

## VI. TRANSFORMATION DE FOURIER.

### 1. Comment Fourier a résolu l'équation de la chaleur.

**Problème :** Trouver les solutions  $P(t, x)$  de l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

sur le domaine  $t \geq 0, 0 \leq x \leq a$ , avec les conditions aux limites  $P(0, x) = p_0(x)$  ( $p_0$  est une fonction donnée a priori).

**Solution** (proposée par Joseph Fourier en 1807, et s'inspirant d'une méthode déjà proposée par Daniel Bernoulli pour résoudre l'équation des cordes vibrantes) : chercher les solutions  $P(t, x)$  sous la forme de séries trigonométriques du type

$$P(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{2\pi}{a} nx + b_n(t) \sin \frac{2\pi}{a} nx \quad (1.2)$$

En substituant 1.2 dans 1.1 on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(t) \cos \frac{2\pi}{a} nx + b'_n(t) \sin \frac{2\pi}{a} nx = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} -\left[\frac{2\pi}{a} n\right]^2 a_n(t) \cos \frac{2\pi}{a} nx - \left[\frac{2\pi}{a} n\right]^2 b_n(t) \sin \frac{2\pi}{a} nx \end{aligned} \quad (1.3)$$

En identifiant les coefficients des deux séries, on voit que ces coefficients doivent vérifier pour tout indice  $n$  les équations

$$a'_n(t) = -\left[\frac{2\pi}{a} n\right]^2 a_n(t) ; \quad b'_n(t) = -\left[\frac{2\pi}{a} n\right]^2 b_n(t) ; \quad (1.4)$$

dont la résolution est immédiate :

$$\begin{aligned} a_n(t) &= a_n(0) \exp\left(-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} t\right) ; \\ b_n(t) &= b_n(0) \exp\left(-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} t\right) ; \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le problème posé se résout donc comme suit (pour alléger l'écriture on prend à partir d'ici  $a = 2\pi$ ) :

— a) écrire la fonction donnée  $p_0(x)$  sous forme de série trigonométrique  $p_0(x) = \sum a_n(0) \cos nx + b_n(0) \sin nx$  ;

## Transformation de Fourier

— b) substituer dans 1.5 les coefficients  $a_n(0)$  et  $b_n(0)$  ainsi obtenus.

Ce qui donne

$$P(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(0) \cos nx + b_n(0) \sin nx] e^{-n^2 t} \quad (1.6)$$

La difficulté du problème n'était pas dans les calculs exposés ci-dessus, mais dans la découverte des deux “évidences” suivantes :

— a) que la fonction  $p_0$  est effectivement développable en série trigonométrique ;

— b) que,  $p_0$  étant donnée, il existe un moyen mathématique simple d'exprimer les coefficients  $a_n(0)$  et  $b_n(0)$ .

Autrement dit, la véritable découverte de Fourier est celle-ci :

Une fonction  $p(x)$  étant donnée, si on pose pour  $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \cos nx \, dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \sin nx \, dx \quad (1.7)$$

et pour  $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \, dx \quad (1.7a)$$

alors  $p(x)$  est la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.8)$$

On appelle *série de Fourier* de  $p$  la série 1.8 avec les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  de 1.7 et 1.7a.

Toutefois cet énoncé soulève beaucoup de difficultés : quel est le sens précis de l'affirmation “ $p(x)$  est la somme de la série” ? C'est pourquoi, après les travaux de Fourier, beaucoup de mathématiciens ont étudié les conditions de validité de cette affirmation. Le bilan de cette lente maturation qui s'étend jusqu'au milieu du  $XX^e$  siècle est qu'on peut lui donner d'innombrables sens différents.

Voici quelques exemples.

— 1. (convergence simple) : pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ , la série 1.8 converge dans  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire au sens habituel des séries numériques) vers le nombre  $p(x)$ . Dirichlet a montré qu'il en est bien ainsi si  $p(x)$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ , si  $p(0) = p(2\pi)$ , et si  $p$  est monotone par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  (conditions de Dirichlet).

— 2. (convergence au sens de Cesaro) : pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ , la *suite* numérique

$$Q_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge dans  $\mathbb{R}$  vers le nombre  $p(x)$ . On peut montrer que si  $p$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et si  $p(0) = p(2\pi)$  (sans autre condition) il en est bien ainsi.

— 3. (convergence en moyenne quadratique) : l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left| p(x) - \sum_{n=0}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx \right|^2 dx$$

tend vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini. Cette forme de convergence est moins contraignante que les précédentes, car elle n'exige pas que la série converge pour *chaque* valeur de  $x$ . Elle est aussi la plus naturelle (pour les séries de Fourier), celle qui exige le moins d'hypothèses compliquées. Pour que la série converge, il suffit que les séries  $\sum |a_n|^2$  et  $\sum |b_n|^2$  soient convergentes ; pour que la somme de 1.8 soit égale à  $p$ , il suffit, même si  $p(x)$  devient infini en certains points, que l'intégrale  $\int_0^{2\pi} |p(x)|^2 dx$  soit convergente.

— 4. (convergence au sens des distributions). Pour que 1.8 converge au sens des distributions, il suffit que les suites  $|a_n|$  et  $|b_n|$  soient à croissance polynômiale. Par exemple la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx$$

est convergente au sens des distributions et sa somme est alors  $\delta(x)$  (distribution de Dirac). Elle est aussi convergente au sens de Cesaro et sa somme est alors la fonction égale à 0 pour  $0 < x < 2\pi$  et à 1 pour  $x = 0$  ou  $x = 2\pi$ , mais *n'est pas* la série de Fourier de cette fonction. Autre exemple, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \sin nx$$

est aussi convergente au sens des distributions (sa somme est alors  $-\delta'(x)$ , dérivée de la distribution de Dirac), mais n'est pas convergente au sens de Cesaro.

Selon le type de convergence qu'on attribue aux séries trigonométriques, leurs sommes seront des fonctions continues, des fonctions de carré intégrable, des distributions, etc. La méthode de Fourier et Bernoulli s'applique donc

## Transformation de Fourier

essentiellement à un *champ de solutions*. La manière moderne de poser le problème 1.1 est la suivante :

*Trouver les solutions continues (resp : de carré intégrable, distributions, infiniment dérivables, etc.) de l'équation donnée*

Les réponses dépendent de la notion de convergence retenue.

La clé de la méthode de Fourier-Bernoulli décrite au début de la section est que la dérivation des fonctions  $\cos nx$  et  $\sin nx$  équivaut à les multiplier par une constante. On peut procéder ainsi avec *n'importe* quel opérateur différentiel

$$D = \sum_{k=0}^m a_m \frac{d^k}{dx^k}$$

sauf qu'il est alors plus commode d'utiliser les fonctions  $e^{inx}$  au lieu de  $\cos nx$  et  $\sin nx$ . On aura en effet :

$$D e^{inx} = \sum_{k=0}^m a_m (in)^k e^{inx} = \lambda_n e^{inx} \quad (1.9)$$

et par conséquent l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D P \quad (1.10)$$

avec la condition initiale  $P(0, x) = p_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  (avec  $c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2}[a_n + ib_n]$ ) se résoudra par

$$P(t, x) = \sum c_n e^{\lambda_n t + inx}$$

La méthode repose sur la réduction d'une équation aux dérivées partielles (qui comporte à la fois des dérivées par rapport à  $x$  et par rapport à  $t$ ), à une équation différentielle ordinaire (qui ne comporte plus que des dérivées par rapport à  $t$ ) que l'on sait résoudre par quadrature. La disparition de la dérivation par rapport à  $x$  provient de la propriété des fonctions trigonométriques, d'être égales à leurs dérivées multipliées par une constante.

L'idée originale de Fourier et Daniel Bernoulli a été généralisée ; supposons qu'étant donné un opérateur  $D$ , pas forcément différentiel, on puisse trouver une famille de fonctions  $\varphi_n(x)$  telles que  $D\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$  (on dit que les  $\varphi_n$  sont des fonctions propres de  $D$ ). Alors l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D P \quad (1.11)$$

se résoudra de façon analogue, dans le champ des fonctions qui sont la somme d'une série de la forme  $\sum c_n \varphi_n$ . Voici un exemple : soit  $\mathcal{H}$  l'opérateur  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2$  (hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique). Les fonctions

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} x^2} H_n\left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}}(mk)^{1/4} x\right)$$

où les  $H_n$  sont les polynômes d'Hermite, sont des fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{H}$  (en effet, le calcul montre que  $\mathcal{H}\varphi_n = [(n+\frac{1}{2})\sqrt{k/m/\hbar}] \varphi_n$ ), de sorte que l'équation aux dérivées partielles

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k x^2 \psi$$

(équation de Schrödinger de l'oscillateur) se résoud d'une manière analogue à la méthode de Fourier-Bernoulli. Il suffit de faire jouer aux fonctions  $\varphi_n$  le rôle des fonctions trigonométriques.

