

# I. FORMULE DE GREEN.

## 1. Intégrales curvilignes.

En Mécanique ou en Électricité, on est souvent amené à considérer l'intégrale d'une quantité le long d'un chemin curviligne. Soit par exemple dans le plan un point matériel soumis à un champ de forces  $\vec{F}(x, y)$ . Lorsque le point matériel effectue un déplacement rectiligne  $\overrightarrow{AB}$ , le travail du champ de force  $\vec{F}$  est le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ . Mais si le point matériel se déplace le long d'une courbe, il faut approcher la courbe par un polygone formé d'un grand nombre de déplacements rectilignes infinitésimaux  $\overrightarrow{A_0A_1}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}$ , ...  $\overrightarrow{A_{N-1}A_N}$ ; le travail du champ de forces le long de la courbe est alors approché par la somme

$$\sum_{j=0}^{N-1} \vec{F}(A_j) \cdot \overrightarrow{A_jA_{j+1}} \quad (1.1)$$

dont la limite lorsque les déplacements  $\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$  tendront vers zéro et  $N$  conjointement vers l'infini, sera l'intégrale

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (1.2)$$

le symbole  $\gamma$  représentant la courbe (on précisera plus loin son sens mathématique).

Appelons  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  les composantes du vecteur  $\vec{F}$  selon  $x$  et  $y$ , et  $x_j, y_j$  les coordonnées du point  $A_j$ ; l'expression  $\vec{F}(A_j) \cdot \overrightarrow{A_jA_{j+1}}$  s'écrira  $a(x_j, y_j) [x_{j+1} - x_j] + b(x_j, y_j) [y_{j+1} - y_j]$  et la somme 1.1 deviendra

$$\sum_{j=0}^{N-1} a(x_j, y_j) [x_{j+1} - x_j] + b(x_j, y_j) [y_{j+1} - y_j] \quad (1.3)$$

Lorsque les déplacements  $\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$  tendront vers zéro, la somme 1.3 tendra vers l'intégrale

$$\int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy \quad (1.4)$$

Lorsqu'on veut calculer effectivement de telles intégrales, dites curvilignes, on doit paramétrer la courbe  $\gamma$ ; les coordonnées  $x, y$  d'un point de

### Formule de Green

la courbe sont alors fonction d'un paramètre  $t$  qui parcourt un intervalle :  $x(t), y(t)$  pour  $t_0 < t < T$ . Les points  $A_j$  de la courbe, de coordonnées  $x_j, y_j$ , correspondent alors à des valeurs discrètes de l'intervalle  $[t_0, T]$  :  $x_j = x(t_j)$  et  $y_j = y(t_j)$ , et bien entendu  $t_N = T$ . La somme 1.1 (ou 1.3) devient, en introduisant  $x'(t) = dx/dt$  et  $y'(t) = dy/dt$  :

$$\sum_{j=0}^{N-1} [a(x(t_j), y(t_j)) x'(t_j) + b(x(t_j), y(t_j)) y'(t_j)] [t_{j+1} - t_j] \quad (1.5)$$

puisque  $[x_{j+1} - x_j] \simeq x'(t_j) [t_{j+1} - t_j]$  et  $[y_{j+1} - y_j] \simeq y'(t_j) [t_{j+1} - t_j]$ .

Faire tendre les déplacements  $\overrightarrow{A_j A_{j+1}}$  vers zéro équivaut bien sûr à faire tendre les quantités  $t_{j+1} - t_j$  vers zéro, de sorte que la somme 1.5 aura pour limite l'intégrale

$$\int_{t_0}^T [a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t)] dt \quad (1.6)$$

Cela montre quel est le sens mathématique exact de l'intégrale 1.2 ou 1.4 : après paramétrage, elles se ramènent à des intégrales au sens usuel.

Tout le raisonnement précédent repose sur l'hypothèse que la courbe possède bien un paramétrage différentiable (on dit que la courbe est différentiable). On peut étendre le procédé à des courbes qui ne possèdent pas globalement un tel paramétrage, mais qu'on peut découper en portions qui en possèdent chacun un (de telles courbes sont dites différentiables par morceaux), car l'intégrale curviligne est alors la somme des intégrales sur chaque morceau. On ne peut pas l'étendre à des courbes plus irrégulières, telles que par exemple les courbes fractales ; ces dernières exigent alors l'introduction de nouveaux concepts spécifiques.

Lorsqu'on découpe un chemin en morceaux dont chacun possède un paramétrage différentiable, on dit qu'on effectue une *décomposition* du chemin. L'opération inverse, consistant à recoller des chemins qui jusque là avaient été considérés séparément, s'appelle la *concaténation*. Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins, ayant chacun le paramétrage

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad t &\mapsto x_1(t), y_1(t) \quad 0 < t < S \\ \gamma_2 : \quad t &\mapsto x_2(t), y_2(t) \quad 0 < t < T \end{aligned} \quad (1.7)$$

alors le chemin noté  $\gamma$

$$\gamma : \quad t \mapsto x(t), y(t) \quad 0 < t < S + T \quad (1.8)$$

tel que

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} x_1(t) & \text{si } 0 < t < S \\ x_2(t - S) & \text{si } S < t < S + T \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} y_1(t) & \text{si } 0 < t < S \\ y_2(t - S) & \text{si } S < t < S + T \end{cases} \end{aligned}$$

est appelé la concaténation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ; on note  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Il n'est pas nécessaire que  $x_1(S) = x_2(0)$  et  $y_1(S) = y_2(0)$  pour que la concaténation soit définie : un chemin peut être formé de morceaux *non connexes*, c'est-à-dire de morceaux qui ne se touchent pas.

L'intégrale est évidemment additive par rapport à la concaténation :

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} a \, dx + b \, dy = \int_{\gamma_1} a \, dx + b \, dy + \int_{\gamma_2} a \, dx + b \, dy \quad (1.9)$$

Étant donné un chemin  $\gamma$ , on désignera aussi par  $-\gamma$  le chemin qui consiste à parcourir  $\gamma$  en sens inverse; si  $x(t)y(t)$  ( $0 < t < T$ ) est un paramétrage de  $\gamma$ ,  $x(T-t)y(T-t)$  ( $0 < t < T$ ) est un paramétrage de  $-\gamma$ . On aura évidemment :

$$\int_{-\gamma} a \, dx + b \, dy = - \int_{\gamma} a \, dx + b \, dy \quad (1.10)$$

En effet :

$$\begin{aligned} &\int_{-\gamma} a(x, y) \, dx + b(x, y) \, dy = \\ &= \int_0^T [a(x(T-t), y(T-t)) x'(T-t) + b(x(T-t), y(T-t)) y'(T-t)] \, dt = \\ &= \int_T^0 [a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t)] \, dt \end{aligned}$$

## 2. Intégrales doubles.

Nous ne présentons pas ici la théorie la plus générale possible, qui serait très dispendieuse en temps, mais seulement la théorie qui présente (de très loin) le meilleur rapport qualité/prix. Elle permet de couvrir tous les cas où on peut *effectivement* calculer<sup>(1)</sup>, et est très simple.

Considérons d'abord le cas d'un domaine  $U$  du plan délimité par une courbe fermée  $\gamma$ , ayant les propriétés suivantes :

---

<sup>(1)</sup> C'est-à-dire que les cas qui exigent des théories plus sophistiquées sont tous des cas où le calcul *effectif* est impossible.

## Formule de Green

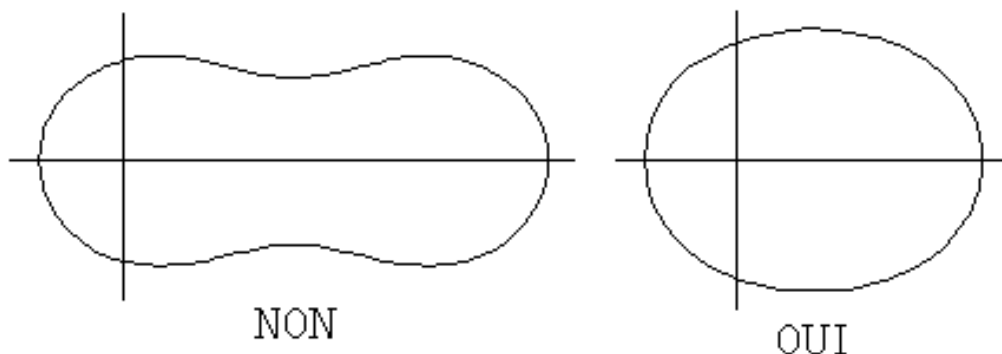


figure 1

- a) la courbe  $\gamma$  est différentiable par morceaux;
- b) toute droite parallèle à l'un des axes de coordonnées coupe la courbe en au plus deux points (voir figure 1).

Un tel domaine  $U$  est délimité par deux courbes paramétrables en  $x$ , et aussi par deux courbes paramétrables en  $y$ ; en effet, d'après la propriété b), les points du domaine  $U$  ayant pour abscisse  $x$  sont tels que  $y_0(x) < y < y_1(x)$ , et de même les points du domaine  $U$  ayant pour ordonnée  $y$  sont tels que  $x_0(y) < x < x_1(y)$ . On peut dire que le domaine  $U$  est limité en bas par la courbe paramétrée  $y = y_0(x)$  et en haut par la courbe paramétrée  $y = y_1(x)$ , ou encore que le domaine  $U$  est limité à gauche par la courbe paramétrée  $x = x_0(y)$  et à droite par la courbe paramétrée  $x = x_1(y)$ . Pour la suite, il suffira que ces différentes courbes soient différentiables par morceaux.

Nous allons définir une intégrale double

$$\iint_U f(x, y) \, dx \, dy$$

comme étant égale à l'intégrale simple

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) \, dx \tag{2.1}$$

où  $x_0$  est le minimum de la fonction  $y \mapsto x_0(y)$ ,  $x_1$  le maximum de la fonction  $y \mapsto x_1(y)$ , et

$$g(x) = \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y) \, dy \tag{2.2}$$

L'intégrale double se ramène ainsi à deux intégrales simples.

Pour que cette définition présente un minimum de cohérence, il faut que l'intégrale simple

$$\int_{y_0}^{y_1} h(y) dy \quad (2.3)$$

où  $y_0$  est le minimum de la fonction  $x \mapsto y_0(x)$ ,  $y_1$  le maximum de la fonction  $x \mapsto y_1(x)$ , et

$$h(y) = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx \quad (2.4)$$

ait la même valeur que 2.1. Les fonctions  $g(x)$  et  $h(y)$  sont appelées les *intégrales partielles* de l'intégrale double.

