2. METHODES LIEES AU PRINCIPE DU MAXIMUM

Dans cette section Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, et L un opérateur différentiel à coefficients variables définis dans Ω par

$$(2.1) \qquad Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\, u$$

avec $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pour tout (i,j). On note $\lambda(x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $[a_{ij}(x)]$ et $\Lambda(x)$ la plus grande. L'opérateur L est elliptique si pour tout $x \in \Omega$ et $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ on a

$$(2.2) \qquad 0 < \lambda(x) \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) \sum_i \xi_i^2 \ .$$

L est strictement elliptique si $\lambda(x) \geq \lambda_o > 0$ et uniformément elliptique si de plus $\Lambda(x)/\lambda(x)$ est borné dans Ω . Nous supposerons par la suite

$$(2.3) \qquad \frac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} \leq C \quad , \quad \forall\, x \in \Omega \,,\ \forall\, 1 \leq i \leq N \,.$$

2.1. <u>Principes du maximum</u>

PROPOSITION 2.1. <u>Soit L un opérateur elliptique dans un ouvert borné Ω avec $c \equiv 0$ et soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vérifiant</u>

$$(2.4) \qquad Lu \geq 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad \Omega \qquad (\text{resp. } Lu \leq 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad \Omega)\ .$$

<u>Alors le maximum (resp. minimum) de u dans $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire</u>

$$(2.5) \qquad \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad (\text{resp. } \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord $Lu > 0$ dans Ω et que u atteigne son maximum en $x_o \in \Omega$. Comme $u \in C^2(\Omega)$, on a $Du(x_o) = 0$ et par suite $\sum_i b_i(x_o) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_o) = 0$ et $Lu(x_o) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_o) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_o) > 0$. Comme la matrice symétrique $[a_{ij}(x_o)]$ définit une forme quadratique définie positive, il existe une matrice symétrique $[\alpha_{ij}]$ définissant une forme quadratique définie positive telle que $[\alpha_{ij}][\alpha_{ij}] = [a_{ij}(x_o)]$ c'est-à-dire

$$(2.6) \qquad \sum_k \alpha_{ik}\, \alpha_{jk} = a_{ij}(x_o) \quad , \quad \forall\ 1 \leq i\ ,\ j \leq N\ .$$

Considérons la transformation linéaire de $\mathbb{R}^N$ φ de matrice $[\alpha_{ij}]$ et posons $v(z) = v(z_1,\dots,z_N) = u \circ \varphi(z)$. Comme v atteint un maximum en $z_o = \varphi^{-1}(x_o) \in \varphi^{-1}(\Omega)$ on a $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z_o) \leq 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq N$, c'est-à-dire

$$(2.7) \qquad \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}(x_o) \frac{\partial x_l}{\partial z_i} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \leq 0 \quad .$$

Or $\frac{\partial x_l}{\partial z_i} = \alpha_{li}$ et $\sum_i \alpha_{li}\, \alpha_{ik} = a_{l,k}(x_o)$. En sommant (2.7) pour $1 \leq i \leq N$, on en déduit

$$(2.8) \qquad \sum_{k,l} a_{k,l}(x_o) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}(x_o) = Lu(x_o) \leq 0\ ,$$

ce qui est une contradiction. Donc $x_o \in \partial\Omega$.

Dans le cas général on a tout d'abord $a_{11}(z) \geq \lambda(z)$ pour tout z dans Ω. Soit $\gamma \in R$, $L(e^{\gamma x_1}) = (a_{11}(x)\, \gamma^2 + \gamma b_1(x)) e^{\gamma x_1}$, $x=(x_1,\dots,x_N)$. De (2.3) on déduit $L(e^{\gamma x_1}) \geq \lambda(x)(\gamma^2 - \gamma C) e^{\gamma x_1}$. On choisit $\gamma > C$ et pour $\varepsilon > 0$ on a $L(u+\varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$. Par suite

$$(2.9) \qquad \sup_{\overline{\Omega}}(u+\varepsilon\, e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u+\varepsilon\, e^{\gamma x_1})\ .$$

En faisant tendre ε vers 0 on en déduit (2.5).

NOTATION. Une fonction qui vérifie $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) dans Ω est appelée une sous-solution (resp. une sur-solution) de l'équation $Lu = 0$. On pose $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, $u = u^+ - u^-$, $|u| = u^+ + u^-$.

