

II. FONCTIONS ANALYTIQUES

1. Une propriété des polynômes.

Pour une fonction arbitraire la dérivée est définie comme une limite; par contre pour les polynômes la dérivée peut être calculée de manière purement algébrique. Par exemple, la dérivée de X^k est kX^{k-1} . On peut exprimer cela algorithmiquement: “on obtient la dérivée de X^k en diminuant l’exposant d’une unité et en multipliant le tout par l’ancien exposant”. Le résultat de cette transformation purement algébrique coïncide avec la limite de $[(X + t)^k - X^k]/t$ lorsque t tend vers zéro. On peut trouver d’autres fonctions (autres que les polynômes) ayant une telle propriété: par exemple la fonction exponentielle, où l’opération algébrique est encore plus simple puisque la dérivée est identique à la fonction. Si on considère l’ensemble de toutes les fonctions possibles, on a l’impression que celles qui jouissent d’une telle propriété sont exceptionnelles et très rares. Mais inversement, si on considère les fonctions usuelles des mathématiques, qui sont définies par les opérations arithmétiques addition, multiplication, division, exponentiation, puis combinées par composition, on a au contraire l’impression qu’elles constituent la règle et non l’exception. D’ailleurs, ce qui fait la puissance du *Calcul infinitésimal* est justement la possibilité de calculer les dérivées algébriquement, grâce à des formules telles que $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$, etc.

Dans le calcul de la dérivée d’une fonction par la limite du taux d’accroissement, il était essentiel que la variable soit réelle; si la variable est complexe, la notion même d’accroissement perd son sens puisque les nombres complexes ne sont pas ordonnés. Par contre, dans le calcul purement algébrique de la dérivée, il importait peu que la variable soit réelle ou complexe, parce que les opérations $+$, $-$, \times , $/$ s’étendent aux nombres complexes. Ainsi avec $z = x + iy$ la fonction z^k a toujours un sens clair, et sa dérivée aussi: rien n’empêche de dire *par définition* que kz^{k-1} est la dérivée de z^k . Il est indifférent que la variable soit réelle ou complexe, pour calculer la dérivée ou la primitive d’un polynôme. Par exemple le polynôme

$$P(x) = x^7 - 3x^6 + x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x - 2$$

a pour dérivée

$$P'(x) = 7x^6 - 18x^5 + 5x^4 + 16x^3 - 21x^2 + 4x - 1$$

et pour primitive (nulle en zéro)

$$Q(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^7}{7} + \frac{x^6}{6} + \frac{4x^5}{5} - \frac{7x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

Ces opérations, consistant à passer à la dérivée ou à la primitive, restent formellement valables si on remplace x par un nombre complexe.

Le problème est évidemment de comprendre le sens de ces opérations lorsque la variable est complexe.

On peut constater directement que, tout comme lorsque x est réel, kz^{k-1} est aussi la limite de $[(z+w)^k - z^k]/w$ lorsque w tend vers zéro, mais avec la différence essentielle que voici : un nombre réel t peut tendre vers zéro à gauche, à droite, ou de façon alternée (en oscillant), mais un nombre complexe (parce qu'il varie selon deux dimensions) peut tendre vers zéro selon n'importe quelle direction, ou même en suivant une spirale. Or l'expression $[(z+w)^k - z^k]/w$ tend vers kz^{k-1} *quelle que soit la manière* dont w tend vers zéro. C'est donc une contrainte nettement plus forte que dans le domaine réel.

Pour bien comprendre cela, voyons un exemple simple. On va considérer d'une part la fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, qui est donc polynômiale, et d'autre part la fonction $g(z) = x^2 - y^2 + ixy$, qui est aussi une fonction de la variable complexe z , et elle-même à valeurs complexes, tout comme $f(z)$, mais qui ne peut pas s'exprimer à partir de z uniquement comme produit ou puissance : pour exprimer $g(z)$ on est obligé de séparer x et y , on ne peut l'écrire comme polynôme en z .

Cherchons alors les limites des rapports

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} \quad \text{et} \quad \frac{g(z+w) - g(z)}{w}$$

On voit que

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \frac{z^2 + 2zw + w^2 - z^2}{w} = 2z + w$$

Le calcul est très simple car on utilise la multiplication et la division des nombres complexes. Lorsque w tend vers zéro (et peu importe selon quelle ligne), cela tend vers $2z$. Voyons l'autre. Posons $w = u+iv = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$\begin{aligned} \frac{g(z+w) - g(z)}{w} &= \\ &= \frac{(x+u)^2 - (y+v)^2 + i(x+u)(y+v) - x^2 + y^2 - ixy}{u+iv} = \end{aligned}$$

$$= [(2x \cos \theta + r \cos^2 \theta - 2y \sin \theta - r \sin^2 \theta) + \\ + i (x \sin \theta + y \cos \theta + r \cos \theta \sin \theta)] (\cos \theta - i \sin \theta)$$

Lorsque r tend vers zéro (θ restant fixe), cela tend vers une limite *qui dépend de θ* :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(z+w) - g(z)}{w} = \\ = [x(1 + \cos^2 \theta) - y \sin \theta \cos \theta] + i [-x \sin \theta \cos \theta + y(1 + \sin^2 \theta)]$$

Dans le cas de la fonction $g(z)$ il n'existe donc pas de limite unique lorsque w tend vers zéro ; la limite dépend de la direction θ selon laquelle w tend vers zéro. Mais bien entendu la fonction g , considérée comme fonction des deux variables réelles x et y , est dérivable et possède des dérivées partielles selon x et selon y . On remarque que *si z et w sont réels*, alors $\theta = 0$ ou π , et on trouve dans ces deux cas la même limite ; c'est seulement lorsqu'on sort de l'axe réel (θ prenant alors des valeurs autres que 0 ou π) que les limites prennent des valeurs incompatibles.

Le calcul de la limite effectué ci-dessus pour la fonction g montre qu'il ne peut pas y avoir de "dérivation algébrique" pour $g(z)$; s'il y en avait une, elle serait aussi valable pour les nombres complexes que pour les nombres réels, car les opérations telles que multiplication ou division sont formellement identiques dans les deux cas.

On appelle **fonctions analytiques** les fonctions qui, comme les polynômes ou l'exponentielle, peuvent être dérivées ou intégrées de façon purement algébrique. Toutefois ceci ne constitue pas encore une définition rigoureuse car, si nous pouvons donner très simplement une formule algébrique explicite de dérivation ou d'intégration pour les polynômes, ou pour la fonction exponentielle, nous ne savons pas encore ce que peut être une telle dérivation ou intégration algébrique *en général*.

Nous allons présenter trois approches, qui s'avéreront équivalentes :

1. la dérivabilité complexe ;
2. l'intégration complexe ;
3. le développement en série entière.

2. Fonctions analytiques.

La dérivabilité complexe est la propriété évoquée dans la section précédente, où nous avons vu que les polynômes la possèdent. On peut proposer la définition :

Définition 1 : On dira qu'une fonction $f(z)$ de la variable complexe z , à valeurs également complexes, et dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans D est *analytique* dans un domaine D si en tout point z de D le rapport $[f(z+w) - f(z)] / w$ tend vers une limite unique lorsque w tend vers zéro.

Remarque : Dans cette définition, nous avons exigé que les dérivées partielles soient continues, afin de pouvoir appliquer tranquillement la formule de Green (qui, rappelons-le, a été démontrée dans le cas où les dérivées partielles sont continues); mais en réalité il n'existe aucune fonction f telle que $[f(z+w) - f(z)] / w$ tende vers une limite unique lorsque w tend vers zéro et dont les dérivées partielles soient discontinues (cela se démontre).

Les mathématiciens s'efforcent généralement de faire le minimum d'hypothèses, et tout particulièrement d'éviter les hypothèses non absolument nécessaires. Cependant, dans les cas pratiques qu'on rencontrera, la continuité des dérivées partielles sera toujours évidente, de sorte que l'hypothèse inutile de la définition ci-dessus ne sera *jamais* gênante.

Selon cette définition, les polynômes sont analytiques, mais la fonction $g(x+iy) = x^2 - y^2 + ixy$ ne l'est pas (voir §1).

Les polynômes ne sont pas seulement algébriquement dérivables, ils sont aussi algébriquement intégrables. Cela implique qu'une expression différentielle $P(z)dz$ est intégrable par quadrature. En effet, soit l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} P(z) dz$ le long d'un chemin γ paramétré par $t \mapsto z(t)$ ($0 < t < T$). L'intégrale vaut alors

$$\int_0^T P(z(t)) z'(t) dt$$

et la fonction $t \mapsto P(z(t)) z'(t)$ est bien la dérivée de la fonction composée $t \mapsto Q(z(t))$ (où Q est la primitive de P), de sorte que l'intégrale se calcule par quadrature :

$$\int_{\gamma} P(z) dz = Q(z_1) - Q(z_0)$$

avec $z_1 = z(T)$ et $z_0 = z(0)$. D'après ce qui a été vu en **I.8** (relations **I.8.1**, **I.8.2**, ou **I.8.4**) on devrait donc avoir $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0$ pour tout polynôme.

Il est facile de le vérifier directement; il suffit d'ailleurs de le vérifier pour les fonctions $z \mapsto z^n$. Or $\frac{\partial (x+iy)^n}{\partial x} = n(x+iy)^{n-1}$ et $\frac{\partial (x+iy)^n}{\partial y} = n(x+iy)^{n-1} i$, ce qui montre bien que $\frac{\partial (x+iy)^n}{\partial y} = i \frac{\partial (x+iy)^n}{\partial x}$, autrement dit $\frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0$.

D'après **I.8** cette relation doit être nécessairement satisfaite non seulement pour les polynômes, mais pour toute fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ dont l'intégrale $\int f(z) dz$ sur tout lacet est nulle.

Si on sépare la partie réelle de la partie imaginaire, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, cette relation s'écrit sous la forme équivalente

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ces relations sont appelées *relations de Cauchy et Riemann*. Les relations I.8.1, I.8.2, et I.8.4 sont plus générales car elles concernent des expressions différentielles de la forme $f(z) dz + g(z) d\bar{z}$; mais dans le cas particulier où $g = 0$, elles se réduisent à 2.1. En reprenant I.8, on peut résumer :

Une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ de la variable $z = x + iy$ ayant la propriété que $\int f(z) dz$ est nulle sur tout chemin fermé du domaine Ω , vérifie nécessairement dans Ω les relations de Cauchy et Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Si Ω est un domaine sans trous, ou plus généralement si le chemin fermé entoure une région sans trou de Ω , on a aussi la réciproque.

Rappelons une dernière fois que *dans la logique du présent exposé*, la réciproque mentionnée ci-dessus ne serait vraie en toute rigueur que sous l'hypothèse (en fait inutile) que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont continues.

Voyons maintenant à quelle condition une fonction $f(z)$ de la variable complexe est dérivable d'une manière analogue à la dérivation purement algébrique des polynômes. Nous avons vu en 1 que la dérivation algébrique des polynômes entraînait que la limite du rapport $[f(z+h) - f(z)]/h$ était la même quelle que soit la direction selon laquelle h tend vers zéro. La propriété que nous recherchons est donc celle-là. Supposons données les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$. Leur existence est évidemment préalable au problème posé. Un développement limité de $u(x+k, y+l)$ et de $v(x+k, y+l)$ nous donne :

$$\begin{aligned} u(x+k, y+l) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} k + \frac{\partial u}{\partial y} l + \text{reste}_u \\ v(x+k, y+l) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} k + \frac{\partial v}{\partial y} l + \text{reste}_v \end{aligned}$$

les restes étant de la forme $(k + il)\varepsilon(k, l)$ où $\varepsilon(k, l)$ tend vers zéro lorsque

Fonctions analytiques

$k + il$ tend vers zéro. Si on pose $h = k + il$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{[u(x+k, y+l) - u(x, y)] + i[v(x+k, y+l) - v(x, y)]}{k + il} \\ &= \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x} k + \frac{\partial u}{\partial y} l\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} k + \frac{\partial v}{\partial y} l\right]}{k + il} + \varepsilon(h) \end{aligned}$$

La partie provenant des restes, $\varepsilon(k, l)$, tend vers zéro ; par conséquent le terme principal déterminera la limite de notre expression lorsque h tend vers zéro. Exprimons le en coordonnées trigonométriques r, θ telles que $h = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} r \sin \theta\right]}{r} \cdot (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta\right] + \\ &\quad + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta\right] \end{aligned}$$

On peut encore le transformer en utilisant les relations trigonométriques $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$, $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}[\sin 2\theta]$, et $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \sin 2\theta \right] + \\ &\quad + \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sin 2\theta \right] \end{aligned} \quad (2.2.)$$

Cette expression est la limite, lorsque θ reste fixe et que r tend vers zéro, du rapport $(f(z+h) - f(z))/h$; pour qu'elle soit indépendante de θ , il faut et il suffit que les coefficients de $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$ soient nuls, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

où on reconnaît les relations de Cauchy et Riemann déjà rencontrées.