Donnons un exemple classique où 2.3 et 2.1 ne coïncident pas, ce qui sous-entend évidemment que l'intégrale double n'est pas définie, quoique les quatre intégrales simples 2.1, 2.2, 2.3, et 2.4 le soient. On prend pour  $U$  le carré  $[-1, +1] \times [-1, +1]$  et pour  $f(x, y)$  la fonction  $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ . On remarque que cette fonction est égale à  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2}$ , donc :

$$g(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{x^2 + 1}$$

On remarquera cependant que l'intégrale ci-dessus n'est pas convergente si  $x = 0$ , quoique le calcul par primitives soit appliqué formellement (et c'est là que se trouve le pot-aux-roses). On en déduit :

$$\int_{-1}^{+1} g(x) dx = 2 \arctan(x) \Big|_{-1}^{+1} = \pi$$

Par ailleurs on constate aussi que  $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 + y^2}$ , donc :

$$h(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 + y^2} dx = \frac{-x}{x^2 + y^2} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{-2}{1 + y^2}$$

Là aussi, l'intégrale n'est pas convergente si  $y = 0$  ; mais l'intégrale de  $h(y)$  l'est :

$$\int_{-1}^{+1} h(y) dy = -2 \arctan(y) \Big|_{-1}^{+1} = -\pi$$

Les deux résultats ne sont pas égaux (qu'ils soient ici égaux en valeur absolue est inessentiel : si on avait pris un domaine non symétrique par rapport à l'origine il n'en serait pas ainsi). Cela est évidemment dû à la singularité de la fonction  $f(x, y)$  au point  $(0, 0)$  : en fait, l'intégrale double *diverge* en ce point. Mais on remarquera que cette divergence n'empêche pas les fonctions  $g(x)$  et  $h(y)$  d'être parfaitement définies et continues partout sur  $[-1, +1]$ .

### Formule de Green

Cela montre que l'existence des intégrales 2.1 ou 2.3 n'est pas un critère suffisant pour donner un sens correct à l'intégrale double. Cette dernière se définit comme la limite d'une somme discrète, qui doit être indépendante de la discrétisation. Cela fonctionne très bien lorsque  $f$  est une fonction continue :

**Théorème.** Soit  $U$  un domaine fermé et borné du plan vérifiant les conditions a) et b) ci-dessus, donc délimité d'une part par les courbes  $x \mapsto y_0(x)$  (en bas) et  $x \mapsto y_1(x)$  (en haut), d'autre part par les courbes  $y \mapsto x_0(y)$  (à gauche) et  $y \mapsto x_1(y)$  (à droite). Soit  $f(x, y)$  une fonction continue sur  $U$ . Alors

$$\int_{y_0}^{y_1} h(y) dy = \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx \quad (2.5)$$

**Démonstration.** On se ramène à la définition de l'intégrale simple. Découpons les abscisses et les ordonnées selon des subdivisions discrètes  $x_j$  et  $y_j$  (pour éviter la confusion avec  $x_0, x_1, y_0, y_1$ , déjà définis, on peut convenir que ces indices  $j$  et  $k$  prennent leurs valeurs à partir de 1000 et non à partir de zéro ; ceci est du détail). Par définition de l'intégrale simple, on peut dire que

$$g(x_j) = \int_{y_0}^{y_1} f(x_j, y) dy = \lim_y \sum_k f(x_j, y_k) [y_{k+1} - y_k] \quad (2.6)$$

la somme se faisant sur les indices  $k$  pour lesquels  $y_0(x_j) < y_k < y_1(x_j)$  et la limite (notée avec l'indice  $y$ ) étant prise pour  $\sup |y_{k+1} - y_k|$  tendant vers zéro. Appliquons la même définition de l'intégrale simple à 2.1 :

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \lim_x \sum_j g(x_j) [x_{j+1} - x_j] \quad (2.7)$$

Cette fois la somme se fait sur les indices  $j$  pour lesquels  $x_0(y_j) < x_j < x_1(y_j)$  et la limite (notée avec l'indice  $x$ ) est prise pour  $\sup |x_{j+1} - x_j|$  tendant vers zéro. En combinant 2.6 et 2.7 on obtient

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \lim_x \sum_j \lim_y \sum_k f(x_j, y_k) [x_{j+1} - x_j] [y_{k+1} - y_k] \quad (2.8)$$

Il est clair que la somme (finie) effectuée sur les indices  $j$  et  $k$  dans 2.8 ne dépend pas de l'ordre de sommation, et qu'on peut tout aussi bien la sommer d'abord selon  $k$  et ensuite selon  $j$  ; mais il n'est pas aussi immédiatement évident qu'on peut prendre les limites dans n'importe quel ordre. Le raisonnement suivi pour parvenir à 2.8 implique qu'il faut prendre la limite (pour  $\sup |y_{k+1} - y_k|$  tendant vers zéro) de la somme sur  $k$  *avant* d'effectuer la sommation sur  $j$ .

De façon analogue, on voit que

$$\int_{y_0}^{y_1} h(y) dy = \lim_y \sum_k \lim_x \sum_j f(x_j, y_k) [x_{j+1} - x_j] [y_{k+1} - y_k] \quad (2.8 \text{ bis})$$

Cette fois, il faut prendre la limite (pour  $\sup |x_{j+1} - x_j|$  tendant vers zéro) de la somme sur  $j$  *avant* d'effectuer la sommation sur  $k$ . Rien ne prouve a priori que les deux opérations conduisent au même résultat puisque les passages à la limite ne se font pas dans le même ordre. Toutefois, si les limites sont uniformes, c'est-à-dire si la limite, pour  $\sup |x_{j+1} - x_j|$  tendant vers zéro, de la somme  $\sum_j f(x_j, y_k) [x_{j+1} - x_j] [y_{k+1} - y_k]$  est uniforme par rapport aux  $y_k$ , ou si la limite, pour  $\sup |y_{k+1} - y_k|$  tendant vers zéro, de la somme  $\sum_j f(x_j, y_k) [x_{j+1} - x_j] [y_{k+1} - y_k]$  est uniforme par rapport aux  $x_j$ , alors le résultat ne dépend plus de l'ordre et les deux opérations conduiront au même résultat.

Il est facile (quoique fastidieux) de vérifier que si la fonction  $f(x, y)$  est uniformément continue, les limites en question sont uniformes. Si le domaine  $U$  est borné (ce qui est le cas avec nos hypothèses concernant son bord), la fonction  $f(x, y)$  sera automatiquement *uniformément* continue dès lors qu'elle sera simplement continue. On ne donne pas ici cette vérification de routine, qu'il suffit de se fatiguer à écrire, mais que personne ne lirait. On se contente d'insister sur le fait que la *raison pour laquelle le théorème est vrai* est cette affaire de limite uniforme. La démonstration s'achève donc ainsi.

Un autre point encore mérite une remarque : la continuité de  $f(x, y)$  est une condition *suffisante* pour l'uniformité des limites, mais elle n'est pas *nécessaire*. On peut affaiblir ces conditions et montrer qu'on obtient aussi l'uniformité des limites en supposant que la fonction  $f(x, y)$  n'a que des discontinuités de première espèce. Cette approche de l'intégrale est connue sous le nom de *théorie de l'intégrale de Riemann*. Les mathématiciens ont cherché à la fin du siècle dernier des approches plus générales, pouvant s'appliquer à des fonctions plus irrégulières. Ainsi, Henri Lebesgue a fait remarquer que la condition d'uniformité des limites n'a pas besoin d'être vraie partout, mais seulement en dehors d'un ensemble qui serait *négligeable* pour l'intégrale.

L'idée des ensembles négligeables s'explique comme suit. Considérons une suite infinie  $\mathcal{F}$  d'intervalles  $]a_k, b_k[$ , non nécessairement disjoints, et dont la réunion

$$F = \bigcup_{k=0}^{\infty} ]a_k, b_k[$$

recouvre entièrement un certain ensemble donné  $E$ , c'est-à-dire que  $E \subset F$ . La longueur totale de ces intervalles est la somme infinie  $\sum (b_k - a_k)$ ; elle peut être finie ou infinie, appelons la  $\ell(\mathcal{F})$ . Si l'ensemble  $E$  est tel qu'on puisse l'inclure dans des familles  $\mathcal{F}$

## Formule de Green

d'intervalles telles que  $\ell(\mathcal{F})$  puisse être rendu aussi petit qu'on veut, on dira que  $E$  est un *ensemble négligeable*. Il saute aux yeux que si par exemple  $E$  est l'intervalle  $]0, 1[$ , quelle que soit la manière de choisir les  $]a_k, b_k[$ , on ne pourra jamais faire descendre la valeur de  $\ell(\mathcal{F})$  en dessous de 1. Mais prenons pour  $E$  l'ensemble  $\mathbb{Q}_+$  des nombres rationnels  $> 0$ . Ces derniers sont tous de la forme  $r = p/q$  où  $p/q$  est une fraction irréductible (avec  $p$  et  $q$  entiers  $> 0$ ). À chacune de ces fractions irréductibles  $r = p/q$ , on peut associer l'intervalle  $[a_r, b_r] = [r - 2^{-p-q}, r + 2^{-p-q}]$ . Il est clair par construction que l'ensemble  $E$  des fractions positives est contenu dans la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire que la famille  $\mathcal{F}_0$  de ces intervalles recouvre entièrement  $E = \mathbb{Q}_+$ ; elle est indexée par les couples  $p, q$  d'entiers  $> 0$  et premiers entre eux. La longueur de l'intervalle  $[a_r, b_r]$  étant  $2^{1-p-q}$ , on peut dire alors que pour  $\mathcal{F}_0$

$$\ell(\mathcal{F}_0) = \sum_{p,q} 2^{1-p-q}$$

la somme étant effectuée sur tous les couples  $p, q$  d'entiers  $> 0$  et premiers entre eux. Cette somme est forcément inférieure à ce qu'on obtiendrait en sommant sur tous les couples  $p, q$  d'entiers  $> 0$  et non nécessairement premiers entre eux. Or ces derniers peuvent être comptés comme suit : il y en a un tel que  $p + q = 2$ , deux tels que  $p + q = 3$ , trois tels que  $p + q = 4$ , ...  $k - 1$  tels que  $p + q = k$ , ...

