

X. ESPACES DE HILBERT.

1. Espaces euclidiens de dimension infinie.

En dimension finie, un espace euclidien est un espace vectoriel avec un produit scalaire. Les espaces euclidiens de même dimension finie étant tous isomorphes, l'espace \mathcal{E}_n des polynômes de degré $\leq n$ fournit l'exemple générique des espaces de dimension $n + 1$ (on aurait tout aussi bien pu prendre pour exemple \mathbb{R}^{n+1}).

Sur \mathcal{E}_n on peut définir une infinité de produits scalaires différents; en voici trois, notés $\langle P | Q \rangle_k$ avec $P(x) = \sum a_j x^j$ et $Q(x) = \sum b_j x^j$:

$$\begin{aligned}\langle P | Q \rangle_1 &= \sum_{j=0}^{j=n} a_j b_j \\ \langle P | Q \rangle_2 &= \int_{-1}^{+1} P(x) Q(x) dx \\ \langle P | Q \rangle_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x) Q(x) dx\end{aligned}\tag{1.1.}$$

Si on identifie un polynôme au vecteur de \mathbb{R}^{n+1} formé par ses coefficients, $\langle | \rangle_1$ est le produit scalaire usuel. Mais les deux autres sont différents.

Les polynômes $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $\langle | \rangle_1$. Mais ils ne le sont plus pour les produits scalaires $\langle | \rangle_2$ et $\langle | \rangle_3$. Des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle | \rangle_2$ sont par exemple les polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}; \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}; \\ P_4(x) &= \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}; \quad P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}; \quad \dots\end{aligned}$$

Pour le produit scalaire $\langle | \rangle_3$ ce seraient les polynômes d'Hermite :

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x; \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12; \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x; \quad \dots\end{aligned}$$

Les familles de polynômes $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$, $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$, et $\{H_0, H_1, H_2, \dots, H_n\}$, sont des bases de l'espace \mathcal{E}_n , orthogonales pour (respectivement) les produits scalaires $\langle | \rangle_1$, $\langle | \rangle_2$, et $\langle | \rangle_3$. Pour les rendre orthonormées, il suffit de diviser chaque polynôme par sa norme.

Maintenant, si au lieu de considérer l'espace \mathcal{E}_n des polynômes de degré $\leq n$, on considère l'espace \mathcal{E}_∞ de tous les polynômes quel que soit leur degré, on obtient un espace de dimension infinie. Rien n'est changé en ce qui concerne les produits scalaires, ni l'orthogonalité; les familles de polynômes $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots\}$, $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots\}$, et $\{H_0, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots\}$ sont toujours orthogonales (pour le produit scalaire correspondant), mais sont maintenant infinies.

L'infini introduit des propriétés nouvelles, la plus importante étant la suivante: tout polynôme est une combinaison linéaire *finie* des polynômes de base $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ (ou $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$, ou encore $\{H_0, H_1, H_2, \dots, H_n\}$), mais on peut envisager aussi une série convergente *infinie* des polynômes de base.

Or, puisqu'un polynôme est une somme *finie* du type $\sum a_j x^j$, ou $\sum a_j P_j(x)$, ou $\sum a_j H_j(x)$, c'est donc qu'une somme *infinie* de ce type *n'est pas* un polynôme.

La question est alors: que représente une somme infinie (série convergente)? Pour que la réponse ait un sens, il faut d'abord préciser ce qu'on entend par série convergente; or, comme nous sommes dans un espace euclidien, la notion de convergence qui s'impose naturellement est celle qui est liée à la distance euclidienne: on dit que la série $\sum f_j$ converge vers f si $\mathbb{R}\text{-}\lim_n \|f - \sum_{j \leq n} f_j\|_k = 0$, avec $\|g\|_k = \sqrt{\langle g | g \rangle_k}$. Mais ici, nous ne savons pas à l'avance ce que peut être f ; il nous faut donc une définition "intrinsèque" de la convergence. Une telle définition intrinsèque est fournie par le critère de Cauchy:

Définition. Dans un espace euclidien E , on dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est intrinsèquement convergente si

$$\mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{p \geq n} \left\| \sum_{j=n}^{j=p} f_j \right\| \right\} = 0 \quad (1.2.)$$

avec toujours $\|g\| = \sqrt{\langle g | g \rangle}$. On vérifie immédiatement par l'inégalité du triangle (qui s'applique à la norme $\| \cdot \|$) que ce critère est satisfait si la série est normalement convergente, c'est-à-dire si la série des normes $\sum \|f_n\|$ est convergente dans \mathbb{R} . Mais il s'agit là d'une condition suffisante et non nécessaire. Le point essentiel est cependant qu'une série peut être intrinsèquement convergente sans pour autant avoir une somme dans le même espace.

Dans un espace euclidien de dimension infinie, une série intrinsèquement convergente n'est pas forcément convergente.

On peut donner immédiatement un contre-exemple : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} x^n$ est intrinsèquement convergente dans l'espace euclidien \mathcal{E}_∞ de tous les polynômes muni du produit scalaire $\langle \mid \rangle_1$, puisque, en utilisant le fait que la famille x^j est orthonormée, on peut écrire pour n'importe quelle somme partielle

$$\left\| \sum_{j=n}^{j=p} \frac{1}{n} x^n \right\|^2 = \sum_{j=n}^{j=p} \frac{1}{n^2}, \quad (1.3.)$$

et la série de terme général $1/n^2$ est convergente dans \mathbb{R} . Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} x^n$ ne peut pas être elle-même un polynôme, puisque ses coefficients $\frac{1}{n}$ ne sont pas nuls à partir d'un certain rang ; si cette série devait d'une façon ou d'une autre avoir une somme, ce serait la fonction $f(x) = -\ln(1-x)/x$, qui n'est pas un polynôme.

Ce phénomène est semblable à celui qu'on rencontre avec les séries ou les suites de nombres rationnels : les séries telles que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ou $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ sont intrinsèquement convergentes puisqu'elles satisfont au critère de Cauchy. Mais elles n'ont pas de somme dans le même espace : cette somme n'est pas un nombre rationnel (c'est respectivement $\frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$). On dit alors que l'espace \mathbb{Q} n'est pas complet, tandis que l'espace \mathbb{R} l'est. Dans la présente discussion, il apparaît donc que l'espace euclidien \mathcal{E}_∞ des polynômes n'est pas complet.

En conclusion : dans un espace euclidien de dimension infinie, rien ne garantit qu'une série intrinsèquement convergente ait une somme appartenant à cet espace ; sa somme peut être en dehors. Autrement dit, rien ne garantit qu'un tel espace soit complet, bien que ce soit un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Par contre, en dimension finie, un espace euclidien sur \mathbb{R} est forcément complet.

La question posée plus haut : "que représente une somme infinie de la forme $\sum a_j x^j$?" doit alors être précisée ainsi : "que représentent les séries infinies *intrinsèquement convergentes* de la forme $\sum a_j x^j$?" Dans les trois cas considérés en exemple, la réponse est alors la suivante :

— premier cas, séries infinies de la forme $\sum a_j x^j$, ou $\sum a_j P_j(x)$, ou $\sum a_j H_j(x)$, qui sont intrinsèquement convergentes pour la distance euclidienne $\|g\|_1 = \sqrt{\langle g \mid g \rangle_1}$: on obtient un élément de l'espace ℓ^2 , qui est l'espace de toutes les suites $\{c_n\}_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum_n c_n^2$ soit convergente ;

— deuxième cas, séries infinies de la forme $\sum a_j x^j$, ou $\sum a_j P_j(x)$, ou $\sum a_j H_j(x)$, qui sont intrinsèquement convergentes pour la distance euclidienne $\|g\|_2 = \sqrt{\langle g \mid g \rangle_2}$: on obtient un élément de l'espace $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ des fonctions de carré intégrable sur $[-1, +1]$.

— troisième cas, séries infinies de la forme $\sum a_j x^j$, ou $\sum a_j P_j(x)$, ou $\sum a_j H_j(x)$, qui sont intrinsèquement convergentes pour la distance euclidienne $\|g\|_3 = \sqrt{\langle g | g \rangle_3}$: on obtient un élément de l'espace $\mathbb{L}_2(e^{-x^2/2} \mathbb{R})$ des fonctions $f(x)$ sur \mathbb{R} telles que $\int |f(x)|^2 e^{-x^2} dx$ soit convergente (i.e l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} et telles que $e^{-x^2/2} f(x)$ soit de carré intégrable).

Ces trois espaces, ℓ^2 , $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, et $\mathbb{L}_2(e^{-x^2/2} \mathbb{R})$, sont complets.

Les phénomènes nouveaux introduits par l'infini sont donc les suivants :

- a) une série infinie, contrairement aux sommes finies, peut avoir une somme extérieure à l'espace considéré ;
- b) ces sommes (de séries infinies intrinsèquement convergentes) forment une espace *qui dépend du produit scalaire considéré*.

Notons que ce n'est pas le choix de la base qui détermine le résultat, c'est bien celui du produit scalaire, parce que les séries intrinsèquement convergentes ne sont pas les mêmes selon la notion de limite choisie.

On pourrait aussi se demander quel espace on obtiendrait pour les séries infinies convergentes au sens de la limite uniforme déjà connue⁽¹⁾. Réponse : l'espace correspondant est alors l'ensemble des limites uniformes de polynômes, et cet espace n'est autre que celui des fonctions continues sur $[-1, +1]$.

Bien entendu, ces résultats ne sont pas évidents (les démonstrations sont difficiles). Pour chaque produit scalaire particulier, l'ensemble des séries convergentes selon la métrique qu'il induit, forme un espace spécifique qui est complet ; mais il faut dire aussi que les trois exemples de produits scalaires considérés ici ($\langle \cdot | \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$, et $\langle \cdot | \cdot \rangle_3$) ont été choisis parce que l'espace correspondant est spécialement intéressant.

2. Espaces de Hilbert.

On appelle *espace de Hilbert* un espace euclidien de dimension infinie qui est complet. Nous admettrons que les espaces suivants sont complets.

— ℓ^2 : espace de toutes les suites infinies $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum c_n^2$ converge ; c'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} | \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum a_n b_n$.

— $\mathbb{L}_2(p, [a, b])$: espace de toutes les fonctions $f(x)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$ telles que l'intégrale $\int_a^b p(x) [f(x)]^2 dx$ converge ; c'est donc un espace

⁽¹⁾ On notera que la limite uniforme n'est pas liée à une distance euclidienne ; il n'y a pas de produit scalaire qui conduit à la limite uniforme.

Espaces de Hilbert

de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx .$$

La fonction $p(x)$ est appelée le *poids*. Si le poids est 1, on écrit simplement $\mathbb{L}_2([a, b])$ au lieu de $\mathbb{L}_2(p, [a, b])$.

— $\mathbb{L}_2(p, [0, +\infty[)$ ou $\mathbb{L}_2(p,]-\infty, +\infty[)$: on devine.

Les espaces suivants sont complets, mais ne sont pas des espaces de Hilbert, car leur métrique n'est pas définie par un produit scalaire.

— $\mathbb{L}_1(p, [a, b])$, $\mathbb{L}_1(p, [0, +\infty[)$, $\mathbb{L}_1(p,]-\infty, +\infty[)$: leur métrique est définie par la norme $\|f\|_{1,p} = \int p(x) |f(x)| dx$, l'intégrale portant sur le domaine indiqué $[a, b]$, $[0, +\infty[$, ou $]-\infty, +\infty[$.

— $C_0([a, b])$: espace des fonctions f continues sur $[a, b]$ avec la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\}$ (c'est la métrique de la limite uniforme).

