

IV. FONCTIONS EULÉRIENNES

1. Présentation.

On appelle *intégrale eulérienne de première espèce* ou *fonction Beta* l'intégrale (dépendant des deux paramètres x et y) :

$$\mathbb{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (1.1)$$

Cette intégrale diverge pour $x \leq 0$ (en $t = 0$) et pour $y \leq 0$ (en $t = 1$). La fonction $\mathbb{B}(x, y)$ est donc définie a priori pour x et y positifs. Toutefois, elle possède un prolongement analytique au-delà (voir section **2** ci-dessous).

Le changement de variable $t \mapsto 1-t$ dans l'intégrale montre que $\mathbb{B}(x, y) = \mathbb{B}(y, x)$. Le changement de variable $t = \sin^2 \theta$ conduit à une expression équivalente :

$$\mathbb{B}(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (1.2)$$

On appelle *intégrale eulérienne de deuxième espèce* ou *fonction Gamma* l'intégrale (dépendant du paramètre x) :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.3)$$

Cette intégrale diverge pour $x \leq 0$ (en $t = 0$). Comme pour $\mathbb{B}(x, y)$, $\Gamma(x)$ n'est définie a priori que pour $x > 0$, mais se prolonge analytiquement, comme nous verrons (section **2** ci-dessous).

L'intégration par parties

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \left. \frac{t^x}{x} e^{-t} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^x}{x} e^{-t} dt$$

montre que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (1.4)$$

On en déduit immédiatement que pour $x = n$ entier, $\Gamma(n+1) = n!$ Le changement de variable $t = u^2$ conduit à une autre expression équivalente de $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du \quad (1.5)$$

Théorème 1 : *Entre les fonctions eulériennes de première et de deuxième espèce, on a la relation suivante :*

$$\mathbb{E}(x, y) \cdot \Gamma(x + y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y) \quad (1.6)$$

Démonstration : L'intégrale double $\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-u^2-v^2} du dv$, d'une part se factorise en $\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)$ (d'après 1.5), et d'autre part s'écrit $\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{2(x+y)-1} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta e^{-r^2} d\theta dr$ en coordonnées polaires $u = r \sin \theta$, $v = r \cos \theta$, ce qui se factorise en $\Gamma(x + y) \cdot \mathbb{E}(x, y)$ d'après 1.2 et 1.5. CQFD

Théorème 2 (formule des compléments) : *pour $0 < x < 1$ on a :*

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1.7)$$

Démonstration : On utilise la formule du résidu appliquée à la fonction $[z^{-x}]_1 \cdot [z - 1^{x-1}]_1$. Le détail du calcul ayant déjà été vu en **III.6**, il suffit de reprendre la formule **III.6.7** avec $x = -\alpha$.

2. Prolongements analytiques.

Théorème 3 : *La fonction $\Gamma(x)$ se prolonge en une fonction analytique sur le domaine D , égal au plan complexe \mathbb{C} privé des entiers ≤ 0 . Les points $z = -n$ (n entier ≥ 0) sont des pôles simples, et le résidu de la fonction au point $z = -n$ est $(-1)^n/n!$.*

Démonstration : pour x réel > 0 , on peut écrire

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Posons

$$\Phi(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Dans la première intégrale, on peut remplacer e^{-t} par le développement en série $\sum (-1)^n \frac{1}{n!} t^n$ et intégrer terme par terme, puisque la série est uniformément convergente sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, d'où

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} \quad (2.1)$$

Considérons maintenant les fonctions *de la variable complexe* z :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \quad (2.2)$$

$$\Psi(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_1^{\infty} e^{-t+(z-1)\ln(t)} dt \quad (2.3)$$

Il est clair que pour tout z autre qu'un entier ≤ 0 , la série qui définit $\Phi(z)$ converge (grâce au coefficient $1/n!$ qui décroît très rapidement); de même la série

$$\Upsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)^2}$$

On va montrer que les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont toutes deux analytiques, la première en dehors des entiers ≤ 0 , la seconde partout. Pour cela, écrivons

$$\begin{aligned} \Phi(z+h) - \Phi(z) + h\Upsilon(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{z+h+n} - \frac{1}{z+n} + \frac{h}{(z+n)^2} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{h^2}{(z+n+h)(z+n)^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si $z \in D$, soit ε la distance de z au point singulier le plus proche ($\varepsilon = \inf_n \{|z+n|\}$); si on fait tendre h vers zéro, on peut supposer $|h| < \frac{1}{2}\varepsilon$ d'où $|z+n+h| > \frac{1}{2}\varepsilon$; par conséquent il résulte de 2.4 que

$$\left| \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} + \Upsilon(z) \right| \leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2}{\varepsilon^3}$$

ce qui prouve que $[\Phi(z+h) - \Phi(z)]/h$ a une limite lorsque h tend vers zéro, qui est $-\Upsilon(z)$.

Ainsi $\Phi(z)$ est analytique dans D . Du coup, cela implique que $\Upsilon(z)$, qui est sa dérivée, est aussi analytique dans D .

Montrons maintenant que $\Psi(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier. De l'identité connue $e^w - 1 - w = w^2 e^w \int_0^1 t e^{-tw} dt$ (qu'on obtient en intégrant par parties), valable pour tout nombre complexe w , on déduit (par l'inégalité de la moyenne) que $|e^w - 1 - w| \leq |w|^2 e^{\Re w}$ si $\Re w \geq 0$ et $|e^w - 1 - w| \leq |w|^2$ si $\Re w \leq 0$. Par conséquent, d'après 2.3 :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Psi(z+h) - \Psi(z)}{h} - \int_1^{\infty} \ln(t) e^{-t+(z-1)\ln(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_1^{\infty} e^{-t+(z-1)\ln(t)} \left[\frac{e^{h\ln(t)} - 1 - h\ln(t)}{h} \right] dt \right| \end{aligned}$$

Fonctions eulériennes

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_1^\infty \left| \frac{e^{h \ln(t)} - 1}{h} - \ln(t) \right| e^{-t + (\Re z - 1) \ln(t)} dt \\
 &\leq \int_1^\infty |h| [\ln(t)]^2 e^{\Re h \ln(t)} e^{-t + (\Re z - 1) \ln(t)} dt \\
 &= |h| \int_1^\infty [\ln(t)]^2 t^{\Re(z+h)-1} e^{-t} dt
 \end{aligned}$$

On a ici pris le cas où $\Re h \geq 0$, mais le cas où $\Re h \leq 0$ est analogue. L'intégrale qui figure au dernier membre est convergente et reste bornée quand h reste borné, donc $[\Psi(z+h) - \Psi(z)]/h$ tend bien vers une limite lorsque h tend vers zéro.

