0. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre toute équation de la forme

$$(0.1) \qquad (Lu)(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\, u(x) = f(x) ,$$

où les fonctions a_{ij}, b_i, c et f ne dépendent que de la variable $x = (x_1,\dots,x_N) \in \Omega$. A cette équation on associe la matrice des coefficients des dérivées secondes $[a_{ij}]$. Comme dans la pratique les solutions de (0.1) vérifient partout (ou presque partout) la propriété de commutation $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ on peut supposer la matrice $[a_{ij}(x)]$ symétrique. Par suite cette matrice est diagonalisable dans le groupe symétrique de $\mathbb{R}^N$. Soient $\lambda(x)$ (resp. $\Lambda(x)$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $[a_{ij}(x)]$. L'équation (0.1) est dite <u>elliptique</u> en x si $\lambda(x)\,\Lambda(x) > 0$ et <u>elliptique</u> si pour tout x , $\lambda(x)\,\Lambda(x) > 0$. Si l'équation (0.1) est elliptique et si les coefficients (a_{ij}) sont continus, on peut toujours supposer $\lambda(x) > 0$. Une classe particulièrement importante d'équation elliptique est celle où $\Lambda(x)/\lambda(x)$ est borné indépendamment de x ; l'équation (0.1) est alors <u>uniformément elliptique</u>. L'exemple le plus classique d'équations uniformément elliptiques est l'équation de Poisson

$$(0.2) \qquad \Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f .$$

Aux équations linéaires du type (0.1) se rattachent les équations quasilinéaires du second ordre

$$(0.3) \qquad \sum_{i,j} a_{ij}(x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + b(x,u,Du) = 0$$

où $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_N})$ et où les fonctions a_{ij} et b dépendent de x, u et Du . La structure de ces équations sera encore définie par le spectre de la matrice $[a_{ij}(x,u,Du)]$ et la terminologie précédente pourra encore s'employer. Deux exemples classiques d'équations quasi-linéaires du second ordre sont les suivants

$$(0.4) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{1+|Du|^2} \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = Nf\sqrt{1+|Du|^2}$$

où $|Du|^2 = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$ et

$$(0.5) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{1-\frac{\gamma-1}{2}|Du|^2} \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0 \ .$$

L'équation (0.4) correspond à la construction dans $\Omega \times \mathbb{R}$ de l'hyper-surface $(x,u(x))$ non paramétrée dont la courbure moyenne f est donnée. Cette équation est elliptique mais non uniformément elliptique puisque $\Lambda/\lambda = 1 + |Du|^2$. L'équation (0.5) correspond, quand $\gamma > 1$, au mouvement irrotationnel d'un gaz parfait ; on vérifie alors que $\lambda = (1 - \frac{\gamma+1}{2}|Du|^2)/(1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du|^2)$ et $\Lambda = 1$. Cette équation n'est elliptique que si $\sqrt{2/(\gamma+1)} < |Du| < \sqrt{2/(\gamma-1)}$ (mouvement subsonique). Si $|Du| > \sqrt{2/(\gamma-1)}$ l'équation cesse d'être elliptique (hyperbolique et le mouvement est supersonique).

Le but de notre cours est d'étudier la régularité des solutions de (0.1) ou de (0.3) dans Ω , c'est-à-dire d'obtenir des estimations sur la norme dans certains espaces fonctionnels définis sur Ω de toutes les solutions de ces équations. Ces estimations seront obtenues en fonction de la régularité des différentes données a_{ij}, b_i, b, c et f . Dans le cas où on recherche une régularité de u dans Ω , la régularité de l'hypersurface $\partial\Omega$ intervient. L'obtention d'estimations a priori pour les équations aux dérivées partielles est parfois fastidieuse mais c'est la clef de toutes les recherches faisant intervenir de telles équations : existence de solutions, valeurs propres, bifurcations, approximation numérique, etc ...).