— $C_0([0, +\infty[)$ ou $C_0(]-\infty, +\infty[)$: espace des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$ **et nulles à l'infini**⁽²⁾, également avec la métrique de la limite uniforme.

Afin d'illustrer les propriétés des espaces de Hilbert, nous allons étudier de plus près un exemple, l'espace $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ des fonctions dont le carré est intégrable sur l'intervalle $[-1, +1]$. Cet espace contient $C_0([-1, +1])$ comme sous-espace vectoriel ; mais pour la métrique euclidienne de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, $C_0([-1, +1])$ **n'est pas complet** (il l'est pour la métrique uniforme). $C_0([-1, +1])$ contient à son tour le sous-espace vectoriel \mathcal{T} des polynômes trigonométriques de la forme

$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{j=n} a_j \cos nx + b_j \sin nx$$

où n est appelé le degré du polynôme (si a_n ou b_n est $\neq 0$). Pour éviter les confusions, appelons \mathcal{T}_∞ l'espace de tous les polynômes trigonométriques quel que soit leur degré, et \mathcal{T}_N l'espace de tous les polynômes trigonométriques de degré $\leq N$. Il est clair que \mathcal{T}_∞ est de dimension infinie et \mathcal{T}_N de dimension finie $2N + 1$.

Pour résumer : \mathcal{T}_N est un sous-espace vectoriel de \mathcal{T}_∞ , qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $C_0[-1, +1]$, lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}_2[-1, +1]$.

⁽²⁾ Si on néglige cette condition, il peut se produire des horreurs.

Considérons la fonction $f_0(x) = |x|$; en tant que fonction définie sur $[-1, +1]$, elle est continue et donc appartient à l'espace $C_0([-1, +1])$. Mais elle n'appartient pas au sous-espace \mathcal{T}_∞ : f_0 n'est pas un polynôme trigonométrique (un polynôme trigonométrique serait dérivable, alors que $|x|$ ne l'est pas en $x = 0$).

Développons f_0 en série de Fourier. Puisqu'on considère l'intervalle $[-1, +1]$, on prendra une série de la forme $a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + a_3 \cos 3\pi x + \dots$. D'après le théorème de Fourier, les coefficients sont

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f_0(x) \cos n\pi x \, dx \quad (2.1.)$$

Cette intégrale est aussi l'expression du produit scalaire de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ dans lequel se trouvent toutes les fonctions considérées ici. Les coefficients de Fourier peuvent donc s'écrire aussi $c_n = \langle f_0 | \cos_n \rangle$, où \cos_n désigne la fonction $x \mapsto \cos n\pi x$. Il est facile de calculer les c_n : la fonction $f_0(x) \cos n\pi x$ étant paire, l'intégrale est égale à $2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx$ qu'on intègre par parties; le résultat est $c_n = 0$ si n est pair et $c_n = -4/(n\pi)^2$ si n est impair.

Les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{n=N} c_n \cos_n$ sont des polynômes trigonométriques de degré N (ou $N-1$ si N est pair) et sont donc dans le sous-espace \mathcal{T}_N .

On remarquera que les fonctions \cos_n sont orthonormées. En effet, si $n \neq m$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle \cos_n | \cos_m \rangle &= 2 \int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x \, dx \\ &= \int_0^1 \cos(n+m)\pi x + \cos(n-m)\pi x \, dx \\ &= \frac{\sin(n+m)\pi x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\pi x}{n-m} \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.2 a.)$$

et si $n = m$

$$\langle \cos_n | \cos_n \rangle = 2 \int_0^1 \cos^2 n\pi x \, dx = \int_0^1 1 + \cos 2n\pi x \, dx = 1 \quad (2.2 b.)$$

Calculons la distance $\|f_0 - S_{2p-1}\|$. On va d'abord développer son carré. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire puis le fait que les fonctions \cos_n sont orthonormées, on obtient successivement

$$\|f_0 - S_N\|^2 = \langle f_0 - \sum_{n=0}^{2p-1} c_n \cos_n | f_0 - \sum_{n=0}^{2p-1} c_n \cos_n \rangle$$

Espaces de Hilbert

$$\begin{aligned}
&= \langle f_0 \mid f_0 \rangle - 2 \sum_{n=0}^{2p-1} c_n \langle f_0 \mid \cos_n \rangle + \sum_{n=0}^{2p-1} \sum_{m=0}^{2p-1} c_n c_m \langle \cos_n \mid \cos_m \rangle \\
&= \|f_0\|^2 - 2 \sum_{n=0}^{2p-1} c_n^2 + \sum_{n=0}^{2p-1} c_n^2 \\
&= \|f_0\|^2 - \sum_{n=0}^{2p-1} c_n^2 \tag{2.3.}
\end{aligned}$$

Calculons aussi la distance $f_0 - T_{2p-1}$ de f_0 à un élément *quelconque* T_{2p-1} du sous-espace \mathcal{T}_{2p-1} . Le polynôme trigonométrique T_{2p-1} ne s'exprime pas seulement avec les fonctions \cos_n , mais aussi avec les fonctions \sin_n ; il est cependant facile de vérifier que l'ensemble des fonctions \cos_n et \sin_n forment une famille orthonormée. Posons donc

$$T_{2p-1} = a_0 + \sum_{n=1}^{2p-1} a_n \cos_n + b_n \sin_n$$

et calculons

$$\begin{aligned}
\|f_0 - T_N\|^2 &= \left\langle f_0 - \sum_{n=0}^{2p-1} a_n \cos_n + b_n \sin_n \mid f_0 - \sum_{n=0}^{2p-1} a_n \cos_n + b_n \sin_n \right\rangle \\
&= \langle f_0 \mid f_0 \rangle - 2 \sum_{n=0}^{2p-1} a_n \langle f_0 \mid \cos_n \rangle + b_n \langle f_0 \mid \sin_n \rangle + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{2p-1} \sum_{m=1}^{2p-1} a_n a_m \langle \cos_n \mid \cos_m \rangle + a_n b_m \langle \cos_n \mid \sin_m \rangle + \\
&\quad + b_n a_m \langle \sin_n \mid \cos_m \rangle + b_n b_m \langle \sin_n \mid \sin_m \rangle \\
&= \langle f_0 \mid f_0 \rangle - 2 \sum_{n=0}^{2p-1} a_n c_n + \sum_{n=0}^{2p-1} \sum_{m=1}^{2p-1} a_n^2 + b_n^2 \\
&= \|f_0\|^2 - \sum_{n=0}^{2p-1} c_n^2 + \sum_{n=0}^{2p-1} (a_n - c_n)^2 + b_n^2 \\
&= \|f_0 - S_{2p-1}\|^2 + \sum_{n=0}^{2p-1} (a_n - c_n)^2 + b_n^2 \tag{2.4.}
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'avant-dernière ligne on a utilisé l'identité $a_n^2 - 2 a_n c_n = -c_n^2 + (a_n - c_n)^2$. On voit d'après la dernière ligne que la distance $\|f_0 - T_{2p-1}\|^2$, égale à $\|f_0 - S_{2p-1}\|^2$ plus une somme de carrés, est donc *toujours* $\geq \|f_0 - S_{2p-1}\|^2$. Elle devient *égale* à $\|f_0 - S_{2p-1}\|^2$ lorsque cette somme de carrés devient nulle, c'est-à-dire lorsque pour tout $n \leq 2p-1$ on a $a_n = c_n$ et $b_n = 0$; autrement dit, lorsque $T_{2p-1} = S_{2p-1}$.

On peut donc dire que, parmi tous les polynômes trigonométriques T de degré $\leq 2p-1$, S_{2p-1} est celui pour lequel la distance $f_0 - T$ est minimum. En général, les coefficients de Fourier d'une fonction sont ceux qui rendent minimum cette distance. La somme partielle de Fourier S_{2p-1} est appelée *la projection orthogonale de f_0 sur le sous-espace \mathcal{T}_{2p-1}* .

Mais on va voir maintenant que la projection orthogonale sur un sous-espace n'existe pas toujours. Cherchons en effet le minimum de $f_0 - T$ lorsque T parcourt, non \mathcal{T}_{2p-1} , mais \mathcal{T}_∞ . Pour cela, nous utilisons le fait supposé connu que la somme de la série de Fourier complète est égale à f_0 , c'est-à-dire que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_0 - S_{2p-1}\| = 0$$

Cela signifie que la borne inférieure de la distance de f_0 à \mathcal{T}_∞ est nulle. Mais ce n'est pas un minimum. S'il existait un polynôme trigonométrique S_∞ qui réalise ce minimum, il ne pourrait être qu'égal à f_0 : on aurait $\|f_0 - S_\infty\| = \min \{\|f_0 - S_{2p-1}\|\} = 0$, d'où $f_0 = S_\infty$. Or c'est impossible puisque f_0 n'est pas un polynôme trigonométrique.

On voit ainsi la manifestation d'une propriété impensable en dimension finie : la distance de f_0 au sous-espace vectoriel \mathcal{T}_∞ est nulle, et pourtant f_0 n'est pas dans ce sous-espace. L'élément f_0 de l'espace $C_0([-1, +1])$ est la limite d'une suite de polynômes trigonométriques comme un nombre irrationnel est la limite d'une suite de fractions. C'est le même phénomène que dans la section 1 avec la fonction $-\ln(1-x)/x$, qui n'est pas un polynôme, mais qui est la limite (selon le produit scalaire $\langle | \rangle_1$) d'une suite de polynômes.

On peut donc dire que l'espace \mathcal{T}_∞ n'est pas complet pour la métrique issue du produit scalaire $\langle | \rangle_2$. Mais l'espace $C_0([-1, +1])$ n'est pas complet non plus pour cette métrique. Seul l'espace $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, qui les englobe tous, l'est (théorème de Fischer-Riesz).

Pour se rendre compte que $C_0([-1, +1])$ n'est pas complet, on peut prendre la suite de fonctions continues

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x < -\frac{1}{n}; \\ nx & \text{pour } -\frac{1}{n} \leq x \leq +\frac{1}{n}; \\ +1 & \text{pour } x > +\frac{1}{n}. \end{cases} \quad (2.5.)$$

Cette suite converge vers la fonction discontinue

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x < 0 \\ +1 & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad (2.6.)$$

pour la métrique issue du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$. En effet, $f_n - f$ est une fonction nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$, où elle est plus petite que 1, donc l'intégrale de son carré tend vers zéro. On a ainsi exhibé dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ une fonction discontinue qui est limite de fonctions continues, donc $C_0([-1, +1])$ n'est pas complet.

Il ne faut cependant pas en conclure hâtivement que les sous-espaces de dimension infinie d'un espace de Hilbert sont forcément non complets. Par exemple, on peut considérer le sous-espace \mathcal{H}_+ de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ des fonctions paires et le sous-espace \mathcal{H}_- des fonctions impaires. Il est facile de voir que toute fonction définie sur l'intervalle $[-1, +1]$ s'écrit d'une manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire: si $f \in \mathbb{L}_2([-1, +1])$, on pose $f_+(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ et $f_-(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$; on a alors $f = f_+ + f_-$ et l'unicité se vérifie aisément. Les deux sous-espaces \mathcal{H}_+ et \mathcal{H}_- sont complets en vertu du fait que la limite d'une suite de fonctions paires est forcément aussi une fonction paire (et de même pour les fonctions impaires): si f_n est une suite intrinsèquement convergente (ou suite de Cauchy) de fonctions paires, elle a une limite f dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ car cet espace est complet, et d'autre part cette limite est paire car c'est une limite de fonctions paires, donc $f \in \mathcal{H}_+$.