On voit par la même occasion que **réciiproquement**, si les relations de Cauchy et Riemann sont satisfaites, alors les coefficients de $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$ dans 2.2 seront nuls, donc la limite sera toujours

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3.)$$

quel que soit le comportement de θ : si h tend vers zéro selon une trajectoire absolument arbitraire, θ pourra varier arbitrairement sans que cela change

quoi que ce soit à la limite ci-dessus, puisque (lorsque les relations de Cauchy et Riemann sont satisfaites) l'expression 2.2 ne dépend pas de θ .

On comprend maintenant aussi la nécessité du facteur 2 dans I.8.3 : il a été introduit pour que l'expression purement conventionnelle $\frac{\partial f}{\partial z}$ coïncide avec la limite de $[f(z+h) - f(z)]/h$

Ainsi, dans un domaine Ω , les conditions sur $f(z)$ pour que d'une part, le rapport $[f(z+h) - f(z)]/h$ ait en tout point z de Ω une limite quand h tend vers zéro dans le plan complexe, et d'autre part que l'intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ soit nulle sur tout lacet de Ω (du moins à tout lacet qui n'entoure pas de trou) sont identiques. Il est donc équivalent, pour une fonction $f(z)$ de la variable complexe définie sur Ω :

— que $[f(z+h) - f(z)]/h$ ait en tout point z de Ω une limite quand h tend vers zéro dans le plan complexe, qu'on appelle la dérivée de f et qu'on note $f'(z)$;

— que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ sur tout lacet qui n'entoure pas un trou, c'est-à-dire une région où la fonction f présente des discontinuités .

On appelle *analytiques* ou *holomorphes* les fonctions qui satisfont ces conditions.

Il est souvent utile d'avoir les relations de Cauchy et Riemann en coordonnées polaires. Pour les trouver, partons de la formule générale du changement de coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y}$$

Puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{r \partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

Si on tient compte de 2.1. on voit que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{r \partial \theta} \quad (2.5.)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{r \partial \theta} &= \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right] + i \left[-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{r \partial \theta} &= \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right] - i \left[-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Fonctions analytiques

$$= e^{+i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

ce qui donne l'expression en coordonnées polaires des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{r \partial \theta} \right) \quad \text{et} \quad e^{+i\theta} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{r \partial \theta} \right) \quad (2.6.)$$

Lorsque la fonction f satisfait les conditions de Cauchy et Riemann, on a pour $f'(z) = \partial f / \partial z$ les expressions plus simples :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = -i e^{-i\theta} \frac{\partial f}{r \partial \theta} \quad (2.7)$$

Pour résumer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le rapport $[f(z+h) - f(z)]/h$ ait une limite lorsque h tend vers zéro dans le plan complexe est que la fonction f satisfasse les relations de Cauchy et Riemann.

Lorsqu'il en est ainsi, on note $f'(z)$ cette limite; celle-ci est alors donnée par l'une des expressions suivantes :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = -i e^{-i\theta} \frac{\partial f}{r \partial \theta}$$

Comme annoncé plus haut, nous nous proposons maintenant de montrer que ces conditions sont encore équivalentes à une troisième, à savoir que la fonction $f(z)$ est égale à la somme d'une série entière convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, les a_n étant des nombres complexes. Nous avons vu que les polynômes, ainsi que la fonction $\exp(z)$ sont analytiques, et cela résultait de la possibilité d'une dérivation algébrique. Or, le cas le plus général où une dérivation algébrique est possible est celui de la série entière, qui comme les polynômes est une somme (convergente) de fonctions du type $(z - z_0)^n$. Pour cela il nous faut étudier préalablement les propriétés de ces séries entières.

3. Séries entières convergentes.

La forme la plus générale de série entière est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3.1)$$

Les a_n sont des nombres complexes appelés *coefficients* de la série, et z_0 un nombre complexe appelé le *centre* de la série.

Les séries entières complexes ont la propriété remarquable de toujours converger dans un disque ; sous forme mathématique précise, cette propriété s'énonce comme suit :

Théorème 1. (Niels H. Abel) *Pour une série entière (3.1), il existe toujours un nombre réel $R \geq 0$ (qui dépend de la suite a_n) tel que*

- si $|z - z_0| < R$, la série converge ;
- si $|z - z_0| > R$, la série diverge ;
- si $|z - z_0| = R$, on ne peut rien dire.

Démonstration. Soit w un nombre tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n w^n = 0$. Alors, si $|z - z_0| < |w|$, la série converge (N.B. l'hypothèse $|z - z_0| < |w|$ devient vide si $w = 0$). En effet, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n w^n = 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|a_n w^n| \leq 1$. D'autre part, si $|z - z_0| < |w|$, le rapport $r = |z - z_0| / |w|$ est < 1 . Donc (pour $n \geq n_0$) $|a_n (z - z_0)^n| = |a_n w^n| r^n \leq r^n$. Or la série $\sum r^n$ est convergente, et majore en module la série 3.1 considérée.

Considérons maintenant les nombres réels positifs t tels que $\sum_{n \geq 0} |a_n| t^n$ converge. Ces nombres forment un intervalle, car si t_0 est l'un d'eux, tout $t \leq t_0$ en fait partie aussi d'après ce qui précède. Cet intervalle possède une borne supérieure R (éventuellement infinie) qui est le nombre R annoncé par le théorème. En effet, si $|z - z_0| < R$ la série converge d'après la première partie de la démonstration, car il suffit de prendre pour w un nombre tel que $|z - z_0| < |w| < R$: puisque $|w| < R$, $|w|$ fait partie de l'intervalle des t tels que $\sum_{n \geq 0} |a_n| t^n$ converge, donc d'après la première partie de la démonstration $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ converge aussi. Inversement, supposons que $|z - z_0| > R$. Si $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ convergerait, cela entraînerait d'après la première partie de la démonstration, que si $|w| < |z - z_0|$, $\sum_{n \geq 0} a_n |w|^n$ converge ; or si on prend w tel que $R < |w| < |z - z_0|$, on aurait un nombre $t = |w|$ pour lequel la série converge et qui serait supérieur à la borne supérieure R , ce qui est absurde. CQFD

Ce théorème signifie que le domaine de convergence d'une série entière est forcément un disque, avec éventuellement des lacunes sur la frontière. Cela implique par exemple, que si une série entière converge sur un carré, ou sur un triangle, elle convergera forcément sur un domaine plus gros (au moins le disque circonscrit).

Le disque de centre z_0 et de rayon R est le plus gros disque à l'intérieur duquel la série $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ converge ; on l'appelle le *disque de convergence*, et le nombre R est appelé le *rayon de convergence*.

Il n'existe aucune règle générale concernant la convergence de la série sur la frontière de ce disque. On donne traditionnellement les exemples suivants,

qui ont tous pour disque de convergence le disque de centre 0 et de rayon 1 ; ils ne diffèrent que pour ce qui se passe sur le cercle $|z| = 1$.

exemple 1 : la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge en tout point du cercle frontière.

exemple 2 : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle frontière ; elle est même *absolument* convergente en tout point du cercle.

exemple 3 : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} z^n}{n}$, où $[\sqrt{n}]$ désigne la partie entière de la racine carrée de n , est semi-convergente en tout point du cercle frontière, mais n'est *absolument* convergente en *aucun* point de ce cercle.

exemple 4 : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente en tout point du cercle frontière excepté $z = 1$ où elle diverge.

exemple 5 : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n z^n}{n}$, où d_n désigne le nombre d'entiers dont la factorielle est un diviseur de n , diverge en tout point d'argument rationnel (en degrés) du cercle frontière, et converge en certains points irrationnels connus.

La tradition a accumulé d'innombrables exemples (plus compliqués) illustrant les différents phénomènes qui peuvent se produire sur le bord du disque de convergence. Il faut toutefois éviter le malentendu suivant : **le fait que la série diverge sur le cercle ne signifie pas que la fonction qu'elle définit n'est pas prolongeable à travers le cercle et au-delà** ; ainsi dans l'exemple 1, la somme de la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ est $1/(1-z)$ à l'intérieur du disque, et bien que la série diverge sur le cercle frontière, cette fonction s'y prolonge (excepté en $z = 1$). Nous reparlerons de cela plus loin quand nous aborderons les problèmes de prolongements.

Les séries entières sont en quelque sorte des polynômes de degré infini. Elles conservent un bon nombre de propriétés des polynômes, parfois sous une forme un peu dégradée. Par exemple, un polynôme est forcément convergent (et donc défini) dans tout le plan, alors qu'une série ne converge que dans un disque ; toutefois, il peut arriver que le rayon de convergence soit infini : c'est le cas pour la fonction $\exp(z)$.

Nous donnons ci-après les principales propriétés des séries entières, sous la forme d'une petite liste de théorèmes.

Théorème 2. (Hadamard, 1888) *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ est donné par*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Rappelons rapidement la définition de \limsup . Si u_n est une suite absolument quelconque de nombres réels, alors la suite $v_n = \sup_{k \geq n} u_k$ est décroissante (et la suite

$w_n = \inf_{k \geq n} u_k$ est croissante). Si v_n est minorée, elle converge vers une limite appelée par définition $\limsup u_n$; sinon on pose $\limsup u_n = -\infty$. Le cas de \liminf est analogue.

N.B. si u_n est croissante, v_n sera constante; exemples: a) $u_n = \sqrt[n]{0.5} \implies v_n = 1 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$; b) $u_n = n \implies v_n = +\infty \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. Pour alléger les notations, travaillons dans le cas où $z_0 = 0$. La limite supérieure de $u_n = |a_n|^{1/n}$ est la limite tout court de la suite décroissante et minorée $v_n = \sup_{k \geq n} u_k$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $n \geq n_\varepsilon \implies 1/R - \varepsilon < v_n < 1/R + \varepsilon$. Or v_n est la borne supérieure des $u_k = |a_n|^{1/k}$ pour $k \geq n$, ce qui veut dire:

— d'une part, que $\forall k \geq n, u_k \leq v_n < 1/R + \varepsilon$; ainsi $\forall k \geq n_\varepsilon, u_k < 1/R + \varepsilon$;

— d'autre part, que parmi les u_k de rang $k \geq n$, il y en aura toujours au moins un aussi proche qu'on voudra de v_n , et cela quelque soit n ; c'est-à-dire $\forall n, \exists k \geq n, u_k \geq v_n - \varepsilon > 1/R - 2\varepsilon$; on peut encore exprimer cela en disant que pour tout ε , il y aura une infinité de u_k pour lesquels $u_k > 1/R - 2\varepsilon$.

En regroupant ces deux aspects de la limite, on voit que pour tout ε ,

- a) il existera n_ε tel que $\forall k \geq n_\varepsilon, u_k < 1/R + \varepsilon$;
- b) pour une infinité de k on aura $u_k > 1/R - 2\varepsilon$.

