

4. REGULARITE HOLDERIENNE

Dans cette section Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 3$ et \tilde{L} est l'opérateur à forme divergentielle

$$(4.1) \quad \tilde{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i (c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)u)) + d(x)u ,$$

et \mathfrak{L} la forme bilinéaire

$$(4.2) \quad \mathfrak{L}(u,v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_i (c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i}) - duv \right\} dx .$$

On suppose que les coefficients a_{ij} , c_i , b_i et d appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et que pour presque tout x dans Ω

$$(4.3) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_i \xi_i^2 , \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N ,$$

où $\lambda > 0$. Ainsi \mathfrak{L} est bien définie et continue dans $W^{1,2}(\Omega)$. Le résultat essentiel de cette section est que sous ces seules hypothèses de régularité les solutions faibles dans $W^{1,2}(\Omega)$ de l'équation

$$(4.4) \quad \tilde{L}u = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} ,$$

sont localement bornées et holdériennes dans Ω pourvu que $g \in L^{q/2}(\Omega)$ et $f \in L^q(\Omega)$ où $q > N$. Ce résultat, très surprenant quand il fut découvert, est pour l'essentiel dû à De Giorgi et Nash. Deux démonstrations plus générales ont été obtenues par Moser et Stampacchia. Les applications de ce résultat sont innombrables en théorie des équations quasilineaires.

4.1. Estimations L^∞ globales

THEOREME 4.1. On suppose que l'ouvert Ω est borné et que les coefficients de \tilde{L} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient (4.3). Alors pour tout $g \in L^{q/2}(\Omega)$ et $f_i \in L^q(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, avec $q > N$, tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solution au sens faible de (4.4) est essentiellement borné dans Ω et vérifie

$$(4.6) \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{2}{N} - \frac{2}{q}} + \sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} \right\} + C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que de \tilde{L} et $C_2 = 0$ si la condition (3.7) est remplie.

Ce résultat étant profondément intéressant nous en donnerons deux démonstrations l'une due à Moser et l'autre à Stampacchia.

Première démonstration : méthode de Stampacchia

Pour simplifier l'exposition nous supposerons que $b_i = c_i = 0$ et nous commençons par un résultat technique.

1ère étape : Soit ϕ une fonction décroissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ . On suppose qu'il existe des constantes $C \geq 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ telles que

$$(4.7) \quad \phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\alpha} (\phi(k))^\beta, \quad \forall h > k \geq 0;$$

alors ϕ s'annule sur $[d, +\infty[$ où

$$(4.8) \quad d^\alpha = C(\phi(0))^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}.$$

Pour montrer cette relation on considère la suite $s_n = d(1-2^{-n})$, $n = 1, 2, \dots$, d étant défini en (4.8). Par (4.7) on a

$$(4.9) \quad \phi(s_{n+1}) \leq \frac{C}{(s_{n+1} - s_n)^\alpha} (\phi(s_n))^\beta = \frac{C 2^{\alpha(n+1)}}{d^\alpha} (\phi(s_n))^\beta .$$

Montrons par récurrence sur n la relation suivante

$$(4.10) \quad \phi(s_n) \leq \phi(0) 2^{n\alpha/(1-\beta)} .$$

La relation est vraie à l'ordre 0 . Supposons la vraie à l'ordre n .
On déduit de (4.8)

$$(4.11) \quad \phi(s_{n+1}) \leq \frac{C 2^{\alpha(n+1)}}{C(\phi(0))^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}} (\phi(0))^\beta 2^{n\alpha\beta/(1-\beta)} = \phi(0) 2^{\alpha(n+1)/(1-\beta)} ,$$

ce qui est la relation. Comme ϕ décroît on a

$$(4.12) \quad 0 \leq \phi(d) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(s_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(0) 2^{n\alpha/(1-\beta)} = 0 .$$

2ème étape : Pour $k \geq 0$ on pose $\Omega_k = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$ et $\phi(k) = \text{mes.}(\Omega_k)$.
L'idée est de montrer que $\phi(k) = 0$ pour $k \geq k_0$. On choisit comme
fonction test $(u-k)^+$ et on a

$$(4.13) \quad \mathcal{L}(u, (u-k)^+) = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u-k)^+ dx = - \int_{\Omega} \left\{ g(u-k)^+ + \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u-k)^+ \right\} dx .$$

