

3. METHODES HILBERTIENNES ET REGULARITE $W^{2,2}$

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et \tilde{L} l'opérateur à forme divergentielle

$$(3.1) \quad \tilde{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i (c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)u)) + d(x)u ,$$

où les fonctions a_{ij} , b_i , c_i et d sont des fonctions mesurables et bornées sur Ω . Soient g et f_i , $1 \leq i \leq N$ des fonctions intégrables sur Ω . On dit que u est une solution faible de l'équation

$$(3.2) \quad \tilde{L}u = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} ,$$

si $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ et pour tout $v \in C_0^1(\Omega)$ on a

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & -\sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_i \int_{\Omega} (c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx + \dots \\ & \dots + \int_{\Omega} duv dx = \int_{\Omega} (gv + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx . \end{aligned}$$

Les hypothèses naturelles pour étudier la théorie hilbertienne de l'équation (3.2) sont les suivantes : il existe $0 < \lambda < \Lambda$ et ν quelconque tels que

$$(3.4) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_i \xi_i^2 , \quad \forall x \in \Omega , \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N ,$$

$$(3.5) \quad \sum_{i,j} (a_{ij}(x))^2 \leq \Lambda^2 , \quad \forall x \in \Omega ,$$

$$(3.6) \quad \lambda^{-2} \sum_i (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1} |d(x)| \leq \nu^2 , \quad \forall x \in \Omega .$$

La démonstration de l'existence de solutions de (3.2) est fondée sur l'alternative de Fredholm que nous rappelons (voir [14])

PROPOSITION 3.1. Soit T un endomorphisme compact d'un espace vectoriel normé V . On a l'alternative suivante :

(i) ou bien l'équation $x-Tx=0$ admet une solution non nulle,

(ii) ou bien pour tout $y \in V$ l'équation $x-Tx=y$ admet une unique solution. Dans le cas (ii) l'opérateur $(I-T)^{-1}$ est borné.

THEOREME 3.1. Supposons Ω borné et que \tilde{L} vérifie (3.4), (3.5), (3.6) et

$$(3.7) \quad \int_{\Omega} (dv - \sum_i b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx \leq 0, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), \quad v \geq 0.$$

Alors pour tout g et $f_i, 1 \leq i \leq N$, dans $L^2(\Omega)$ il existe un unique $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solution faible de (3.2) et on a l'estimation

$$(3.8) \quad \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C (\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)}) ,$$

où C ne dépend que de \tilde{L} et Ω .

L'existence découlera (de façon non triviale) de l'unicité via l'alternative de Fredholm. Pour étudier (3.2) il est naturel d'introduire la forme bilinéaire \mathfrak{g} définie sur $W^{1,2}(\Omega)$ par

$$(3.9) \quad \mathfrak{g}(u,v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_i (c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i}) \right\} dx .$$

La forme \mathfrak{g} est continue puisque l'on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\mathfrak{g}(u,v)| \leq \Lambda \left\{ \|Du\|_{L^2(\Omega)} \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \right\} + \nu \lambda \left\{ \|Du\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|Dv\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right\} ,$$

d'où

$$(3.10) \quad |\mathfrak{L}(u,v)| \leq M \|u\|_{W^{1,2}} \|v\|_{W^{1,2}} ,$$

où M est une constante. Par suite (3.2) équivaut à

$$(3.11) \quad \mathfrak{L}(u,v) = - \int_{\Omega} (gv + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx ,$$

pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pour démontrer l'unicité on utilise le résultat suivant

LEMME 3.1. Soient f une fonction de classe C^1 par morceaux de dérivée f' dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et A l'ensemble des points anguleux de f . Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, Ω borné, alors $f \circ u \in W^{1,1}(\Omega)$ et on a presque partout

$$(3.12) \quad D(f \circ u) = \begin{cases} f'(u) Du & \text{si } u \notin A , \\ 0 & \text{si } u \in A , \end{cases}$$

Démonstration. Première étape : On suppose $f \in C^1(\mathbb{R})$ et f' est bornée. Il existe une suite $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ convergeant vers u dans $W^{1,1}(\Omega)$ et presque partout. Or on a

$$\int_{\Omega} |f(u_m) - f(u)| dx \leq \sup_{\mathbb{R}} |f'| \int_{\Omega} |u_m - u| dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et}$$

$$\int_{\Omega} |f'(u_m) Du_m - f'(u) Du| dx \leq \int_{\Omega} |f'(u_m) - f'(u)| |Du| dx + \sup_{\mathbb{R}} |f'| \int_{\Omega} |Du_m - Du| dx .$$

Par le théorème de Lebesgue et la continuité de f' ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f'(u_m) Du_m - f'(u) Du| dx = 0 . \text{ Comme } D(f \circ u_m) \text{ converge vers}$$