De a) on déduit que $|a_n z^n| < (|z|/R + \varepsilon|z|)^n < (|z|/R + \varepsilon R)^n$. Mais puisque $|z|/R < 1$ et que ε peut être pris aussi petit qu'on veut, prenons ε tel que $\alpha = |z|/R + \varepsilon R < 1$. Tous les termes de la série à partir du rang n_ε sont donc majorés (en module) par α^n , avec $\alpha < 1$. Cela prouve déjà que $\sum |a_n z^n|$ converge. Ainsi :

$$|z| < R \implies \sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \text{ converge}$$

Mais par là on a seulement prouvé que R est inférieur ou égal au rayon de convergence. Pour s'assurer qu'il est bien *égal* au rayon de convergence, il reste à vérifier que la série diverge si $|z| > R$; cela se vérifie de façon analogue, en utilisant cette fois b) : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une infinité de n tels que $|a_n|^{1/n} > 1/R - 2\varepsilon$. Par conséquent, pour une infinité de n , $|a_n z^n| > (|z|/R - \varepsilon|z|)^n > (|z|/R - 2\varepsilon R)^n$. Puisque $|z|/R > 1$ et que ε peut être pris aussi petit qu'on veut, prenons ε tel que $\beta = |z|/R - 2\varepsilon R > 1$. Il y a donc une infinité de termes de la série qui sont minorés (en module) par β^n avec $\beta > 1$, ce qui signifie bien qu'elle diverge. CQFD

Théorème 3. *Sur un disque fermé Ω inclus dans l'intérieur du disque de convergence, la série entière est normalement convergente, c'est-à-dire uniformément majorée par une série numérique convergente.*

Fonctions analytiques

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'il existe un nombre A tel que $0 < A < R$, et tel que Ω soit contenu dans le disque de centre z_0 et de rayon A . Alors tout z de Ω vérifie aussi $|z - z_0| < A$, et la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ est donc uniformément majorée dans Ω par la série numérique $\sum |a_n| A^n$, qui évidemment converge puisque $A < R$.

Théorème 4. On peut intégrer et dériver terme par terme une série entière: si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ (définie à l'intérieur du disque de convergence), alors f est analytique dans ce disque et $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. La série dérivée a le même rayon de convergence, et on peut dériver à nouveau :

$$\begin{aligned} f''(z) &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2} \\ f'''(z) &= \sum_{n \geq 3} n(n-1)(n-2) a_n (z - z_0)^{n-3} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Cette propriété exprime l'existence d'une dérivation purement algébrique, analogue à celle des polynômes; ainsi la somme d'une série entière donne, dans le domaine constitué par l'intérieur du disque de convergence, une fonction analytique.

Démonstration. L'intégration terme par terme ne pose pas de problème en vertu du théorème 3: une série normalement convergente peut toujours être intégrée terme par terme (on le vérifie immédiatement en utilisant l'inégalité de la moyenne). C'est la dérivation terme par terme qui est une propriété remarquable des séries entières, et que les autres sortes de séries ne possèdent pas: essayer par exemple avec la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \cos(n^2 x)$.

En utilisant le théorème 2, il est facile de vérifier que la série dérivée a le même rayon de convergence que la série initiale: en effet, $|n a_n|^{1/n} = n^{1/n} \cdot |a_n|^{1/n}$, et $n^{1/n}$ tend vers 1.

Il est peut-être nécessaire ici de rafraîchir encore quelque peu la mémoire du lecteur à propos des \limsup et \liminf . La proposition suivante est vraie :

Soient deux suites u_n et v_n , dont l'une (disons u_n) a une limite; alors :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n$$

On la démontre aisément en recourant directement aux définitions (Soit $\varepsilon > 0 \dots$)

Par contre, lorsqu'aucune des deux suites n'a de limite, l'égalité $\limsup u_n \cdot v_n = \limsup u_n \cdot \limsup v_n$ est généralement fausse, comme le montre le contre-exemple

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair;} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair;} \end{cases} \quad u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair;} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair;} \end{cases}$$

Suite de la démonstration du théorème 4. Prenons toujours, pour alléger l'écriture, $z_0 = 0$. On peut dire jusqu'à présent que la série initiale $f(z) = \sum a_n z^n$ et la série dérivée $g(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ définissent chacune une fonction analytique dans le disque de convergence. Mais il n'est pas encore prouvé que $g = f'$, c'est-à-dire que $g(z) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(z+h) - f(z)] / h$. Cela peut se faire directement comme suit, quoique généralement les auteurs le déduisent de la formule intégrale de Cauchy que nous verrons au paragraphe suivant ; une démonstration directe, "à la main", a toutefois l'avantage de mieux montrer les raisons très simples qui font que ça marche.

On peut écrire :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right] \quad (3.2.)$$

Comme dans le cas des polynômes, le problème se ramène à des fonctions z^n . Pour analyser les expressions correspondantes, on utilise la formule du binôme : on sait que $(z+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k h^{n-k}$, d'où

$$(z+h)^n - z^n - n h z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k z^k h^{n-k} \quad (3.3.)$$

Comme la somme dans le membre de droite ne contient pas de puissance de h inférieure à 2, on peut mettre h^2 en facteur, ce qui donne

$$(z+h)^n - z^n - n h z^{n-1} = h^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k z^k h^{n-2-k} \quad (3.4.)$$

En utilisant l'inégalité du triangle, on peut majorer le module du second membre par

$$|h|^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k |z|^k |h|^{n-2-k} \quad (3.5.)$$

Enfin, on remarque la relation

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-1-k)} \cdot \frac{(n-2)!}{k! (n-2-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-1-k)} \cdot C_{n-2}^k \end{aligned} \quad (3.6.)$$

Dans la somme 3.5 l'indice k varie entre 0 et $n-2$, donc le dénominateur $(n-k)(n-1-k)$ dans 3.6 reste toujours ≥ 1 . Par conséquent il résulte de 3.6 que

$$C_n^k \leq n(n-1) C_{n-2}^k \quad (3.7.)$$

Fonctions analytiques

Si on applique cette inégalité à 3.5 (qui majorait 3.3), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1) C_{n-2}^k |z|^k |h|^{n-2-k} = \\ &= |h| n(n-1) (|z| + |h|)^{n-2} \end{aligned} \quad (3.8.)$$

Enfin, reportant cela dans 3.2 :

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq |h| \sum_{n \geq 0} n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2} \quad (3.9.)$$

On peut maintenant conclure : puisqu'on fait tendre h vers zéro, on peut le prendre suffisamment petit pour que $b = |z| + |h| < R$ (si $|z| < R$ on peut toujours insérer $|h|$ entre $|z|$ et R). Alors la série de 3.9, $\sum n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2}$, est uniformément majorée par la série numérique $\sum n(n-1) |a_n| b^{n-2}$ qui converge, et le facteur $|h|$ fait tendre le second membre de l'inégalité 3.9 vers zéro, ce qui montre que la limite de $[f(z+h) - f(z)]/h$ est bien $g(z)$

CQFD

Commentaire sur cette démonstration. Elle est plus longue que celles qui utiliseraient des résultats ultérieurs. Mais elle est plus transparente : elle montre bien qu'avec les séries entières, tout se passe comme pour les polynômes ; le choix fait ici de recourir à la formule du binôme montre que c'est bien le caractère purement algébrique de la dérivation d'une série entière qui rend tout cela possible. Toutefois la définition donnée en section 2 d'une fonction analytique ne fait pas appel aux opérations algébriques (addition, multiplication, élévation à une puissance) qui s'étendent à l'identique des réels aux complexes. Elle passe par la notion de limite qui, comme nous l'avons fait remarquer, est très différente dans le plan complexe (qui a deux dimensions). C'est pourquoi la question essentielle reste encore sans réponse : une fonction qui vérifie simplement la propriété que $[f(z+h) - f(z)]/h$ possède une limite lorsque h (complexe) tend vers zéro a-t-elle forcément toujours une dérivée algébrique analogue aux polynômes ? La réponse à cette question est OUI : pour le prouver il suffit d'établir que toute fonction ayant cette propriété est nécessairement la somme d'une série entière, qui se dérive alors algébriquement.

C'est ce que nous allons étudier dans le paragraphe suivant.

4. Théorie de Cauchy.

La présente section expose les résultats les plus fondamentaux de la théorie des fonctions analytiques. La tradition l'appelle *théorie de Cauchy*

en hommage à celui qui a eu la première idée⁽¹⁾, et qui ensuite en a établi les résultats essentiels. Mais la théorie transmise par la tradition, et que nous résumons ici, est très différente de l'approche initiale de Cauchy et est le produit d'une lente maturation qui s'étend sur un siècle. La notion d'intégrale curviligne est absente dans le mémoire de 1814, seules y apparaissent des intégrales simples sur un intervalle réel ou doubles (par contre le passage par les valeurs complexes y est essentiel).

Toutefois la clé de la théorie de 1814 est bien la relation entre intégrale double sur un domaine et intégrale curviligne sur le bord de ce domaine. La formule de Green que nous avons présentée au chapitre **I** n'était pas encore connue, et la lecture de son mémoire montre bien que la relation *générale* entre intégrale double sur un domaine et intégrale curviligne sur le bord de ce domaine n'était pas perçue (c'est une idée qui vient de la théorie électromagnétique développée par Ampère et Green un peu plus tard). Pourtant Cauchy l'a bien perçue indirectement, sous une forme plus spéciale : lorsque le domaine de l'intégrale double est un rectangle parallèle aux axes.

Dans ce premier mémoire, il ne parle pas encore d'intégrale de contour sur le périmètre du rectangle, mais il utilise de manière essentielle, quoique dans un cas particulier, la relation exprimée par la formule de Green, en traduisant l'intégrale sur le périmètre du rectangle par quatre intégrales simples (une pour chacun des quatre côtés du rectangle).

Ajoutons que le contenu du mémoire est présenté comme une méthode nouvelle pour calculer des intégrales définies et non comme l'exposé d'une théorie des fonctions de la variable complexe ; l'idée générale de fonction analytique n'y apparaît pas. Nous avons vu au chapitre **I**, section **2**, que l'intégrale double de la fonction $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ sur le carré $[-1, +1] \times [-1, +1]$ ne donnait pas la même valeur selon qu'on intègre d'abord en x puis en y ou inversement ; la différence entre les deux valeurs est 2π , qui est justement l'intégrale sur le bord du carré de l'expression différentielle $(-ydx + xdy)/(x^2 + y^2)$; cette dernière expression se trouve être la partie imaginaire de $dz/z = (dx + idy)/(x + iy)$. Dans le mémoire de 1814, Cauchy cherchait un moyen de prédire la différence entre les deux manières de calculer une intégrale double lorsque la fonction à intégrer devient infinie et a trouvé que, pour un rectangle, cette différence était ce que Green a appelé plus tard (1827) l'intégrale curviligne sur le bord. Cauchy a par la suite approfondi ce travail dans un livre publié en 1822,

⁽¹⁾ **Augustin-Louis Cauchy** *Mémoire sur les intégrales définies* (lu à l'Institut le 22 août 1814, imprimé en 1827). On peut le trouver dans *Œuvres complètes de Cauchy*, tome I (1^{re} série) Gauthier-Villars, Paris, 1882, page 329.

“*Leçons de calcul infinitésimal*”, puis dans un article paru en 1826, “*De l’influence que peut avoir, sur la valeur d’une intégrale double, l’ordre dans lequel on effectue les intégrations*”⁽²⁾. C’est donc en cherchant un moyen de prédire la différence entre les deux manières de calculer une intégrale double singulière que Cauchy a peu à peu découvert les propriétés des fonctions analytiques et la théorie qui porte son nom.

La présentation traditionnelle de la théorie de Cauchy, que nous suivons ici, est due à la postérité, notamment à Bernhard Riemann qui a soutenu sa thèse de doctorat sur ce sujet, en 1851 à Göttingen. Les travaux de Cauchy sont très calculatoires et riches en formules, mais les concepts généraux qui rendent la théorie plus claire ont été introduits plus tard ; ainsi Riemann a formulé les résultats en termes d’intégrales curvilignes ; la notion d’homologie des lacets a été fournie par Henri Poincaré.