COROLLAIRE 2.1. <u>Soit L un opérateur elliptique dans un ouvert borné Ω avec $c \leq 0$ dans Ω et soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vérifiant (2.4). Alors</u>

$$(2.10) \qquad \sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \qquad \left(\text{resp. } \inf_{\overline{\Omega}} u \geq \inf_{\partial\Omega} (-u^-)\right).$$

<u>Si $Lu = 0$ dans Ω, alors</u>

$$(2.11) \qquad \sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$, on a $u = u^+$ dans Ω^+ et

$$(2.12) \qquad L_0 u = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq -c(x)u \geq 0 ,$$

et on applique (2.5) à u dans Ω^+, par suite le maximum de u sur $\overline{\Omega}^+$ doit être atteint en $x_0 \in \partial\Omega^+$. Si $x_0 \notin \partial\Omega$, comme $u(x_0) > 0$ il existe un voisinage de x_0 inclu dans Ω sur lequel u est positive, par suite $x_0 \notin \partial\Omega^+$. Par suite $x_0 \in \partial\Omega$ et

$$(2.13) \qquad \sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = \sup_{\partial\Omega} u^+ .$$

(On a supposé Ω^+ non vide sinon (2.10) est évident avec une inégalité). Pour montrer (2.11), supposons $\sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\overline{\Omega}} u \geq 0$ et on applique (2.10)

REMARQUE 2.1. On déduit de (2.11) l'unicité de la solution dans $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ pour le problème de Dirichlet inhomogène

(2.14) $Lu = f$ dans Ω , $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$

PROPOSITION 2.2. (Hopf). Soient L un opérateur uniformément elliptique avec $c \equiv 0$ et $u \in C^2(\Omega)$ vérifiant $Lu \geq 0$. Soit $x_o \in \partial\Omega$ tel que

(i) u est continue en x_o ,

(ii) $u(x_o) > u(x)$, $\forall x \in \Omega$,

(iii) il existe une boule ouverte $B \subset \Omega$ telle que $x_o \in \partial B$.

Alors si la dérivée normale extérieure $\frac{\partial u}{\partial n}$ existe en x_o , on a

(2.15) $\frac{\partial u}{\partial n}(x_o) > 0$.

Si $c \leq 0$ et $|c|/\lambda$ demeure borné, (2.15) demeure pourvu que $u(x_o) \geq 0$.

Démonstration. D'après (iii) il existe $R > 0$ tel que $B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| < R\} \subset \Omega$ et $|x_o - y| = R$. On considère la fonction auxiliaire v définie par

$$v(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2} \quad \text{pour} \quad 0 < \rho < \min(R, |x-y|) \quad \text{et} \quad \alpha \text{ réel.}$$

Si on pose $r = |x-y|$, on a

$$Lv(x) = e^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\alpha \sum_i (a_{ii} + b^i(x_i-y_i)\right] + cv ,$$

$$Lv(x) \geq e^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2\lambda(x)r^2 - 2\alpha(a_{ii} + |b|r + c\right] , \text{ où } |b| = \left(\sum_i b_i^2\right)^{1/2} .$$

Par hypothèse $a_{ii}(x)/\lambda(x)$, $|b(x)|/\lambda(x)$ et $|c(x)|/\lambda(x)$ demeurent bornés, par suite, pour α assez grand, $Lv(x) \geq 0$ dans la couronne $A = B_R(y) - B_\rho(y)$. Comme $u - u(x_o) < 0$ sur $\partial B_\rho(y)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u - u(x_o) + \varepsilon v \leq 0$ sur $\partial B_\rho(y)$. Comme v s'annule sur $\partial B_R(y)$, $u - u(x_o) + \varepsilon v \leq 0$ sur $\partial B_R(y)$. Par suite nous avons

$L(u-u(x_0)+\varepsilon v) \geq -c(x)u(x_0) \geq 0$ dans A et $u-u(x_0)+\varepsilon v \leq 0$ sur ∂A. En utilisant le Corollaire 2.1 on en déduit $u-u(x_0)+\varepsilon v \leq 0$ dans A. Par suite pour tout $t > 0$ on a, compte tenu que $(u-u(x_0)+v)(x_0)=0$,

$$(2.16) \qquad \frac{u(x_0-tn)-u(x_0)}{-t} \geq -\varepsilon \frac{v(x_0-tn)-v(x_0)}{-t} .$$

En faisant tendre t vers 0 on en déduit $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq 2\varepsilon R e^{-\alpha R^2} > 0$.

