

TRANSFORMATIONS CONFORMES.

1. Les transformations géométriques du plan.

Les transformations classiques du plan euclidien sont la translation, la rotation, et l'homothétie. En composant une rotation et une homothétie, on obtient une similitude.

Si on représente chaque point du plan par un nombre complexe z (le point est alors l'*affixe* de z), une translation correspond à la transformation $z \mapsto z + a$ où a , également un nombre complexe, représente le vecteur de translation. Une rotation de centre 0 et d'angle θ correspond à la transformation $z \mapsto e^{i\theta} z$. Une homothétie de centre 0 et de rapport r correspond à la transformation $z \mapsto r z$.

Ces transformations correspondent toutes à une fonction *linéaire* de z (polynôme du premier degré). Il est clair qu'en les composant de toutes les manières possibles, on obtiendra toujours une fonction linéaire de z . Ainsi, en composant successivement :

- une rotation de centre 0 et d'angle θ ;
 - une translation de vecteur a ;
 - une homothétie de centre 0 et de rapport r ;
 - une translation de vecteur $-a$;
 - une rotation de centre 0 et d'angle $-\theta$;
 - une homothétie de centre 0 et de rapport $1/r$
- on obtient la transformation :

$$z \mapsto \{[(e^{i\theta} z + a) r - a] e^{-i\theta}\} \frac{1}{r}$$

En développant l'expression, on lui trouve la forme équivalente

$$z \mapsto z - a\left(\frac{1}{r} - 1\right)e^{-i\theta}$$

c'est-à-dire une translation de vecteur $-a\left(\frac{1}{r} - 1\right)e^{-i\theta}$.

En composant ces transformations, on reste toujours dans le domaine des transformations linéaires parce que l'ensemble des transformations linéaires forme un groupe.

Transformations conformes

Parmi les transformations géométriques classiques, il en existe aussi de non linéaires ; la plus connue est l'inversion. Elle se définit ainsi : soit O un point du plan (le *centre* de l'inversion), et m un nombre réel > 0 (le *coefficient* de l'inversion) ; le transformé d'un point A du plan est le point B situé sur la demi-droite OA , tel que $OA \cdot OB = m$.

En prenant le centre de l'inversion comme origine du plan, l'inversion correspond aussi à une fonction simple de la variable complexe z . En effet, écrivons z en représentation trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Si le point A est l'afixe de z , il est clair que le point B , situé sur la demi-droite OA , aura le même argument θ . D'autre part, sa distance à l'origine, OB , sera égale à $m/OA = m/r$. Par conséquent le point B est l'afixe du nombre complexe $\frac{m}{r}e^{i\theta} = m/\bar{z}$. Ainsi l'inversion correspond à la fonction $z \mapsto m/\bar{z}$.

Il est connu, en géométrie élémentaire, que les inversions transforment généralement les droites en cercles ; plus précisément, elles transforment en cercles les droites qui ne passent pas par le centre de l'inversion (une droite qui passe par le centre de l'inversion se transforme en elle-même). Elles transforment aussi les cercles qui ne passent pas par le centre de l'inversion en d'autres cercles, et les cercles qui passent par le centre de l'inversion en droites. Une autre propriété connue des inversions est de conserver les angles : par exemple, si deux droites sont perpendiculaires, les cercles transformés de ces droites se couperont à angle droit.

La composition de deux inversions de même centre donne une homothétie : en effet, $m'/\overline{(m/\bar{z})} = \frac{m'}{m}z$. La composition de deux inversions de centres différents donne une transformation plus générale :

$$\frac{m'}{\overline{m/\bar{z} - a} - b} = \frac{m'}{\frac{m}{\bar{z} - a} - b} = \frac{m'z - m'a}{-\bar{b}z + m + a\bar{b}}$$

C'est donc une transformation *homographique*. Mais z n'y apparaît plus par l'intermédiaire de son conjugué.

Les transformations homographiques sont les transformations de la forme

$$z \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de la transformation. Lorsqu'on compose deux transformations homographiques, $z \mapsto (Az + B)/(Cz + D)$ puis $w \mapsto (A'w +$

$B')/(C'w + D')$, on obtient :

$$\begin{aligned} z \mapsto \frac{A' \frac{Az+B}{Cz+D} + B'}{C' \frac{Az+B}{Cz+D} + D'} &= \frac{A'(Az+B) + B'(Cz+D)}{C'(Az+B) + D'(Cz+D)} \\ &= \frac{(A'A + B'C)z + (A'B + B'D)}{(C'A + D'C)z + (C'B + D'D)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la matrice de la composée est le produit des matrices.

Cette propriété montre que les transformations homographiques forment un groupe.

Mais à une même transformation correspondent des matrices différentes : si on multiplie simultanément tous les éléments de la matrice par un même nombre complexe, on ne change pas la transformation.

Autrement dit, la matrice d'une transformation homographique n'est définie qu'à un coefficient multiplicatif près.

Pour avoir une relation biunivoque avec les transformations homographiques, il faudrait considérer non les matrices, mais leurs classes d'équivalence par la relation :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad \begin{matrix} A' = \lambda A & B' = \lambda B \\ C' = \lambda C & D' = \lambda D \end{matrix}$$

Le groupe quotient est l'espace projectif des matrices.

Les translations, les rotations, les homothéties, sont des cas particuliers de transformations homographiques : les matrices associées sont respectivement (à un coefficient multiplicatif près) :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aurait tout aussi bien pu prendre les matrices :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$$

L'inversion n'est pas à strictement parler une homographie, puisque les homographies sont des fonctions de z et non de \bar{z} ; mais les transformations du type $z \mapsto m/z$ (au lieu de $z \mapsto m/\bar{z}$) sont des homographies particulières, de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut appeler *anti-inversion* ce type de transformation ; géométriquement, c'est la composée d'une inversion suivie d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Transformations conformes

De même que la géométrie euclidienne considère les propriétés qui sont invariantes par rotation et translation, on peut considérer les propriétés qui sont invariantes par les transformations homographiques : on appelle *anallagmatique*⁽¹⁾ la géométrie (non-euclidienne) correspondante. La géométrie anallagmatique ne distingue pas les cercles des droites : une droite est simplement un cercle qui passe par le point à l'infini. La notion de longueur n'existe pas dans cette géométrie (alors qu'elle est essentielle en géométrie euclidienne) ; par contre la notion d'angle subsiste, car les transformations homographiques conservent les angles. Ainsi, la propriété fondamentale de la géométrie anallagmatique est la suivante : *si trois cercles se coupent en un même point P , ils se coupent deux à deux en trois autres points, et la somme des angles de ces intersections est égale à π* (figure 1).

