

IX. CALCULER AVEC LES DISTRIBUTIONS.

1. Dérivées de fonctions non dérivables.

Toutes les fonctions ne sont pas dérivables. Mais d'après la définition **VIII.7.2** toutes les distributions ont une dérivée. Or nous avons vu qu'une fonction quelconque à croissance polynômiale (pouvant donc être un poids dans une intégrale avec une fonction à décroissance rapide) s'identifiait à une distribution : on identifie le poids p qui est une fonction, à la fonctionnelle T_p qui est l'intégrale avec poids. Si le poids p est une fonction dérivable, quel rapport y a-t-il entre p' (la dérivée de p au sens usuel) et la dérivée de la distribution T_p ?

Pour le voir il suffit de calculer. Par la définition **VIII.7.2**,

$$\langle T'_p, \varphi \rangle = -\langle T_p, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi'(x) dx \quad (1.1)$$

Cette intégrale peut être intégrée par parties, ce qui donne

$$-p(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x) \varphi(x) dx \quad (1.2)$$

La partie intégrée est nulle car la fonction $p(x) \varphi(x)$ est nulle à l'infini (p est à croissance polynômiale et φ à décroissance rapide). Il reste

$$\langle T'_p, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x) \varphi(x) dx = \langle T_{p'}, \varphi \rangle \quad (1.3)$$

On obtient donc un résultat qui montre la compatibilité entre la dérivation au sens des distributions et la dérivation usuelle lorsque cette dernière est possible.

On a déjà vu des exemples de ce qui se passe pour des fonctions non dérivables : en **VIII.7.5**, on a obtenu la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside, qui est δ . Et en **VIII.7.6**, la dérivée au sens des distributions de la fonction $|x|$, qui est le poids égal à la constante -1 pour $x < 0$ et à la constante $+1$ pour $x > 0$. Au point $x = 0$, ce poids n'a pas besoin d'être défini, car la fonctionnelle correspondante (l'intégrale) n'est pas affectée par ce qui se passe en un seul point ; en général, on ne change pas la valeur d'une intégrale si on change la valeur que prend la fonction en un nombre fini (ou même dénombrable) de points. Un poids n'a donc

pas à être défini partout, mais seulement presque partout⁽¹⁾. Entre ces deux exemples, il y a une différence qualitative : la fonction de Heaviside comme la fonction $|x|$ sont toutes deux des fonctions au sens usuel, mais si on les dérive au sens des distributions, on obtient dans le premier cas une distribution singulière, et dans le second une distribution régulière. Cela provient de la discontinuité : la première est discontinue, la seconde continue.

On peut généraliser ces exemples comme suit.

Théorème 1. *Soit $p(x)$ une fonction poids dérivable par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de points $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que p soit dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, a_0[,]a_0, a_1[,]a_1, a_2[,]a_2, a_3[, \dots,]a_{n-2}, a_{n-1}[,]a_{n-1}, a_n[,]a_n, +\infty[$, mais pas aux points a_0, a_1, \dots, a_n . On suppose aussi que la fonction a en chacun de ces points une limite à gauche et une limite à droite finies, mais non nécessairement égales, de sorte qu'il y a un saut de discontinuité s_i au point a_i . Alors la dérivée au sens des distributions de cette fonction $p(x)$ est*

$$T'_p = T_{p'} + \sum_i s_i \delta_{\{a_i\}} \quad (1.4)$$

où p' est la dérivée de p au sens usuel (définie en dehors des points a_i) et $\delta_{\{a_i\}}$ le pic de Dirac au point a_i : $\langle \delta_{\{a_i\}}, \varphi \rangle = \varphi(a_i)$

Démonstration. Par la définition VIII.7.2 on a

$$\langle T'_p, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{a_0} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_n}^{+\infty} \quad (1.5)$$

Intégrons par parties chacune des intégrales de la somme ci-dessus.

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{a_0} p(x) \varphi'(x) dx &= -p(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{a_0} + \int_{-\infty}^{a_0} p'(x) \varphi(x) dx \\ - \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(x) \varphi'(x) dx &= -p(x) \varphi(x) \Big|_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} p'(x) \varphi(x) dx \\ - \int_{a_n}^{+\infty} p(x) \varphi'(x) dx &= -p(x) \varphi(x) \Big|_{a_n}^{+\infty} + \int_{a_n}^{+\infty} p'(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

En sommant tout, on obtient

$$\begin{aligned} &\text{— pour la somme des intégrales, } \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x) \varphi(x) dx ; \\ &\text{— pour la somme des parties intégrées : } -p^-(a_0) \varphi(a_0) + p^+(a_0) \varphi(a_0) - \\ &\quad p^-(a_1) \varphi(a_1) + p^+(a_1) \varphi(a_1) - p^-(a_2) \varphi(a_2) + p^+(a_2) \varphi(a_2) - \dots + \dots - \end{aligned}$$

⁽¹⁾ La théorie de l'intégrale de Lebesgue donne un sens précis à cette expression. Voir chapitre I de ce cours, pages 19 à 21.

Calculer avec les distributions

$p^-(a_n)\varphi(a_n) + p^+(a_n)\varphi(a_n)$, les termes $p(\pm\infty)\varphi(\pm\infty)$ étant nuls. Conformément aux hypothèses, $p^+(a_i)$ n'est pas forcément égal à $p^-(a_i)$, mais φ est continue. En regroupant les termes deux par deux, on obtient bien la somme des $[p^+(a_i) - p^-(a_i)]\varphi(a_i) = s_i\varphi(a_i)$. CQFD

Il existe des fonctions qui sont si irrégulières qu'on ne peut découper leur domaine en intervalles sur chacun desquels elle est dérivable. Par exemple il existe des fonctions qui ne sont dérivables en aucun point. D'ailleurs, il n'est même pas correct de dire qu'il en existe, car les fonctions qui ne sont dérivables en aucun point sont infiniment plus nombreuses que les fonctions dérivables par morceaux, et on les rencontre bien plus souvent dans la nature. On est habitué en mathématique à utiliser des fonctions construites avec les opérations arithmétiques, ce qui donne généralement des fonctions analytiques. On finit alors par croire que ces fonctions sont la règle, alors qu'elles sont l'exception. La trajectoire d'un grain soumis au mouvement brownien ou un bruit blanc donnent une idée des fonctions qui ne sont nulle part dérivables. C'est pourquoi il ne serait pas sans intérêt de calculer les dérivées au sens des distributions de telles fonctions. Certaines applications reposent même sur de tels calculs (géométrie fractale, analyse du bruit). Mais cela demanderait un chapitre à part entière.

Bien entendu on obtiendrait pour les dérivées de telles fonctions des distributions *vraiment singulières*, alors que le théorème **1** ci-dessus et le théorème **2** ci-après prédisent que si on se limite aux fonctions “normales”, on ne rencontrera rien d'autre en les dérivant que des combinaisons des trois sortes de distributions suivantes : 1. les distributions régulières (ou fonctions usuelles) ; 2. les pics de Dirac ; 3. les pseudofonctions.

La formule 1.4 donne la dérivée d'une fonction n'ayant que des discontinuités dites de première espèce, c'est-à-dire lorsque les limites à gauche et à droite de la discontinuité existent et sont finies. On va maintenant étudier les distributions qu'on obtient en dérivant une fonction ayant une discontinuité de seconde espèce (mais intégrable, car il doit s'agir d'un poids). Pour simplifier l'énoncé on considèrera le cas d'une seule discontinuité, contrairement à ce qui a été fait au théorème **1** ; le passage au cas plus général où il y aurait n discontinuités de seconde espèce, ou un mélange de discontinuités de première et de seconde espèce, est alors une complication purement technique.

Théorème 2. Soit $p(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$, et ayant en $x = 0$ une discontinuité de seconde espèce, mais intégrable ; c'est-à-dire que l'une au moins des deux limites à droite ou à gauche est infinie, mais de sorte que l'intégrale $\int |p(x)| dx$ converge en $x = 0$. Alors la distribution T'_p

est définie par

$$\langle T'_p, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ [p(+\varepsilon) - p(-\varepsilon)] \varphi(0) + \int_{|x| > \varepsilon} p'(x) \varphi(x) dx \right\} \quad (1.6)$$

Remarques. La limite dans 1.6 existe toujours; pourtant la fonction $p'(x)$ n'est pas forcément intégrable en $x = 0$; par exemple $1/\sqrt{x}$ est intégrable en $x = 0$, mais sa dérivée $-1/x^{3/2}$ ne l'est pas. Si p' n'est pas intégrable l'intégrale dans 1.6 tendra vers l'infini, et le terme $p(+\varepsilon) - p(-\varepsilon)$ aussi, les deux infinis se compensant. Le mathématicien J. Hadamard appelait la limite 1.6 la *partie finie* de l'intégrale $\int p'(x) \varphi(x) dx$, qui, elle diverge (cf **VII. 3.**).

La démonstration du théorème est une simple intégration par parties.

L'exemple type pour illustrer le théorème **2** est la fonction

$$I_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

pour $0 < \alpha < 1$. Cette fonction est en effet intégrable en $x = 0$ et y a une discontinuité de seconde espèce (N.B. pour $\alpha = 1$ la discontinuité est de première espèce et pour $\alpha > 1$ la fonction est continue).

