1. RAPPELS SUR L'INTEGRATION ET LES ESPACES DE SOBOLEV

1.1. Notations des espaces usuels et de leur norme

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $dx = dx_1 \dots dx_N$ est la mesure de Lebesgue et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega \text{ess} \ |u| \ ,$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_\Omega \text{ess} \ |u| + \sup_{i=1\dots N} \left(\sup_\Omega \text{ess} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right) \ ,$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_i \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx + \sum_{i,j} \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| dx\right)^{1/p} \ ,$$

$$\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \sup_{i,j} \left(\sup_\Omega \text{ess} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right) \ ,$$

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1 \ ,$$

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega |u| + [u]_\alpha \ ,$$

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega |u| + \sum_i \left(\sup_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \sum_i \left(\sup_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_\alpha\right) \ ,$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega |u| + \sum_i \sup_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \sum_{i,j} \left(\sup_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]_\alpha\right)$$

L'espace $C^k(\Omega)$ (resp. $C_o^k(\Omega)$) est l'espace des fonctions k différentiables dans Ω, $0 \leq k \leq \infty$, (resp. k fois différentiables dans Ω et à support compact dans Ω).

1.2. Quelques inégalités classiques

Inégalité de Cauchy : $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, $\forall$ a , b réels.

Inégalité de Cauchy avec ε : $ab \le \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$, $\forall$ a, b réels, $\forall\ \varepsilon > 0$.

Inégalité de Jensen : Soient ϕ une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur un sous-ensemble G de mesure finie dans $\mathbb{R}^N$, alors

$$\phi\left(\frac{1}{|G|} \int_G f(x)\, dx\right) \le \frac{1}{|G|} \int_G \phi(f(x))dx \quad ,$$

où $|G| = \int_G dx$.

Inégalité de Young : $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $\forall$ a, b ≥ 0 , $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Young avec ε : $ab \le \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^{q/p}} \frac{b^q}{q}$, $\forall$ a,b ≥ 0 , $\forall\ \varepsilon > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hölder : $\int_\Omega |uv|dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$, $\forall\ u \in L^p(\Omega)$, $\forall\ v \in L^q(\Omega)$, $1 \le p,q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hölder généralisée : $\int_\Omega |u_1 u_2 \dots u_k| dx \le \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots$ $\dots \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$ $\forall\ u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \le i \le k$, $1 \le p_1, \dots, p_k \le \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$.

Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \ , \ \forall\ k \text{ entier} \ , \ \forall\ a_1, \dots, a_k \ge 0 \ .$$

<u>Inégalité d'interpolation</u> : $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^t(\Omega)}$,

$\forall\ s \leq r \leq t$, $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1-\alpha}{t}$, $\forall\ u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$.

Pour les démonstrations (élémentaires) de ces inégalités on consultera [1] et [15] .

1.3. Intégration par parties et inégalités d'interpolation

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ régulière dans le sens où en tout point $x \in \partial\Omega$ il existe un hyperplan tangent T_x à $\partial\Omega$ et où le vecteur normal unitaire sortant $n(x)$ varie continument avec x (on dit que $\partial\Omega$ est de classe C^1). On pose $n(x) = (n_1(x),\dots,n_N(x)$ et on a pour tout f , $g \in C^1(\overline{\Omega})$ la formule d'intégration par parties

$$(1.1) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g\, dx = - \int_\Omega f\, \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} f\, g\, n_i\, d\sigma \quad ,$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$. On écrit $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle Du,n\rangle = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, n_i$ = dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

<u>Formule de Green</u>. Soient $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^2(\overline{\Omega})$ alors

$$(1.2) \qquad -\int_\Omega u\Delta v\, dx = \int_\Omega \langle Du,\ Dv\rangle\, dx - \int_{\partial\Omega} u\, \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma \quad ,$$

(dans la formule précédente $\langle Du,\ Dv\rangle = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$) .