La *formule de Cauchy* donnée ci-dessous en termes d’intégrales sur un lacet et son application au développement en série sont des résultats publiés par Cauchy en 1831.

Théorème 5. Soit $f(z)$ une fonction analytique de la variable complexe z dans un domaine Ω (avec ou sans trous). Pour tout lacet γ homologiquement équivalent dans $\Omega - \{z\}$ à un cercle de centre z et de rayon assez petit pour que le disque correspondant soit contenu dans Ω , on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (4.1)$$

L’égalité 4.1 s’appelle *formule de Cauchy*. On remarquera que la fonction sous le signe \int , $w \mapsto f(w)/(w - z)$, est analytique dans $\Omega - \{z\}$; elle devient singulière en $w = z$ et c’est pourquoi son intégration le long de γ ne donne pas zéro.

Démonstration. Puisque la fonction $w \mapsto f(w)/(w - z)$ sous le signe d’intégration est analytique dans $\Omega - \{z\}$, il suffit d’établir la relation 4.1 sur un cercle assez petit de centre z . Paramétrons ce cercle en coordonnées polaires : $w = z + re^{i\theta}$. On obtient (par définition des intégrales curvilignes) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

⁽²⁾ Cauchy avait épousé la fille d’un éditeur (Guillaume de Bure) qui lui imprimait tout, et il publiait ainsi une sorte de périodique, les *Exercices de mathématiques*, dont cet article fait partie.

Les cercles de centre z et de rayon assez petit étant forcément homologiquement équivalents, la valeur de l'intégrale ne peut pas dépendre de r , et est donc égale à sa limite quand r tend vers zéro. Or f est analytique, donc continue, ce qui entraîne que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta = f(z) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = f(z)$$

Cette égalité est bien la formule de Cauchy annoncée.

Cette formule de Cauchy permet de montrer qu'une fonction analytique, c'est-à-dire une fonction qui satisfait aux relations de Cauchy et Riemann, est nécessairement égale (dans un certain disque) à la somme d'une série entière. De façon précise :

Théorème 6. *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine Ω (avec ou sans trous), soit z_0 un point de Ω et R_0 le rayon du plus grand disque ouvert de centre z_0 qui soit contenu dans Ω (R_0 est la distance de z_0 à la frontière de Ω). Alors la série*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (4.2)$$

est convergente dans le disque de centre z_0 et de rayon R_0 (c'est-à-dire que son rayon de convergence est $\geq R_0$), et sa somme est égale à $f(z)$ dans ce disque.

Démonstration. On n'avait pas besoin de la théorie des fonctions analytiques pour savoir que la fonction $1/(w - z)$ est la somme d'une série entière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \\ &= \frac{1}{w - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left[\frac{z - z_0}{w - z_0} \right]^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (4.3.)$$

Dans la formule de Cauchy 4.1, remplaçons sous le signe \int le facteur $1/(w - z)$ par cette série; cela donne après l'interversion de \sum et de \int (qui est correcte le long d'un lacet γ égal au cercle de centre z_0 et de rayon $r > |z - z_0|$, puisque la série géométrique 4.3 converge pour $|w - z_0| > |z - z_0|$, donc en particulier le long du cercle $|w - z_0| = r$) :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \cdot (z - z_0)^n \quad (4.4.)$$

Fonctions analytiques

Remarque : la condition $r > |z - z_0|$ sur le lacet γ signifie que le point z doit être à l'intérieur du cercle γ ; mais ensuite, les intégrales 4.2 prennent évidemment la même valeur sur n'importe quel autre lacet homologiquement équivalent (dans $\Omega - \{z\}$) à ce cercle. Cette condition qui permet l'échange de \int et \sum dans la série géométrique qui développe $f(w)/(z - w)$, nous dit aussi pour quels z cet échange est possible, et par conséquent pour quels z l'égalité entre $f(z)$ et la somme de la série a lieu : il faut en effet que le cercle γ soit contenu dans Ω et entoure le point z , et un tel cercle ne peut être trouvé que si $|z - z_0| < R_0$: son rayon r sera tel que $|z - z_0| < r < R_0$.

On a ainsi montré que $f(z)$ est bien la somme d'une série entière convergente dans le disque ouvert $|z - z_0| < R_0$.

On déduit du théorème 6 un grand nombre de corollaires qui expriment les propriétés remarquables des fonctions analytiques.

Corollaire 6a. *Les coefficients a_n de 4.2 vérifient les inégalités*

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$$

où M_r est la valeur maximum prise par la fonction $|f(z)|$ sur le cercle $|z - z_0| = r$.

Il suffit d'utiliser l'inégalité de la moyenne pour les intégrales 4.2 : en effet, en les paramétrant par $w = z_0 + re^{i\theta}$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta$$

L'inégalité de la moyenne donne alors :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_r}{r^n} d\theta = \frac{M_r}{r^n} \quad (4.5.)$$

Ces inégalités sur les coefficients sont appelées *inégalités de Cauchy*.

On déduit de ce corollaire une propriété importante des fonctions analytiques, qui généralise une propriété connue des polynômes : une fonction analytique dans tout le plan ne peut pas être bornée (à moins d'être constante). En effet, si elle était bornée dans tout le plan par une constante M , celle-ci serait supérieure à tous les M_r ; on aurait donc d'après les inégalités de Cauchy $|a_n| \leq M/r^n$ pour tout r , et donc (en faisant tendre r vers l'infini) on aurait $a_n = 0$ pour tout $n > 0$. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Liouville*.

On peut aussi en déduire que $|a_n|^{1/n} \leq M_r^{1/n}/r$; cela montre que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq 1/r$, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} M_r^{1/n} = 1$. Mais cette inégalité

signifie simplement que le rayon de convergence de la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ est $\geq R_0$, ce qui était déjà contenu dans le théorème 6.

Corollaire 6b. (principe du maximum) *Si $f(z)$ est une fonction analytique, $|f(z)|$ ne peut pas avoir de maximum local ; il en est de même de $\Re f$ et $\Im f$ (parties réelle et imaginaire).*

N.B. On entend ici par “maximum” une valeur *strictement* supérieure aux valeurs prises tout autour. Toutefois, le même argument que dans la démonstration ci-dessous montre que si la fonction $f(z)$ est analytique et que $|f(z)|$ reste constant dans un voisinage du maximum, alors $f(z)$ est elle-même constante.

Démonstration. S’il existait un point z_0 dans le domaine Ω où f est analytique, tel que $|f(z)|$ y devient maximum, cela voudrait dire qu’il existe un cercle de centre z_0 le long duquel $|f(z)|$ serait partout strictement inférieur à $|f(z_0)|$. D’après la formule de Cauchy on aurait

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

et l’inégalité de la moyenne donnerait

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

c’est-à-dire que $|f(z_0)|$ serait inférieur à la moyenne de $|f(z)|$ sur ledit cercle ; cela contredit évidemment que $|f(z_0)|$ soit un maximum.

Pour la partie réelle et la partie imaginaire, on se ramène au cas précédent en considérant les fonctions $\exp(f(z))$ et $\exp(-if(z))$; celles-ci sont évidemment analytiques si f l’est, et $|\exp(f(z))| = \exp(\Re f)$, $|\exp(-if(z))| = \exp(\Im f)$.

Corollaire 6c. *Soit f une fonction sur un domaine Ω supposée a priori une fois continuellement⁽³⁾ dérivable (c’est-à-dire qu’on suppose a priori que seules les dérivées partielles au premier ordre existent et sont continues). Si ces dérivées partielles vérifient les relations de Cauchy et Riemann dans le domaine, alors elles sont à leur tour dérivables et la fonction f est en fait infiniment dérivable.*

Démonstration. Puisque la fonction f vérifie les relations de Cauchy et Riemann, elle est analytique, donc égale à une série entière dans un disque ; or une série entière peut être dérivée autant de fois qu’on veut (théorème 4), donc la fonction est infiniment dérivable dans ce disque. En outre, pour

⁽³⁾ Conformément à un choix d’exposition expliqué au chapitre **I**, nous faisons l’hypothèse que les dérivées partielles sont continues car cela simplifie les démonstrations sans nuire aux applications utiles ; mais en fait cette hypothèse pourrait se déduire des autres.

Fonctions analytiques

tout point z_0 de Ω on a une série entière qui converge dans un disque de centre z_0 et contenu dans Ω . On recouvre ainsi la totalité du domaine.

Remarque importante. La fin de cette démonstration fait appel à un recouvrement de Ω par des disques. Ce point est essentiel, et sous-tend de nombreux aspects de la théorie des fonctions analytiques, comme on le verra. Donnons-en une idée plus concrète sur l'exemple de la fonction $f(z) = 1/z$. Celle-ci est analytique sur le domaine $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$. Soit z_0 un point de Ω . En écrivant $1/z$ sous la forme

$$\frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(z - z_0)}{z_0}}$$

on voit immédiatement que cette fonction se développe en série géométrique; ainsi pour tout $z_0 \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \quad (4.6.)$$

Le rayon de convergence de la série est $|z_0|$: c'est le rayon du plus grand disque possible de centre z_0 qui soit contenu dans Ω . On ne peut espérer prolonger la fonction $1/z$ en dehors de Ω , puisqu'il ne reste plus que le point zéro qui est singulier. Chacune des séries 4.6 converge dans un disque qui ne couvre qu'une partie de Ω , mais en faisant varier z_0 on peut recouvrir peu à peu la totalité du domaine (il faut pour cela une infinité de disques). Voir figure 1.

Cet exemple est là pour montrer que, si le domaine maximal dans lequel une série entière converge est nécessairement un disque, le domaine maximal dans lequel une fonction est analytique n'est généralement pas un disque; le développement en série entière est possible autour d'un centre z_0 quelconque, mais celle-ci ne convergera que dans une partie du domaine.

Une fonction analytique f étant donnée, on appelle *domaine d'holomorphie* de f le plus grand domaine sur lequel on peut avoir un prolongement de f qui soit analytique. Par exemple la série entière $\sum_{n \geq 0} (z - 1)^n$ converge dans le disque de centre 1 et de rayon 1, et y définit donc une fonction analytique; mais celle-ci se prolonge au-delà et son domaine d'holomorphie est $\mathbb{C} - \{0\}$. Pourtant *le plus grand* domaine n'existe pas toujours (voir le cas de la fonction logarithme dans la section suivante)

Voici encore un corollaire **extrêmement important** du théorème 6.