## 2. Transformation intégrale.

La méthode consistant à chercher les solutions possibles sous la forme de séries de Fourier fournit comme on a vu en 1 des solutions sur un intervalle borné (1.5). Si l'intervalle devient infini, c'est-à-dire que  $a$  devient infini, les expressions 1.5 cessent d'être utilisables.

Au lieu de considérer des séries, on considère alors des intégrales. C'est-à-dire qu'au lieu de chercher des solutions de la forme

$$P(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) \exp\left(-\frac{2i\pi}{a} n x\right) \quad (2.1)$$

on va les chercher sous la forme

$$P(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi, t) e^{-ix\xi} d\xi \quad (2.2)$$

le coefficient  $\frac{1}{2\pi}$  devant l'intégrale n'étant qu'une convention usuelle.

**Remarque :** si on discrétise l'intégrale 2.2 en posant  $\xi = n\varepsilon$ ,  $d\xi = \varepsilon$  et  $c_n = C(\xi) = C(\varepsilon n)$ , on obtient sa somme de Riemann de pas  $\varepsilon$ . Si on prend  $\varepsilon = \frac{2\pi}{a}$ , cette somme de Riemann est égale à la série 2.1. Autrement dit, l'intégrale 2.2 (sans son coefficient) est la limite de la série 2.1 lorsque  $a$  tend vers l'infini. Il est donc naturel, lorsqu'on cherche des solutions de l'équation 1.1 sur un intervalle de longueur infinie, de les prendre sous la forme de l'intégrale 2.2.

La fonction  $C(\xi, t)$  de 2.2, définie sur  $]-\infty, +\infty[$ , est appelée *transformée de Fourier en  $x$*  de la fonction  $P(x, t)$ . Toutefois les conventions telles

## Transformation de Fourier

que le coefficient  $\frac{1}{2\pi}$  devant l'intégrale sont variables selon les auteurs, ou plutôt selon les spécialités. Il y a donc plusieurs *transformations de Fourier* possibles, dont les plus courantes sont les suivantes. Celle qui est utilisée en Calcul des probabilités (la “fonction caractéristique” d’une densité de probabilité) est  $f \mapsto \hat{f}$ , ainsi que son inverse  $f \mapsto \tilde{f}$  :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (2.3)$$

La transformation  $f \mapsto \tilde{f}$  est en effet la transformation inverse de  $f \mapsto \hat{f}$ , comme on le montrera plus loin (théorème 4). Dans d’autres domaines on préfère une version plus symétrique, où la transformation inverse ne diffère de la transformation directe que par le signe dans l’exposant, et non par un coefficient  $1/2\pi$  qui apparaît devant l’intégrale. Ainsi la variante utilisée en traitement du signal est

$$\Phi f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi ix\xi} dx \quad (2.4)$$

dont l’inverse est

$$\Phi^{-1} f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+2\pi ix\xi} dx \quad (2.4 a)$$

On constate en effet une meilleure symétrie entre  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$ . Une autre variante qu’on peut rencontrer parfois est

$$\mathcal{F}_1 f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad (2.5)$$

dont l’inverse est

$$\mathcal{F}_1^{-1} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (2.5 a)$$

Signalons encore le cas très important de la Mécanique quantique, où la transformation de Fourier est :

$$\mathcal{F}_\hbar f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{i}{\hbar}x\xi} dx \quad (2.6)$$

Son inverse est

$$\mathcal{F}_\hbar^{-1} f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{i}{\hbar}x\xi} dx \quad (2.6 a)$$

Elle est symétrique, et la relation de Parseval correspondante est

$$\|\mathcal{F}_\hbar f\|_2 = \|f\|_2 \quad (2.7)$$

Comme on sait, cette transformation fait passer de la représentation d'espace à la représentation d'impulsion.

La fonction  $C(\xi, t)$  de 2.2, définie sur  $] -\infty, +\infty[$ , est donc l'une (parmi d'autres) des transformées de Fourier en  $x$  de la fonction  $P(x, t)$  ( $t$  est considéré comme un paramètre fixe). La transformée de Fourier en  $t$  de la fonction  $P(x, t)$  (où cette fois  $x$  serait le paramètre fixe) serait la fonction  $D(x, \tau)$  telle que

$$P(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(x, \tau) e^{-it\tau} d\tau$$

Si les conditions pour pouvoir dériver sous le signe  $\int$  sont satisfaites, on peut substituer l'intégrale 2.2 dans l'équation 1.1 et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial C}{\partial t}(\xi, t) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\xi^2 C(\xi, t) e^{-ix\xi} d\xi \quad (2.8)$$

On arrive donc à la conclusion que *pour tout  $x$*  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial C}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 C(\xi, t) \right] e^{-ix\xi} d\xi = 0 \quad (2.9)$$

Il n'est pas évident (quoique vrai sous des conditions que nous préciserons) que si 2.9 est vrai *pour tout  $x$* , alors

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 C(\xi, t) = 0 \quad (2.10)$$

est vrai pour tout  $\xi$ . Mais la réciproque est évidente : si 2.10 est vrai pour tout  $\xi$ , alors 2.9 sera vrai pour tout  $x$ . Si en outre les deux intégrales de 2.8 sont convergentes, on peut en conclure aussi que 2.8 est vrai.

Or l'équation 2.10 est facile à résoudre pour toute valeur fixée de  $\xi$  ; la solution en est :

$$C(\xi, t) = C(\xi, 0) e^{-\xi^2 t} \quad (2.11)$$

On retrouve le même principe qui faisait la puissance de la méthode de Bernoulli-Fourier : transformer une équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire, intégrable par quadratures.

Toutefois ce principe ne peut être *effectivement* appliqué que si les conditions que nous avons supposées sont satisfaites, à savoir :

- les intégrales qui interviennent dans 2.2 et 2.8 sont convergentes, ou du moins, si elles ne le sont pas, on arrive à leur donner un sens ;
- la dérivation sous le signe d'intégration est justifiée.

## Transformation de Fourier

Une question qu'on peut se poser est la suivante : *la méthode décrite, consistant à chercher les solutions sous la forme 2.2, permet-elle de trouver toutes les solutions, ou existe-t-il d'autres solutions de l'équation 1.1 qui ne peuvent être mises sous la forme 2.2 ?*

On pouvait déjà se poser cette question pour les intervalles bornés : *ne pourrait-il pas y avoir des solutions de l'équation 1.1 qui ne peuvent pas être développées en séries trigonométriques ?*

Or il y a deux manières de comprendre cette question. La première est la version dogmatique : on décrète que seules sont dignes du nom de "solution" des fonctions de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{C}$ ) qui sont différentiables (au moins une fois par rapport à  $t$  et deux fois par rapport à  $x$ ) et satisfont 1.1. On peut alors démontrer qu'on obtient bien toutes les solutions sous la forme 2.2, avec  $C(\xi, t)$  donnée par 2.11. La deuxième est la version ouverte : on part du principe que si par exemple l'intégrale 2.2 est divergente, on peut lui donner un sens cohérent, et ensuite chercher des solutions correspondant à ce sens élargi. La version ouverte conduit (entre autres) à la théorie des distributions.

Pour mieux comprendre la seconde voie, il vaut mieux partir de l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = i \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

car l'équation 1.1 n'a que des solutions très régulières, quel que soit le sens, même élargi, qu'on peut donner au mot solution.

Si on cherche les solutions de 2.12 par le même procédé, on obtient des intégrales du type 2.2, mais avec

$$C(\xi, t) = C(\xi, 0) e^{-i\xi^2 t} \quad (2.13)$$

La différence est importante : l'intégrale 2.2 avec  $C(\xi, t)$  de la forme 2.11 est convergente ; par contre, avec  $C(\xi, t)$  de la forme 2.13, elle ne l'est pas. Selon qu'on considère la question envisagée ci-dessus dans sa version dogmatique ou dans sa version ouverte, on rejettera ou on acceptera les solutions 2.13. Mais dans le second cas, on devra donner un sens cohérent aux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi^2 t + x\xi)} d\xi \quad (2.14)$$

qui de surcroît justifie les dérivations sous le signe  $\int$ .

C'est la seconde voie qui a été choisie (historiquement). Nous verrons dans la section suivante comment interpréter des intégrales telles que 2.14.



Pour le moment, nous nous intéresserons uniquement au cas où les intégrales convergent au sens usuel. L'intégrale 2.2 dépend du paramètre  $x$  et est donc une fonction de  $x$ . Cette fonction dépend évidemment de la fonction  $C(\xi)$ , le paramètre  $t$  étant fixé. On peut donc considérer qu'il s'agit d'une *application* de l'ensemble des fonctions de  $\xi$  dans l'ensemble des fonctions de  $x$ , dont le domaine de définition est l'ensemble des fonctions  $C(\xi)$  qui rendent l'intégrale absolument convergente.