LEMME 1.1. <u>Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $1 \leq p < \infty$ et $0 < \varepsilon_0 < \infty$. Il existe une constante $K = K(\varepsilon_0,\ p,\ b-a)$ dépendant continument de $b-a$ telle que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $f \in C^2(]a,b[)$ on ait</u>

$$(1.3) \qquad \int_a^b |f'(t)|^p dt \leq K\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + \frac{K}{\varepsilon}\int_a^b |f(t)|^p\, dt \ .$$

<u>Si $b-a = +\infty$ alors on peut trouver K ne dépendant que de p</u> .

<u>Démonstration</u>. Sans perdre en généralité on peut supposer $\varepsilon_0 = 1$ puisque $0 < \varepsilon/\varepsilon_0 \leq 1$ et (1.3) implique alors

$$(1.4) \qquad \int_a^b |f'(t)|^p dt \leq K\, \varepsilon/\varepsilon_0 \int_a^b |f''(t)|^p dt + K\, \varepsilon_0/\varepsilon \int_a^b |f(t)|^p\, dt \;;$$

on prend alors $K(\varepsilon_0, p, b-a) = K(1, p, b-a) \max(\varepsilon_0\,, 1/\varepsilon_0)$.

Démontrons (1.3) en supposant tout d'abord $a = 0$ et $b = 1$. Pour $0 < \xi < 1/3$ et $2/3 < \eta < 1$ il existe $\lambda \in \,]\xi, \eta[$ tel que

$$(1.5) \qquad |f'(\lambda)| = \left|\frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}\right| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| \;.$$

Par suite, pour tout $x \in \,]0, 1[$

$$(1.6) \qquad |f'(x)| = \left|f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t)dt\right| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \left|\int_\lambda^x f''(t)dt\right| \;.$$

En intégrant par rapport à ξ sur $]0, \frac{1}{3}[$ et par rapport à η sur $]\frac{2}{3}, 1[$, on en déduit

$$\frac{1}{9}|f'(x)| \leq \int_0^{1/3} |f(\xi)|d\xi + \int_{2/3}^1 |f(\eta)|d\eta + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt \;,$$

d'où $\quad \frac{1}{9}|f'(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt$ et par Hölder

$$|f'(x)|^p \leq 2^{p-1}\, 9^p \int_0^1 |f(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_0^1 |f''(t)|^p\, dt \;, \quad \text{d'où}$$

$$(1.7) \qquad \int_0^1 |f'(x)|^p \leq K_p \int_0^1 |f(t)|^p dt + K_p \int_0^1 |f''(t)|^p\, dt \;,$$

avec $K_p = 2^{p-1}\, 9^p$. Pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ fini on pose $\varphi(t) = (b-a)t + a$ et on applique (1.7) à $f \circ \varphi$. On a

$$(1.8) \qquad \int_a^b |f'(t)|^p dt \leq K_p (b-a)^p \int_a^b |f''(t)|^p dt + K_p (b-a)^{-p} \int_a^b |f(t)|^p \, dt \quad .$$

Comme $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe un entier n tel que $\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon^{1/p}$. En posant $a_j = a + (b-a)j/n$ pour $j = 0, 1, \ldots, n$, comme $a_j - a_{j-1} = (b-a)/n$, on a

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p \, dt \quad ,$$

$$\leq K_p \sum_{j=1}^{n} \{ (\frac{b-a}{n})^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f''(t)|^p dt + (\frac{n}{b-a})^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(t)|^p dt \} .$$

Si on pose $K(1,p,b-a) = K_p \max[(b-a)^p, 2^p (b-a)^{-p}]$ on en déduit

$$(1.9) \qquad \int_a^b |f'(t)|^p dt \leq \tilde{K}(p,b-a) \{ \varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b |f(t)|^p dt \} \quad ,$$

et K dépend continument de $b-a$.

Si $b-a = \infty$, par exemple avec a fini et $b = +\infty$, on se fixe ε et on considère $a_j = a + j\,\varepsilon^{1/p}$, $j = 0, 1, \ldots$, d'où $a_j - a_{j-1} = \varepsilon^{1/p}$. On applique (1.8) entre a_{j-1} et a_j

$$(1.10) \qquad \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p dt \leq K_p \varepsilon \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f''(t)|^p dt + \frac{K_p}{\varepsilon} \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(t)|^p \, dt \quad .$$

En sommant $j = 1, \ldots \infty$ on en déduit (1.3) avec $K = K_p = 2^{p-1}\, 9^p$.