D'où comme $\frac{\partial}{\partial x_i} (u-k)^+ = \frac{\partial u}{\partial x_i} \chi_{\Omega_k}$, si $q \geq 4$ on obtient

$$(4.14) \quad \lambda \int_{\Omega} |D(u-k)^+|^2 \leq \|g\|_{L^2(\Omega_k)} \|(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} + \dots \\ \dots + (\sum_i \|f_i\|_{L^2(\Omega_k)}^2)^{1/2} \|D(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} .$$

$$\text{Or } \|g\|_{L^2(\Omega_k)} \|(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} \|(u-k)^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} (\phi(k))^{\frac{1}{2} - \frac{2}{q} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}} , \\ \leq c \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} (\phi(k))^{1 - \frac{2}{q} - \frac{1}{2^*}} \|D(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} ,$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev ($2^* = \frac{2N}{N-2}$). Par suite

$$(4.15) \quad \lambda \|D(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ c \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} + \left(\sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\} (\phi(k))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

Si $N = 3 < q < 4$ on vérifie que (4.15) est encore valide.

En outre $\|D(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|(u-k)^+\|_{L^{2^*}(\Omega)}$, par suite

$$(4.16) \quad \|(u-k)^+\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda c} \left\{ c \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} + \left(\sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\} (\phi(k))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

En outre, pour $h > k$,

$$\left(\int_{\Omega} (u-k)^+{}^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \geq \left(\int_{\Omega_h} ((u-k)^+)^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \geq (h-k)(\phi(h))^{1/2^*}.$$

Par suite il existe une constante K telle que

$$(4.17) \quad \phi(h) \leq \frac{K}{(h-k)^{2^*}} \left(\|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} + \sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)} \right)^{2^*} (\phi(k))^{2^*(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}.$$

Or $2^*(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) = \frac{N}{N-2} \frac{q-2}{q} > 1$. En appliquant la première étape avec

$\beta = \frac{N}{N-2} \frac{q-2}{q}$ et $\alpha = 2^*$ on en déduit que $\phi(d) = 0$, c'est-à-dire

$u(x) \leq d$ p.p. dans Ω avec

$$d = K^{1/2^*} 2^{\beta/(\beta-1)} \left(\|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} + \sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)} \right) (\phi(0))^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}}.$$

De la même façon $-u(x) \leq d$ p.p. dans Ω d'où (4.6) avec $C_2 = 0$ car la condition (3.7) est remplie.

Deuxième démonstration : méthode de Moser

Nous nous plaçons dans le cadre plus général des équations quasilineaires à forme divergentielle

$$(4.18) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j(x, u, Du)) + B(x, u, Du) = 0 \quad ,$$

où, pour $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, on pose

$$(4.19) \quad \begin{cases} A_j(x, r, p) = \sum_i a_{ij}(x) p_i + b_j(x) r - f_j(x) \quad , \\ B(x, r, p) = \sum_i c_i(x) p_i + d(x) - g(x) \quad . \end{cases}$$

On suppose que u est solution faible de (4.18) dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, c'est-à-dire pour tout $v \in C_0^1(\Omega)$ on a

$$(4.20) \quad \int_{\Omega} \left\{ -\sum_j A_j(x, u, Du) \frac{\partial v}{\partial x_j} + B(x, u, Du) v \right\} dx = 0 \quad .$$

On pose $\beta = (b_1, \dots, b_N)$, $\gamma = (c_1, \dots, c_N)$, $\delta = (f_1, \dots, f_N)$ et $|\beta|$, $|\gamma|$ et $|\delta|$ les normes euclidiennes de β , γ et δ . On a en utilisant (4.3) et l'inégalité de Schwarz

$$\sum_j A_j(x, r, p) p_j = \sum_{i,j} a_{ij}(x) p_i p_j + \sum_j b_j(r) r p_j - \sum_j f_j(x) p_j \geq \frac{\lambda}{2} |p|^2 - \frac{1}{2\lambda} |r\beta - \delta|^2 \quad ,$$

$$|B(x, r, p)| \leq \gamma |p| + |dr| + |g| \quad ,$$

cela pour tout $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Pour préciser la structure de notre équation nous notons $\bar{r} = |r| + k$, $k > 0$ quelconque et $\bar{b} = \lambda^{-2} (|\beta|^2 + |\gamma|^2 + k^{-2} |\delta|^2) + \lambda^{-1} (|d| + k^{-1} |g|)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε ($0 < \varepsilon < 1$)