Corollaire 6d (théorème des zéros isolés). *Une fonction analytique, à moins d'être la fonction identiquement nulle, ne peut s'annuler qu'en des points isolés.*

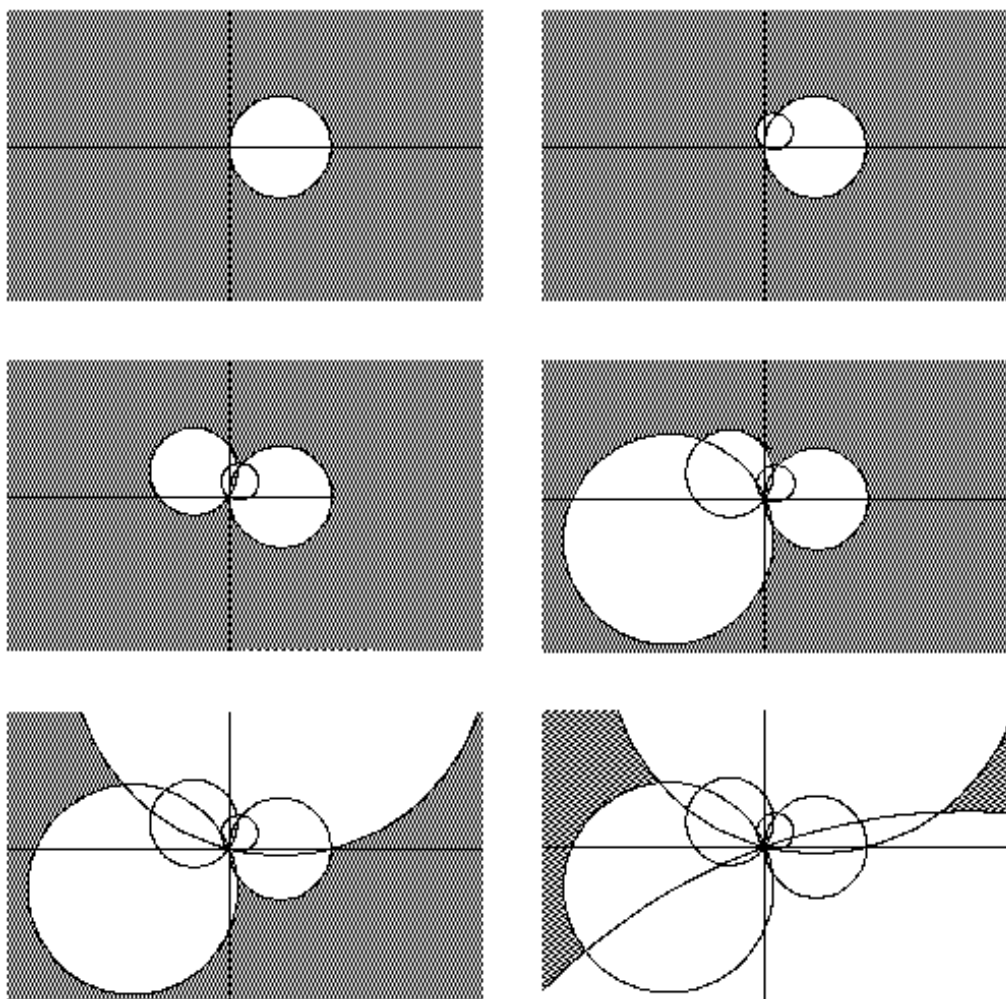


figure 1

Recouvrement progressif d'un domaine d'holomorphie
par des disques de convergence d'une série entière.

En pratique, cela signifie qu'une fonction analytique qui serait nulle sur un continuum de points serait forcément nulle partout. On va commencer par donner la démonstration de ce corollaire, puis revenir ensuite à des explications complémentaires.

Démonstration du corollaire 6d. Soit $f(z)$ une fonction analytique au voisinage d'un point z_0 où elle s'annule. D'après le théorème 6, $f(z)$ est égale, dans un disque D non vide de centre z_0 , à la somme d'une série entière qui converge dans ce disque :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.7.)$$

Fonctions analytiques

Si tous les a_n sont nuls, la fonction $f(z)$ est la constante zéro; si donc on suppose que $f(z)$ n'est pas identiquement nulle, les a_n ne sont pas tous nuls, il existe au moins un n tel que $a_n \neq 0$. Soit alors n_0 le plus petit entier pour lequel $a_{n_0} \neq 0$. Comme on a supposé $f(z_0) = 0$, n_0 est forcément ≥ 1 . On a alors :

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{n_0} (z - z_0)^{n_0} + a_{n_0+1} (z - z_0)^{n_0+1} + a_{n_0+2} (z - z_0)^{n_0+2} + \dots \\ &= (z - z_0)^{n_0} \cdot \left\{ a_{n_0} + a_{n_0+1} (z - z_0) + a_{n_0+2} (z - z_0)^2 + \dots \right\} \quad (4.8.) \end{aligned}$$

Appelons $h(z)$ l'expression entre accolades :

$$h(z) = a_{n_0} + a_{n_0+1} (z - z_0) + a_{n_0+2} (z - z_0)^2 + a_{n_0+3} (z - z_0)^3 + \dots \quad (4.9.)$$

Ceci est une série entière qui a le même rayon de convergence que 4.7 puisque ses coefficients sont simplement décalés de n_0 ; elle converge donc dans le même disque D que 4.7, ce qui signifie que la fonction $h(z)$ est analytique dans ce disque. Mais on a aussi $h(z_0) = a_{n_0} \neq 0$, qui signifie que $h(z)$ est non nulle en z_0 . $h(z)$ étant analytique, elle est en particulier continue et par conséquent va rester non nulle dans tout un voisinage de z_0 : on peut dire qu'il existe ε tel que pour $|z - z_0| < \varepsilon$, on aura $|h(z)| > \frac{1}{2}|a_{n_0}|$. Ainsi on a un disque D_ε , de rayon ε , dans lequel $h(z)$ ne s'annule pas. D'autre part le facteur $(z - z_0)^{n_0}$ est non nul partout, sauf en $z = z_0$ (car $n_0 \geq 1$).

On a ainsi montré que dans le disque D_ε , le produit $f(z) = (z - z_0)^{n_0} \cdot h(z)$ est non nul partout, sauf en $z = z_0$.

Autrement dit, si une fonction analytique $f(z)$ non identiquement nulle s'annule en un point z_0 , ce point est entouré d'un disque dans lequel il est le seul où f s'annule, ce qu'on exprime en disant que z_0 est un *zéro isolé*.

CQFD

Ce *théorème des zéros isolés* généralise aux fonctions analytiques une propriété des polynômes : on sait qu'un polynôme de degré N ne peut s'annuler qu'en au plus N points, à moins d'être le polynôme nul. Donc les zéros d'un polynôme sont en nombre fini et par conséquent forcément isolés. Si on interprète les fonctions analytiques comme des polynômes de degré infini, on comprend qu'il puisse y avoir une infinité de zéros, mais ils sont toujours isolés.

Il est par exemple impossible que les zéros d'une fonction analytique forment une suite convergente de points en incluant leur limite : ainsi la fonction $\sin(1/z)$ s'annule aux points $1/n\pi$ qui forment une suite convergente, mais elle n'est pas analytique au point limite $z = 0$. À plus forte raison, il est impossible qu'une fonction analytique s'annule sur une droite, un segment de droite, ou un arc de courbe, à moins d'être nulle partout.

Ce fait a une conséquence pratique pour les calculs, dont nous ferons fréquemment usage dans les chapitres ultérieurs. Supposons que nous ayons deux expressions, par exemple une intégrale et une série, dont nous voudrions prouver l'égalité. Si les deux expressions dépendent analytiquement d'un certain paramètre complexe z , il nous suffira de prouver l'égalité pour z réel, ou pour $0 < z < 1$, ou pour $|z| = 1$ (par exemple). En effet les points de ces ensembles ne sont pas isolés les uns des autres; la différence entre les deux expressions étant nulle sur ces ensembles de points, est alors forcément nulle partout.

Cette méthode (démontrer une formule pour certaines valeurs particulières mais non isolées de z , puis en déduire qu'elle est vraie pour tout z complexe) est souvent désignée sous le nom de *principe du prolongement analytique*. Par exemple au chapitre **IV**, on démontre la formule dite des compléments (chapitre **IV**, théorème 2) :

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

pour $0 < x < 1$. Or, sachant que les deux membres de cette égalité sont des fonctions analytiques de x dans $\mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}$, on en déduit que l'égalité s'étend à tout ce domaine complexe.

Il sera fait de ce principe un usage fréquent.

Voici le cinquième et dernier corollaire du théorème 6. Il concerne les fonctions qui sont le quotient de deux fonctions analytiques, et qu'on appelle *méromorphes*; ce sont donc les fonctions de la forme $h(z) = f(z)/g(z)$, où $f(z)$ et $g(z)$ sont toutes deux analytiques sur l'ensemble du plan complexe. Cela implique, d'après le corollaire 6d, que h est analytique en dehors d'un ensemble de points isolés. Le domaine d'holomorphie de h est donc $\Omega(h) = \mathbb{C} - Z(g)$, $Z(g)$ étant l'ensemble discret des zéros de g .

Corollaire 6e. *Soit une fonction méromorphe $h(z) = f(z)/g(z)$, où $f(z)$ et $g(z)$ sont toutes deux analytiques sur l'ensemble du plan complexe. Soit z_0 un point de $\Omega(h) = \mathbb{C} - Z(g)$. Alors le rayon de convergence de la série entière de h de centre z_0 est la distance de z_0 au point singulier le plus proche.*

Démonstration. Le point singulier le plus proche existe forcément puisque ces points singuliers forment un ensemble discret : dans tout disque borné de centre z_0 il ne peut, en effet, qu'y avoir un nombre fini de ces points (dans le cas contraire la propriété de Bolzano-Weierstrass entraînerait que ces points s'accumulent, ce qui contredit le corollaire 6d). Si g possède au moins un zéro (sinon il n'y a pas de point singulier du tout et le corollaire 6e devient un truisme), un disque de rayon assez grand le contiendra

Fonctions analytiques

forcément. Parmi tous les zéros de g qui seront dans un tel disque, il y en a nécessairement un, appelons-le z_{\min} , qui est le plus proche possible de z_0 , éventuellement ex-aequo. Ceux qui seraient à l'extérieur de ce disque étant encore plus éloignés, z_{\min} est donc le point singulier le plus proche de z_0 .

Considérons alors le disque ouvert de rayon $R = |z_0 - z_{\min}|$. Ce disque ne contient aucun point singulier puisqu'il n'y en a pas de plus proche que z_{\min} , donc h est analytique sur ce disque. D'après le théorème 6, le rayon de convergence de la série entière de h de centre z_0 est $\geq R$. Mais si ce rayon était $> R$, cela voudrait dire que la fonction h est analytique dans un disque ouvert qui contient z_{\min} , ce qui est absurde. Donc le rayon de convergence est égal à $R = |z_0 - z_{\min}|$. CQFD

Remarques. La démonstration ci-dessus ne marcherait plus si les points singuliers ne formaient pas un ensemble discret. Par exemple la fonction $\ln_1(z)$ (l'un des logarithmes de z , que nous introduisons dans la section suivante) est analytique sur le domaine Ω_1 égal au plan \mathbb{C} privé de l'intervalle réel $] -\infty, 0]$ et est discontinue sur cet intervalle (donc non analytique); ainsi les points réels négatifs (0 inclu) sont des points singuliers où la fonction $\ln_1(z)$ cesse d'être analytique. Prenons par exemple $z_0 = -1 + i$. La distance de ce point z_0 à la frontière de Ω_1 est 1; mais le rayon de convergence de la série entière, centrée en $z_0 = -1 + i$, de $\ln_1(z)$ n'est pas 1, mais $\sqrt{2}$. Cela peut sembler paradoxal en vertu du raisonnement (faux) que voici: la somme d'une série entière de centre $z_0 = -1 + i$ et de rayon $\sqrt{2}$ est forcément analytique dans son disque, donc sur le segment $] -2, 0[$, alors que $\ln_1(z)$ ne l'est pas. Ce qui est faux est l'idée (implicitement considérée comme évidente) que la somme de la série est forcément égale à $\ln_1(z)$. Le paradoxe apparent provient du fait que dans le domaine complexe il y a une infinité de fonctions logarithme qui se valent toutes; lorsqu'on traverse l'intervalle $] -2, 0[$ (tout en restant dans le disque de convergence de la série), la série cesse d'être égale à $\ln_1(z)$ et devient brusquement égale à un autre logarithme, $\ln_2(z)$. Voir la section 5 ci-après pour comprendre le phénomène.

Il est donc capital pour le corollaire 6e que les singularités de la fonction soient des points isolés. Le corollaire resterait vrai pour des fonctions ayant des points singuliers *essentiels* (voir chapitre suivant), qui ne sont pas des quotients f/g , pourvu que ces points soient isolés. La différence décisive entre des singularités isolées et des singularités en intervalle comme pour $\ln_1(z)$, c'est que des singularités isolées ne pourront jamais séparer un disque en deux parties déconnectées: l'intersection d'un disque avec un domaine du type $\mathbb{C} - Z(g)$ sera toujours connexe; tandis que l'intersection d'un disque avec Ω_1 peut être non connexe. Or le corollaire 6d nous dit que si une fonction coïncide avec sa série entière sur un petit disque contenu dans un domaine connexe, elle coïncidera avec la même série dans tout le domaine. Par contre, si la fonction coïncide avec sa série entière sur un petit disque contenu dans un domaine *non* connexe, on pourra seulement conclure qu'elle doit coïncider avec la même série dans celle des composantes connexes qui contient le petit disque.