**exercice :**

a) Montrer qu'on a l'inégalité  $\ell(\mathcal{F}_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{1-k}$ .

b) Conclure que  $\ell(\mathcal{F}_0) \leq 2$ .

c) On prend maintenant la famille  $\mathcal{F}_n$  des intervalles  $]r - 2^{-p-q-n}, r + 2^{-p-q-n}[$  (avec  $p, q$  entiers  $> 0$  et premiers entre eux). Constater que pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble  $E$  est toujours inclu dans leur réunion.

d) Vérifier que  $\ell(\mathcal{F}_n) \leq 2^{-n+1}$ .

D'après l'inégalité de la moyenne, on peut conclure que si  $f(x)$  est une fonction bornée, positive, et majorée par  $M$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_E |f(x)| dx \leq \int_{F_n} |f(x)| dx \leq M \times \ell(F_n)$$

de sorte que la contribution de l'ensemble  $E$  à l'intégrale est nulle. Ainsi, dans notre exemple,  $\mathbb{Q}_+$  est un *ensemble négligeable* au sens de H. Lebesgue.

On peut bien sûr étendre cette notion d'ensembles négligeables au plan ou à l'espace (au lieu de prendre des intervalles, on prendra des carrés ou des cubes). Henri Lebesgue<sup>(2)</sup> a montré que les conditions que doivent satisfaire les fonctions pour qu'on puisse définir leur intégrale de façon logiquement correcte n'ont pas besoin d'être vérifiées dans tout le domaine d'intégration, mais seulement en dehors d'un ensemble négligeable.

Il existe beaucoup de théories mathématiques de l'intégration. La plus générale, qui sert de référence pour les mathématiciens, est la théorie de Lebesgue. La plus simple est celle de Riemann que nous utilisons ici, et qui fonctionne pour les fonctions continues par morceaux. Elle consiste simplement à dire que l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est la limite des sommes (dites de Riemann)  $\sum_j f(x_j) (x_{j+1} - x_j)$ , où  $x_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ) est une subdivision discrète de l'intervalle  $[a, b]$  par des points  $x_j$  tels que  $\varepsilon = \sup_j |x_{j+1} - x_j|$  tende vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini. On montre (facilement) que ces sommes

---

<sup>(2)</sup> *Sur une généralisation de l'intégrale définie*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, volume **132** (1901), pages 1025 – 1028.



convergent bien vers une limite *indépendante de la subdivision* lorsque la fonction  $f$  est continue (lorsqu'elle est continue par morceaux, on s'y ramène par simple découpage).

Mais notons bien la condition que  $\varepsilon = \sup_j |x_{j+1} - x_j|$  tende vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini : elle signifie que les pas de la subdivision tendent *uniformément* vers zéro. On peut construire une théorie de l'intégration plus générale (J. Kurzweil 1957)<sup>(3)</sup>, en considérant des discrétisations dont le pas ne tend pas uniformément vers zéro (en gros : on fait tendre le pas vers zéro plus vite là où la fonction à intégrer est irrégulière que là où elle est continue ; cette astuce remplace le recours aux ensembles négligeables de Lebesgue). Toutes les théories de l'intégration passent d'une façon ou d'une autre par l'intermédiaire de sommes discrètes, et ne diffèrent au fond que par les conditions de convergence.

C'est pourquoi on peut dire ceci : l'hypothèse que  $f$  est continue sur le domaine  $U$  (frontière comprise) entraîne que les sommes discrètes considérées (ici les sommes de Riemann) puissent être sommées dans n'importe quel ordre sans changer leur limite ; mais elle n'est pas *nécessaire* pour qu'il en soit ainsi.

Dans les calculs *pratiques* il est très rare de rencontrer des cas qui nécessitent la théorie de Lebesgue ; si la fonction est discontinue, on pourra presque toujours découper le domaine en morceaux sur chacun desquels elle sera continue. Par contre on rencontrera fréquemment le cas où la fonction  $f$  a une intégrale divergente, c'est-à-dire que la condition nécessaire pour que les sommes discrètes puissent être sommées dans n'importe quel ordre sans changer leur limite n'est pas satisfaite. Ces cas sont alors indépendants de la théorie : la différence entre 2.1 et 2.3 ne va pas disparaître si on prend l'intégrale au sens de Lebesgue ou de Kurzweil.

C'est pourquoi l'approche élémentaire adoptée ici est largement suffisante pour tous les calculs pratiques. Toutefois, l'intégrale de Lebesgue est la seule qui convient pour avoir une théorie correcte des espaces  $\mathbb{L}^2$  (voir chapitres **X** et **XI**).

### 3. Relations entre intégrales doubles et curvilignes.

Supposons que  $f(x, y)$  soit la dérivée partielle, soit par rapport à  $x$ , soit par rapport à  $y$ , d'une fonction connue ; c'est-à-dire que

$$f = \frac{\partial a}{\partial y} \quad \text{ou} \quad f = \frac{\partial b}{\partial x}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de la section précédente, on supposera ces dérivées partielles continues sur le domaine *fermé*  $U$  vérifiant les conditions a et b de la section 2. On peut alors écrire les intégrales partielles :

$$\begin{aligned} \text{— si } f = \frac{\partial a}{\partial y} : \\ g(x) = \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) dy = a(x, y_1(x)) - a(x, y_0(x)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{— si } f = \frac{\partial b}{\partial x} :$$

---

<sup>(3)</sup> J. KURZWEIL *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czech. Math. Journal, 1957, pages 418 – 446.

### Formule de Green

$$h(y) = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) dx = b(x_1(y), y) - b(x_0(y), y) \quad (3.2)$$

Si on appelle  $\gamma$  la courbe fermée qui délimite le domaine  $U$ , on peut interpréter les fonctions  $x \mapsto y_0(x)$  et  $x \mapsto y_1(x)$ , ou bien  $y \mapsto x_0(y)$  et  $y \mapsto x_1(y)$ , comme des paramétrages de cette courbe. En effet, lorsque  $x$  va de  $x_0$  à  $x_1$ , le point de coordonnées  $x, y_0(x)$  parcourt la partie inférieure de la courbe  $\gamma$ , puis, lorsque  $x$  revient de  $x_1$  à  $x_0$ , le point de coordonnées  $x, y_1(x)$  parcourt la partie supérieure de la courbe  $\gamma$ . Si nous paramétrons l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} a(x, y) dx$  avec ce paramétrage, nous obtenons conformément à 1.6, l'expression

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} a(x, y) dx &= \int_{x_0}^{x_1} a(x, y_0(x)) dx + \int_{x_1}^{x_0} a(x, y_1(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} a(x, y_0(x)) dx - \int_{x_0}^{x_1} a(x, y_1(x)) dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \\ &= - \iint_U \frac{\partial a}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

De la même façon, en prenant  $f = \frac{\partial b}{\partial x}$ , on obtiendrait en utilisant les paramétrages  $y \mapsto x_0(y)$  et  $y \mapsto x_1(y)$ :

$$\int_{\gamma} b(x, y) dy = + \iint_U \frac{\partial b}{\partial x} dx dy \quad (3.4)$$

En tenant compte de l'additivité des intégrales, et en regroupant ces deux résultats, on peut conclure par la relation

$$\int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \iint_U \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.5)$$

appelée *formule de Green*.

On a vu à la section précédente que les intégrales partielles peuvent être définies et continues même si  $\frac{\partial a}{\partial y}$  ou  $\frac{\partial b}{\partial x}$  ont une singularité qui fait diverger l'intégrale double; cela signifie que le membre de droite pourrait être une intégrale divergente, bien que le membre de gauche soit parfaitement défini. Quoique cela puisse faire l'objet d'une théorie à part entière, nous ne considérerons que le cas où le membre de droite est régulier, en supposant toujours pour cela que les dérivées partielles  $\frac{\partial a}{\partial y}$  et  $\frac{\partial b}{\partial x}$  sont continues.

#### 4. Domaines ne vérifiant pas la condition b.

La démonstration donnée jusqu'ici de la formule de Green suppose que le domaine  $U$  vérifie les conditions a) et b) édictées en section 2. Il est possible maintenant de montrer qu'elle reste vraie pour des domaines ne vérifiant que la condition a), c'est-à-dire des domaines de forme quelconque. Pour effectuer cette généralisation, on recourt à la méthode du *pontage*, que nous décrivons maintenant.

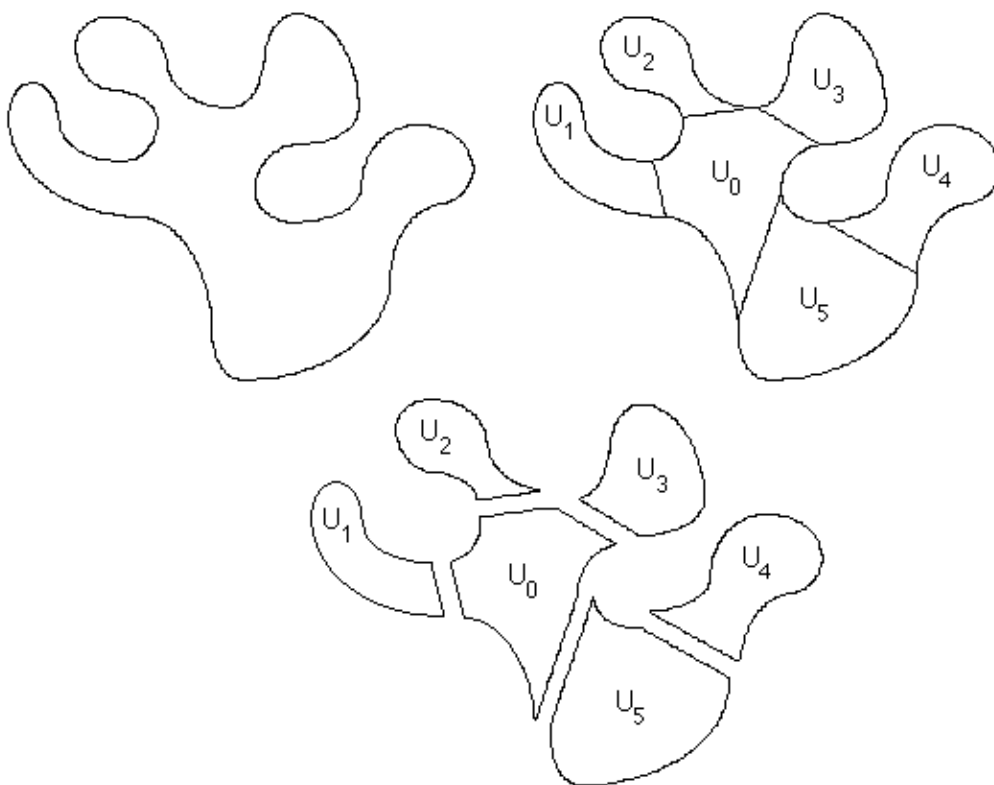


figure 2

Il est en effet toujours possible de découper n'importe quel domaine  $U$  du plan<sup>(4)</sup> en régions  $U_0, U_1, U_2, \dots$  qui vérifient la condition b), comme le montre la figure 2. Les régions  $U_j$  sont délimitées par des courbes fermées  $\gamma_j$ , différentiables par morceaux : ces courbes sont formées de fragments de la frontière  $\gamma$  de  $U$ , et de "ponts" (qui sont rectilignes sur la figure 2, mais rien n'impose qu'ils soient rectilignes).