$$\begin{aligned} |\bar{r} B(x, r, p)| &\leq (|r| + k) (\gamma |p| + |dr| + |g|) \quad , \\ &\leq \frac{\lambda \varepsilon}{2} |p|^2 + \frac{\bar{r}^2}{2\lambda \varepsilon} + |d| \bar{r}^2 + \frac{|g|}{k} k \bar{r} \quad , \\ &\leq \frac{\lambda \varepsilon}{2} |p|^2 + \frac{|\gamma|^2 \bar{r}^2}{2\lambda \varepsilon} + (|d| + k^{-1} |g|) \bar{r}^2 \quad . \end{aligned}$$

D'où, puisque $\frac{1}{\varepsilon} > 1$,

$$(4.21) \quad |\bar{r} B(x,r,p)| \leq \frac{\lambda}{2}(\varepsilon|p|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \bar{b} \bar{r}^2) .$$

En outre $\frac{\lambda}{2}|p|^2 - \frac{1}{2\lambda} |r\beta - \delta|^2 \geq \frac{\lambda}{2}|p|^2 - \frac{1}{\lambda}(r^2|\beta|^2 + |\delta|^2)$, d'où

$$(4.22) \quad \sum_j A_j(x,r,p) p_j \geq \frac{\lambda}{2}(|p|^2 - 2\bar{b} \bar{r}^2) .$$

Les relations (4.21) et (4.22) sont les relations structurelles de la classe d'équations quasilineaires du second ordre pour lesquelles la méthode de Moser s'applique .

Première étape : choix des fonctions test. On prend tout d'abord

$k = \frac{1}{\lambda}(\|(\sum_i f_i^2)^{1/2}\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)})$. Soit $p \geq 1$ et $1 > k$. Nous

définissons $\varphi \in C^1([k, +\infty[)$ en posant $\varphi(r) = r^{p-k}$ pour $k \leq r \leq 1$ et φ linéaire sur $[1, +\infty[$. Posons $\bar{u}^+ = u^+ + k = w$ et

$$(4.23) \quad v = \psi(w) = \int_k^w (\varphi'(s))^2 ds = \int_0^w (\varphi'(s))^2 ds = \int_0^{w-k} (\varphi'(s+k))^2 ds .$$

Comme la fonction $r \mapsto \int_0^{r-k} (\varphi'(s+k))^2 ds$ est de classe C^1 sur

$[0, +\infty[$, qu'elle est linéaire sur $[1-k, +\infty[$ et comme $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et on a

$$(4.24) \quad \int_{\Omega} \{-\sum_j A_j(x,u,Du) \varphi'(w) \frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x,u,Du) \varphi(w)\} dx = 0 .$$

Or $\frac{\partial w}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ presque partout si $w > k$, c'est-à-dire si $\varphi(w) > 0$,

donc (4.24) implique

$$(4.25) \quad \int_{\Omega} \{-\sum_j A_j(x,u,Dw) \frac{\partial w}{\partial x_j} \varphi'(w) + B(x,u,Dw) \varphi(w)\} dx = 0 .$$

Or $\sum_j A_j(x, u, Dw) \frac{\partial w}{\partial x_j} \psi'(w) \geq \frac{\lambda}{2} (|Dw|^2 - 2\bar{b}w^2) \psi'(w)$, et
 $|Dw|^2 \psi'(w) = |D(\varphi(w))|^2$ d'après (4.23). On en déduit

$$(4.26) \quad \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |D(\varphi(w))|^2 dx \leq \int_{\Omega} \{ \lambda \bar{b} w^2 \psi'^2 + \psi(w) |B(x, u, Dw)| \} dx .$$

En outre $\psi(w) \leq w \psi'(w)$ puisque ψ' est croissant, d'où

$$\psi(w) |B(x, u, Dw)| \leq \psi'(w) w |B(x, u, Dw)| \leq \frac{\lambda}{2} (\varepsilon |Dw|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \bar{b} w^2) \psi'(w) .$$

Par suite, comme $\psi'(w) = (\varphi'(w))^2$,

$$(4.27) \quad \int_{\Omega} |D(\varphi(w))|^2 dx \leq \int_{\Omega} \{ 2\bar{b} w^2 \varphi'^2(w) + \varepsilon |D\varphi(w)|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \bar{b} w^2 \varphi'^2(w) \} dx .$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et nous obtenons

$$(4.28) \quad \int_{\Omega} |D(\varphi(w))|^2 dx \leq 12 \int_{\Omega} \bar{b} |w\varphi'(w)|^2 dx .$$

Comme $\varphi(w) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\int_{\Omega} |D(\varphi(w))|^2 dx \geq C_1 \|\varphi(w)\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}^2$.

