

## VII. INTÉGRALES DIVERGENTES.

On se propose dans ce chapitre de calculer des intégrales divergentes par différentes méthodes. Ces procédés conduiront à la *théorie des distributions* qui fait l'objet du prochain chapitre.

### 1. Exemple de calcul d'une intégrale semi-convergente.

Nous avons vu à propos de la transformation de Fourier que celle-ci, définie au départ pour des fonctions intégrables, c'est-à-dire appartenant à l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , pouvait s'étendre à l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ . Mais pour une fonction  $f(x)$  appartenant à l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  et n'appartenant pas à l'espace  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ , on ne peut définir  $\hat{f}$  par une intégrale comme dans V.3.6. Toutefois on peut justifier les calculs pour des intégrales semi-convergentes, en prenant simplement des limites.

Voyons un exemple concret. La fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} \quad (1.1)$$

est dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  mais pas dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ . Mais on peut *convenir* que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{1 + |x|} dx \quad (1.2)$$

représente la limite pour  $A \rightarrow \infty$  de

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-A}^{+A} \frac{e^{ix\xi}}{1 + |x|} dx$$

car cette limite est bien définie. Remarquons cependant que l'intégrale 1.2 n'est semi-convergente que pour  $t \neq 0$ . Pour  $t = 0$  elle est vraiment divergente.

On peut aussi lui donner un sens par un autre passage à la limite. Conformément à ce qui a été vu en VI. (théorème 9), on peut définir  $\hat{f}$  en prenant une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  qui converge en moyenne *quadratique* vers  $f$ , puis poser  $\hat{f} = \lim \hat{f}_n$ . On va donc poser

$$f_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{n}|x|}}{1 + |x|}$$

Cette suite est bien dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier est alors :

$$\widehat{f_n}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}|x|+ix\xi}}{1+|x|} dx \quad (1.3)$$

En découpant l'intégrale ci-dessus en deux morceaux, l'un de  $-\infty$  à 0, dans lequel on fait le changement de variable  $x \mapsto -x$ , et l'autre de 0 à  $+\infty$ , on voit facilement que

$$\widehat{f_n}(\xi) = 2 \Re \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-[\frac{1}{n}-i\xi]x}}{1+x} dx \right\} \quad (1.4)$$

La fonction

$$z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-zx}}{1+x} dx \quad (1.4)$$

est analytique dans le demi-plan  $\Re z > 0$ , et pour  $z$  réel positif, le changement de variable  $y = zx$  dans l'intégrale 1.4 la ramène à

$$\frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{1+\frac{1}{z}y} dy \quad (1.5)$$

où l'on reconnaît la fonction d'Euler introduite en **III. 5** :

$$\text{Eu}(\zeta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{1+\zeta y} dy \quad (1.6)$$

Or cette fonction est, comme nous l'avons vu, analytique pour  $\zeta \in \Omega_2$ , donc 1.5 aussi est analytique dans  $\Omega_2$  (la transformation  $z \mapsto \zeta = 1/z$  transforme  $\Omega_2$  en lui-même). D'autre part 1.4 est analytique dans  $\{\Re z > 0\}$  d'après des théorèmes généraux, et coïncide avec 1.5 pour  $z$  réel  $> 0$ , donc coïncide avec 1.5 dans tout le demi-plan  $\{\Re z > 0\}$  (prolongement analytique). On peut donc exprimer la transformée de Fourier  $\widehat{f_n}$  à l'aide de cette fonction Eu :

$$\widehat{f_n}(\xi) = 2 \Re \left\{ \frac{1}{\frac{1}{n} - i\xi} \text{Eu} \left( \frac{1}{\frac{1}{n} - i\xi} \right) \right\} \quad (1.7)$$

**Remarque.** Le raisonnement suivi de 1.4 à 1.7 est courant : le changement de variable  $y = zx$  n'est possible que pour  $z$  réel ; si  $z$  était complexe, il ne s'agirait plus d'un changement de variable ; la nouvelle variable  $y$  parcourrait un chemin du plan complexe et non plus un intervalle réel, et une telle opération pourrait modifier la valeur de l'intégrale. Dans des cas analogues il faut toujours suivre la méthode que nous avons suivie ici :

### Intégrales divergentes

effectuer le changement de variable pour  $z$  réel, puis faire jouer la propriété du prolongement analytique. Il faut alors vérifier que les deux membres de l'égalité à prolonger sont bien analytiques.

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, la limite de 1.7 est

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \Re \left\{ \frac{1}{-i\xi} \text{Eu} \left( \frac{1}{-i\xi} \right) \right\} \quad (1.8)$$

La limite qui est considérée ici est, pour tout  $\xi \neq 0$  fixé (et réel), la limite dans  $\mathbb{R}$  de la suite numérique  $n \mapsto \widehat{f}_n(\xi)$  et non la limite dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  de la suite  $\widehat{f}_n$ . Toutefois la limite considérée ci-dessus définit bien, pour  $\xi \neq 0$ , une fonction  $\widehat{f}$  qui est aussi la limite dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  de la suite  $\widehat{f}_n$ .

L'expression 1.8 n'est pas clairement définie pour  $\xi = 0$ , mais on peut avoir une idée plus précise de la singularité au point  $\xi = 0$  si on utilise le développement en série de Laurent **III.5.16**; celui-ci conduit en effet à

$$\widehat{f}(\xi) = -2 \Re \left\{ e^{-i\xi} \left[ \ln_2(-i\xi) + \gamma + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n n!} (-i\xi)^n \right] \right\} \quad (1.9)$$

Ce développement montre que la singularité en  $\xi = 0$  est logarithmique, donc intégrable et de carré intégrable. L'existence du développement 1.9, dont la série est entière et de rayon de convergence infini, garantit qu'il n'y a pas d'autre singularité en dehors de  $\xi = 0$ : la fonction est continue en tout point  $\xi \neq 0$ . Pour vérifier qu'à l'infini aussi la fonction  $\widehat{f}(\xi)$  est de carré intégrable, il faut connaître son comportement pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ; mais pour cela on peut revenir à la définition initiale de  $\text{Eu}(1/-i\xi)$ : on a en effet :

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \Re \left\{ \frac{1}{-i\xi} \text{Eu} \left( \frac{1}{-i\xi} \right) \right\} = 2 \Re \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t - i\xi} dt \right\} \quad (1.10)$$

On en déduit par l'inégalité de la moyenne que

$$|\xi \widehat{f}(\xi)| \leq 2 \int_0^\infty \left| \frac{\xi}{t - i\xi} \right| e^{-t} dt \quad (1.11)$$

et comme  $|t - i\xi| = \sqrt{t^2 + \xi^2} \geq |\xi|$ , on peut en déduire que  $|\xi \widehat{f}(\xi)| \leq 2$ , ce qui prouve bien qu'à l'infini,  $\widehat{f}(\xi)$  est de carré intégrable. En calculant l'intégrale de 1.11 par parties, on obtient même

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t - i\xi} dt = \frac{1}{-i\xi} - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t - i\xi)^2} dt \quad (1.12)$$

En prenant la partie réelle, le terme  $1/-i\xi$  disparaît et les mêmes inégalités conduisent à  $|\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)| \leq 2$ , ce qui prouve que  $\widehat{f}$  est non seulement dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , mais même dans  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ .

Pour résumer :

La transformée de Fourier de la fonction 1.1 est une fonction continue sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ , qui devient infinie en  $\xi = 0$ , où elle se comporte de manière équivalente à  $2\Re\{\ln_2(-i\xi)\} = 2\ln(|\xi|)$ , et qui pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , se comporte de manière équivalente à  $2/\xi^2$ .

**Remarque.** Pour terminer on devrait encore vérifier que la fonction  $\widehat{f}(\xi)$ , qui a été obtenue ici comme la limite dans  $\mathbb{R}$  (pour  $\xi$  fixé) de la suite numérique  $\widehat{f}_n(\xi)$ , est bien identique à la limite dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  de la suite  $\widehat{f}_n$ . Cela consiste simplement à vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2\Re\left\{\frac{1}{-i\xi} \text{Eu}\left(\frac{1}{-i\xi}\right)\right\} - \widehat{f}_n(\xi) \right|^2 d\xi$$

tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini; cette vérification est laissée en exercice (utiliser les théorèmes de passage à la limite sous le signe  $\int$ ).