L'idée essentielle pour obtenir des résultats de régularité à l'intérieur pour les solutions de (0.1) est de démontrer des estimations pour l'équation de Poisson (0.2), puis de considérer localement L comme une perturbation d'un opérateur à coefficients constants L_o en écrivant

$$(0.6) \qquad Lu = L_o u + (L-L_o)u$$

où $(L_o u)(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_o) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x)$. L'équation (0.1) s'écrit alors

$$(0.7) \qquad L_o u = g = f - (L-L_o)u \ .$$

Par un changement linéaire de coordonnées, l'équation (0.7) se ramène alors à (0.2). Cette méthode nécessite évidemment des hypothèses de continuité sur les (a_{ij}) . Dans cette optique la première théorie complète de la régularité (et de l'existence) des solutions de (0.1) est due à Schauder. Le cadre fonctionnel est l'espace des fonctions holdériennes dans Ω et le type de résultat obtenu est le suivant :

Supposons l'équation (0.1) elliptique dans Ω , que les coefficients a_{ij}, b_i, c et f soient holdériens d'exposant α $(0 < \alpha < 1)$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω il existe une constante C dépendant de N, L et de Ω' telle que pour toute solution u de (0.1) on ait

$$(0.8) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C \left(\sup_{\Omega}|u| + \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}\right) ,$$

où $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ (resp. $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')$) est l'espace des fonctions continues et holdériennes d'exposant α dans $\overline{\Omega}$ (resp. l'espace des fonctions deux fois continument dérivables dans Ω' et dont les dérivées partielles secondes sont dans $C^{\alpha}(\overline{\Omega}')$).

La seconde percée dans la théorie de la régularité est due à Agmon, Douglis et Nirenberg qui ont utilisé des résultats de Calderon et Zygmund sur les intégrales singulières dans $\mathbb{R}^N$. Le cadre est celui des espaces de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$. Un résultat typique est le suivant :

<u>Supposons l'équation (0.1) elliptique dans Ω , que les coefficients a_{ij}, b_i, c soient continus dans Ω et que f appartienne à $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω il existe une constante C dépendant de N, L et de Ω' telle que pour toute solution u de (0.1) on ait</u>

(0.9) $$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C\,(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}) .$$

Ces deux théories sont liées aux propriétés fines du potentiel newtonien dans $\mathbb{R}^N$ $(N > 2)$ défini dans $\mathbb{R}^N - \{0\}$ par

(0.10) $$\Gamma(x) = -\frac{1}{N(N-2)\omega_N}\,|x|^{2-N} ,$$

où ω_N est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^N$, et à la formule

(0.11) $$u(x) = \int_{R^N} \Gamma(y)\,\Delta u(x,y)\,dy = (\Gamma * \Delta u)(x)$$

valable si u est de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^N$.

Il existe une autre manière d'aborder les équations aux dérivées partielles du second ordre sans lien avec la théorie du potentiel : elle consiste à partir d'opérateurs en <u>forme divergentielle</u>

(0.12) $$\tilde{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i \left(c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)u)\right) + d(x)u$$

et de dire que u est solution faible de l'équation

(0.13) $$\tilde{L}u = g$$

si u appartient à $W^{1,1}(\Omega)$ et si pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans Ω on a

(0.14) $$\int_\Omega \{-\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_i \left(c_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi - b_i u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + du\varphi\}dx = \ldots$$

$$\ldots \int_\Omega f\,\varphi\,dx .$$

La formule (0.14) prend un sens dès que les fonctions a_{ij}, b_i, c_i et d appartiennent à $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et f est dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Il est clair en outre que si les coefficients de $\tilde{L}$ sont assez réguliers il n'y a pas de différence entre (0.1) et (0.13). On associe à l'opérateur $\tilde{L}$ la forme quadratique de $\mathbb{R}^N$, $\ell(x)$, définie par

$$(0.15) \qquad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_N) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j = \ell(x)(\xi) \,.$$

L'équation (0.13) est dite elliptique si pour (presque) tout x dans Ω la forme $\ell(x)$ est définie positive. Le résultat le plus important de la théorie des équations elliptiques à forme divergentielle est sans doute le théorème de De Giorgi et Nash dont une forme est la suivante :