Remarque. Cette argumentation a conduit à introduire indépendamment de la notion d'espace complet, celle de sous-espace fermé: un sous-espace fermé est défini par la propriété que s'il contient une suite convergente, il contient aussi la limite de cette suite; ainsi les sous-espaces \mathcal{H}_+ et \mathcal{H}_- sont des sous-espaces fermés de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$: si une suite f_n de \mathcal{H}_- converge vers un élément f de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, cet élément f sera forcément dans \mathcal{H}_- . L'argument ci-dessus peut donc se résumer ainsi: un sous-espace fermé d'un espace complet est complet; mais un sous-espace fermé d'un espace non complet n'est pas forcément complet: par exemple le sous-espace \mathcal{T}_+ de \mathcal{T}_∞ des fonctions continues paires n'est pas complet, bien qu'il soit fermé dans \mathcal{T}_∞ ; il suffit pour s'en convaincre de se souvenir que la fonction $f_0(x) = |x|$ est limite de polynômes trigonométriques formés de fonctions \cos_n , donc pairs.

La différence entre *fermé* et *complet* est que le premier terme est relatif, et le second absolu ou intrinsèque: on ne dira jamais qu'un espace E est fermé, mais qu'un sous-espace F de E est fermé dans E ; par contre E ou F sera dit complet ou non indépendamment de ce qui se passe en dehors. Ainsi \mathcal{T}_+ est fermé dans \mathcal{T}_∞ mais non complet, etc.

À l'intérieur d'un espace complet, fermé équivaut à complet: tout sous-espace fermé est complet et tout sous-espace non fermé est non complet. Dans un espace non complet, par contre, on peut dire que tout sous-espace complet est fermé, mais non l'inverse. Par exemple les sous-espaces de dimension finie sont complets et fermés; mais le sous-espace $C_{0+}([-1, +1])$ des fonctions continues paires est fermé dans $C_0([-1, +1])$ et non complet.

Enfin, insistons encore sur le rôle de la métrique. Le fait qu'un espace vectoriel normé ou semi-normé soit complet ou non dépend de la norme ou des semi-normes: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est complet pour les semi-normes $\mathcal{N}_{j,k}$ mais non complet pour la norme $\mathcal{N}_{0,0}$ de la limite uniforme ou pour la norme $\|\cdot\|_2$; $C_0([-1, +1])$ est non complet pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais complet pour la limite uniforme; $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais non

complet pour la norme $\| \cdot \|_1$, etc.

3. Bases orthonormées.

Les propriétés connues des séries de Fourier nous ont permis ci-dessus de constater que la fonction $f_0(x) = |x|$ pouvait être approchée d'aussi près qu'on veut par des polynômes trigonométriques. Approchée au sens de la distance euclidienne définie par la norme $\| \cdot \|_2$.

Le théorème classique de Weierstrass⁽³⁾ (voir l'annexe pour des explications complémentaires et une démonstration) dit que toute fonction continue f sur un intervalle borné $[a, b]$ — donc appartenant à l'espace $C_0([a, b])$ — peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques de $\sin(\frac{2\pi}{b-a}x)$ et $\cos(\frac{2\pi}{b-a}x)$. Ce théorème s'applique donc en particulier à l'intervalle $[-1, +1]$. Cela peut s'écrire en langage plus mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{T}_\infty, \max_{-1 \leq x \leq +1} |f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (3.1.)$$

Remarque. Ce théorème de Weierstrass ne signifie pas que la série de Fourier de la fonction f converge uniformément vers f ; l'assertion 3.1 signifie que pour tout ε on peut trouver un P , mais rien ne dit que ce P est précisément une somme partielle de la série de Fourier ; et ce serait faux ! Ce qui est vrai est dit par le théorème de Féjér : Soient $S_n(x) = a_0 + \sum_1^n a_j \cos n\pi x + b_j \sin n\pi x$ les sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$, et $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n S_j$ la moyenne des n premières de ces sommes partielles. Si f est une fonction périodique (de période 2) continue, alors la suite F_n converge uniformément vers f . **Mais la suite S_n ne converge pas toujours uniformément vers f ;** c'est cependant le cas dans des cas particuliers, par exemple pour la fonction f_0 considérée ci-dessus.

La norme $\max |f(x) - P(x)|$ est la distance “uniforme” entre P et f . On la désigne souvent par $\|f - P\|_\infty$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a pour toute fonction $g \in C_0([-1, +1])$ la majoration

$$\|g\|_2^2 \leq \int_{-1}^{+1} [g(x)]^2 dx \leq 2 \|g\|_\infty^2 \quad (3.2.)$$

d'où

$$\|g\|_2 \leq \sqrt{2} \|g\|_\infty \quad (3.3.)$$

Ce qui montre que la convergence uniforme implique la convergence euclidienne (pour la norme $\| \cdot \|_2$). Sur un intervalle $[a, b]$ quelconque on aurait $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$, et sur un intervalle non borné tel que $[0, +\infty[$ ou $[-\infty, +\infty[$ on ne peut pas avoir une inégalité du type $\|f\|_2 \leq A \|f\|_\infty$; de ce

⁽³⁾ Karl Weierstrass, *Sitzungsbericht der Königlich Akademie der Wissenschaften* 1885.

fait, sur un intervalle non borné la convergence uniforme **n'implique pas** la convergence euclidienne.

Ainsi, le théorème de Weierstrass garantit que toute fonction de l'espace $C_0([-1, +1])$ peut être approchée d'aussi près qu'on veut **pour la distance** $\| \cdot \|_2$ par un polynôme trigonométrique. Il va donc se produire pour n'importe quelle fonction $f \in C_0([-1, +1])$ la même chose que pour la fonction $f_0(x) = |x|$: la borne inférieure de la distance de f à un polynôme trigonométrique P , lorsque celui-ci parcourt le sous-espace \mathcal{T}_∞ , est zéro.

Un autre théorème de Weierstrass dit aussi que toute fonction continue sur $C_0([a, b])$ (si l'intervalle $[a, b]$ est borné) peut être approchée uniformément d'aussi près qu'on veut par un polynôme algébrique (non trigonométrique): si on désigne par \mathcal{P}_∞ l'espace vectoriel des polynômes de la forme $p(x) = \sum a_n x^n$ quel que soit leur degré, alors pour $f \in C_0([-1, +1])$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}_\infty, \max_{-1 \leq x \leq +1} |f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad (3.4.)$$

Pour la même raison que plus haut, on peut donc conclure que la borne inférieure de la distance euclidienne $\|f - p\|_2$ de f à un polynôme p lorsque celui-ci parcourt l'espace \mathcal{P}_∞ , est zéro; mais ce n'est pas un minimum.

On exprime ces propriétés en disant que les sous-espaces \mathcal{T}_∞ et \mathcal{P}_∞ sont *denses* dans $C_0([-1, +1])$.

Définition: *Un sous-espace E d'un espace euclidien F est dense dans F si tout élément f de F est la limite d'une suite f_n d'éléments de E .*

Le fait que les sous-espaces \mathcal{T}_∞ et \mathcal{P}_∞ sont *denses* dans $C_0([-1, +1])$ résulte de ces théorèmes de Weierstrass qui ne sont pas évidents (on en trouvera la démonstration dans l'annexe).

Par ailleurs, il se trouve que $C_0([-1, +1])$ lui-même est dense dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$. Cela se prouve par le même type d'argument que le théorème 7 du chapitre IX. Soit $f \in \mathbb{L}_2([-1, +1])$; si $\rho_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ est le filtre régularisant introduit à cette occasion, les fonctions $f_n = \rho_n * f$ sont continues et tendent — selon la norme $\| \cdot \|_2$ — vers f . La démonstration en sera également donnée à la section suivante, réservée aux mathématiciens.

Ces propriétés de densité, à savoir, que \mathcal{T}_∞ (polynômes trigonométriques) et \mathcal{P}_∞ (polynômes algébriques) sont denses dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, ont la conséquence très importante que voici:

Théorème 1. *si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de fonctions [telle que les fonctions 1, cos, sin, cos₂, sin₂, cos₃, sin₃, cos₄, sin₄, ... ou*

les polynômes de Legendre normés $P_n(x)/\|P_n\|_2$, alors n'importe quelle fonction f de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ est égale à la somme de la série $\sum c_n \varphi_n$ avec $c_n = \langle f | \varphi_n \rangle_2$, la série étant convergente dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, c'est-à-dire pour la norme $\| \cdot \|_2$. En langage plus mathématique :

$$\forall f \in \mathbb{L}_2([-1, +1]), \quad \mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=0}^{j=n} c_j \varphi_j \right\|_2 = 0$$

Démonstration. Soit en effet Φ_N le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$; si $\varphi_n = P_n/\|P_n\|_2$, ce sous-espace sera \mathcal{P}_N ; si $\varphi_0 = 1$, $\varphi_{2n} = \cos_n$, et $\varphi_{2n-1} = \sin_n$, on aura $\Phi_{2N+1} = \mathcal{T}_N$. La projection orthogonale de f sur Φ_N est $f_N = \sum_0^N c_j \varphi_j$. Si la réunion Φ_∞ des Φ_N est dense dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, on aura

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \exists P \in \Phi_{n_\varepsilon}, \quad \|f - P\|_2 \leq \varepsilon$$

Mais puisque $f_N = \sum_0^N c_j \varphi_j$ est la projection orthogonale de f sur Φ_N , qui rend la distance *minimum*, on aura $\|f - f_{n_\varepsilon}\|_2 \leq \|f - P\|_2$, donc $\|f - f_{n_\varepsilon}\|_2 \leq \varepsilon$; cela suffit pour garantir que $\mathbb{L}_2\text{-}\lim f_n = f$, car la série $\sum c_n \varphi_n$ est intrinsèquement convergente. CQFD

Ce raisonnement montre que le produit scalaire joue un rôle essentiel. Pour la métrique “uniforme” (celle de la norme $\| \cdot \|_\infty$), qui ne dérive pas d'un produit scalaire, on ne peut pas construire une suite de projections orthogonales comme f_n , bien qu'il existe une suite g_n de fonctions de Φ_∞ qui tende vers f ; on peut certes construire aussi cette suite g_n et c'est d'ailleurs ce qu'on fait pour démontrer les théorèmes de Weierstrass (voir annexe), mais cette construction est plus complexe. Le grand avantage des séries de Fourier est qu'on dispose d'une formule simple pour calculer leurs coefficients. Cet avantage n'est pas particulier aux fonctions trigonométriques, mais est commun à toutes les bases hilbertiennes.

4. Exemples de bases orthonormées.

A. Polynômes de Legendre.

Le premier exemple est déjà connu : sur $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, c'est la famille trigonométrique $1, \cos, \sin, \cos_2, \sin_2, \cos_3, \sin_3, \cos_4, \sin_4, \dots$. Dans le même espace, une autre base est formée par les *polynômes de Legendre* que nous présentons brièvement.

L'expression $(x^2 - 1)^n$ est un polynôme de degré $2n$; si on la dérive n fois, on obtiendra donc un polynôme de degré n . Le n^{e} polynôme de Legendre

est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n([x^2 - 1]^n)}{dx^n} \quad (4.1.)$$

Le coefficient numérique $1/2^n n!$ est un facteur de normalisation conventionnel. Nous prenons la formule 4.1 comme définition des polynômes de Legendre, mais ce n'est pas comme cela qu'ils ont été introduits à l'origine. Dans la littérature, 4.1 est connue sous le nom de *formule de Rodrigues*.

Puisque chaque polynôme $P_n(x)$ est de degré n , ils forment une base algébrique de \mathcal{P}_∞ , l'espace vectoriel de tous les polynômes. Or nous avons vu que \mathcal{P}_∞ est dense dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$. Montrons maintenant qu'ils sont orthogonaux (les polynômes $P_n(x)$ ne sont pas normés, mais on en déduit une famille normée en prenant $p_n = P_n/\|P_n\|$).