$D(f \circ u)$ dans le sens des distributions sur Ω , on en déduit que

$$D(f \circ u) = f'(u) Du \quad \text{et} \quad D(f \circ u) \in W^{1,1}(\Omega) .$$

Deuxième étape : Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ alors u^+ , u^- et $|u|$ appartiennent à $W^{1,1}(\Omega)$ et on a presque partout dans Ω

$$(3.13) \quad Du^+ = \begin{cases} Du & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}; \quad Du^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ -Du & \text{si } u < 0 \end{cases}; \quad D|u| = \begin{cases} Du & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -Du & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Il suffit de démontrer la relation avec u^+ puisque $u^- = (-u)^+$ et $|u| = u^+ + u^-$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit f_ε par

$$(3.14) \quad f_\varepsilon(u) = \begin{cases} \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & , \text{ si } u > 0 \\ 0 & \text{ si } u \leq 0 \end{cases}$$

En utilisant la première étape on a pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$(3.15) \quad \int_{\Omega} f_\varepsilon(u) D\varphi \, dx = - \int_{u>0} \varphi \frac{uD u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \, dx$$

en faisant tendre ε vers 0, on en déduit $\int_{\Omega} u^+ D\varphi \, dx = - \int_{u>0} \varphi D u \, dx$.

Dans le support de $D u^+$ est dans $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) > 0\}$ et p.p. $Du^+ = Du$ sur cet ensemble.

Troisième étape : Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, alors pour tout $l \in \mathbb{R}$, $Du = 0$ presque partout sur $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = l\}$. Pour cela on se ramène à $l = 0$ et comme $Du = Du^+ - Du^-$ le résultat découle de (3.13).

Quatrième étape. Démonstration du Lemme 3.1 : Par récurrence on se ramène à un seul point anguleux que l'on peut placer en 0. On considère alors f_1 et f_2 de classe C^1 sur \mathbb{R} telles que f_1', f_2' soient bornées et $f_1(u) = f(u)$ pour $u \geq 0$, $f_2(u) = f(u)$ pour $u \leq 0$. Comme on a $f(u) = f_1(u^+) + f_2(-u^-)$ le résultat découle des première et seconde étapes.

REMARQUE 3.1. Le Lemme 3.1 a été généralisé par Stampacchia [23] dans le cas où la fonction f n'est que lipschitzienne.

Démonstration du Théorème 3.1.

Unicité. Soit u une solution dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ de $\tilde{L}u = 0$. Pour $k \in \mathbb{R}^+$ on a $(u-k)^+ \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et $D(u-k)^+ = \chi_{\Omega_k}$ Du où χ_{Ω_k} est la fonction caractéristique de $\Omega_k = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$, d'où

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}(u, (u-k)^+) = & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u-k)^+}{\partial x_j} - \sum_i (c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} (u-k)^+ - b_i u \frac{\partial (u-k)^+}{\partial x_i}) - \dots \right. \\ & \left. \dots - d u (u-k)^+ \right\} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}(u, (u-k)^+) = & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial (u-k)^+}{\partial x_i} \frac{\partial (u-k)^+}{\partial x_j} - \sum_i (b_i + c_i) (u-k)^+ \frac{\partial (u-k)^+}{\partial x_i} \right\} dx = \\ & \dots \int_{\Omega} \left\{ d (u-k)^+ u - \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u (u-k)^+) \right\} dx \leq 0, \end{aligned}$$

en utilisant (3.7). On déduit alors de (3.4), (3.6) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(3.18) \quad \left(\int_{\Omega} |D(u-k)^+|^2 dx \right)^{1/2} \leq \nu \left(\int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Or $(u-k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Par l'inégalité de Sobolev (si on suppose $N > 2$)

$$(3.19) \quad c \left(\int_{\Omega} |(u-k)^+|^{2N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/(2N)} \leq \nu \left(\int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx \right)^{1/2},$$

et par l'inégalité de Hölder

$$\left(\int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx \right)^{1/2} \leq (\text{mes} . (\Omega_k))^{1/N} \left(\int_{\Omega} |(u-k)^+|^{2N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/(2N)},$$

d'où

$$(3.20) \quad c \|(u-k)^+\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq \nu (\text{mes} . (\Omega_k))^{1/N} \|(u-k)^+\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}.$$