En tenant compte de ces remarques, il serait donc possible de proposer une version beaucoup plus générale du corollaire 6e, qui ne prendrait en compte que la propriété topologique de l'ensemble des points singuliers de ne pouvoir diviser aucun disque en deux parties déconnectées. Mais ceci est laissé en exercice pour les passionnés; un corollaire aussi général ne présente aucun intérêt dans le cadre de ce cours orienté vers

les applications.

La théorie de Cauchy est l'un des sujets les plus classiques des mathématiques, les livres qui l'exposent sont extrêmement nombreux, et il est évidemment impossible de le présenter sous une forme originale ; je ne ferai pas mieux ici que les meilleurs auteurs, donc je me contente de ce résumé des propriétés essentielles.

Pour un exposé plus complet de tout ce qui peut se déduire de la formule de Cauchy :

M. LAVRENTIEV, B. CHABAT

Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Éditions MIR, Moscou.

V. SMIRNOV

Cours de mathématiques supérieures, tome III.

Éditions MIR, Moscou.

(Ces deux ouvrages sont parfaits pour une formation d'ingénieur et sont à la bibliothèque de l'E.N.S.P.S..)

E. WHITTAKER, G. N. WATSON

A Course of Modern Analysis.

Cambridge University Press.

(C'est l'ouvrage classique le plus riche en formules de toutes sortes, qui date des années 1920 ; je le mentionne à tout hasard.)

Dans la suite j'insisterai sur les aspects de la théorie qui sont souvent négligés dans les livres parce qu'ils ne sont pas assez généraux, mais qui sont essentiels lorsqu'on veut *effectivement* calculer.

5. Fonctions multiformes.

Reprenons l'exemple de la fonction $1/z$, analytique dans $\mathbb{C} - \{0\}$. Il n'y a aucun problème pour trouver sa dérivée, qui est la fonction analytique $-1/z^2$, ni les dérivées suivantes qui sont $2/z^3$, $-3!/z^4$, $4!/z^5$, ...

Lorsqu'on considère une intégrale curviligne $\int_{\gamma} f(z) dz$ sur un lacet γ , mais que f devient non analytique en certains points intérieurs au domaine circonscrit par le lacet γ , alors l'intégrale n'est pas forcément nulle : on ne peut en effet garantir que l'intégrale est nulle (en invoquant la formule de Green) que si les conditions de Cauchy et Riemann sont satisfaites *partout* à l'intérieur de γ . Toutefois si la fonction $f(z)$ est déjà la dérivée d'une fonction analytique F ($f = F'$), alors l'intégrale sera nulle *même si* F

Fonctions analytiques

est non analytique sur un trou entouré par γ , car on peut l'intégrer par quadrature :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^T F'(z(t)) z'(t) dt = F(z(T)) - F(z(0)) = 0$$

Cela étant dit, calculons à la main les intégrales

$$I_n = \int_{\gamma} \frac{1}{z^n} dz$$

pour $n \geq 1$. Comme l'intégrale ne dépend pas du lacet, mais seulement de sa classe d'homologie, on va prendre le lacet particulier qu'est le cercle de centre 0 et de rayon r . cela se paramètre par $z(\theta) = re^{i\theta}$, donc

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{in\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 2i\pi & \text{si } n = 1; \\ 0 & \text{si } n > 1; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1.)$$

On observe que pour $n > 1$, I_n est nulle bien que la fonction $1/z^n$ cesse d'être analytique en zéro ; cela n'a rien d'étonnant après ce qui a été dit ci-dessus puisque pour $n > 1$ la fonction $1/z^n$ est la dérivée de $-1/(n-1)z^{n-1}$, qui est analytique dans $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$. Mais I_1 n'est pas nulle, donc on peut en déduire qu'il n'existe pas de fonction analytique dans Ω dont la dérivée serait $1/z$.

Toutefois, comme cela a été vu en section 4, la fonction $1/z$ est la somme de séries entières sur des cercles qui recouvrent Ω , et les séries entières ont des primitives. Si (cf. 4.6)

$$\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$$

alors $1/z$ est forcément la dérivée de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1) z_0^{n+1}} (z - z_0)^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n \quad (5.2.)$$

puisque'en dérivant terme par terme cette dernière série, on retrouve bien celle de $1/z$. Or on peut recouvrir le domaine Ω par des disques où ces séries convergent.

La clé du paradoxe est que les primitives sont définies à une constante près : si on considère deux de ces séries primitives, chacune sur leur disque de

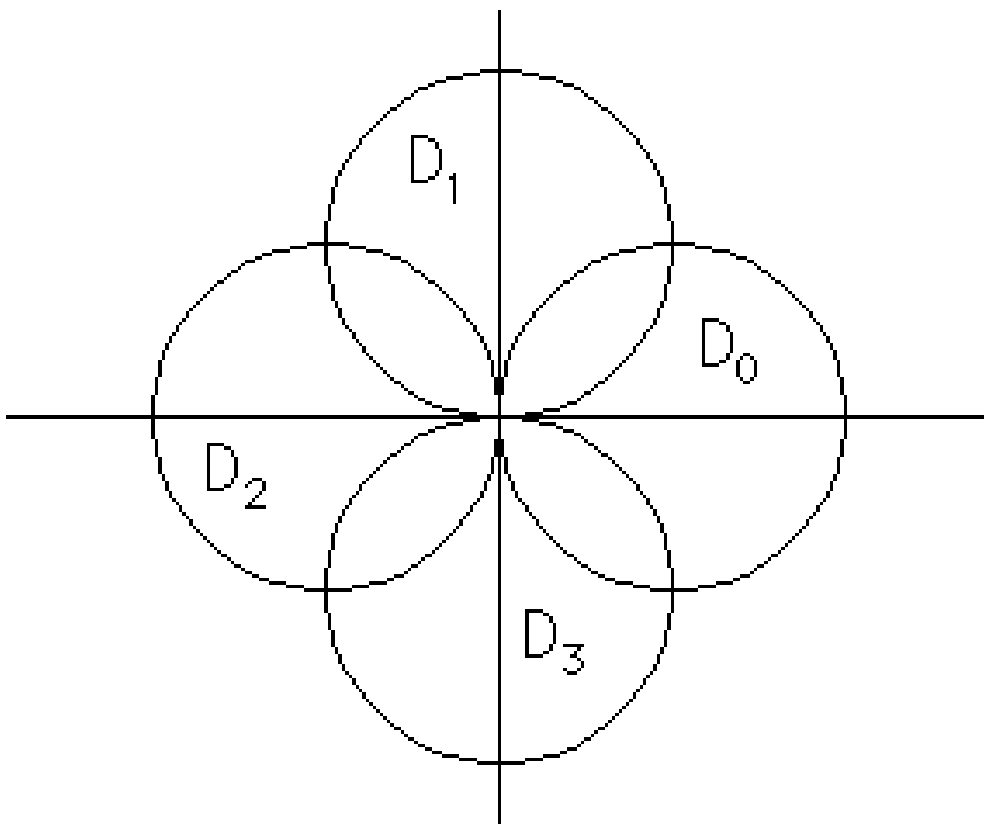


figure 2

On a recouvert une région autour de l'origine par quatre disques ouverts D_0, D_1, D_2, D_3 de rayon 1, dont aucun ne contient l'origine elle-même. Il est possible de contourner l'origine en restant dans ces disques.

convergence, mais avec des centres différents, z_0 et z_1 , alors, sur l'intersection de leurs disques de convergence respectifs, on peut seulement affirmer qu'elles diffèrent d'une constante (puisqu'elles ont la même dérivée), mais on ne peut affirmer qu'elles y sont égales. Prenons quatre centres, par exemple 1, i , -1 , et $-i$, afin que les disques de convergence correspondants D_0, D_1, D_2 , et D_3 recouvrent tout le tour de zéro. (voir figure 2). Si on veut définir une primitive unique sur $D_0 \cup D_1$, on pourra la définir par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \quad (5.3.)$$

sur D_0 , puis par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n i^n} (z-i)^n + A_1 \quad (5.4.)$$

Fonctions analytiques

sur D_1 , en ajustant la constante A_1 pour que les deux définitions coïncident dans l'intersection $D_0 \cap D_1$. On peut prolonger cette primitive à D_2 en la définissant par

$$-\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (z+1)^n + A_2 \quad (5.5.)$$

et en ajustant A_2 pour faire coïncider sa somme avec la fonction déjà définie sur $D_0 \cup D_1$ dans l'intersection $D_1 \cap D_2$. Si on prolonge encore à D_3 , par

$$-\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n i^n} (z+i)^n + A_3 \quad (5.6.)$$

on pourra ajuster la constante A_3 pour que ce soit compatible avec la valeur précédente dans $D_2 \cap D_3$, mais il faut aussi faire coïncider avec la définition prise initialement sur D_0 , puisque D_3 a aussi une intersection avec D_0 : rien ne prouve qu'on peut avoir *à la fois* la compatibilité dans $D_2 \cap D_3$ et dans $D_3 \cap D_0$. Au contraire nous avons la preuve que cela n'est pas compatible, puisque nous avons déjà démontré qu'il n'existe pas de primitive de $1/z$ dans tout Ω .

Pour résumer : appelons $F(z)$ la somme de la série 5.3 dans D_0 , prolongée par 5.4 dans D_1 , et par 5.5 dans D_2 , avec les constantes A_1 et A_2 ajustées. Si on prolonge encore dans D_3 avec la constante A_3 ajustée pour $D_2 \cap D_3$, la fonction prolongée différera sur $D_3 \cap D_0$ de la fonction initiale $F(z)$ par une constante *non nulle*.

On peut calculer cette constante non nulle ; ce serait extrêmement compliqué en sommant les séries 5.3, 5.4, 5.5, et 5.6 pour déterminer A_1 , A_2 , puis A_3 ⁽⁴⁾ ; mais on peut procéder plus intelligemment : il suffit de se souvenir que la primitive $F(z)$ est égale à

$$F(z) = F(1) + \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \quad (5.7.)$$

où γ est un chemin d'origine 1 et d'extrémité z (on remarquera en passant que $F(1) = 0$; en effet $F(z)$ est donné dans D_0 par la série 5.3 de centre 1, qui est nulle pour $z = 1$).

Lorsqu'on prolonge de D_2 à D_3 , la valeur de $F(z)$ est donnée par un chemin γ_1 d'origine 1 qui passe par D_1 , puis par D_2 , puis par D_3 , c'est-à-dire au-dessus de l'origine. Mais dans $D_3 \cap D_0$, la fonction initiale définie

⁽⁴⁾ La valeur précise des trois constantes A_1 , A_2 , et A_3 est sans intérêt pour la présente argumentation ; pour les curieux, signalons quand même qu'elles valent respectivement $\frac{i\pi}{2}$, $i\pi$, et $\frac{3i\pi}{2}$.