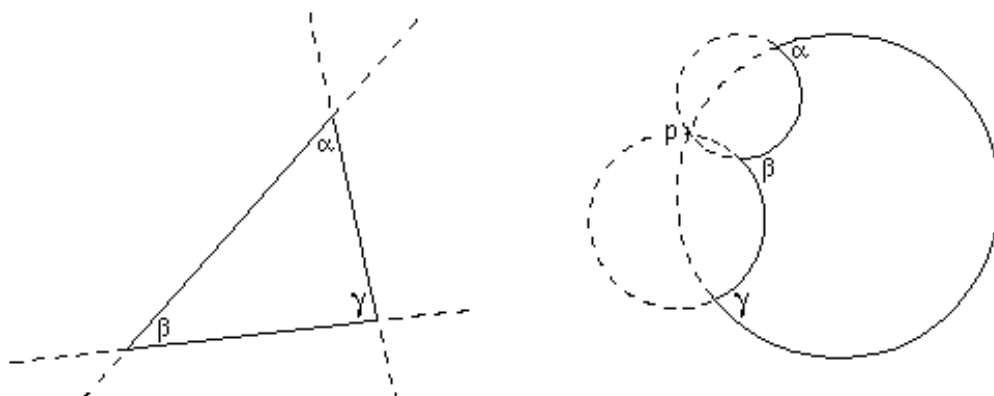


figure 1

Triangle euclidien (à gauche) et triangle anallagmatique (à droite). Le triangle anallagmatique est le transformé du triangle euclidien par une homographie, qui conserve les angles. Le point P où les trois cercles se rencontrent est l'image du point à l'infini, où les trois droites du triangle euclidien se rencontrent.

2. Propriétés géométriques des fonctions analytiques.

Les transformations homographiques sont analytiques. On peut avoir une transformation des points du plan en considérant n'importe quelle fonction analytique. Toutefois, les transformations homographiques transforment n'importe quel point du plan (même celui qui annule le dénominateur si on lui attribue le point à l'infini comme image), et sont en outre inversibles. On ne pourra pas en général en demander autant à une fonction analytique.

⁽¹⁾ en grec, ce mot signifie invariante.

On peut montrer⁽¹⁾ que les seules transformations analytiques inversibles (bijectives) du plan sur lui-même (sans extension au point à l'infini) sont les transformations linéaires, c'est-à-dire euclidiennes; et aussi que les seules transformations inversibles du plan étendu au point à l'infini sont les homographies.

Autrement dit, les transformations analytiques autres que les linéaires et les homographiques, soit ne seront définies que dans une partie du plan, soit ne seront bijectives que dans une partie du plan. Par exemple $z \mapsto z^2$ est analytique pour tout z , mais n'est bijective que sur une partie du plan : ainsi, elle transforme bijectivement le demi-plan $\Im z > 0$ dans le domaine Ω_1 (son inverse est alors $[z^{1/2}]_1$), ou le demi-plan $\Re z > 0$ dans le domaine Ω_2 (son inverse est alors $[z^{1/2}]_2$). La fonction $z \mapsto \exp z$ est elle aussi analytique pour tout z , mais n'est bijective que dans des domaines restreints tels que $0 < \Im z < 2\pi$ (l'inverse est alors la fonction $\ln_1 z$) ou $-\pi < \Im z < \pi$ (l'inverse est alors la fonction $\ln_2 z$).

Si U et V sont deux domaines du plan, et f une fonction analytique, définie sur U , telle que $V = f(U)$, et bijective en tant que fonction de U dans V , on dit que f est une transformation conforme de U sur V .

Théorème 1 : Si $f(w)$ est une fonction analytique sur U , bijective de U dans V , sa dérivée $f'(w)$ ne peut s'annuler dans U .

Démonstration : Prouvons d'abord le lemme suivant :

Soit $h(w)$ une fonction analytique dans le disque $|w| < \rho$. Si γ est un lacet simple contenu dans ce disque, et ne passant par aucun de ces zéros, alors l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h'(w)}{h(w)} dw \quad (2.1)$$

est égale au nombre de zéros situés à l'intérieur du lacet γ , les zéros multiples étant comptés selon leur multiplicité.

Remarque : la fonction h'/h a des pôles là où h a ses zéros; comme par hypothèse les zéros ne sont pas situés sur le lacet, l'intégrale est bien définie.

Démonstration du lemme : on va montrer que le résidu de h'/h en chacun de ses pôles est égal à la multiplicité du zéro correspondant. Soit w_j

⁽¹⁾ Ces démonstrations ne sont pas très difficiles, mais sans intérêt pour une formation d'ingénieur. Si vous êtes curieux: Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* Éditions Hermann, Paris, 1961, pages 182 – 183.

Transformations conformes

l'un des zéros de h dans le disque $|w| < \rho$, et $N \geq 1$ sa multiplicité; la série entière de h au voisinage de w_j est

$$h(w) = a_N(w - w_j)^N + a_{N+1}(w - w_j)^{N+1} + a_{N+2}(w - w_j)^{N+2} + \dots \quad (2.2)$$

avec $a_N \neq 0$ (puisque w_j est par hypothèse un zéro d'ordre N), de sorte que $h(w) = a_N(w - w_j)^N h_0(w)$, où $h_0(w)$ est une fonction analytique égale à 1 en w_j , et par conséquent (par continuité) non nulle dans tout un voisinage de w_j .

La dérivée est

$$h'(w) = Na_N(w - w_j)^{N-1} h_0(w) + a_N(w - w_j)^N h'_0(w) \quad (2.3)$$

De sorte que le quotient h'/h s'écrit

$$\frac{h'(w)}{h(w)} = \frac{N}{w - w_j} + \frac{h'_0(w)}{h_0(w)} \quad (2.4)$$

Étant donné que $h_0(w) \neq 0$ (pour $|w - w_j|$ assez petit), la fonction $h'_0(w)/h_0(w)$ est analytique dans un voisinage de w_j , donc égale à une série entière. En conséquence,

$$\frac{h'(w)}{h(w)} = \frac{N}{w - w_j} + \text{série entière} \quad (2.5)$$

ce qui montre que le résidu de h'/h au point w_j est bien égal à N .

Le théorème des résidus dit alors que l'intégrale 2.1 est égale à la somme des résidus aux points w_j intérieurs à γ , c'est-à-dire à la somme des multiplicités. CQFD

Démonstration du théorème 1 : S'il existe un point w_0 de U tel que $f'(w_0) = 0$, l'équation $f(w) = f(w_0)$ a pour racine w_0 avec une multiplicité au moins égale à deux (si w_0 était une racine simple, $f'(w_0)$ ne serait pas nul); soit N cette multiplicité ($N \geq 2$). Le théorème des zéros isolés entraîne que $f'(w_0) \neq 0$ dans une couronne $\rho > |w - w_0| > 0$, avec ρ suffisamment petit; par conséquent les racines éventuelles de l'équation $f(w) = z$ dans cette couronne sont forcément toutes simples (quand il y a une racine multiple, la dérivée s'annule).