REMARQUE 2.2. Si $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$ n'existe pas, (2.15) est remplacé par

$$(2.17) \qquad \liminf_{\substack{x \in \Gamma \\ x \to x_0}} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0 ,$$

où Γ est un cône de sommet x_0 inclu dans B. On en déduit le principe du maximum fort de Hopf.

COROLLAIRE 2.2. <u>Soit L un opérateur uniformément elliptique avec $c \equiv 0$ et u une fonction appartenant à $C^2(\Omega)$, vérifiant $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$). Alors si u atteint son maximum (resp. minimum) dans Ω, u est une constante. Si $c \leq 0$ et $|c(x)|/\lambda(x)$ demeure borné u ne peut pas atteindre un maximum positif (resp. un minimum négatif) dans Ω à moins qu'il ne soit constant</u>.

<u>Démonstration</u>. Supposons que u ne soit pas constante et atteigne son maximum M en un point de Ω. Soit $\Omega^-=\{x\in\Omega : u(x)<M\}$, Ω^- est non vide et $\partial\Omega^- \cap \Omega$ est aussi non vide. Soit $x_0 \in \Omega^-$ plus près de $\partial\Omega^-$ que de $\partial\Omega$ et soit B la plus grosse boule ouverte de centre x_0 incluse dans Ω^-. Il existe $y \in \partial B \cap \partial\Omega^-$ où $u(y)=M$ et $u(x) < M$ dans B. En appliquant la Proposition 2.2 on a $\frac{\partial u}{\partial n}(y) \neq 0$ contredisant le fait que $Du(y)=0$.

REMARQUE 2.2. On déduit du Corollaire 2.2 l'unicité à une constante additive près des solutions du problème de Neumann inhomogène

(2.18) $\quad Lu = f \quad$ dans $\quad \Omega \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad$ sur $\quad \partial\Omega$.

2.2. Estimations L^{∞} de u découlant du principe du maximum

On considère le problème de Dirichlet inhomogène dans l'ouvert borné Ω

$$(2.18) \quad \begin{cases} Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) & \text{dans } \Omega , \\ u(x) = \varphi(x) \quad \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

THEOREME 2.1. Supposons que L soit uniformément elliptique dans Ω , $c \leq 0$ et b_i et c soient bornés. Il existe une constante C dépendant de Ω et L telle que pour tout $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solution de (2.18) on ait

$$(2.19) \quad \sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f| \quad .$$

Démonstration. Supposons $\sup_{\Omega} |f| + \sup_{\partial\Omega} |\varphi| < \infty$ sinon (2.19) est évident. Comme Ω est borné il existe $d > 0$ tel que $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < x_1 < d\}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$L_0(e^{\alpha x_1}) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(e^{\alpha x_1}) + \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{\alpha x_1}) = e^{\alpha x_1}(\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x))$$

$L_0(e^{\alpha x_1}) \geq \alpha e^{\alpha x_1}(\alpha\lambda_1(x) - \sup_{\Omega}|b_1|) \geq 1$ pour $\alpha > 0$ assez grand. On définit v par $v(x) = \sup_{\partial\Omega}|\varphi| + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})\sup_{\Omega}|f|$. On a

$$(2.20) \quad Lv = c(x)(\sup_{\partial\Omega}|\varphi| + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})\sup_{\Omega}|f|) - \sup_{\Omega}|f| L_0(e^{\alpha x_1})$$

donc $-Lv \geq \sup_{\Omega}|f| \geq -f = -L\,u$ dans Ω . Par suite $w = u-v$ vérifie

$$(2.21) \quad Lw \geq 0 \quad \text{dans } \Omega , \quad w \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega .$$

Par le Corollaire 2.1 on a $\sup_{\Omega} w \le \sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$, donc $u \le v$ dans Ω . De la même façon $u \ge -v$ dans Ω , d'où (2.19).