De façon plus précise : Soit  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$  l'ensemble<sup>(1)</sup> des fonctions  $C(\xi)$  définies sur  $] -\infty, +\infty[$  et telles que l'intégrale  $\int |C(\xi)| d\xi$  soit convergente. Par exemple la fonction

$$C(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\xi} & \text{si } \xi > 0; \end{cases} \quad (2.15)$$

est dans  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$ .

On appellera *intégrables* sur  $] -\infty, +\infty[$  les fonctions appartenant à cet espace. Cet espace peut désigner les fonctions à valeurs réelles ou complexes : lorsqu'on dit que l'intégrale  $\int |C(\xi)| d\xi$  converge, le symbole  $||$  peut désigner aussi bien la valeur absolue d'un nombre réel que le module d'un nombre complexe. Toutefois l'intégrale qui définit la transformation de Fourier contient le facteur  $e^{-ix\xi}$ , de sorte que si une fonction est réelle, sa transformée de Fourier ne l'est pas en général. Mais en effectuant le changement de variable  $\xi \mapsto -\xi$  dans l'intégrale, on voit que si  $C$  est réelle *et paire*, alors sa transformée de Fourier est réelle aussi.

Il est clair que si  $C$  est intégrable sur  $] -\infty, +\infty[$ , la fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (2.16)$$

est définie pour tout  $x \in ] -\infty, +\infty[$ . Rien ne prouve que la nouvelle fonction  $f$  est intégrable sur  $] -\infty, +\infty[$  (c'est d'ailleurs en général faux), mais on peut montrer facilement qu'elle est continue. En effet, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\xi)| \cdot |e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| d\xi \quad (2.17)$$

---

<sup>(1)</sup> En toute rigueur, il faut la théorie de l'intégrale de Henri Lebesgue pour définir l'espace  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$  ; mais faute de temps, la nature exacte de cet espace sera laissée dans l'ombre. Il suffira d'admettre que toutes les fonctions qu'on peut rencontrer en font partie, à la seule condition que leur intégrale sur  $] -\infty, +\infty[$  soit absolument convergente.

## Transformation de Fourier

On a aussi l'inégalité bien connue

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| \leq 2 \left| \sin \frac{(x-y)\xi}{2} \right|$$

On peut majorer  $2 \left| \sin \frac{(x-y)\xi}{2} \right|$  à la fois par 2 et par  $|x-y||\xi|$ ; divisons alors l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$  en deux parties, l'une étant l'intervalle borné  $[-A, +A]$ , l'autre le reste, et majorons  $2 \left| \sin \frac{(x-y)\xi}{2} \right|$  par  $|x-y||\xi|$  sur  $[-A, +A]$  et par 2 sur le reste. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\xi)| \cdot |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| d\xi &\leq \\ &\leq \int_{-A}^{+A} |C(\xi)| \cdot |x-y||\xi| d\xi + 2 \int_{|\xi| \geq A} |C(\xi)| d\xi \\ &\leq |x-y| A \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\xi)| d\xi + 2 \int_{|\xi| \geq A} |C(\xi)| d\xi \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ceci étant vrai quel que soit  $A$ , on peut prendre par exemple  $A = 1/\sqrt{|x-y|}$ ; lorsque  $|x-y|$  tend vers zéro, le deuxième terme de 2.18 tend vers zéro (puisque  $A$  tend vers l'infini et que l'intégrale converge), et le premier terme aussi puisque  $|x-y| A$  tend vers zéro. On a ainsi montré que la fonction  $f(x)$  est uniformément continue.

On voit de la même façon que la nouvelle fonction  $f(x)$  est bornée uniformément sur  $] -\infty, +\infty[$ ; en effet, l'inégalité de la moyenne donne :

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\xi)| d\xi$$

et le membre de droite ne dépend pas de  $x$ . On peut énoncer :

*La fonction définie par 2.11 est uniformément continue sur  $] -\infty, +\infty[$ , et uniformément majorée par l'intégrale de  $|C(\xi)|$ .*

Appelons  $C_0(-\infty, +\infty)$  l'ensemble des fonctions continues et bornées sur  $] -\infty, +\infty[$ . Ici aussi il peut s'agir aussi bien des fonctions à valeurs réelles que des fonctions à valeurs complexes. On peut résumer les résultats précédents en disant que 2.16 définit une application de  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$  dans  $C_0(-\infty, +\infty)$ .

Voyons deux exemples qui resserviront plus tard.

**Exemple 1.** Soit  $C(\xi) = e^{-\alpha\xi^2}$ . On se propose de calculer la fonction  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\alpha\xi^2 - ix\xi} d\xi$ . On sait déjà que  $\int e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi/\alpha}$ ; remarquons que  $\alpha\xi^2 + ix\xi = \alpha(\xi + i\frac{x}{2\alpha})^2 + \frac{x^2}{4\alpha}$ , et que  $\xi \mapsto \xi + i\frac{x}{2\alpha}$  est un paramétrage de la droite  $\Im z = \frac{x}{2\alpha}$ . Cela suggère de calculer l'intégrale de  $e^{-\alpha z^2} dz$  sur

cette droite. Comme  $e^{-\alpha z^2}$  est analytique dans tout le plan, on peut dire que  $\int e^{-\alpha z^2} dz = 0$  si on prend un chemin fermé. Afin de retrouver à la fois l'intégrale connue et l'intégrale sur la droite  $\Im z = \frac{x}{2\alpha}$ , prenons un rectangle de sommets  $\pm A$  et  $\pm A + i\frac{x}{2\alpha}$ , après quoi on fera tendre  $A$  vers l'infini. On a donc :

$$\int_{\text{rect}} e^{-\alpha z^2} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

avec

$$I_1 = \int_{-A}^{+A} e^{-\alpha \xi^2} d\xi$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{x}{2\alpha}} e^{-\alpha(A+it)^2} i dt = e^{-\alpha A^2} \int_0^{\frac{x}{2\alpha}} e^{-2i\alpha A t + \alpha t^2} i dt$$

$$I_3 = e^{\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{+A}^{-A} e^{-\alpha \xi^2 - ix\xi} d\xi$$

$$I_4 = \int_{\frac{x}{2\alpha}}^0 e^{-\alpha(-A+it)^2} i dt = -e^{-\alpha A^2} \int_0^{\frac{x}{2\alpha}} e^{-2i\alpha A t + \alpha t^2} i dt$$

Il est évident que lorsque  $A$  tend vers l'infini, les intégrales  $I_2$  et  $I_4$  tendent vers zéro (à cause du facteur  $e^{-\alpha A^2}$ ). Puisque  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$  est constamment nulle, cela implique que  $I_1 + I_3$  tend vers zéro, autrement dit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = e^{\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\alpha \xi^2 - ix\xi} d\xi$$

L'intégrale du premier membre est déjà connue et vaut  $\sqrt{\pi/\alpha}$ ; celle du second membre est celle que nous cherchons (à l'inversion des bornes près). Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2 - ix\xi} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

d'où  $f(x)$ , qui est égale à  $\frac{1}{2\pi}$  fois cette intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

**Exemple 2.** Soit  $C(\xi) = 1/(\xi^2 + a^2)$ . On doit donc calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{\xi^2 + a^2} d\xi$$

## Transformation de Fourier

qui est du type envisagé au théorème 5 du chapitre **III** (section **3**). Ce théorème fournit la réponse : le dénominateur s'annule pour  $x = \pm ia$ , donc l'intégrale vaut  $\frac{\pi}{a}e^{-ax}$  si  $x \geq 0$  et  $\frac{\pi}{a}e^{+ax}$  si  $x \leq 0$ . En définitive :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{\xi^2 + a^2} d\xi = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$$

Les fonctions choisies dans ces deux exemples sont bien des fonctions intégrables sur  $] -\infty, +\infty[$ , c'est-à-dire des fonctions appartenant à l'espace  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$  (les intégrales  $\int e^{-\alpha\xi^2} d\xi$  et  $\int 1/(\xi^2 + a^2) d\xi$  sont absolument convergentes). Leurs images par la transformation intégrale sont respectivement  $f(x) = (1/\sqrt{4\pi\alpha})e^{-x^2/4\alpha}$  et  $f(x) = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|}$ . Ces fonctions sont elles aussi dans l'espace  $\mathbb{L}_1(-\infty, +\infty)$ , mais cela ne correspond à aucune vérité générale.