Le nombre de ces racines simples est alors donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w) - z} dw \quad (2.6)$$

où γ est par exemple le cercle $|w - w_0| = \rho$. Par continuité de la fonction $f(w)$, tant que $z - a_0$ reste assez petit, les racines w de $f(w) = z$ sont toutes

dans le disque $|w - w_0| < \frac{1}{2}\rho$, donc on peut minorer uniformément le long de γ le dénominateur $|f(w) - z|$ dans cette intégrale; ce qui implique que l'intégrale 2.6 est une fonction continue de z (pour $z - a_0$ assez petit). Or, lorsque $z = a_0$, la racine w_0 est une racine de multiplicité $N \geq 2$, de sorte que l'intégrale 2.6 vaut N . Une conséquence de la continuité est alors que la valeur de l'intégrale, qui est un entier, reste constante (l'entier ne fera un saut que lorsque, $|z - a_0|$ augmentant, une racine traversera le lacet γ). Et puisque ces racines deviennent simples dès que $z \neq a_0$, il y aura N racines simples (et donc distinctes) de $f(w) = z$ au voisinage de w_0 , c'est-à-dire au moins deux.

Autrement dit : si $f'(w)$ s'annule en un point w_0 de U , il y aura au voisinage de w_0 au moins deux racines distinctes de l'équation $f(w) = z$, ce qui signifie que f n'est pas injective. CQFD

N.B. Le théorème 1 dit seulement que *si* f est bijective (de U dans V), *alors* sa dérivée ne peut s'annuler dans U ; mais :

— a) la réciproque est fausse; le fait que la dérivée f' ne s'annule pas dans U ne garantit absolument pas que f soit injective (par exemple si $f(z) = z^3$ sur $U = \{z \mid \Im z > 0\}$, on voit bien que $e^{i\frac{\pi}{6}} \neq e^{i\frac{5\pi}{6}}$, alors que $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = f(e^{i\frac{5\pi}{6}}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$, et pourtant $f'(z) = 3z^2$ ne s'annule en aucun point du demi-plan U);

— b) il existe cependant une réciproque partielle : si $f'(w_0) \neq 0$, il existe un voisinage de w_0 dans lequel f est injective (théorème dit *d'inversion locale*); cela implique par exemple dans le cas de $f(z) = z^3$ que f est injective si on la restreint à des domaines assez petits (plus petits que $U = \{z \mid \Im z > 0\}$);

— c) si f est bijective de U dans V , la dérivée f' peut s'annuler *sur la frontière* de U ; l'hypothèse que U est un domaine *ouvert* est essentielle dans ce contexte et la démonstration du théorème le montre (on utilise l'intégrale 2.1 sur le chemin γ qui *entoure* le point w_0 où la dérivée s'annule, ce qui serait impossible si w_0 était sur la frontière).

Le mot *conforme* provient de ce que les transformations analytiques conservent les angles, avec leur orientation (nous allons le démontrer ci-après). Si tel est le cas, il est aisé d'en déduire que les transformations anti-analytiques, qui sont des fonctions analytiques de \bar{z} , conservent les valeurs absolues des angles, mais inversent leur orientation : en effet, la conjugaison complexe correspond géométriquement à une symétrie par rapport à l'axe réel, qui inverse l'orientation des angles.

Transformations conformes

Afin que l'expression "conserver les angles" ait un sens précis, nous donnons l'énoncé suivant :

Théorème 2 : Soient U et V deux domaines tels que la fonction analytique f réalise une transformation conforme de U sur V . Soient $t \mapsto w_1(t)$ et $t \mapsto w_2(t)$ deux chemins dans U qui se coupent au point $w = w_1(0) = w_2(0)$, où ils ont des vecteurs-vitesse $w'_1(0)$ et $w'_2(0)$ non nuls. Alors $z_1(t) = f(w_1(t))$ et $z_2(t) = f(w_2(t))$ sont deux chemins dans V qui se coupent au point $z = f(w)$, ayant en z des vecteurs-vitesse $z'_1(0)$ et $z'_2(0)$ non nuls, et l'angle orienté entre les nombres complexes $z'_1(0)$ et $z'_2(0)$ est égal à l'angle orienté entre les nombres complexes $w'_1(0)$ et $w'_2(0)$.

Commentaire : Cet énoncé précise la notion d'angle entre deux courbes au point où elles se coupent comme étant l'angle de leurs vecteurs tangents (ou vecteurs vitesse) respectifs en ce point.

Démonstration : f étant différentiable, il est clair que si $t \mapsto w(t)$ est un chemin différentiable, il en sera de même de $t \mapsto z(t) = f(w(t))$. Le vecteur-vitesse du chemin $t \mapsto f(w(t))$ est alors la dérivée, qui s'obtient par la règle de composition : $z'(t) = f'(w(t)) w'(t)$. Le vecteur-vitesse $z'(t)$ sera non nul (lorsque $w'(t)$ l'est) si, et seulement si, $f'(w(t)) \neq 0$, ce qui résulte du théorème 1, puisque nous avons l'hypothèse que f est une bijection de U dans V .

Appliquons ces résultats aux deux chemins w_1 et w_2 , au point w correspondant à $t = 0$; on obtient :

$$\begin{aligned} z'_1(0) &= f'(w_1(0)) \cdot w'_1(0) = f'(w) \cdot w'_1(0) \\ z'_2(0) &= f'(w_2(0)) \cdot w'_2(0) = f'(w) \cdot w'_2(0) \end{aligned}$$

Ces deux égalités montrent que les nombres complexes $z'_1(0)$ et $z'_2(0)$ sont les images de $w'_1(0)$ et $w'_2(0)$ par la transformation linéaire $Z \mapsto f'(w) \cdot Z$. Si on représente trigonométriquement le nombre complexe $f'(w)$ par $re^{i\theta}$, cette transformation (la multiplication par $f'(w) = re^{i\theta}$) est une similitude d'angle θ et de rapport r , qui évidemment conserve les angles entre les vecteurs. CQFD

L'hypothèse que f est injective (bijective de U dans V) intervient ici par sa conséquence que $f'(w)$ ne s'annule pas dans U . Toutefois la bijectivité interviendra plus loin par elle-même, car sans elle on ne peut pas parler de transformation. Le théorème 2 n'exclut pas que $f'(w)$ puisse s'annuler sur le *bord* du domaine U (voir la remarque *c* après la démonstration du théorème 1). Et non seulement cela *peut* se produire, mais c'est même, comme nous allons voir, une possibilité qui est systématiquement exploitée

dans les applications des transformations conformes. En effet, le théorème 2 ne garantit pas la conservation des angles lorsque la dérivée f' s'annule. Une fonction dont la dérivée est nulle se comporte localement comme la fonction z^2 (si f'' ne s'annule pas en même temps) qui *double* les angles. Si cela se produit sur le bord de U , l'effet sera de replier ce bord, comme la fonction z^2 replie l'axe $\Re z = 0$ en deux fois la demi-droite $] -\infty, 0]$ (figure 2). C'est ce phénomène qui explique comment la transformation $z \mapsto \cosh z$ transforme les deux droites $\Im z = 0$ et $\Im z = \pi$ en les demi-droites dédoublées $] -\infty, -1]$ et $[+1, +\infty[$ (figure 4), ou bien la formation des points de rebroussement dans les rosettes des figures 6, 7, et 9.