En ce qui concerne les points singuliers, on remarque qu'au voisinage point $z = -n_0$ (n_0 entier ≥ 0), la fonction

$$G(z) = \sum_{\substack{n \neq n_0 \\ n \geq 0}} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \Psi(z) = \Phi(z) - \frac{(-1)^{n_0}}{n_0!} \frac{1}{z+n_0} + \Psi(z)$$

est analytique; elle est en fait analytique dans tout le disque $|z + n_0| < 1$, puisque la fonction $\Phi(z)$ n'avait pas d'autre point singulier que $-n_0$ dans ce disque et par conséquent sa série entière en puissance de $z + n_0$ a pour rayon de convergence 1. On peut donc écrire

$$\Gamma(z) = G(z) + \frac{(-1)^{n_0}}{n_0!} \frac{1}{z+n_0}$$

ce qui (en imaginant que $G(z)$ est remplacée par sa série entière en puissances de $z + n_0$) est le développement de Laurent de $\Gamma(z)$ autour du point $-n_0$. On voit que le résidu est bien celui annoncé. CQFD

Pour prouver que $\Psi(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier, on aurait aussi pu montrer que ses dérivées partielles sont continues et que son intégrale sur n'importe quel lacet γ est nulle; or cela est aisé, car l'intégrale double $\int_\gamma \int_1^\infty e^{-t+(z-1)\ln(t)} dt dz$ est toujours absolument convergente (il faut considérer l'intégrale sur γ comme paramétrée par $z(s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$). En effet, si z parcourt un domaine \mathcal{D}_A de la forme $\mathcal{D}_A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z - 1 \leq A\}$, on peut majorer la fonction à intégrer :

$$|e^{-t+[z(s)-1]\ln(t)} z'(s)| \leq t^{A-1} |z'(s)| e^{-t}$$

et la fonction du membre de droite est évidemment intégrable sur $[0, 2\pi] \times [1, +\infty[$.

On en déduit donc que

$$\int_\gamma \Psi(z) dz = \int_1^\infty \left[\int_\gamma e^{-t+(z-1)\ln(t)} dz \right] dt$$

ce qui est nul, puisque pour tout t , $z \mapsto e^{-t+(z-1)\ln(t)}$ est analytique. Pour vérifier la continuité des dérivées partielles, on utilise les théorèmes de passage à la limite sous le signe \int , qui ont été donnés dans le chapitre 0.

On peut aussi utiliser le théorème suivant, qui est une variante du théorème 7 du chapitre 0 :

Théorème : soit $f(z, t)$ une fonction telle que :

— pour tout A , il existe une fonction $F_A(t) \geq 0$ telle que l'intégrale de $F_A(t) dt$ converge et telle que l'inégalité $|f(z, t)| \leq F_A(t)$ ait lieu uniformément pour $|z| \leq A$ et t dans l'intervalle d'intégration ;

— pour tout t dans l'intervalle d'intégration, $z \mapsto f(z, t)$ est analytique dans le domaine D (indépendant de t).

Alors $z \mapsto \int f(z, t) dt$ est analytique dans D .

Ce théorème, appliqué aux intégrales 1.1 et 1.3 montre d'emblée que les fonctions Beta et Gamma sont analytiques pour $\Re x > 0$, $\Re y > 0$. Mais de toute façon, comme le montre le théorème 3, elles sont analytiques dans un domaine plus étendu encore.

Ainsi la fonction $\Gamma(z)$ est analytique partout excepté aux points entiers ≤ 0 . L'intégrale 1.3 définissait une fonction analytique a priori pour $\Re z > 0$ seulement, mais on voit que la fonction se prolonge à un domaine où l'intégrale 1.3 ne converge pas.

La relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (1.4) que nous avons démontrée pour $z > 0$, ainsi que la relation $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$ (1.7) que nous avons démontrée pour $0 < z < 1$, sont donc vraies dans la totalité des domaines d'analyticité respectifs ($\mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ pour la première et $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ pour la seconde) en vertu du théorème des zéros isolés (chapitre II, corollaire 6d). C'est le principe du prolongement analytique.

On a aussi un prolongement analytique pour $\mathbb{B}(w, z)$: a priori, l'intégrale 1.1 fournit une fonction analytique en w ou en z pour $\Re w > 0$ et $\Re z > 0$; mais en posant $\mathbb{B}(w, z) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(w+z)$, on obtient une fonction analytique dans $D \times D$.

3. Formule d'Euler.

Revenons encore au cas où la variable est réelle :

Théorème 4 : Pour $x > 0$ on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \mathbb{B}(x, n+1) \quad (3.1)$$

Démonstration : On considère la fonction $\varphi_n(t) = 1 - e^{-t} [1 - \frac{t}{n}]^n$ sur l'intervalle $[0, n]$. Sa dérivée est $\varphi'_n(t) = \frac{t}{n} e^{-t} [1 - \frac{t}{n}]^{n-1}$, qui est toujours ≥ 0 donc la fonction $\varphi_n(t)$ est croissante. Par ailleurs, il est bien connu que pour tout t fixé, $[1 - \frac{t}{n}]^n$ tend vers e^{-t} quand n tend vers l'infini, donc pour tout t , $\varphi_n(t)$ tend vers zéro. Décomposons :

$$\Gamma(x) - \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Fonctions eulériennes

$$= \int_0^A t^{x-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt + \int_A^n t^{x-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (3.2)$$

où A est une constante arbitraire (mais $n > A$). Il faut montrer que pour tout ε il existe un $N(\varepsilon)$ tel que pour $n \geq N(\varepsilon)$, cette expression soit plus petite que ε .

Puisque la fonction $\varphi_n(t)$ est croissante, on peut dire que sur $[0, A]$ elle est majorée par $\varphi_n(A)$, sur $[A, n]$ elle est majorée par $\varphi_n(n) = 1$. Donc d'après l'inégalité de la moyenne, la première intégrale de 3.2 se majore comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A t^{x-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt \right| &\leq \varphi_n(A) \int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \varphi_n(A) \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \varphi_n(A) \Gamma(x) \end{aligned}$$

La seconde se majore similairement :

$$\left| \int_A^n t^{x-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt \right| \leq \varphi_n(n) \int_A^n t^{x-1} e^{-t} dt = \int_A^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(x) - \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \right| &\leq \varphi_n(A) \Gamma(x) + \int_A^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \varphi_n(A) \Gamma(x) + \int_A^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comme l'intégrale $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ converge, on peut choisir la constante A telle que $\int_A^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Cette constante *étant ainsi choisie* il existe un n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $\varphi_n(A) \leq \varepsilon/2\Gamma(x)$ (puisque $\lim \varphi_n(A) = 0$). Si n est supérieur à ce n_0 , on aura bien

$$\left| \Gamma(x) - \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \right| \leq \varepsilon$$

Pour obtenir la seconde relation de l'énoncé, il suffit d'effectuer dans l'intégrale $\int_0^\infty t^{x-1} [1 - \frac{t}{n}] dt$ le changement de variable $t = ns$. CQFD

Théorème 5 (formule d'Euler)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}{n! n^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \quad (3.4)$$

Démonstration : En itérant 1.4 on obtient $\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$ d'où

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

En combinant le théorème 4 avec le théorème 1, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \mathbb{E}(x, n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\end{aligned}$$

CQFD

Théorème 6 : La fonction $1/\Gamma(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier, et ne s'annule qu'aux points $z = -n$ (n entier ≥ 0).

Démonstration : La fonction $\sin \pi z$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier, donc son inverse ne peut pas s'annuler (si $f(z) = 1/\sin \pi z$ s'annulait en un point, alors $\sin \pi z = 1/f(z)$ serait singulière en ce point). Or d'après le théorème 2 (formule des compléments) on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$ pour $0 < x < 1$; par prolongement analytique, cette égalité est donc vraie aussi dans tout le domaine où $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $\pi/\sin \pi z$ sont analytiques, c'est-à-dire dans $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. S'il existait un point z_0 de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tel que $\Gamma(z_0) = 0$, on aurait donc aussi $\pi/\sin \pi z_0 = 0$. D'autre part, pour $z = n$ entier > 0 , $\Gamma(z) = (n-1)! \neq 0$.