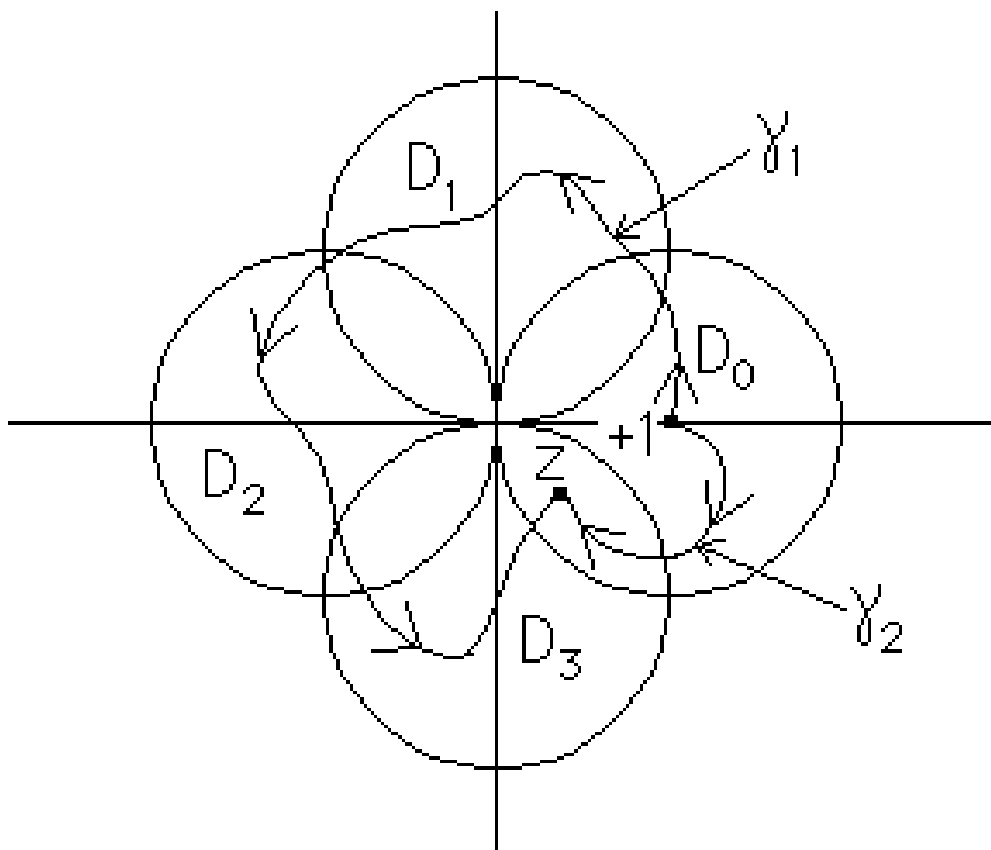


figure 3

γ_1 est un chemin dont l'origine est le point 1 et l'extrémité un point z situé dans $D_3 \cap D_0$; le chemin γ_1 passe par les disques D_0 , D_1 , D_2 , et D_3 , en passant au-dessus de l'origine. Le chemin γ_2 va de 1 à z en restant dans D_0 . La concaténation $\gamma_1 - \gamma_2$ est le lacet consistant à parcourir γ_1 de 1 à z , puis γ_2 en sens inverse de z à 1. Ce lacet fait le tour de l'origine dans le sens direct et est homotologiquement équivalent au lacet $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

par la série 5.3 est donnée par $\int_{\gamma_2} (1/z) dz$, où γ_2 est un chemin qui va de 1 à z en restant dans D_0 (voir figure 3). La différence

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$$

est donc une intégrale sur un chemin qui est la concaténation de γ_1 et $-\gamma_2$, qui va de 1 à 1 en faisant le tour de l'origine, et qui est donc un lacet entourant l'origine; cette intégrale vaut $2i\pi$ d'après ce qui a été calculé précédemment.

Ainsi, si on poursuivait l'ajustement de constantes pour passer de D_3

Fonctions analytiques

à D_0 , la condition de compatibilité avec la fonction déjà définie sur D_3 imposerait de prendre sur D_0

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n + A_4$$

avec $A_4 = 2i\pi$, c'est-à-dire la fonction qu'on avait au départ, augmentée de $2i\pi$.

Il est essentiel de bien comprendre ce phénomène, si on veut maîtriser les techniques de calcul que nous verrons dans les chapitres suivants.

Le phénomène consiste en ce qu'une fonction, définie au départ dans un domaine (ici le disque D_0), et prolongée de proche en proche, ne reprend pas les mêmes valeurs lorsqu'on revient au point de départ. Dans la littérature ancienne (en gros avant 1945), on appelait *multiformes* de telles fonctions, avec l'idée que la fonction $F(z)$ n'aurait pas (pour un z donné) une valeur unique : Ainsi si on fait $z = 1$ dans la série 5.3, on trouve $F(1) = 0$, mais après un tour complet autour de l'origine on obtient $F(1) = 2i\pi$; après deux tours, on aurait $F(1) = 4i\pi$, etc. Mais au cours du dernier demi-siècle, les mathématiciens ont codifié la notion de fonction. On enseigne aujourd'hui qu'une fonction a, pour une valeur donnée de la variable, une valeur unique. On a donc rejeté cette ancienne terminologie afin de ne pas perturber chez les jeunes élèves l'assimilation déjà difficile des notions élémentaires de mathématiques. C'est pourquoi (en dehors du titre de la section) nous ne parlerons jamais de fonction multiforme. Dans le cas de l'exemple précédent, on prendra un domaine dans lequel *on ne peut pas* faire le tour de l'origine, par exemple $\Omega_1 = \mathbb{C} -]-\infty, 0]$, et on dira que la fonction $F(z)$ est une vraie fonction définie sur Ω_1 , par la valeur unique qu'elle prend sur Ω_1 .

En conclusion : il n'existe pas de fonction analytique dans $\mathbb{C} - \{0\}$, dont la dérivée serait $1/z$. Mais il en existe une sur $\Omega_1 = \mathbb{C} -]-\infty, 0]$. On peut en donner une expression simple :

Théorème 7. Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe dans Ω_1 ($r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$) et de même $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. La fonction $F(z) = \ln r + i\theta$ est analytique dans Ω_1 , a pour dérivée $1/z$. Dans tout disque $|z - z_0| < |z_0|$, elle est égale, soit à la série entière

$$\ln(r_0) + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n$$

soit à cette série augmentée de $2i\pi$.

Démonstration. La fonction $F(z) = \ln r + i\theta$ satisfait dans Ω_1 aux conditions de Cauchy et Riemann ; on le vérifie très facilement avec l'expression

2.5 de ces conditions en coordonnées polaires r, θ ; en effet, ici la partie réelle est $u = \ln r$ et la partie imaginaire $v = \theta$, et on a bien

$$\frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{\partial \theta}{r \partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 = -\frac{\partial \ln r}{r \partial \theta}$$

car on a ici $u = \ln r$ et $v = \theta$. Nous avons vu aussi qu'on obtient la dérivée de la fonction $F(z)$ par $F'(z) = e^{-i\theta} \partial F / \partial r$ (cf 2.7), d'où

$$F'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial F}{\partial r} = e^{-i\theta} \frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{z}$$

Pour ce qui est de la série, il suffit de remarquer que sa dérivée est la série de $1/z$ et que la constante d'intégration ne peut être que 0 ou $2i\pi$; cela ayant déjà été fait dans l'exemple étudié plus haut, il est inutile d'y revenir.

Remarque. La possibilité de définir une primitive de $1/z$ sur un domaine impose qu'il soit impossible de faire le tour de l'origine dans ce domaine, et c'est pourquoi Ω_1 a été construit en enlevant au plan \mathbb{C} toute une demi-droite, qui va du point 0 jusqu'à l'infini. On appelle cela une *coupure* du plan. Mais rien n'impose que cette coupure soit obligatoirement la demi-droite $] -\infty, 0]$; n'importe quelle autre demi-droite allant de l'origine à l'infini conviendrait tout aussi bien pour empêcher qu'on puisse faire le tour de l'origine, ou même n'importe quelle courbe. Voici à titre d'exemple quatre cas particuliers :

cas 1 : Ω_1 est le domaine $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $r > 0$, $-\pi < \theta < +\pi$.

cas 2 : Ω_2 est le domaine $\mathbb{C} - [0, +\infty[$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $r > 0$, $0 < \theta < +2\pi$.

cas 3 : Ω_3 est le domaine formé de \mathbb{C} privé de la demi-droite verticale positive (formée des nombres de la forme it , avec $t > 0$). Ω_3 est l'ensemble des nombres complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $r > 0$, $-\frac{3}{2}\pi < \theta < +\frac{1}{2}\pi$.

cas 4 : Ω_4 est le domaine formé de \mathbb{C} privé de la demi-droite verticale négative (formée des nombres de la forme it , avec $t < 0$). Ω_4 est l'ensemble des nombres complexes $z = re^{i\theta}$ tels que $r > 0$, $-\frac{1}{2}\pi < \theta < +\frac{3}{2}\pi$.

cas 5 : Ω_5 est le domaine formé de \mathbb{C} privé de la spirale d'Archimède, d'équation $r = \theta$. Ω_5 est l'ensemble des nombres complexes $z = re^{i\theta}$ où θ peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive (non nécessairement $< 2\pi$) telle que $\theta \neq r$.

On a représenté ces différents domaines sur les figures 4a, 4b, 4c, 4d. Le disque D_0 des figures 2 et 3 est visiblement inclu dans les trois domaines

Fonctions analytiques

Ω_1 , Ω_3 , et Ω_4 ; il n'est pas inclu dans Ω_2 , et n'est pas non plus inclu dans Ω_5 . Appelons \ln_1 la fonction que nous avons définie précédemment dans Ω_1 ; si $z = re^{i\theta}$, $\ln_1(z) = \ln r + i\theta$. La partie imaginaire de $\ln_1(z)$ est toujours comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, puisque sur Ω_1 l'angle θ est compris entre ces bornes. Posons alors :

$$\begin{aligned} - \ln_2(z) &= \ln r + i\theta \quad (0 < \theta < +2\pi); \\ - \ln_3(z) &= \ln r + i\theta \quad (-\tfrac{3}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi); \\ - \ln_4(z) &= \ln r + i\theta \quad (-\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi). \end{aligned}$$

Ces fonctions ont toutes pour dérivée $1/z$, et diffèrent donc d'une constante. Le point $z = 1$ est contenu dans les trois domaines Ω_1 , Ω_3 , et Ω_4 , mais pas dans Ω_2 . Les trois fonctions \ln_1 , \ln_3 et \ln_4 s'annulent en ce point, mais la fonction $\ln_2(z)$ n'y est pas définie. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

s'annule aussi en $z = 1$, et a pour dérivée $1/z$; par conséquent sur D_0 on a

$$\ln_1(z) = \ln_3(z) = \ln_4(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

Pour ce qui est de \ln_2 , on a vu plus haut que la série ci-dessus n'est égale à $\ln_2(z)$ que dans la moitié supérieure du disque D_0 (celle qui est formée des nombres de partie imaginaire > 0), et qu'elle est égale à $\ln_2(z) - 2i\pi$ dans la moitié inférieure de D_0 .

Il est aisé de voir cela directement sur les expressions $\ln r + i\theta$; le plan étant divisé en quatre quadrants Q_1 : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, Q_2 : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, Q_3 : $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, Q_4 : $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, on voit que sur le quadrant Q_1 les quatre fonctions \ln_1 , \ln_2 , \ln_3 , \ln_4 , sont égales puisque les nombres complexes du premier quadrant ont un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc compatible avec chacun des quatre intervalles qui caractérisent les quatre fonctions. Par contre dans le quadrant Q_4 par exemple, θ doit être pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 pour \ln_1 , \ln_3 , et \ln_4 , mais entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π pour \ln_2 . Le même nombre complexe z aura un argument supérieur de $2i\pi$ si on le considère dans Ω_2 au lieu de le considérer dans Ω_1 , Ω_3 , ou Ω_4 . Donc pour z dans Q_4 , on aura $\ln_1(z) = \ln_3(z) = \ln_4(z) = \ln_2(z) - 2i\pi$. De la même façon, on vérifie (par la prise en compte directe des angles θ) que sur Q_2 on a $\ln_1(z) = \ln_2(z) = \ln_3(z) + 2i\pi = \ln_4(z)$ et sur Q_3 on a $\ln_1(z) = \ln_2(z) - 2i\pi = \ln_3(z) = \ln_4(z) - 2i\pi$.

Le cas de \ln_5 est plus difficile à décrire par écrit, mais pas par l'image; c'est pourquoi nous avons reporté sa comparaison avec \ln_2 sur la figure 4d.