### 3. Principales propriétés de la transformation intégrale.

Nous avons vu en **2**, qu'en admettant la dérivation sous le signe  $\int$ , la dérivation de  $f(x)$  se traduisait pour la fonction  $C(\xi)$  par la multiplication par  $i\xi$ . Nous allons étudier dans cette section les conditions de validité de ces opérations, ainsi que d'autres propriétés de la transformation, en prouvant une série de théorèmes.

**Définition.** Une fonction  $C(\xi)$  (sur  $] -\infty, +\infty[$ ) est dite à *décroissance rapide* si pour tout entier  $n > 0$ , il existe une constante  $M_n$  telle que  $\forall \xi \ C(\xi) \leq M_n/(1 + |\xi|^n)$ .

Concrètement cela signifie qu'à l'infini, la fonction tend vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance  $1/\xi^n$ . Ainsi les fonctions  $e^{-\alpha\xi^2}$  ou  $e^{-a|\xi|}$  sont à décroissance rapide ; mais  $1/(\xi^2 + a^2)$ ,  $1/(\xi^4 + 1)$  ou encore  $1/(\xi^{12} + 1)$  ne le sont pas.

**Théorème 1.** Si  $C(\xi)$  est à décroissance rapide, alors la fonction  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$  est infiniment dérivable en tout point. Les dérivées sont données par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^n C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (3.1)$$

**Démonstration.** On montre que  $[f(x+h) - f(x)]/h$  tend vers l'intégrale  $\int -i\xi C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$  pour tout  $x$ . Pour cela, considérons la différence

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} -i\xi C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} + i\xi \right] C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (3.2)$$

On connaît l'identité

$$\int_0^t s e^{-i(t-s)} ds = 1 - e^{-it} - it$$

qu'on obtient en intégrant par parties, et dont on déduit par l'inégalité de la moyenne que  $|e^{-it} - 1 + it| \leq \frac{1}{2}t^2$ . Si on reporte cette inégalité dans 3.2 en réutilisant à nouveau l'inégalité de la moyenne, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} -i\xi C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} + i\xi \right| |C(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |C(\xi)| d\xi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Par hypothèse,  $C(\xi)$  est à décroissance rapide, donc l'intégrale  $\int \xi^2 |C(\xi)| d\xi$  est convergente. Le facteur  $\frac{1}{2}h$  devant cette intégrale dans 3.3 montre que l'expression 3.2 tend vers zéro.

On a ainsi prouvé que  $f$  est dérivable. Il suffit de reconduire la même argumentation autant de fois qu'on veut, en remplaçant successivement  $C(\xi)$  par  $-i\xi C(\xi)$ , puis par  $-\xi^2 C(\xi)$ , etc :  $f'$  sera à son tour dérivable si l'intégrale  $\int |\xi^3 C(\xi)| d\xi$  est convergente,  $f''$  sera dérivable si l'intégrale  $\int |\xi^4 C(\xi)| d\xi$  est convergente, etc. Or l'hypothèse que  $C$  est à décroissance rapide garantit qu'on peut poursuivre indéfiniment, car les fonctions  $|\xi|^k/(1+|\xi|^n)$  sont toutes intégrables si  $n \geq k+2$ . CQFD

**Remarque.** La démonstration précédente montre plus précisément que si l'intégrale  $\int |\xi^n C(\xi)| d\xi$  est convergente, alors  $f(x)$  est  $n-1$  fois dérivable. Si  $\int |\xi^n C(\xi)| d\xi$  cesse d'être convergente pour  $n+1$ , on ne peut plus répéter *indéfiniment* le même argument, et rien ne prouve alors que  $f$  est  $n$  fois dérivable. On peut constater cela directement sur l'exemple N°2 ci-dessus : si  $C(\xi)$  est la fonction  $1/(\xi^2 + a^2)$ , on voit bien que la fonction  $C(\xi)$  est intégrable, mais pas la fonction  $\xi^2 C(\xi)$ ; et en effet, sa transformée  $f(x) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$  est continue mais non dérivable en tout point. Troisième exemple plus sophistiqué : l'intégrale III.3.5 dont la valeur est donnée en III.3.8 :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{\xi^4 + 1} d\xi = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-(|x|/\sqrt{2})} \quad (3.4)$$

## Transformation de Fourier

La fonction  $C(\xi) = 1/(\xi^4 + 1)$  est intégrable, ainsi que  $\xi C(\xi)$  et  $\xi^2 C(\xi)$ , mais non  $\xi^3 C(\xi)$ . La vérification directe de la dérivabilité en  $x = 0$  montre que  $f(x)$  est dérivable deux fois (mais non trois); on notera que d'après la remarque qui suit le théorème 1, seule la première dérivation était garantie.

**Théorème 2.** *Si  $C$  est infiniment dérivable et que toutes ses dérivées (ordre zéro inclus) sont intégrables et nulles à l'infini, alors  $f$  est à décroissance rapide.*

**Démonstration.** On procède en intégrant par parties :

$$\int_{-A}^{+A} C(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{ix} \left\{ -C(\xi) e^{-ix\xi} \Big|_{-A}^{+A} + \int_{-A}^{+A} C'(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right\}$$

L'expression entre accolades du membre de droite reste bornée uniformément en  $A$  puisque  $C(\xi)$  est nulle à l'infini (donc le premier terme disparaît quand  $A$  tend vers l'infini) et  $C'(\xi)$  intégrable (donc le second terme reste borné). Il existe donc une constante  $M_1$  telle que  $|f(x)| \leq M_1/|x|$ . En intégrant à nouveau par parties, on voit qu'il existe une constante  $M_2$  telle que  $|f(x)| \leq M_2/|x|^2$ , et ainsi de suite. Comme par ailleurs  $f(x)$  est bornée ( $\leq M_0 = \int |C(\xi)|$ ) d'après ce qui a été vu en section 2, cela prouve que pour tout  $n$  on a  $|f(x)| \leq \inf \{M_0, M_n/|x|^n\} \leq (M_0 + M_n)/(1 + |x|^n)$ , donc que  $f$  est à décroissance rapide. CQFD

On peut constater aussi, d'après cette démonstration, que si l'hypothèse que  $C$  et ses dérivées  $C', C'', \dots$  sont intégrables et nulles à l'infini n'était vérifiée que jusqu'à l'ordre  $k$ , alors on pourrait seulement conclure que  $f$  décroît plus vite à l'infini que  $1/x^k$ .

Les théorèmes 1 et 2 présentés ici sont des versions fortement réduites de théorèmes plus généraux: il existe d'innombrables généralisations de ces théorèmes, mais bien entendu les démonstrations sont alors beaucoup plus compliquées et sans intérêt pour une formation d'ingénieur.

En réunissant les théorèmes 1 et 2, on voit que les fonctions qui ont la propriété d'être infiniment dérivables, et d'avoir toutes leurs dérivées à décroissance rapide, auront pour transformées des fonctions jouissant de la même propriété. Ces propriétés sont vraies également pour les transformations  $\Phi$ ,  $\mathcal{F}_1$ , et  $\mathcal{F}_h$ . Les fonctions infiniment dérivables ayant toutes leurs dérivées à décroissance rapide jouent un rôle important en analyse fonctionnelle et c'est pourquoi on introduit un espace spécial pour ces fonctions :

**Définition.** On appelle *espace de Schwartz* l'espace de toutes les fonctions infiniment dérivables dont toutes les dérivées (ordre zéro compris) sont à décroissance rapide. On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{S}(-\infty, +\infty)$  cet espace. Les éléments de cet espace seront appelés les *bonnes fonctions* ou *fonctions régulières*.

**Remarque:** on dit *espace* plutôt que *ensemble* parce que c'est un

espace vectoriel; en outre il sera muni (plus loin) d'une notion spéciale de convergence.

Nous avons vu à la section 2 que la transformation intégrale de Fourier était une application de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R})$ ; nous pouvons maintenant ajouter que l'image du sous-espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Théorème 3.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , on a toujours :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi) e^{-iy\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \widehat{g}(x) dx \quad (3.5)$$

où l'on a posé :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad \text{et} \quad \widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (3.6)$$

**Démonstration.** On considère l'intégrale double :

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x) g(\xi) e^{i(x-y)\xi} dx d\xi$$

Il est clair que cette intégrale double est absolument convergente, puisque  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , et que  $|e^{i(x-y)\xi}| = 1$ . On obtient donc le même résultat en intégrant d'abord par rapport à  $\xi$  puis par rapport à  $x$ , qu'en intégrant d'abord par rapport à  $x$  puis par rapport à  $\xi$ . Or :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi \right] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x-y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \widehat{g}(x) dx ; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-iy\xi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \right] d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi) e^{-iy\xi} d\xi \end{aligned}$$

CQFD

**Théorème 4.** *Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a*

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-iy\xi} d\xi \quad (3.7)$$

Cette relation est appelée *formule d'inversion*; en effet, si  $\widehat{f}$  est donnée à partir de  $f$  par 3.6, on retrouve  $f$  à partir de  $\widehat{f}$  grâce à 3.7.