On arrive ainsi à la conclusion que l'intégrale 1.2, bien que divergente, a une valeur bien définie, excepté pour  $\xi = 0$ . Une particularité importante des fonctions dans les espaces  $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$  ou  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  est, comme cela a déjà été dit, que les fonctions n'ont pas à être définies partout, mais seulement "presque" partout (au sens de la théorie de l'intégration de H. Lebesgue). Il importe donc peu que la valeur en  $\xi = 0$  manque.

Cet exemple devait montrer qu'on peut donner un sens précis et rigoureux à des intégrales divergentes. Toutefois ici l'intégrale était semi-convergente, donc la divergence n'était pas trop grave. L'idée essentielle était l'extension de la notion de limite, car l'intégrale divergente 1.2 est définie comme une limite dans  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  : c'est la limite des intégrales absolument convergentes 1.3 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cependant, comme l'intégrale était semi-convergente (si on laisse de côté le cas  $\xi = 0$ ), on aurait pu s'en sortir avec la limite au sens usuel : la limite dans  $\mathbb{R}$  de la suite numérique  $\widehat{f}_n(\xi)$ . Elle donne le même résultat qu'avec la limite dans l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ , ce qui n'est pas une règle générale. Dans le prochain exemple (section 2), nous verrons qu'on ne peut pas du tout se contenter de la notion usuelle de limite.

Ces phénomènes n'ont commencé à être compris qu'au  $XX^e$  siècle (années 1920). Les mathématiciens des  $XVIII^e$  et  $XIX^e$  siècles ont recouru fréquemment à des ruses diverses pour donner un sens aux intégrales divergentes, mais ils ne comprenaient pas pourquoi cela marchait parfois, mais pas toujours. L'explication était liée à l'existence inconnue d'un espace muni d'une notion favorable de limite. L'étude de ces espaces de fonctions et des notions de limites qui leur sont attachées s'appelle l'*analyse fonctionnelle*. Celle-ci serait restée confinée dans une spécialisation étroite

## Intégrales divergentes

si elle n'avait servi qu'à donner un sens aux intégrales divergentes. Mais la Mécanique quantique en a fait son principal outil mathématique, d'où l'importance énorme qu'elle a pris aujourd'hui.

### 2. Valeur principale de Cauchy.

On sait que la fonction  $1/x$  n'est pas intégrable en  $x = 0$  (ni d'ailleurs à l'infini). Cela veut dire que pour  $a > 0$  et  $b > 0$  les intégrales

$$\int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{1}{x} dx$$

n'ont pas de limite quand  $\eta$  et  $\varepsilon$  tendent vers zéro.

Toutefois si on prend  $\eta = \varepsilon$  et qu'on considère leur somme, celle-ci aura une limite car les deux infinis se compensent. En effet :

$$\int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx = \int_{+a}^{+\eta} \frac{1}{x} dx = \ln(\eta) - \ln(a)$$

et

$$\int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(\varepsilon)$$

Si  $\eta = \varepsilon$  et qu'on prend la somme, les termes  $\ln(\eta)$  et  $\ln(\varepsilon)$  s'annulent et il reste  $\ln(b) - \ln(a)$ .

Plus généralement, si  $\varphi(x)$  est une fonction différentiable en  $x = 0$ , on peut donner un sens à l'intégrale

$$\int_{-a}^{+b} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{2.1}$$

en posant qu'elle est la limite, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+b} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{2.2}$$

En effet, la fonction  $\varphi(x)$  étant différentiable, peut se décomposer sous la forme  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\chi(x)$ , où  $\chi(x)$  est régulière. Pour être précis et fixer les idées : admettons que  $\varphi(x)$  est continuellement différentiable sur  $[-a, +b]$  ; alors  $\chi(x)$  sera continue sur  $[-a, +b]$ .

Alors 2.2 devient

$$\varphi(0) \left[ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+b} \frac{1}{x} dx \right] + \left[ \int_{-a}^{-\varepsilon} \chi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+b} \chi(x) dx \right] \tag{2.3}$$

Le second terme entre crochets ci-dessus a pour limite  $\int \chi(x) dx$ , puisque la fonction  $\chi(x)$  est partout régulière (continue). Le premier terme entre

crochets est déjà calculé et vaut  $\ln(b) - \ln(a)$  indépendamment de  $\varepsilon$ . La limite est donc

$$\varphi(0)[\ln(b) - \ln(a)] + \int_{-a}^{+b} \chi(x) dx \quad (2.3)$$

On appelle cette limite la *valeur principale de Cauchy* de l'intégrale et on utilise souvent la notation

$$\text{V.P.} \int_{-a}^{+b} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Lorsqu'on trouve le symbole V.P. devant une intégrale singulière, cela signifie qu'à l'intervalle d'intégration donné on enlève un intervalle *symétrique*  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  autour de chaque singularité, et qu'on fait tendre ensuite  $\varepsilon$  vers zéro. Il est bien évident que si on prend des intervalles dissymétriques  $[x_0 - \eta, x_0 + \varepsilon]$  et qu'on fait tendre  $\eta$  et  $\varepsilon$  indépendamment l'un de l'autre vers zéro, il n'y aura pas de limite.

Ce procédé de régularisation des intégrales singulières (autre terme pour divergentes) utilise la compensation des infinis. Le procédé utilisé dans la section 1 consistait à considérer l'intégrale singulière comme une limite d'intégrales convergentes; pour la valeur principale de Cauchy, on a aussi utilisé cette approche, puisque l'intégrale singulière est bien une limite. On peut interpréter la méthode précédente d'une manière qui la rapprochera de celle de la section 1. Appelons  $f(x) = \varphi(x)/x$  la fonction à intégrer; puis posons

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| > \frac{1}{n}; \\ 0 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout  $n$  (entier  $\geq 1$ ), la fonction  $f_n$  est dans l'espace  $\mathbb{L}_1([ -a, +b])$  et 2.2 est l'intégrale de  $f_n$  (avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ). Autrement dit :

$$\text{V.P.} \int_{-a}^{+b} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+b} f_n(x) dx$$

Les intégrales sous le signe  $\lim$  sont des intégrales régulières et on obtient ainsi l'intégrale divergente comme limite d'intégrales régulières. Toutefois, dans la section 1, la fonction limite  $f$  appartenait à l'espace  $\mathbb{L}_2$ , où la convergence était bien définie, et on pouvait dire que *quelle que soit* la suite  $f_n$  qui tend vers  $f$ , l'intégrale de  $f_n$  a toujours la même limite. Ici, il semble qu'on a choisi une suite particulière et rien ne prouve qu'avec une autre suite  $f_n$  on aurait eu la même limite. On peut même constater directement

### Intégrales divergentes

que si au lieu de  $f_n$  on avait pris

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -\frac{1}{n} \text{ ou } x > \frac{2}{n}; \\ 0 & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}. \end{cases}$$

on n'aurait pas trouvé la même limite. En effet :

$$\int_{-a}^{-1/n} \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln(a)$$

et

$$\int_{2/n}^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln\left(\frac{2}{n}\right) = \ln(b) - \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Lorsqu'on fait la somme, les deux infinis  $\ln\left(\frac{1}{n}\right)$  se compensent effectivement, mais il reste le terme  $\ln(2)$  qui provient de la dissymétrie de l'intervalle. On voit bien que la limite dépend fortement du choix de la suite  $f_n$ .

Pour avoir une véritable analogie avec l'exemple étudié en section 1, il faudrait avoir un espace de fonctions qui contient  $f$ , et sur cet espace une notion de limite qui implique la symétrie de compensation des infinis; au sens de cette limite,  $f_n$  tendrait vers  $f$ , mais pas  $g_n$ . Or tout cela existe (voir plus loin le chapitre sur les distributions). **Tous les procédés de régularisation d'intégrales divergentes se ramènent à une notion de limite adéquate.**

La suite  $f_n$  est dans l'espace  $\mathbb{L}_1([-a, +b])$ , mais est discontinue; ce détail est cependant inessentiel, et on aurait tout aussi bien pu approcher la fonction  $f$  avec la suite

$$h_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

La fonction  $h_n(x)$  a un minimum égal à  $-\frac{1}{2}n$  en  $x = -\frac{1}{n}$  et un maximum égal à  $+\frac{1}{2}n$  en  $x = +\frac{1}{n}$ . Autrement dit, la fonction  $h_n$  passe, sur une distance égale à  $\frac{2}{n}$ , de  $-\frac{1}{2}n$  à  $+\frac{1}{2}n$ , ce qui pour  $n$  grand représente une croissance extrêmement rapide; mais la fonction reste toujours continue et même infiniment dérivable. Lorsque  $n$  tend vers l'infini le minimum tend vers  $-\infty$  et le maximum vers  $+\infty$ , en même temps que leurs abscisses tendent vers zéro, de sorte que  $h_n(x)$  tend vers  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

La fonction  $h_n(x)$  est la dérivée de  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)$ , donc

$$\int_{-a}^{+b} h_n(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{1}{n^2} + b^2\right) - \ln\left(\frac{1}{n^2} + a^2\right) \right]$$

ce qui tend bien vers  $\ln(b) - \ln(a)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On peut approcher la fonction singulière  $f(x) = \frac{1}{x}$  de bien d'autres manières, qui

toutes donneront la même limite pour l'intégrale; le tout est de définir la notion adéquate de limite.