Laissant de côté le facteur de normalisation $1/\Gamma(\alpha)$, nous devons dériver *au sens des distributions* le poids

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x^{\alpha-1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

pour $0 < \alpha < 1$. Par définition de la dérivée (d'une distribution), la dérivée de p est la distribution définie par

$$\langle T, \varphi \rangle = - \int_0^\infty p(x) \varphi'(x) dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty p(x) \varphi'(x) dx$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ p(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty p'(x) \varphi(x) dx \right\}$$

Il est facile de voir que le terme $p(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$ est équivalent, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, à

$$p(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) \sim p(\varepsilon) \varphi(0) \sim \frac{p(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \varphi(x) dx$$

ce qui montre que si on introduit le poids

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ p(\varepsilon)/\varepsilon & \text{si } 0 < x < \varepsilon; \\ p'(x) & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

on peut écrire

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} q_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \right\}$$

ce qui — étant valable $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ — signifie que la distribution T que nous cherchons est la limite faible des fonctions q_ε lorsque ε tend vers zéro. (voir figure 1).

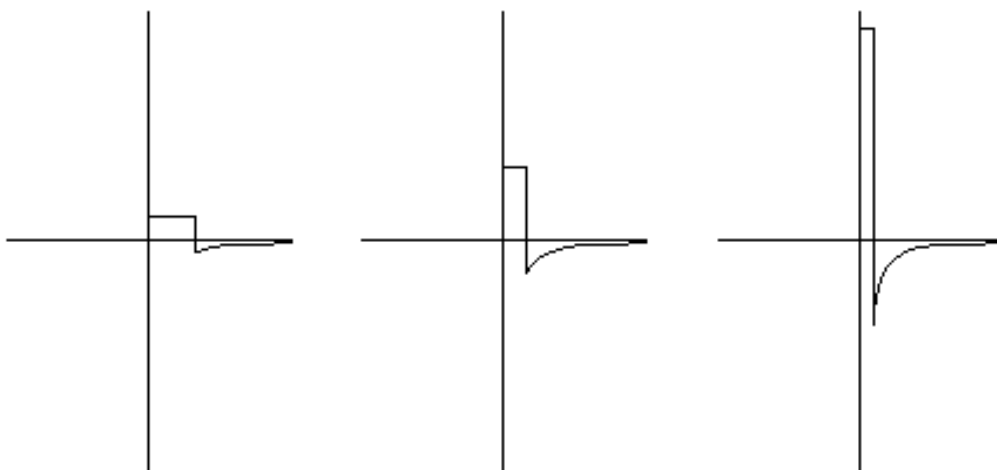


figure 1

Suite de fonctions qui tendent faiblement vers la distribution $I_{-1/2}$

Le calcul ci-dessus a été effectué pour un poids $p(x)$ qui, dans le cadre de l'exemple, était supposé être $x^{\alpha-1}$ (pour $x > 0$, et 0 pour $x < 0$). Mais le calcul est le même pour n'importe quel poids du même type. On voit que, si $p(\varepsilon)$ tend vers l'infini lorsque ε tend vers zéro, $p(\varepsilon)/\varepsilon$ tendra encore plus vite vers l'infini; par contre la dérivée $p'(x)$, forcément négative puisque $p(x)$, partant de $+\infty$, ne peut que décroître, tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. C'est bien ce qu'on peut voir sur la figure 1. Il faut donc se représenter la distribution T comme la limite (faible) des fonctions du type q_ε . Ceci est évidemment à rapprocher des distributions I_α , qui sont obtenues comme limite des fonctions $I_{\alpha,\varepsilon}$: pour $p(x) = x^{\alpha-1}$ ($0 < \alpha < 1$), on a $T = \Gamma(\alpha) \cdot I_\alpha$.

Un autre exemple illustrant le théorème 2 est la distribution de poids $\ln(|x|)$ (figure 2). La fonction $\ln(|x|)$ a bien une singularité intégrable en

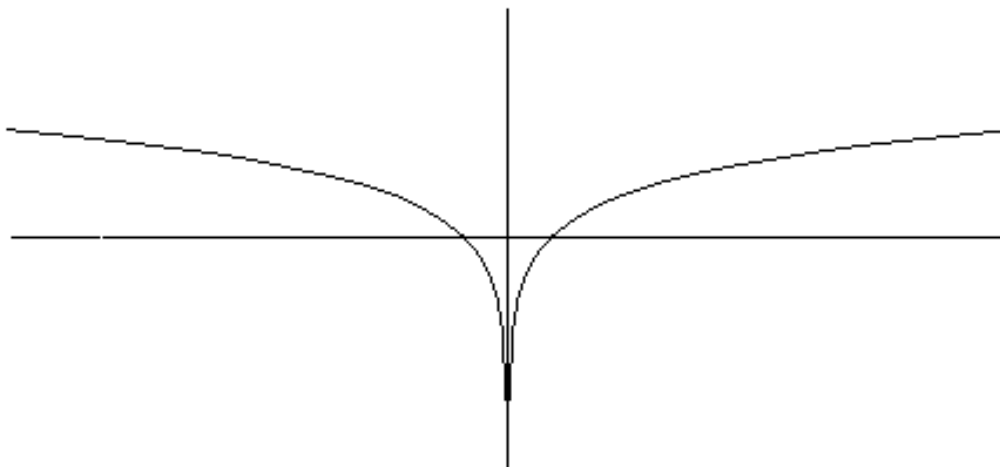


figure 2

Fonction poids $p(x) = \ln(|x|)$.

$x = 0$; elle diffère de l'exemple I_α surtout par le fait qu'elle tend vers l'infini des deux côtés, alors que I_α ne tendait vers l'infini que du côté $x > 0$. Si on applique le théorème 2, on constate que dans 1.6, le terme $[p(+\varepsilon) - p(-\varepsilon)]\varphi(0)$ est nul, puisque $p(x) = \ln(|x|)$ est une fonction paire. La dérivée de cette fonction au sens des distributions est une distribution classique qu'on rencontre dans des applications, et qu'il faut connaître; on l'appelle *valeur principale* de $\frac{1}{x}$ et on note $V.P(\frac{1}{x})$. D'après le théorème 2 :

$$\langle V.P(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right\} \quad (1.7)$$

Dans 1.6, le terme $[p(+\varepsilon) - p(-\varepsilon)]\varphi(0)$ doit compenser l'infini de l'intégrale; ici, sa disparition est liée au fait que la fonction $\frac{1}{x}$, qui tend vers $-\infty$ pour $x < 0$ et vers $+\infty$ pour $x > 0$, compense déjà deux infinis opposés: les deux intégrales de 1.7 divergent toutes les deux, mais avec des signes opposés. La fonction $\frac{1}{x}$ n'est donc pas un poids, car la singularité n'est pas intégrable. C'est pour souligner cette particularité qu'on note $V.P(\frac{1}{x})$ et non $\frac{1}{x}$. Cette notation sert à rappeler aux distraits que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \quad (1.8)$$

n'est pas une intégrale au sens usuel, et qu'on ne peut pas lui appliquer par exemple l'inégalité de la moyenne ou les théorèmes généraux de passage à la limite sous le signe \int : il faut remplacer ces derniers par de nouveaux théorèmes de passage à la limite, prévus pour les distributions, et qui sont essentiellement les suivants :

Calculer avec les distributions

- on peut passer à la limite sous le signe $\langle T, \varphi_n \rangle$ selon φ_n , si φ_n tend vers une limite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (donc au sens défini par les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$);
- on peut passer à la limite sous le signe $\langle T_n, \varphi \rangle$ selon T_n , si T_n tend *faiblement* vers une distribution T .

Il est donc absurde, pour passer à la limite sur φ dans l'intégrale 1.8, d'invoquer la convergence uniforme comme s'il s'agissait d'une intégrale au sens usuel.

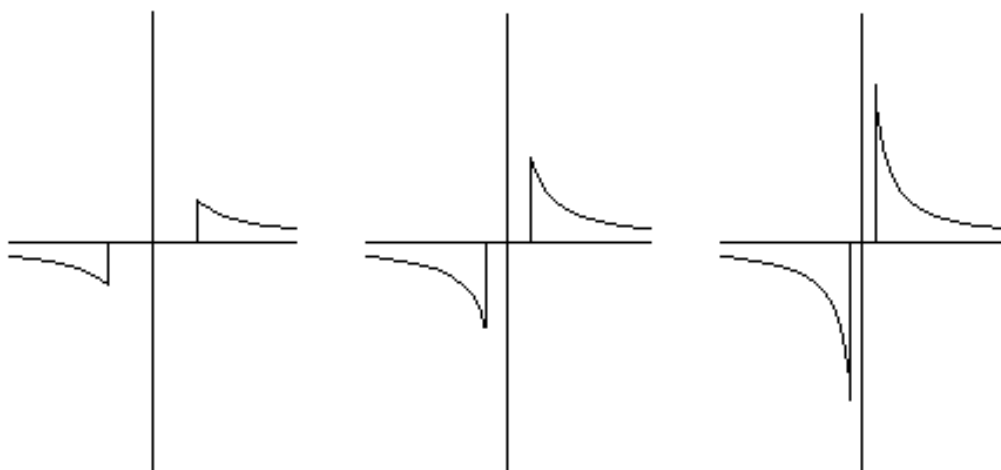


figure 3

Suite de fonctions qui tendent faiblement vers la distribution $V.P(\frac{1}{x})$.

Comme toujours, on peut interpréter 1.7 en disant que la distribution $V.P(\frac{1}{x})$ est la limite faible, quand ε tend vers zéro, des poids

$$p_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| \geq \varepsilon; \\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Les graphiques de ces poids sont donnés dans la figure 3.