Par suite, si u^+ n'est pas borné, alors pour tout k , $\|(u-k)^+\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} > 0$ et par suite $c \leq v(\text{mes.}(\Omega_k))^{1/N}$ indépendamment de k , ce qui est impossible, donc $u^+ \in L^\infty(\Omega)$ (dans le cas $N=2$ l'exposant $2N/(N-2)$ doit être remplacé par n'importe quel nombre p , $2 < p < \infty$). Si on suppose u^+ non identiquement nul et si on pose $l = \sup_{\Omega} \text{ess } u^+$, on déduit de (3.20) que l'on a

$$(3.21) \quad \text{mes.}(\Omega_l) \geq \left(\frac{c}{v}\right)^N .$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $v = \frac{u^+}{1 + \varepsilon - u^+}$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $v \geq 0$. Comme $\mathfrak{L}(u,v)=0$, on obtient comme précédemment

$$(3.22) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\frac{\partial u^+}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j}}{(1 + \varepsilon - u^+)^2} dx \leq \lambda v \int_{\Omega} \frac{|Du^+|}{1 + \varepsilon - u^+} dx ,$$

d'où en posant $w_\varepsilon = \text{Log } \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon - u^+}$, $Dw_\varepsilon = \frac{Du^+}{1 + \varepsilon - u^+}$ et

$$(3.23) \quad \int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \leq v \int_{\Omega} |Dw_\varepsilon| \leq v(\text{mes.}(\Omega))^{1/2} \left(\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}$$

Comme on a supposé u^+ non identiquement nul, w_ε n'est pas constant et

$$(3.24) \quad \left(\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq v(\text{mes.}(\Omega))^{1/2} .$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$(3.25) \quad c \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq v(\text{mes.}(\Omega))^{1/2} .$$

et en faisant tendre ε vers 0, on en déduit par le lemme de Fatou

$$(3.26) \quad c \left\| \log \left(\frac{u^+}{1-u^+} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq v(\text{mes.}(\Omega))^{1/2},$$

et par suite $\text{mes.}(\Omega_1) = \text{mes.}\{x \in \Omega : u^+(x) = 1\} = 0$, ce qui contredit (3.21).
Donc $u^+ = 0$. De la même façon $u^- = 0$, d'où l'unicité.

Existence. Pour $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nous avons

$$(3.26) \quad \mathfrak{J}(u, u) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_i (b_i - c_i) u \frac{\partial u}{\partial x_i} + du^2 \right\} dx,$$

$$\text{d'où } \mathfrak{J}(u, u) \geq \int_{\Omega} \left\{ \lambda |Du|^2 - (\sum_i (b_i^2 + c_i^2))^{1/2} |Du| |u| - d |u|^2 \right\} dx,$$

$$\mathfrak{J}(u, u) \geq \int_{\Omega} \left\{ \lambda |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 - \frac{3v^2 \lambda}{2} |u|^2 \right\} dx \quad \text{d'où}$$

$$(3.27) \quad \mathfrak{J}(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx - \frac{3v^2 \lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Par suite pour σ assez grand la forme \mathfrak{J}_{σ} définie sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ par $\mathfrak{J}_{\sigma}(u, v) = \mathfrak{J}(u, v) + \sigma \int_{\Omega} uv dx$, est coercive. Comme elle est évidemment continue (cf. (3.10)) on déduit du Théorème de Lax et Milgram que pour tout F dans le dual de $W_0^{1,2}(\Omega)$, il existe un unique u_{σ} dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant pour tout v dans $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$(3.28) \quad \mathfrak{J}_{\sigma}(u_{\sigma}, v) = F(v).$$

On définit \tilde{L}_{σ} par $\tilde{L}_{\sigma} u = \tilde{L}u - \sigma u$ et I de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,2}(\Omega)$ par $Iu(v) = \int_{\Omega} uv dx$ pour tout v dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Comme l'injection de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (Proposition 1.3) et que l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $W^{-1,2}(\Omega)$ définie par la même formule que pour I est continue, I est une application compacte et l'équation (3.2) équivaut à

$$(3.29) \quad \tilde{L}_{\sigma} u + \sigma Iu = g - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

c'est-à-dire en introduisant l'inverse \tilde{L}_σ^{-1} de \tilde{L}_σ

$$(3.30) \quad u + \sigma \tilde{L}_\sigma^{-1} Lu = \tilde{L}_\sigma^{-1} \left(g - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Or \tilde{L}_σ^{-1} est continue de $W^{-1,2}(\Omega)$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, donc $-\tilde{L}_\sigma^{-1} L$ est compacte de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans lui même et par l'alternative de Fredholm l'existence de la solution de (3.30) équivaut à montrer que le noyau de \tilde{L} est réduit à zéro ce qui a été fait. L'estimation (3.8) découle du théorème de Fredholm et de la continuité de \tilde{L}_σ^{-1} .