### 3. Pseudo-fonctions de Hadamard.

Le mathématicien français Jacques Hadamard (1865 — 1963) est justement un des précurseurs de l'analyse fonctionnelle. Le problème étudié ici (comment donner un sens, puis calculer les intégrales divergentes) était un de ses sujets de recherche favoris. Son élève Laurent Schwartz (né en 1915) est l'auteur de la *théorie des distributions* dont une version simplifiée sera présentée plus loin; c'est lui qui a introduit les espaces de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Jacques Hadamard, pour donner un sens à certaines intégrales divergentes, a introduit la notion de pseudo-fonction. On ne présentera pas ici sa théorie sous forme générale et abstraite, mais on la fera apparaître à travers l'exemple suivant, très utile pour les applications (notamment en traitement du signal), et où elle est tout particulièrement opératoire: considérons la famille d'intégrales

$$I_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi \quad (3.1)$$

Cette famille est paramétrée par le nombre réel  $\alpha$ . On remarque facilement que cette intégrale est toujours divergente: pour  $\alpha < 1$  elle diverge à l'infini, pour  $\alpha > 1$  elle diverge en zéro, et pour  $\alpha = 1$  elle diverge à la fois à l'infini et en zéro. Toutefois pour  $0 < \alpha < 1$  elle est semi-convergente.

Pour la calculer, on va mettre en œuvre deux procédés typiques. Si  $\alpha < 1$ , on interprète l'intégrale comme une intégrale le long de la droite réelle; pour éviter la divergence en zéro, on calcule l'intégrale le long d'un chemin identique à cette droite, sauf autour de zéro, où il fait un détour par le plan complexe (voir figure 1). La fonction  $\xi \mapsto [(i\xi)^\alpha]_2$  est définie en dehors de la demi-droite imaginaire positive, donc il faudra contourner zéro par le bas pour rester dans le domaine d'holomorphie.

Ce procédé est présenté ici pour des intégrales de dimension 1, mais peut être étendu aux intégrales multiples. Il est très fréquemment utilisé en physique théorique (fonctions de Green, propagateurs, etc). Ainsi, pour résoudre l'équation électromagnétique  $\Delta f + k^2 f = g$  par exemple, on peut utiliser la méthode de Fourier (cf **VI. 1**): la transformée de Fourier de l'équation est alors  $-|\xi|^2 \hat{f}(\xi) + k^2 \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$  avec  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ ; d'où

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{k^2 - |\xi|^2}$$

La transformée de Fourier inverse de  $1/(k^2 - |\xi|^2)$  est appelée *fonction de Green* de l'équation donnée. Mais l'intégrale qui donne cette transformée inverse est

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ix \cdot \xi}}{k^2 - |\xi|^2} d\xi$$



## Intégrales divergentes

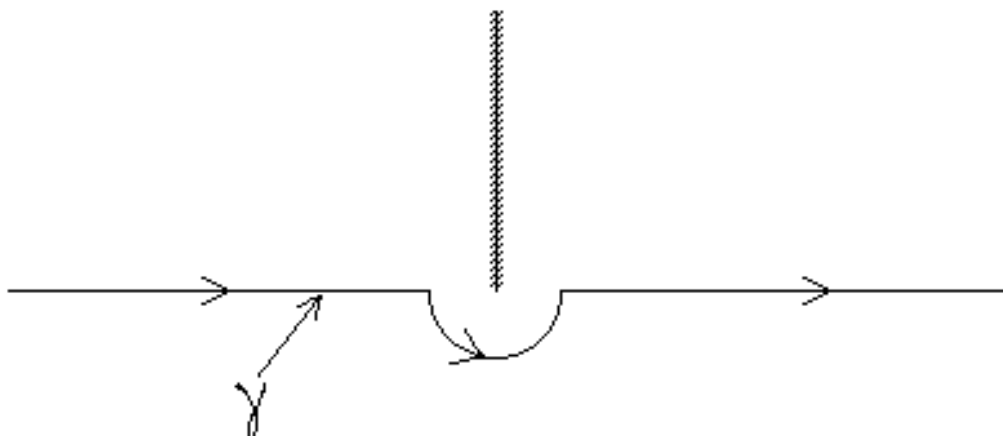


figure 1

qui diverge sur les singularités  $k^2 - |\xi|^2 = 0$ . Pour calculer analytiquement cette fonction de Green, on contourne alors cette singularité en sortant de  $\mathbb{R}^3$  par les valeurs complexes de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Grâce à cet expédient, il est assez facile d'obtenir

$$G(x) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

où  $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

Pour lever la divergence à l'infini, on procède comme dans l'exemple de la section 1, on introduit un facteur régularisant : au lieu de considérer l'intégrale  $I_\alpha(x)$ , on considère l'intégrale

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{[(i\xi)^\alpha]_2} e^{-\varepsilon|\xi|} d\xi \quad (3.2)$$

Le facteur  $e^{-\varepsilon|\xi|}$ , qui décroît très vite à l'infini, fait converger l'intégrale.

Le premier procédé (contourner la singularité en sortant de l'axe réel) sera donc appliqué lorsque  $\alpha > 1$ , et le second (introduire un facteur régularisant) lorsque  $\alpha < 1$ . Pour  $\alpha = 1$  il faut faire les deux à la fois.

Le second procédé donne une intégrale convergente tant que  $\varepsilon > 0$ , mais bien entendu la “valeur” de l'intégrale divergente  $I_\alpha(x)$  sera la limite (dans un sens qu'il faudra préciser) de  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. On verra cette fois que la limite au sens usuel (limite dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  des *nombres*  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  pour  $x$  fixé) sera insuffisante pour donner un sens consistant à l'intégrale divergente ; même la limite au sens de l'espace  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  sera insuffisante. Il faudra créer une nouvelle notion de limite.

Ces nouvelles notions de limite ont commencé à être comprises dans les années 1910–1920 par les mathématiciens polonais S. Banach et hongrois F.

Riesz. Mais contrairement à ce qui était le cas dans les siècles précédents, il est difficile de les attribuer entièrement à un auteur précis et elles sont plutôt le résultat d'une lente maturation. Celle que nous utiliserons pour notre exemple a été proposée par Laurent Schwartz ( $\sim 1945$ ).

Supposons donc d'abord  $\alpha > 1$  et calculons l'intégrale

$$I_\alpha(x) = \int_\gamma \frac{e^{ix\xi}}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi \quad (3.3)$$

où  $\gamma$  est le chemin infini représenté sur la figure 1. Il est bien clair que l'intégrale ne dépend pas du chemin : tous les chemins qui aux grandes distances coïncident avec l'axe réel et qui ne traversent pas la coupure sont homologiquement équivalents. Si on paramètre le chemin par  $t \mapsto \xi(t)$ , l'intégrale devient

$$I_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi(t)}}{[(i\xi(t))^\alpha]_2} \xi'(t) dt \quad (3.4)$$

**Remarque.** Il n'était pas absolument obligatoire de paramétrer le chemin  $\gamma$  avec un paramètre allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Par exemple la droite peut aussi bien se paramétrer par l'abscisse  $x$  elle-même que par  $t = \arctan x$  qui parcourt  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ . Toutefois, si on paramètre un chemin infini avec un paramètre qui reste fini, la dérivée  $\xi'(t)$  deviendra forcément infinie lorsque  $t$  atteindra ses valeurs extrémales ; par exemple si on paramètre la droite avec le paramètre  $t$  mentionné ci-dessus, qui parcourt l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ , la dérivée  $x'(t) = 1 + \tan^2 t$  tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers  $\pm\frac{\pi}{2}$ . Pour fixer les idées, on pourra prendre pour paramètre l'abscisse curviligne le long du chemin, ce qui aura pour avantage d'avoir  $|\xi'(t)| = 1$ .