REMARQUE 1.1. Si $p = +\infty$ on a encore

$$(1.11)\qquad \sup_{[a,b]} |f| \leq K\,\varepsilon \sup_{[a,b]} |f''| + \frac{K}{\varepsilon} \sup_{[a,b]} |f| \,.$$

Il suffit pour cela de prendre la racine p-ième de chaque côté de (1.3) avec ε remplacé par ε^p et d'utiliser le fait que pour tout $\varphi \in C([a,b])$ $\lim\limits_{p\to+\infty} \|\varphi\|_{L^p(a,b)} = \sup\limits_{[a,b]} \varphi$.

COROLLAIRE 1.1. <u>Soit $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in C_0^2(\Omega)$ on ait</u>

$$(1.12)\qquad \Big(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{1/p} \leq \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big|^p dx\Big)^{1/p} + \frac{C}{\varepsilon}\Big(\int_\Omega |u|^p dx\Big)^{1/p}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\tilde u$ le prolongement de u par 0 dans $\complement\Omega$; $\tilde u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et pour tout i , $1 \leq i \leq N$ on a à partir de (1-3), avec $\varepsilon' > 0$,

$$(1.13)\qquad \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\Big|^p dx \leq K\varepsilon' \int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial x_i}\Big|^p dx + \frac{K}{\varepsilon'}\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde u|^p\, dx \,.$$

En sommant et en prenant la racine p-ième, sachant que $(a^p+b^p)^{1/p} \leq a+b$, on en déduit

$$(1.14)\qquad \begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\Big|^p dx\Big)^{1/p} &\leq (K\varepsilon')^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial x_i^2}\Big|^2 dx\Big)^{1/p} + \ldots \\ &\ldots + \Big(\frac{NK}{\varepsilon'}\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\tilde u|^p\, dx\Big)^{1/p} , \end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant $\varepsilon = (K\varepsilon')^{1/p}$ et $C = (NK^2)^{1/p}$.

REMARQUE 1.2. La philosophie du Corollaire 1.1 est que pour "contrôler" la norme de Du dans $L^p(\Omega)$, il suffit de contrôler u et les dérivées partielles secondes de u . Ce sont ces dérivées qui jouent le rôle décisif dans la recherche d'estimations a priori dans les espaces $W^{2,p}(\Omega)$.

COROLLAIRE 1.2. <u>Supposons Ω borné et $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in C_0^2(\Omega)$ on ait</u>

$$(1.15) \qquad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\Big(\sum_{i,j} \int_\Omega \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^p dx\Big)^{1/p} .$$

<u>Démonstration</u>. L'inégalité (1.9) est basée sur (1.12) et sur <u>l'inégalité de Poincaré</u> que nous rappelons : <u>il existe une constante C' telle que pour tout $v \in C_0^1(\Omega)$ on ait</u>

$$(1.16) \qquad \Big(\int_\Omega |v|^p dx\Big)^{1/p} \leq C'\Big(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^p dx\Big)^{1/p} .$$

Pour démontrer (1.16) soit $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 dans Ω et soit $a > 0$ tel que $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : -a \leq x_i \leq a ,\ \forall\ 1 \leq i \leq N\}$. On a

$\tilde{v}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \tilde{v}(-a, x_2, \ldots, x_N) + \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_N)dt$, d'où par

Hölder $|\tilde{v}(x_1, \ldots, x_N)| \leq (2a)^{(p-1)/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_N)\Big|^p dt\Big)^{1/p}$.