Une dernière remarque : lorsqu'on définit une distribution, il faut toujours vérifier avec soin qu'il s'agit bien d'une fonctionnelle linéaire *continue*. En principe, cela demande de jongler un peu avec les semi-normes, comme nous avons vu au chapitre **VIII**. En jonglant justement avec ces semi-normes, on se rendra aisément compte que :

- une intégrale avec poids est une distribution si le poids est localement intégrable (i.e. si toutes ses singularités sont intégrables) et si à l'infini il croît polynômialement.

En effet, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi(x) dx$$

ne peut être convergente pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que si la fonction p est dépourvue de singularités qui la rendraient divergente, et si la décroissance rapide de $\varphi(x)$ compense la croissance de $p(x)$. Pour que la fonctionnelle linéaire soit continue, il faudra aussi pouvoir appliquer l'inégalité de la moyenne comme ceci :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|p(x)|}{1 + |x|^m} dx \times \mathcal{N}_{0,m}(\varphi)$$

et il faudra donc pouvoir choisir un m tel que le premier facteur soit fini.

— la dérivée d'une distribution est toujours une distribution (en effet, si T est une distribution et que $\mathcal{S}\text{-lim } \varphi_n = 0$, alors $\mathcal{S}\text{-lim } \varphi'_n = 0$, donc $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ tend vers zéro) ;

— la transformée de Fourier d'une distribution est toujours une distribution (même argument : si T est une distribution et que $\mathcal{S}\text{-lim } \varphi_n = 0$, alors $\mathcal{S}\text{-lim } \widehat{\varphi}_n = 0$, donc $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ tend vers zéro).

Par conséquent toute fonctionnelle qui se déduit d'une intégrale avec poids par dérivation ou transformation de Fourier sera forcément une distribution. De même, toute fonctionnelle qui se déduit par dérivation ou transformation de Fourier d'une distribution déjà connue comme telle, sera forcément aussi une distribution. La vérification directe, "à la main", par des inégalités de semi-normes, ne sera donc nécessaire que dans les cas où on ne peut pas se ramener aux cas précédents ; cela pourra malheureusement arriver parfois, pour des distributions définies comme produit ou comme convolution (voir section suivante), car il n'existe pas, pour ces opérations, de critère aussi simple que pour la dérivation ou la transformation de Fourier.

Ainsi il n'est pas nécessaire de vérifier directement que $V.P(\frac{1}{x})$ est bien une fonctionnelle continue, puisqu'elle est la dérivée du poids $\ln(|x|)$.

Calculons encore la dérivée de la distribution $V.P(\frac{1}{x})$. Par définition, ce sera la distribution T telle que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \varphi \rangle = -\langle V.P(\frac{1}{x}), \varphi' \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi'(x) dx - \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi'(x) dx \right\}.$$

En intégrant par parties les deux intégrales ci-dessus, on obtient

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(-\varepsilon) + \varphi(+\varepsilon)] - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \varphi(x) dx - \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \varphi(x) dx \right\}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, le terme $[\varphi(-\varepsilon) + \varphi(+\varepsilon)]/\varepsilon$ a la même limite que $2\varphi(0)/\varepsilon$, ou encore que

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(x) dx.$$

En fin de compte on voit que

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$$

où f_{ε} est la fonction définie par

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} -1/x^2 & \text{si } x < -\varepsilon; \\ 1/\varepsilon^2 & \text{si } 0 < |x| < \varepsilon; \\ -1/x^2 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Ainsi, la distribution que nous cherchons est la limite faible des fonctions f_{ε} (figure 4).

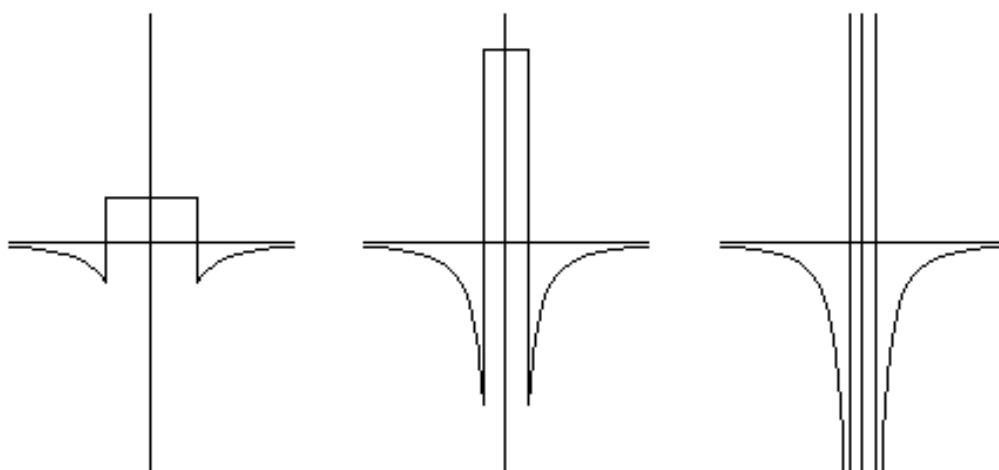


figure 4

Suite de fonctions qui tendent faiblement vers la distribution $\frac{d}{dx} V.P(\frac{1}{x})$.

Dans la théorie des distributions, on montre que *toute* distribution est limite faible de fonctions (Schwartz, *Théorie des distributions* page 75; voir aussi page 166, et aussi plus loin dans ce cours le théorème 7). Le meilleur moyen de représenter graphiquement une distribution est donc de dessiner le graphe d'une fonction proche (au sens de la limite faible) de cette distribution.

2. Multiplication et Convolution des distributions.

Les distributions étant une extension des fonctions, les opérations usuelles sur les fonctions doivent s'étendre aux distributions. On a déjà vu cela pour la dérivation et la transformation de Fourier. Toutefois, la dérivation et la transformation de Fourier sont possibles pour n'importe

quelle distribution car l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a été construit spécialement pour cela. Les deux nouvelles opérations que nous allons examiner maintenant ne sont pas toujours possibles.

La multiplication de deux fonctions f et g est simplement la fonction fg dont la valeur en x est le produit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, fg(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (2.1)$$

Cette opération a toujours un sens puisqu'elle se ramène au produit de deux nombres (aussi bien lorsque f et g prennent leurs valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C}). Mais les distributions singulières ne sont pas sensées avoir une valeur numérique pour tout x , donc on ne peut pas utiliser 2.1. La théorie des distributions étant essentiellement construite par analogie à partir des intégrales avec poids, il faut regarder à quoi correspond le produit de deux poids. Or l'intégrale de poids $p(x)q(x)$ peut s'écrire de trois façons :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)q(x)] \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) [q(x) \varphi(x)] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) [p(x) \varphi(x)] dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ces trois écritures sont équivalentes à cause de l'associativité du produit. En écriture fonctionnelle, ces trois formes de l'intégrale deviennent :

$$\langle T_{pq}, \varphi \rangle = \langle T_p, q\varphi \rangle = \langle T_q, p\varphi \rangle \quad (2.3)$$

Pour que dans l'une ou l'autre des deux dernières variantes, T_p ou T_q puisse être considérée comme une fonctionnelle opérant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il faut que (respectivement) $q\varphi$ ou $p\varphi$ soit dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Or si p est infiniment dérivable et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow p\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De même pour q . Par analogie on est donc conduit à poser :

Définition. Si T est une distribution et p une fonction infiniment dérivable et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, le produit pT est la fonctionnelle

$$\varphi \mapsto \langle pT, \varphi \rangle = \langle T, p\varphi \rangle \quad (2.4)$$

Il faut comme toujours vérifier la cohérence de cette définition en s'assurant que si T est continue, alors pT est continue (la linéarité ne pose évidemment aucun problème). Or si p est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, on aura

$$\frac{d^j[p\varphi]}{dx^j} = \sum_{\ell=0}^{\ell=j} \binom{j}{\ell} \frac{d^{j-\ell}p}{dx^{j-\ell}} \frac{d^\ell\varphi}{dx^\ell} \quad (2.5)$$

Calculer avec les distributions

et chacun des facteurs $\frac{d^{j-\ell}p}{dx^{j-\ell}}$ sera majoré par une expression du type $M_{j,\ell}(1 + |x|^{n_{j\ell}})$; de sorte que

$$\mathcal{N}_{j,k}(p\varphi) \leq \sum_{\ell=0}^{\ell=j} \binom{j}{\ell} M_{j,\ell} \mathcal{N}_{\ell,n_{j\ell}}$$

ce qui prouve bien la continuité.

La définition 2.4 du produit pT est donnée sous une condition assez restrictive : p est supposé être une fonction infiniment dérivable et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées. Nous venons de voir que cette condition est suffisante pour garantir, en vertu de l'argument simple ci-dessus, que si T est une fonctionnelle continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en sera automatiquement de même de pT . Toutefois cette condition suffisante n'est de loin pas toujours nécessaire ; certaines distributions particulières peuvent être multipliées par des fonctions plus générales, par exemple des fonctions non infiniment dérivables. En voici quelques exemples.

— la distribution δ peut être multipliée par n'importe quelle fonction continue en $x = 0$: si $f(x)$ est une fonction aussi irrégulière qu'on voudra, qui peut même être discontinue en tout point autre que $x = 0$, le produit $f \cdot \delta$ a un sens, c'est la fonctionnelle $\langle f\delta, \varphi \rangle = f(0)\varphi(0)$. Par contre si f est discontinue en $x = 0$, on ne peut donner un sens cohérent au produit $f \cdot \delta$, même si f est aussi régulière qu'on voudra en dehors de $x = 0$. Par exemple, si $H(x)$ est la fonction de Heaviside, on ne peut pas faire des calculs sensés avec le produit $H \cdot \delta$.