En outre, comme $\bar{b} = \frac{1}{\lambda^2} (|\beta|^2 + |\gamma|^2 + \delta^2/k^2) + \frac{1}{\lambda} (|d| + |g|/k)$, \bar{b} appartient à $L^{q/2}(\Omega)$. Si $w\varphi'(w)$ appartient à $L^{q/(q-2)}(\Omega)$, on en déduit

$$(4.29) \quad \|\varphi(w)\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq C \|\bar{b}\|_{L^{q/2}(\Omega)}^{1/2} \|w\varphi'(w)\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} ,$$

où C ne dépend que de N et $|\Omega|$. Compte tenu que

$w\varphi'(w) \leq p(\varphi(w) + k^p)$, on en déduit que si $\varphi(w) \in L^{2q/(q-2)}(\Omega)$,

alors $\varphi(w) \in L^{2N/(N-2)}(\Omega)$ et si $w \in L^{2pq/(q-2)}(\Omega)$, on peut faire

tendre l vers $+\infty$. Par Fatou $w \in L^{2Np/(N-2)}(\Omega)$ et

$$(4.30) \quad \|w^p - k^p\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq p \|\bar{b}\|_{L^{q/2}(\Omega)}^{1/2} \|w^p\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} .$$

Deuxième étape : estimation L^∞ par itérations. On définit la suite

$$p_n = \frac{N(q-2)}{q(N-2)} p_{n-1}, p_0 = 1, \text{ c'est-à-dire } p_n = \alpha^n \text{ avec } \alpha = \frac{N(q-2)}{q(N-2)} > 1 .$$

On déduit de (4.30) que si $w \in L^{p_{n-1}}(\Omega)$ alors $w \in L^{p_n}(\Omega)$, par suite $w \in \bigcap_{1 \leq r < \infty} L^r(\Omega)$. Comme $w^p - k^p \geq (u^+)^p$ on a

$$(4.31) \quad \|u^+\|_{L^{2pN/(N-2)}(\Omega)}^p \leq p \|\bar{b}\|_{L^{q/2}(\Omega)}^{1/2} \|u^+ + k\|_{L^{2qp/(q-2)}(\Omega)}^p ,$$

$$(4.32) \quad \|u^+\|_{L^{2pN/(N-2)}(\Omega)} \leq (p \|\bar{b}\|_{L^{q/2}(\Omega)}^{1/2})^{1/p} (\|u^+\|_{L^{2pq/(q-2)}(\Omega)} + k |\Omega|^{(q-2)/2pq}) .$$

Si nous remplaçons k par $2^{-n}k$ le coefficient \bar{b} va être remplacé par \bar{b}_n et $\bar{b}_n \leq 2^{2n\bar{b}}$, d'où en posant $\rho = 2q/(q-2)$

$$(4.33) \quad \|u^+\|_{L^{\rho\alpha^{n+1}}(\Omega)} \leq \left(\frac{q-2}{q} \alpha^n 2^n \|\bar{b}\|_{L^{q/2}(\Omega)}^{1/2} \right)^{\alpha^{-n}} (\|u^+\|_{L^{\rho\alpha^n}(\Omega)} + 2^{-n}k |\Omega|^{\alpha^{-n}}) .$$

Par suite il existe une constante m telle que pour tout n

$$(4.34) \quad \|u^+\|_{L^{\rho\alpha^{n+1}}(\Omega)} \leq m^{n\alpha^{-n}} (\|u^+\|_{L^{\rho\alpha^n}(\Omega)} + 2^{-n}k) .$$