L'intégrale double  $\iint_U$  ne peut pas être définie par la réduction à deux intégrations successives comme en 2 car le domaine  $U$  ne vérifie pas la

<sup>(4)</sup> Nous supposons toujours que le domaine est délimité par une courbe différentiable par morceaux.

### Formule de Green

condition **b**, mais on posera évidemment qu'elle est la somme des  $\iint_{U_j}$ , chacune de ces dernières étant réductible à deux intégrations successives ; en outre, la formule de Green démontrée précédemment s'applique séparément à chacun des domaines  $U_j$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \iint_U \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy &= \sum_j \iint_{U_j} f(x, y) dx dy \\ &= \sum_j \int_{\gamma_j} a(x, y) dx + b(x, y) dy \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lorsqu'on paramètre les chemins  $\gamma_j$  sur les morceaux qui forment les ponts, on constate que l'intégrale correspondante est toujours annulée par celle qui provient du domaine contigu, où le même pont est parcouru en sens inverse. En sommant les  $\int_{\gamma_j}$ , les contributions des ponts disparaîtront globalement, et seuls subsisteront les contributions des morceaux issus du chemin initial  $\gamma$ . De sorte que :

$$\begin{aligned} \iint_U \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy &= \sum_j \iint_{U_j} f(x, y) dx dy \\ &= \sum_j \int_{\gamma_j} a(x, y) dx + b(x, y) dy \\ &= \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ainsi la formule de Green reste valable pour des domaines de forme quelconque, et la condition **b**) n'était qu'un intermédiaire technique.

Un cas encore plus général est celui où le chemin  $\gamma$ , quoique fermé, n'est pas le bord d'un domaine. Des exemples banals de tels chemins sont donnés sur la figure 3. Nous appellerons *lacet* un chemin fermé différentiable par morceaux, et nous dirons qu'un lacet est *simple* s'il est le bord d'un domaine du plan, qu'il est *multiple*, *enchevêtré*, ou *entrelacé* dans le cas contraire. Les lacets de la figure 3 sont donc des lacets *enchevêtrés*.

La formule de Green peut être étendue à des lacets enchevêtrés, à condition d'y introduire les modifications adéquates.

La figure 4 montre comment procéder : elle montre (en haut) un chemin entrelacé  $\gamma$  qui ne peut être la frontière d'un domaine. Considérons le chemin "éclaté" représenté sur le bas de la figure 4. Ce chemin "éclaté" est formé de quatre chemins  $\gamma_j$  qui eux constituent chacun la frontière d'un domaine  $U_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ). On peut donc écrire

$$\sum_{j=0}^{j=3} \int_{\gamma_j} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \sum_{j=0}^{j=3} \iint_{U_j} \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy \quad (4.3)$$

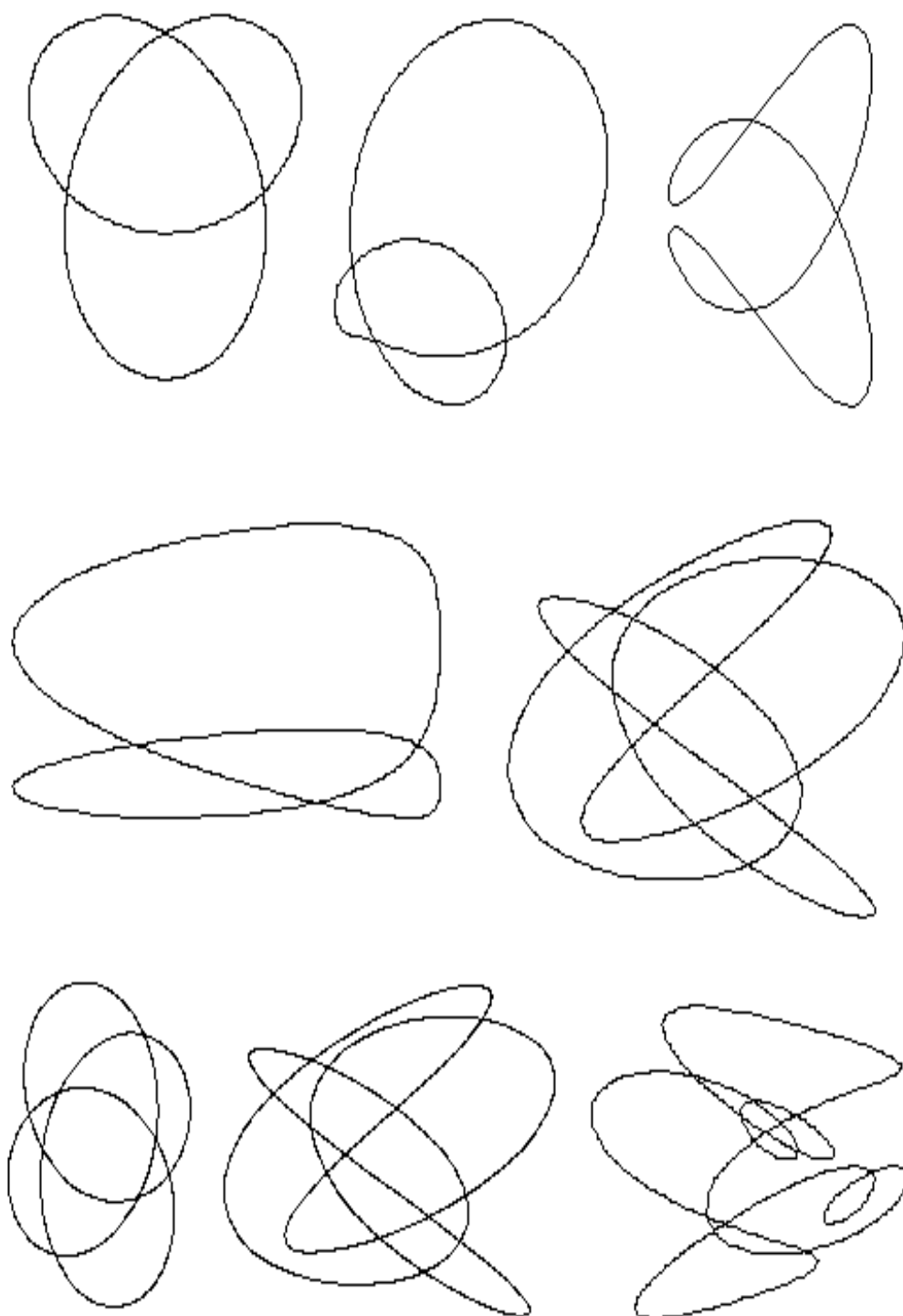


figure 3 : exemples de lacets enchevêtrés.

# Formule de Green

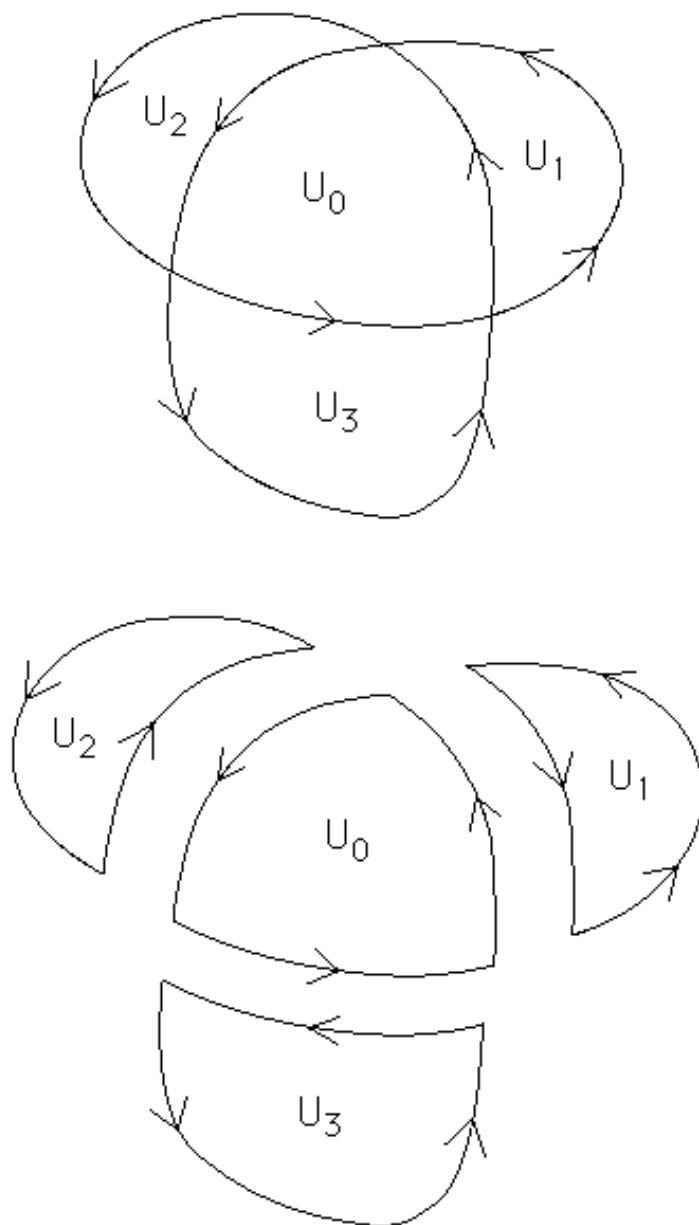


figure 4.

On peut voir en bas la version “éclatée” du chemin représenté en haut ; la formule de Green s’applique à chacun des morceaux.