Le coefficient de normalisation $1/2^n n!$ dans 4.1 ne joue aucun rôle dans l'orthogonalité; il suffit donc de vérifier que les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n([x^2 - 1]^n)}{dx^n} \frac{d^m([x^2 - 1]^m)}{dx^m} dx \quad (4.2.)$$

sont nulles pour $m \neq n$. Pour cela effectuons une intégration par parties: l'intégrale 4.2 est égale à

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^{n-1}([x^2 - 1]^n)}{dx^{n-1}} \frac{d^m([x^2 - 1]^m)}{dx^m} \right|_{-1}^{+1} - \\ & - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}([x^2 - 1]^n)}{dx^{n-1}} \frac{d^{m+1}([x^2 - 1]^m)}{dx^{m+1}} dx \end{aligned} \quad (4.3.)$$

L'un des facteurs du terme intégré est la $(n-1)^e$ dérivée de $(x^2 - 1)^n$, qui est factorisable par $(x^2 - 1)$; plus généralement, $(n-k)^e$ dérivée de $(x^2 - 1)^n$ serait factorisable par $(x^2 - 1)^k$. Par conséquent ce facteur est nul aussi bien pour $x = -1$ que pour $x = +1$, de sorte que le terme intégré disparaît. Il reste une intégrale qu'on peut à nouveau intégrer par parties, et ainsi de suite, les termes intégrés étant à chaque fois nuls pour la même raison. En définitive:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \frac{d^n([x^2 - 1]^n)}{dx^n} \frac{d^m([x^2 - 1]^m)}{dx^m} dx = \\ & = (-1)^n \int_{-1}^{+1} [x^2 - 1]^n \frac{d^{m+n}([x^2 - 1]^m)}{dx^{m+n}} dx \end{aligned} \quad (4.4.)$$

Le second facteur sous le signe \int est la dérivée $(m+n)^e$ de $[x^2 - 1]^m$, qui est un polynôme de degré $2m$; si $n > m$ on aura donc dérivé un nombre de

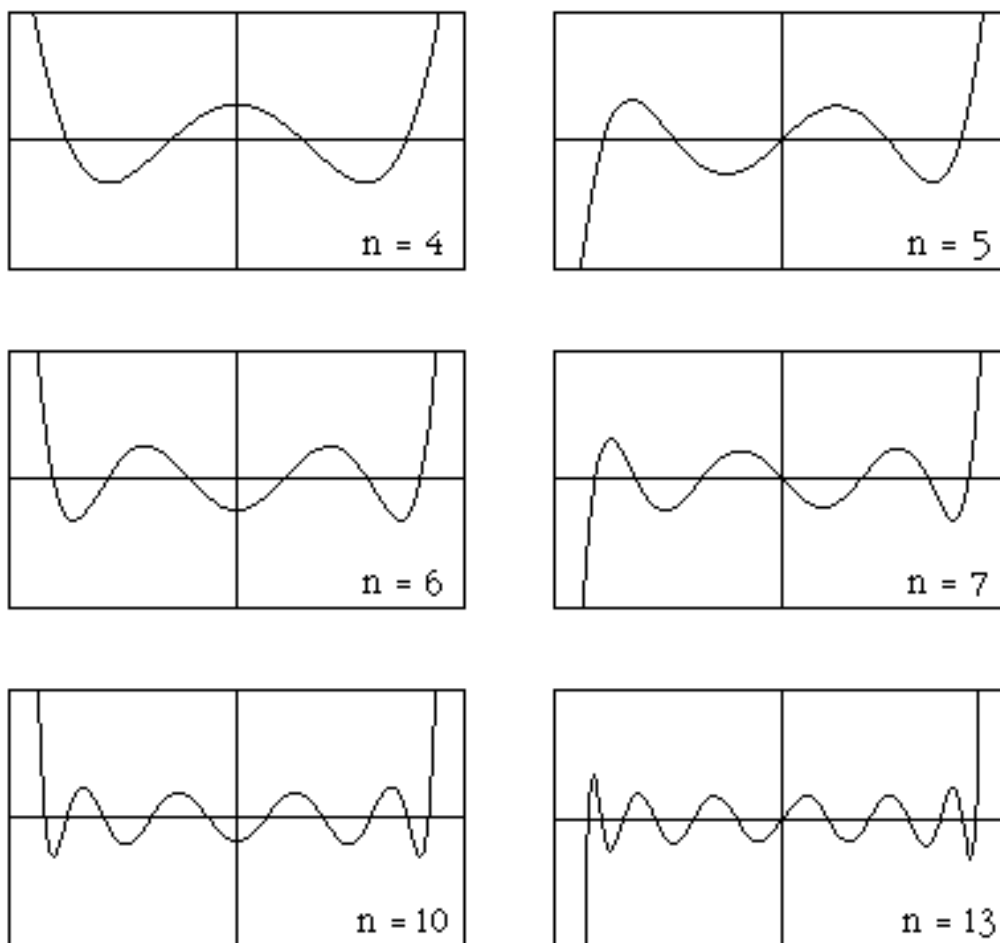


figure 1 : polynômes de Legendre.

Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $\theta \mapsto 1/2 \sin \frac{\theta}{2}$; on a aussi la formule de Rodrigues $n! 2^n P_n(x) = d^n [(x^2 - 1)^n] / dx^n$. Pour le calcul numérique il vaut cependant mieux utiliser une relation de récurrence, par exemple :

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{2n+1}{n+1} P_{n-1}(x) .$$

La fenêtre représente les abscisses de -1.15 à $+1.15$ et les ordonnées de -1.3 à $+1.3$. Les polynômes de Legendre prennent des valeurs comprises entre -1 et $+1$ lorsque la variable (l'abscisse) parcourt l'intervalle $[-1, +1]$. Il est donc possible d'avoir un cadrage identique pour toutes les valeurs de n . Par contre, dès que x franchit la limite $+1$ ou -1 , $P_n(x)$ croît très rapidement (d'autant plus rapidement que n est plus grand).

Les racines et les oscillations sont entièrement incluses dans l'intervalle $[-1, +1]$.

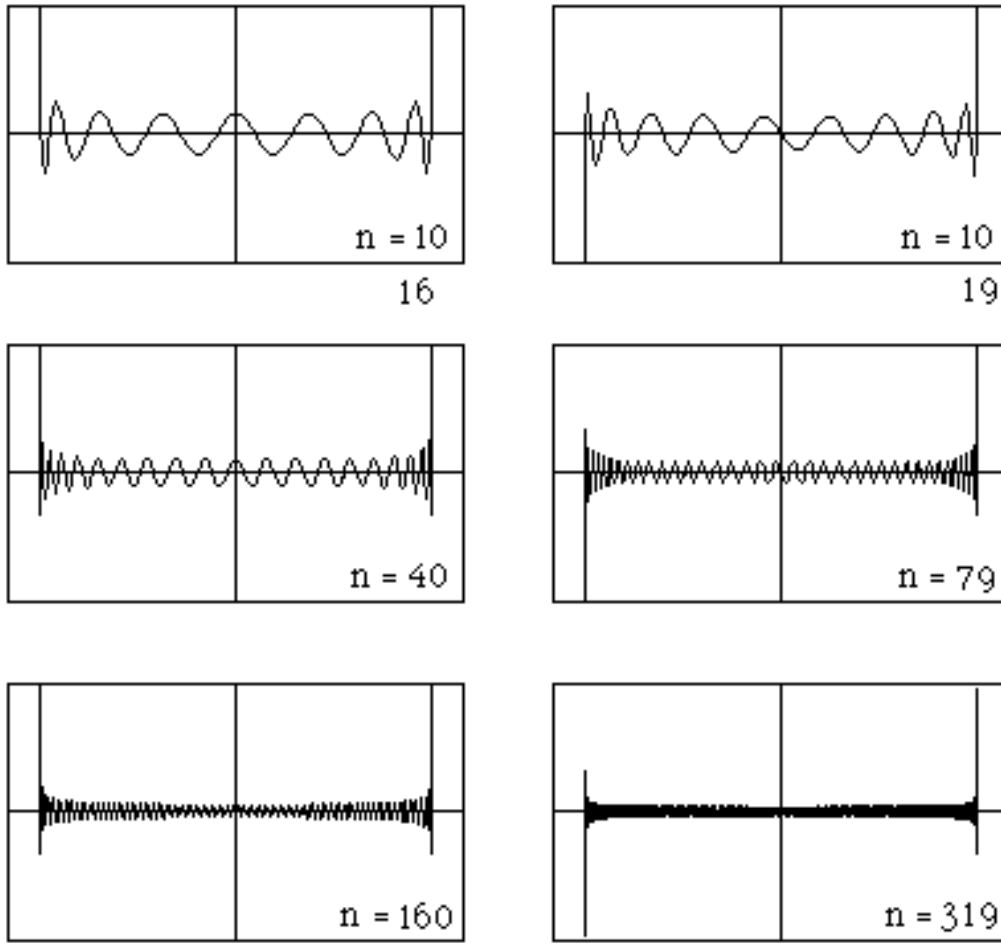


figure 1 : polynômes de Legendre (suite et fin).

Le cadrage reste le même. À partir de $n = 40$, on a utilisé l'approximation asymptotique $P_n(\cos \theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \cos[(n + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]$, la différence étant graphiquement imperceptible.

Les polynômes de Legendre forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$. Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$: on a en effet $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ pour $n \neq m$. Cela permet de développer les fonctions de cet espace en série de polynômes de Legendre, tout comme on développe en série de Fourier.

Ces polynômes peuvent donc se rencontrer dans toutes sortes de problèmes, par exemple la théorie du spin de l'électron. Ils sont solution de l'équation différentielle du second ordre

$$(1 - x^2) y''(x) - 2x y'(x) + n(n + 1)y(x) = 0 .$$

fois supérieur au degré, ce qui donne zéro. Si on avait eu $m > n$ on aurait procédé dans l'autre sens. Ainsi on a bien $\langle P_n | P_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. L'égalité 4.4 peut aussi être utilisée si $n = m$; dans ce cas le second facteur sous le signe \int est la dérivée $2n$ -ième de $[x^2 - 1]^n$, qui est égale à la $2n$ -ième dérivée du terme du plus haut degré; ce dernier étant x^{2n} , sa dérivée $2n$ -ième est $(2n)!$. En tenant compte cette fois des coefficients de normalisation, on en déduit

$$\begin{aligned} \langle P_n | P_n \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{1}{2^n n!} \cdot (-1)^n \int_{-1}^{+1} [x^2 - 1]^n (2n)! dx = \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \cdot (-1)^n \int_{-1}^{+1} [x^2 - 1]^n dx \end{aligned} \quad (4.5.)$$

Il reste à calculer l'intégrale; celle-ci se ramène aux intégrales eulériennes de première espèce (cf. chapitre **IV**) par le changement de variable $t = \frac{1}{2}(1+x)$:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_{-1}^{+1} [x^2 - 1]^n dx &= 2^{2n+1} \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = 2^{2n+1} \mathfrak{B}(n+1, n+1) \\ &= 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2^{2n+1} n!^2}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (4.6.)$$

Substituant cela dans 4.6 on obtient

$$\langle P_n | P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \quad \text{ou} \quad \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \quad (4.7.)$$

Ainsi la famille des fonctions $p_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$ est orthonormée. Comme elle engendre algébriquement le sous-espace \mathcal{P}_∞ qui est dense dans $\mathbb{L}_2([-1, +1])$, elle est donc une base hilbertienne de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$. Ce qui signifie concrètement que *n'importe* quelle fonction f de $\mathbb{L}_2([-1, +1])$ est égale à la somme de la série $\sum c_n p_n$, avec $c_n = \langle f | p_n \rangle$, cette série étant convergente pour la norme $\| \cdot \|$:

$$f = \mathbb{L}_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n \right\|_2 = 0 \quad (4.8.)$$

Bien entendu 4.8 ne donne aucun renseignement concernant la convergence uniforme ou point par point de la série. Mais nous verrons que dans les applications, notamment à la Mécanique quantique, la convergence en moyenne quadratique est la plus significative et la mieux adaptée.