Revenons à 3.4. Si  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto ix\xi(t)$  paramètre un autre chemin, que nous appellerons  $\Gamma$ , et qui se déduit de  $\gamma$  par une rotation autour de 0 d'angle  $+\frac{\pi}{2}$  (multiplication par  $i$ ) et une homothétie de rapport  $x$  (multiplication par  $x$ ). Le chemin  $\Gamma$  est alors un chemin qui à grande distance coïncide avec l'axe vertical, et qui contourne le point 0 par la droite (figure 2). Si on pose  $z(t) = ix\xi(t)$ , on a évidemment pour la dérivée  $z'(t) = ix\xi'(t)$ , et on a aussi  $[(z(t))^\alpha]_2 = x^\alpha [(i\xi(t))^\alpha]_2$  (rappelons que l'identité  $[a \cdot b]_2 = [a]_2 \cdot [b]_2$  est en général fausse pour  $a$  et  $b$  complexes, mais elle est vraie si  $a$  ou  $b$  est réel  $> 0$ ). Si on reporte cela dans 3.4, on voit que

$$I_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z(t)}}{[z(t)^\alpha]_2} z'(t) dt \quad (3.5)$$

Or l'intégrale ci-dessus n'est rien d'autre que celle qu'on obtiendrait par le

paramétrage  $z(t)$  à partir de

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{[z^\alpha]_2} dz$$

Par conséquent :

$$I_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{[z^\alpha]_2} dz \quad (3.6)$$

On peut encore faire le constat suivant. Sur des portions de cercles de centre 0 et de rayon  $R$ , la fonction sous le signe  $\int$  dans 3.6 se paramètre par  $z = Re^{i\theta}$ , ce qui donne (si on prend  $\theta$  dans l'intervalle  $]-\pi, +\pi[$ ) :

$$\frac{e^z}{[z^\alpha]_2} dz = R^{1-\alpha} \frac{e^{Re^{i\theta}}}{e^{i\alpha\theta}} ie^{i\theta} d\theta$$

Si  $\cos \theta$  reste  $\leq 0$ , ce qui est le cas pour  $-\pi < \theta \leq -\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ , le module de cette fonction est uniformément majoré par  $R^{1-\alpha}$  qui tend vers zéro lorsque  $R$  tend vers l'infini, puisque nous avons supposé que  $\alpha > 1$ . Ce qui entraîne que l'intégrale de cette fonction sur n'importe quelle portion de cercle à gauche de l'axe imaginaire tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini et, par suite, que l'intégrale 3.6 sur  $\Gamma$  est égale à l'intégrale sur un chemin  $H$  du type représenté sur la figure 2.

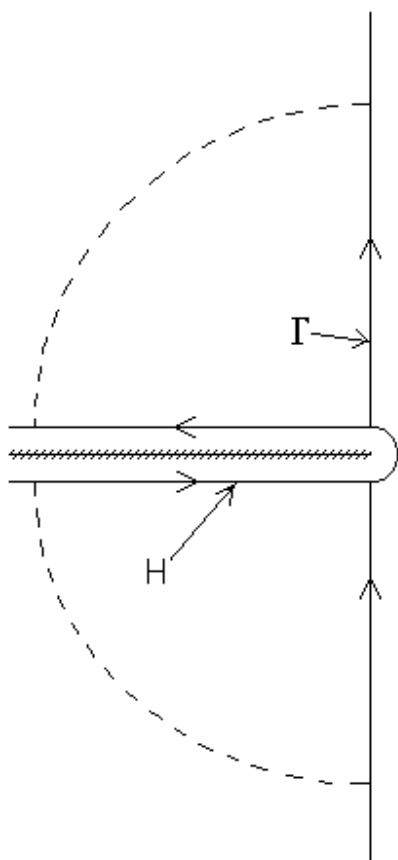


figure 2

En définitive :

$$I_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{i} \int_H \frac{e^z}{[z^\alpha]_2} dz \quad (3.7)$$

où on reconnaît l'intégrale de Hankel (cf. **IV. 6**), de sorte que le résultat du calcul est

$$I_\alpha(x) = \frac{2\pi x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.8)$$

Il reste encore à voir le cas où  $x \leq 0$ , mais ce cas sera bien plus vite réglé ; en effet, revenons à l'expression 3.3 de  $I_\alpha(x)$ . Elle ne dépend pas du détournement choisi, on peut donc prendre pour celui-ci un demi-cercle de rayon arbitraire, qu'on fera tendre vers l'infini. Or le long d'un tel demi-cercle (situé cette fois à *droite* de l'axe imaginaire) le paramétrage  $\xi = Re^{i\theta}$  (avec  $\theta \in [-\pi, 0]$  pour le demi-cercle) donnera

$$I_\alpha(x) = \int_{-\pi}^0 \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{[(iRe^{i\theta})^\alpha]_2} iRe^{i\theta} d\theta$$

Le module de la fonction qui figure sous le signe  $\int$  est

$$R^{1-\alpha} e^{-xR \sin \theta}$$

où on voit aisément que si  $x$  est  $\leq 0$ , l'exponentielle restera  $\leq 1$  pour tout  $\theta$  dans l'intervalle d'intégration  $[-\pi, 0]$ , et le facteur  $R^{1-\alpha}$  tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini. On en conclut que dans ce cas  $I_\alpha(x) = 0$ .

En résumé :

**Théorème 1.** *Pour  $\alpha > 1$  on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{ix\xi}}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Pour lever la divergence à l'infini on introduit le facteur régularisant  $e^{-\varepsilon|\xi|}$ . Ce procédé s'applique pour  $\alpha < 1$ , de sorte que l'intégrale est convergente en  $\xi = 0$ . On va donc calculer

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi - \varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi \quad (3.10)$$

Cette intégrale peut être décomposée en deux parties, l'une de  $-\infty$  à 0, l'autre de 0 à  $+\infty$ . Dans la première, on peut faire le changement de variable  $\xi \mapsto -\xi$  ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi - \varepsilon\xi}}{[(-i\xi)^\alpha]_2} d\xi$$

La fonction puissance qui est au dénominateur s'écrit plus explicitement sous la forme trigonométrique :

$$[(i\xi)^\alpha]_2 = \xi^\alpha e^{+i\alpha\pi/2} \quad \text{et} \quad [(-i\xi)^\alpha]_2 = \xi^\alpha e^{-i\alpha\pi/2}$$

## Intégrales divergentes

de sorte que

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\varepsilon+ix)\xi}}{\xi^\alpha e^{-i\alpha\pi/2}} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\varepsilon-ix)\xi}}{\xi^\alpha e^{+i\alpha\pi/2}} d\xi \quad (3.11)$$

On voit que le second terme est conjugué du premier, de sorte qu'on peut tout aussi bien écrire

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = 2\Re \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\varepsilon+ix)\xi}}{\xi^\alpha e^{-i\alpha\pi/2}} d\xi \right\} \quad (3.12)$$

Posons  $z = \varepsilon + ix$ . Puisque  $\varepsilon$  a été supposé  $> 0$  et que  $x$  peut être n'importe quel réel positif, nul, ou négatif, le nombre complexe  $z$  pourra être n'importe où dans le demi-plan  $\Re z > 0$ .