2.3. Fonctions barrières et estimations L^∞ de Du sur $\partial\Omega$

DEFINITION 2.1. Soient L l'opérateur défini en (2.1) et $x_o \in \partial\Omega$. Une fonction $w : \bar{\Omega} \to R$ de classe C^2 dans Ω est appelée une fonction barrière de L en x_o si

(i) $w(x_o) = 0$,

(ii) $w(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega - \{x_o\}$,

(iii) $Lw \le -1 \qquad$ dans Ω .

On dira que l'ouvert Ω satisfait la condition de la sphère intérieure (resp. sphère extérieure) si il existe $R > 0$ tel que pour tout $x_o \in \partial\Omega$ il existe une boule ouverte $B=B_R(x^*)=\{x \in \mathbb{R}^N : |x-x^*|<R\}$ telle que

$$(2.22) \qquad \bar{B} \cap \Omega = \{x_o\} \qquad (\text{resp. } \bar{B} \cap \bar{\Omega} = \{x_o\}) .$$

PROPOSITION 2.3. Supposons L uniformément elliptique dans l'ouvert borné Ω et b^i et c bornés dans Ω et supposons que Ω vérifie la condition de la sphère extérieure. Alors il existe deux constantes k et p dépendant de L et du R de la condition de la sphère extérieure telles que la fonction

$$(2.23) \qquad w(x) = k\left(\frac{1}{R^p} - \frac{1}{|x-x^*|^p}\right) ,$$

(x^* centre de la boule $B_R(x^*)$ vérifiant (2.22)) soit une fonction barrière de L en x_o .

Démonstration. On a évidemment $w(x_o) = 0$ et $w(x)>0$, $\forall x \in \partial\Omega-\{x_o\}$. Pour simplifier on peut supposer $x^*=0$ (en translatant l'origine) et on a

$$(2.24) \qquad w(x) = k\left(\frac{1}{R^p} - \frac{1}{|x|^p}\right) = k\left(\frac{1}{R^p} - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{-p/2}\right) ,$$

d'où, en notant δ_{ij} le symbole de Kronecker,

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) = kp\,\frac{x_i}{|x|^{p+2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{kp\delta_{ij}}{|x|^{p+2}} - kp(p+2)\frac{x_i x_j}{|x|^{p+4}}$$

$$Lw = \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + cw ,$$

$$Lw = \sum_{i,j} a_{ij}\left(\frac{kp\delta_{ij}}{|x|^{p+2}} - kp(p+2)\frac{x_i x_j}{|x|^{p+4}}\right) + \sum_i b_i kp\,\frac{x_i}{|x|^{p+2}} + ck\left(\frac{1}{R^p} - \frac{1}{|x|^p}\right) ,$$

$$Lw \le -\frac{kp}{|x|^{p+4}}\left(\sum_{i,j}(p+2)a_{ij}x_i x_j - \sum_i(a_{ii}|x|^2 + b_i x_i |x|^2)\right) \quad \text{et par suite}$$

$$Lw \le -\frac{kp}{|x|^{p+4}}\left((\lambda(x)(p+1)|x|^2 - N\Lambda(x))|x|^2 - |b|\ |x|^3\right) . \text{ Comme } L \text{ est}$$

uniformément elliptique il existe λ et Λ tels que $0 < \lambda \le \lambda(x) \le \Lambda(x) \le \Lambda$ pour tout $x \in \Omega$. Par suite pour k , p assez grands $(Lw)(x) \le -1$, $\forall\, x \in \Omega$, puisque Ω est borné et $|x| > R$ pour $x \in \Omega$.

Les fonctions barrières ont été introduites pour l'étude de la régularité à la frontière de solutions d'équation de Laplace. Grâce à leur existence et au principe du maximum faible nous obtenons l'estimation L^∞ de Du sur $\partial\Omega$

THEOREME 2.2. <u>Supposons l'opérateur L uniformément elliptique dans l'ouvert borné Ω qui vérifie la condition de la sphère extérieure, $\partial\Omega$ de classe C^1 , b_i et c bornés et $c \le 0$. Il existe une constante C dépendant de L et Ω telle que pour tout f bornée et tout $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant</u>

$$(2.25)\quad \begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) & \underline{\text{dans}}\ \Omega\ , \\ u = 0 & \underline{\text{sur}}\ \partial\Omega\ , \end{cases}$$