B. Fonctions et polynômes d'Hermite.

On va maintenant construire une base de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur tout \mathbb{R} : $\mathbb{L}_2([-\infty, +\infty])$. Ces fonctions sont les fonctions propres de l'oscillateur quantique⁽⁴⁾.

Dérivons la fonction e^{-x^2} :

$$\begin{aligned}\frac{de^{-x^2}}{dx} &= -2xe^{-x^2} ; & \frac{d^2e^{-x^2}}{dx^2} &= (4x^2 - 1)e^{-x^2} ; \\ \frac{d^3e^{-x^2}}{dx^3} &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} .\end{aligned}\tag{4.9.}$$

On voit que ces dérivées sont de la forme polynôme $\times e^{-x^2}$. Cela est confirmé par la récurrence

$$H_{n+1}(x)e^{-x^2} = \frac{dH_n(x)e^{-x^2}}{dx} = [H'_n(x) - 2xH_n(x)]e^{-x^2}\tag{4.10.}$$

d'où $H_{n+1}(x) = H'_n(x) - 2xH_n(x)$, ce qui montre que si H_n est un polynôme de degré n , H_{n+1} sera un polynôme de degré $n+1$. Cela montre aussi que si l'entier n est pair, le polynôme H_n sera pair, et si l'entier n est impair, le polynôme H_n sera impair. Cette même récurrence montre enfin que pour tout n , le terme du plus haut degré du polynôme H_n est $(-2x)^n$, donc sa dérivée n -ième sera $(-2)^nn!$

Les polynômes $(-1)^n H_n(x)$ sont appelés les *polynômes d'Hermite*.

Les fonctions $h_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ sont orthogonales pour le produit scalaire de l'espace $\mathbb{L}_2([-\infty, +\infty])$; la raison est la même que pour polynômes de Legendre. On peut en effet écrire

$$\begin{aligned}\langle h_n | h_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) h_m(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} H_m(x) dx\end{aligned}\tag{4.11.}$$

⁽⁴⁾ Erwin Schrödinger *Die Naturwissenschaften* vol **28** (1926), pages 664–666. Traduction française de A. Proca dans le recueil *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire* (pages 65–70), réédité en 1988 aux éditions Jacques Gabay.

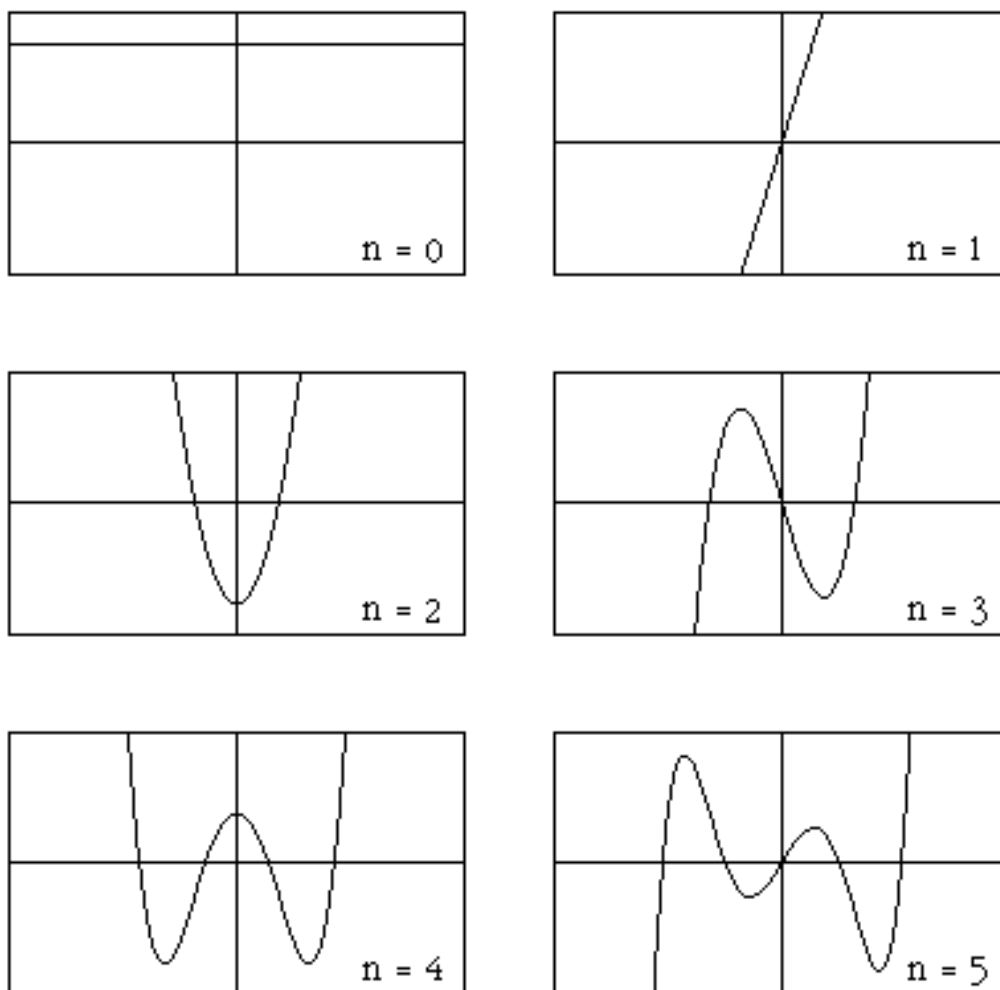


figure 2 : polynômes d'Hermite

La fenêtre représente les abscisses de -3.83 à $+3.83$ et les ordonnées de -1.3 à $+1.3$. Ce cadrage est choisi pour montrer la région où les polynômes ont leurs racines, en dehors de ce cadre ils tendent rapidement vers l'infini.

Les graphiques ci-dessus sont ceux des polynômes $\frac{1}{n!} H_n(x)$ qui, contrairement à $H_n(x)$, ne sortent pas de ce cadre lorsque n augmente.

Les polynômes $\frac{1}{n!} H_n(x)$ sont les coefficients du développement en série entière de la fonction $z \mapsto e^{2xz - z^2}$. On obtient aussi les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ en dérivant la fonction e^{-x^2} : on a en effet

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

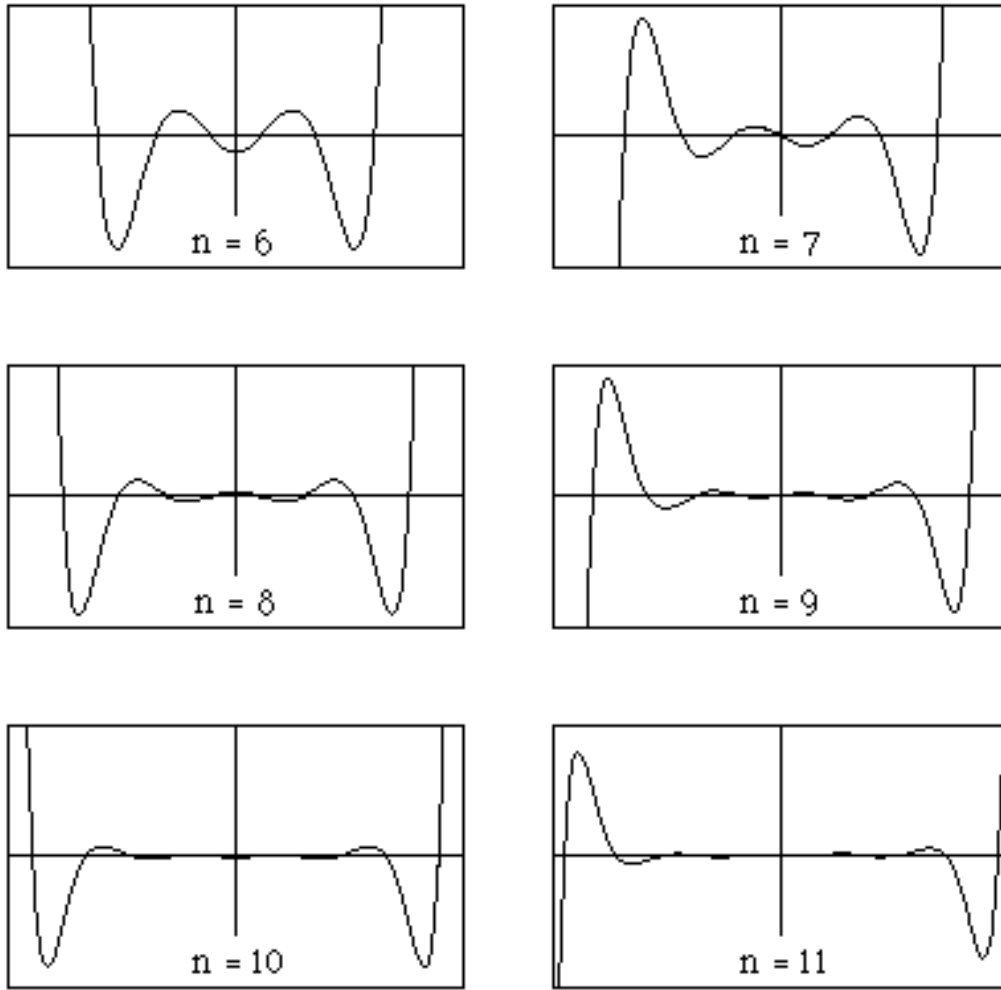


figure 2: polynômes d'Hermite (suite et fin).

La fenêtre est la même qu'à la page précédente. Si on voulait représenter les graphiques pour n beaucoup plus grand, on devrait élargir peu à peu le cadre pour rendre visibles toutes les oscillations. On remarque aussi que les oscillations sont d'amplitude très inégale: si on veut garder les oscillations latérales dans le cadre, on rend les oscillations centrales à peine perceptibles. Ce phénomène s'accroît quand n augmente. En multipliant $H_n(x)$ par la fonction $e^{-x^2/2}$ on arrive à compenser cette disproportion (voir figure 3).

Les polynômes d'Hermite se rencontrent dans de nombreuses applications, dont l'oscillateur quantique. Ils sont notamment solution de l'équation du second ordre

$$y''(x) - 2x y'(x) + 2n y(x) = 0$$

et on les rencontre donc dans la résolution d'équations différentielles qui se ramènent à celle-ci.