REMARQUE 3.1. La méthode utilisée pour prouver l'unicité peut servir à montrer le principe du maximum suivant : soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ vérifiant $Lu \geq 0$ dans Ω (au sens faible), alors

$$(3.31) \quad \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ ,$$

$$\text{où } \sup_{\partial\Omega} u^+ = \inf \{ k \in \mathbb{R} : (u^+ - k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega) \} .$$

REMARQUE 3.2. Dans le cas où (3.7) n'est pas vérifié, alors pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solution faible de (3.2), on a l'estimation

$$(3.32) \quad \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sum_i \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) .$$

3.2. Régularité $W^{2,2}$ locale

THEOREME 3.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , \tilde{L} l'opérateur défini en (3.1), $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in W^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de $\tilde{L}u = f$ dans Ω . On suppose en outre que (3.4) est vérifié, que les coefficients a_{ij} et b_i sont uniformément lipschitziens dans Ω et que les coefficients c_i et d sont essentiellement bornés dans Ω . Alors pour tout ouvert borné Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, nous avons $u \in W^{2,2}(\Omega')$ et

$$(3.33) \quad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}) ,$$

où C dépend des coefficients de \tilde{L} , de Ω et de $d' = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

En outre l'équation

$$(3.34) \quad \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i + c_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(\sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d \right) u = f ,$$

est vérifiée presque partout dans Ω .

Démonstration. En utilisant (3.3) l'équation $\tilde{L}u = f$ équivaut à

$$(3.35) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} g v dx ,$$

pour tout $v \in C_0^1(\Omega)$, avec $g = \sum_i \left(c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) \right) + du - f$, c'est-à-dire $g \in L^2(\Omega)$.

Soit $v \in C_0^1(\Omega)$ et $|h| < \frac{1}{2} \text{dist}(\text{supp.} v, \partial\Omega)$. Pour $1 \leq k \leq N$, on pose $\Delta^h v(x) = \Delta_k^h v(x) = \frac{1}{h} (v(x + h e_k) - v(x))$ où e_k est l'élément de \mathbb{R}^N de composantes δ_k^i , $1 \leq i \leq N$. On a, en remplaçant v par $\Delta^{-h} v$ dans (3.35),

$$(3.36) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta^{-h} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx = - \int_{\Omega} g \Delta^{-h} v dx$$

Or $\Delta^h \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (x) = a_{i,j}(x + h e_k) \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (x) + \Delta^h (a_{ij}) (x) \frac{\partial u}{\partial x_i} (x)$, d'où

$$(3.37) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{i,j}(x + h e_k) \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \left(g \Delta^h v + \sum_i G_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx ,$$

où $G_i = \Delta^h (a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Or pour $x \in \Omega' \subset \Omega$ tel que $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > |h|$,

on a $\Delta_k^h u(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \xi, x_{k+1}, \dots, x_N) d\xi$, d'où par

l'inégalité de Hölder

$$(3.38) \quad \|\Delta^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega)} .$$

Par suite $\left| \int_{\Omega} (g \Delta^h v + \sum_i G_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx \right| \leq (\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sum_i \|G_i\|_{L^2(\Omega)}) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} .$

En utilisant la valeur de g , il existe $C = C(N, L)$ tel que

$$(3.39) \quad \left| \int_{\Omega} (g \Delta^h v + \sum_i G_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx \right| \leq (C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} ,$$

et

$$(3.40) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij}(x+he_k) \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \leq (C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} .$$

Choisissons $v = \eta^2 \Delta^h u$ où $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta = 1$ sur Ω' . En utilisant (3.4) et l'inégalité de Schwarz on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta^2 |D(\Delta^h u)|^2 dx &\leq \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij}(x+he_k) \eta^2 \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx , \\ &\leq \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{i,j}(x+he_k) \Delta^h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (\eta^2 \Delta^h u) - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \Delta^h u \right\} dx , \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\|\eta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) (\|\eta D \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|D\eta \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)})$$

(3.41)

$$\dots + C' \|\eta D \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} \|D\eta \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} .$$

En résolvant (3.41) on en déduit qu'il existe C tel que

$$(3.42) \quad \|\eta D \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|D\eta \Delta^h u\|_{L^2(\Omega)}) .$$

Comme $\|D\eta\Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D\eta\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ et que η peut être choisi tel que $\|D\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq k/\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) = k/d'$, on en déduit

$$(3.43) \quad \|\Delta^h Du\|_{L^2(\Omega')} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + (1+k/d')\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}) .$$

Par suite pour tout $1 \leq k \leq N$ et tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ les quantités $\Delta^h Du$ demeurent bornées dans $(L^2(\Omega'))^N$. Comme $\Delta_k^h Du$ converge vers $\frac{\partial}{\partial x_k}(Du)$ au sens des distributions dans Ω , et que les sous-ensembles bornés de $(L^2(\Omega'))^N$ sont faiblement relativement compacts, $\Delta_k^h(Du)$ converge vers $\frac{\partial}{\partial x_k}(Du)$ dans $L^2(\Omega')$ -faible et (3.43) implique

$$(3.44) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Du \right\|_{L^2(\Omega')} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + (1+k/d')\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}) ,$$

d'où (3.33). Comme $\tilde{L}u \in L^2(\Omega')$, pour tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, l'équation (3.34) est vérifiée presque partout dans Ω .