<u>on ait l'estimation</u>

$$(2.26)\quad \sup_{\partial\Omega} |Du| \leq C \sup_{\Omega} |f| \ .$$

<u>Démonstration</u>. Comme $\partial\Omega$ est de classe C^1 et u s'y annule, $|\frac{\partial u}{\partial n}(x)| = |Du(x)|$ pour $x \in \partial\Omega$. Pour $x_o \in \partial\Omega$ soit w la fonction barrière de la Proposition 2.3 et définissons w par $v(x) = u(x) + w(x) \sup_{\Omega} |f|$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. On a $v(x) \geq 0$ pour $x \in \partial\Omega$ et

$$Lv = Lu + \sup_{\Omega}|f|\ Lw \leq f - \sup_{\Omega}|f| \leq 0 \ .$$

Par le principe du maximum faible $\inf_{\Omega} v \geq \inf_{\partial\Omega}(-v^-) = v(x_o) = 0$.
Comme $v(x) \geq v(x_o) = 0$ on en déduit

$$(2.27)\quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq \sup_{\Omega}|f|\ \frac{\partial}{\partial n}(-w)(x_o) \leq \frac{kp}{2R^{p+1}} \sup_{\Omega}|f| \ ,$$

en explicitant le calcul de $\frac{\partial w}{\partial n}(x_o)$. De la même façon on obtient une borne inférieure en remplaçant u par $-u$.

REMARQUE 2.3. Dans le cas où sur $\partial\Omega$, $u=\varphi$ non identiquement nul, on est amené à chercher un relèvement Φ de classe C^2 dans Ω qui coïncide avec φ sur $\partial\Omega$. Si φ est continue et Ω vérifie la condition de la sphère extérieure, on peut trouver $\emptyset \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ vérifiant

$$(2.28)\quad \Delta\emptyset = 0 \ \text{ dans } \Omega \ ,\ \emptyset = \varphi \ \text{ sur } \partial\Omega \ ,$$

(voir [ ]). Une telle fonction $\emptyset$ est un relèvement de φ. On applique alors le Théorème 2.1 à $\tilde{u} = u - \emptyset$ avec f remplacé par $f - L\emptyset$. Il existe bien d'autres méthodes de relèvement (voir [14]).

2.4. Estimations globales pour Du

L'idée essentielle pour obtenir les estimations de Du dans $L^\infty(\Omega)$ est due à Bernstein. Sa méthode consiste à dériver l'équation et à appliquer le principe du maximum à $|Du|^2+\lambda u^2$ et elle nécessite une plus grande régularité des coefficients de L.

THEOREME 2.3. Soient Ω un ouvert borné de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 et L un opérateur uniformément elliptique dans Ω, $c \leq 0$. Supposons en outre que les coefficients a_{ij}, b_i et c admettent des dérivées partielles premières bornés dans Ω. Il existe alors une constante C dépendant de L et Ω telle que pour tout f bornée ainsi que Df dans Ω et tout $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant (2.25) on ait l'estimation

$$\sup_\Omega |Du| \leq \sup_{\partial\Omega} |Du| + C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |f| + \sup_\Omega |Df|) \quad . \tag{2.29}$$

Démonstration. On définit la fonction auxiliaire $w(x)=|Du(x)|^2+\mu u^2(x)$ où μ sera choisi par la suite. On a

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = 2 \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + 2\mu u \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \sum_k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \tag{2.31}$$

En dérivant l'équation (2.25) par rapport à x_k, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + c \frac{\partial u}{\partial x_k} = \ldots \\ &\qquad \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_k} - u \frac{\partial c}{\partial x_k} - \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ij}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Soit $x_o \in \overline{\Omega}$ tel que $w(x_o) = \sup\limits_{\overline{\Omega}} w$. Si $x_o \in \partial\Omega$, (2.29) est vérifié. Supposons donc $x_o \in \Omega$ et w non constant dans Ω . Si $(Lw)(x_o) > 0$ il existerait une boule ouverte B_ε de centre x_o de rayon ε telle que $B_\varepsilon \subset \Omega$ et $Lw \geq 0$ sur B_ε . Par le principe du maximum fort c devrait être identiquement nul sur B_ε et par suite $w = w(x_o)$ sur B_ε contredisant $(Lw)(x_o) > 0$, donc $(Lw)(x_o) \leq 0$ et $(Lw+cw)(x_o) \leq 0$. En utilisant (2.30), (2.31), on a en x_o

$$\sum_{i,j,k} a_{ij}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \mu \sum_{i,j} a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \sum_{i,k} b_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \mu\, u \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\left(\sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \mu\, u^2\right) \leq 0 \quad .$$