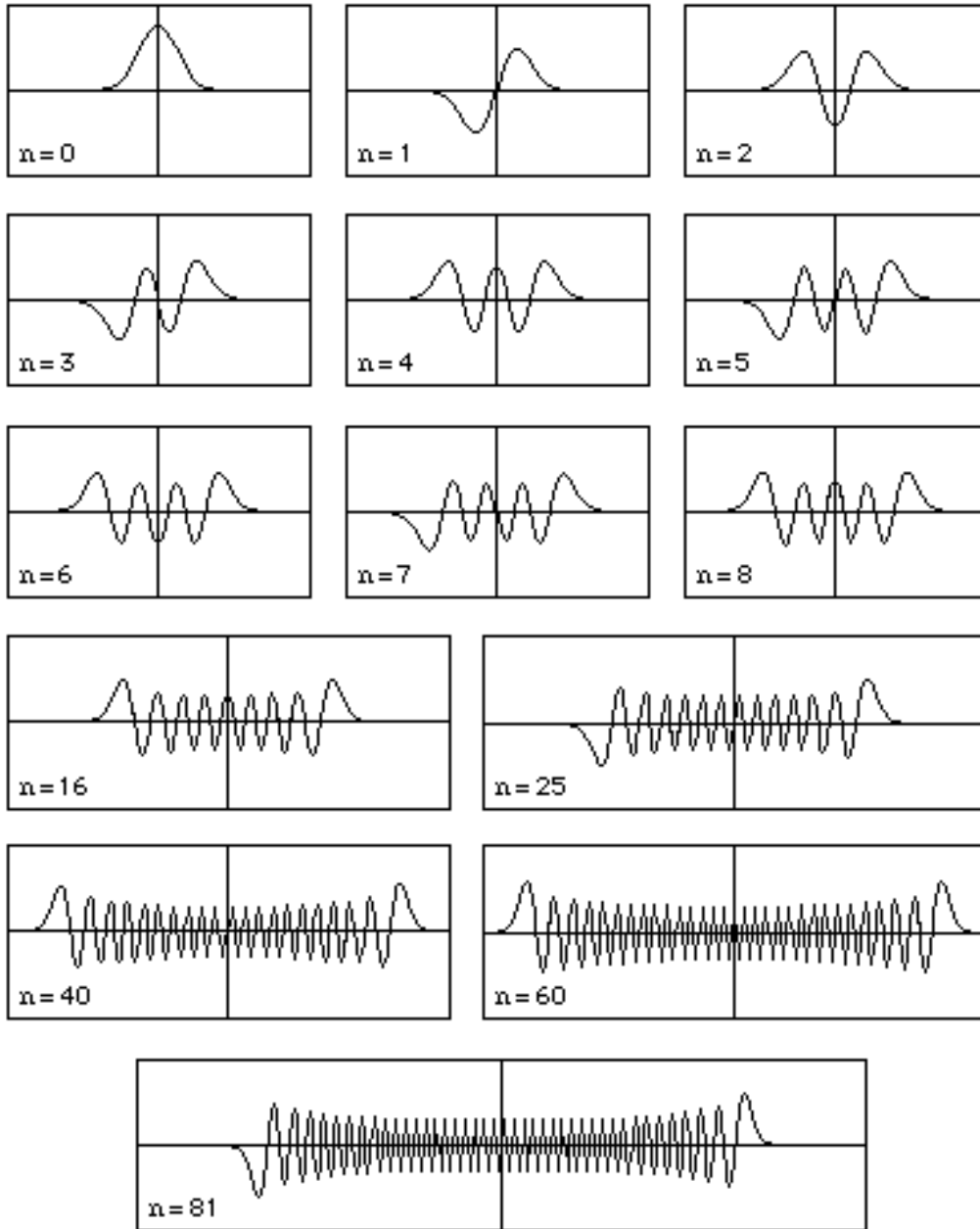


figure 3 : Fonctions d'Hermite $h_n(x) = c_n \frac{1}{n!} H_n(x) e^{-x^2/2}$.

Le coefficient de normalisation c_n a été pris égal à $(-1)^n (n/2)^{n/2} e^{-n/2} \sqrt{1+n/2}$, qui donne un graphique visible pour tout n sans varier l'échelle. Dans les petites cases, le cadrage est le même que pour les polynômes (cf fig 1), et dans les cadres plus larges on a conservé exactement la même échelle (seules les abscisses sont plus étendues). Pour tout $\alpha > 0$, les fonctions $h_n(\sqrt{\alpha} x)$ forment une base de l'espace $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$; avec $\alpha = \sqrt{mk/\hbar}$, elles représentent les états liés de l'oscillateur quantique de masse m et d'élasticité k .

Espaces de Hilbert

puis intégrer n fois de suite par parties ; les termes tout intégrés sont nuls à cause de la décroissance très rapide à l'infini du facteur e^{-x^2} , donc il reste

$$\langle h_n | h_m \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_m(x)}{dx^n} dx \quad (4.12.)$$

On constate à nouveau que l'un des facteurs sous l'intégrale est un polynôme de degré m dérivé n fois, ce qui donne zéro si $m < n$. Pour trouver la norme des h_n on utilise également 4.12, mais avec $n = m$. La dérivée n -ième de H_n se réduit à celle du terme de degré n , qui est $(-2x)^n$, soit $(-2)^n n!$; de sorte que

$$\langle h_n | h_n \rangle = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (4.13.)$$

et par conséquent $\|h_n\| = \pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}$. Donc la famille des fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{H_n(x) e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}} \quad (4.14.)$$

est orthonormée. N'importe quelle fonction de carré intégrable sur l'intervalle $] -\infty, +\infty [$ peut donc être développée en "série d'Hermite" comme une fonction de période 2π peut l'être en série de Fourier.

C. Fonctions et polynômes de Laguerre.

Le troisième exemple nous conduit maintenant à l'espace $\mathbb{L}_2([0, +\infty[)$. Cet espace de Hilbert se rencontre surtout dans les problèmes à deux ou trois dimensions, où il apparaît par suite de la factorisation des coordonnées polaires ou sphériques : l'intervalle $[0, +\infty[$ est en effet le domaine naturel de la coordonnée radiale. La base hilbertienne que nous allons construire correspond cette fois à la partie radiale des fonctions propres d'un électron dans un champ coulombien, problème célèbre résolu par Schrödinger et un des premiers succès de la Mécanique quantique ⁽⁵⁾. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

On définit d'abord les polynômes de Laguerre d'une manière analogue aux polynômes d'Hermite : pour ces derniers, on dérivait la fonction e^{-x^2} , ici on dérive n fois les fonctions $x^{n+\ell} e^{-x}$. Ces polynômes sont nommés d'après

⁽⁵⁾ Erwin Schrödinger *Quantisierung als Eigenwertproblem* (troisième communication) *Annalen der Physik* vol **80** (1926), page 437. Traduction française de A. Proca sous le titre *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*, rééditée en 1988 aux éditions Jacques Gabay.

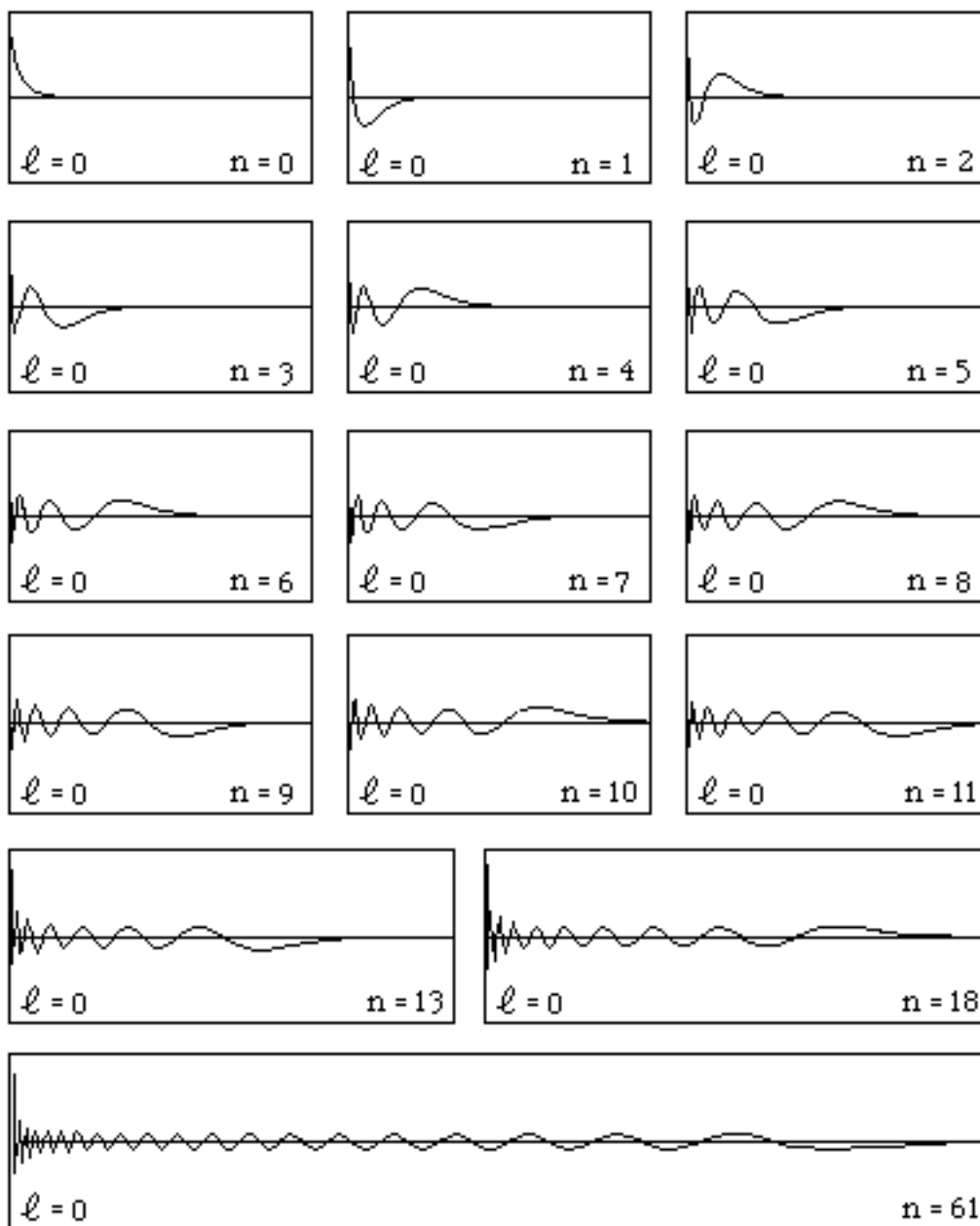


figure 4: Fonctions de Laguerre $q_n^0(x) = \frac{1}{n!} e^{-x/2} Q_n^0(x)$.

Les petites fenêtres graphiques ($n = 0$ à 11) correspondent aux abscisses positives de $x = 0$ à $x = 57.5$, et aux ordonnées de $y = -1.3$ à $y = +1.3$. Les fenêtres élargies sont à la même échelle et dévoilent simplement davantage d'abscisses : de $x = 0$ à $x = 84.3$ pour $n = 13$, de $x = 0$ à $x = 95.8$ pour $n = 18$, et de $x = 0$ à $x = 187.8$ pour $n = 41$.

Ces fonctions (pour $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$) forment une base de l'espace $\mathbb{L}_2([0, +\infty[)$.