Mais on constatera que dans la somme ci-dessus, les intégrales s'annulent deux à deux sur les parties dédoublées, alors qu'il n'en est pas ainsi dans l'intégrale sur le chemin initial (voir figure 4). Si on fait le bilan de tous les morceaux, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy &= \\ &= \sum_{j=1}^{j=3} \int_{\gamma_j} a(x, y) dx + b(x, y) dy + 2 \times \int_{\gamma_0} a(x, y) dx + b(x, y) dy \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le coefficient 2 devant le dernier terme du membre de droite compense les annulations mutuelles : en effet, si on fait simplement la somme sans coefficient, la contribution correspondant à  $\gamma_0$  disparaît complètement ; il faut donc la rajouter une seconde fois.

En appliquant la formule de Green à chacun des termes de la somme, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy &= \\ &= 2 \times \int_{U_0} \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy + 1 \times \sum_{j=1}^{j=3} \int_{U_j} \left[ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il est donc possible d'utiliser la formule de Green même pour des lacets multiples, à condition de faire le bilan des annulations mutuelles.

Pour conclure cette section, signalons encore que l'hypothèse que les dérivées partielles  $\frac{\partial a}{\partial y}$  et  $\frac{\partial b}{\partial x}$  soient continues sur  $U$  peut aisément être affaiblie en les supposant seulement continues par morceaux, en précisant comme suit le sens de cette expression :

**Définition :** Une fonction  $f(x, y)$  est continue par morceaux sur le domaine fermé  $U$  s'il existe une famille de domaines fermés  $U_j$  délimités par des courbes différentiables, et de fonctions  $f_j$  continues sur  $U_j$  telle que :

- $U$  est la réunion des  $U_j$  ;
- les intérieurs des  $U_j$  sont disjoints (seules leurs frontières peuvent se chevaucher) ;
- sur tout l'intérieur de  $U_j$ ,  $f$  coïncide avec  $f_j$  ;

Ce qu'il faut bien comprendre de cette définition, c'est que  $f$  peut être discontinue sur la frontière des  $U_j$ , mais doit avoir de chaque côté un prolongement par continuité ; une fonction  $f$  qui tend vers l'infini en des points situés sur les frontières des  $U_j$  peut être continue à l'intérieur des  $U_j$ , mais ne sera pas continue par morceaux sur  $U$ .

### Formule de Green

On peut alors dire que la formule de Green s'applique aussi au cas où les dérivées partielles  $\frac{\partial a}{\partial y}$  et  $\frac{\partial b}{\partial x}$  sont continues par morceaux sur  $U$ . En effet, il suffit de l'appliquer d'abord à chacun des morceaux  $U_j$ ; en faisant ensuite la somme, les intégrales curvilignes sur les frontières intérieures s'annuleront deux à deux, car les fonctions  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  seront, elles, continues.

### 5. Intégrales curvilignes réductibles par quadrature.

Lorsque l'expression  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  qui figure sous le signe  $\int_\gamma$  d'une intégrale curviligne est la différentielle d'une fonction connue  $f(x, y)$ , c'est-à-dire si

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df \quad (5.1)$$

autrement dit si  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  sont les dérivées partielles d'une même fonction, alors l'intégrale curviligne est aisément intégrable, sans même recourir à un paramétrage de la courbe. En effet, soit  $x(t), y(t)$  ( $t_0 < t < t_1$ ) un paramétrage de  $\gamma$ ; on aura par définition de l'intégrale curviligne :

$$\int_\gamma a(x, y) dx + b(x, y) dy = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \right] dt \quad (5.2)$$

Mais l'expression entre crochets est la dérivée de la fonction composée  $t \mapsto f(x(t), y(t))$ , de sorte que

$$\int_\gamma a(x, y) dx + b(x, y) dy = f(x(t_1), y(t_1)) - f(x(t_0), y(t_0)) \quad (5.3)$$

Les points  $M_0$  de coordonnées  $x(t_0), y(t_0)$  et  $M_1$  de coordonnées  $x(t_1), y(t_1)$  sont respectivement l'origine et l'extrémité du chemin, supposé ici être d'un seul tenant. Si le chemin est fermé (entrelacé ou non), on a évidemment  $M_0 = M_1$  et l'intégrale curviligne est forcément nulle. Cela recoupe la formule de Green, puisque dans le cas présentement considéré  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a}{\partial y}$ , et par conséquent l'expression sous l'intégrale double est nulle.

Le problème qui a longtemps intéressé les mathématiciens est la réciproque : étant donnée une expression de la forme  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$ , peut-on trouver des conditions simples sur les fonctions  $a$  et  $b$  pour que cette expression soit la différentielle d'une fonction ?

Nous venons de voir que si  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  est la différentielle d'une fonction  $f(x, y)$  sur un domaine  $\Omega$  du plan, alors son intégrale est nulle sur tout lacet contenu dans  $\Omega$ . La réciproque de cet énoncé est vraie :



*Si pour tout chemin fermé  $\gamma$  sur un domaine  $U$  du plan  $(x, y)$  l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

*est nulle, alors il existe une fonction  $f(x, y)$ , définie et différentiable sur  $\Omega$  telle que  $a = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $b = \frac{\partial f}{\partial y}$*

Il suffit en effet de poser

$$f(x_1, y_1) = \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

où  $\gamma$  est n'importe quel chemin, contenu dans  $\Omega$ , d'origine  $(x_0, y_0)$  et d'extrémité  $(x_1, y_1)$ . L'intégrale ne dépend pas du chemin, car si on prend deux chemins différents ayant tous deux  $(x_0, y_0)$  pour origine et  $(x_1, y_1)$  pour extrémité, alors le chemin formé par la concaténation du premier et du second parcouru en sens inverse est fermé. Pour calculer les dérivées partielles de  $f(x_1, y_1)$ , on considèrera séparément les deux fonctions  $x \mapsto f(x, y_1)$  et  $y \mapsto f(x_1, y)$ . Soit un chemin  $\gamma_h$  allant de  $(x_1, y_1)$  à  $(x_1 + h, y_1)$ , paramétré par  $t$  ( $0 < t < h$ ). Alors

$$\begin{aligned} f(x_1 + h, y_1) - f(x_1, y_1) &= \int_{\gamma_h} a(x, y) dx + b(x, y) dy \\ &= \int_0^h a(x_1 + t, y_1) dt \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que  $a = \frac{\partial f}{\partial x}$ . On procède de même pour la fonction  $y \mapsto f(x_1, y)$ .

Une autre réciproque est possible. Si  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  est la différentielle d'une fonction, alors  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ , car on sait que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

La réciproque serait donc :

*Si  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  sont deux fonctions différentiables sur un domaine  $\Omega$  telles que  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ , alors il existe une fonction  $f(x, y)$ , définie et différentiable sur  $\Omega$  qui satisfait les conditions  $a = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $b = \frac{\partial f}{\partial y}$*

Elle n'est pas toujours vraie : si on se réfère à la formule de Green, on voit que la condition  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$  entraîne que sur tout sous-domaine  $U$  de  $\Omega$ , délimité par le chemin fermé  $\gamma$ , on aura  $\int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$ ; mais cela ne signifie pas que l'intégrale est nulle pour *tout* chemin fermé : la formule de Green assure seulement qu'elle est nulle pour tout chemin fermé

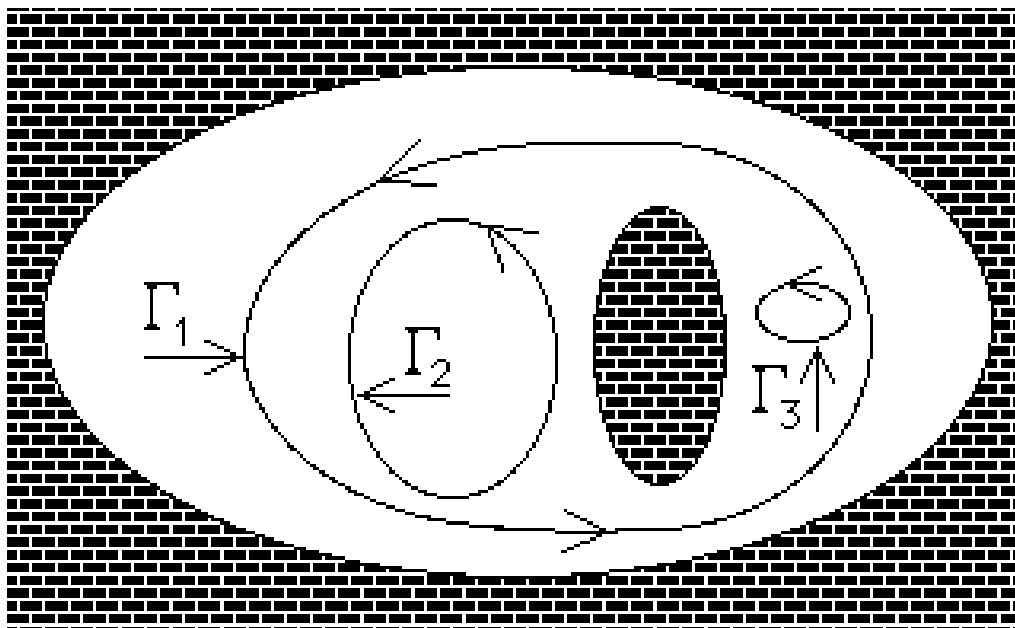


figure 5 : exemple de domaine à trou.

Bien que l'expression  $\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}$  soit nulle sur le domaine blanc, on ne peut pas déduire de la formule de Green que  $\int_{\Gamma_1} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$ , car il faudrait pour cela que  $\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}$  soit nulle *partout* à l'intérieur de la région délimitée par le chemin  $\Gamma_1$ . Par contre on a bien  $\int_{\Gamma_2} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$  et  $\int_{\Gamma_3} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$

qui est contenu, *ainsi que le domaine  $U$  qu'il délimite*, dans  $\Omega$ . La figure 5 illustre la nuance.

**Terminologie.** Lorsque les fonctions  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  satisfont à la condition  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ , on dit que la forme différentielle  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  est *fermée*; lorsqu'il existe une fonction  $f(x, y)$  telle que  $a = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $b = \frac{\partial f}{\partial y}$ , on dit que la forme différentielle  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  est *exacte*, et que  $f$  est la fonction *primitive* de la forme différentielle. La réciproque ci-dessus peut donc s'énoncer : *toute forme différentielle fermée est exacte*. On voit qu'elle est fautive dans le cas de la figure 5.