Supposons que les coefficients de $\tilde{L}$ sont dans $L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour presque tout x dans Ω et ξ dans $\mathbb{R}^N$ on ait

$$(0.16) \qquad \ell(x)(\xi) \geq \alpha \sum_i \xi_i^2$$

et supposons que g appartienne à $L^p(\Omega)$, $p > N/2$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω il existe γ, $0 < \gamma < 1$ et $C > 0$ dépendant de $\tilde{L}$, Ω', $\|g\|_{L^p(\Omega)}$ tels que pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$ solution faible de (0.13) dans Ω on ait

$$(0.17) \qquad \|u\|_{C^\gamma(\overline{\Omega}')} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right) .$$

Une conséquence très importante de ce résultat est l'obtention de résultats de régularité pour les problèmes de minimisation sur $W^{1,2}(\Omega)$ de la forme suivante

$$(0.18) \qquad \int_\Omega H(x,u,Du)dx = \min_{v \in W^{1,2}(\Omega)} \int_\Omega H(x,v,Dv)dx$$

où H est une fonction de $(x,r,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, convexe en p, dont le hessien $\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(x,r,p)\right]$ vérifie les hypothèses d'ellipticité et de régularité. Par la suite le résultat de De Giorgi et Nash a été étendu par Moser aux équations quasilinéaires à forme divergentielle de la forme suivante

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x,u,Du)) + B(x,u,Du) = 0 \ , \tag{0.19}$$

où les fonctions A_i et B sont définies sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et y vérifient pour presque tout (x,r,p)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i A_i(x,r,p)\ p_i \geq c\ |p|^2 - d \ , \\ \sum_i |A_i(x,r,p)| + |B(x,r,p)| \leq c'\ |p| + d' \ . \end{array} \right. \tag{0.20}$$

Ces résultats ont par la suite été étendus à des opérateurs divergentiels quasilinéaires à croissance non nécessairement quadratique par Ladyzenskaya, Ural'ceva et Serrin. Les résultats obtenus indiquent que les solutions (faibles) de 0.19) sont holdériennes localement.

Si les résultats de régularité holdérienne des solutions des équations quasilinéaires sont relativement aisés à obtenir grâce à la méthode de Moser, il est beaucoup plus difficile d'obtenir des résultats de régularité plus élevés, portant sur le gradient par exemple, surtout quand l'équation proposée n'est pas uniformément elliptique. Concernant l'équation des surfaces minimales, c'est-à-dire

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0 \tag{0.21}$$

le premier résultat général important est dû à Bombieri, De Giorgi et Miranda qui ont montré que les solutions de (0.21) sont naturellement lipschitziennes grâce à l'estimation suivante

$$|Du(x)| \leq C_1 \exp \{C_2 \sup_\Omega (u-u(x))/d\} \tag{0.22}$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de N , où $x \in \Omega$ et $d = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Concernant les équations quasilinéaires divergentielles dégénérées dont l'exemple type est

$$(0.23) \qquad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f$$

$(1 < p < \infty)$ les résultats sont dûs à Ural'Ceva et indépendamment Uhlenbeck. La forme que nous exposerons est due à Toldsdorf.

<u>Soient $f \in L^\infty(\Omega)$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$; pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω , il existe une constante C dépendant de $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, de N et de Ω' et $\alpha \in]0,1[$ tels que</u>

$$(0.24) \qquad \|Du\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}')} \leq C .$$

Le résultat de Tolksdorf est en fait plus général.

Une partie importante de ce cours est tirée du cours que L.C. Evans a donné à l'Université de Kentucky "Bounds for elliptic equations". Nous nous sommes aussi inspirés du livre de Gilbarg et Trudinger [14], des articles de Brézis et Strauss [10] et de Tolksdorf [26]. Ce cours a été professé à l'Université de Tours en 1982-1983 et 1983-1984.