## Transformation de Fourier

**Démonstration.** On écrit 3.5 avec  $g(\xi) = e^{-\alpha\xi^2}$ , puis on fait tendre  $\alpha$  vers zéro. On obtient pour la première intégrale de 3.5 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha\xi^2} e^{-iy\xi} d\xi$$

Lorsque  $\alpha$  tend vers zéro, cette intégrale tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-iy\xi} d\xi$$

En effet, puisque la famille des fonctions  $|\widehat{f}(\xi) e^{-\alpha\xi^2} e^{-iy\xi}|$  est majorée uniformément en  $\alpha$  par une fonction intégrable (par  $|\widehat{f}(\xi)|$ ), on peut passer à la limite sous le signe  $\int$ .

Voyons l'autre intégrale ; la fonction  $\widehat{g}(x)$  a été calculée plus haut (section 2, exemple 1) ; on avait obtenu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2 - ix\xi} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

ce qui montre, en remplaçant  $x$  par  $-x$ , que  $\widehat{g}(x)$  est égale à  $\sqrt{\pi/\alpha} e^{-x^2/4\alpha}$ . Par conséquent, pour tout  $\alpha > 0$  on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x) dx = 2\pi$ . D'autre part, lorsque  $\alpha$  tend vers zéro,  $\widehat{g}(x)$  tend uniformément vers zéro en dehors des intervalles  $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ , et cela quel que soit  $\varepsilon > 0$  (en effet,  $\sup_{|x| \geq \varepsilon} \widehat{g}(x) = \widehat{g}(\varepsilon)$ , et cela tend bien vers zéro avec  $\alpha$ ). On en déduit que pour tout  $\varepsilon$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \widehat{g}(x) f(x+y) dx = 0$$

Par ailleurs, puisque  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on peut dire que  $|f(x+y) - f(y)| \leq K|x|$  avec  $K = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$  ; d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x+y) \widehat{g}(x) dx - 2\pi f(y) \right| &= \\ &= \left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x+y) \widehat{g}(x) dx - \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(y) \widehat{g}(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x+y) - f(y)| \widehat{g}(x) dx \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} K|x| \widehat{g}(x) dx \leq 4K\pi\varepsilon \end{aligned} \tag{3.8}$$

On a utilisé ci-dessus à deux reprises le fait que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x) dx = 2\pi$ . Récapitulons l'ensemble du raisonnement :

— pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x+y) \widehat{g}(x) dx = 0$  ;



— pour tout  $\alpha$  et tout  $\varepsilon$ ,  $|\int_{|x|\leq\varepsilon} f(x+y)\widehat{g}(x)dx - 2\pi f(y)| \leq 4K\pi\varepsilon$

En français : pour tout  $\varepsilon$ , des deux intégrales  $\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x+y)\widehat{g}(x)dx$  et  $\int_{|x|<\varepsilon} f(x+y)\widehat{g}(x)dx$ , la première tend vers zéro quand  $\alpha$  tend vers zéro, et la deuxième est toujours  $\leq 4K\pi\varepsilon$

Comme on peut prendre  $\varepsilon$  aussi petit qu'on veut, cela entraîne que

$$\lim_{\alpha\rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\widehat{g}(x)dx = 2\pi f(y)$$

On a ainsi prouvé que la limite du membre de gauche dans 3.5 est  $\int \widehat{f}(\xi) e^{-iy\xi} d\xi$  et celle du membre de droite  $2\pi f(y)$ . CQFD

#### 4. Notions de convergence.

Dans les sections précédentes, on a introduit des *espaces* de fonctions :  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Ces espaces sont des espaces vectoriels : si deux fonctions  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + g(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| + |g(x)| dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx \end{aligned}$$

et de même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

On vérifie la même chose pour les deux autres espaces.

Ces espaces vectoriels sont de dimension infinie : il suffit de constater par exemple que les fonctions  $\varphi_n(x) = x^n e^{-x^2}$  ou  $\chi_a(x) = e^{-x^2+iax}$  sont linéairement indépendantes : si *pour tout*  $x$   $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k(x) = 0$ , alors les  $\lambda_k$  sont tous nuls. Ou encore : pour toute famille finie  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$  de nombres réels, on a

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \chi_{a_k}(x) = 0 \quad \implies \quad \forall k, \lambda_k = 0$$

Pour pouvoir parler de la convergence de suites ou de séries de fonctions, on doit préciser ce qu'on entend par “convergent” ou “divergent”. Or il n’y a pas une seule notion de convergence, mais beaucoup ; et de plus, comme on va le voir, il n’est pas possible de trouver une notion universelle de convergence, qui dans chaque cas serait toujours la meilleure. On rencontrera différents problèmes, pour chacun desquels s’imposera un type différent de convergence.

## Transformation de Fourier

Voici tout de suite des exemples.

**a)** Dans l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , la notion naturelle de convergence est la convergence dite *en moyenne*: on dit qu'une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  converge *en moyenne* vers la fonction  $f$  — également dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  — si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

**c)** Dans l'espace  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  la notion naturelle de convergence est la convergence dite *uniforme* (déjà familière): on dit qu'une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  converge *uniformément* vers la fonction  $f$  — également dans  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  — si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

**c)** Dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  la notion naturelle de convergence est la suivante (elle n'a pas de nom consacré): on dit qu'une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  converge *dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*  ou *au sens de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$* , ou encore *au sens de Schwartz*, vers la fonction  $f$  — également dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  — si pour tout couple d'entiers  $j, k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ (1 + |x|^k) |f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \} \right] = 0$$

La convergence dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est une notion très forte de convergence:  $f_n$  tend vers  $f$  si toutes les dérivées de  $f_n$ , multipliées par n'importe quelle puissance de  $|x|$ , convergent toutes à la fois uniformément.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est un sous-espace de  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ , et il est clair que si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire uniformément). D'autre part  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est aussi un sous-espace de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , et il est clair aussi que si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire en moyenne).

Par contre, si  $f_n$  et  $f$  sont dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ , la convergence en moyenne n'entraîne pas la convergence uniforme, ni la convergence uniforme la convergence en moyenne (toutefois si on considérait l'espace  $\mathbb{L}_1([a, b])$ , où l'intervalle borné  $[a, b]$  remplace l'intervalle  $] - \infty, +\infty[$ , la convergence uniforme entraînerait la convergence en moyenne).

Appliquons ces nouvelles notions à la transformation intégrale de Fourier.

**Théorème 5.** Si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}_n$  converge vers  $\hat{f}$  dans  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ . Si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}_n$  converge vers  $\hat{f}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Autrement dit, la transformation intégrale de Fourier est une application *continue* de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ , et de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans lui-même.

**Démonstration.** En utilisant l'inégalité de la moyenne on obtient

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x) - f(x)] e^{ix\xi} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

ce qui prouve la première partie du théorème. Ensuite, l'inégalité de la moyenne, et les théorèmes 3 et 4 conduisent aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\xi|^k |\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| dx \\ |\widehat{f}_n^{(j)}(\xi) - \widehat{f}^{(j)}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j |f_n(x) - f(x)| dx \\ |\xi|^k |\widehat{f}_n^{(j)}(\xi) - \widehat{f}^{(j)}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^k}{dx^k} \{x^j [f_n(x) - f(x)]\} \right| dx \end{aligned}$$

La dernière expression se majore encore avec la formule de Leibniz

$$\leq \sum_{\ell=0}^k K_\ell \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{j-\ell} |f_n^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(x)| dx$$

la somme ne portant (au cas où  $j < k$ ) que sur les  $\ell \leq j$  ; en combinant tout cela :

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^k) |\widehat{f}_n^{(j)}(\xi) - \widehat{f}^{(j)}(\xi)| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j |f_n(x) - f(x)| dx + \sum_{\ell=0}^j K_\ell \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{j-\ell} |f_n^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(x)| dx \end{aligned}$$

Si  $f_n - f$  tend vers zéro dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il existe (pour n'importe quelle paire d'entiers  $j, \ell \geq 0$ ) une suite *numérique*  $M_n^{(j,\ell)}$ , qui tend vers zéro, et telle que  $|f_n^{(\ell)} - f^{(\ell)}| \leq M_n^{(j,\ell)} / (1 + |x|^{j+2})$  ; la dernière inégalité ci-dessus donne alors

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^k) |\widehat{f}_n^{(j)}(\xi) - \widehat{f}^{(j)}(\xi)| &\leq \\ &\leq M_n^{(j,0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^j}{1 + |x|^{j+2}} dx + \sum_{\ell=1}^j K_\ell M_n^{(j,\ell)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^{j-\ell}}{1 + |x|^{j+2}} dx \end{aligned}$$

où il est évident que les termes du second membre tendent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. CQFD

**Commentaires.** On voit que la continuité de la transformation de Fourier  $f \mapsto \widehat{f}$  s'obtient par un argument simple parce que les notions de convergence retenues correspondent exactement aux propriétés de l'intégrale. On ne pourrait pas obtenir la

## Transformation de Fourier

continuité de façon aussi simple (on ne l'obtiendrait d'ailleurs pas davantage par des voies compliquées) si par exemple on considérait la transformation comme définie sur  $E = \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $F = \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ , et en considérant dans  $E$  et  $F$  la convergence uniforme. Tout cela montre que le choix des *bonnes* notions de convergence est essentiel.