## 6. Domaines à trous.

Cette réciproque est donc parfois fautive, pour des domaines “à trous” (nous préciserons le sens de cette expression plus loin). Un exemple de domaine à trou est le plan privé de l'origine :  $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$  : c'est l'exemple le plus simple. Sur ce domaine, le contre-exemple le plus simple à la réciproque mentionnée ci-dessus est celui de l'expression différentielle

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad (6.1)$$

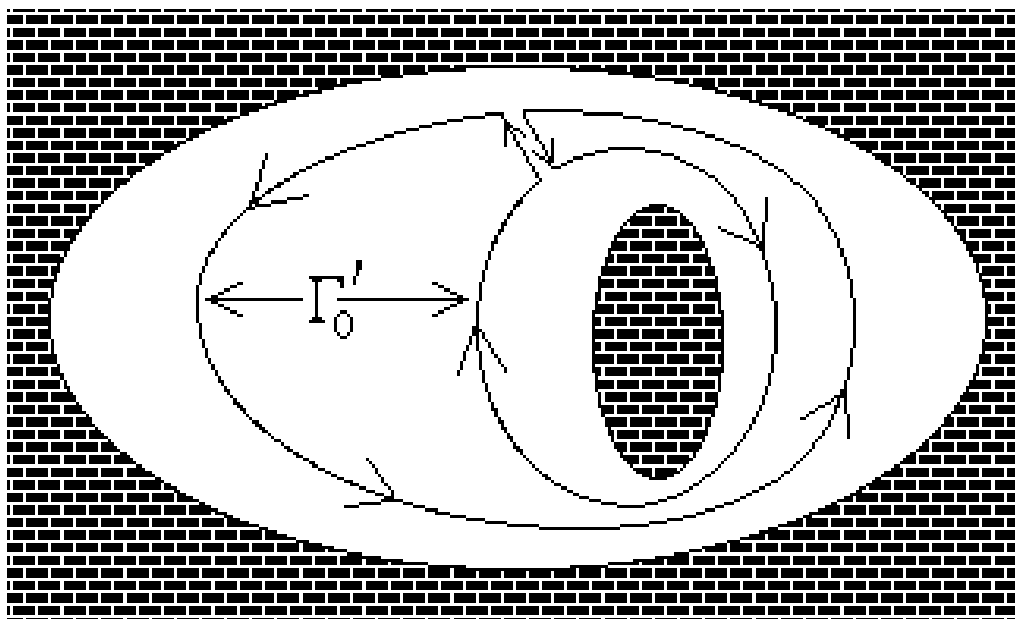
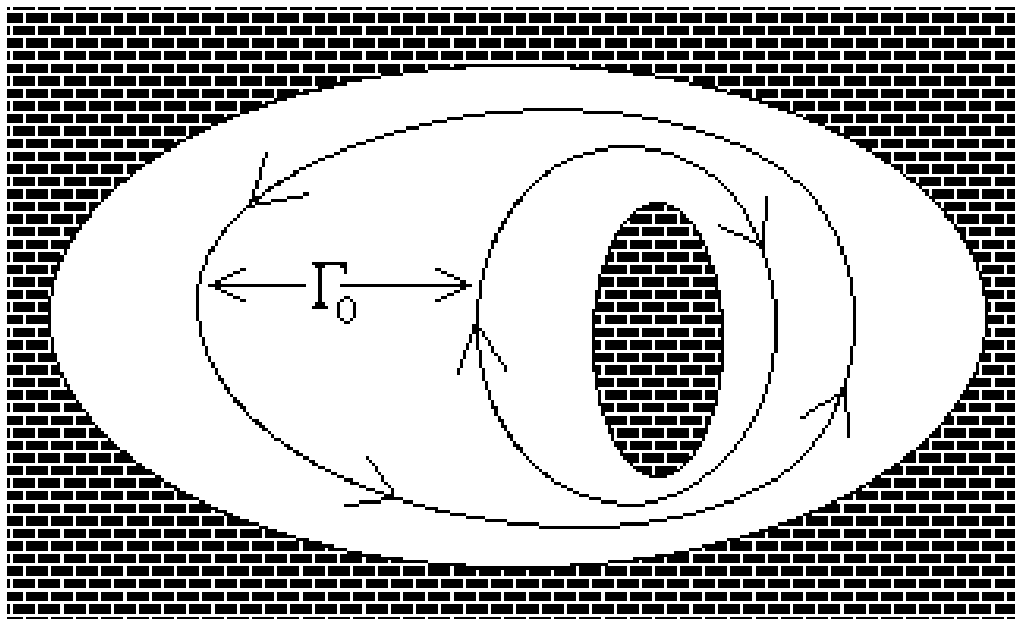


figure 6 : chemin à deux composantes

L'expression  $\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}$  étant nulle sur le domaine blanc, on peut déduire de la formule de Green que  $\int_{\Gamma'_0} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$ , car le chemin  $\Gamma'_0$  entoure une région entièrement contenue dans le domaine blanc. Par conséquent on aura aussi  $\int_{\Gamma_0} a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0$ .

On peut aussi exprimer ce résultat en disant que  $\int a(x, y) dx + b(x, y) dy$  a la même valeur sur les deux composantes (orientées dans le même sens) du chemin  $\Gamma_0$ .

### Formule de Green

Nous verrons dans la suite de ce cours des exemples variés, mais celui-ci est l'exemple-type.

Le calcul des dérivées donne

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (6.2)$$

et on constate que  $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ . Cette égalité a lieu seulement dans le domaine troué  $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ , puisque au point  $(0, 0)$  lui-même les fonctions  $a$  et  $b$  sont singulières; en particulier, on ne peut pas considérer une intégrale du type  $\iint_U [\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}] dx dy$  sur un domaine  $U$  qui contiendrait l'origine, puisque cette intégrale serait divergente. Par contre il n'y a aucun problème pour un domaine  $U$  qui ne contient pas l'origine. Cela implique que la formule de Green n'est applicable que pour des chemins qui ne contournent pas l'origine, et on ne peut donc pas en déduire que  $\int_\gamma a dx + b dy = 0$  si  $\gamma$  est un chemin qui entoure l'origine. Si on veut connaître la valeur de cette intégrale, il faut la calculer à la main.

Effectuons ce calcul dans le cas où  $\gamma$  est un cercle de centre l'origine et de rayon  $R$ . Le paramétrage est alors  $x(t) = R \cos t$ ,  $y(t) = R \sin t$ ,  $(0 < t < 2\pi)$  d'où

$$\begin{aligned} \int_\gamma a(x, y) dx + b(x, y) dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-R \sin t) \cdot (-R \sin t) + (R \cos t) \cdot (R \cos t)}{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned} \quad (6.3)$$

On constate en effet que cette valeur n'est pas nulle. Si on considère maintenant l'intégrale  $\int_{\gamma'} a(x, y) dx + b(x, y) dy$  sur un chemin  $\gamma'$  *quelconque* entourant l'origine, alors le chemin obtenu par la concaténation de  $\gamma'$  et du cercle  $\gamma$  parcouru en sens inverse aurait été un chemin fermé entourant un domaine  $U$  en forme de couronne et ne contenant pas l'origine (voir figure 6), auquel on peut donc appliquer la formule de Green, ce qui montre que  $\int_{\gamma'} = \int_\gamma = 2\pi$ .

Ce contre-exemple est là pour montrer que si  $\gamma$  entoure l'origine, l'intégrale sur  $\gamma$  d'une expression différentielle non définie en  $(0, 0)$  n'est pas *forcément* nulle; mais il peut quand même arriver qu'elle soit nulle. Par exemple prenons  $a = x/\sqrt{x^2 + y^2}$  et  $b = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ . La situation est la même que dans l'exemple précédent:  $\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}$  est nul en dehors de  $(0, 0)$  et

non défini en  $(0, 0)$ . Mais sur le cercle  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy &= \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos t) \cdot (-R \sin t) + (R \sin t) \cdot (R \cos t)}{\sqrt{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

L'intégrale est nulle même sur des lacets qui entourent l'origine, mais cela ne se déduit pas de la formule de Green et n'est pas une vérité générale.

## 7. Homologie des lacets.

Dans la section 4 nous avons examiné ce que devenait la formule de Green pour des lacets multiples tels que celui de la figure 4. Nous avons pu constater que le lacet multiple pouvait être décomposé en lacets simples, de telle sorte que l'intégrale curviligne sur le lacet multiple soit une combinaison linéaire, à coefficients entiers<sup>(5)</sup>, des intégrales sur chaque élément simple (4.4).

Considérons par exemple l'intégrale de l'expression différentielle 6.1 sur le lacet de la figure 4. En combinant 4.4 et 6.3 on voit que l'intégrale vaudra  $4\pi$  si l'origine des coordonnées est dans la partie  $U_0$  du domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ ,  $2\pi$  si l'origine est dans l'une des parties  $U_1$ ,  $U_2$ , ou  $U_3$ , et zéro si l'origine est à l'extérieur du lacet (le cas où l'origine serait exactement sur le lacet est exclu, car l'intégrale serait alors divergente). En décomposant n'importe quel lacet enchevêtré (par exemple ceux de la figure 3) en éléments simples, on comprend aisément que l'intégrale de l'expression différentielle 6.1 sur un tel lacet sera toujours un multiple entier algébrique de  $2\pi$ , la valeur du coefficient entier dépendant de la position relative de l'origine des coordonnées par rapport au lacet.

Lorsqu'on considère des intégrales curvilignes d'expressions différentielles (satisfaisant sur un domaine  $\Omega$  à la condition  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$ ) sur des lacets enchevêtrés, la question importante qui se pose est de savoir dans quelle mesure l'intégrale dépend du lacet. Si le domaine  $\Omega$  dans lequel on considère les lacets est dépourvu de trous, la question est vite résolue, puisque l'intégrale est nulle quel que soit le lacet. Mais si le domaine comporte des trous, il y aura des expressions différentielles telles que 6.1 pour lesquelles les intégrales curvilignes seront non nulles. On donnera la définition suivante :

---

<sup>(5)</sup> Le fait que pour n'importe quel lacet on aura toujours une *combinaison linéaire*, à *coefficients entiers* n'a pas été démontré de façon générale, mais seulement dans le cas particulier du lacet de la figure 4. Il est toutefois aisé d'imaginer comment le procédé utilisé pourrait se généraliser.