Espaces de Hilbert

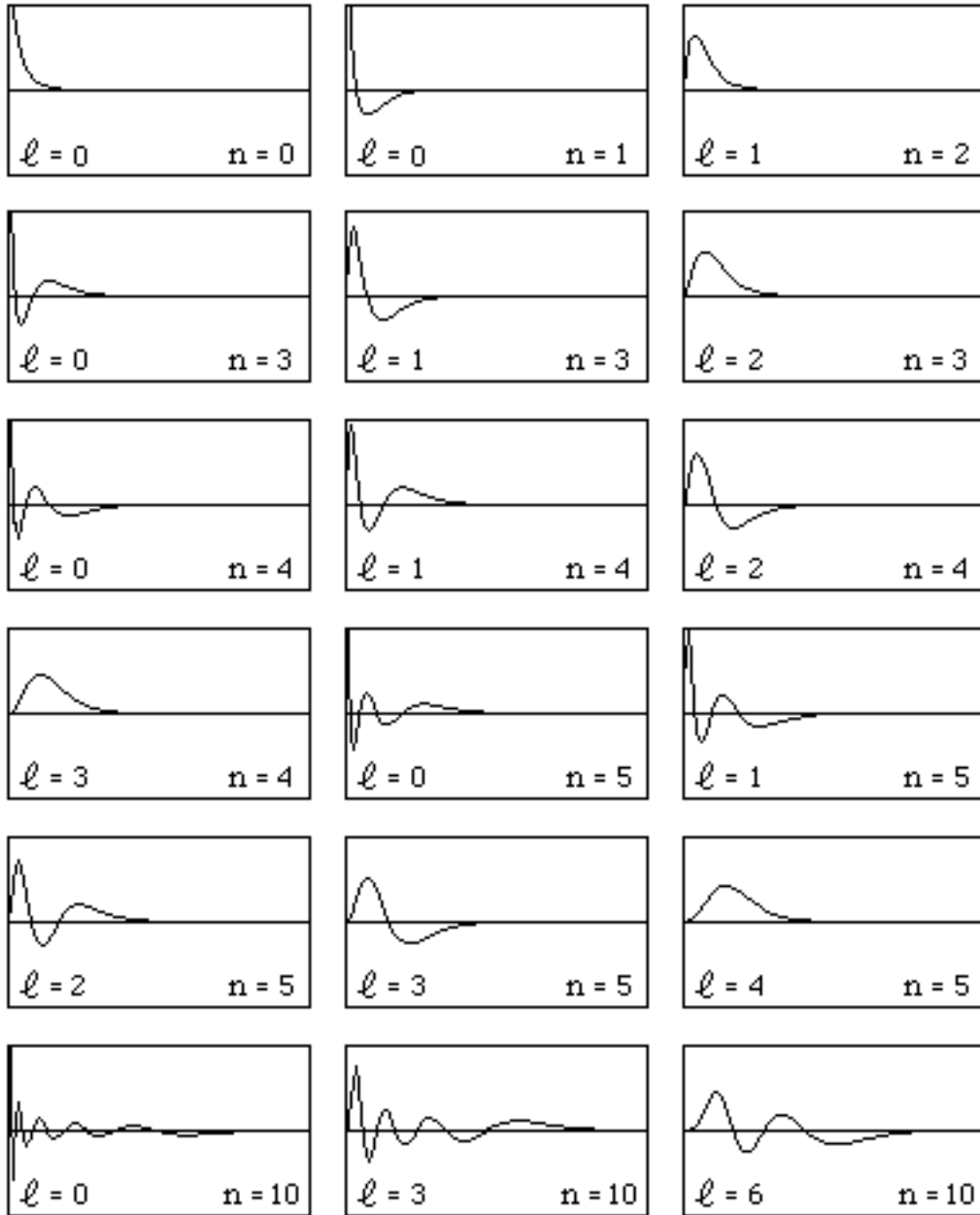


figure 5

Fonctions $f_{n\ell}(x) = \sqrt{(\ell+1)/(n-\ell-1)!(n+\ell)!} x^\ell e^{-x/2} Q_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(x)$.

La fenêtre graphique correspond aux abscisses positives de $x = 0$ à $x = 46$, et aux ordonnées de $y = -1.3$ à $y = +1.3$. Le coefficient numérique n'a pas d'autre signification que de faire correspondre tous les graphiques à ce cadre. Pour chaque n entier fixé, les n fonctions $f_{n\ell}(2r/n)$ pour lesquelles ℓ est compris entre 0 et $n-1$ représentent la partie radiale des états liés d'énergie $E_n = -m\alpha^2/2\hbar^2 n^2$ de l'électron de masse m dans un champ coulombien de potentiel $U = -\alpha/r$.

le mathématicien Edmond Laguerre (1834 – 1886).

$$\frac{dx^{\ell+1} e^{-x}}{dx} = [(\ell+1) - x] x^\ell e^{-x}; \quad (4.15.)$$

$$\frac{d^2 x^{\ell+2} e^{-x}}{dx^2} = [(\ell+1)(\ell+1) - 2(\ell+1)x + x^2] x^\ell e^{-x}.$$

Pour le cas général, le mieux est d'utiliser la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n(fg)}{dx^n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{d^{n-j}f}{dx^{n-j}} \cdot \frac{d^j g}{dx^j}$$

avec $f(x) = x^{\ell+n}$ et $g(x) = e^{-x}$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^n x^{\ell+n} e^{-x}}{dx^n} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n+\ell)!}{(j+\ell)!} x^{j+\ell} \cdot (-1)^j e^{-x} \\ &= \left[\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(n+\ell)!}{(j+\ell)!} x^j \right] \cdot x^\ell e^{-x} \end{aligned}$$

ce qui montre que la n^e dérivée de la fonction $x^{n+\ell} e^{-x}$ est égale à un polynôme de degré n , multiplié par $x^\ell e^{-x}$. Ce polynôme est

$$Q_n^\ell(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{(n+\ell)!}{(j+\ell)!} x^j \quad (4.16.)$$

Ainsi

$$\frac{d^n x^{\ell+n} e^{-x}}{dx^n} = Q_n^\ell(x) x^\ell e^{-x} \quad (4.17.)$$

où les Q_n^ℓ sont les polynômes de Laguerre. Comme ils dépendent de deux indices, on peut fabriquer plusieurs familles de fonctions orthogonales à partir de ces polynômes, selon la manière de combiner les indices. En voici deux.

$$\begin{aligned} q_n^\ell(x) &= x^{\frac{1}{2}\ell} e^{-x/2} Q_n^\ell(x) \\ f_{n\ell}(x) &= x^{\ell+\frac{1}{2}} e^{-x/2} Q_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(x) \end{aligned}$$

C'est la seconde famille, $f_{n\ell}$, qui intervient dans le problème du champ coulombien; $f_{n\ell}$ n'est définie que pour ℓ entier compris entre 0 et $n-1$.

Exercice. a) montrer que pour tout ℓ fixé, les fonctions q_n^ℓ et q_n^ℓ sont orthogonales si $n \neq m$;

- b) montrer que si $n \neq m$, les $f_{n\ell}$ sont orthogonales aux f_{mk} , indépendamment de ℓ et de k (mais $0 \leq \ell \leq n-1$ et $0 \leq k \leq m-1$);
- c) calculer les normes de ces fonctions.

5. Théorèmes de Weierstrass.

Dans cette section on donne les démonstrations des théorèmes de Weierstrass utilisés à la section 3 pour établir que certains systèmes orthonormés sont des bases hilbertiennes. Les démonstrations que nous reproduisons ici sont celles, devenues classiques, de Serge Bernstein⁽⁶⁾.

Ces théorèmes sont essentiels puisqu'ils garantissent la possibilité de développer n'importe quelle fonction de carré intégrable en séries de fonctions orthonormées analogues aux séries de Fourier. Cela permet d'étendre la *méthode de Fourier* (cf. chap. VI, section 1) à toutes sortes d'équations aux dérivées partielles, pourvu qu'on sache construire la base hilbertienne adéquate; nous en verrons deux exemples de Mécanique quantique: l'oscillateur harmonique et l'électron dans un champ coulombien.

Ces théorèmes de Weierstrass sont donc deux des sept piliers de l'analyse fonctionnelle.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles. On pose

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f\left(\frac{j}{n}\right) x^j (1-x)^{n-j} \quad (5.1.)$$

On appelle B_n le n^{e} polynôme de Bernstein de la fonction f . On a choisi l'intervalle $[0, 1]$ pour alléger l'écriture, mais sur un intervalle $[a, b]$ quelconque on aurait pris

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f\left(a + [b-a]\frac{j}{n}\right) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^j \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-j} \quad (5.1 a.)$$

Remarque. Les polynômes de Bernstein ne dépendent pas précisément de la fonction f , mais seulement des valeurs qu'elle prend aux points $a + [b-a]\frac{j}{n}$. Étant donné une famille discrète de points du plan, de coordonnées $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_n, y_n)$, tels que les x_j soient équidistants, on peut également définir leur polynôme de Bernstein par

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y_j \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^j \left(\frac{x_n-x}{x_1-x_0}\right)^{n-j} \quad (5.1 b.)$$

Cette formule se prête particulièrement bien à une traduction algorithmique, et cet avantage est fréquemment utilisé dans les logiciels graphiques pour tracer sur écran

⁽⁶⁾ Mémoires de l'Académie de Belgique, 1912.

digital des courbes (dites *splines*) qui suivent de près une série de points donnés. On utilise aussi sa version bidimensionnelle en image de synthèse, pour dessiner des surfaces (méthode des carreaux de Bézières).

Théorème 2. *Si f est continue sur $[0, 1]$, la suite (5.1) des polynômes B_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f . Plus généralement, si f est continue sur $[a, b]$, ce sera la suite (5.1 a) des polynômes B_n qui convergera uniformément sur $[0, 1]$ vers f .*

Démonstration. La deuxième partie du théorème se ramène évidemment à la première par le changement de variable $x \mapsto (x - a)/(b - a)$. Rappelons la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = (x + y)^n$$

En la dérivant par rapport à x on obtient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j x^j y^{n-j} &= nx (x + y)^{n-1} \\ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j (j - 1) x^j y^{n-j} &= n(n - 1) x^2 (x + y)^{n-1} \end{aligned}$$

En prenant $y = 1 - x$ dans ces identités, on obtient

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1 - x)^{n-j} = 1 \quad (5.2 a.)$$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j x^j (1 - x)^{n-j} = nx \quad (5.2 b.)$$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j (j - 1) x^j (1 - x)^{n-j} = n(n - 1) x^2 \quad (5.2 c.)$$

Puis en les combinant

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (j - nx)^2 x^j (1 - x)^{n-j} &= \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (n^2 x^2 - 2jnx + j^2) x^j (1 - x)^{n-j} = \\ &= n^2 x^2 \cdot 1 - 2nx \cdot nx + n(n - 1) x^2 = nx(1 - x) \end{aligned} \quad (5.3.)$$

Grâce à (5.2 a), on peut écrire :

$$|f(x) - B_n(x)| = \left| \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left[f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right] x^j (1-x)^{n-j} \right| \quad (5.4.)$$

Dans le membre de droite ci-dessus, on va distinguer les termes pour lesquels j/n est proche de x . Soit donc $\alpha > 0$. En appliquant l'inégalité du triangle dans le second membre de (5.4),

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{|x-j/n| \leq \alpha} \binom{n}{j} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| x^j (1-x)^{n-j} + \\ &\quad + \sum_{|x-j/n| > \alpha} \dots \end{aligned} \quad (5.5.)$$

Pour la première partie (somme pour $|x - j/n| \leq \alpha$) on peut, ε étant donné, choisir α de sorte que $|f(x) - f(j/n)| \leq \varepsilon$ (cela provient de ce que f est par hypothèse continue, et donc aussi *uniformément* continue sur $[0, 1]$). La somme pour $|x - j/n| \leq \alpha$ est donc majorée par ε , multiplié par la somme des $\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$ (somme de termes tous ≥ 0) qui d'après 5.2 a est ≤ 1 . La deuxième partie de (5.5) se majore en utilisant (5.3). Soit M le maximum de f sur $[0, 1]$. On a $|f(x) - f(j/n)| \leq 2M$, d'où

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|x-j/n| > \alpha} \binom{n}{j} \left[f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right] x^j (1-x)^{n-j} \right| &\leq \\ &\leq 2M \sum_{|x-j/n| > \alpha} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \end{aligned} \quad (5.6.)$$