Ce que nous cherchons est deux fois la partie réelle de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\xi}}{\xi^\alpha e^{-i\alpha\pi/2}} d\xi \quad (3.13)$$

Il faut donc calculer 3.13. La constante  $e^{-i\alpha\pi/2}$  du dénominateur sort de l'intégrale, et dans cette dernière on reconnaît l'intégrale eulérienne de deuxième espèce **IV.1.3**, au changement de variable  $t = z\xi$  près. Ce changement de variable n'est cependant possible que pour  $z$  réel; on procédera donc comme d'habitude: on effectue ce changement de variable pour  $z > 0$ , puis on étend le résultat par prolongement analytique (les théorèmes généraux garantissent en effet que 3.13 dépend analytiquement de  $z$  dans le demi-plan  $\Re z > 0$ ). Ainsi pour  $z > 0$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\xi}}{\xi^\alpha} dt = z^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} d\xi \quad (3.14)$$

L'intégrale eulérienne est égale à  $\Gamma(1-\alpha)$ . Le prolongement analytique de  $z^{\alpha-1}$  au demi-plan  $\Re z > 0$  est la fonction  $[z^{\alpha-1}]_2$ , de sorte que finalement 3.13 devient

$$[z^{\alpha-1}]_2 \Gamma(1-\alpha) e^{i\alpha\pi/2}$$

Pour obtenir commodément la partie réelle, écrivons encore la fonction  $[z^{\alpha-1}]_2$  sous forme trigonométrique, en introduisant  $r$  et  $\theta$  tels que  $z = \varepsilon + ix = re^{i\theta}$ . Comme  $\Re z > 0$ ,  $\theta$  sera compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ , donc  $\theta = \arctan(\frac{x}{\varepsilon})$ ; d'autre part  $r$  sera égal à  $\sqrt{\varepsilon^2 + x^2} = \varepsilon\sqrt{1 + (x/\varepsilon)^2} = \varepsilon\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \varepsilon/\cos \theta$ . On aura alors  $[z^{\alpha-1}]_2 = r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\theta}$ , et 3.13 s'écrira

$$r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) e^{i\alpha\pi/2 + i(\alpha-1)\theta}.$$

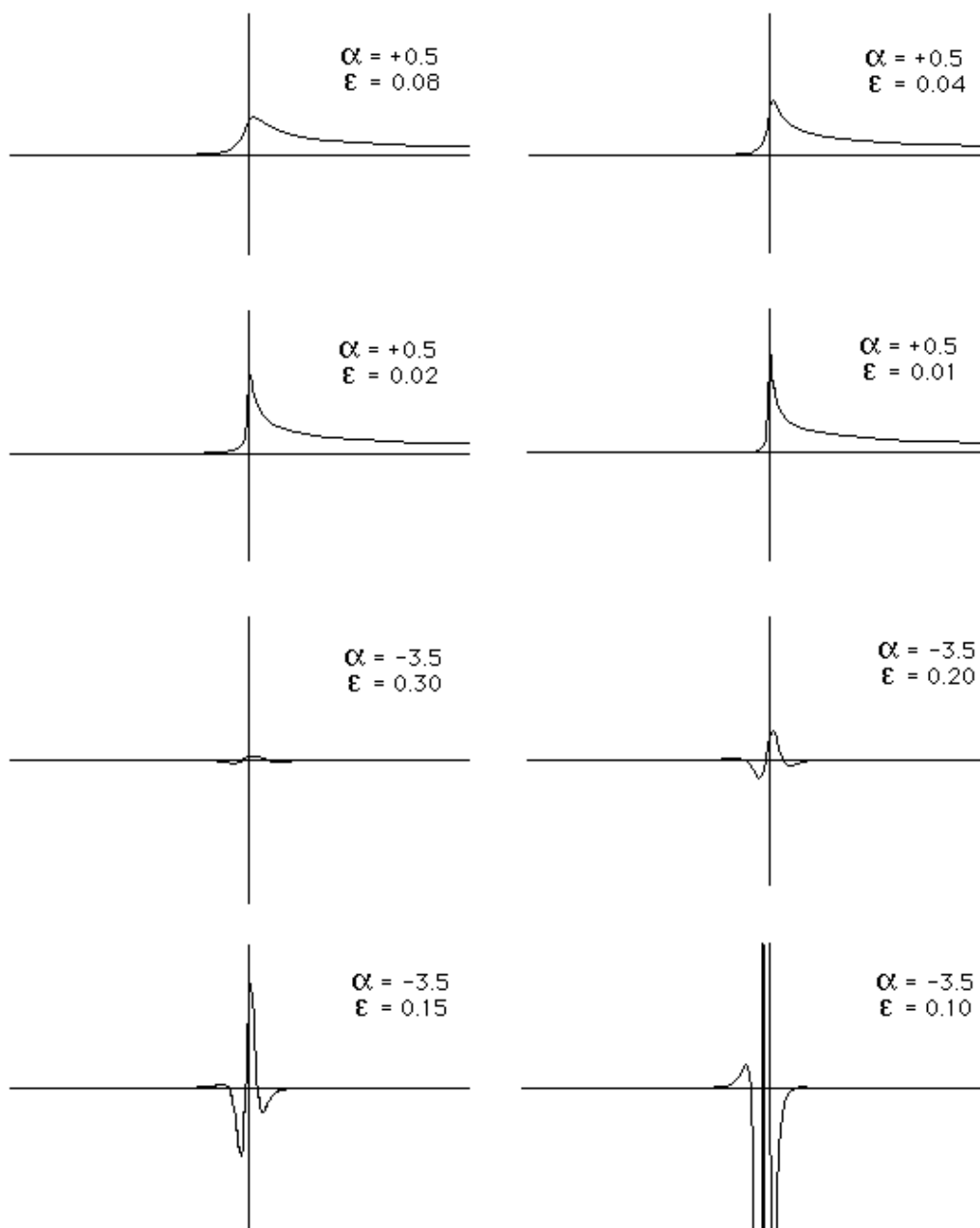


figure 3

Les figures ci-dessus sont les graphiques des fonctions  $y = I_{\alpha, \varepsilon}(x)$ . Plus  $\varepsilon$  est petit, plus les variations au voisinage de zéro sont amples et rapides. On ne peut leur concevoir aucune limite au sens usuel lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. **N.B.** L'échelle des ordonnées sur les quatre graphiques du bas ( $\alpha = -3.5$ ) a été comprimée 2500 fois par rapport aux quatre graphiques du haut, afin de rendre les courbes visibles. Lorsque  $\varepsilon$  devient trop petit, tout cadrage devient impossible. Voir cependant pages suivantes.

## Intégrales divergentes

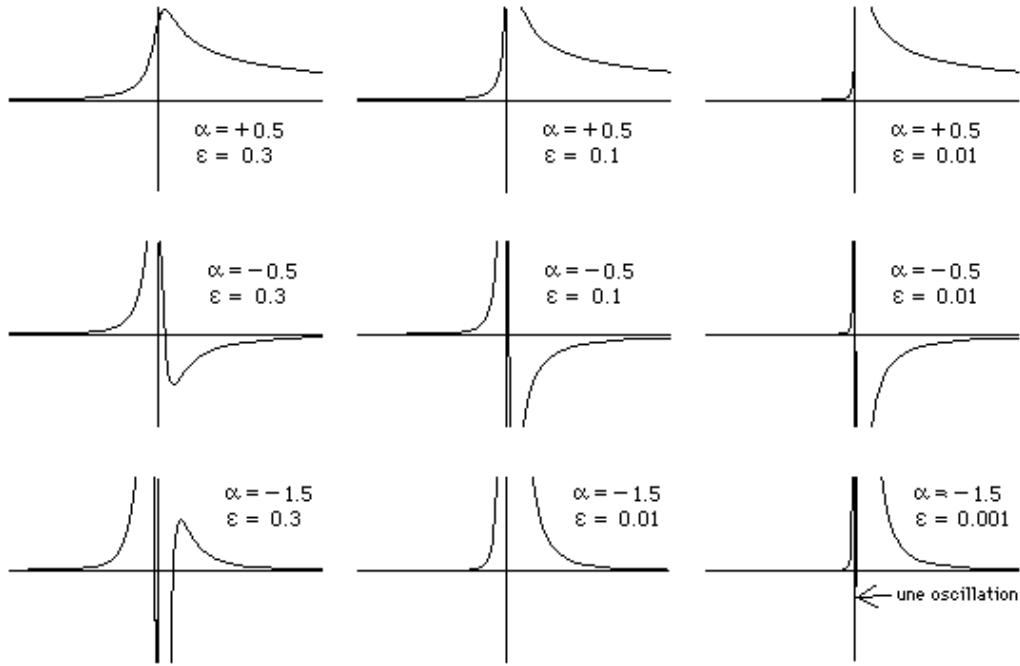


figure 4

Évolution de la courbe  $y = I_{\alpha, \varepsilon}(x)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Ici, contrairement à la figure 3, on représente tout à la même échelle. On a considéré les valeurs suivantes de  $\alpha$  :

— Première ligne :  $\alpha = +0.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3, 0.1$ , et  $0.01$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $1/\sqrt{\pi x} = x^{-1/2}/\Gamma(1/2)$ .

— Deuxième ligne :  $\alpha = -0.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3, 0.1$ , et  $0.001$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $-x^{-3/2}/2\sqrt{\pi} = x^{-3/2}/\Gamma(-1/2)$ .

— Troisième ligne :  $\alpha = -1.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3, 0.01$ , et  $0.0001$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $3x^{-5/2}/4\sqrt{\pi} = x^{-5/2}/\Gamma(-3/2)$ .