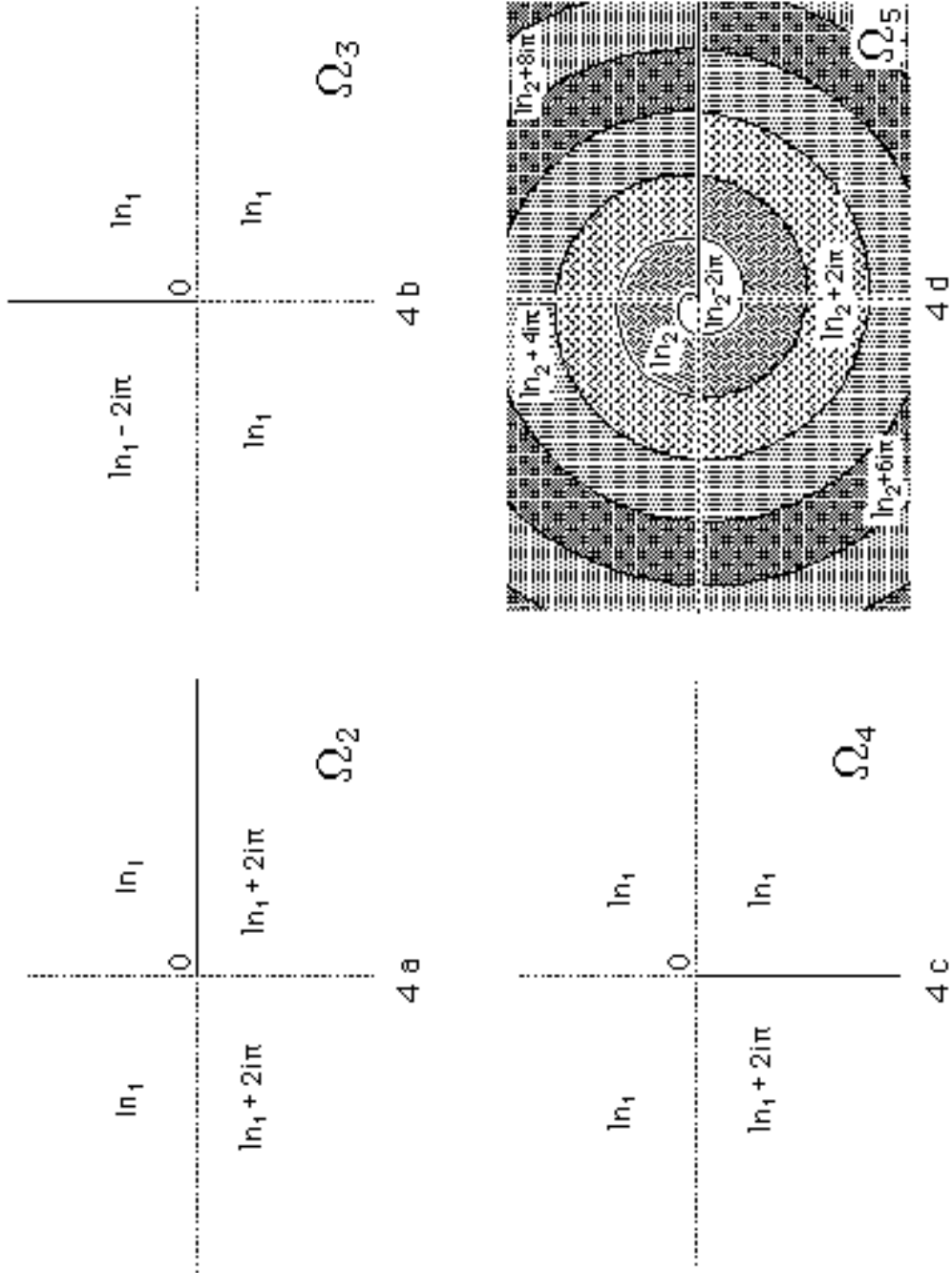


figure 4

Les déterminations \ln_1 , \ln_3 , \ln_4 , et \ln_5 du logarithme complexe, comparées à la détermination \ln_2 .

Quelqu'un qui partirait du point $z = 1$ en restant dans le domaine Ω_5 (ce qui signifie qu'il ne pourrait pas franchir la ligne spirale) serait obligé, pour s'éloigner de l'origine, d'augmenter continuellement sa coordonnée θ ;

Fonctions analytiques

donc la partie imaginaire de $\ln_5(z)$ augmenterait sans limite. La k -ième fois qu'il franchirait la demi-droite $[0, +\infty[$, θ vaudrait $2k\pi$, il aurait aussi fait k fois un tour complet de l'origine. Supposons qu'il aboutisse au point $z_1 = re^{i\theta} = re^{i(\theta-2k\pi)}$, et soit γ_1 le chemin qu'il aura suivi (voir figure 5a). Appelons γ_2 un chemin qui va de 1 à z_1 en franchissant les bras de spirale, mais en restant dans Ω_2 (à l'exception du point $z = 1$ lui-même) : voir figure 5b. Il est clair qu'on a :

$$\ln_2(z_1) = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz \quad \text{et} \quad \ln_5(z_1) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$$

puisque $\ln_5(1) = 0$ et \ln_2 , quoique non défini en $z = 1$, y a pour limite 0 si z tend vers 1 par le demi-plan supérieur. Donc

$$\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1) = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

où γ est la concaténation de γ_1 et de $-\gamma_2$ (γ_2 parcouru en sens inverse), et est donc un lacet (il part de 1 et aboutit à 1). On peut le décomposer en une autre concaténation de lacets dont chacun est homologiquement équivalent à un cercle de centre 0 (figures 5c, 5d, et 5e) : il suffit de considérer les portions du chemin γ_1 entre deux franchissements consécutifs du chemin γ_2 , et les portions de γ_2 séparées par les spires de γ_1 : chaque paire de ces portions forme par concaténation un lacet simple qui fait une fois le tour de l'origine. On en déduit alors que $\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1) = 2ik\pi$. (C'est plus clair sur la figure 5).

Une autre manière de calculer la différence $\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1)$ est de considérer la discontinuité de \ln_2 le long de l'axe réel positif. En effet, la fonction $\ln_5(z) - \ln_2(z)$ a une dérivée nulle puisque $\ln_5(z)$ et $\ln_2(z)$ ont toutes deux la même dérivée $1/z$. Par conséquent $\ln_5(z) - \ln_2(z)$ sera constante dans son domaine de définition, $\Omega_2 \cup \Omega_5$. Ce dernier n'est pas connexe (il n'est pas d'un seul tenant), la constante peut donc changer lorsqu'on passe d'un morceau à l'autre, et cela se produit précisément lorsqu'on traverse l'axe réel positif. Le changement de constante est une discontinuité qu'on peut calculer en remarquant que $\ln_5(z)$ reste continue lorsqu'on traverse l'axe réel positif (c'est à travers la spirale qu'elle a une discontinuité). Donc la discontinuité de $\ln_5(z) - \ln_2(z)$ à travers l'axe réel positif est due uniquement à la discontinuité de $\ln_2(z)$, dont on sait qu'elle est de $+2i\pi$ (du bas vers le haut). Lorsqu'on parcourt Ω_5 en avançant entre les spires, $\ln_5(z) - \ln_2(z)$ augmentera donc "brusquement" de $2i\pi$ chaque fois qu'on traversera l'axe réel positif, ce qui permet de calculer aisément $\ln_5(z)$ à partir de $\ln_2(z)$ (voir figure 4d).

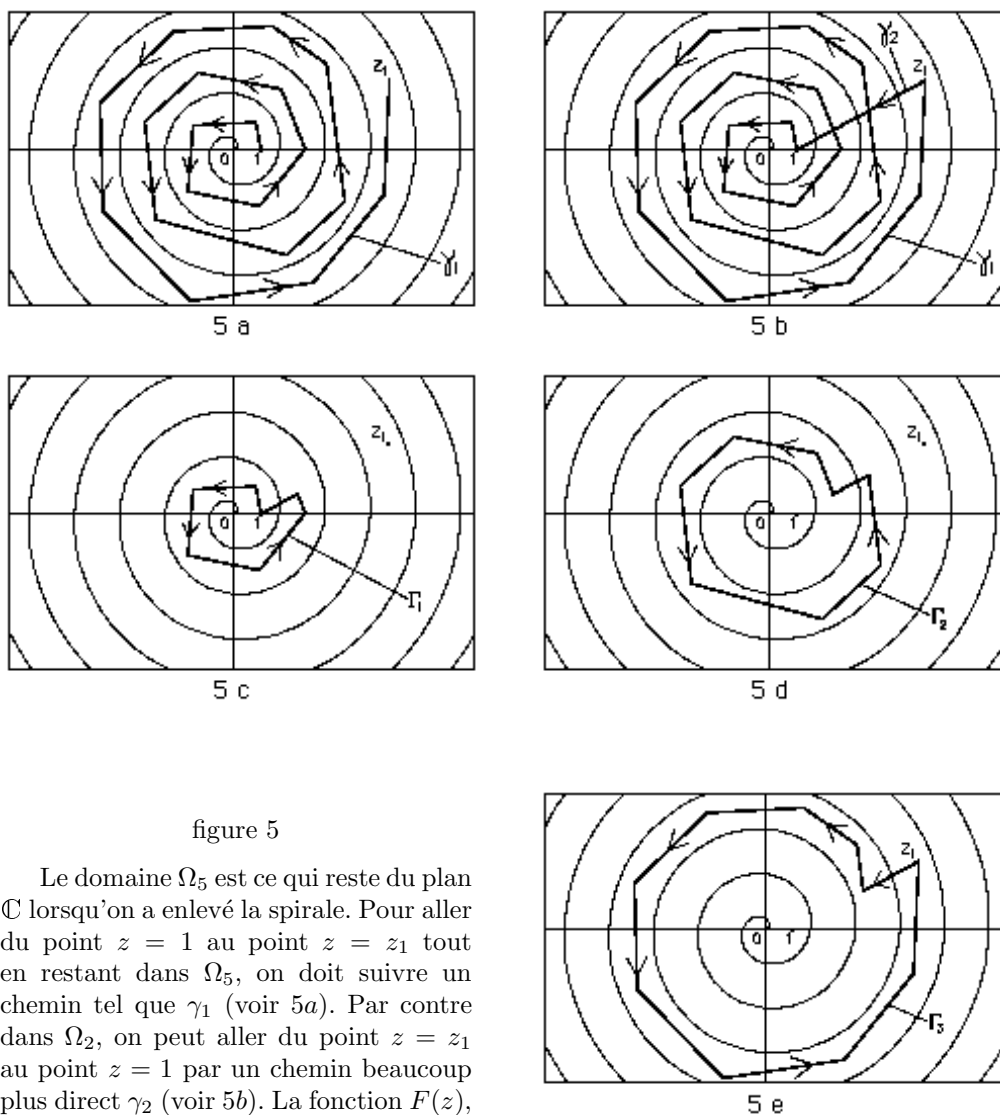


figure 5

Le domaine Ω_5 est ce qui reste du plan \mathbb{C} lorsqu'on a enlevé la spirale. Pour aller du point $z = 1$ au point $z = z_1$ tout en restant dans Ω_5 , on doit suivre un chemin tel que γ_1 (voir 5a). Par contre dans Ω_2 , on peut aller du point $z = z_1$ au point $z = 1$ par un chemin beaucoup plus direct γ_2 (voir 5b). La fonction $F(z)$, primitive complexe de $1/z$ qui s'annule en $z = 1$, peut donc être définie dans Ω_2 par $\ln_2(z_1) = -\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$ et dans Ω_5 par $\ln_5(z_1) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$. Par conséquent $\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1) = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, où γ est la concaténation $\gamma_1 + \gamma_2$ (voir 5b) et est donc fermé. Or γ est par ailleurs aussi la concaténation de plusieurs lacets Γ_j (trois dans le présent cas de figure) tous homologiquement équivalents à un cercle qui entoure l'origine : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ (voir 5c, 5d, et 5e). On en déduit que $\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1) = \sum_j \int_{\Gamma_j} \frac{1}{z} dz = 6i\pi$.

Bien entendu, si z_1 avait été dans la millième spire au lieu d'être dans la troisième, on aurait dû concaténer mille lacets Γ_j pour avoir γ , et $\ln_5(z_1) - \ln_2(z_1)$ aurait été égal à $2000i\pi$.