## Formule de Green

Deux lacets  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont dits **homologiquement équivalents** sur un domaine  $\Omega$  si le lacet  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  (concaténation de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  parcouru en sens inverse) est le bord d'un domaine  $U$  entièrement contenu dans  $\Omega$ .

On comprend alors que, si l'égalité  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$  a lieu partout dans  $\Omega$ , elle aura lieu dans  $U$ , et que la formule de Green donne alors forcément

$$\int_{\gamma_1} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \int_{\gamma_2} a(x, y) dx + b(x, y) dy ,$$

puisque  $\gamma_1 - \gamma_2$  est le bord de  $U$ . La décomposition d'un lacet enchevêtré en lacets simples (figure 4) est la réalisation pratique de cette définition. On voit que l'homologie est une propriété purement géométrique du domaine  $\Omega$ .

**N. B.** Deux lacets peuvent être homologiquement équivalents pour un domaine et pas pour un autre; par exemple si on supprime un trou.

**Remarque :** La condition  $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$  est évidemment essentielle pour que l'homologie des lacets entraîne l'égalité des intégrales. Si cette condition n'était pas satisfaite dans le domaine, la moindre déformation du chemin changerait la valeur de l'intégrale.

On voit facilement que l'homologie est une relation d'équivalence. Étant donné que les chemins (et donc les lacets) peuvent se concaténer et que l'intégrale est alors additive, il est clair que l'ensemble des classes d'équivalences de l'homologie forme un groupe commutatif, appelé *groupe d'homologie* du domaine. Pour des domaines du plan, on peut déterminer facilement ce groupe d'homologie: il est réduit à l'élément neutre zéro pour des domaines sans trous; il est égal au groupe  $\mathbb{Z}$  des entiers algébriques pour les domaines à un seul trou: en effet, pour tout lacet, un seul de ses éléments simples au plus peut contenir l'unique trou; la classe d'homologie du lacet est alors simplement déterminée par le nombre de fois qu'on compte cet élément simple pour compenser les annulations mutuelles sur les ponts, et il y a autant de possibilités que d'entiers algébriques.

Plus généralement, le groupe est égal à  $\mathbb{Z}^n$  pour les domaines à  $n$  trous. Cela se comprend sans difficulté. Parmi les éléments simples issus de la décomposition d'un lacet, certains entourent un trou, d'autres aucun, d'autres plusieurs à la fois. Dans ce dernier cas il est toujours possible en introduisant des ponts convenablement choisis, de se ramener à des éléments encore plus simples qui chacun n'entourent qu'un seul trou, la contribution des ponts dans l'intégrale disparaissant par annulation mutuelle. On peut

dire que n'importe quel lacet est homologiquement équivalent à une concaténation de lacets (dits élémentaires<sup>(6)</sup>) qui n'entourent qu'un seul trou à la fois. Cela est illustré sur la figure 7 (*a* et *b*). On associe à chaque trou le nombre, compté algébriquement, de lacets élémentaires qui l'entourent : ainsi, si le trou  $N^\circ j$  est entouré de  $p$  lacets élémentaires orientés dans le sens positif et  $q$  lacets élémentaires orientés dans le sens négatif, le  $j$ -ième nombre sera  $p - q$ . Pour un domaine à  $n$  trous, on obtient une famille ordonnée de  $n$  entiers algébriques, c'est-à-dire (dans le langage de la théorie des ensembles) un élément de  $\mathbb{Z}^n$ , qui caractérise donc la classe d'équivalence ou classe d'homologie du lacet.

La notion d'homologie est quelque peu aplatie dans le cas des domaines du plan, car leurs caractéristiques géométriques sont trop particulières ; elle devient plus intéressante pour des surfaces courbes de dimension supérieure à deux. L'homologie est entièrement déterminée par la décomposition des lacets en éléments simples et le pontage : elle caractérise donc les propriétés des domaines (et des surfaces) relatives au découpage en régions élémentaires, indépendamment des dimensions métriques. Ces propriétés se conservent si on déforme les surfaces sans rien déchirer ; par exemple, le nombre de trous est conservé dans les déformations continues : pour créer un nouveau trou ou en réunir deux en un seul, il faut déchirer. La décomposition d'un lacet et les liaisons par des ponts conservent leur structure combinatoire, même si les longueurs subissent d'énormes distorsions. Par conséquent le groupe d'homologie d'une surface condense toute l'information sur la structure purement topologique de la surface.

Dans le cas des domaines du plan, l'information serait tout aussi bien exprimée par le nombre de trous, et le recours au groupe d'homologie n'est alors qu'une pédanterie. C'est pourquoi nous n'en parlerons plus dans cet ouvrage consacré au plan. En revanche, l'homologie devient un outil mathématique très puissant pour étudier des hypersurfaces de dimension quelconque (surtout supérieure à deux), car l'intuition géométrique, limitée à l'espace à trois dimensions, disparaît alors complètement. La discipline mathématique consacrée à l'étude de l'homologie des hypersurfaces s'appelle la *topologie algébrique*. L'idée remonte à B. Riemann et H. Poincaré. Elle a été développée systématiquement au vingtième siècle, notamment par Henri Cartan.

## 8. Intégrales curvilignes à variable complexe.

---

<sup>(6)</sup> Ne pas confondre *lacet élémentaire* (qui n'entoure qu'un seul trou à la fois) et *lacet simple* (qui délimite une région du plan).

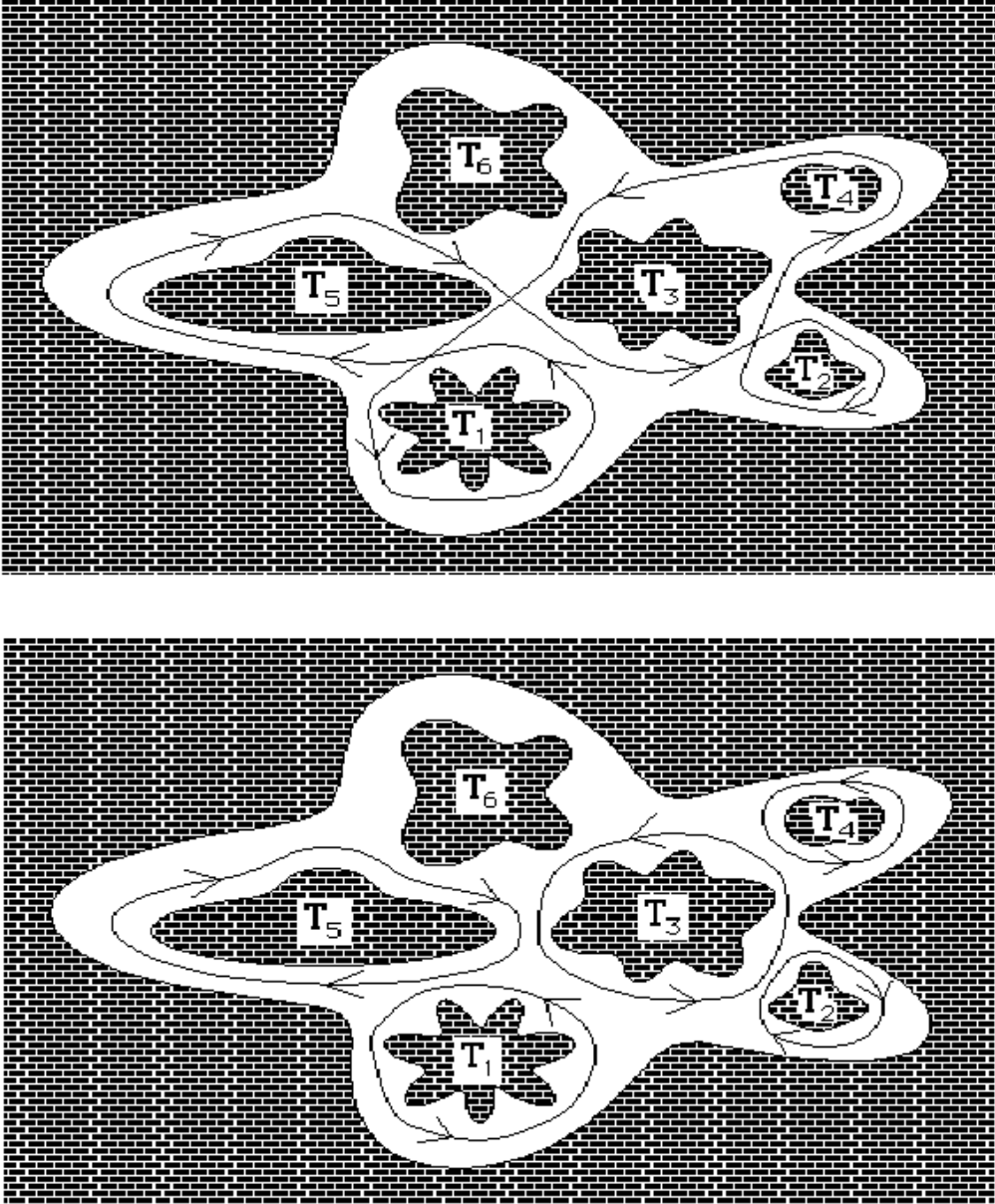


figure 7a

Le lacet enchevêtré sur la figure du haut est homologiquement équivalent à la concaténation des lacets simples du bas : cette décomposition met en évidence la classe d'homologie du chemin : il tourne une fois en sens positif autour des trous  $N^{\text{os}} 1, 3$  et  $4$ , une fois en sens rétrograde autour des trous  $N^{\text{os}} 2$  et  $5$ , et pas du tout autour du trou  $N^{\text{o}} 6$ . On peut donc représenter la classe d'homologie du lacet par un élément du groupe  $\mathbb{Z}^6$ , l'élément  $(1, -1, 1, 1, -1, 0)$ .