On voit que pour  $x < 0$ ,  $I_{\alpha, \varepsilon}(x)$  tend vers zéro, mais d'autant plus lentement que  $x$  est plus proche de zéro ; pour  $x > 0$ ,  $I_{\alpha, \varepsilon}(x)$  tend vers la fonction  $x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ . Mais au voisinage de  $x = 0$ , le comportement est fortement singulier : sur la première ligne ( $\alpha = +0.5$ ) la fonction passe par un maximum très aigu ; sur la deuxième ( $\alpha = -0.5$ ) elle passe d'abord par un maximum très aigu, puis, sur une très courte distance de l'ordre de  $\varepsilon$ , descend à un minimum, avant de remonter en longeant la courbe  $y = x^{-1.5}/\Gamma(-0.5)$ . Sur la troisième ( $\alpha = -1.5$ ) elle passe par un maximum très aigu, puis descend à un minimum, puis remonte encore à un maximum avant de redescendre en longeant la courbe  $y = x^{-2.5}/\Gamma(-1.5)$ .

Le voisinage de  $x = 0$  présente donc une oscillation d'amplitude énorme entre un maximum et un minimum (de l'ordre de  $\varepsilon^{\alpha-1}$ ), et de période très courte (de l'ordre de  $\varepsilon$ ). Sur la dernière courbe, qui correspond à la plus petite valeur de  $\varepsilon$ , l'oscillation est même devenue invisible car elle est confondue avec l'axe vertical.

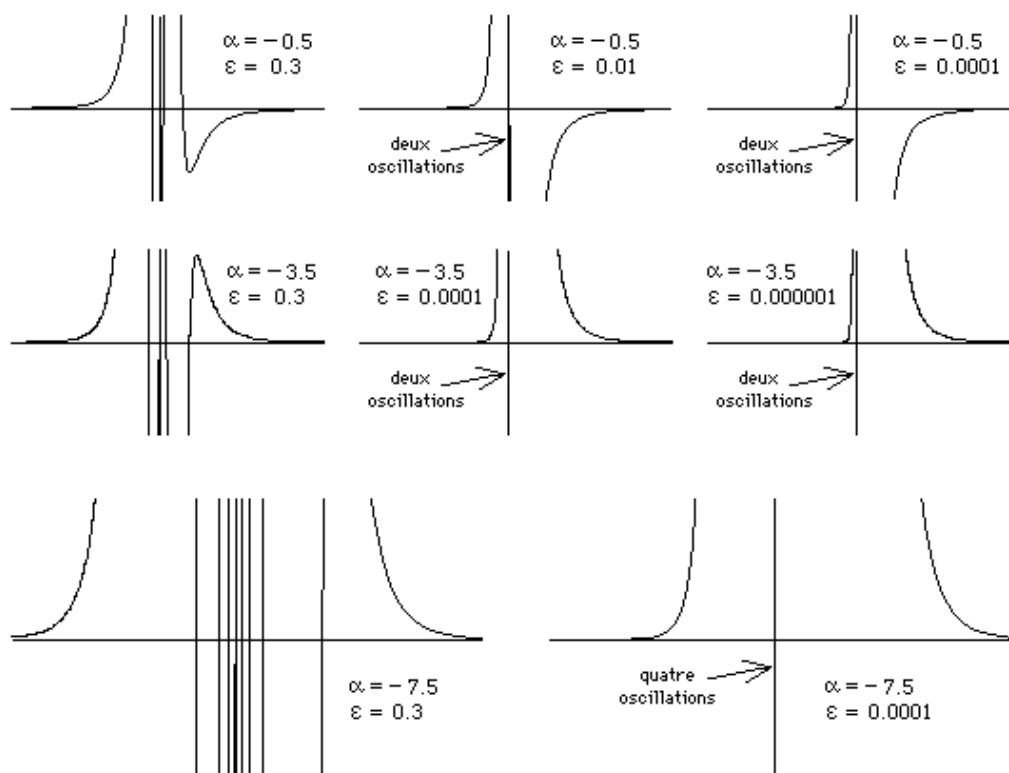


figure 4 (suite)

— Quatrième ligne:  $\alpha = -2.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3, 0.01$ , et  $0.0001$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $-15x^{-7/2}/8\sqrt{\pi} = x^{-7/2}/\Gamma(-5/2)$ .

— Cinquième ligne:  $\alpha = -3.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3, 0.0001$ , et  $0.000001$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $105x^{-9/2}/16\sqrt{\pi} = x^{-9/2}/\Gamma(-7/2)$ .

— Sixième ligne:  $\alpha = -7.5$  (avec  $\varepsilon = 0.3$  et  $0.001$ ). La fonction limite du côté droit ( $x > 0$ ) est la fonction  $2027025x^{-17/2}/256\sqrt{\pi} = x^{-17/2}/\Gamma(-15/2)$ .

Ici, le phénomène esquissé dans les trois premières lignes s'accroît, car le nombre d'oscillations augmente avec  $|\alpha|$ . On ne peut pas voir les courbes complètes: si on comprimait les ordonnées, on ramènerait certes les oscillations centrales dans le cadrage, mais les oscillations les plus extérieures, qui ont une amplitude nettement moindre, seraient alors écrasées sur l'axe horizontal.

La fonction tend bien vers une limite en dehors du voisinage de  $x = 0$ , mais non au voisinage de  $x = 0$ ; il faudra introduire une nouvelle notion de limite.



### Intégrales divergentes

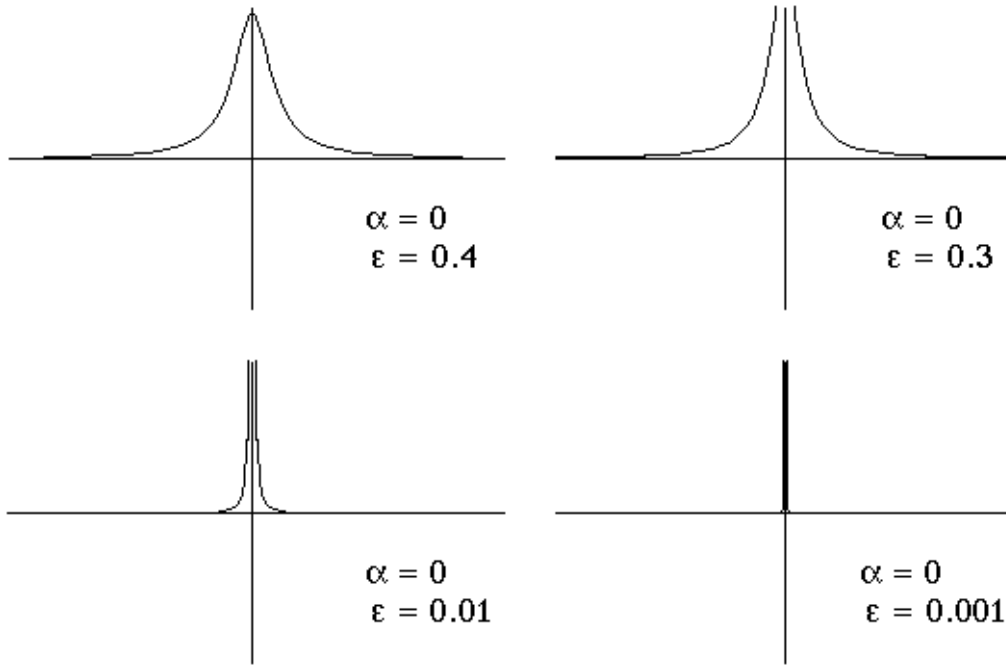


figure 5

Évolution de la courbe  $y = I_{0,\varepsilon}(x)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. La limite est la distribution  $\delta$  de Dirac.

Pour  $\alpha = 0$  (plus généralement pour  $\alpha$  entier  $\leq 0$ ) le facteur  $1/\Gamma(\alpha)$  devient nul, de sorte que la fonction limite pour  $x > 0$  est nulle. La fonction  $I_{0,\varepsilon}(x)$  tend vers zéro partout en dehors d'un voisinage de zéro. Mais au point  $x = 0$ , elle tend vers l'infini.