En intégrant dans $\mathbb{R}^N$ on en déduit

$$(1.17) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}|^p\, dx \leq (2a)^p \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1}\Big|^p dx .$$

Comme $\tilde{v}$ est à support dans Ω on a

$$(1.18) \qquad \int_\Omega |v|^p\, dx \leq (2a)^p \int_\Omega \Big|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1}\Big|^p dx ,$$

d'où (1.16). On obtient (1.15) en combinant alors (1.16) avec (1.13), en choisissant ε assez grand.

REMARQUE 1.3. Le Corollaire 1.1 reste valable pour des fonctions qui ne sont pas à support compact dans Ω dès que la frontière de Ω est un peu régulière. Si Ω est borné on a (1.12) pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ (et C dépend de ε_o) quand Ω a <u>la propriété du cône</u>, à savoir qu'il existe un cône Γ de $\mathbb{R}^N$ d'intérieur non vide tel que tout point x de Ω est le sommet d'un cône Γ_x inclu dans Ω et obtenu à partir de Γ par une isométrie de $\mathbb{R}^N$, (voir [1] pour la démonstration et des extensions).

1.4. Injections des espaces de Sobolev

PROPOSITION 1.1. (Sobolev). <u>Soit $u \in C_o^1(\mathbb{R}^N)$, alors pour $1 \leq p < N$ on a l'inégalité</u>

$$(1.19) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{pN/(N-p)} dx\right)^{(N-p)/Np} \leq \frac{(N-1)p}{N(N-p)} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p}$$

<u>Démonstration</u>. On suppose d'abord $p = 1$ et on a pour tout i, $1 \leq i \leq N$,

$$|u(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},\xi_i,x_{i+1}\ldots)d\xi_i\right| \quad ,$$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},\xi_i,x_{i+1},\ldots)\right| d\xi_i \quad , \quad \text{d'où}$$

$$(1.20) \qquad |u(x)|^{N/(N-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| d\xi_i\right)^{1/(N-1)} .$$

En intégrant par rapport à x_1 et en appliquant la formule de Hölder généralisée, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 \leq \ldots$$

$$\ldots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| d\xi_1\right)^{1/(N-1)} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| d\xi_i d\xi_1\right)^{1/(N-1)} .$$

En intégrant par rapport à $x_2,\dots,x_N$ et en appliquant à chaque fois la formule généralisée de Hölder avec $p_1 = p_2 = \dots = p_n = N-1$ on en déduit

$$(1.21) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{N/(N-1)} dx \le \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx\right)^{1/(N-1)} ,$$

d'où par l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique,

$$(1.22) \qquad \|u\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)} \le \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Dans le cas général on applique (1.22) à $v = u^\gamma$ (γ à déterminer). On a $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/N} \le \dots$

$$\dots \le \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} |u|^\gamma\right| dx = \frac{\gamma}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx ,$$

$$\le \frac{\gamma}{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} .$$

On choisit γ tel que $\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}$ ou $\gamma = \frac{(N-1)p}{N-p}$ et on en déduit (1.19).

PROPOSITION 1.2. (Morrey). <u>Soit $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, alors pour $N < p < \infty$ on a a , en posant $\beta = 1 - \frac{N}{p}$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$</u>

$$(1.23) \qquad |u(x)-u(y)| \le \frac{2}{\beta} |x-y|^\beta \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} .$$

<u>Démonstration</u>. Soient $a > 0$, p_a un pavé de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 , de côté a . Pour $x \in P_a$ on a $u(x)-u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(u(tx))dt$ d'où comme $|x| \le a$

$$(1.24) \qquad \left|\frac{1}{a^N}\int_{p_a} u(x)dx - u(0)\right| \le \frac{1}{a^{N-1}} \int_0^1 \left(\int_{p_a} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dxdt\right) .$$

Si $P_{ta} = \{x \in \mathbb{R}^N \ , \ -ta \le x_i \le ta \ , \ \forall\ 1 \le i \le N\}$, on a

$$(1.25) \quad \left|\frac{1}{a^N}\int_{P_a} u(x)dx - u(0)\right| \le \frac{1}{a^{N-1}} \int_0^1 \frac{dt}{t^N} \int_{P_{ta}} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx \ .$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\int_{P_{ta}} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx \le (ta)^{Np/(p-1)} \sum_i \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} ,$$

d'où

$$(1.26) \quad \begin{aligned} &\left|\frac{1}{a^N} \int_{P_a} u(x)dx - u(0)\right| \le \dots \\ &\dots\ a^{1-N+N(p-1)/p} \left(\int_0^1 t^{-N+N(p-1)/p} dt\right) \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} \ . \end{aligned}$$