REMARQUE 3.3. Le théorème 3.2 se généralise de la façon suivante :
Si l'opérateur \tilde{L} a des coefficients a_{ij}, b_i dans $W^{m,\infty}(\Omega)$ ($m \leq \infty$), des coefficients c_i et d dans $W^{m-1,\infty}(\Omega)$ et vérifie (3.4), et si $f \in W^{m,2}(\Omega)$ alors toute solution faible de $\tilde{L}u = f$ appartient à $W^{m+2,2}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ et on a

$$(3.45) \quad \|u\|_{W^{m+2,2}(\Omega')} \leq C(\|f\|_{W^{m,2}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}) .$$

3.3. Régularité $W^{2,2}$ globale

Le résultat suivant dû à Nirenberg est le fondement de la théorie L^2 des équations elliptiques du second ordre.

THEOREME 3.3. Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N de bord $\partial\Omega$ de classe C^2 , \tilde{L} l'opérateur défini en (3.1), $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de $\tilde{L}u = f$ dans Ω . On suppose que (3.4) est vérifié, que les coefficients a_{ij} et b_i sont uniformément lipschitziens dans Ω et que les coefficients c_i et d sont essentiellement bornés dans Ω . Alors $u \in W^{2,2}(\Omega)$ et il existe une constante C ne dépendant que de \tilde{L} et Ω telle que

$$(3.46) \quad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) .$$

Démonstration. Première étape : on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^{N+} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$, que u s'annule sur $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$ et est à support compact dans \mathbb{R}^{N+} . Comme dans la démonstration du Théorème 3.2, l'équation $\tilde{L}u = f$ se ramène à

$$(3.47) \quad \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^{N+}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^{N+}} g v dx ,$$

pour tout $v \in C_0^1(\mathbb{R}^{N+})$ avec $g \in L^2(\mathbb{R}^{N+})$ à support compact. Avec les notations du Théorème 3.2 on choisit comme fonctions test les fonctions $v = \Delta_k^h u$, $1 \leq k < N$, (translations parallèles à la frontière de \mathbb{R}^{N+}) et on obtient comme précédemment

$$(3.48) \quad \|D \Delta_k^h u\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} \leq C (\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} + \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^{N+})}) .$$

Par suite pour tout (k,l) ; $1 \leq k, l \leq N$ tel que $k+l < 2N$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^{N+})$ et vérifie

$$(3.49) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} + \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^{N+})} \right) .$$

Pour étudier le dernier terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$ on écrit l'équation sous la forme

$$(3.50) \quad \frac{\partial}{\partial x_N} \left(a_{N,N} \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = g - \sum_{\substack{i,j \\ i+j < 2N}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) ,$$

et le terme de gauche de (3.50) est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^{N+})$. Or au sens des distributions dans \mathbb{R}^{N+} , $\frac{\partial}{\partial x_N} \left(a_{NN} \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = a_{NN} \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} + \frac{\partial a_{NN}}{\partial x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}$.

Comme $\frac{\partial a_{NN}}{\partial x_N}$ est borné et $a_{NN} \geq \lambda$ par (3.4) on en déduit que

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \in L^2(\mathbb{R}^{N+})$ et en utilisant (3.49) et (3.50)

$$(3.51) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+})} + \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^{N+})} \right) .$$

En utilisant (3.49), (3.51) et l'inégalité de Poincaré on en déduit (3.46) avec $\Omega = \mathbb{R}^{N+}$.

Deuxième étape : cas général. D'après le Théorème 3.2, pour tout ouvert Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $u \in W^{2,2}(\Omega')$ et on a l'estimation (3.33) avec $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ remplacé par $\|u\|_{L^2(\Omega)}$. Comme le bord $\partial\Omega$ de Ω

est compact il suffit de montrer qu'en tout point $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $u|_V$ la restriction de u à $V \cap \Omega$ appartienne à $W^{2,2}(V \cap \Omega)$ et vérifie

$$(3.52) \quad \|u\|_{W^{2,2}(V \cap \Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) .$$