— si T est l'intégrale de poids p_0 , on peut la multiplier par n'importe quelle fonction p localement intégrable et à croissance polynômiale, même partout discontinue, car dans ce cas le produit $p \cdot p_0$ est le produit usuel des fonctions, et si p et p_0 sont tous deux à croissance polynômiale, il en sera de même de leur produit.

Une des faiblesses classiques de la théorie des distributions est l'inexistence d'une multiplication qui serait possible sous des conditions à la fois simples et générales. Beaucoup de mathématiciens ont tenté de définir un produit de deux distributions arbitraires, mais aucun n'y est parvenu sans imposer des bases théoriques d'une complexité exorbitante. Il faut donc retenir que le produit est une affaire qui doit se régler dans chaque cas particulier, lorsque c'est possible. La définition 2.4 ci-dessus peut servir de modèle, mais il ne faudra jamais hésiter à sortir de son cadre (nous le ferons à l'occasion). Dans les applications, il arrive en effet assez souvent que la condition invoquée pour 2.4 ne soit pas vérifiée, mais que le cas particulier considéré permette néanmoins la multiplication.

Une autre opération très courante et soumise aux mêmes aléas est la convolution. On appelle produit de convolution de deux fonctions f et g la

nouvelle fonction $h = f * g$ définie par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \quad (2.6)$$

les deux intégrales ci-dessus sont convergentes si f et g sont toutes deux dans l'espace $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$; leur égalité signifie que $f * g = g * f$, autrement dit que la convolution est une opération commutative entre éléments de l'espace $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. La fonction $h = f * g$ est alors elle aussi dans l'espace $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. En effet, d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à 2.6, on aura pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|h(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| |g(y)| dy$$

et donc en intégrant cela par rapport à la variable x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| |g(y)| dy dx \quad (2.7 a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x')| |g(y)| dy dx' \quad (2.7 b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x')| dx' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \quad (2.7 c)$$

Le passage de 2.7 a à 2.7 b résulte du changement de variable $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ et le passage de 2.7 b à 2.7 c de la factorisation de l'intégrale. En notation plus condensée:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad (2.8)$$

La convolution a beaucoup d'applications en traitement du signal (filtrage). Une propriété essentielle, relative à la transformation de Fourier, est la suivante:

Théorème 3. Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ on a

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (2.9)$$

Autrement dit: la transformée de Fourier de la convolution est le produit des transformées de Fourier.

Remarques. L'égalité 2.9 est vraie pour la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$. Si on utilise d'autres versions de la transformation de Fourier (voir **VI.6.2**, **VI.6.3**, et **VI.6.5**) il faudra modifier 2.9 par un coefficient multiplicatif. Pour la transformation **VI.6.2**:

$$\mathcal{F}_1 f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx$$

on aura

$$\mathcal{F}_1(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_1(f) \cdot \mathcal{F}_1(g) \quad (2.9 a)$$

Calculer avec les distributions

Pour VI.6.3 :

$$\Phi_1 f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx$$

on aura

$$\Phi_1(f * g) = \Phi_1(f) \cdot \Phi_1(g) \quad (2.9 b)$$

et enfin pour VI.6.3 (qui est la transformation de Fourier de la Mécanique quantique) :

$$\mathcal{F}_h f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{i}{h} x \xi} dx$$

on aura

$$\mathcal{F}_h(f * g) = \sqrt{2\pi h} \mathcal{F}_h(f) \cdot \mathcal{F}_h(g) \quad (2.9 c)$$

Si on utilise une autre variante, il faudra faire les modifications convenables ; par exemple pour la transformation $f \mapsto \widetilde{f}$ (inverse de $f \mapsto \widehat{f}$), on aura

$$\widetilde{f * g} = 2\pi \widetilde{f} \cdot \widetilde{g} \quad (2.9 d)$$

Démonstration du théorème 3. Étant donné que $f * g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de $f * g$ est tout simplement l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f * g(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f(x-y) g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x'+y)\xi} f(x') g(y) dx' dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix'\xi} f(x') dx' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) dy \end{aligned}$$

CQFD

Il s'agit maintenant d'étendre la convolution aux distributions. On procède toujours par analogie à partir des intégrales avec poids. Si p et q sont deux fonctions de $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale de poids $p * q$ est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x-y) q(y) dy \right] \varphi(x) dx \quad (2.10 a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) q(y) \varphi(x+y) dx dy \quad (2.10 b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x-y) \varphi(x) dx \right] q(y) dy \quad (2.10 c)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} q(y-x) \varphi(y) dy \right] dx \quad (2.10 d)$$

On a fait dans l'intégrale double 2.10 b les changements de variable $(x, y) \mapsto (x-y, y)$ pour obtenir 2.10 c, et $(x, y) \mapsto (x, y-x)$ pour obtenir 2.10 d. Dans les notations fonctionnelles, cela se résume comme suit :

$$\langle p * q, \varphi \rangle = \langle q, \check{p} * \varphi \rangle = \langle p, \check{q} * \varphi \rangle \quad (2.11)$$

où on a introduit la notation \check{p}, \check{q} qui représente la fonction $\check{p}(x) = p(-x)$. D'autre part, puisque $\widehat{p * q} = \widehat{p} \cdot \widehat{q}$, on peut aussi écrire :

$$\langle p * q, \varphi \rangle = \langle \widehat{p} \cdot \widehat{q}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \widehat{p}, \widehat{q} \cdot \tilde{\varphi} \rangle = \langle \widehat{q}, \widehat{p} \cdot \tilde{\varphi} \rangle \quad (2.12)$$

en supposant qu'on puisse donner un sens largi à $\langle \widehat{q}, \widehat{p} \cdot \tilde{\varphi} \rangle$, ce qui ramène la convolution au produit. On va donc étendre la convolution aux distributions par la définition suivante :

Définition. *Étant données deux distributions S et T , la convolution $S * T$ est l'une quelconque des fonctionnelles suivantes :*

— *si la transformée de Fourier (au sens des distributions) de S est une fonction $p(x)$ infiniment dérivable à croissance polynômiale :*

$$\varphi \longmapsto \langle \widehat{T}, p \cdot \tilde{\varphi} \rangle \quad (2.13);$$

— *si S est une fonction $p(x)$ localement intégrable⁽²⁾ à croissance polynômiale (c'est-à-dire si en tant que fonctionnelle S est l'intégrale de poids p) :*

$$\varphi \longmapsto \langle T, \check{p} * \varphi \rangle \quad (2.14).$$

Pour que cette définition soit cohérente, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites :

- a) l'expression 2.13 ou 2.14 doit avoir une valeur finie pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
- b) cette même expression doit tendre vers zéro lorsque φ tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ces conditions ne sont pas forcément satisfaites : cela dépendra des distributions S et T ; comme pour le produit, on ne peut pas donner une définition qui satisfasse automatiquement ces conditions, tout en couvrant l'ensemble des cas intéressants. On peut certes donner de la convolution de deux distributions une définition plus générale que celle ci-dessus ; cela exigerait encore un supplément de théorie. La définition ci-dessus couvre à peu près les cas qu'on rencontre en pratique, mais il faudra vérifier cas par cas si les conditions a) et b) ci-dessus sont bien satisfaites.

Il est d'ailleurs logique que les difficultés soient les mêmes pour les produits et pour les convolutions, puisque la transformation de Fourier transforme l'un en l'autre. Il reste donc la charge de prouver la légitimité de l'opération dans chaque cas particulier.

⁽²⁾ Une fonction localement intégrable est pour nous une fonction continue par morceaux, qui peut devenir infinie en certains points singuliers, mais qui est alors intégrable en ces points.

Calculer avec les distributions

Dans 2.14 on a défini la fonctionnelle $\langle p * T, \varphi \rangle$ comme étant égale à $\langle T, \check{p} * \varphi \rangle$. Cela peut paraître à première vue contraire à la nature des distributions, qui veut qu'en tant que fonctionnelles, elles opèrent sur les fonctions infiniment dérivables; mais en réalité, la fonction $\check{p} * \varphi$ est bien infiniment dérivable, car :

Théorème 4. *Dans la convolution de deux fonctions, si l'une, p , est localement intégrable et à croissance polynômiale, mais non nécessairement dérivable, et l'autre, φ , dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors leur convolution sera aussi infiniment dérivable (mais pas forcément à décroissance rapide), et on aura :*

$$(p * \varphi)' = p * \varphi' \quad (2.15)$$

Démonstration. Pour s'assurer que $p * \varphi$ est bien infiniment dérivable, il suffit de remarquer que les théorèmes généraux de dérivation sous le signe \int s'appliquent à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) \varphi(x-y) dy .$$

L'hypothèse que p est à croissance polynômiale et φ à décroissance rapide garantit les conditions pour que ces théorèmes généraux s'appliquent. Si on dérive sous le signe \int , seules les dérivées de φ interviennent, puisque $p(y)$ ne dépend pas de x .