Cela prouve que $1/\Gamma(z)$ est définie et analytique dans D . Elle ne peut s'y annuler, pour la même raison que $f(z) = 1/\sin \pi z$. Reste à voir les points $z = -n$. Or $\Gamma(1-z)$ est analytique en ces points (car $z = -n \Rightarrow 1-z = n+1$) donc aussi $\Gamma(1-z) \cdot \frac{1}{\pi} \sin \pi z$. Il suffit alors de poser $1/\Gamma(z) = \Gamma(1-z) \cdot \frac{1}{\pi} \sin \pi z$ pour avoir le prolongement analytique de $1/\Gamma(z)$ à \mathbb{C} tout entier. Cette dernière égalité montre aussi que ce prolongement est nul pour $z = -n$; autrement dit les zéros de $1/\Gamma(z)$ sont les points $z = -n$ (mais on pouvait aussi le déduire plus directement du fait (théorème 3) que $\Gamma(z)$ y devient infinie puisque ce sont des pôles).

4. Dérivée de $\Gamma(z)$.

Théorème 7 : soit $\Gamma'(z)$ la dérivée de $\Gamma(z)$. Alors la fonction $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ est analytique dans D et on a :

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \ln(n+1) \right\}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right] \quad (4.1)$$

la série dans le dernier membre étant convergente (uniformément sur tout domaine borné).

Démonstration : Commençons par le démontrer dans un petit voisinage du point $z = +1$, après quoi cela s'étendra par prolongement analytique. Soit donc $\varepsilon < 1$ et supposons $|z - 1| < \varepsilon$. Reprenons la relation 3.2, mais cette fois pour z complexe :

$$\begin{aligned} \Gamma(z) - \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n dt &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt - \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n dt \\ &= \int_0^A t^{z-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt + \int_A^n t^{z-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt + \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans la première des trois intégrales de la deuxième ligne, on peut majorer $|t^{z-1}|$ par $t^{+\varepsilon}$ quand $t \geq 1$ et par $t^{-\varepsilon}$ quand $0 < t \leq 1$; en effet, $|z - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \Re z < 1 + \varepsilon$ et $|t^{z-1}| = t^{\Re z - 1}$. Cette première intégrale peut donc se majorer comme suit :

$$\left| \int_0^A t^{z-1} e^{-t} \varphi_n(t) dt \right| \leq \varphi_n(1) \int_0^1 t^{-\varepsilon} e^{-t} dt + \varphi_n(A) \int_1^A t^\varepsilon e^{-t} dt \quad (4.2)$$

Cela prouve, puisque $\varphi_n(1)$ comme $\varphi_n(A)$ tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini, que cette intégrale tend *uniformément* vers zéro quand z est dans le disque $|z - 1| < \varepsilon$. Dans la seconde et la troisième intégrale, t est toujours ≥ 1 et on peut aussi les majorer uniformément par les intégrales obtenues en remplaçant t^{z-1} par $t^{+\varepsilon}$. Ainsi, lorsque $|z - 1| < \varepsilon$, la suite des fonctions

$$H_n(z) = n^z \mathbb{E}(z, n+1) = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \quad (4.3)$$

converge *uniformément* vers $\Gamma(z)$.

Cela implique que la suite des dérivées des H_n va converger vers $\Gamma'(z)$. En effet, la convergence uniforme implique que l'intégrale de la limite est la limite de l'intégrale, de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Gamma(w)}{w-z} dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{H_n(w)}{w-z} dw$$

Bien entendu, comme la convergence uniforme n'a été prouvée que dans le disque $|z - 1| < \varepsilon < 1$, il faut prendre le lacet γ dans ce disque; si ce lacet entoure le point z , l'égalité ci-dessus est équivalente à $\Gamma'(z) = \lim H'_n(z)$. Autrement dit: le fait que pour les fonctions analytiques, la dérivée est

donnée par une intégrale, permet de dériver les suites uniformément convergentes.

L'argument utilisé ci-dessus, qu'on peut intégrer terme par terme une série uniformément convergente et que par conséquent, si chaque terme est analytique, la somme est elle aussi analytique et on peut passer à la limite pour les dérivées, a une validité générale et constitue le *théorème de Weierstrass*:

Théorème : Soit $\sum f_n(z)$ une série de fonctions analytiques dans un domaine U , uniformément convergente sur tout disque borné $|z| \leq R$. Alors sa somme $F(z)$ est analytique sur U et les dérivées $F^{(k)}(z)$ sont égales aux séries $\sum f_n^{(k)}(z)$ des dérivées.

Il suffit en effet de remarquer que pour tout lacet γ dont l'intérieur est entièrement contenu dans U :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} F(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

et que pour tout lacet simple γ qui entoure le point z_0 :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

En toute rigueur il faut signaler l'argument de la continuité des dérivées partielles (voir chapitre I), mais cela résulte aussi de la convergence uniforme: on considère la série $\sum f'_n(z)$, puis on intègre terme par terme sur un chemin de z_0 à z , etc.

Pour dériver $H_n(z)$, réécrivons 4.3 comme le produit des facteurs:

$$H_n(z) = n! e^{z \ln(n)} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{1}{(z+2)} \cdot \frac{1}{(z+3)} \cdots \frac{1}{(z+n)}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} H'_n(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ n! e^{z \ln(n)} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{1}{(z+2)} \cdot \frac{1}{(z+3)} \cdots \frac{1}{(z+n)} \right\} \\ &= \ln(n) H_n(z) - \frac{1}{z} H_n(z) - \frac{1}{(z+1)} H_n(z) - \\ &\quad - \frac{1}{(z+2)} H_n(z) - \cdots - \frac{1}{(z+n)} H_n(z) \end{aligned}$$

Ce qu'on peut encore écrire sous la forme:

$$\frac{H'_n(z)}{H_n(z)} = \ln(n) - \frac{1}{z} - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)}$$

Le théorème de Weierstrass dit que le membre de gauche a pour limite $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$, ce qui montre la première assertion du théorème (le fait d'avoir $\ln(n+1)$ au lieu de $\ln(n)$ ne change rien à la limite puisque $\ln(n+1) - \ln(n)$ tend vers zéro). Pour avoir la deuxième, il suffit de remarquer que $\ln(n+1) =$

Fonctions eulériennes

$\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \ln(n+1) = \\ & = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{z+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

La série converge uniformément pour $|z| \leq R$, quel que soit R . En effet, on peut écrire

$$\left| \frac{1}{z+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right| + \left| \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right|$$

Pour $k > R$, $|z+k| \geq k - R$ donc le premier de ces deux termes, égal à $|z|/k|z+k|$, est $\leq R/k(k-R)$; le second se majore par l'inégalité connue $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}x^2$, de sorte que le terme général de la série, pour les rangs $k > R$, est majoré par

$$\frac{R}{k(k-R)} + \frac{1}{2k^2}$$

ce qui entraîne bien la convergence. Mais le fait que cette série soit uniformément convergente pour $|z| \leq R$, et cela quel que soit R , entraîne que la limite est analytique (théorème de Weierstrass), c'est-à-dire que la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{z+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$$

est analytique dans D . La fonction $-\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ l'est également, et les deux coïncident sur le disque $|z-1| < \varepsilon$, donc elles coïncident partout.