Si on explicite

$$(1.27) \quad \left|\frac{1}{a^N} \int_{P_a} u(x)dx - u(0)\right| \le \frac{a^\beta}{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} .$$

Par translation, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ on considère un pavé P_a de côté $a = |x-y|$. En appliquant (1.27) et l'inégalité triangulaire on en déduit (1.23).

COROLLAIRE 1.3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 alors

(i) si $1 \le p < N$, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = Np/(N-p)$, est continue,

(ii) si $N < p < \infty$, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C^\beta(\overline{\Omega})$, $\beta = 1 - \frac{N}{p}$, est continue.

Démonstration. Comme $\partial\Omega$ est de classe C^1 il existe une application P linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que $Pu_{|\Omega} = u$ pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$; en outre P peut être choisie de sorte que Pu soit à support dans un ouvert Ω' fixe, strictement plus grand que $\overline{\Omega}$, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$. (P est un opérateur de (1-p)-prolongement, voir [1] et [19]). On a, pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$(1.28) \qquad \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|Pu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le \dots$$

$$\dots \frac{(N-1)p}{N(N-p)} \sum_i \left\|\frac{\partial Pu}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} ,$$

d'où (i). Pour (ii) on applique (1.23) avec $x \in \complement\Omega'$ d'où, pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$(1.29) \qquad \max_{y\in\overline{\Omega}} |Pu(y)| \le \frac{2}{\beta} (\operatorname{diam} \overline{\Omega}')^{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left(\int \left|\frac{\partial Pu}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} ,$$

d'où en combinant avec (1.23),

$$(1.30) \qquad \|u\|_{C^{\beta}(\overline{\Omega})} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Les relations (1.28) et (1.30) démontrées dans $C^1(\overline{\Omega})$ se prolongent par continuité à $W^{1,p}(\Omega)$.

PROPOSITION 1.3. (Rellich-Kondrachov). Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 et $1 \le p \le \infty$ alors :

(i) si $p > N$ l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ est compacte,

(ii) si $1 \le p < N$ l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, $1 \le q < \frac{Np}{N-p}$, est compacte.

Démonstration. Le cas (i) résulte de l'inégalité (1.30) et du théorème d'Arzela-Ascoli sur les familles équicontinues de fonctions.

Pour (ii) soit A une partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$. Si P est l'opérateur de $(1-p)$-prolongement à $W_o^{1,p}(\Omega')$ introduit au Corollaire 1.3 , $P(A)$ est une partie bornée de $W_o^{1,p}(\Omega')$; si elle est relativement compacte dans $L^q(\Omega')$ pour $q < N\,p/(N-p)$ alors A est aussi relativement compacte dans $L^q(\Omega)$. Il suffit donc de démontrer (ii) en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_o^{1,p}(\Omega)$. Comme $C_o^1(\Omega)$ est dense dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ on peut supposer que A est une partie de $C_o^1(\Omega)$ bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et par homothétie on peut supposer

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1 \quad , \quad \forall\, u \in A .$$

Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support dans $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$, $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx = 1$. Pour $h > 0$ on définit la régularisée u_h de u par

$$(1.31) \qquad u_h(x) = h^{-N}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy = \int_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x-hz)dz ,$$

et $A_h = \{u_h : u \in A\}$. Nous avons

$$|u_h(x)| \leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)\,|u(x-hz)|dz \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \sup_{\mathbb{R}} \rho \quad , \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leq i \leq N$$

$$\left|\frac{\partial u_h}{\partial x_i}(x)\right| \leq \int_{|z|\leq 1} \left|\frac{\partial\rho}{\partial x_i}(z)\right|\,|u(x-hz)|dx \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right| .$$