Pour voir que $p * \varphi$ n'est pas forcément à décroissance rapide, on examine le contre-exemple $H * \varphi$, où H est la fonction de Heaviside :

$$H * \varphi(x) = \int_0^{\infty} \varphi(x-y) dy = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz$$

Il est clair que si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) dz$ n'est pas nulle, $H * \varphi(x)$ ne tend pas vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$. CQFD

Pour calculer avec la convolution des distributions, il faut connaître la propriété importante suivante :

Théorème 5. *Étant données trois distributions R, S, T , si les convolutions $S * T, R * S, R * (S * T), (R * S) * T$ sont définies, on a nécessairement $R * (S * T) = (R * S) * T$ (associativité). On note donc $R * S * T$. On a aussi pour les dérivées $(R * S)' = R' * S = R * S', (R * S * T)' = R' * S * T = R * S' * T = R * S * T',$ etc.*

Démonstration. Vérifications élémentaires mais fastidieuses à partir de 2.13 et 2.14.

3. Exemples et applications des produits et convolutions.

A Convolution par les distributions de Dirac.

La transformée de Fourier de δ est la constante 1. En effet, d'après la définition **VIII.8.1**, on doit avoir

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (3.1)$$

On reconnaît bien l'intégrale de poids 1.

La distribution $\varphi \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ est le “pic” de Dirac placé en $x = 0$; le “pic” de Dirac placé en un point quelconque $x = a$ est, en tant que fonctionnelle, $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. La transformée de Fourier est alors

$$\langle \widehat{\delta_a}, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} \varphi(x) dx. \quad (3.2)$$

C'est l'intégrale de poids e^{iax} .

On constate que ces fonctions, 1 et e^{iax} , sont infiniment dérivables et à croissance polynômiale. On peut donc appliquer la définition 2.13, ce qui donne pour une distribution arbitraire T : $\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, 1 \cdot \widetilde{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle$. D'où le résultat :

$$\delta * T = T \quad (3.3)$$

Remarque. D'après les conditions de validité de la convolution discutées en section 2, il faut vérifier dans chaque cas particulier que le résultat obtenu est bien une fonctionnelle continue; mais ici, c'est évident.

Voyons le cas de δ_a . D'après 2.13, T étant une distribution arbitraire: $\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, e^{iax} \cdot \widetilde{\varphi} \rangle = \langle T, \psi_a \rangle$, où la fonction ψ_a est la transformée de Fourier de $e^{iax} \cdot \widetilde{\varphi}$, c'est-à-dire :

$$\psi_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{ixa} \widetilde{\varphi}(x) dx = \varphi(\xi + a)$$

Si T était un poids $p(x)$, alors $\langle T, \psi_a \rangle$ serait l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \psi_a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x - a) \varphi(x) dx$$

c'est-à-dire que la convolution par δ_a équivaut à une translation. C'est pourquoi la distribution $\delta_a * T$ est aussi appelée la translatée de T .

Calculer avec les distributions

Pour vérifier que la fonctionnelle $\varphi \mapsto \langle T, \psi_a \rangle$ est continue, on observera d'abord que $\forall j \ D^j \psi_a(x) = D^j \varphi(x+a)$ (D désigne la dérivation), et par conséquent $\mathcal{N}_{j,k}(\psi_a) = \sup_x \{(1+|x|^k) D^j \varphi(x+a)\} = \sup_x \{(1+|x-a|^k) D^j \varphi(x)\}$. D'autre part

$$|x-a|^k = \left| \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-a)^{k-\ell} x^\ell \right| \leq \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} |x|^\ell$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} (1+|x|^\ell) &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} |x|^\ell \\ &= (|a|+1)^k + \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} |x|^\ell \\ &\geq 1 + \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} |x|^\ell \end{aligned}$$

d'où

$$1 + |x-a|^k \leq \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} (1+|x|^\ell).$$

Par conséquent

$$\mathcal{N}_{j,k}(\psi_a) \leq \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} |a|^{k-\ell} \mathcal{N}_{j,\ell}(\varphi)$$

Cette dernière inégalité montre que si φ tend vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en sera de même pour ψ_a . CQFD

On a déjà vu que la convolution est commutative et associative; la distribution δ est donc un élément neutre pour cette opération. Cet élément neutre n'est pas dans l'espace $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, sur lequel la convolution était cependant partout définie.

B Convolution par les dérivées de δ .

La transformée de Fourier de $\delta^{(j)}$ (j^e dérivée de δ) est la fonction $(-i\xi)^j$. Celle-ci est infiniment dérivable et à croissance polynômiale; on se réfère donc à 2.13:

$$\langle \delta^{(j)} * T, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, (-i\xi)^j \cdot \widetilde{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, (-1)^j \frac{\widetilde{d^j \varphi}}{dx^j} \rangle = \langle T, (-1)^j \frac{d^j \varphi}{dx^j} \rangle$$

Autrement dit, la convolution par $\delta^{(j)}$ équivaut à la dérivation:

$$\delta^{(j)} * T = \frac{d^j T}{dx^j} \tag{3.4}$$

On ne trouvera rien de vraiment nouveau dans la convolution par les $\delta_a^{(j)}$; ce serait simplement la composition de la dérivation et de la translation.

La vérification que le résultat de la convolution est bien une fonctionnelle continue est dans ce cas évidente : on sait déjà que les dérivées d'une distribution sont des distributions.

C Régularisation.

Théorème 6. *La convolution d'une distribution T par une fonction infiniment dérivable ϕ , lorsqu'elle est possible, est une fonction infiniment dérivable (c'est-à-dire : s'identifie en tant que fonctionnelle à une intégrale avec un poids infiniment dérivable).*

Démonstration. Par la définition 2.14 on a $\langle \check{\phi} * T, \varphi \rangle = \langle T, \phi * \varphi \rangle$. Prenons $\varphi(x) = \rho_{n,a}(x) = \sqrt{n/\pi} \exp\{-n(x-a)^2\}$; Lorsque n tend vers l'infini, $\rho_{n,a}$ tend vers δ_a selon la limite faible, donc $\langle \check{\phi} * T, \rho_{n,a} \rangle = \langle T, \phi * \rho_{n,a} \rangle$ va tendre vers $\langle T, \phi_a \rangle$, où ϕ_a est la fonction translatée $\phi_a(x) = \phi(x+a)$. Il est facile de voir que la fonction $F : a \mapsto \langle T, \phi_a \rangle$ est dérivable : puisque T est une fonctionnelle *linéaire*, on a $[F(a+h) - F(a)]/h = \langle T, [\phi_{a+h} - \phi_a]/h \rangle$. Or $\mathcal{S}\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} [\phi_{a+h} - \phi_a]/h = \phi'_a$, où $\phi'_a(x) = \phi'(x+a)$. Comme en outre T est aussi une fonctionnelle *continue*, on peut passer à la limite quand h tend vers zéro, ce qui montre que $[F(a+h) - F(a)]/h$ a bien une limite, qui est $\langle T, \phi'_a \rangle$. Comme la fonction ϕ est infiniment dérivable, on peut recommencer indéfiniment la procédure, ce qui prouve que la fonction $F : a \mapsto \langle T, \phi_a \rangle$ est infiniment dérivable.

On remarquera que cette démonstration utilise d'une manière essentielle la continuité de la fonctionnelle : il faut pouvoir passer à la limite sous le signe $\langle \ , \ \rangle$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Il reste à vérifier que $\langle \check{\phi} * T, \varphi \rangle$ est identique à l'intégrale de poids F . L'idée est la même que pour la dérivée : on joue sur la nature de l'intégrale, qui est une limite de sommes finies (les sommes de Riemann). On fait passer la somme finie sous le signe $\langle \ , \ \rangle$ grâce à la linéarité, puis on passe des sommes finies à leur limite (l'intégrale) grâce à la continuité. Le détail est long et fastidieux, car il faut vérifier que l'intégrale est la limite des sommes finies dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais l'idée est simple (Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, page 166). On voit ici encore à quel point la continuité est essentielle.

Nous avons déjà vu que les poids $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ formaient une suite qui converge faiblement vers la distribution δ (cf. chap. **VIII**, 2.1 – 2.3 – 2.4). On s'attend donc à ce que pour n'importe quelle distribution T , la suite $\rho_n * T$ converge faiblement vers T . C'est bien le cas :

Théorème 7. *Si T est une distribution quelconque, les convolutions $\rho_n * T$ forment une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge faiblement vers T . Par conséquent, toute distribution est la limite (faible) d'une suite de fonctions infiniment dérivables.*

On peut donc approcher les distributions par des fonctions très régulières. On appelle ce procédé la *régularisation* de la distribution. Nous avons vu par exemple que les distributions I_α étaient les limites des poids $I_{\alpha,\varepsilon}$. Le théorème 7 nous dit que n'importe quelle distribution est toujours une limite faible de “vraies” fonctions. C'est bien ce que nous avons constaté empiriquement sur les exemples déjà étudiés. Imaginer les distributions

comme des fonctions extrêmement irrégulières est donc une représentation correcte. La régularisation est un procédé essentiel en traitement du signal (filtre passe bas). Elle généralise aussi la méthode du *facteur régularisant* introduite au chapitre **VII** pour les intégrales divergentes. Ici nous avons choisi le filtre gaussien pour effectuer les calculs, mais rien n'imposait ce choix.