Une autre question se pose encore : la transformation de Fourier est-elle injective, surjective, etc ? On peut déduire facilement du théorème 4 que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur lui-même. L'existence d'une formule d'inversion le prouve : si  $\widehat{f} = 0$ , alors  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$  est forcément nul pour tout  $x$ , donc la transformation est injective ; et si  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il est clair qu'en posant  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int h(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$  on aura automatiquement  $h = \widehat{f}$  ; comme d'après les théorème 1 et 2,  $f$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , la transformation est aussi surjective.

Par contre on ne peut pas déduire de la formule d'inversion que  $f \mapsto \widehat{f}$  est une bijection de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ . D'abord, cette formule n'a pas été prouvée pour  $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , mais seulement si  $f$  est une bonne fonction, c'est-à-dire si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . D'autre part, il est évident que les éléments de  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  ne sont pas tous intégrables et on ne voit pas a priori comment étendre la formule d'inversion à  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ . Nous verrons plus loin qu'on peut cependant étendre la transformation de Fourier à des fonctions non intégrables. Mais il se trouve que même si on introduit ces extensions, il reste des éléments de  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  qui ne sont l'image d'aucun élément de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ . C'est-à-dire que la non surjectivité est *intrinsèque* et non due simplement à une insuffisance dans les définitions. Il y a donc un sous-espace (strict) de  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$  qui est l'image de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  par la transformation de Fourier.

Ces questions relatives à l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  sont *sans intérêt* pour une formation d'ingénieur et ne sont mentionnées ici que pour les curieux. L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est beaucoup plus simple et suffit pour traiter les problèmes théoriques utiles. Si on veut traiter effectivement les questions relatives à l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , on ne peut se contenter de la définition vague qui en a été donnée ici (fonctions "intégrables") et on doit se placer dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue, qui donne de l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  une définition rigoureuse et opératoire.

### 5. Espace $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

**Définition.** On désigne par  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions *de carré intégrable* sur  $] -\infty, +\infty[$ , c'est-à-dire les fonctions  $f(x)$  telles que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$  converge.

Cet espace est le plus important de l'analyse fonctionnelle. Son importance est encore renforcée par le rôle essentiel qu'il joue en Mécanique quantique. Comme l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  il ne peut être défini d'une manière précise et opératoire que dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

**Théorème 6** (inégalité de Schwarz). *Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , alors leur produit  $f \cdot g$  est élément de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , et leur somme  $f + g$  est élément de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  (et par conséquent  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel. En outre, on a l'inégalité :*

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx} \quad (5.1)$$

**Démonstration.** Pour montrer en toute rigueur que  $f \cdot g$  est élément de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , il faudrait avoir défini  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  dans le cadre de la théorie de Lebesgue. C'est pourquoi ce résultat sera admis. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) g(x)| dx \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

**N.B.** Ces inégalités correspondent au cas où  $f$  et  $g$  sont des fonctions à valeurs réelles; mais si elles sont complexes, il suffit de remplacer  $2 \int f(x) g(x) dx$  par  $\int \overline{f(x)} g(x) + f(x) \overline{g(x)} dx$  pour que toutes ces inégalités restent valables.

Les normes de  $f$  et  $g$  sont finies d'après les hypothèses et le résultat admis, donc l'intégrale du premier membre est finie. Comme il est par ailleurs évident que si  $\int |f(x)|^2 dx$  converge, il en est de même de  $\int |\lambda f(x)|^2 dx$ , on a prouvé par là que  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  est bien un espace vectoriel.

Enfin, on remarque que l'intégrale convergente  $\int |\lambda f(x) + g(x)|^2 dx$  est toujours positive. Or :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda f(x) + g(x)|^2 dx &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx + \\ &+ 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \end{aligned}$$

La condition pour que cela soit positif pour tout  $\lambda$  est que le discriminant de cette expression du second degré en  $\lambda$  soit négatif, ce qui donne exactement l'inégalité 5.1. CQFD

Sur l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  on considère, tout comme sur  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ , et  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , une notion de convergence spécifique, appelée *convergence en moyenne quadratique*: une suite  $f_n$  de fonctions de carré intégrable converge vers une fonction  $f$  également de carré intégrable si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (5.3)$$

Pour exprimer commodément ces nouvelles notions de convergence, on introduit pour tout  $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  la notation :

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (5.4)$$

## Transformation de Fourier

et pour tout  $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (5.5)$$

Avec ces nouvelles notations, l'inégalité de Schwarz 5.1 s'écrit :

$$\|f \cdot h\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|h\|_2 \quad (5.6)$$

**Théorème 7** (inégalité de Minkowski). *Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , on a les inégalités :*

$$\|f + h\|_2 \leq \|f\|_2 + \|h\|_2 \quad (5.7)$$

$$\|f - h\|_2 \geq | \|f\|_2 - \|h\|_2 | \quad (5.8)$$

**Démonstration.** Cela se déduit facilement de l'inégalité de Schwarz 5.1. En effet  $|f(x) + h(x)|^2 = |f(x)|^2 + |h(x)|^2 + f(x)\overline{h(x)} + \overline{f(x)}h(x)$  ; en passant aux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + h(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{h(x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}h(x) dx \end{aligned}$$

Les deux derniers termes du membre de droite se majorent par l'inégalité de Schwarz, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + h(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\|f\|_2 \cdot \|h\|_2$$

et on reconnaît dans le membre de droite ci-dessus le développement de  $(\|f\|_2 + \|h\|_2)^2$ . On a ainsi obtenu 5.7. Pour avoir 5.8, il suffit de remplacer dans 5.7  $f$  par  $f - h$ , puis (si  $\|f\|_2 < \|h\|_2$ ) d'échanger  $f$  et  $h$ . CQFD

**Théorème 8** (formule de Parseval). *Soient  $f$  et  $h$  deux bonnes fonctions à valeurs réelles ou complexes. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{h}(\xi)} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{h(x)} dx \quad (5.9)$$

La barre de  $\widehat{h}(\xi)$  ou  $\overline{h(x)}$  désigne le nombre complexe conjugué et disparaît si les fonctions sont à valeurs réelles.

**Démonstration.** Appelons  $\tilde{f}$  la transformation de Fourier inverse :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

On commence par remarquer que

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{-ix\xi} dx = 2\pi \widetilde{\overline{f}}(\xi)$$

et inversement :

$$\widetilde{\overline{f}(\xi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{ix\xi} dx = \frac{1}{2\pi} \widehat{\overline{f}}(\xi)$$

Dans l'identité 3.5, prenons  $y = 0$  et  $g = \widetilde{\overline{h}} = 2\pi \widetilde{\overline{h}}$ . Alors on aura  $\widehat{g} = 2\pi \overline{h}$ , puisque  $\sim$  et  $\widehat{\phantom{x}}$  se compensent. CQFD

Pour les transformations de Fourier  $\Phi$ ,  $\mathcal{F}_1$ , ou  $\mathcal{F}_h$  (voir section 2), la relation de Parseval prend une forme symétrique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi f(\xi) \overline{\Phi h(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{h(x)} dx \quad (5.9a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1 f(\xi) \overline{\mathcal{F}_1 h(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{h(x)} dx \quad (5.9b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_h f(\xi) \overline{\mathcal{F}_h h(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{h(x)} dx \quad (5.9c)$$

En prenant  $h = f$ , on obtient les relations très importantes

$$\|\Phi f\|_2 = \|f\|_2, \quad \mathcal{F}_1 f\|_2 = \|f\|_2, \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}_h f\|_2 = \|f\|_2,$$

la grandeur  $\|f\|_2$  étant appelée la *norme* de  $f$  dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ ; elle est donnée par

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$$

On peut alors énoncer la relation de Parseval en disant que les transformations  $\Phi$ ,  $\mathcal{F}_1$ , ou  $\mathcal{F}_h$  conservent la norme dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  : ce sont des *isométries* de l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ . Cette façon de dire résulte d'une analogie avec les espaces euclidiens, où la norme d'un vecteur est sa longueur. Cette analogie conduit à la théorie des *espaces de Hilbert* que nous aborderons plus loin : un espace de Hilbert est analogue aux espaces euclidiens, sauf que sa dimension est infinie. Les isométries de l'espace euclidien sont les rotations et les symétries. Les transformations  $\mathcal{F}_1$  et  $\Phi_1$  sont donc en quelque sorte des rotations de l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  (nous y reviendrons et nous verrons de façon précise qu'elles s'apparentent bien à des rotations d'angle  $\pi/2$ ).