Ainsi A_h est bornée et équicontinue dans $C^o(\overline{\Omega})$ donc précompacte, pour la convergence uniforme et a fortiori dans $L^1(\Omega)$. D'autre part nous avons

$$|u_h(x)-u(x)| \leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)\,|u(x)-u(x-hz)|dz \ . \text{ D'où}$$

$$(1.31)\quad |u_h(x)-u(x)| \leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z)\int_0^h |\sum_{i=1}^N z_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x-tz)|dt\, dz \;.$$

En intégrant par rapport à x on a

$$(1.32)\quad \int_\Omega |u_h(x)-u(x)|dx \leq h \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|dx \leq C\, h \quad ,$$

où $C = |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}$. Comme A_h est précompacte dans $L^1(\Omega)$ il en est de même de A dans $L^1(\Omega)$. Pour étendre le résultat à $L^q(\Omega)$, $q < N\, p/(N-p)$ on utilise l'inégalité de Hölder et (1.28)

$$(1.33)\quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{W^{1,p}(\Omega)} \quad ,$$

avec $p^* = N\, p/(N-p)$ et $\lambda + (1-\lambda)(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}) = \frac{1}{q}$ et C ne dépend que de N et p. Si pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe $u_1, \ldots, u_m \in A$ tels que

$$(1.34)\quad \forall\, u \in A \;,\; \exists\, k \in \{1,\ldots,m\} \text{ et } \|u-u_k\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon^{1/\lambda}\, 2^{1-1/\lambda}\, C^{-1/\lambda}$$

on déduit de (1.33) et du fait que $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1$,

$$(1.35)\quad \forall\, u \in A \;,\; \exists\, k \in \{1,\ldots,m\} \text{ et } \|u-u_k\|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon \quad ,$$

d'où la précompacité.

1.5. Traces des espaces de Sobolev

Nous nous limiterons à la théorie L^2 sans chercher trop de raffinements tant sur la régularité du bord que sur celle de l'application trace dans les espaces de fonctions à dérivées fractionnaires.

PROPOSITION 1.4. <u>Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$ on ait</u>

$$(1.36)\quad \left(\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma\right)^{1/2} \le \varepsilon\left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2} + C_\varepsilon\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} ,$$

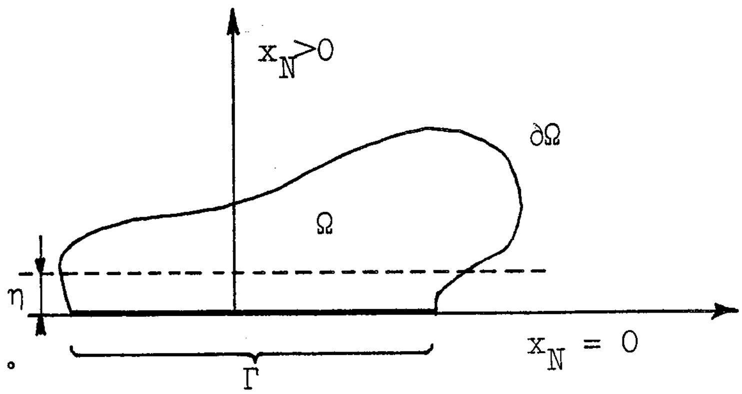
<u>où $d\sigma$ est la mesure de surface $(N-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$</u>.

<u>Démonstration</u>. <u>Première étape</u> : on suppose qu'une partie Γ de $\partial\Omega$ est dans l'hyperplan $x_N = 0$ et $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Soient $\eta > 0$ et $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tels que

$0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 1$ sur Γ, $|D\zeta| < \frac{2}{\eta}$

$\zeta(x_1, \ldots, x_N) = 0$ si $x_N > \eta$ et

$\Omega \supset \{x : (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \Gamma,\ 0 < x_N < \eta\}$.