Soit donc $x_0 \in \partial\Omega$ et soit (V,p,Q) une carte locale au voisinage de x_0 c'est-à-dire que V est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant x_0 , p un C^2 -difféomorphisme de V sur $Q = \{y \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 < 1 \text{ et } |y_N| < 1\}$ tel que

$$(3.53) \quad \begin{cases} p(\Omega \cap V) = Q^+ = Q \cap \mathbb{R}^{N^+} = \{y \in Q : y_N > 0\} , \\ p(\bar{\Omega} \cap V) = Q^- = Q \cap \mathbb{R}^{N^-} = \{y \in Q : y_N < 0\} , \\ p(\partial\Omega \cap V) = \Sigma = \bar{Q}^+ \cap \bar{Q}^- = \{y \in Q : y_N = 0\} , \end{cases}$$

(on suppose $p(x_0) = 0$ par translation). Soient B' et B'' deux boules de centre x_0 telle que $\bar{B}' \subset B'' \subset \bar{B}'' \subset V$ et soit $\eta \in C_0^\infty(V)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, à support dans B'' et valant 1 sur B' . Soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact dans $\Omega \cap B''$ alors

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta u) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} g \eta v dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - v \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) dx .$$

Par suite, en intégrant par parties,

$$(3.55) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta u) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} G v dx .$$

avec $G = g - \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} u \frac{\partial \eta}{\partial x_i}) + a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$. Donc $G \in L^2(\Omega)$ et est à support dans $\Omega \cap B''$. En outre $\|G\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)})$.

A toute fonction w mesurable (pour la mesure de Lebesgue) dans V on associe la fonction $\tilde{w} = w \circ p^{-1}$; \tilde{w} est mesurable pour la mesure de Lebesgue et il est facile de vérifier que l'application $w \mapsto \tilde{w}$ définit un isomorphisme de $W^{m,2}(V)$ dans $W^{m,2}(Q)$ pour $m = 0, 1, 2$. Soit $v \in C_0^2(\Omega \cap B'')$, on a

$$(3.56) \quad \sum_{k,l} \int_{Q^+} a'_{k,l} \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{\eta} u) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_l} dy = \int_{Q^+} \tilde{G}(y) \tilde{v}(y) |\tilde{J}| dy ,$$

où $|\tilde{J}|$ est le jacobien de p^{-1} et où les coefficients $a'_{k,l}$ sont donnés par

$$(3.57) \quad a'_{k,l} = \sum_{i,j} \tilde{a}_{i,j} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \frac{\partial p_l}{\partial x_j} |\tilde{J}| .$$

Les fonctions $a'_{k,l}$ sont de classe C^1 dans \bar{Q}^+ . Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} a'_{k,l} \xi_k \xi_l &= |\tilde{J}| \sum_{k,l} \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \frac{\partial p_l}{\partial x_j} \xi_k \xi_l, \\ &= |\tilde{J}| \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \xi_k \frac{\partial p_l}{\partial x_j} \xi_l, \\ &= |\tilde{J}| \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij} \left(\sum_k \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \xi_k \right) \left(\sum_k \frac{\partial p_k}{\partial x_j} \xi_k \right). \end{aligned}$$

Comme $m \leq |\tilde{J}| \leq M$ où m et M sont strictement positifs, on a

$$(3.58) \quad \sum_{k,l} a'_{kl} \xi_k \xi_l \geq m\lambda \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \xi_k \right)^2 = \lambda m |J(\xi)|^2.$$

où J est la transformation linéaire de \mathbb{R}^N de matrice $\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right)$. Comme J est un isomorphisme et p est de classe C^2 il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et tout $x \in V$, $|J(\xi)|^2 \geq \alpha |\xi|^2$, d'où

$$(3.59) \quad \sum_{k,l} a'_{kl} \xi_k \xi_l \geq m\alpha\lambda |\xi|^2.$$

On déduit alors de la première étape que $\tilde{\eta}u \in W^{2,2}(\Omega \cap B')$ et

$$(3.60) \quad \|\tilde{\eta}u\|_{W^{2,2}(p(\Omega \cap B'))} \leq C(\|\tilde{G}\tilde{J}\|_{L^2(p(\Omega \cap B''))} + \|\tilde{\eta}u\|_{W^{1,2}(p(\Omega \cap B'))}).$$

et par suite

$$(3.61) \quad \|\eta u\|_{W^{2,2}(\Omega \cap B')} \leq C'(\|f\|_{L^2(\Omega \cap B'')} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega \cap B'')})$$

d'où le théorème en utilisant l'inégalité de coercivité (3.27).

REMARQUE 3.4. La conclusion du Théorème 3.3 reste valable si on remplace l'hypothèse $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ par il existe $\phi \in W^{2,2}(\Omega)$ tel que $u - \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. L'estimation (3.46) devient

$$(3.62) \quad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{2,2}(\Omega)}) .$$

3.4. Une application à un problème non linéaire

Dans cette section nous supposons que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N de bord $\partial\Omega$ de classe C^2 et \tilde{L} est l'opérateur à forme divergentiel défini par

$$(3.63) \quad \tilde{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x) u .$$

On se donne une fonction g continue croissante définie sur \mathbb{R} .