Démonstration du théorème 7. Dire que $\chi_n = \rho_n * T$ converge faiblement vers T signifie par définition que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \chi_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

Mais on a aussi, par définition de la convolution (2.14) :

$$\langle \chi_n, \varphi \rangle = \langle \rho_n * T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_n * \varphi \rangle ;$$

on notera que $\check{\rho}_n = \rho_n$, puisque ρ_n est une fonction paire. Comme T est une distribution, elle est continue en tant que fonctionnelle, donc il suffit de vérifier que $\rho_n * \varphi$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ . En résumé : il s'agit de montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite numérique $n \mapsto \langle \rho_n * T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_n * \varphi \rangle$ tend vers $\langle T, \varphi \rangle$. Le fait que $\langle \rho_n * T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_n * \varphi \rangle$ a pour conséquence qu'il est exactement équivalent de dire que $\rho_n * T$ tend faiblement vers T ou que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $\rho_n * \varphi$ tend dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ .

La transformation de Fourier étant un opérateur continu et bijectif sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il est encore équivalent de montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $\widehat{\rho_n} \cdot \varphi$ tend dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ . C'est sous cette dernière forme que la démonstration sera techniquement la plus aisée. Notons que $\widehat{\rho_n}(x) = e^{-x^2/4n}$. En posant $\varepsilon = 1/4n$, on doit donc montrer que les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}(\varphi - e^{-\varepsilon x^2} \varphi)$ tendent toutes vers zéro lorsque ε tend vers zéro. Il va donc falloir majorer les expressions de la forme $(1 + |x|^k) D^j [(1 - e^{-\varepsilon x^2}) \varphi(x)]$, où D^j désigne la dérivation d'ordre j .

Or, en utilisant la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit, on peut écrire :

$$D^j [(1 - e^{-\varepsilon x^2}) \varphi(x)] = (1 - e^{-\varepsilon x^2}) D^j \varphi(x) - \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} D^{j-\ell} e^{-\varepsilon x^2} \cdot D^\ell \varphi(x) \quad (\text{dem.1})$$

Il faut donc commencer par majorer les expressions $D^{j-\ell} e^{-\varepsilon x^2}$. Pour cela, on remarque d'abord qu'en posant $X = \sqrt{\varepsilon} x$, on a

$$\frac{d}{dx} = \sqrt{\varepsilon} \frac{d}{dX} \quad (\text{dem.2})$$

donc on est ramené à majorer les dérivées $\frac{d}{dX} e^{-X^2}$. Comme e^{-X^2} est une fonction analytique dans tout le plan complexe, on peut utiliser les inégalités de Cauchy (chapitre **II**, corollaire **6a**) :

$$\frac{d^n}{dX^n} e^{-X^2} = \frac{n!}{r^n} M_r \quad (\text{dem.3})$$

où M_r désigne le maximum de la fonction $z \mapsto |e^{-z^2}| = e^{-\Re(z^2)}$ sur le cercle $|z - X| = r$. Un calcul élémentaire montre que $M_r \leq e^{r^2 - X^2/2}$, de sorte que si on choisit $r = 1$:

$$\frac{d^n}{dX^n} e^{-X^2} \leq n! e^{-X^2/2} \quad (\text{dem.4})$$

J. Harthong : cours d'analyse

Le choix $r = 1$ est loin de donner la majoration la plus serrée, mais c'est celui qui donne l'expression la plus simple. Par conséquent on aura :

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\varepsilon x^2} \leq n! e \cdot \varepsilon^{n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2} \quad (\text{dem.5})$$

En reportant cela dans dem.1, compte tenu de dem.2 et de l'inégalité dite du triangle, on obtient

$$\begin{aligned} \left| D^j [(1 - e^{-\varepsilon x^2}) \varphi(x)] \right| &\leq (1 - e^{-\varepsilon x^2}) |D^j \varphi(x)| + \\ &+ \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} (j-\ell)! e \varepsilon^{(j-\ell)/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2} \cdot |D^\ell \varphi(x)| \end{aligned} \quad (\text{dem.6})$$

Pour avoir toutes les semi-normes, il faut encore multiplier cela par les facteurs $1 + |x|^k$, ce qui donne

$$\begin{aligned} (1 + |x|^k) \left| D^j [(1 - e^{-\varepsilon x^2}) \varphi(x)] \right| &\leq (1 - e^{-\varepsilon x^2}) (1 + |x|^k) |D^j \varphi(x)| + \\ &+ \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} (j-\ell)! e \varepsilon^{(j-\ell)/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2} \cdot (1 + |x|^k) |D^\ell \varphi(x)| \end{aligned} \quad (\text{dem.7})$$

Dans le premier terme à droite ci-dessus, on a le produit $(1 - e^{-\varepsilon x^2}) (1 + |x|^k)$; il faut utiliser le fait que $1 - e^{-\varepsilon x^2}$ tend vers zéro quand ε tend vers zéro, mais de manière à retrouver la convergence au sens des semi-normes. Pour cela, on remarque que pour tout x , $1 - e^{-\varepsilon x^2} \leq \varepsilon x^2$; d'où

$$(1 - e^{-\varepsilon x^2}) (1 + |x|^k) \leq \varepsilon (x^2 + |x|^{k+2}) \leq \varepsilon [(1 + x^2) + (1 + |x|^{k+2})] \quad (\text{dem.8})$$

Dans les termes sous \sum de dem.7, on a aussi le facteur $e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2}$, qui est toujours ≤ 1 de sorte que dem.7 se majore comme suit :

$$(1 + |x|^k) \left| D^j [(1 - e^{-\varepsilon x^2}) \varphi(x)] \right| \leq \varepsilon (1 + |x|^2) |D^j \varphi(x)| + \quad (\text{dem.9})$$

$$\begin{aligned} &+ \varepsilon (1 + |x|^{k+2}) |D^j \varphi(x)| + \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} (j-\ell)! e \varepsilon^{(j-\ell)/2} \cdot (1 + |x|^k) |D^\ell \varphi(x)| \leq \\ &\leq \varepsilon \mathcal{N}_{j,2}(\varphi) + \varepsilon \mathcal{N}_{j,k+2}(\varphi) + \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} (j-\ell)! e \varepsilon^{(j-\ell)/2} \cdot \mathcal{N}_{\ell,k}(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{dem.10})$$

Sur cette dernière inégalité, on voit clairement ce qui se passe : à droite on a une somme de j termes, dont chacun contient un facteur ε^α , la plus petite valeur prise par α étant $\frac{1}{2}$. Les coefficients de ε^α sont formés de factorielles qui ne dépendent que des indices j, k, ℓ , et de semi-normes $\mathcal{N}_{j,2}(\varphi)$, $\mathcal{N}_{j,k+2}(\varphi)$, $\mathcal{N}_{\ell,k}(\varphi)$ qui sont toutes finies et indépendantes de ε . Donc le tout tend bien vers zéro, et cela quels que soient les indices j, k choisis.

CQFD

D Résolution d'équations différentielles.

Cette application est la plus importante ; sa mise en œuvre utilise tout ce qui a été vu jusqu'ici, y compris les considérations théoriques (notamment

la limite faible). On peut, même si on ne maîtrise pas la théorie, suivre les calculs présentés par un auteur, en lui faisant confiance pour ce qui est de leur validité. Mais lorsqu'on est livré à soi-même, une connaissance correcte de la théorie est malheureusement nécessaire. Ici nous étudierons un exemple en dimension un, puisque nous avons fait toute la théorie des distributions dans ce cadre. Cet exemple peut aussi être résolu sans les distributions, par des méthodes élémentaires, justement parce qu'il est de dimension un. C'est pourquoi la méthode des distributions ne devient vraiment puissante qu'en plusieurs dimensions (équations aux dérivées partielles). Toutefois la résolution par les distributions d'un problème à une dimension donnera une idée de ce qu'on peut faire en dimension supérieure.

Soit par exemple l'équation

$$u''(x) + k^2 u(x) = 1 + x^2 \quad (3.5)$$

Cette équation est à coefficients constants, donc on est tenté de la résoudre par la méthode de Fourier (cf. **VI. 1**). L'ennui est que toutes les intégrales de Fourier qu'on va rencontrer seront divergentes. C'est pourquoi on va faire appel à la transformation de Fourier *au sens des distributions*. On cherche donc une distribution $T = \hat{u}$, telle que :

$$-\xi^2 \cdot T + k^2 T = 2\pi (\delta - \delta'') \quad (3.6)$$

Le terme $-\xi^2 \cdot T$ est le produit de T par une fonction infiniment dérivable et à croissance polynômiale (cf. 2.4). Il provient de la transformation de Fourier appliquée à $u'' = \delta'' * u$. La transformée de Fourier de la convolution étant le produit des transformées, on obtient en effet $\widehat{u''} = \widehat{\delta''} * \widehat{u} = \widehat{\delta''} \cdot \widehat{u} = -\xi^2 \cdot T$. Le second membre de 3.5 se transforme comme suit : $\widehat{1} = 2\pi \delta$ et $\widehat{x^2} = -2\pi \delta''$. C'est ainsi qu'on obtient 3.6.

Pour résoudre 3.6, il suffit de diviser par $k^2 - \xi^2$:

$$T = \frac{2\pi (\delta - \delta'')}{-\xi^2 + k^2} \quad (3.7)$$

On obtient alors la fonction u en prenant la transformée de Fourier inverse de ce résultat. Comme ce résultat est le produit de $2\pi (\delta - \delta'')$ (la transformée de Fourier du second membre de 3.5) et de la fonction $g(\xi) = 1/(k^2 - \xi^2)$, on voit qu'il suffit de trouver la transformée de Fourier inverse de g au sens des distributions.