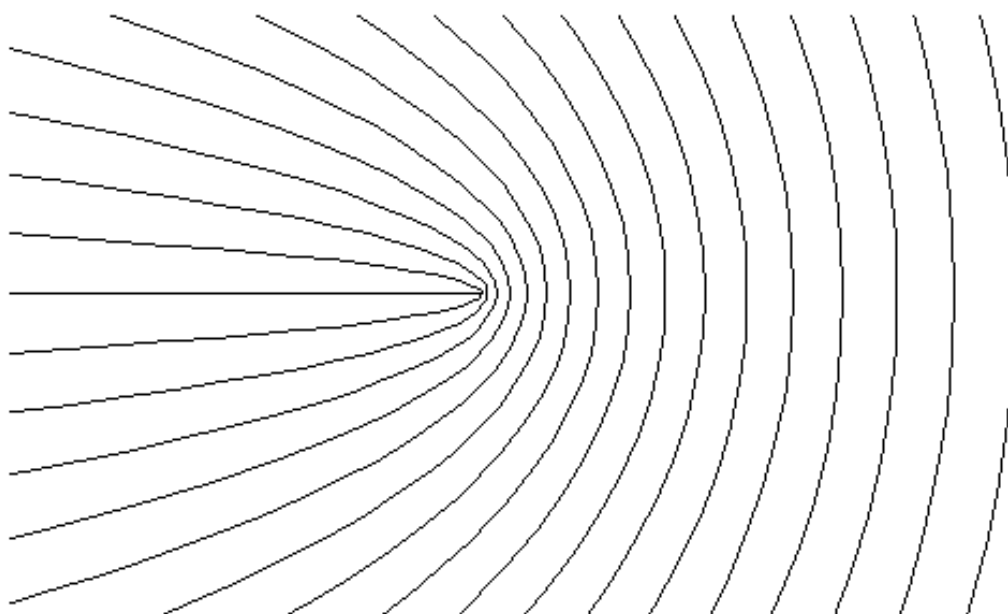


figure 2

Courbes images des droites $\Re z = C^{\text{te}}$ par la transformation conforme $z \mapsto z^2$

3. Fonctions harmoniques.

La propriété des transformations conformes la plus importante pour les applications est la *conservation de l'harmonicité*.

Une fonction *harmonique* $U(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (à valeurs réelles) est une fonction vérifiant l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0 \quad (3.1)$$

C'est par exemple (pour $n = 3$) l'équation du potentiel électrostatique en dehors de tout milieu continu et électriquement chargé.

Transformations conformes

Nous considérons uniquement le cas du plan. Soient $Q(R, S)$ et $P(x, y)$ deux fonctions de deux variables, à valeurs réelles, dont les domaines de définition sont respectivement V et U . Si $R(x, y)$ et $S(x, y)$ sont elles-mêmes des fonctions de x, y , alors P est la fonction composée de $f : (x, y) \mapsto (R, S)$, et de $(R, S) \mapsto Q$. On suppose donc que l'application $f : (x, y) \mapsto (R, S)$ transforme le domaine U en le domaine V :

$$\begin{array}{ccccc} & f & & Q & \\ U & \rightarrow & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (R, S) & \mapsto & P(x, y) = Q(R, S) \end{array}$$

Ainsi $P(x, y) = Q(R(x, y), S(x, y))$. La règle de dérivation des fonctions composées donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (3.2)$$

Pour avoir la dérivée seconde par rapport à x , on applique à nouveau la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ &= \left[\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial R \partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \right] \frac{\partial R}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 P}{\partial R \partial S} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \frac{\partial S}{\partial x} \right] \frac{\partial S}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial P}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Il est clair que la dérivation par rapport à y aurait donné la même expression, sauf que x y serait remplacé par y . Par conséquent le laplacien sera :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial R \partial S} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial P}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial P}{\partial S} \Delta S \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ceci est l'expression *générale* du laplacien pour une fonction composée (elle ne se simplifie pas davantage). Supposons maintenant que la fonction $f : (x, y) \mapsto (R, S)$, ou en termes équivalents $f : x + iy \mapsto R + iS$, est analytique dans U . Cela implique que les relations de Cauchy et Riemann sont satisfaites, à savoir

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x}$$

Ces relations entraînent que

$$\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

et

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 \quad (3.5)$$

On remarquera aussi que les deux expressions égales de 3.5 ne sont autres que $|f'(x + ix)|^2$; en effet, la dérivée $f'(z)$ d'une fonction analytique $f(z) = R + iS$ est donnée par n'importe laquelle des expressions suivantes :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} - i \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} + i \frac{\partial S}{\partial x} = \text{etc.}$$

Enfin, les relations de Cauchy et Riemann entraînent aussi que $\Delta R = \Delta S = 0$. Par conséquent, si f est analytique, l'expression 3.3 se simplifie énormément :

$$\Delta P = |f'|^2 \Delta Q \quad (3.6)$$

En particulier, si P est harmonique, Q l'est aussi (et vice-versa). On utilise cette propriété pour résoudre l'équation de Poisson $\Delta P = 0$ avec des conditions aux limites : si cette équation se résoud facilement sur le domaine U , et qu'on trouve une transformation conforme de U sur V , il suffira de transporter la solution de U à V par f , pour avoir une solution dans V .

On utilise cette propriété des transformations conformes pour résoudre bon nombre de problèmes d'électrostatique (P étant le *potentiel électrostatique*) ou d'hydrodynamique (P étant alors le *potentiel des vitesses* d'un fluide, dont le gradient est le *champ des vitesses*).

Il existe deux sortes de configurations dans le plan, où l'équation de Poisson se résoud trivialement :

— lorsqu'il y a invariance par translation : alors le domaine U est une bande, du type $a < \Re z < b$ (ou $a < \Im z < b$), avec des conditions aux limites également invariantes sur les bords, donc du type $P(a, y) = p_0$ et $P(b, y) = p_1$ (ou $P(x, a) = p_0$ et $P(x, b) = p_1$) ;

— lorsqu'il y a invariance par rotation : alors le domaine U est une couronne du type $a < |z| < b$, avec des conditions aux limites du type $P(z) = p_0$ pour $|z| = a$ et $P(z) = p_1$ pour $|z| = b$.