PROPOSITION 3.2. Supposons que les coefficients a_{ij} soient uniformément lipschitziens dans Ω et vérifient (3.4), que c soit essentiellement borné dans Ω et $c(x) \leq 0$ presque partout. Alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe un unique $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $g(u) \in L^2(\Omega)$, vérifiant

$$(3.64) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x)u - g(u(x)) = f(x) ,$$

presque partout dans Ω .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si u vérifie (3.64) presque partout il vérifie aussi l'équation dans le sens faible suivant : pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on a

$$(3.65) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - c u v + g(u)v \right\} dx = - \int_{\Omega} f v dx$$

Par suite si u et \hat{u} sont deux solutions faibles de (3.65) tels que $g(u)$ et $g(\hat{u})$ soient dans $L^2(\Omega)$ on en déduit puisque $u-\hat{u}$ est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$(3.66) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(u-\hat{u}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u-\hat{u}) - c(u-\hat{u})^2 + (g(u)-g(\hat{u}))(u-\hat{u}) \right\} dx = 0$$

Comme $c \leq 0$ et $(g(u)-g(\hat{u}))(u-\hat{u}) \geq 0$ on obtient par (3.4)

$$(3.67) \quad \lambda \int_{\Omega} |D(u-\hat{u})|^2 dx = 0 \quad ,$$

d'où $u-\hat{u} = 0$ en utilisant l'inégalité de Poincaré.

La démonstration de l'existence se fait en trois étapes en supposant tout d'abord g lipschitzienne sur \mathbb{R} , puis en approximant g quelconque par des g_n lipschitziennes.

Première étape : g est croissante, lipschitzienne de constante k . On définit la fonction j par $j(r) = r - \frac{1}{k} g(r)$. Il est immédiat de vérifier que j est une contraction croissante définie sur \mathbb{R} . Si $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ on définit $w = I(v)$ comme étant la solution dans $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ de

$$(3.68) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}) + (c(x)-k)w = -kj(v) + f(x) \quad ,$$

presque partout dans Ω (une telle solution existe d'après le Théorème 3.1). Soient $\hat{w} = I(\hat{v})$, on a

$$(3.69) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial(w-\hat{w})}{\partial x_i} \frac{\partial(w-\hat{w})}{\partial x_j} - (c-k)(w-\hat{w})^2 \right\} dx = k \int_{\Omega} (j(v)-j(\hat{v}))(w-\hat{w}) dx$$

d'où en utilisant (3.4) et $c \leq 0$

$$(3.70) \quad \lambda \int_{\Omega} |D(w-\hat{w})|^2 dx + k \int_{\Omega} |w-\hat{w}|^2 dx \leq k \int_{\Omega} (j(v)-j(\hat{v}))(w-\hat{w}) dx \quad .$$

Comme j est une contraction, $|\int_{\Omega} (j(v)-j(\varphi))(w-\hat{w})dx| \leq \|v-\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|w-\hat{w}\|_{L^2(\Omega)}$.

En utilisant l'inégalité de Poincaré on en déduit

$$(3.71) \quad (\lambda c+k) \|I(v)-I(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq k \|v-\varphi\|_{L^2(\Omega)} .$$

Par suite l'application I est une contraction stricte de $L^2(\Omega)$, donc elle admet un unique point fixe u , c'est-à-dire que $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ est la solution de

$$(3.72) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + (c(x)-k)u = -ku + g(u) + f(x)$$

et u vérifie (3.64).

Deuxième étape : La solution u de (3.64) vérifie

$$(3.73) \quad \|g(u) - g(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - g(0)\|_{L^2(\Omega)} .$$

Pour démontrer (3.73) on régularise g de la façon suivante : soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\text{supp. } \rho \subset]-1, 1[$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(y)dy = 1$; on pose $\rho_n(y) = n \rho(ny)$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $g_n(r) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) \hat{g}(r-y)dy$. La fonction g est de classe C^∞ , croissante. En outre $|g_n(r)-g(r)| \leq \frac{k}{n}$. En prenant $v = \hat{g}_n(u) = g_n(u) - g_n(0)$ dans (3.65), on a

$$(3.74) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{g}_n(u)) - c u \hat{g}_n(u) + (g(u)-g(0)) \hat{g}_n(u) \right\} dx = \dots$$

$$\dots = - \int_{\Omega} (f-g(0)) \hat{g}_n(u) dx .$$

Or $\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{g}_n(u)) = \hat{g}_n'(u) \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq 0$ et $-c u \hat{g}_n(u) \geq 0$,

d'où

$$(3.75) \quad \int_{\Omega} (g(u)-g(0))\hat{g}_n(u)dx \leq - \int_{\Omega} (f-g(0))\hat{g}_n(u)dx \leq \|f-g(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{g}_n(u)\|_{L^2(\Omega)} .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit (3.73).