L'intégrale de Fourier au sens usuel

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{k^2 - \xi^2} d\xi$$

est divergente en $\xi = \pm k$. Mais cela n'exclut pas que la fonction g puisse avoir une transformée au sens des distributions. Si c'est le cas, celle-ci devra être la limite (faible) des transformées de Fourier des fonctions régularisées

$$g_z(\xi) = -\frac{1}{z^2 + \xi^2} \quad (3.8)$$

où le dénominateur ne s'annule plus car on prend pour z un nombre complexe de partie réelle > 0 . Il est facile de vérifier que lorsque z tend vers ik , g_z tend faiblement vers $g_{ik} = g$ (théorèmes généraux de passage à la limite sous le signe \int). Donc la transformée de Fourier de g_{ik} sera la limite (faible) des transformées de Fourier des g_z lorsque $z \rightarrow ik$ ($\Re z > 0$). Mais on connaît déjà la transformée de Fourier inverse de g_z pour z réel > 0 : c'est la fonction $G_z(x) = -e^{-z|x|}/2z$. Par prolongement analytique (car tant que $\Re z > 0$ l'intégrale de Fourier dépend analytiquement de z en vertu des théorèmes généraux), ceci reste vrai dans tout le demi-plan $\Re z > 0$. Puis par continuité cela reste encore vrai en passant à la limite faible $z \rightarrow ik$, de sorte que

$$G_{ik}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{2ik} \quad (3.9)$$

On appelle cette fonction *la fonction de Green* de l'équation 3.5. On voit comment la théorie des distributions permet un calcul rigoureux, alors que par la méthode de Fourier classique, toutes les intégrales seraient divergentes.

On obtient donc la solution de 3.5 sous la forme

$$u(x) = G_{ik} * (1 + x^2) = -\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik|x-y|} [1 + y^2] dy \quad (3.10)$$

On remarquera que la fonction de Green G_{ik} donne la solution par convolution avec le second membre, quel que soit ce second membre (pourvu évidemment que cette convolution soit bien définie). Ainsi l'équation $u'' + k^2 u = f$ aura pour solution $u = G_{ik} * f$. On remarquera que c'est aussi le résultat qu'on aurait obtenu par la méthode élémentaire de variation des constantes. C'est pour cette dernière raison que la méthode décrite ci-dessus est surtout intéressante en dimension supérieure (car alors elle n'a pas de rivale).

4. La famille Y_α

La famille de distributions Y_α est à des détails près la famille déjà rencontrée sous le nom I_α . Il s'agit des distributions définies comme suit

pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle Y_\alpha, \varphi \rangle = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx & \text{si } \Re \alpha > 0; \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[(+i\xi)^\alpha]_2} dx & \text{si } \Re \alpha < 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Cette définition comporte deux cas: si $\Re \alpha > 0$, on voit que Y_α est simplement le poids nul pour $x < 0$ et égal à $x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ pour $x > 0$. Si $\Re \alpha < 1$, on reconnaît que Y_α est la transformée de Fourier inverse du poids $1/[(+i\xi)^\alpha]_2$. Dans les deux cas, le poids considéré satisfait bien aux conditions requises pour définir une distribution (c'est-à-dire que l'intégrale correspondante soit une fonctionnelle continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$): la fonction est localement intégrable et à croissance polynômiale. La fonctionnelle est donc bien définie dans les deux cas.

Lorsque $0 < \Re \alpha < 1$, les deux cas se recouvrent. Il faut donc vérifier que les deux définitions donnent le même résultat, c'est-à-dire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[(+i\xi)^\alpha]_2} dx \quad (4.2)$$

On ne peut malheureusement pas faire la vérification directe par le calcul intégral ordinaire, en utilisant par exemple le théorème 3 du chapitre **VI**, car les fonctions $x^{\alpha-1}$ et $1/[(+i\xi)^\alpha]_2$ ne sont pas dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ (pour $0 < \Re \alpha < 1$, elles sont toutes deux intégrables en $x = 0$ ou $\xi = 0$, mais pas à l'infini). On va donc utiliser le biais suivant: pour $\varepsilon > 0$, on a l'intégrale eulérienne de seconde espèce:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\varepsilon-i\xi)x} dx = \frac{1}{[(\varepsilon-i\xi)^\alpha]_2} \quad (4.3)$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on ne peut pas prendre la limite sous le signe \int dans 4.3; mais 4.3 signifie néanmoins que $1/[(\varepsilon-i\xi)^\alpha]_2$ est la transformée de Fourier de la fonction égale à 0 pour $x < 0$ et à $x^{\alpha-1} e^{-\varepsilon x}/\Gamma(\alpha)$ pour $x > 0$, qui, elle, est dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$; d'après le théorème 3 du chapitre **VI**, on peut donc écrire, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\varepsilon x}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{[(\varepsilon-i\xi)^\alpha]_2} d\xi.$$

Mais d'autre part, $\widetilde{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi)/2\pi$; en substituant et en effectuant le

changement de variable $\xi \mapsto -\xi$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\varepsilon x}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[(\varepsilon + i\xi)^\alpha]_2} d\xi. \quad (4.4)$$

Cette fois (grâce à la présence du facteur φ ou $\widehat{\varphi}$), on peut passer à la limite sous le signe \int lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui donne 4.2 et prouve ainsi la cohérence de la définition 4.1.

Les théorèmes généraux garantissent aussi que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x) dx$$

est analytique dans tout le demi-plan $\Re \alpha > 0$, et que l'autre intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[(+i\xi)^\alpha]_2} d\xi$$

est analytique dans tout le demi-plan $\Re \alpha < 1$. Cela prouve donc que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\alpha \longmapsto \langle Y_\alpha, \varphi \rangle$$

est analytique dans \mathbb{C} tout entier.

La famille Y_α étant maintenant bien définie, on peut énoncer ses principales propriétés :

Théorème 8. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a la relation $Y'_\alpha = Y_{\alpha-1}$; pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}$; et enfin, pour n entier ≥ 0 , $Y_{-n} = \delta^{(n)}$.*

On notera que la première relation se déduit des deux autres. La seconde relation signifie que la famille Y_α est un groupe pour la convolution. La troisième relation montre que la convolution d'une distribution ou d'une fonction par Y_α peut être interprétée comme une dérivée d'ordre non entier. Il est facile de voir que Y_α est égale à $\frac{1}{2\pi} I_\alpha$, où I_α est la distribution déjà introduite. La famille Y_α renferme donc les distributions singulières les plus courantes : δ et ses dérivées, ainsi que les pseudofonctions puissance.

Démonstration du théorème 8. Puisque $\alpha \mapsto \langle Y_\alpha, \varphi \rangle$ est, comme nous avons vu plus haut, analytique, il suffit de vérifier la relation $Y'_\alpha = Y_{\alpha-1}$ pour des valeurs de α d'un domaine non discret. On peut donc choisir un domaine où la vérification est particulièrement aisée, par exemple $\alpha \in]1, +\infty[$. Dans ce cas Y_α s'identifie au poids égal à zéro pour $x < 0$ et à $x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ pour $x > 0$, ce qui est dérivable par morceaux et continu (plus précisément, dérivable partout sauf au point $x = 0$, où la discontinuité

est nulle). Dans ce cas on a vu que la dérivée de la distribution s'identifie à la dérivée usuelle, d'où le résultat ; [on rappelle que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$].

Sachant que la transformée de Fourier d'une convolution donne un produit, la relation $Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}$ semble évidente si on remarque qu'après transformation de Fourier elle devient $[(+i\xi)^{-\alpha}]_2 \cdot [(+i\xi)^{-\beta}]_2 = [(+i\xi)^{-\alpha-\beta}]_2$. Toutefois cette dernière égalité n'est évidente que pour $\Re\alpha$ et $\Re\beta$ négatifs, car dans le cas contraire les facteurs du produit ne sont pas de véritables fonctions, ce sont des pseudofonctions ; l'égalité est bien sûr vraie, mais n'est pas justifiée par la simple évidence, il faut des arguments supplémentaires ; mais de tels arguments sont faciles à trouver : supposons que $\Re\alpha$ et $\Re\beta$ ne soient pas tous deux négatifs. Dans ce cas, on peut toujours trouver des entiers m et n tels que $\alpha - m$ et $\alpha - n$ soient tous deux de partie réelle négative ; de sorte que $Y_{\alpha-m} * Y_{\beta-n} = Y_{\alpha+\beta-m-n}$. Or d'après la première relation, cela équivaut à $Y_\alpha^{(m)} * Y_\beta^{(n)} = Y_{\alpha+\beta}^{(m+n)}$. D'après les propriétés de la convolution, cela signifie que la $(m+n)^e$ dérivée de $Y_\alpha * Y_\beta$ est égale à la $(m+n)^e$ dérivée de $Y_{\alpha+\beta}$, donc que $Y_\alpha * Y_\beta$ diffère de $Y_{\alpha+\beta}$ par un polynôme. Mais ce polynôme est forcément nul puisque les distributions Y_α sont nulles sur $] -\infty, 0[$.