Supposons qu'on ait montré à l'ordre $n+1$

$$(4.35) \quad \|u^+\|_{L^{\rho\alpha^{n+1}}(\Omega)} \leq m^{\sum_{i=0}^n i\alpha^{-i}} \|u^+\|_{L^\rho(\Omega)} + k \sum_{j=0}^n 2^{-j} \left(\prod_{i=j+1}^n m^{i\alpha^{-i}} \right) ,$$

on déduit de la relation (4.34) à l'ordre $n+2$

$$\|u^+\|_{L^{\rho\alpha^{n+2}}(\Omega)} \leq m^{(n+1)\alpha^{-n-1}} \left(m^{\sum_{i=0}^n i\alpha^{-i}} \|u^+\|_{L^{\rho}(\Omega)} + k \sum_{j=0}^n 2^{-j} \left(\prod_{i=j}^n m^{i\alpha^{-i}} \right) \right) \dots + m^{(n+1)\alpha^{-n-1}} 2^{-n-1} k ,$$

d'où (4.35) à l'ordre $n+2$.

Comme $\alpha > 1$, $\sum_{i=0}^n i\alpha^{-i} < \sum_{i=0}^{+\infty} i\alpha^{-i} = A$ et $\sum_{j=0}^n 2^{-j} \left(\prod_{i=j}^n m^{i\alpha^{-i}} \right) < 2A$.

Par suite, pour tout n entier

$$(4.36) \quad \|u^+\|_{L^{\rho\alpha^n}(\Omega)} \leq A \|u^+\|_{L^{\rho}(\Omega)} + 2kA .$$

On en déduit que u^+ est essentiellement borné dans Ω et vérifie

$$(4.37) \quad \|u^+\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq A \left(\|u^+\|_{L^{\rho}(\Omega)} + \frac{2}{\lambda} \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} + \left\| \left(\sum_i f_i^2 \right) \right\|_{L^q(\Omega)} \right) .$$

Comme $\rho = \frac{2q}{q-2} < \frac{2N}{N-2}$, $\|u^+\|_{L^{\rho}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N}} \|u^+\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. D'après

le théorème 3.1 $\|u^+\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left(\|u^+\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \right)$

d'où (4.6) pour u^+ . En changeant u en $-u$, on en déduit (4.6) pour u .

4.2. Estimations locales pour des sous-solutions

L'idée fondamentale pour prouver que les solutions de 4.4 sont holdériennes dépend d'estimations locales dans L^{∞} pour les sous-solutions de (4.4). La méthode utilisée sera encore la méthode de Moser. Pour simplifier nous supposerons $b_i = c_i = 0$ pour tout i (cf. Remarque 4.1) et dans un premier temps nous nous limiterons à $g = f_i = 0$, pour tout i .

DEFINITION 4.1. Une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est appelée une sous-solution de l'équation

$$(4.38) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0 \quad ,$$

si pour tout $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, on a

$$(4.39) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \leq 0 \quad .$$

LEMME 4.1. Soient u une solution faible de (4.38) dans $W^{1,2}(\Omega)$, ϕ une fonction convexe de classe C^2 et uniformément lipschitzienne sur \mathbb{R} . Alors $v = \phi(u)$ est une sous-solution de (4.38).

Démonstration. Soit $\zeta \in C_0^1(\Omega)$, $\zeta \geq 0$. Comme $\phi'(u) \in W^{1,2}(\Omega)$, on peut prendre $\zeta \phi'(u)$ comme fonction test et on a

$$(4.40) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi'(u) \zeta) dx = 0 \quad ,$$

d'où $\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} (\phi'(u) \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \zeta \phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x_j}) dx = 0$, c'est-à-dire

$$(4.41) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \phi(u)}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \zeta \phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \leq 0 \quad ,$$

d'où le résultat.

Nous posons $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < R\}$ et nous avons

THEOREME 4.2. Soit v une sous-solution positive de l'équation (4.38) dans Ω . On suppose que les coefficients a_{ij} sont dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifient (4.3). Alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $R > 0$ tel que $B(x_0, R) \subset \Omega$ il existe C ne dépendant que de \tilde{L} et N tel que

$$(4.42) \quad \sup_{B(x_0, R/2)} \text{ess } v \leq C \left\{ \frac{1}{R^N} \int_{B(x_0, r)} v^2 dx \right\}^{1/2} .$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est de considérer une suite infinie décroissante de boules $B(x_0, R_n)$, $0 < R/2 < R_n < R$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$, une suite croissante p_n tendant vers $+\infty$ et

d'estimer $\|v\|_{L^{p_n}(B(x_0, R_n))}$ en fonction de $\|v\|_{L^{p_{n-1}}(B(x_0, R_{n-1}))}$.