En effet, dans le premier cas le potentiel $P(x, y)$ ne dépend que de x (ou que de y), donc l'équation de Poisson se réduit à $P'' = 0$, dont les solutions sont $P = \lambda x + \mu$ (λ et μ sont alors déterminés par les conditions aux limites). Dans le second cas, le potentiel $P(x, y)$ ne dépend que de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et l'équation de Poisson se réduit à $P'' + \frac{1}{r}P' = 0$ (laplacien en coordonnées polaires), dont les solutions sont $P = \lambda \ln r + \mu$ (λ et μ étant pareillement déterminés par les conditions aux limites).

Transformations conformes

Remarquons en passant que les deux cas envisagés se transforment l'un en l'autre par la transformation conforme $f(z) = \exp z$.

L'exemple le plus simple de transformation conforme non triviale (c'est-à-dire, dans le présent contexte, ni linéaire, ni exponentielle) est la transformation $f(z) = z^2$. Soit donné le problème suivant :

Résoudre l'équation de Poisson $\Delta P = 0$ sur le domaine Ω_2 , avec la condition aux limites $P = 0$ sur $] -\infty, 0]$.

Ce problème fournit un modèle mathématique du champ électrique autour du bord d'une tôle.

Pour traiter ce problème, on remarque que la fonction $z \mapsto z^2$ réalise une transformation conforme du demi-plan $\Re z > 0$ sur le domaine Ω_2 , dont l'inverse est $w \mapsto \sqrt{w}^2$.

N.B. La fonction $z \mapsto z^2$ réalise *aussi* une transformation conforme du demi-plan $\Im z > 0$ sur le domaine Ω_1 , dont l'inverse est alors $w \mapsto \sqrt{w}^1$.

Dans le demi-plan $\Re z > 0$, l'équation de Poisson a pour solutions $\lambda x + \mu$; la condition aux limites $P = 0$ pour $x = 0$ entraîne que $\mu = 0$, mais λ reste indéterminé (il n'y a pas unicité de la solution car il n'y a pas suffisamment de conditions aux limites). Par conséquent le potentiel $Q(R, S)$ s'obtient par $Q(x^2 - y^2, 2xy) = \lambda x$ ou, ce qui est équivalent,

$$Q(R, S) = \lambda \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + S^2} + R}{2}}$$

N.B. On a utilisé les expressions de $\sqrt{R + iS}^1$ et $\sqrt{R + iS}^2$ en coordonnées cartésiennes qui sont :

$$\begin{aligned}\sqrt{R + iS}^1 &= \sigma \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + S^2} + R}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + S^2} - R}{2}} \\ \sqrt{R + iS}^2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + S^2} + R}{2}} + i \sigma \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + S^2} - R}{2}}\end{aligned}$$

où σ est le signe de S ; on remarquera que les seuls cas où ce signe est indéterminé (c'est-à-dire $S = 0$) sont soit le cas où le facteur de σ est nul, soit le cas où $R + iS$ est sur la coupure, de sorte que l'indétermination du signe reste toujours sans effet.

Ces expressions de $\sqrt{R + iS}^1$ et $\sqrt{R + iS}^2$ en coordonnées cartésiennes s'obtiennent simplement en résolvant le système d'équations du second degré $x^2 - y^2 = R$; $2xy = S$ et en choisissant correctement celle des deux solutions qui correspond à la détermination retenue.

Les courbes $Q = C^{\text{te}}$ (courbes équipotentielles dans Ω_2) sont les images par f des droites $x = C^{\text{te}}$ (courbes équipotentielles dans $\Re z > 0$). Si on paramètre ces droites par $y \mapsto x + iy$, on obtient un paramétrage de leurs

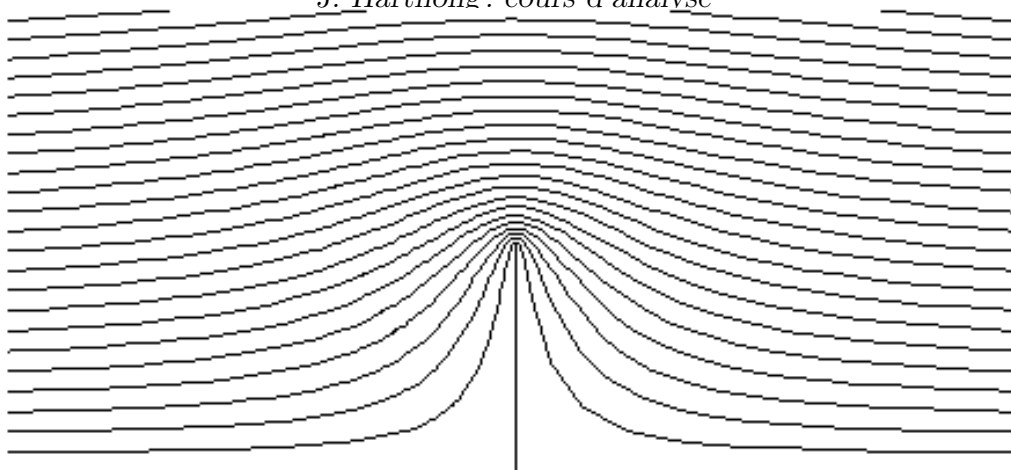


figure 3

Image du demi-plan $\Im z > 0$ par la transformation

$$z \mapsto \sqrt{z-1}^2 \cdot \sqrt{z+1}^2$$

Les courbes sont les transformées des droites $\Im z = k \cdot 0.04$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$