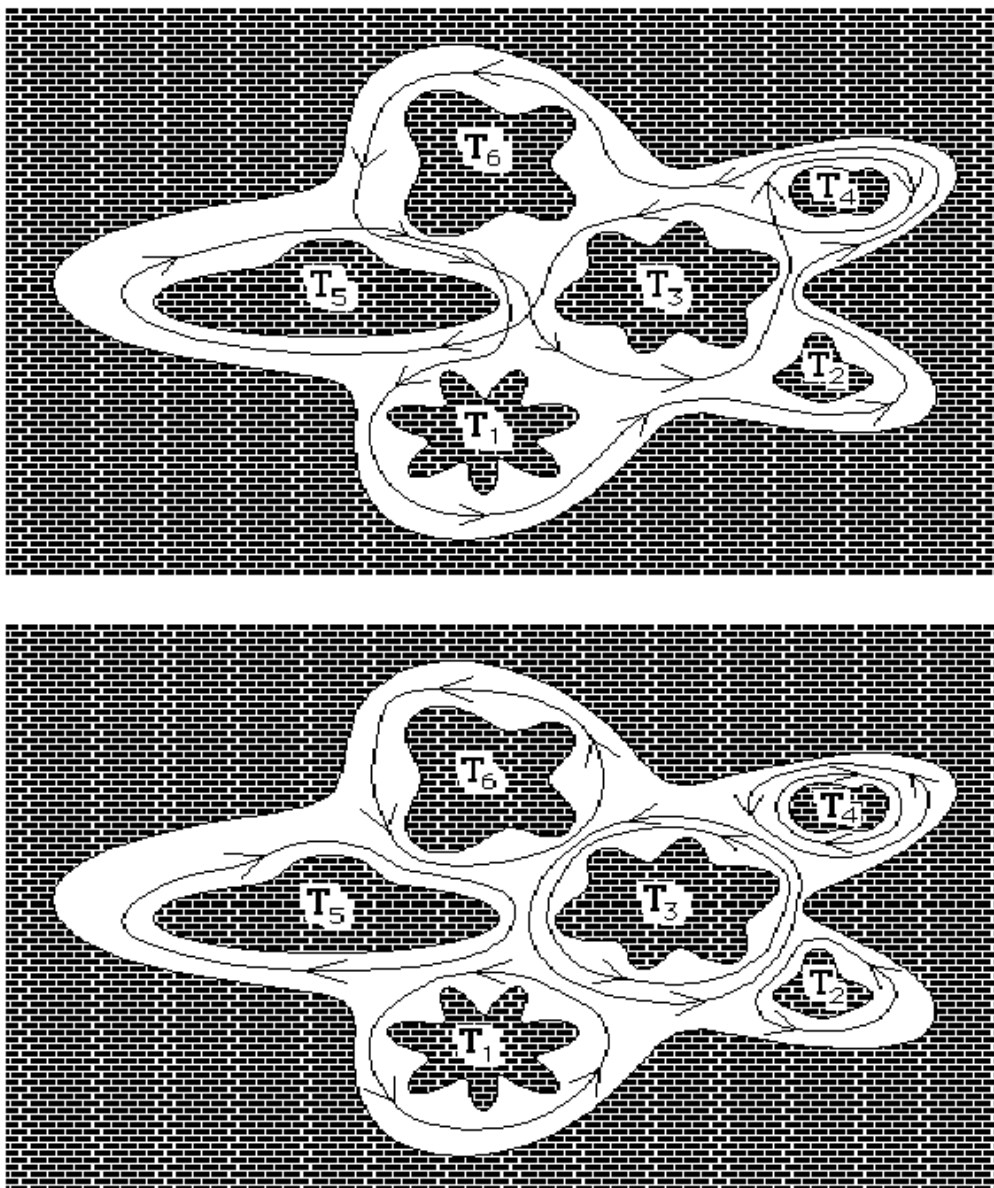


figure 7b

Le lacet enchevêtré sur la figure du haut est homologiquement équivalent à la concaténation des lacets simples du bas : cette décomposition met en évidence la classe d'homologie du chemin : il tourne une fois en sens positif autour des trous  $N^{\circ} 1, 2$  et  $6$ , une fois en sens rétrograde autour du trou  $N^{\circ} 5$ , deux fois en sens positif autour du trou  $N^{\circ} 3$ , et une fois dans chacun des deux sens (ce qui fait un bilan nul) autour du trou  $N^{\circ} 4$ . On peut donc représenter la classe d'homologie du lacet par un élément du groupe  $\mathbb{Z}^6$ , l'élément  $(1, 1, 2, 0, -1, 1)$ .

## Formule de Green

Les nombres complexes ont toujours été un moyen commode de représenter un point du plan, ou, ce qui revient au même, un couple de nombres réels; au lieu d'écrire  $(x, y)$ , on écrit  $x + iy$ .

Par conséquent tout ce qui a été fait dans les sections précédentes peut être traduit dans le langage des nombres complexes. N'importe quelle fonction  $f(x, y)$  peut être interprétée comme une fonction de la variable complexe  $z = x + iy$ . Toutefois le recours aux nombres complexes n'a d'intérêt que dans la mesure où il apporte une simplification des opérations algébriques, ou du moins un allègement sensible des notations.

Voyons comment on pourrait traduire les expressions différentielles du type  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$ . Il est naturel de poser  $dz = dx + idy$ ; mais on peut constater après quelques manipulations que cela ne permet pas d'écrire n'importe quelle expression différentielle. Par exemple  $z^2 dz = [(x^2 - y^2) dx - 2xy dy] + i[2xy dx + (x^2 - y^2) dy]$ . Mais si on prend l'expression à peine modifiée  $[(x^2 - y^2) dx - xy dy] + i[2xy dx + (x^2 - y^2) dy]$  (on a simplement remplacé dans la partie réelle  $2xy$  par  $xy$ ), on essaiera vainement de l'écrire sous la forme  $f(z) dz$ : en effet la seconde expression est égale à  $z^2 dz + xy dx$ , donc il faudrait pouvoir écrire  $xy dx$  sous la forme  $(A + iB)(dx + idy) = (A dx - B dy) + i(B dx + A dy)$ , ce qui exigerait que  $B dx + A dy$  soit identiquement nul (et donc que  $A$  et  $B$  soient elles-mêmes nulles). Le problème vient de ce que dans ces calculs algébriques où  $dx$ ,  $dy$ , et  $dz$  sont traités comme des variables, il n'est pas possible d'exprimer  $dx$  seul ou  $dy$  seul en fonction de  $dz$ . Pour y parvenir, il faut introduire aussi  $d\bar{z} = dx - idy$ . Alors on peut formellement écrire  $dx = \frac{1}{2}[dz + d\bar{z}]$  et  $dy = \frac{1}{2i}[dz - d\bar{z}]$ . Par exemple  $xy dx$  s'écrira  $\frac{1}{2}[xy dz + xy d\bar{z}]$ .

Bien entendu, il ne faut pas perdre de vue au cours des manipulations algébriques formelles de  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  et  $d\bar{z}$ , que les expressions différentielles  $a(x, y) dx + b(x, y) dy$  ne représentent pas des nombres, et ne prennent leur sens que dans l'intégrale: ce qui représente un nombre est en réalité  $a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t)$ . De même  $f(z) dz + g(z) d\bar{z}$  est en réalité une abréviation pour  $f(z(t)) z'(t) + g(z(t)) \bar{z}'(t)$ , avec  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ , et  $\bar{z}'(t) = x'(t) - iy'(t)$ . Les manipulations algébriques sur  $dx$  et  $dy$  ne sont qu'un allègement d'écriture; les calculs effectués sur les expressions  $a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t)$  seraient directement légitimés par le sens numérique, mais alourdis par l'écriture et pourtant *formellement* semblables.

Ayant ainsi précisé le sens des écritures en nombres complexes, voyons comment se traduisent les résultats du §5. Il s'agit de savoir à quelle condition doit satisfaire une expression du type  $f(z) dz + g(z) d\bar{z}$  pour être la différentielle d'une fonction (il est toujours sous-entendu que les dérivées partielles de  $f$  et  $g$  sont continues). Posons  $a(x, y) = \Re f(x + iy)$ ,

$b(x, y) = \Im f(x + iy)$ ,  $u(x, y) = \Re g(x + iy)$ ,  $v(x, y) = \Im g(x + iy)$ . Alors

$$\begin{aligned} f(z) dz + g(z) d\bar{z} &= [a + ib][dx + idy] + [u + iv][dx - idy] \\ &= \{[a + u] dx + [-b + v] dy\} + i\{[b + v] dx + [a - u] dy\} \end{aligned}$$

Pour que cela soit la différentielle d'une fonction, il faut que la partie réelle et la partie imaginaire soient la différentielle d'une fonction. Au §5, nous avons vu que pour cela il faut que

$$\frac{\partial(-b + v)}{\partial x} = \frac{\partial(a + u)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(b + v)}{\partial y} = \frac{\partial(a - u)}{\partial x} \quad (8.1)$$

En utilisant les nombres complexes, on peut écrire cela sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(a + ib) \quad (8.2)$$

Afin de condenser encore plus les notations, posons

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (8.3)$$

Le facteur 2 qui apparaît en coefficient des seconds membres semble ici purement conventionnel, mais nous en verrons la justification plus tard (en **II.2**). Alors 8.2 s'écrit sous la forme très simple

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad (8.4)$$

Si l'expression différentielle considérée se réduit au premier terme  $f(z) dz$ , cette condition devient  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$  (car alors  $g = 0$ ) ; si elle se réduit au second terme  $g(z) d\bar{z}$ , la condition devient  $\partial g / \partial z = 0$  (car alors  $f = 0$ ). Nous verrons au chapitre **II** que les fonctions qui vérifient  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$  sont appelées *fonctions analytiques* et nous étudierons l'ensemble de leurs propriétés. Il résulte de 8.4 que sur un domaine sans trou,  $f(z)$  est analytique si, et seulement si l'intégrale curviligne de  $f(z) dz$  sur tout lacet est nulle.

Bien entendu, il n'y a là aucun résultat nouveau par rapport à ce qui a été vu dans les sections précédentes (**5**, **6**, **7**) ; il s'agit des *mêmes* résultats, exprimés dans des notations mieux adaptées aux nombres complexes.

L'opérateur  $\partial f / \partial z$  peut être interprété comme une véritable dérivation par rapport à  $z$  lorsque  $f$  est analytique, comme nous le verrons au chapitre suivant (section **2**). Son sens n'est plus du tout aussi clair si  $f$  n'est pas analytique ; il ne faut y voir alors qu'une écriture commode.

## Formule de Green

En conclusion :

*$f(z)$  et  $g(z)$  étant deux fonctions de la variable complexe  $z = x + iy$  (continuellement différentiables par rapport à  $x$  et  $y$ ), pour que l'expression différentielle  $f(z) dz + g(z) d\bar{z}$  soit la différentielle d'une fonction définie sur un domaine sans trous  $\Omega$ , il faut et il suffit que soit satisfaite la relation*

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$