Soient $p \geq 2$, $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ et n entier. Posons $v_n = \min(n, v)$ et prenons $\zeta^2 v_n^{p-1}$ comme fonction test. Nous avons

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta^2 v_n^{p-1}) dx \leq 0 ,$$

d'où

$$(4.43) \quad (p-1) \int_{\Omega} \zeta^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \frac{\partial v_n}{\partial x_j} v_n^{p-2} dx \leq -2 \int_{\Omega} \zeta v_n^{p-1} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} dx .$$

En utilisant (4.3) et l'inégalité de Cauchy avec ε ($\varepsilon > 0$) on a (avec $C = C(\tilde{L})$)

$$(p-1)\lambda \int_{\Omega} v_n^{p-2} |Dv_n|^2 \zeta dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} v_n^{p-2} \zeta^2 |Dv_n|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} v_n^p |D\zeta|^2 dx .$$

On choisit $\varepsilon = (p-1)\lambda/2$ et on obtient

$$(4.44) \quad \lambda^2 (p-1)^2 \int_{\Omega} v_n^{p-2} \zeta |Dv_n|^2 dx \leq 4C \int_{\Omega} v_n^p |D\zeta|^2 dx .$$

Or $|Dv_n|^2 v_n^{p-2} = \frac{4}{p^2} |D v_n^{p/2}|^2$ d'où $(p-1)^2 |D v_n|^2 v_n^{p-2} \geq |D v_n^{p/2}|^2$ et

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \zeta^2 |D v_n^{p/2}|^2 dx \leq 4C \int_{\Omega} v_n^p |D\zeta|^2 dx .$$

et par suite $\lambda^2 \int_{\Omega} |D(\zeta v_n^{p/2})|^2 dx \leq (2\sqrt{C} + \lambda)^2 \int_{\Omega} v_n^p |D\zeta|^2 dx$. En utilisant

l'inégalité de Sobolev on en déduit qu'il existe une constante K ($= K(\tilde{L}, N)$) telle que

$$(4.45) \quad \left(\int_{\Omega} (\zeta v_n^{p/2})^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq K \int_{\Omega} v_n^p |D\zeta|^2 dx .$$

avec $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Choisissons $R_k = \frac{R}{2}(1 + 2^{-k})$ ($k \geq 0$) et $\zeta = \zeta_k$ telle que

$$(4.46) \quad \zeta = \begin{cases} 1 & \text{sur } B(x_0, R_{k+1}) , \\ 0 & \text{sur } \Omega - B(x_0, R_k) , \end{cases}$$

$0 \leq \zeta \leq 1$ et $|D\zeta| \leq \frac{2}{R_k - R_{k+1}} = \frac{2^{k+3}}{R}$. On a alors (avec $K' = 64K$)

$$(4.47) \quad \left(\int_{B(x_0, R_{k+1})} v_n^{pN/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/N} \leq \frac{K' 4^k}{R^2} \int_{B(x_0, R_k)} v_n^p dx .$$

On pose alors $p_k = 2 \left(\frac{N}{N-2} \right)^k$ et on a

$$(4.48) \quad \left(\int_{B(x_0, R_{k+1})} v_n^{p_{k+1}} dx \right)^{1/p_{k+1}} \leq \frac{K' 4^{k/p_k}}{R^{2/p_k}} \left(\int_{B(x_0, R_k)} v_n^{p_k} dx \right)^{1/p_k} .$$

Il est alors immédiat de vérifier par récurrence que

$$(4.49) \quad \left(\int_{B(x_0, R_{k+1})} v_n^{p_{k+1}} dx \right)^{1/p_{k+1}} \leq \frac{K' 4^{\sum_{i=0}^k p_i^{-1}}}{R^{2 \sum_{i=0}^k p_i^{-1}}} \left(\int_{B(x_0, R)} v_n^2 dx \right)^{1/2} .$$

Or $\sum_{i=0}^k p_i^{-1} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} p_i^{-1} = \frac{N}{4}$ et $\sum_{i=0}^k i p_i^{-1} < \sum_{i=0}^{+\infty} i p_i^{-1} = A$. Comme

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{B(x_0, R_{k+1})} v_n^{p_{k+1}} dx \right)^{1/p_{k+1}} = \|v_n\|_{L^\infty(B(x_0, R/2))}$, on déduit de (4.49)

$$(4.50) \quad \|v_n\|_{L^\infty(B(x_0, R/2))} \leq \frac{C}{R^{N/2}} \|v_n\|_{L^2(B(x_0, R))} .$$

En faisant tendre n vers l'infini on en déduit (4.42).