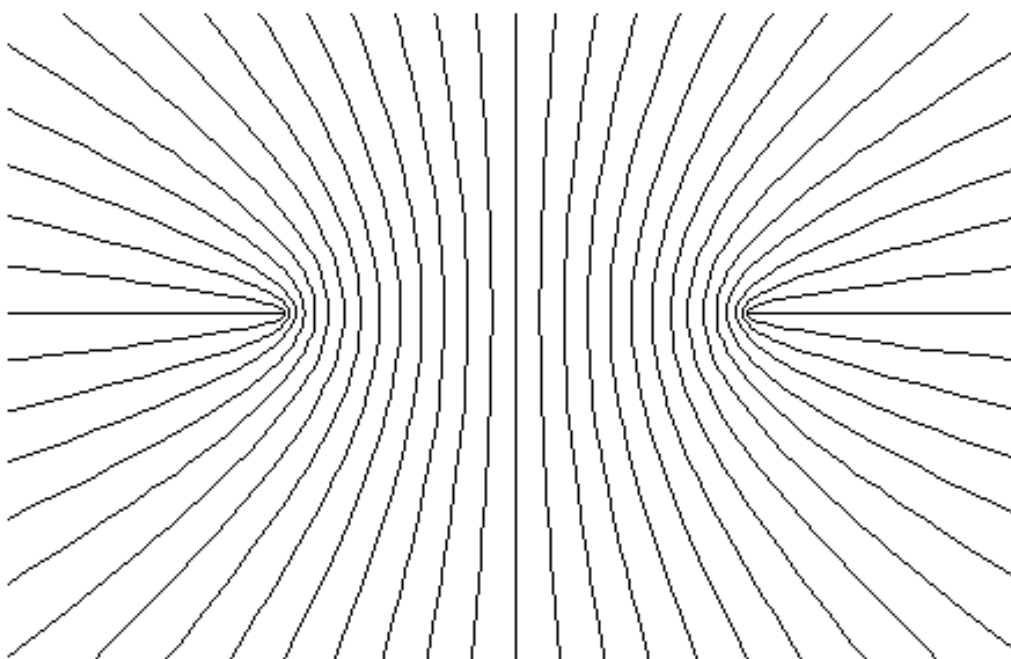


figure 4

Image de la bande $\pi > \Im z > 0$ par la transformation

$$z \mapsto \cosh z$$

Les courbes sont les transformées des droites $\Im z = k\pi/30$, pour $k = 1, 2, 3, \dots, 29$.

Transformations conformes

images: $R = x^2 - y^2$; $S = 2xy$. En éliminant le paramètre y on obtient l'équation des courbes: $R = x^2 - S^2/4x^2$, qui montre que ce sont des paraboles dont l'axe est l'axe réel, et le sommet le point d'abscisse x^2 (figure 2).

Les figures 3,4,5 montrent les exemples les plus simples.

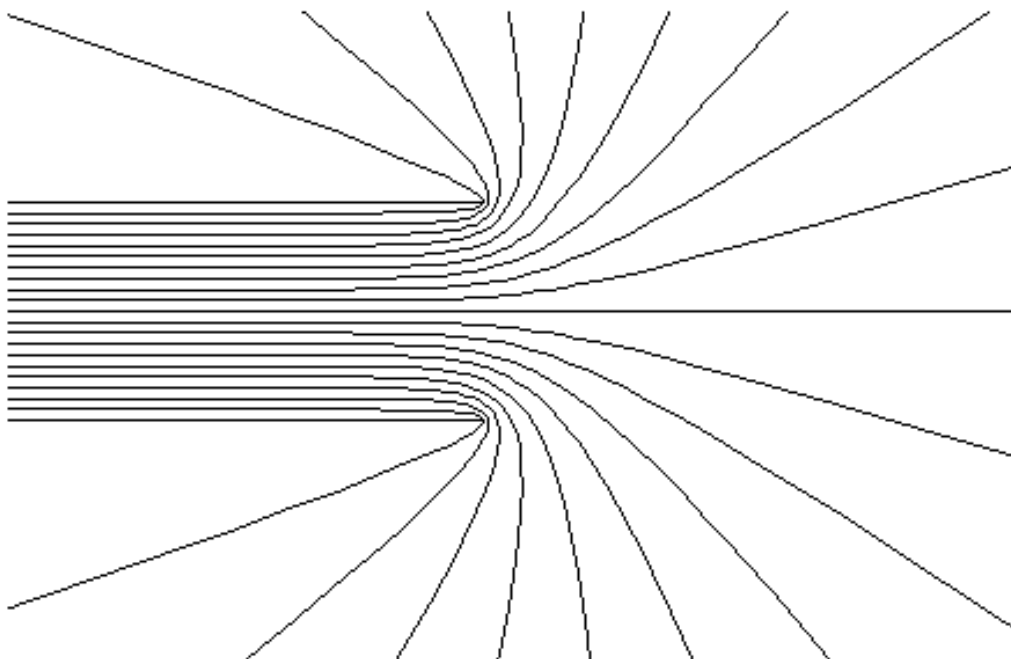


figure 5

Image de la bande $\pi > \Im z > 0$ par la transformation

$$z \mapsto z + \exp z$$

Les courbes sont les transformées des droites $\Im z = k\pi/20$, pour $k = 1, 2, 3, \dots, 19$.

4. Autres exemples.

a) polynômes. Voir figures 6 et 7.

b) rosettes : figures 6 et 9.