Pour $x \in \Gamma$, $x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, 0)$ et $u \in C^1(\overline{\Omega})$, on a

$$u(x_1,\ldots,x_{N-1},0) = u(x_1,\ldots,x_{N-1},0)\,\zeta(x_1,\ldots,x_{N-1},0) ,$$

$$= -\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial x_N}(u(x_1,\ldots,x_{N-1},\xi)\zeta(x_1,\ldots,x_{N-1},\zeta))d\xi ,$$

d'où

$$(1.37)\quad |u(x_1,\ldots,x_{N-1},0)| \le \frac{2}{\eta}\int_0^\eta |u(x_1,\ldots,x_{N-1},\xi)|d\xi + \ldots$$

$$\ldots \int_0^\eta \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,\ldots,x_{N-1},\xi)\right| d\xi .$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ et Hölder on en déduit

$$(u(x_1,\ldots,x_{N-1},0))^2 \le \frac{8}{\eta}\int_0^\eta (u(x_1,\ldots,x_{N-1},\xi))^2 d\xi + \ldots$$

$$\ldots 2\eta\int_0^\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,\ldots,x_{N-1},\xi)\right)^2 d\xi \quad ;$$

et en intégrant par rapport à $x_1, \ldots, x_{N-1}$,

$$(1.38)\qquad \begin{aligned} &\int_\Gamma (u(x_1,\ldots,x_{N-1},0))^2 dx_1 \ldots dx_{N-1} \leq \ldots \\ &\ldots \frac{8}{\eta}\int_\Omega u^2 dx + 2\eta\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2 dx \ . \end{aligned}$$

<u>deuxième étape</u> : Dans le cas général on recouvre $\partial\Omega$ par un nombre fini de boules $B_k (1 \leq k \leq p)$ telles qu'il existe un isomorphisme φ_k de B_k dans $\mathbb{R}^N$ tel que $\varphi_k(B_k \cap \Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ et $\varphi_k(B_k \cap \partial\Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$. On pose $\Gamma_k = \varphi_k(B_k \cap \partial\Omega)$ et on applique (2.38) à $u o \varphi_k^{-1}$

$$(1.39)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Gamma_k} (u o \varphi_k^{-1})^2 dx_1 \ldots dx_{N-1} \leq \ldots \\ &\ldots \frac{8}{\eta}\int_{\varphi_k(B_k\cap\Omega)} (u o \varphi_k^{-1})^2 dx + 2\eta \int_{\varphi_k(B_k\cap\Omega)} \left(\frac{\partial}{\partial x_N}(u o \varphi_k^{-1})\right)^2 dx \ . \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le jacobien de φ_k , $\left|\det\left(\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial x_j}\right)\right|$, est minoré par une constante strictement positive dans $B_k \cap \Omega$, on a

$$(1.40)\qquad \int_{B_k\cap\partial\Omega} u^2 d\sigma \leq \frac{C_k}{\eta}\int_{B_k\cap\Omega} u^2\, dx + C_k\eta \int_{B_k\cap\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \ .$$

En sommant les p inégalités (1.40) on en déduit

$$(1.41)\qquad \int_\Gamma u^2 d\sigma \leq \frac{C}{\eta}\int_\Omega u^2 dx + C\eta\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \ ,$$

pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$ donc pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$, d'où (1.36) .

COROLLAIRE 1.4. <u>Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que pour tout $u \in W^{2,2}(\Omega)$ on ait</u>

$$(1.42)\qquad \left(\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 d\sigma\right)^{1/2} \leq \varepsilon\left(\sum_{i,j}\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{1/2} + C_\varepsilon\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} .$$

Démonstration. On a, pour $1 \leq i \leq N$,

$$(1.43)\qquad \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma \leq \frac{C}{\eta}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + C\eta\int_\Omega \sum_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}\right)^2 dx .$$

Comme $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i\right| \leq \left(\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$, où n_i est la i-ième composante du vecteur normal sortant, on a

$$(1.44)\qquad \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 d\sigma \leq \frac{C}{\eta}\sum_i\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + C_\eta\sum_{i,j}\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2 dx ,$$

d'où (1.42) en utilisant la remarque 1.3 (Ω ayant la propriété du cône).