COROLLAIRE 4.1. Soit u une solution faible de (4.38) appartenant à $W^{1,2}(\Omega)$. On suppose que les coefficients a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient (4.3). Alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $R > 0$ tel que $B(x_0, R) \subset \Omega$, on a

$$(4.51) \quad \|u\|_{L^\infty(B(x_0, R/2))} \leq \frac{C}{R^{N/2}} \|u\|_{L^2(B(x_0, R))} ,$$

où $C = C(\tilde{L}, N)$.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ soit ϕ_ε la fonction définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| - \varepsilon/2 & \text{pour } |x| \geq \varepsilon , \\ |x|^2/2\varepsilon & \text{pour } |x| \leq \varepsilon \end{cases} ,$$

La fonction ϕ_ε est convexe et positive, uniformément lipschitzienne et de classe C^2 sauf en $\pm\varepsilon$. En outre $0 \leq \phi_\varepsilon(x) \leq |x|$ pour tout x et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x) = |x|$. En appliquant le Lemme 2.1, $\phi_\varepsilon(u)$ est une sous-solution positive de (4.38) et par suite

$$(4.52) \quad \|\phi_\varepsilon(u)\|_{L^\infty(B(x_0, R/2))} \leq \frac{C}{R^{N/2}} \|\phi_\varepsilon(u)\|_{L^2(B(x_0, R))} .$$

En faisant tendre ε vers 0 on en déduit (4.51).

REMARQUE 2.1. L'hypothèse $c_i = 0$, $\forall 1 \leq i \leq N$ n'est pas réellement restrictive dans la mesure où on peut s'y ramener grâce à l'astuce suivante :

Soit $d > 0$ et soit $\tilde{\Omega} = \{\tilde{x} = (x_1, \dots, x_N, y) : x \in \Omega \text{ et } |y| < d\}$. L'équation

$$(4.53) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} ,$$

peut alors s'écrire

$$(4.54) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{a}_{ij}(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}) + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y} (\tilde{c}_i(\tilde{x}) y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{c}_i(\tilde{x}) y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}) \right) = \tilde{g} - \sum_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i} ,$$

puisque $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0$, en notant, pour toute fonction φ définie

dans Ω , $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x)$. Soit $[\alpha_{ij}]$ la matrice carrée de rang $N+1$ définie dans $\tilde{\Omega}$ par

$$(4.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij} = \tilde{a}_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq N , \\ \alpha_{i,N+1} = \alpha_{N+1,i} = y \tilde{b}_i \quad , \quad \forall 1 \leq i \leq N , \\ \alpha_{NN} = 1 \quad , \end{array} \right.$$

et notons $\tilde{x}_i = x_i$ si $1 \leq i \leq N$, $\tilde{x}_{N+1} = y$. La fonction \tilde{u} vérifie

$$(4.56) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} (\alpha_{ij}(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i}) = \tilde{g} - \sum_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \tilde{x}_i} .$$

Pour d assez petit la forme quadratique associée à $[\alpha_{ij}]$ est définie positive : en effet, soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{N+1})$, nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j + 2 \sum_{i=1}^N y \tilde{c}_i \xi_i \xi_{N+1} + \xi_{N+1}^2$$

$$\sum_{i,j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - Cd \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i^2 + \xi_{N+1}^2 ,$$

puisque $|y| < d$, C étant une constante. Si on choisit $d < \frac{1}{2C} \min(1, \lambda)$ on en déduit

$$(4.57) \quad \sum_{i,j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \frac{\min(1,\lambda)}{2C} \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i^2 .$$

Les relations (4.42) (resp. (4.51)) sont alors valides pour toute sous-solution (resp. solution) faible de

$$(4.58) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 .$$

4.3. Quelques résultats techniques

DEFINITION 4.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $x_0 \in \Omega$ et $R_0 > 0$ tels que $B(x_0, R_0) \subset \Omega$. Si u est définie dans Ω on définit la fonction ω sur $]0, R_0[$ par

$$(4.59) \quad \omega(R) = \sup_{x \in B(x_0, R)} \text{ess } u(x) - \inf_{x \in B(x_0, R)} \text{ess } u(x) ,$$

ω est l'oscillation de u en x_0 .