Utilisons maintenant le fait que sur le domaine de sommation l'inégalité $1 \leq (x - j/n)^2 / \alpha^2 = (j - nx)^2 / n^2 \alpha^2$ est partout vraie :

$$\sum_{|x-j/n| > \alpha} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \leq \frac{1}{n^2 \alpha^2} \sum_{j=0}^n (j - nx)^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

D'après (5.3) cette dernière expression est égale à $x(1-x)/n\alpha^2$; et d'autre part le maximum de $x(1-x)$ sur $[0, 1]$ est $1/4$, de sorte qu'en définitive la deuxième partie de (5.5) est majorée par $M/2n\alpha^2$. En regroupant tous ces résultats :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha, |f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\alpha^2} \quad (5.7.)$$

Pour conclure, il faut encore un argument. On ne peut pas prendre simplement $\varepsilon = \frac{1}{n}$. En effet, si la fonction était par exemple $f(x) = x$, on aurait $\alpha = \varepsilon = 1/n$ et donc le rapport $M/2n\alpha^2$ ne tendrait pas vers zéro,

mais vers l'infini. Il faut donc, pour une fonction continue donnée f , choisir ε en fonction de n , mais de telle sorte que le α correspondant ne tende pas trop vite vers zéro. D'autre part, on ne peut pas non plus garder α constant, car alors ce serait ε qui ne tendrait pas vers zéro. Il faut donc choisir le meilleur compromis. Par exemple si $f(x) = \sqrt{x}$, un tel compromis sera $\varepsilon = \sqrt{\alpha} = n^{-r}$ avec $0 < r < \frac{1}{4}$: en effet, il faut que ε tende vers zéro, donc que $r > 0$, mais aussi que $n\alpha^2 = n^{4r+1}$ tende vers l'infini, donc $r < \frac{1}{4}$. Si $f(x) = e^{-1/x^2}$ (prolongée en $x = 0$ par $f(0) = 0$), un bon compromis est $\varepsilon = e^{-\sqrt{n}}$; quand n tend vers l'infini, cela tend bien vers zéro, et $\alpha^2 = 1/\ln(\frac{1}{\varepsilon}) = 1/\sqrt{n}$, donc $n\alpha^2 = \sqrt{n}$ tend bien vers l'infini. Ce compromis existe pour n'importe quelle fonction continue, puisque $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$; il suffit donc de prendre $\alpha = 1/\sqrt{n}$ pour qu'obligatoirement $\varepsilon = \sup_x \sup_{|h| < \alpha} f(x+h)$ tende lui aussi vers zéro. CQFD

Ce théorème s'applique sur les intervalles bornés, ce qui est logique puisque sa démonstration utilise de manière essentielle le fait que la fonction f est *uniformément* continue. On peut donc en déduire directement que toute fonction continue sur $[-1, +1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes, puis (comme cela a été fait à la section 3), en déduire que les polynômes sont denses dans $C_0([-1, +1])$ pour la métrique euclidienne du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int f(x)g(x)dx$. Mais on ne peut pas appliquer *directement* le théorème sur $C_0([-\infty, +\infty])$ ou sur $C_0([0, +\infty])$, car ces espaces regroupent les fonctions continues sur un intervalle non borné. Or, pour montrer que les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}_2([-\infty, +\infty])$, ou que les fonctions de Laguerre forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}_2([0, +\infty])$, il faut vérifier que les combinaisons linéaires de ces fonctions sont denses dans $C_0([-\infty, +\infty])$ et $C_0([0, +\infty])$ pour la métrique euclidienne.

Théorème 3. *Toute fonction continue de $\mathbb{L}_2([-\infty, +\infty])$ est la limite dans cet espace d'une suite de fonctions de la forme polynôme $\times e^{-x^2/2}$.*

Toute fonction continue de $\mathbb{L}_2([0, +\infty])$ est la limite dans cet espace d'une suite de fonctions de la forme polynôme $\times e^{-x}$.

Mais elle n'est pas la limite uniforme d'une telle suite !

Démonstration. On la donne pour $\mathbb{L}_2([-\infty, +\infty])$ et on la laisse en exercice pour $\mathbb{L}_2([0, +\infty])$. On ne peut utiliser le théorème de Weierstrass sur $]-\infty, +\infty[$, mais on peut l'utiliser sur $[-A, +A]$ et faire tendre ensuite A vers l'infini. Soit donc f une fonction de carré intégrable et continue. La fonction $g(x) = e^{+x^2/2}f(x)$ est alors elle aussi continue sur $[-A, +A]$, et par conséquent elle est la limite uniforme d'une certaine suite B_n de polynômes.

Ce qui entraîne que :

$$\forall \varepsilon, \exists n(A, \varepsilon), \forall x \in [-A, +A], |g(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon$$

et par conséquent aussi

$$\forall \varepsilon, \exists n(A, \varepsilon), \forall x \in [-A, +A], |f(x) - B_n(x) e^{-x^2/2}| \leq \varepsilon e^{-x^2/2}$$

Par ailleurs, pour tout ε et tout n on peut choisir A tel que

$$\int_{x \geq A} |f(x) - B_n(x) e^{-x^2/2}|^2 dx \leq \varepsilon$$

puisque $f(x)$ et $B_n(x) e^{-x^2/2}$ sont des fonctions de carré intégrable. En choisissant A de la sorte, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - B_n(x) e^{-x^2/2}|^2 dx \leq \int_{-A}^{+A} \varepsilon^2 e^{-x^2} dx + \varepsilon \leq \varepsilon^2 \sqrt{\pi} + \varepsilon$$

CQFD

Théorème 4. Si f est une fonction continue périodique de période 2π , alors il existe une suite T_n de polynômes trigonométriques qui converge, uniformément sur tout \mathbb{R} , vers f .

Remarque. Il est équivalent de dire que T_n converge uniformément sur tout \mathbb{R} , ou sur une seule période (par exemple $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, +\pi]$). Par contre, il n'est pas équivalent de dire que f est une fonction continue périodique, ou que f est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ ou sur $[-\pi, +\pi]$. En effet, f pourrait être continue sur $[0, 2\pi]$, mais prendre des valeurs différentes en 0 et en 2π ; en ce cas, elle ne pourrait pas se prolonger en une fonction continue et périodique, ni être la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Démonstration. Le théorème 4 est un simple corollaire du théorème 2. Supposons d'abord que f est paire; on peut la considérer seulement sur l'intervalle $[0, \pi]$: sur $[-\pi, 0]$ elle s'en déduit par symétrie, et au-delà par périodicité. La fonction $g(y) = f(\arccos(y))$ est alors une fonction continue sur $[-1, +1]$, à laquelle on peut appliquer le théorème 2. Donc pour tout ε , il existe un polynôme $P(y)$ tel que

$$\forall y \in [-1, +1], |g(y) - P(y)| \leq \varepsilon$$

si cela est vrai $\forall y \in [-1, +1]$, c'est vrai aussi en remplaçant y par $\cos x$, x pouvant être *n'importe* quel nombre réel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(\cos x) - P(\cos x)| \leq \varepsilon$$

Pour $x \in [0, \pi]$ on a $g(\cos x) = f(x)$ par définition de g ; mais puisque f est paire cela est encore vrai pour $x \in [-\pi, \pi]$, et puisque f est périodique c'est encore vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notons maintenant que $P(\cos x)$ est un polynôme algébrique de $\cos x$, mais on sait que toute puissance de $\cos x$, disons $\cos^n x$, est combinaison linéaire des fonctions $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$. Donc $P(\cos x)$ peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions.

Si f est impaire, on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme algébrique $Q(y)$ tel que $\forall x \in [0, 2\pi], |f(x) - \sin x Q(\cos x)| \leq \varepsilon$. Les expressions de la forme $\sin x \cos^{n-1} x$ pouvant toutes s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx$, on aura ainsi prouvé le théorème également pour les fonctions impaires. Si f est impaire, introduisons à nouveau la fonction $g(y) = f(\arccos(y))$. Puisque $f(x)$ est impaire, on a $f(0) = 0$; on doit aussi avoir $f(-\pi) = f(+\pi)$ puisque f doit être continue et périodique; mais en outre $f(-\pi) = -f(+\pi)$ puisque f est impaire; cela implique que $f(-\pi) = f(+\pi) = 0$. Donc $g(y)$ est nul pour $y = +1$ et pour $y = -1$. Le polynôme de Bernstein qui sert à notre approximation de $g(y)$ est donné par la formule 5.1 a, avec $a = -1$ et $b = +1$, ce qui donne ici

$$B_n(y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g\left(-1 + 2\frac{j}{n}\right) \left(\frac{y+1}{2}\right)^j \left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-j} \quad (5.8.)$$

Du fait que $g(\pm 1) = 0$, on voit qu'il est nul également pour $y = +1$ et pour $y = -1$; on voit même sur cette expression qu'il est factorisable par $(1-y) \cdot (1+y) = (1-y^2)$: en effet chaque terme de la somme 5.8 contient en facteur $g\left(-1 + 2\frac{j}{n}\right) (y+1)^j (1-y)^{n-j}$; si $0 < j < n$, ceci est divisible par $(y+1)(1-y)$ et si $j = 0$ ou $j = n$, c'est le coefficient $g\left(-1 + 2\frac{j}{n}\right)$ qui est nul. Ainsi le polynôme de Bernstein B_n de notre fonction impaire est divisible par $1-y^2$, donc on peut le factoriser sous la forme $(1-y^2) A_n(y)$. Puisque le polynôme B_n est de degré n , le polynôme A_n sera de degré $n-2$.

Ainsi les polynômes $B_n = (1-y^2) A_n(y)$ convergent uniformément vers $g(y)$ sur $[-1, +1]$, ce qui implique que $\sin^2 x A_n(\cos x)$ va converger uniformément vers $g(\cos x)$ sur tout \mathbb{R} ; pour n assez grand on aura

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(\cos x) - \sin^2 x A_n(\cos x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Mais $g(\cos x)$ est une fonction paire et n'est égale à $f(x)$ que sur les intervalles $[0, \pi], [2\pi, 3\pi]$, etc. Dans $[-\pi, +\pi]$, on peut donc seulement en déduire que $\forall x \in [0, \pi], |f(x) - \sin^2 x A_n(\cos x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Espaces de Hilbert

Notons cependant que la fonction $h(y) = \sqrt{1-y^2} A_n(y)$ est continue; ce n'est pas un polynôme à cause du facteur $\sqrt{1-y^2}$, mais c'est une fonction continue. Par conséquent on peut elle-même l'approcher uniformément par un polynôme de Bernstein; de sorte qu'il existera un polynôme $Q(y)$ tel que $\forall y \in [-1, +1], |h(y) - Q(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, ou, ce qui est équivalent, $\forall x \in [0, \pi], |h(\cos x) - Q(\cos x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Pour $x \in [0, \pi]$, $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, donc $\sin^2 x A_n(\cos x) = \sin x h(\cos x)$. Ce qui, puisque $|\sin x| \leq 1$, entraîne que $\forall x \in [0, \pi], |\sin^2 x A_n(\cos x) - \sin x Q(\cos x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Or d'après ce que nous avons vu avant, $|g(\cos x) - \sin^2 x A_n(\cos x)|$ est aussi inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $x \in [0, \pi]$. L'inégalité triangulaire conduit alors à la conclusion que

$$\forall x \in [0, \pi], |g(\cos x) - \sin x Q(\cos x)| = |f(x) - \sin x Q(\cos x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Cette fois on a approché $g(\cos x)$ par un polynôme trigonométrique impair, de sorte que cette inégalité est vraie non seulement pour $x \in [0, \pi]$, mais aussi pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Enfin, si f est quelconque, elle se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, à chacune desquelles on peut appliquer ce qui précède. CQFD