On déduit du théorème 7 une expression de la constante d'Euler $\gamma \simeq 0.577215$ rencontrée en **III.5**. Rappelons que l'on avait alors obtenu $\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$. Or cette dernière relation signifie que $-\gamma = \Gamma'(1)$, qu'on obtient en dérivant sous le signe d'intégration. Pour justifier cette dérivation sans recourir à des théorèmes généraux, on peut partir de l'inégalité (valable pour h complexe et α réel) :

$$\left| \frac{e^{h\alpha} - 1}{h} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |h| \alpha^2 e^{|\alpha h|}$$

On a alors

$$\frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} - \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \left[\frac{e^{h \ln(t)} - 1}{h} - \ln(t) \right] dt$$

En combinant l'inégalité précédente (en prenant $\ln(t) = \alpha$), l'inégalité de la moyenne, et le fait que $|t^{z-1}| = t^{\Re z-1}$, on obtient

$$\left| \frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} - \int_0^\infty \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \frac{1}{2}|h| \int_0^\infty t^{|h|+\Re z-1} e^{-t} [\ln(t)]^2 dt$$

L'intégrale du second membre étant convergente, le facteur $\frac{1}{2}|h|$ garantit que le premier membre tend vers zéro, c'est-à-dire qu'on a bien

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.5)$$

Bien entendu, on obtiendrait de la même façon (car les intégrales telles que $\int_0^\infty [\ln(t)]^n t^{x-1} e^{-t} dt$ sont convergentes pour tout $n \geq 0$ et tout $x > 0$) :

$$\frac{d^n \Gamma(z)}{dz^n} = \int_0^\infty [\ln(t)]^n t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.6)$$

On voit qu'en prenant $z = 1$ dans 4.5 on trouve $\Gamma'(1) = -\gamma$. Par ailleurs, la formule 4.1 du théorème 7 donne, pour $z = 1$:

$$\gamma = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right\} \quad (4.7)$$

En décomposant $\ln(n+1) = \ln(1+\frac{1}{1}) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n})$, on peut traduire ce résultat sous la forme d'une série :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \quad (4.8)$$

En introduisant maintenant cette constante γ , on peut donner une forme équivalente du théorème 7 :

Théorème 8 :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(z+n)} \quad (4.9)$$

Ceci montre en particulier que les points singuliers $z = -n$ (n entier ≥ 0) de la fonction $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ sont des pôles simples, et que le résidu en chacun de ces points est -1 .

Démonstration : d'après 4.1 (théorème 7), $-\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ est la somme de la série de terme général

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left[\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right] + \left[\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Fonctions eulériennes

Or la série des seconds termes entre crochets ci-dessus (de $n = 0$ à l'infini) a pour somme γ d'après 4.8 ; en réduisant au même dénominateur, le premier terme devient $(1 - z)/(n + 1)(z + n)$, de sorte que

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - z}{(n + 1)(z + n)}$$

ce qui conduit bien à 4.9. Au point $z = -n_0$, la fonction

$$G(z) = \sum_{n \neq n_0} \frac{1 - z}{(n + 1)(z + n)}$$

est analytique (donc se développe en série entière de $z + n_0$), et

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\gamma - \frac{1 - z}{(n_0 + 1)(z + n_0)} - G(z) \\ &= -\gamma - G(z) + \frac{1}{1 + n_0} - \frac{1}{z + n_0} \end{aligned}$$

La dernière expression est bien un développement de Laurent, dont la partie singulière est le terme $-1/(z + n_0)$. Cela montre que le résidu est -1 , et cela pour tout entier $n_0 \geq 0$. CQFD

5. Développements eulériens

Nous avons vu au cours de la démonstration du théorème 3 (cf. 2.1 — 2.3) que

$$\Gamma(z) = \Psi(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z + n} \quad (5.1)$$

où $\Psi(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est une fonction entière de z . Nous avons vu aussi (théorème 8) que

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + (z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)(z + n)} \quad (5.2)$$

Ces deux formules sont analogues au développement en éléments simples d'une fraction rationnelle : on écrit en effet une fonction analytique, qui a des pôles simples en $z = a_n$, en une somme de fonctions (les éléments simples) de la forme $A_n/(z - a_n)$, plus une fonction entière. La différence avec les fractions rationnelles est qu'il y a une infinité d'éléments simples, et leur somme doit donc être une série convergente. C'est cette contrainte qui dans le second cas empêchait de sommer les éléments simples $-1/(z + n)$ sans leur compagnon $1/(n + 1)$.

On appelle *développements eulériens* de tels développements en une série d'éléments simples associés à chaque pôle. Ces développements font apparaître les résidus en ces pôles, mais sont rarement utilisables pour le calcul numérique de la fonction, car ils convergent en général très lentement.

Un procédé découvert par Cauchy et utilisant le théorème des résidus permet, pour des fonctions assez régulières à l'infini, de trouver de tels développements eulériens, *à condition toutefois de connaître déjà les résidus*. Voici comment.

Soit une fonction $f(z)$ analytique en dehors d'une infinité de points singuliers isolés, a_0, a_1, a_2, \dots . La suite a_n tend forcément vers l'infini, sinon il y aurait des points d'accumulation qui seraient nécessairement des points singuliers essentiels. On suppose que la suite des a_n est ordonnée de sorte que $|a_n| \geq |a_m|$ si $n > m$ (le module de a_n croît avec n). Nous supposons aussi pour simplifier que ce sont tous des pôles d'ordre 1 (mais, à condition de calculer un peu plus, le procédé fonctionne pour des pôles d'ordre quelconque). Il est évident que la fonction $f(z)$ ne peut pas tendre vers zéro à l'infini puisqu'elle devient infinie aux points a_n et que ceux-ci sont arbitrairement proches de l'infini. Toutefois, elle peut tendre vers zéro quand z tend vers l'infini sans sortir d'un domaine qui ne contient pas les pôles. Laissons d'abord de côté la question du comportement de $f(z)$ à l'infini, et considérons la fonction $g(z) = f(z)/(z - w)$, pour w distinct de tous les pôles de f .

Il est clair que $g(z)$ n'a que des pôles simples : ceux de $f(z)$, plus w . Le résidu de $g(z)$ en w est $f(w)$: en effet, au voisinage de w , $f(z)$ est analytique, donc $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - w)^n$ avec $c_0 = f(w)$ et alors $g(z) = c_0/(z - w) +$ série entière. De façon analogue on trouve le résidu de $g(z)$ au point $z = a_n$: il est égal au résidu A_n de $f(z)$, multiplié par $1/(a_n - w)$.

D'après le théorème des résidus, l'intégrale de $g(z) dz$ sur un cercle de centre 0 et de rayon R (R étant choisi de telle manière que le cercle ne rencontre aucun pôle) est égale à la somme des résidus de $g(z)$ aux pôles contenus dans le disque de rayon R . Supposons maintenant qu'on puisse trouver une suite de rayons R_k qui tende vers l'infini et tels que les cercles correspondants ne rencontrent pas les pôles (que ces cercles passent entre les pôles). Si l'intégrale sur ces cercles tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, on aura nécessairement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| \leq R_k} \frac{A_n}{w - a_n} = f(w)$$

Ce qui signifie que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{w - a_n} \quad (5.3)$$

converge et a pour somme $f(w)$. Compte tenu de la forme de la série 5.3, elle fournit donc un développement eulérien de la fonction $f(w)$. Bien entendu n'importe quel lacet, de forme quelconque, convient ; le cas d'un cercle n'est envisagé ici que pour fixer les idées.