La troisième relation est facile à prouver : la transformée de Fourier de Y_α est $[(+i\xi)^{-\alpha}]_2$; pour $\alpha = -n$ cette fonction cesse d'être multivoque et se réduit à $(+i\xi)^n$, dont on sait que c'est la transformée de Fourier de $\delta^{(n)}$ (la n^e dérivée de δ). CQFD

Nous savons déjà que, pour $\alpha < 1$, la distribution Y_α est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\xi \mapsto 1/[(+i\xi)^\alpha]_2$, puisque cela résulte directement de sa définition 4.1. Cette fonction est localement intégrable (la question se pose en $\xi = 0$) et à croissance polynômiale et définit bien un poids. Mais il n'en est plus de même pour $\alpha \leq 1$ (ou plus généralement $\Re\alpha \leq 1$) ; dans ce cas, la fonction $\xi \mapsto 1/[(+i\xi)^\alpha]_2$ n'est plus intégrable en $\xi = 0$ et par conséquent ne peut plus être un poids dans une intégrale (c'est pourquoi la définition 4.1 distingue deux cas). Nous avons vu au chapitre **VII** qu'on régularise l'intégrale divergente correspondante en la réinterprétant comme intégrale le long d'un chemin contournant la singularité. Cette réinterprétation doit, pour être cohérente avec tout le reste, redonner la distribution Y_α (pour $\alpha > 1$ cette fois) ; c'est bien le cas si on compare le résultat du calcul avec la définition 4.1. La régularisation par contournement doit donc aussi pouvoir s'interpréter par la théorie des distributions. C'est ce que nous allons voir maintenant. Il s'agit donc de voir de plus près de quelle nature est la fonctionnelle associée à la fonction $1/[(+i\xi)^\alpha]_2$ lorsque celle-ci n'est pas un poids, c'est-à-dire lorsque $\alpha > 1$.

Lorsque $\alpha > 0$, la distribution Y_α est régulière, de poids $p(x)$, égal à 0

pour $x < 0$ et à $x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ pour $x > 0$. Ce poids est localement intégrable et à croissance polynômiale, mais n'est pas dans l'espace $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Donc sa transformée de Fourier n'est pas définie au sens usuel, et n'est donc pas non plus une vraie fonction. En tant que fonctionnelle, par contre, sa transformée de Fourier est définie par

$$\langle \widehat{Y_\alpha}, \varphi \rangle = \langle Y_\alpha, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1} \widehat{\varphi} dx \quad (4.5)$$

Comme toujours, le meilleur moyen de se représenter visuellement cette distribution est de l'approcher (au sens de la limite faible) par des fonctions. Pour y parvenir, on remarque que les poids

$$p_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x^{\alpha-1} e^{-\varepsilon x} / \Gamma(\alpha) & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

tendent faiblement (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) vers Y_α ; en effet, cela signifie simplement que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut passer à la limite sous le signe \int dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\varepsilon x} \widehat{\varphi}(x) dx$$

ce qui, grâce à la présence du facteur $\widehat{\varphi}(x)$, est garanti par les théorèmes généraux.

Donc, d'après la théorie, les transformées de Fourier des p_ε vont aussi tendre (faiblement) vers $\widehat{Y_\alpha}$; or les p_ε , eux, sont des fonctions de $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, et on peut calculer leurs transformées par le calcul intégral usuel. Ce qui donne :

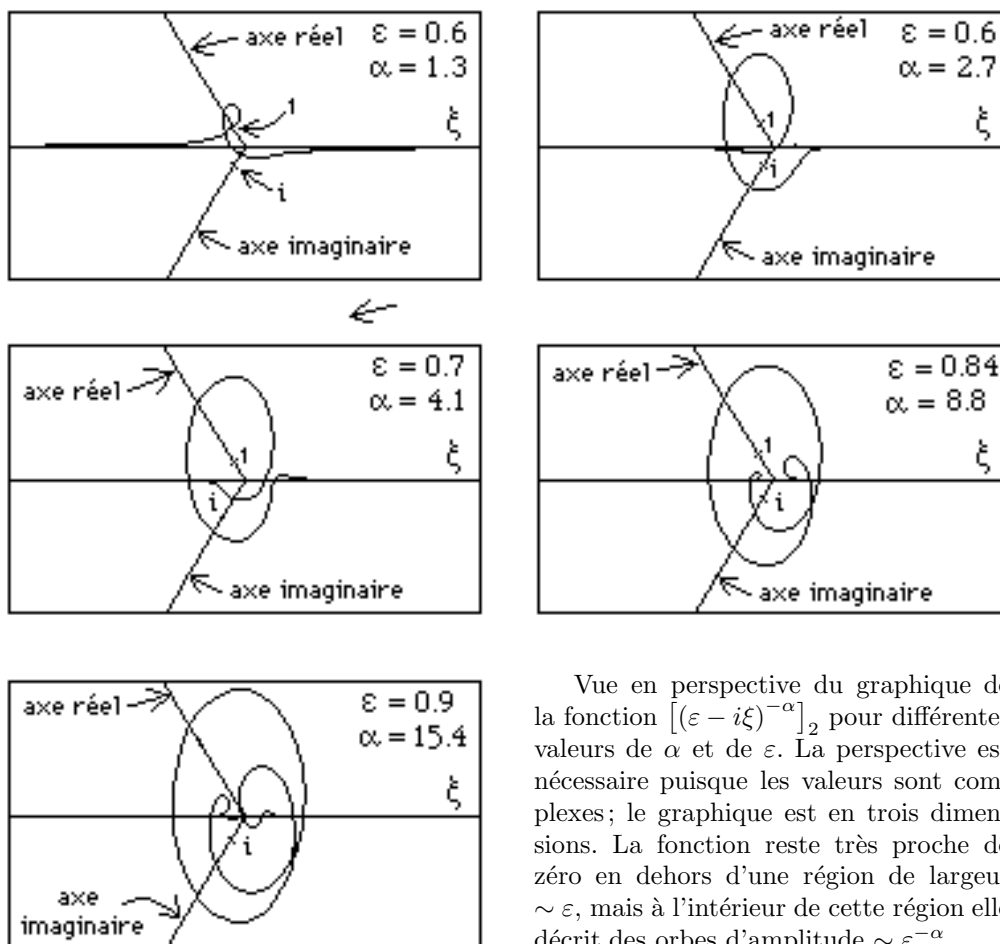
$$\widehat{p_\varepsilon}(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\varepsilon x}}{\Gamma(\alpha)} e^{ix\xi} dx \quad (4.7)$$

On reconnaît l'intégrale eulérienne, et on obtient :

$$\widehat{p_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{[(\varepsilon - i\xi)^\alpha]_2} \quad (4.8)$$

ce qui fournit une approximation (selon la limite faible) de la distribution cherchée (voir figure 5).

La méthode qui a été suivie pour ce calcul peut se résumer ainsi : pour calculer la transformée de Fourier d'une fonction $p(x)$ qui n'est pas intégrable, on commence par la multiplier par un facteur régularisant (ici $e^{-\varepsilon x}$), ce qui donne une famille p_ε de fonctions intégrables ; puis



Vue en perspective du graphique de la fonction $[(\epsilon - i\xi)^{-\alpha}]_2$ pour différentes valeurs de α et de ϵ . La perspective est nécessaire puisque les valeurs sont complexes; le graphique est en trois dimensions. La fonction reste très proche de zéro en dehors d'une région de largeur $\sim \epsilon$, mais à l'intérieur de cette région elle décrit des orbes d'amplitude $\sim \epsilon^{-\alpha}$.

figure 5

- a) on vérifie que p_ϵ tend faiblement vers p , ce qui est possible par les passages à la limite élémentaires;
- b) on en déduit que $\widehat{p_\epsilon}$ tend faiblement vers \widehat{p} , ce qui résulte de la théorie;
- c) en utilisant le fait que les p_ϵ sont des fonctions intégrables, on calcule leur transformée de Fourier par le calcul intégral classique;
- d) on obtient ainsi une approximation (au sens de la limite faible) de la distribution cherchée par des fonctions.

Cette méthode a été suivie ici pour calculer les transformées de Fourier des fonctions $x^{\alpha-1}$, avec le facteur régularisant $e^{-\epsilon x}$. Mais la même méthode avait été suivie au chapitre **VIII** (section 8, exemples 4 et 5) pour calculer les transformées de Fourier des fonctions $[(i\xi)^{-\alpha}]_2$ et e^{ix^2} ; les fac-

teurs régularisants étaient respectivement $e^{-\varepsilon|x|}$ et $e^{-\varepsilon x^2}$. Le choix du facteur régularisant est essentiel : il faut choisir celui qui rendra le calcul des intégrales $\int p_\varepsilon(x) e^{ix\xi} dx$ le plus simple possible. **C'est la théorie qui garantit que le résultat ne dépend pas du choix du facteur régularisant :** \widehat{p} est une distribution bien définie, qui sera forcément la limite faible de *n'importe quelle* suite \widehat{p}_ε , pourvu que p soit bien la limite faible de p_ε .

On peut aussi déduire de 4.8 par la formule d'inversion :

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{[(\varepsilon - i\xi)^\alpha]_2} d\xi \quad (4.9)$$

En posant $z = \varepsilon - i\xi$, on voit que la fonction sous le signe \int est une fonction analytique de z en dehors de la demi-droite $\{z < 0\}$, et on peut interpréter l'intégrale ci-dessus comme intégrale prise selon z le long du chemin $\Re z = \varepsilon$, qu'on peut donc déformer sans changer la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{[(\varepsilon - i\xi)^\alpha]_2} d\xi = i e^{-\varepsilon x} \int_\gamma \frac{e^{zx}}{[z^\alpha]_2} dz \quad (4.10)$$

En particulier, on peut prendre pour γ un chemin qui suit l'axe $\Re z = 0$ excepté autour de $z = 0$, où le chemin fait un détour pour éviter la singularité.

Ainsi se trouve justifié le procédé de régularisation d'intégrale divergente introduit au chapitre **VII** section **3**.