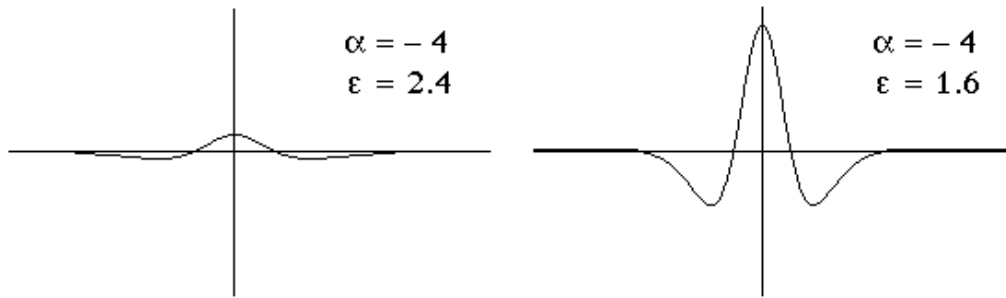


figure 6

Évolution de la courbe  $y = I_{-4,\varepsilon}(x)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. La limite est la quatrième dérivée de la distribution  $\delta$  de Dirac. On montre ici l'évolution progressive lorsque  $\varepsilon$  diminue. Le maximum central et les deux minima s'accroissent; deux maxima latéraux apparaissent. (T.S.V.P.)

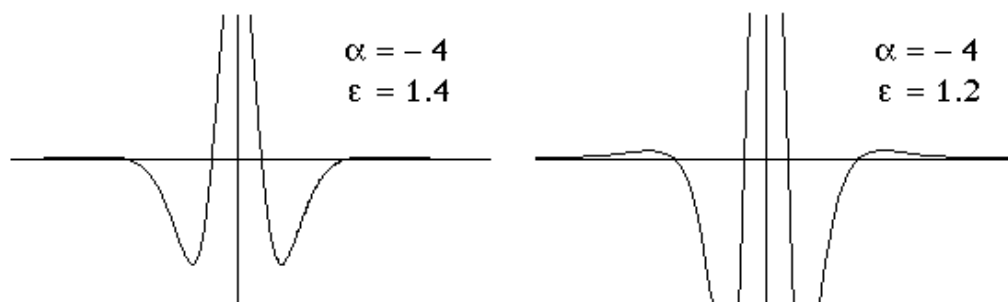


Fig 6 (suite). L'évolution se poursuit : le maximum central sort du champ et les deux minima sont plus marqués ; les deux maxima latéraux deviennent visibles.

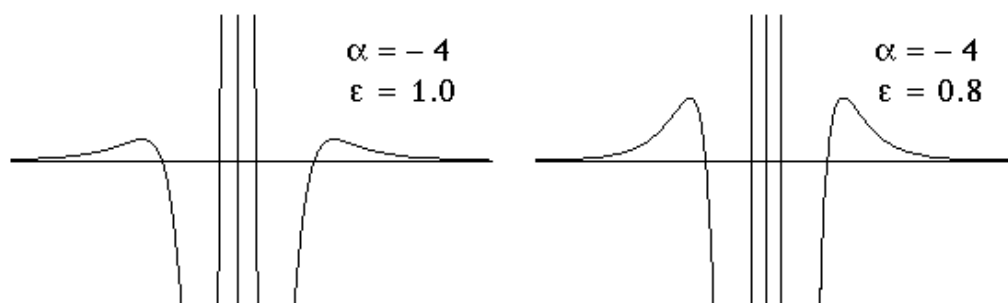


Fig 6 (suite). Le maximum central et les deux minima deviennent énormes, les deux maxima extérieurs grandissent.

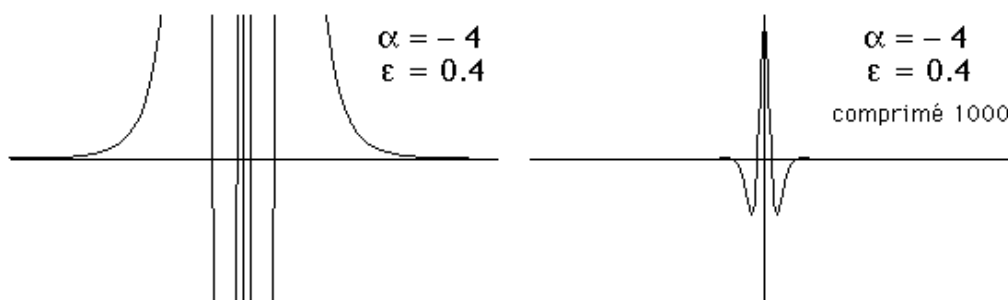


Fig 6 (suite). Le maximum central est maintenant égal à 4687,5, les deux minima à  $-3792,268$ , et les deux maxima extérieurs à 1448,517.

Graphique de gauche : les deux maxima latéraux sortent du champ ; les portions de courbe qui vont d'un extremum au suivant n'apparaissent plus que comme des droites verticales.

Graphique de droite : on a comprimé 1000 fois l'ordonnée pour ramener les extrema dans le champ, mais cela a pour effet de rendre invisibles les maxima latéraux.

### Intégrales divergentes

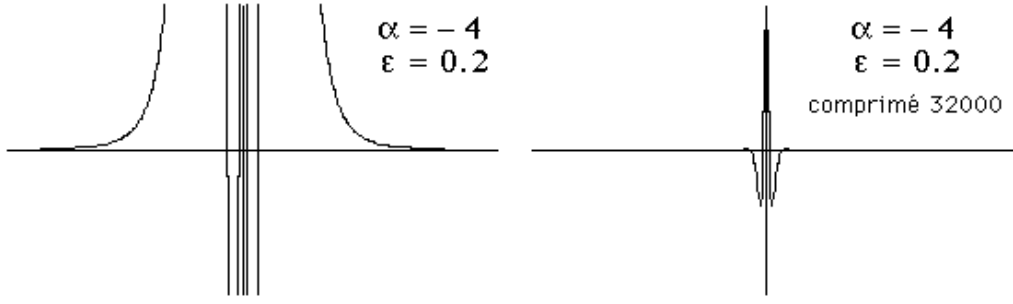


Fig 6 (suite). Le maximum central est passé à 150 000, les deux minima à  $-121\,352,562$ , et les deux maxima extérieurs à  $46\,352,551$ .

Graphique de gauche: La courbe est presque entièrement hors-champ.

Graphique de droite: on a comprimé 32000 fois l'ordonnée.

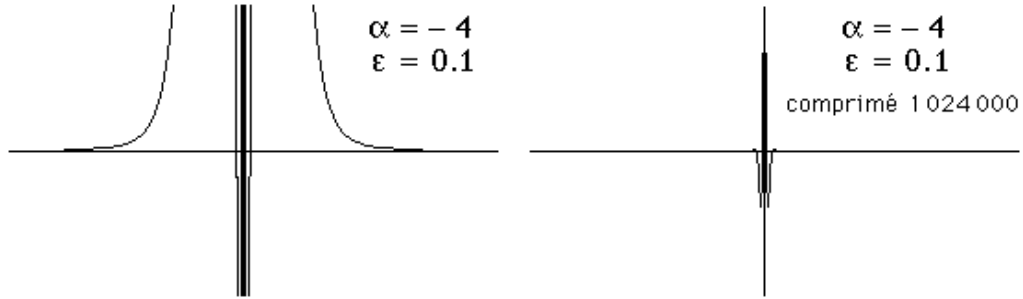


Fig 6 (fin). Le maximum central est maintenant égal à 4 800 000, les deux minima à  $-3\,883\,282$ , et les deux maxima extérieurs à  $1\,483\,281$ . La partie oscillante se concentre dans un petit voisinage de zéro.

La partie réelle est maintenant évidente, et le résultat est

$$I_{\alpha,\varepsilon}(x) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{r^{1-\alpha}} \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2} - (1-\alpha)\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \quad (3.15)$$

Il ne reste plus qu'à étudier de plus près cette fonction, et voir comment elle évolue quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Nous avons posé  $\theta = \arctan(\frac{x}{\varepsilon})$ . Introduisons maintenant  $\phi = \alpha\frac{\pi}{2} - (1-\alpha)\arctan(\frac{x}{\varepsilon})$ : c'est l'argument de la fonction  $\cos$  dans 3.15. Lorsque  $x$  parcourt l'intervalle de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $\arctan(\frac{x}{\varepsilon})$  parcourt l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ , donc  $(1-\alpha)\arctan(\frac{x}{\varepsilon})$  parcourt  $]- (1-\alpha)\frac{\pi}{2}, +(1-\alpha)\frac{\pi}{2}[$ ; et par conséquent  $\phi$  parcourt  $]\alpha\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $\phi$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  — donc  $\cos \phi$  tend vers zéro — et quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\phi$  tend vers  $\alpha\pi - \frac{\pi}{2}$  — donc  $\cos \phi$  tend vers  $\sin(\alpha\pi)$  —. En utilisant la formule des compléments on voit donc que, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  tend vers  $2\pi r^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ . Toutefois,  $\arctan(\frac{x}{\varepsilon})$  est déjà proche de  $\pm\frac{\pi}{2}$  (à 0.1 près) lorsque  $|x| \geq 10\varepsilon$ . Du fait que  $\phi$

dépend de  $x$  par  $\arctan(\frac{x}{\varepsilon})$ , cela veut dire que lorsque  $x$  parcourt l'intervalle de  $-10\varepsilon$  à  $+10\varepsilon$ ,  $\phi$  parcourt la quasi totalité de l'intervalle  $]\alpha\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , dont la longueur est  $\frac{1-\alpha}{2} \times 2\pi$ .