Ce développement eulérien ne comporte pas de partie entière, comme cela avait été le cas pour le développement 5.1 ; cela est évidemment dû à l'hypothèse que nous avons faite pour l'intégrale sur le cercle de rayon R_k , lorsque R_k tend vers l'infini. Cette hypothèse ne saurait être satisfaite pour $f(z) = \Gamma(z)$, mais le serait pour $f(z) = \Gamma(z) - \Psi(z) = \Phi(z)$. On peut donc utiliser le procédé de Cauchy lorsque l'hypothèse mentionnée n'est pas satisfaite, à condition de trouver une fonction entière $G(z)$ telle que $f(z) - G(z)$ satisfasse l'hypothèse.

À titre d'exemple, appliquons le procédé à la fonction $f(z) = 1/\sin \pi z$. Pour contrôler la décroissance à l'infini, on va calculer le module $|\sin \pi z|$. En posant $z = x + iy$, on a $\sin \pi z = \sin \pi x \cosh \pi y + i \cos \pi x \sinh \pi y$ d'où $|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y$. Le chemin le plus commode pour vérifier notre hypothèse n'est pas un cercle, mais un carré de demi-côté $R_k = k + \frac{1}{2}$. Sur les côtés verticaux, on aura $x = \pm(k + \frac{1}{2})$, soit $\sin^2 \pi x = 1$, d'où $|\sin \pi z|^2 = 1 + \sinh^2 \pi y = \cosh^2 \pi y$; sur les côtés horizontaux, $\sin \pi x$ sera variable, mais $\sin^2 \pi x$ toujours ≥ 0 donc $|\sin \pi z|^2 \geq \sinh^2 \pi y = \sinh^2 \pi R_k$. Il est donc évident que l'intégrale de $f(z)/(z - w)$ sur les côtés horizontaux sera majorée en module par

$$\frac{1}{d_k(w) \sinh \pi R_k} \int_{-R_k}^{+R_k} dy = \frac{2R_k}{d_k(w) \sinh \pi R_k}$$

où $d_k(w)$ est la distance du point w au périmètre du carré. L'expression ci-dessus tend visiblement vers zéro quand R_k tend vers l'infini ; sur les côtés verticaux l'intégrale sera majorée en module par

$$\frac{1}{d_k(w)} \int_{-R_k}^{+R_k} \frac{1}{\cosh \pi y} dy \leq \frac{1}{d_k(w)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh \pi y} dy = \frac{1}{d_k(w)}$$

ce qui tend aussi vers zéro puisque $d_k(w)$ tend vers l'infini : le périmètre du carré s'écarte indéfiniment du point (fixe) w . On peut donc appliquer le procédé de Cauchy et on obtient le développement eulérien

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{A_n}{w - n}$$

Le résidu A_n de la fonction $1/\sin \pi z$ au point $z = n$ est immédiat en remarquant que $\sin \pi z = (-1)^n \sin \pi(z - n) = (-1)^n \pi(z - n) \times$ une fonction analytique égale à 1 pour $z = n$: $A_n = (-1)^n/\pi$. Pour faire apparaître la convergence de la série il faut aussi grouper deux par deux les termes correspondant à $+n$ et $-n$. Ainsi on obtient le développement eulérien :

$$\frac{\pi}{\sin \pi w} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (5.4)$$

L'inconvénient du procédé est qu'il faut déjà connaître les résidus de la fonction à développer (dans cet exemple, c'était facile) et on ne peut donc pas l'utiliser pour calculer ces résidus s'ils sont inconnus (rappelons que dans les théorèmes 3 et 7 nous avons utilisé le développement eulérien pour obtenir les résidus).

6. Intégrale de Hankel.

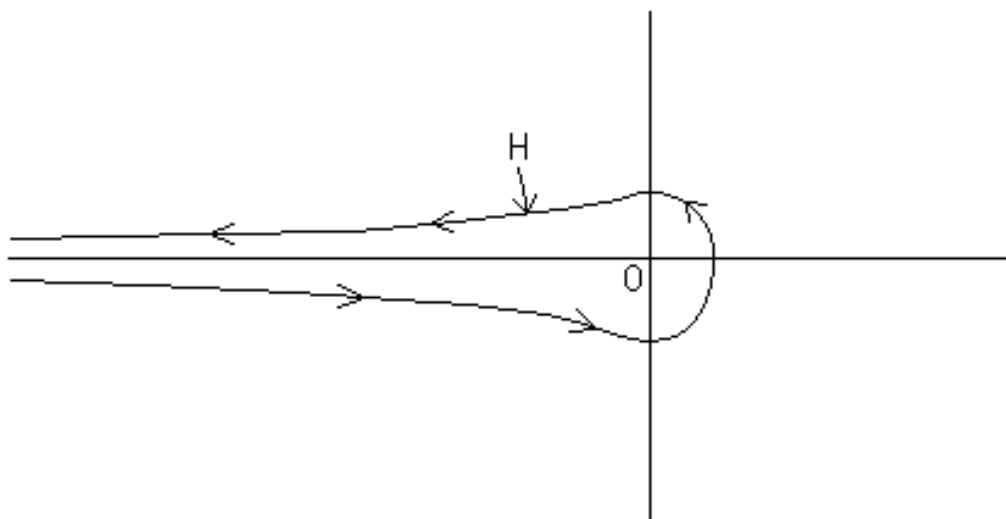


figure 1

Soit H un chemin infini contenu dans Ω_1 et longeant la coupure $] -\infty, 0]$ par en-dessous et par dessus, et orienté dans le sens positif (figure 1). Considérons l'intégrale

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_H [w^{-z}]_1 e^w dw = \frac{1}{2i\pi} \int_H e^{w - z \ln_2(w)} dw \quad (6.1)$$

Contrairement aux intégrales sur des chemins bornés, il se pose ici la question de la convergence. Pour y répondre, voyons ce que l'intégrale devient après paramétrage $t \mapsto w(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{w(t) - z \ln_2(w(t))} w'(t) dt \quad (6.2)$$

Fonctions eulériennes

Le nombre complexe $w(t)$ étant assujetti à se promener dans Ω_1 , on peut l'écrire sous forme trigonométrique $w(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$, avec $\forall t, -\pi < \theta(t) < +\pi$, $r(t) > 0$. La fonction que l'on intègre est donc

$$e^{r(t) e^{i\theta(t)} - z \ln r(t) - iz\theta(t)} w'(t)$$

dont le module est

$$e^{r(t) \cos \theta(t) - x \ln r(t) + y\theta(t)} |w'(t)|$$

avec $x = \Re z$ et $y = \Im z$. Le facteur $|w'(t)|$ ne pose pas de problème car on peut toujours prendre un paramétrage pour lequel $|w'(t)|$ reste borné (cela signifie simplement que la vitesse du point courant sur H — t étant le temps — reste bornée).

Reste à voir ce qui est en exposant. Le terme $y\theta(t)$ reste toujours compris entre $-y\pi$ et $+y\pi$ et n'intervient donc pas dans la convergence ou non convergence. Comme le chemin H va à l'infini (aussi bien pour $t \rightarrow -\infty$ que pour $t \rightarrow +\infty$), il est clair que $r(t) \rightarrow +\infty$ (dans les deux cas); par conséquent le terme $\ln r(t)$ peut être négligé devant $r(t)$ (quelle que soit la fonction $r(t)$, pourvu qu'elle tende vers l'infini quand $t \rightarrow \pm\infty$, on aura toujours $\ln r(t)/r(t) \rightarrow 0$). Cela n'entraîne pas qu'il puisse être négligé devant $r(t) \cos \theta(t)$, car $\cos \theta(t)$ pourrait tendre vers zéro assez vite pour compenser $r(t)$. Mais il est évident que l'intégrale va diverger si $\cos \theta(t)$ est positif; une condition qui garantit la convergence est donc que

$$\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \cos \theta(t) < 0$$

cela veut dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $|t|$ grand, $\cos \theta(t) \leq -\varepsilon$, ou encore qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour t grand négatif, $-\pi < \theta(t) < -\frac{\pi}{2} - \eta$ et pour t grand positif, $\frac{\pi}{2} + \eta < \theta(t) < +\pi$. Géométriquement, cela signifie que le chemin H doit, le long de ses deux branches infinies, *pencher* vers la gauche du plan (l'angle θ doit rester $> \frac{\pi}{2} + \eta$ ou $< -\frac{\pi}{2} - \eta$). Mais peu importe son comportement à distance finie, pourvu qu'il ne traverse pas la coupure du plan.