Comme L est uniformément elliptique, $0 < \lambda \leq \lambda(x) \leq \Lambda(x) \leq \Lambda$. Par suite

$$\lambda \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 + \mu\lambda \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + c \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \cdots$$

$$\cdots + \mu\, u\left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\, u\right) \leq 0 \quad .$$

En utilisant (2.32) et (2.25) on en déduit en notant $|Du|^2 = \sum\limits_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$

$$\lambda \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 + \mu\lambda |Du|^2 + \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - u \frac{\partial c}{\partial x_k} - \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) \cdots$$

(2.33)

$$\cdots + \mu\, u\, f \leq 0 \quad .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy, on a

$$(2.34)\quad \begin{aligned} &\lambda \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 + \mu\lambda |Du|^2 - \sum_k \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| + |u| \left|\frac{\partial c}{\partial x_k}\right| + \left(\sum_i \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k}\right)^2\right)^{1/2} |Du| \ldots \right. \\ &\left. \ldots + \left(\sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \right\} + \mu\, u\, f \le 0 , \end{aligned}$$

Comme les dérivées partielles de f et les coefficients de L sont bornées dans Ω , en appliquant l'inégalité de Cauchy avec ε il existe $C > 0$ tel que

$$(2.35)\quad \begin{aligned} &\lambda \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 + \mu \lambda |Du|^2 - \frac{C}{\varepsilon} |Du|^2 - \varepsilon \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \ldots \\ &-C\left(\mu |u|^2 + \mu |f|^2 + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2\right) \le 0 . \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ puis $\mu = 4C/\lambda^2$, on en déduit qu'en x_0 on a

$$(2.36)\quad 2C/\lambda^2 |Du|^2 \le C(4C/\lambda^2(|u|^2 + |f|^2) + |Df|^2) .$$

Comme $\sup\limits_{\Omega} |Du|^2 \le \sup\limits_{\Omega} w = |Du|^2(x_0) + 4C/\lambda^2\, u^2(x_0)$, on en déduit (2.29).

En utilisant les Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 on en déduit :

COROLLAIRE 2.3. Soient Ω un ouvert borné de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 vérifiant la condition de la sphère extérieure et L un opérateur uniformément elliptique dans Ω , $c \le 0$. Supposons que les coefficients de L admettent des dérivées partielles premières bornées dans Ω . Il existe alors une constante C dépendant de L et de Ω telle que pour tout f bornée ainsi que Df et tout $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant (2.25) on ait l'estimation

$$(2.37)\quad \sup_{\Omega} |Du| \le C(\sup_{\Omega} |f| + \sup_{\Omega} |Df|) .$$

2.5. Estimations locales de Du et des dérivées d'ordre supérieur

Pour obtenir des estimations a priori sur les solutions de (2.18) (problème de Dirichlet inhomogène) il n'est pas possible d'avoir un relèvement ϕ de φ dans Ω qui vérifie $\sup_\Omega(|I\phi|+|D(I\phi|)<\infty$ si φ n'est pas assez régulière, et on n'a pas d'estimation globale de $|Du|$. Par contre on peut s'isoler de la frontière $\partial\Omega$ et obtenir des estimations L^∞ sur $|Du|$ dans tout ouvert Ω' tel que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Pour ce faire on introduit une fonction $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et $\zeta = 1$ sur $\overline{\Omega}'$. On applique alors les techniques précédentes à

$$(2.38) \qquad w(x) = \zeta^2(x)|Du(x)|^2 + \mu\, u^2(x) \quad ,$$

et on obtient une estimation de la forme

$$(2.39) \qquad \sup_{\Omega'} |Du| \leq C(\sup_\Omega|f| + \sup_\Omega|Df| + \sup_{\partial\Omega}|\varphi|) \quad .$$

La technique de Bernstein peut aussi servir à obtenir des estimations sur les dérivées partielles d'ordre 2 (ou supérieur à 2) de la solution de (2.25). On applique pour cela le principe du maximum à

$$(2.40) \qquad w(x) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \mu|Du|^2$$

On obtient des estimations locales de la même façon que précédemment en introduisant la fonction ζ.