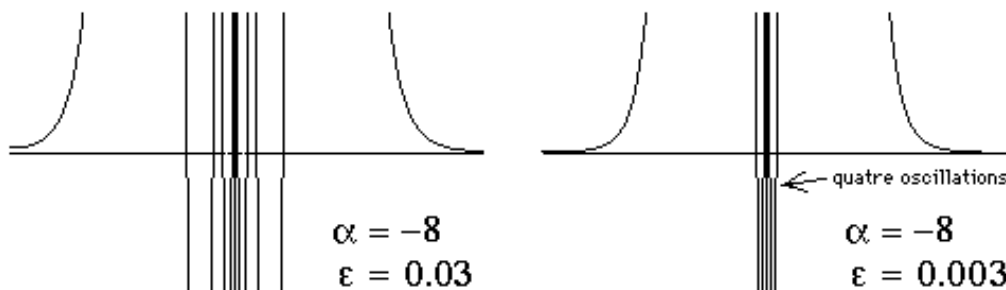


figure 7

Enfin, voici les courbes  $y = I_{-8,0.03}(x)$  et  $y = I_{-8,0.003}(x)$ . Le nombre d'oscillations a doublé par rapport au cas précédent. Les extrema sont énormes : de l'ordre de  $10^{18}$  pour  $\varepsilon = 0.03$  (graphique de gauche), et de  $10^{27}$  pour  $\varepsilon = 0.003$  (graphique de droite).

De façon purement qualitative, on peut donc résumer le comportement de la fonction  $x \mapsto I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  pour  $\varepsilon$  donné (en principe petit) :

- pour  $x < 0$  et  $|x| \gg \varepsilon$  :  $I_{\alpha,\varepsilon}(x) \simeq 0$  ;
- pour  $|x| \sim \varepsilon$  :  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  oscille entre des maxima positifs et des minima négatifs, dont l'amplitude est de l'ordre de  $2\Gamma(1-\alpha)/\varepsilon^{1-\alpha}$  ;
- pour  $x > 0$  et  $|x| \gg \varepsilon$  :  $I_{\alpha,\varepsilon}(x) \simeq 2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ .

Plus  $\varepsilon$  est petit, plus l'amplitude des oscillations est grande, et plus ces oscillations se concentrent dans un petit intervalle (de longueur  $\varepsilon$ ) autour de  $x = 0$ . Il est clair qu'un tel comportement ne donne aucune limite au sens usuel. Par contre, en dehors d'un voisinage de  $x = 0$ , la fonction  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  tend *au sens usuel* vers zéro pour  $x < 0$  et vers  $2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$  pour  $x > 0$ . De façon précise, on peut dire :

*Lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, alors, sur tout intervalle  $] -\infty, -a]$ ,  $I_{\alpha,\varepsilon}$  tend uniformément vers zéro ; et sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ ,  $I_{\alpha,\varepsilon}$  tend uniformément vers  $2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ .*

Vérifier en détail que la convergence est uniforme est un travail purement technique sans surprise, mais fastidieux (partir de 3.15).

Les figures 3 à 7 montrent les graphiques des fonctions  $I_{\alpha,\varepsilon}$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et de  $\alpha$ . La particularité la plus intéressante de ces fonctions est leur comportement-limite (lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro) extrêmement singulier. L'intégrale divergente 3.1 (pour  $\alpha < 1$ ) est précisément cette limite. Pour obtenir des solutions d'équations aux dérivées

## Intégrales divergentes

partielles sous forme d'intégrales divergentes, Jacques Hadamard a construit une théorie qui donne un sens à de telles limites<sup>(1)</sup>. Nous les placerons dans le cadre de la théorie des distributions.

Laurent Schwartz désigne cette limite par la notation “Pf.” :

$$I_{\alpha(x)} = \text{Pf.} \left\{ 2\pi \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} \text{Pf.} \{x^{\alpha-1}\} \quad (3.16)$$

Le symbole Pf. se lit indifféremment “pseudofonction” (terme introduit par Schwartz) ou “partie finie de” (terme employé par Hadamard).

Le phénomène qui se produit pour les intégrales  $I_{\alpha,\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, mérite l'étude détaillée qui lui a été consacrée ici. Dans les applications à la Physique, on rencontre très souvent des intégrales divergentes, mais la cause en est généralement que la description mathématique introduit implicitement des infinis. Par exemple, lorsqu'on décrit un faisceau de laser ou d'électrons, on le fait généralement à l'aide d'une onde plane monochromatique, qui aurait, en toute rigueur, une extension infinie; dans la réalité, évidemment, le faisceau est limité (ses dimensions spatiales sont simplement grandes par rapport à la longueur d'onde, de sorte que l'infini est une représentation commode). Si on construisait des modèles mathématiques qui respectent mieux les conditions physiques, on ne rencontrerait jamais d'intégrales divergentes, mais les calculs analytiques seraient fortement alourdis: les règles de calcul pour la distribution  $\delta$  de Dirac sont bien plus simples que les règles équivalentes pour les fonctions  $\sqrt{n/\pi} e^{-nx^2}$  par exemple. Toutefois, lorsqu'on utilise des “fonctions” de Dirac, des pseudofonctions, etc., on ne doit jamais perdre de vue qu'elles représentent *en réalité* des fonctions comme les  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  où  $\varepsilon$  est simplement petit et non véritablement nul.

Lorsque  $\varepsilon$  est vraiment petit, les oscillations que nous avons analysées et qu'on peut voir sur les figures 3 à 7, ont certes une amplitude énorme, mais elles ne se produisent que dans un intervalle minuscule (sur les figures où  $\varepsilon$  est très petit, les oscillations se confondent avec l'axe vertical). En dehors de ce minuscule intervalle, la fonction  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  a une limite (au sens usuel) qui est 0 pour  $x < 0$  et  $2\pi x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$  pour  $x > 0$ . On peut même dire que la fonction  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  a une limite au sens usuel partout, excepté en  $x = 0$ . Mais cette limite n'est pas une fonction intégrable: l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} dx$$

---

<sup>(1)</sup> J. Hadamard *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Éd. Hermann, Paris, 1932, page 184.

diverge; on notera en particulier qu'elle diverge en  $x = 0$  pour  $\alpha < 0$ . Or, la propriété remarquable qui caractérise les oscillations est que leur moyenne est nulle : les énormes minima négatifs compensent en moyenne les énormes maxima positifs. De sorte que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) dx$$

converge toujours en  $x = 0$  et tend vers une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , bien qu'à la limite la fonction soit partout, sauf en un seul point, égale à une fonction dont l'intégrale diverge. C'est cette limite que Hadamard appelait "la partie finie".

Voyons cela de plus près. Prenons une fonction  $\varphi(x)$  "lisse", c'est-à-dire infiniment dérivable; pour la commodité, on la supposera dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . La fonction  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  est la transformée de Fourier de la fonction

$$\xi \mapsto \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2}$$

En utilisant la relation 3.5 (théorème 3) du chapitre **VI**, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{[(i\xi)^\alpha]_2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

Puisque  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on aura aussi  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  d'après les théorèmes 1 et 2 du chapitre **VI**; par conséquent, d'après les théorèmes généraux, on peut passer à la limite sous le signe  $\int$  dans le membre de droite (mais non dans le membre de gauche). On peut donc écrire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\alpha,\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[(i\xi)^\alpha]_2} d\xi \quad (3.18)$$

Cette égalité signifie que, bien que  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  n'ait pas de limite intégrable pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , son intégrale pondérée par n'importe quelle fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  en a cependant une. Ce sont les oscillations moyennisables de la fonction  $I_{\alpha,\varepsilon}(x)$  qui rendent cela possible.