Si on poursuit cette analogie avec la géométrie euclidienne, on peut dire que la transformation  $f \mapsto \widehat{f}$ , pour laquelle la relation de Parseval s'écrivait  $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ , n'est pas exactement une isométrie, mais une sorte de

## Transformation de Fourier

similitude (composée d'une rotation et d'une homothétie — ici de rapport  $\sqrt{2\pi}$ ).

**Théorème 9.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  : pour toute fonction  $f$  de carré intégrable, il existe une suite de bonnes fonctions  $f_n$  qui converge en moyenne quadratique vers  $f$ .*

La démonstration n'utilise que des techniques élémentaires, mais est fastidieuse. L'idée est la suivante : on construit à partir de  $f$ , supposée donnée a priori dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , d'abord les fonctions

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq n; \\ 0 & \text{si } |x| > n; \end{cases}$$

puis on pose

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(x-y)^2} g_n(y) dy$$

L'opération ci-dessus est ce qu'on appelle un *lissage par convolution*. On montre alors à l'aide d'intégrations par parties successives, accompagnées d'inégalités de la moyenne et de découpages en morceaux, que les fonctions  $f_n$  ainsi construites sont des bonnes fonctions (infiniment dérivables, et à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées).

Ensuite, avec le même type de techniques, on montre que  $\int |f_n(x) - f(x)|^2 dx$  tend bien vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. La théorie de l'intégrale de Lebesgue est certes implicite par l'évocation de l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , mais la démonstration du théorème n'utilise de cette théorie que des propriétés élémentaires de l'intégrale, telles que l'inégalité de la moyenne, l'inégalité de Schwarz, ou l'intégration par parties.

Le même type de démonstration permet d'établir aussi que :

**Théorème 9 bis.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  : pour toute fonction  $f$  intégrable, il existe une suite de bonnes fonctions  $f_n$  qui converge en moyenne vers  $f$ .*

Par contre  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  **N'EST PAS** dense dans  $C_0(\mathbb{R})$  (l'espace des fonctions continues et bornées). Il est d'ailleurs assez facile de comprendre pourquoi : la convergence dans  $C_0(\mathbb{R})$  est la convergence uniforme sur tout  $\mathbb{R}$ , ce qui veut dire que si  $f_n$  tend vers  $f$  dans  $C_0(\mathbb{R})$ ,  $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$  tend vers zéro ; or les bonnes fonctions sont toutes nulles à l'infini : il est évident que si par exemple  $f = 1$  et  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  on aura toujours  $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \geq 1$ .

Ce qui est vrai est le résultat suivant.

**Théorème 9 ter.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense (pour la convergence uniforme) dans l'espace  $C_{00}(\mathbb{R})$  des fonctions continues **et nulles à l'infini** :*



pour toute fonction  $f$  continue, et telle que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , il existe une suite de bonnes fonctions  $f_n$  qui converge uniformément sur tout  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$ .

En réunissant les théorèmes 8 et 9, on obtient le corollaire suivant, qui est l'une des propriétés les plus remarquables de l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  :

**Théorème 10.** *La transformation de Fourier, définie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , se prolonge par continuité à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ ; sur l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , ce prolongement est inversible, et continu ainsi que son inverse (c'est un isomorphisme). La formule de Parseval se prolonge elle aussi à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  tout entier, de sorte que 5.9 est vrai pour  $f$  et  $h$  quelconques dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ .*

**Démonstration.** D'après la formule de Parseval (théorème 8), si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a  $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ . En effet, il suffit de poser  $h = f$  dans 5.9, puis de prendre la racine carrée des deux membres. Si maintenant  $f$  est un élément quelconque de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , non nécessairement dans le sous-espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on peut dire d'après le théorème 9, qu'il existe une suite  $f_n$  d'éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui tend dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire en moyenne quadratique) vers  $f$ . Posons alors *par définition* :  $\widehat{f} = \lim_n \widehat{f_n}$ . La limite  $\widehat{f}$  ne dépend pas de la suite  $f_n$  choisie, puisque si on en avait pris une autre  $g_n$  (ayant également  $f$  pour limite), on aurait d'après la formule de Parseval :

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_n - g_n\|_2$$

ce qui tend évidemment vers zéro. Mais rien ne prouve a priori que cette limite existe; en fait, l'existence de cette limite est garantie pour la raison suivante: la suite  $f_n$  étant convergente dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , est automatiquement une suite de Cauchy, c'est-à-dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \|f_m - f_n\|_2 = 0$ . D'après la relation de Parseval 5.9, la suite  $\widehat{f_n}$  est alors aussi une suite de Cauchy, puisque  $\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_m - f_n\|_2$ . L'existence d'une limite de la suite  $\widehat{f_n}$  dans l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  résulte d'une propriété qu'on démontre dans la théorie de Lebesgue, à savoir que l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  est complet.

On a ainsi *prolongé par continuité* la transformation  $f \mapsto \widehat{f}$ . Puisque le sous-espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , ce prolongement par continuité s'étend à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  tout entier.

Pour prouver que la formule de Parseval se prolonge aussi, supposons d'abord que les fonctions  $f$  et  $h$  de 5.9 sont réelles. On peut alors écrire que

$$\|f + h\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(x) dx \quad (5.10)$$

$$\|\widehat{f} + \widehat{h}\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{h}\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{h}(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

## Transformation de Fourier

Ces égalités montrent qu'il suffit de prouver que

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \quad (5.12)$$

En effet, si cela est vrai pour tout  $f$ , ce sera vrai aussi pour  $f$ ,  $h$  et  $f + h$ , et 5.9 résultera de 5.10 — 5.11.

Or, d'après l'inégalité de Minkowski 5.8,  $\lim f_n = f$  entraîne automatiquement que  $\lim \|f_n\|_2 = \|f\|_2$ , et de même  $\lim \widehat{f_n} = \widehat{f}$  entraîne que  $\lim \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ . Si donc la relation 5.12 est vraie pour les  $f_n$  et les  $\widehat{f_n}$ , qui sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , elle sera vraie aussi pour les limites.

Enfin, si  $f$  et  $h$  sont complexes, on se ramène au cas qui vient d'être traité en séparant la partie réelle et la partie imaginaire.

La formule d'inversion 3.7 (théorème 4) ne peut pas se prolonger telle quelle, puisque si  $f$  est un élément quelconque de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , l'intégrale  $\int \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$  n'est pas forcément définie. On procède alors ainsi : soit  $f$  un élément quelconque de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , et  $g_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui converge (en moyenne quadratique) vers  $\widehat{f}$ . La formule d'inversion peut s'écrire :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (5.13)$$

Il est facile de voir que cela est vrai quelle que soit la suite  $g_n$  choisie : d'après la relation de Parseval précédemment étendue à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  tout entier,  $\|\widehat{g_n} - f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|g_n - \widehat{f}\|_2$  (où  $\widehat{g_n}$  désigne la transformée inverse de  $g_n$ ). Cela montre bien que si  $g_n$  tend vers  $\widehat{f}$ , alors  $\widehat{g_n}$  tend vers  $f$ . CQFD

Pour que la démonstration ci-dessus soit intellectuellement honnête, il convient encore d'approfondir un aspect de la question qui est resté dans l'ombre parce que l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  n'a pas été construit devant vous, mais renvoyé à la mystérieuse théorie de M. Henri Lebesgue. Revenons à la question de la bijectivité de la transformation de Fourier étendue à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ . Dans la démonstration ci-dessus, nous avons fait comme si la bijectivité était établie automatiquement par la simple existence de la formule d'inversion étendue 5.13, ce qui est certes correct, mais cache un point subtil. Pour être bijective, il faut d'abord que la transformation de Fourier étendue à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  soit injective ; ce qui signifie que si  $\widehat{f} = \widehat{g}$ , alors  $f = g$ . Il est bien clair que  $\widehat{f} = \widehat{g}$  entraîne  $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_2 = 0$  : cela résulte simplement de ce que l'intégrale d'une fonction nulle est nulle. Notre démonstration est entièrement basée sur la formule de Parseval, d'après laquelle, si  $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_2 = 0$ , on aura aussi  $\|f - g\|_2 = 0$ . Le point qui est resté dans l'ombre est alors celui-ci : comment pouvons-nous affirmer que  $f = g$ , alors que la relation de Parseval permet seulement d'obtenir  $\|f - g\|_2 = 0$  ? L'intégrale du carré d'une fonction nulle est nulle, mais la réciproque de cette affirmation est fautive : si par exemple une fonction  $h(x)$  est telle que  $\int |h(x)|^2 dx = 0$ , on ne peut pas conclure que  $h(x)$  est nulle en tout point : si  $h(x)$  est nulle partout *sauf en un nombre fini ou discret de points*, son intégrale sera nulle et pourtant on ne pourra pas dire que  $\forall x \ h(x) = 0$ . Dans la théorie de Lebesgue, il existe un concept spécial pour cela : un ensemble fini ou discret de points est un *ensemble négligeable* ou *ensemble de mesure nulle* (voir chapitre I pages 8 et 9). La notion d'intégrale admise dans ce cours est

trop vague pour permettre une définition précise, rigoureuse, et opératoire des ensembles négligeables. Lorsqu'on a  $\|f - g\|_2 = 0$ , on ne peut donc pas conclure quelque chose de précis. Mais dans la théorie de Lebesgue, on peut démontrer rigoureusement les deux théorèmes suivants :

a) Si  $\int |f(x)| dx = 0$  ou  $\int |f(x)|^2 dx = 0$ , alors il existe un ensemble négligeable en dehors duquel  $f$  est nulle.