On a ainsi exprimé une condition suffisante de convergence. Un chemin qui les vérifie sera appelé un *chemin de Hankel*.

On pourrait étendre la condition de convergence à des chemins qui deviennent verticaux ($\theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$) à l'infini, en demandant que $\cos \theta(t)$ ne tende pas trop vite vers zéro; cela est peu intéressant pour l'étude générale qui nous occupe, mais on pourrait y être amené pour traiter une application où cela serait nécessaire.

Lorsque deux chemins H et K vérifient tous deux la condition de

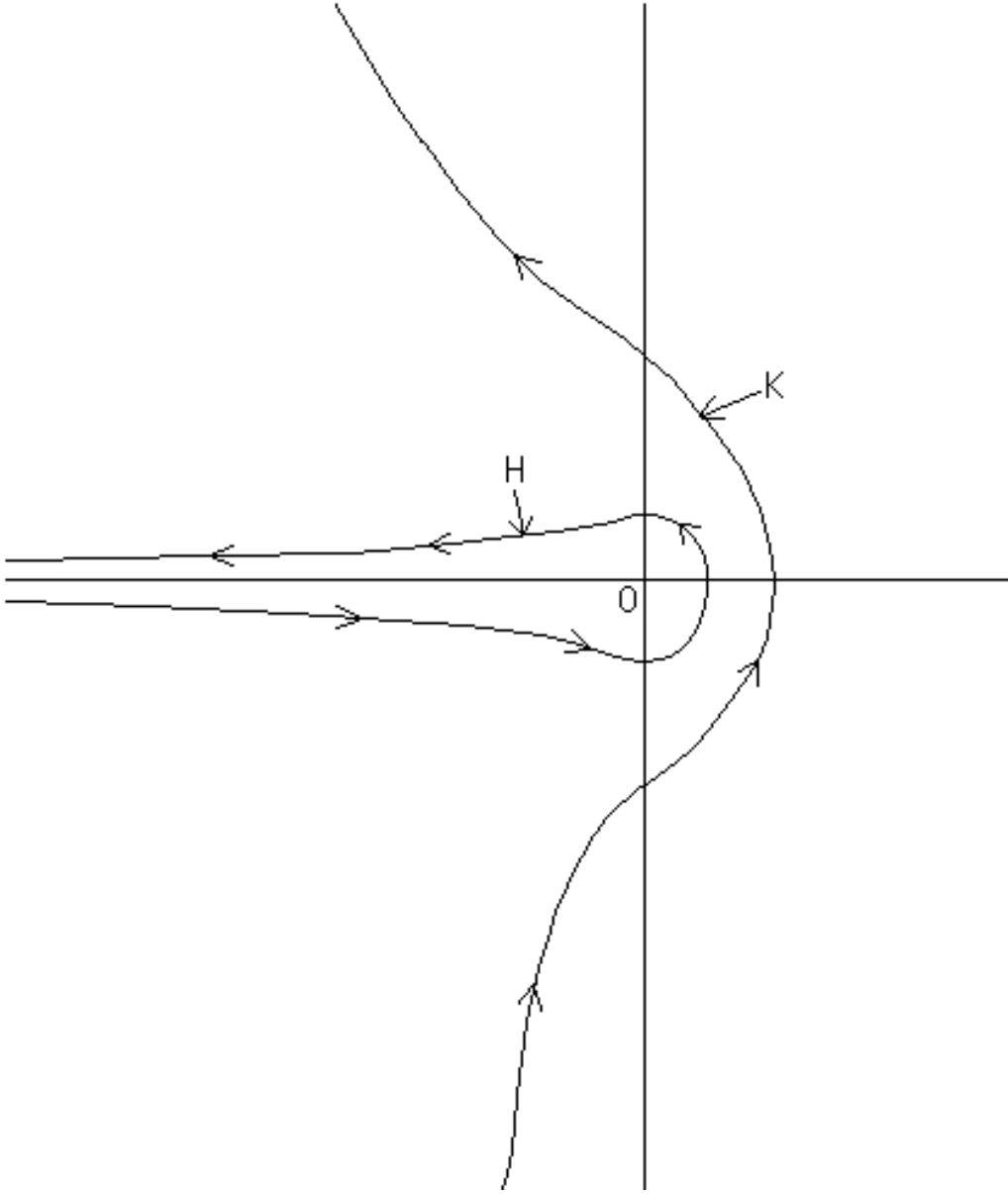


figure 2

convergence ci-dessus (figure 2), ils donnent la même valeur pour l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_H [w^{-z}]_1 e^w dw = \frac{1}{2i\pi} \int_K [w^{-z}]_1 e^w dw \quad (6.3)$$

Cela se montre aisément en considérant un lacet comme celui de la figure 3, et sur lequel l'intégrale est nulle, puisque la fonction $w \mapsto [w^{-z}]_1 e^w$ est analytique dans Ω_1 ; la condition de convergence entraîne en effet que la partie de l'intégrale prise sur les ponts en quart de cercle (voir figure 3) tend vers zéro lorsque ceux-ci tendent vers l'infini.