Troisième étape : Fin de la démonstration. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on définit la tronquée de g par

$$(3.76) \quad T_n g(r) = \begin{cases} g(n) & \text{si } r > n , \\ g(r) & \text{si } |r| \leq n , \\ g(-n) & \text{si } r < -n . \end{cases}$$

La fonction $T_n g$ est continue, bornée et croissante. On régularise $T_n g$ en posant $h_n(r) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) T_n g(r-y) dy$. La fonction h_n est de classe C^∞ , bornée et croissante et comme $T_n g$ est bornée, h_n est lipschitzienne. D'après la première étape, il existe $u_n \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant

$$(3.77) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) + c(x) u_n - h_n(u_n) = f(x) ,$$

presque partout dans Ω et comme $h_n(0) = 0$, on a

$$(3.78) \quad \|h_n(u_n) - h_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - h_n(0)\|_{L^2(\Omega)} ,$$

or $h_n(0)$ est borné indépendamment de n , donc d'après (3.78) et les théorèmes 3.1 et 3.3, il existe $C = C(L, \Omega, f, g(0))$ tel que

$$(3.79) \quad \|u_n\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C .$$

Comme l'injection de $W^{2,2}(\Omega)$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ est compacte, il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tels que $\{u_{n_k}\}$

converge vers u dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et presque partout dans Ω . En outre d'après (3.78) et la réflexivité de $W^{2,2}(\Omega)$, u appartient à $W^{2,2}(\Omega)$. Comme la suite $\{h_n(u_n)\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ elle est relativement compacte et on peut toujours supposer que $\{h_{n_k}(u_{n_k})\}$ converge faiblement vers $\phi \in L^2(\Omega)$. Par suite la fonction u satisfait au sens faible et presque partout dans Ω

$$(3.80) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x) u - \phi = f(x) .$$

La démonstration sera terminée si on arrive à montrer que $\phi = g(u)$. Comme g est continue $h_{n_k}(u_{n_k}(x))$ tend vers $g(u(x))$ pour presque tout $x \in \Omega$. Soit $K = \text{supp.}(\phi - g(u))^+$ et supposons $\text{mes.}(K) > 0$, donc $\int_K (\phi - g(u)) dx > 0$. D'après le théorème d'Egorov, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que $K_\varepsilon \subset K$, $\text{mes.}(K - K_\varepsilon) < \varepsilon$ et $h_{n_k}(u_{n_k})$ converge vers $g(u)$ uniformément sur K_ε . On a

$$(3.81) \quad \int_K (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx = \int_{K_\varepsilon} (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx + \int_{K - K_\varepsilon} (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx .$$

Or $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{K_\varepsilon} (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx = 0$. Mais d'après (3.78) et le lemme de Fatou, $\|h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ (indépendant de n_k) d'où

$$\left| \int_{K - K_\varepsilon} (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx \right| \leq \sqrt{\varepsilon} C ; \text{ on déduit de (3.81)}$$

$$(3.82) \quad \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_K (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx = 0 .$$

D'un autre côté, par convergence faible dans $L^2(\Omega)$, on a

$$(3.83) \quad \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_K (h_{n_k}(u_{n_k}) - g(u)) dx = \int_K (\phi - g(u)) dx ,$$

ce qui contredit $\text{mes.}(K) > 0$. De la même façon $\text{mes.}(\text{supp.}(\phi - g(u))^-) = 0$ et $\phi = g(u)$.

REMARQUE 3.5. La proposition 3.1 s'étend à des fonctions monotones discontinues (plus généralement à des graphes maximaux monotones de \mathbb{R}^2 voir [10]). Si g est une telle fonction monotone définie sur \mathbb{R} on note $g^-(r) = \lim_{\substack{s \rightarrow r \\ s < r}} g(s)$, $g^+(r) = \lim_{\substack{s \rightarrow r \\ s > r}} g(s)$ et $g^- = g^+$ sauf

sur un ensemble dénombrable. Si r_n est une suite qui tend vers r , on a

$$(3.84) \quad g^-(r) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) g(r_n - y) dy \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) g(r_n - y) dy \leq g^+(r)$$

On démontre alors de la même façon que précédemment le résultat suivant :

Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$
tel que

$$(3.85) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x)u - f(x) \in [g^-(u(x)), g^+(u(x))] ,$$

presque partout dans Ω .

La théorie des équations aux dérivées partielles multivoques a été développée depuis une douzaine d'années en vue de ses nombreuses applications aux problèmes de contraintes en physique ou en économie.