Pour un entier $n \geq 1$, soient

$$\omega_n^j = e^{\frac{2i\pi}{n}j}$$

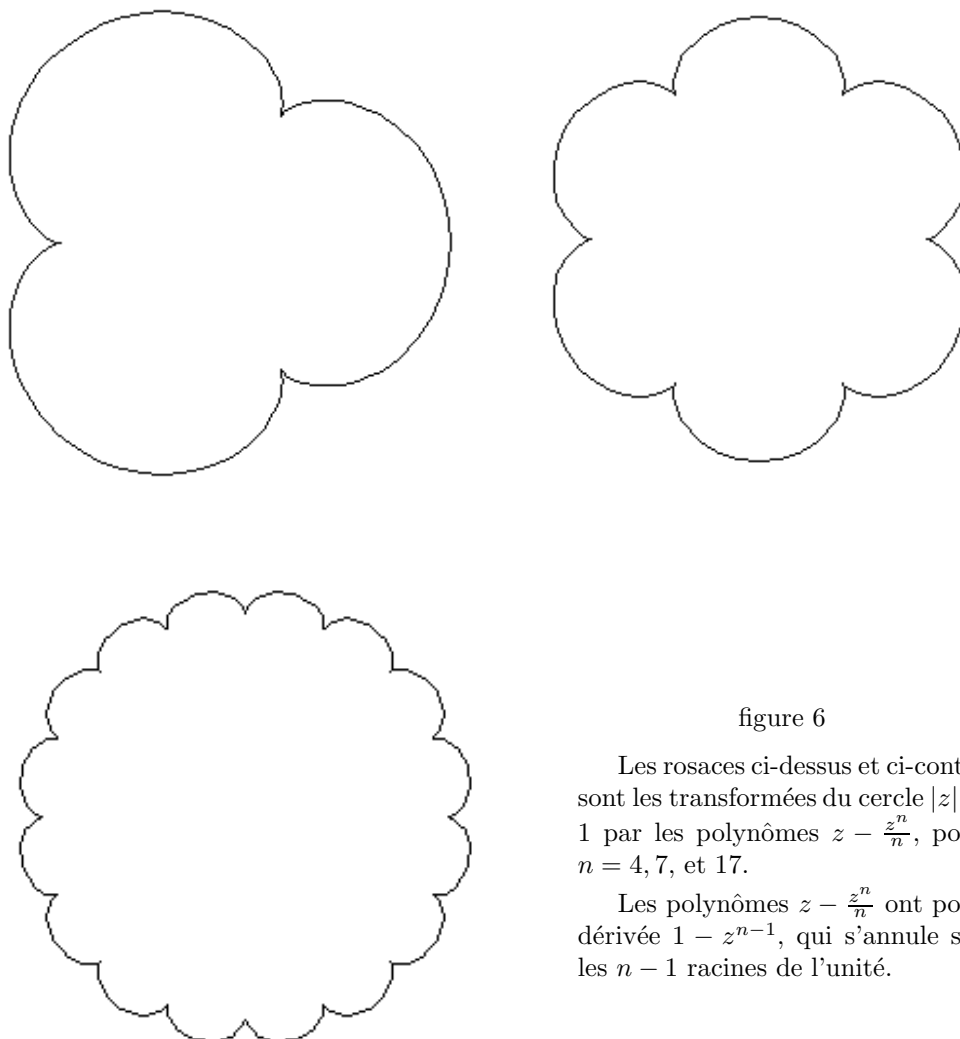


figure 6

Les rosaces ci-dessus et ci-contre sont les transformées du cercle $|z| = 1$ par les polynômes $z - \frac{z^n}{n}$, pour $n = 4, 7$, et 17 .

Les polynômes $z - \frac{z^n}{n}$ ont pour dérivée $1 - z^{n-1}$, qui s'annule sur les $n - 1$ racines de l'unité.

les racines n -ièmes de l'unité, c'est-à-dire les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. Considérons les fonctions suivantes :

$$f_n(z) = z - \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad g_n(z) = z - \frac{a^n + 1}{na^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^j \ln_2 \left(1 - \frac{z}{a\omega_n^j} \right)$$

Leurs dérivées sont respectivement :

$$f'_n(z) = 1 - z^n$$

$$g'_n(z) = 1 - \frac{a^n + 1}{na^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_n^j}{z - a\omega_n^j} = 1 + \frac{a^n + 1}{z^n - a^n} = \frac{z^n + 1}{z^n - a^n}$$

Ces transformations ont pour $a \simeq 1$ une valeur (complexe) grande, de l'ordre

Transformations conformes

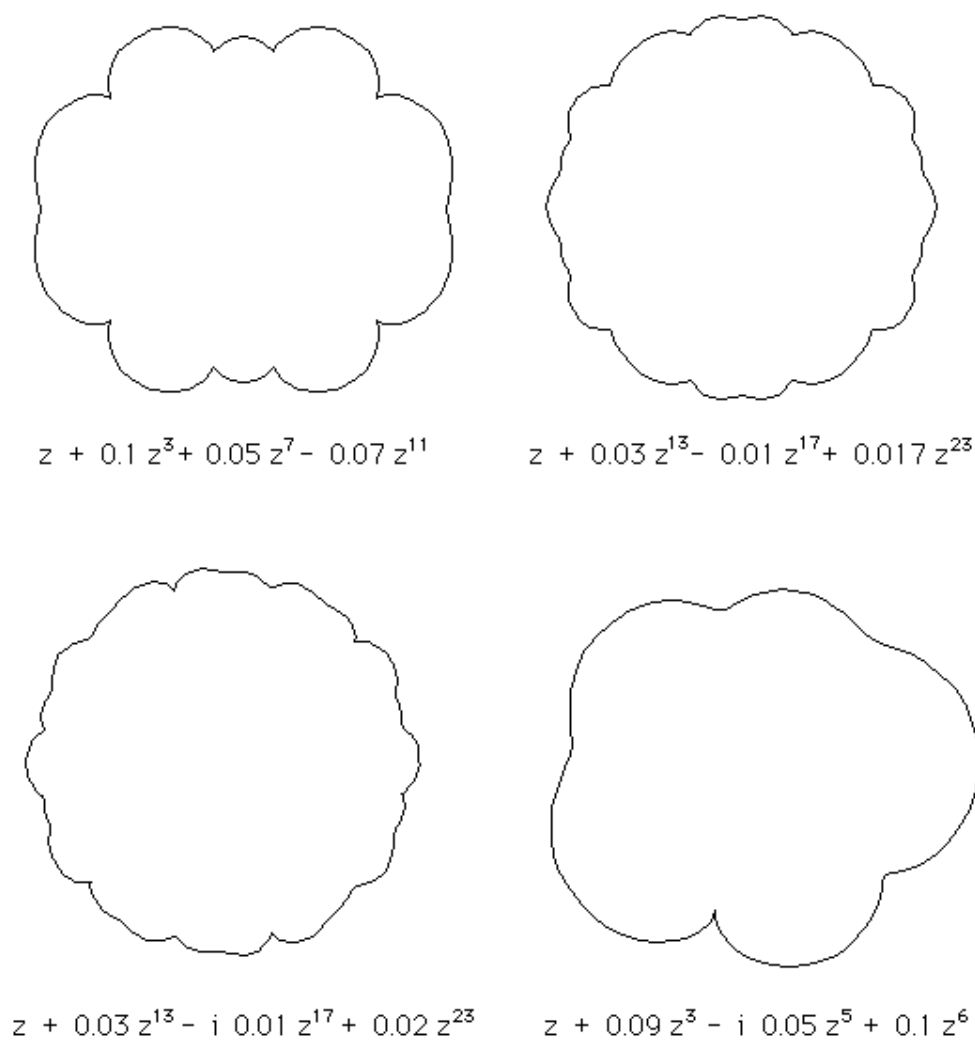


figure 7

Les courbes fermées ci-dessus sont les transformées du cercle $|z| = 1$ par les polynômes indiqués. Ces polynômes réalisent ainsi une transformation conforme du disque $|z| < 1$ sur la région délimitée par les courbes.

de $\ln(1 - \frac{1}{a})$, au voisinage des points $z = e^{\frac{2i\pi}{n}(j+\frac{1}{2})}$, et une dérivée nulle aux points $z = e^{\frac{2i\pi}{n}j}$; elles vont donc étirer considérablement le disque au voisinage des premiers, et le replier sans étirement au voisinage des seconds. D'où les rosettes de la figure 9.