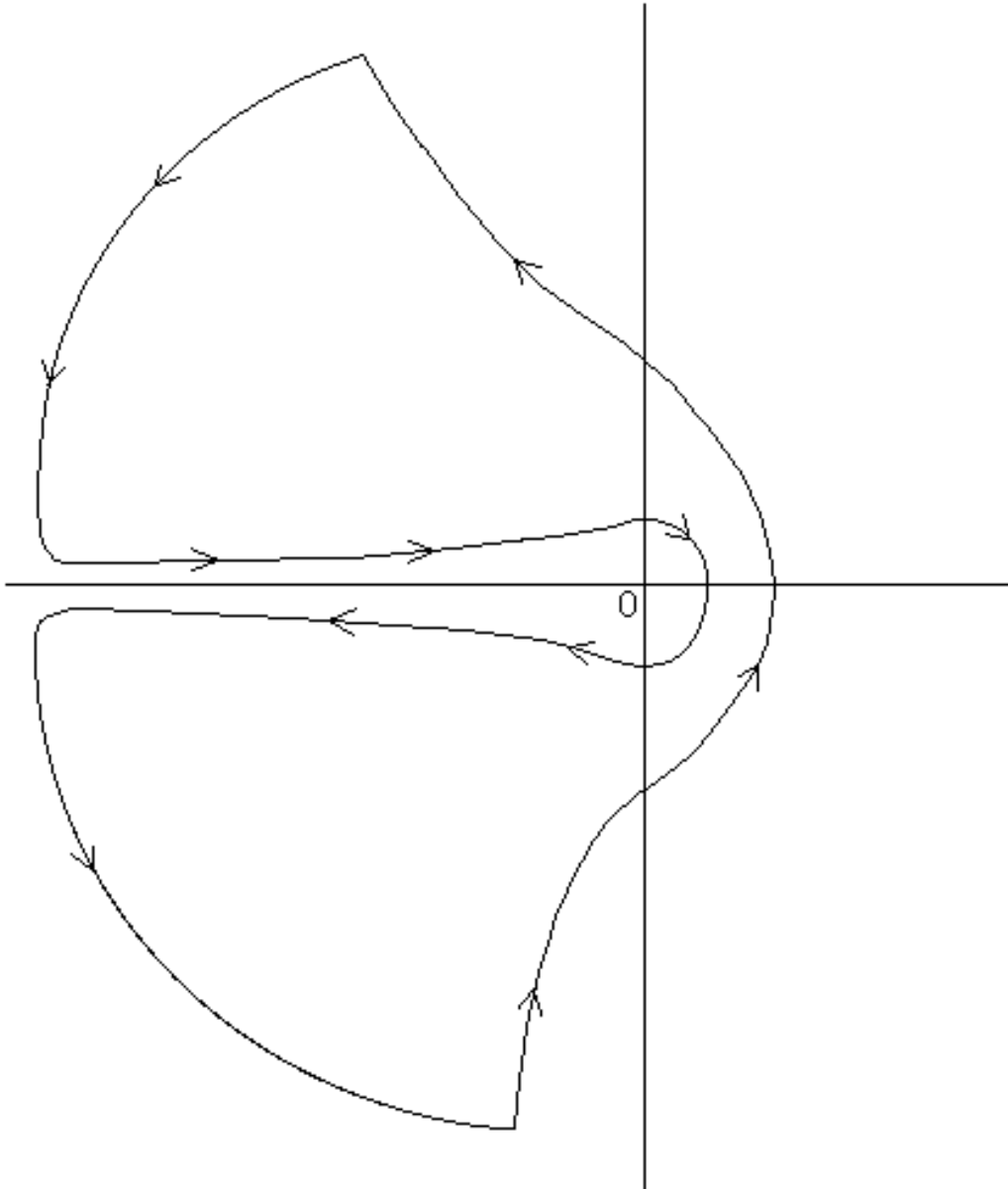


figure 3

D'autre part, il est clair que (si H satisfait lesdites conditions de convergence) l'intégrale converge **quel que soit** z . En utilisant l'argument déjà fréquemment utilisé, que si γ est n'importe quel lacet dans \mathbb{C} , l'intégrale double $\int_{\gamma} \int_H dw dz$ peut être intégrée dans n'importe quel ordre, on voit que la fonction $\mathcal{H}(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier (vérifier que les conditions pour qu'il en soit ainsi sont ici satisfaites est une affaire de routine).

Voyons maintenant comment calculer la fonction $\mathcal{H}(z)$. Puisque l'inté-

grale ne dépend pas du chemin choisi, on va choisir un chemin particulièrement commode. Un tel chemin est celui qui consiste à suivre l'axe $] -\infty, 0]$ par en-dessous en donnant à la fonction $w \mapsto [w^{-z}]_1 e^w$ ses valeurs-limite par dessous, puis par dessus (mais de 0 vers $-\infty$) en donnant à la fonction ses valeurs-limite par dessus. L'intégrale sera alors la limite des intégrales sur des chemins H qui contournent l'axe en le suivant de plus en plus près, et cette limite sera évidemment $\mathcal{H}(z)$. Toutefois ce passage à la limite ne sera possible que pour une plage de valeurs de z : $\Re z < 1$; en effet, en dehors de cette plage, l'intégrale-limite sera divergente en 0, car la fonction $[w^{-z}]_1$ devient infinie en zéro pour $\Re z > 0$ et cette singularité n'est intégrable que pour $\Re z < 1$. Voyons cela en détail.

À cet effet, supposons à partir d'ici que z est réel (pour la commodité) et que $z < 1$. Pour les autres valeurs, on utilisera ensuite le principe du prolongement analytique.

Le chemin mentionné à l'instant, consistant à parcourir deux fois l'intervalle $] -\infty, 0]$, est un chemin-limite, mais n'est pas un chemin du type H , puisqu'il n'est pas inclus dans Ω_1 ; pour avoir un chemin du type H , il faudrait prendre par exemple :

- pour $\varepsilon < r < +\infty$: $w(r) = re^{i(-\pi+\alpha)}$;
- pour $-\pi + \alpha < \theta < +\pi - \alpha$: $w(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$;
- pour $\varepsilon < r < +\infty$: $w(r) = re^{i(\pi-\alpha)}$.

comme sur la figure 4, ou bien

- pour $-\infty < t < 0$: $w(t) = t - i\varepsilon$;
- pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$: $w(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$;
- pour $0 < t < +\infty$: $w(t) = t + i\varepsilon$.

comme sur la figure 5. Le premier chemin (figure 4) est formé d'une demi-droite d'argument angulaire constant égal à $-\pi + \alpha$ (avec α petit), allant de l'infini au cercle $|w| = \varepsilon$, puis de ce cercle parcouru depuis l'angle $-\pi + \alpha$ jusqu'à l'angle $+\pi - \alpha$, et enfin d'une demi-droite d'argument angulaire constant égal à $+\pi - \alpha$ allant du cercle $|w| = \varepsilon$ à l'infini.

Le second chemin (figure 5) est formé d'une demi-droite située juste en-dessous (à la distance ε) de la coupure, puis d'un demi-cercle de rayon ε contournant 0, puis d'une demi-droite située juste au-dessus (à la distance ε) de la coupure.

On a vu (III.6) que les fonctions puissance s'exprimaient le plus aisément en représentation trigonométrique, de sorte que le chemin du premier type sera le plus commode ; on posera en effet $w = re^{\pm i(\pi-\alpha)}$ sur les parties

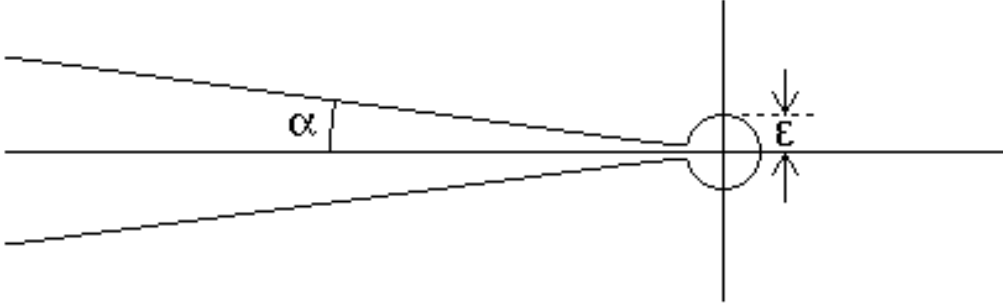


figure 4

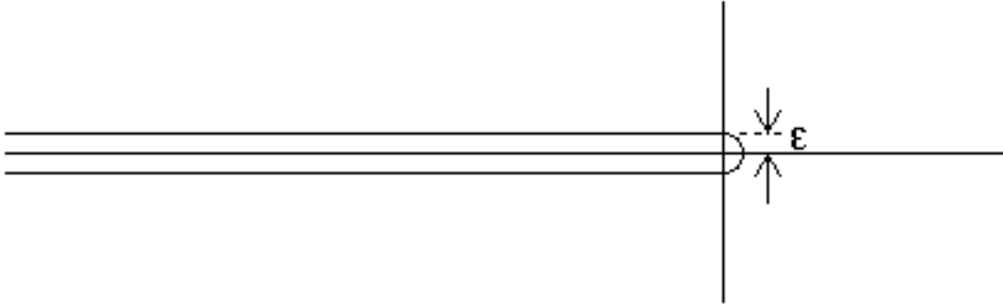


figure 5

rectilignes, et $w = \varepsilon e^{i\theta}$ sur la partie circulaire, de sorte que la fonction à intégrer se paramètrera comme suit :

$$[w^{-z}]_1 e^w = \begin{cases} r^{-z} e^{iz(\pi-\alpha)} e^{-r e^{i\alpha}} & \text{sur la première demi-droite;} \\ \varepsilon^{-z} e^{-iz\theta} e^{\varepsilon e^{i\theta}} & \text{sur la partie circulaire;} \\ r^{-z} e^{-iz(\pi-\alpha)} e^{-r e^{-i\alpha}} & \text{sur la seconde demi-droite;} \end{cases}$$

