Dans les cas concrets qui se présenteront, il y aura toujours un moyen direct et simple (en général par l'inégalité de la moyenne) de montrer la continuité de la fonctionnelle limite, de sorte qu'on peut entièrement se passer du théorème de Banach. Mais ce dernier fournit malgré tout une garantie que les passages à la limite fonctionnent toujours sans problèmes; s'il n'en était pas ainsi, certains passages à la limite pourraient poser des problèmes compliqués, et les distributions n'auraient certainement pas le maniement simple qui explique leur succès.

Pour illustrer cela, revenons à nos exemples (qui, soit dit en passant, ont été choisis parce qu'ils sont les plus courants dans les applications.) En section 2 on a vu que les intégrales avec poids suivantes avaient une limite pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (mais la limite ne passe pas sous le signe \int) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} x e^{-x^2/2\sigma^2} \varphi(x) dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} x e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Appelons ρ_σ le poids de la première et ρ'_σ (dérivée du précédent) le poids de la deuxième, identifiés à la distribution correspondante. En utilisant le nouveau langage introduit, on peut dire que δ (distribution de Dirac) est la limite faible de ρ_σ quand $\sigma \rightarrow 0$; que δ' (dérivée de la distribution de Dirac) est la limite faible de ρ'_σ , et que la distribution I_α (la transformée de Fourier de $1/[ix^\alpha]_2$, pour $\alpha < 1$) est la limite faible de $I_{\alpha,\varepsilon}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les exemples de distributions de charges de la section 1 s'interprètent naturellement : les deux distributions qui représentaient le dipôle, la densité $\rho'_\sigma(x) = (1/\sqrt{2\pi} \sigma^3) x e^{-x^2/2\sigma^2}$ et la distribution discrète $\frac{1}{2\sigma} [\delta(x - \sigma) - \delta(x + \sigma)]$ sont toutes deux proches (lorsque σ est petit) de la distribution dipolaire δ' : elles sont “proches” au sens de la limite faible. C'est ce qui est écrit ci-dessus pour ρ'_σ . Pour la distribution discrète c'est facile à vérifier. Précisons d'abord les notations : $\delta_{\{a\}}$ désignera la charge unité placée au point $x = a$, de sorte que

$$\langle \delta_{\{a\}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\{a\}}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \varphi(x) dx = \varphi(a)$$

⁽⁵⁾ S. Banach *Théorie des opérations linéaires*, 1932.

$$\left\langle \frac{1}{2\sigma} [\delta_{\{\sigma\}} - \delta_{\{-\sigma\}}], \varphi \right\rangle = \frac{1}{2\sigma} [\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)]$$

Cela tend bien vers $\varphi'(0)$ lorsque $\sigma \rightarrow 0$, c'est-à-dire que la distribution $\frac{1}{2\sigma} [\delta_{\{\sigma\}} - \delta_{\{-\sigma\}}]$ tend faiblement vers $-\delta'$.

De la même façon, en reprenant l'exemple 5 de la section 7, on peut dire que la distribution régulière e^{ix^2} est la limite faible des distributions e^{-zx^2} lorsque z tend dans \mathbb{C} vers $-i$ en restant dans le demi-plan $\Re z > 0^{(6)}$.

Si une suite T_n (ou une famille T_ε) de distributions tend faiblement vers la limite T , alors la suite de leurs dérivées tendra vers la dérivée de T , et la suite de leurs transformées de Fourier tendra vers la transformée de Fourier de T . En effet, puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut écrire la chaîne logique

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle \\ \Downarrow \\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi' \rangle &= \langle T, \varphi' \rangle \\ \Updownarrow \\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T'_n, \varphi \rangle &= \langle T', \varphi \rangle \end{aligned}$$

et de même, puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \iff \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle \\ \Downarrow \\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \widehat{\varphi} \rangle &= \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \\ \Updownarrow \\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \widehat{T}_n, \varphi \rangle &= \langle \widehat{T}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, les théorèmes élémentaires de passage à la limite sous le signe \int (voir le chapitre 0 de ce cours) permettent de montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2} \varphi(x) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(i\xi)^\alpha]_2} \varphi(x) d\xi$$

c'est-à-dire que la limite faible des poids $e^{-\varepsilon|\xi|}/[(i\xi)^\alpha]_2$ est le poids $1/[(i\xi)^\alpha]_2$.

On peut alors déduire de ce qui précède que pour $\alpha < 1$, la limite des distributions $I_{\alpha,\varepsilon}$ est la distribution I_α , mais cela n'est plus possible par

⁽⁶⁾ Cette condition est nécessaire: si $\Re z < 0$, la densité e^{-zx^2} n'est plus à croissance polynômiale et ne peut pas être un poids, ni même une distribution.

Distributions (théorie)

les voies élémentaires et nécessite la théorie qui a été développée dans ce chapitre.

C'est donc la théorie des distributions qui donne un sens rigoureux à l'intégrale divergente I_α du chapitre **VII**. On peut écrire des formules telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} dx = 2\pi \delta(\xi)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi = I_\alpha(x)$$

Cependant il ne faudra pas oublier que $\delta(\xi)$ ou $I_\alpha(x)$, malgré la notation abusive, ne sont pas soumises aux règles de calcul sur les fonctions, mais aux règles de calcul sur les distributions.

Remarque finale. La famille des distributions I_α a des propriétés remarquables que nous étudierons encore dans les chapitres suivants. Pour $\alpha = -n$ (entier ≤ 0), le poids $1/[(i\xi)^\alpha]_2$ devient $(i\xi)^n$ (pour α entier, la fonction cesse d'être multiforme). Or on a vu que la transformée de Fourier de ce poids est la distribution $2\pi \delta^{(n)}$ (la n^e dérivée de $2\pi \delta$). Par conséquent :

$$I_{-n} = 2\pi \delta^{(n)} \quad (9.2)$$

D'autre part, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\alpha \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(i\xi)^\alpha]_2} \varphi(x) d\xi$$

est une fonction analytique dans tout le plan complexe (sans point singulier ni coupure) ; cela se montre en appliquant à l'intégrale ci-dessus un théorème élémentaire. Or cette intégrale (si on y remplace φ par $\widehat{\varphi}$) n'est autre que $\langle I_\alpha, \varphi \rangle$. Ce qui signifie que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\alpha \longmapsto \langle I_\alpha, \varphi \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx & \text{si } \Re \alpha > 0 ; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[i\xi^\alpha]_2} d\xi & \text{si } \Re \alpha < 1. \end{cases}$$

est analytique dans tout le plan complexe. Cela aura, comme nous le verrons, l'avantage que toute égalité vérifiée par la famille I_α sur un ensemble non discret de valeurs de α (par exemple l'intervalle $]0, 1[$) se prolongera analytiquement à toutes les valeurs de α .

La famille de distributions I_α intervient dans beaucoup de problèmes (équations différentielles, traitement du signal). Elle permet de définir une dérivation d'ordre non entier : en effet, puisque I_{-n} est la n^{e} dérivée de δ , on peut dire que, même lorsque r n'est pas entier, I_{-r} est la r^{e} dérivée de δ . La *convolution* (opération qui fait l'objet du chapitre suivant), permet alors de “dériver” une fonction ou une distribution quelconque à l'ordre r . Mais indépendamment de cela, les distributions les plus courantes sont des membres de cette famille : δ et ses dérivées, ainsi que les pseudofonctions de Hadamard, en sont des cas particuliers.