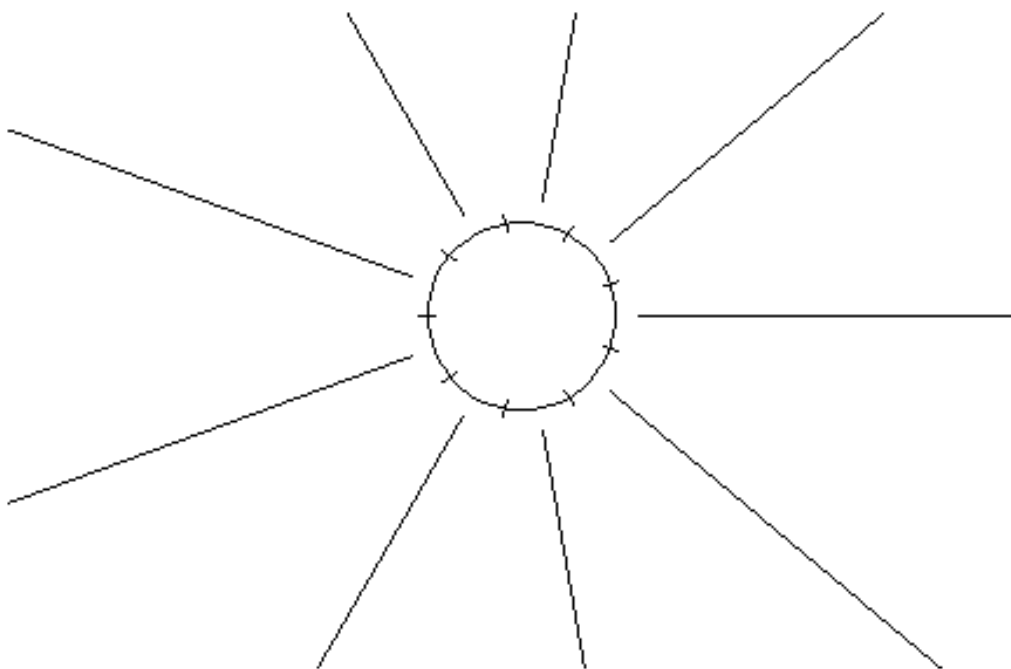


figure 8

Domaine d'holomorphie de la fonction

$$f_n(z) = z + q \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^j \ln 2 \left(1 - \frac{z}{a\omega_n^j} \right)$$

La fonction $f_n(z)$ est une somme de logarithmes (détermination \ln_2), de sorte que chaque terme exclut une coupure du plan qui est une demi-droite: ces demi-droites sont de la forme $\omega_n^j \times [a, +\infty[$, qui correspond aux valeurs réelles négatives de l'expression $1 - z/a\omega_n^j$. La dérivée $f'_n(z)$ s'annule aux points $z = \omega_n^{j+\frac{1}{2}}$ qui sont marqués par un trait court.

On constate sans difficulté que la dérivée $f'_n(z)$ s'annule pour $z = \omega_n^j$, et qu'il s'agit de racines simples: le polynôme $z^n - 1$, comme il est bien connu, se factorise en $(z - 1)(z - \omega_n^1)(z - \omega_n^2) \cdots (z - \omega_n^{n-1})$. En ce qui concerne $g'_n(z)$ on observe d'abord que son dénominateur s'annule pour $z = a\omega_n^j$. Par contre son numérateur s'annule pour $z = \omega_n^{j+\frac{1}{2}}$

Transformations conformes

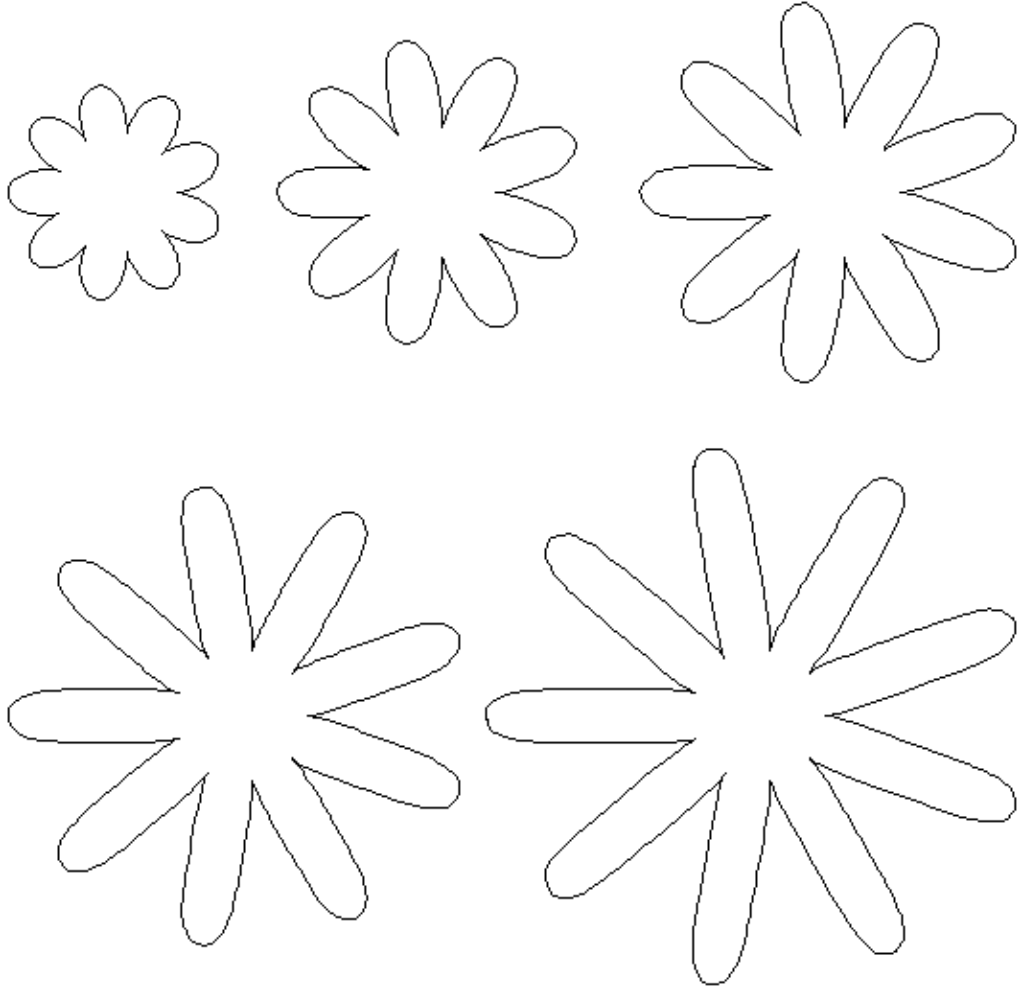


figure 9

Les rosettes que voici sont les transformées du cercle $|z| = 1$ par les fonctions

$$z + q \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^j \ln_2 \left(1 - \frac{z}{a\omega_n^j} \right)$$

où ω_n^j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) désignent les racines n -ièmes de l'unité (ici $n = 9$) et $q = (a^n + 1)/na^{n-1}$.

On a pris successivement pour a : 1.01, 1.001 et 1.0001 (en haut), 1.00001 et 1.000001 (en bas).