(on a remplacé partout ci-dessus $e^{i\pi}$ par -1). Avec ce paramétrage, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-z} \left[e^{i\alpha + iz(\pi-\alpha) - r e^{i\alpha}} - e^{-i\alpha - iz(\pi-\alpha) - r e^{-i\alpha}} \right] dr \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1-z} \int_{-\pi+\alpha}^{+\pi-\alpha} e^{i(1-z)\theta + \varepsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-z} e^{-r \cos \alpha} \sin \{ \alpha + z[\pi - \alpha] - r \sin \alpha \} dr \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1-z} \int_{-\pi+\alpha}^{+\pi-\alpha} e^{i(1-z)\theta + \varepsilon e^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

Pour $\Re z < 1$, la partie de l'intégrale provenant du demi-cercle tend vers zéro, à cause du facteur ε^{1-z} , et les valeurs de la fonction à intégrer sur les deux parties rectilignes tendent, uniformément sur tout intervalle $] -\infty, -\eta]$, vers les valeurs-limites sur la coupure lorsque α tend vers zéro (de sorte qu'on peut passer à la limite dans les intégrales). Par contre pour $\Re z \geq 1$, la partie de l'intégrale provenant du demi-cercle tend vers l'infini et compense les divergences des intégrales sur les parties rectilignes. C'est pourquoi le cas où $\Re z < 1$ est bien plus commode pour calculer (il dispense de calculer la contribution semi-circulaire, ce qui, soit dit en passant, serait très difficile).

Si (pour $z < 1$) on effectue ce passage à la limite, avec $\alpha \rightarrow 0$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r^{-z} e^{-r} dr \times \sin \pi z$$

Dans le membre de gauche ci-dessus on reconnaît l'intégrale eulérienne de deuxième espèce, de sorte que

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1-z) \sin \pi z$$

Mais en utilisant la formule des compléments (théorème 2), cela devient

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \tag{6.4}$$

Cette égalité s'appelle *formule de Hankel*. Elle a été obtenue en supposant $z < 1$, mais nous savons que $1/\Gamma(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier (théorème 6); nous avons vu aussi plus haut que $\mathcal{H}(z)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier. Par conséquent, d'après le théorème des zéros isolés (principe du prolongement analytique), $\mathcal{H}(z)$ est *partout* égale à $1/\Gamma(z)$.

La formule de Hankel présente l'avantage d'être une représentation intégrale de $1/\Gamma(z)$, alors que les autres représentations intégrales de ce chapitre donnent $\Gamma(z)$. Nous verrons l'aspect pratique de cette représentation lorsque nous calculerons les transformées de Fourier des fonctions puissance.

Il s'agit en effet d'intégrales telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{[(ix)^\alpha]_1} dx \tag{6.5}$$

pour α réel (ou complexe). Ces intégrales sont toujours divergentes : à l'infini si $\alpha \leq 1$ (ou $\Re \alpha < 1$), en zéro si $\alpha \geq 1$. Mais pour $\alpha \geq 1$ on peut la rendre convergente en remplaçant l'intégration sur l'axe réel $] -\infty, +\infty [$

Fonctions eulériennes

par une intégration sur un chemin qui coïncide avec l'axe réel en dehors d'un voisinage de zéro, mais contourne la singularité zéro en quittant l'axe réel. Un tel procédé pour donner un sens à une intégrale divergente est courant, surtout en Physique (Cauchy l'avait également employé). Si pour $\xi > 0$ on remplace le paramétrage de x le long d'un tel chemin par celui de $w = ix\xi$ (ne pas confondre cette opération avec un changement de variable), on voit que 6.5 est la *même* chose que

$$\xi^{\alpha-1} \int_H e^w [(w)^{-\alpha}]_1 dw$$

où H est un chemin de Hankel. On reconnaît ci-dessus l'intégrale de Hankel.

Nous reviendrons de manière plus approfondie sur les détails quand nous calculerons ces transformées de Fourier.

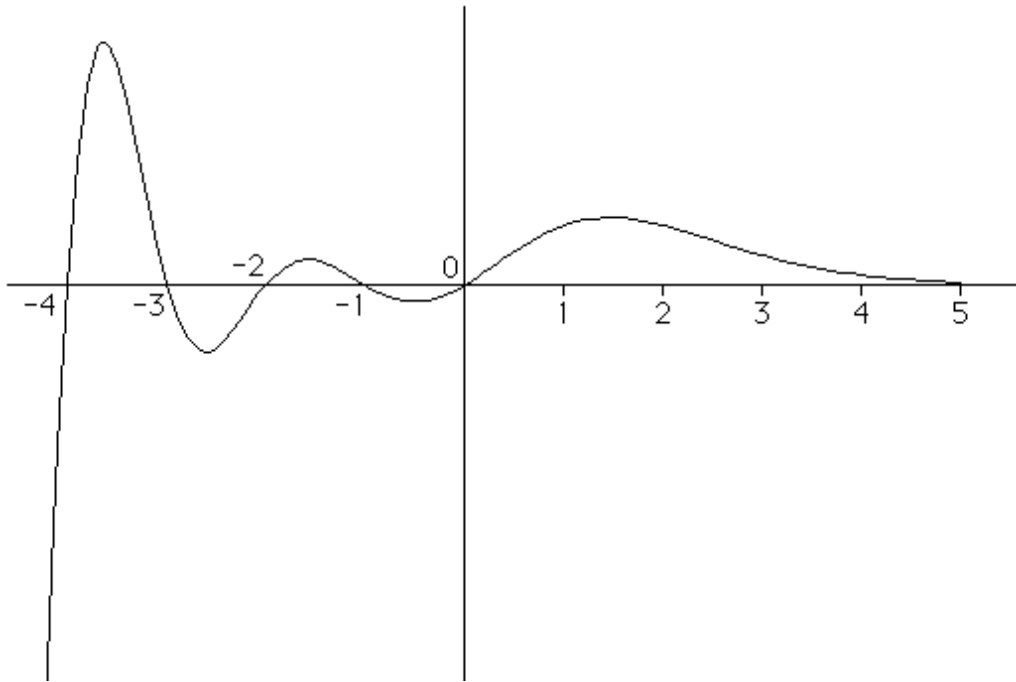


figure 6

Graphique de la fonction $\mathcal{H}(x) = 1/\Gamma(x)$ pour $-4.5 < x < +5$. Les extrema entre les entiers négatifs augmentent factoriellement, de sorte qu'il est impossible de montrer un graphique au-delà de $x = -5$.