b) Entre deux fonctions  $f$  et  $g$ , la relation : “il existe un ensemble négligeable en dehors duquel  $f(x) = g(x)$ ”, est une relation d'équivalence.

Les espaces  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  sont en réalité des espaces quotients par cette relation d'équivalence. Ainsi, quand on dit que  $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , on sous-entend que  $f$  n'est pas exactement une fonction définie en chaque point de l'intervalle  $\mathbb{R}$ , mais une fonction définie en “presque” tous les points. Par exemple, la fonction  $J(x)$ , égale à 1 si  $x$  est rationnel, et à 0 si  $x$  est irrationnel, ne se distingue pas de la fonction égale à zéro partout.

En conclusion, le théorème 10 dit très exactement ceci : que si deux fonctions  $f$  et  $g$ , définies en tout point de  $\mathbb{R}$ , et de carrés intégrables, sont telles que  $\widehat{f} = \widehat{g}$ , alors  $f - g$  est nulle “presque partout” (i.e. en dehors d'un ensemble négligeable).

La surjectivité de la transformation de Fourier étendue à  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  exige une interprétation analogue : si  $f(x)$  est une fonction définie en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$ , et de carré intégrable, il existe une suite  $f_n$  d'éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui tend vers  $f$  en moyenne quadratique ; la suite  $\widetilde{f_n}$  est alors une suite d'éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui a une limite dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  (car c'est une suite de Cauchy et que  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  est complet). Mais cela ne signifie pas que pour tout  $x$ , la suite numérique  $\widetilde{f_n}(x)$  a une limite dans  $\mathbb{R}$  : on peut seulement affirmer cela en dehors d'un certain ensemble négligeable, dont la théorie de Lebesgue garantit l'existence. De sorte que la limite de  $\widetilde{f_n}$  est une fonction définie *presque* partout (au sens de Lebesgue) et non absolument partout. Cette limite est alors l'élément de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  dont la transformée de Fourier est  $f$ , ce qui prouve la surjectivité.

## 6. Transformation de Laplace.

Une autre transformation, très importante pour les applications (voir cours d'électronique) est la *transformation de Laplace*, qui s'apparente à la transformation de Fourier. Étant donnée une fonction  $f(t)$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , on appelle transformée de Laplace de  $f$  la fonction

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (6.1)$$

Cette définition est correcte si l'intégrale converge ; pour garantir cela, on ne considérera que des fonctions  $f$  à croissance au plus exponentielle, c'est-à-dire des fonctions  $f$  pour lesquelles il existe des constantes positives  $M$  et  $A$  telles que  $\forall t \geq 0 \ |f(t)| \leq M e^{At}$ . Sous ces conditions, on peut affirmer que la transformée de Laplace  $F(z)$  est une fonction analytique de  $z$  dans le demi-plan  $\Re z > A$ . Pour  $\Re z \leq 0$ , l'intégrale sera en général divergente, mais cela n'interdit pas que  $F(z)$  puisse avoir un prolongement analytique au-delà du demi-plan  $\Re z > A$ . En tous cas, il est clair que la fonction  $f(t) = e^{+t^2}$  par exemple, n'a pas de transformée de Laplace.

## Transformation de Fourier

Voyons tout de suite des exemples.

— **1.** Soit  $f(t) = t^{\alpha-1}$ . Cette fonction est bien à croissance au plus exponentielle. D'après ce qui a été vu au chapitre **IV**, sa transformée de Laplace est  $F(z) = [z^{-\alpha}]_2$ . Cette fonction est analytique dans le domaine  $\Omega_2$  ( $\mathbb{C}$  privé de la demi-droite  $] -\infty, 0]$ ). Mais l'intégrale  $\int t^{\alpha-1} e^{-zt} dt$  n'est convergente que pour  $\Re z > 0$  et par conséquent ne représente une fonction analytique que dans ce demi-plan. La fonction  $[z^{-\alpha}]_2$  est donc un prolongement analytique au-delà de ce demi-plan.

— **2.** Soit  $f(t) = e^{at}$ ,  $a$  étant un nombre complexe quelconque. En prenant  $M = 1$  et  $A = \Re a$  on a bien l'inégalité  $|f(t)| \leq M e^{At}$ , et on s'attend donc à ce que  $F(z)$  soit analytique dans le demi-plan  $\Re z > A$ . Le calcul direct donne  $F(z) = 1/(z - a)$ ; cette fonction est en effet analytique dans le demi-plan  $\Re z > A$ , mais se prolonge à  $\mathbb{C} - \{a\}$ .

— **3.** Soit  $f(t) = 1/(1+t)$ . Pour  $z$  réel  $> 0$ , un changement de variable simple montre que

$$F(z) = \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{1 + \frac{s}{z}} ds = \frac{1}{z} \text{Eu}\left(\frac{1}{z}\right)$$

où  $\text{Eu}(w)$  désigne la fonction d'Euler de **III.5** (qui avait été désignée alors par  $F(w)$ , mais cela n'est plus possible ici). On avait vu en **III.5** que la fonction  $\text{Eu}(w)$  se prolonge au domaine  $\Omega_2$ ; il en est donc de même pour  $F(z) = \frac{1}{z} \text{Eu}(\frac{1}{z})$ , puisque la transformation  $z \mapsto 1/z$  transforme  $\Omega_2$  en lui-même. On voit donc une fois de plus que, bien que l'intégrale  $\int f(t) e^{-zt} dt$  diverge pour  $\Re z < 0$ , la fonction  $F(z)$  se prolonge analytiquement au-delà du demi-plan  $\Re z > 0$ .

Il y a une parenté entre la transformation de Laplace et la transformation de Fourier. En effet, soit  $f(t)$  une fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et  $F(z)$  sa transformée de Laplace, définie et analytique au moins dans le demi-plan  $\Re z > A$ . Posons alors

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0; \\ f(t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Il est clair que la transformée de Fourier  $\widehat{\varphi}(\xi)$  est égale à  $F(-i\xi)$ . Autrement dit, les valeurs de la transformée de Laplace  $F(z)$  le long de la droite  $\Re z = 0$  représentent la transformée de Fourier de la fonction  $\varphi(x)$ ; plus généralement, les valeurs de  $F(z)$  le long de la droite  $\Re z = a$  représentent la transformée de Fourier de la fonction  $\varphi(x) e^{-ax}$ ; en effet :

$$F(a + i\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-at} e^{-it\xi} dt \quad (6.2)$$

N.B. Pour la commodité on a pris ici la transformation avec  $e^{-ix\xi}$ . D'après la formule d'inversion, on en déduit que :

$$\varphi(t) e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a + i\xi) e^{it\xi} d\xi \quad (6.3)$$

ou encore

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a + i\xi) e^{t(a+i\xi)} d\xi \quad (6.4)$$

On peut interpréter le membre de droite de 6.4 comme l'intégrale obtenue par paramétrage de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_a} F(z) e^{tz} dz \quad (6.5)$$

où  $\Gamma_a$  est le chemin (infini) constitué par la droite  $\Re z = a$  parcourue du bas vers le haut.

Puisque  $F(z)$  est analytique, et souvent (comme le montrent les exemples) au-delà du demi-plan  $\Re z > 0$ , on peut dans bien des cas déformer le chemin  $\Gamma_a$  sans changer sa classe d'homologie, et utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale 6.5, et par conséquent en déduire la fonction  $f(t)$ . Autrement dit, l'inversion de la transformation de Laplace est souvent possible par la méthode des résidus, et fournit ainsi un outil puissant pour les applications (voir cours d'électronique).