Compte tenu de la définition une fonction u définie dans Ω est holdérienne (resp. localement holdérienne) si il existe $C > 0$ et $0 < \gamma < 1$ tels que pour tout $x_0 \in \Omega$ l'oscillation ω de u en x_0 vérifie, pour R assez petit

$$(4.60) \quad \omega(R) \leq C R^\gamma ,$$

(resp pour tout Ω' ouvert relativement compact dans Ω , il existe C et $0 < \gamma < 1$ tels que pour tout $x_0 \in \Omega'$, l'oscillation ω de u en x_0 vérifie (4.60)).

LEMME 4.2. Soient $R_0 > 0$, $\alpha \in]0, 1]$, $\eta \in]0, 1[$ et $C_1 \geq 0$ et soit ω une fonction bornée sur $]0, R_0]$ vérifiant pour tout $R \in]0, R_0]$

$$(4.61) \quad \omega(R/4) \leq \eta \omega(R) + C_1 R^\alpha .$$

Il existe alors deux constantes $C_2 \geq 0$ et $\gamma \in]0, 1[$ ne dépendant que de C_1, α, η et $\sup \omega(R)$ telles que l'on ait pour tout $R \in]0, R_0]$

$$(4.62) \quad \omega(R) \leq C_2(1 + C_1 R_0^\alpha)(R/R_0)^\gamma$$

Démonstration. Soit $a \in]\eta, 1[$. Choisissons $\beta \in]0, 1[$ tel que $4^\beta \eta = a$ et posons $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. Définissons $M = \sup_{\frac{R_0}{4} \leq R \leq R_0} R^{-\gamma} \omega(R)$. On a

$$(4.63) \quad \omega(R) \leq M R^\gamma,$$

sur $[R_0/4, R_0]$. Soit maintenant $R_0/4^2 \leq R \leq R_0/4$, on déduit de (4.61), (4.63), en supposant dans un premier temps $R_0 \leq 1$,

$$\begin{aligned} \omega(R) &\leq \eta \omega(4R) + C_1 (4R)^\alpha \leq \eta M (4R)^\gamma + C_1 4^\alpha R^\alpha \quad \text{d'où} \\ \omega(R) &\leq (M 4^\gamma \eta + C) R^\gamma, \quad \text{avec } C = 4^\alpha C_1. \end{aligned}$$

Plus généralement, supposons que pour $R \in [R_0/4^{n+1}, R_0/4^n]$ on ait

$$(4.64) \quad \omega(R) \leq (M(4^\gamma \eta)^n + C \sum_{i=0}^{n-1} (4^\gamma \eta)^i) R^\gamma,$$

on déduit de (4.61) et de (4.64), que pour $R \in [R_0/4^{n+2}, R_0/4^{n+1}]$, on a

$$\omega(R) \leq \eta(M(4^\gamma \eta)^n + C \sum_{i=0}^{n-1} (4^\gamma \eta)^i) 4^\gamma R^\gamma + 4^\alpha C_1 R^\alpha, \quad \text{d'où}$$

$$(4.65) \quad \omega(R) \leq (M(4^\gamma \eta)^{n+1} + C \sum_{i=0}^n (4^\gamma \eta)^i) R^\gamma.$$

Or on a $(4^\gamma \eta)^{n+1} \leq a^{n+1} \leq a$ et $\sum_{i=0}^n (4^\gamma \eta)^i \leq \sum_{i=0}^n a^i \leq \frac{1}{1-a}$. On en

déduit que pour tout $R \in]0, R_0]$ on a

$$(4.66) \quad \omega(R) \leq (M a + \frac{C}{1-a}) R^\gamma = C_2 (1 + C_1) R^\gamma$$

Pour $R_0 > 1$, on pose $S = \frac{R}{R_0}$ et $\tilde{\omega}(S) = \omega(R)$ vérifie (4.61) avec $R_0 = 1$.

LEMME 4.3. Soient dans \mathbb{R}^N , Σ un sous-ensemble de $B(x_0, R)$ de mesure finie, $R > 0$; il existe une constante $C=C(N)$ telle que pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$ s'annulant sur Σ , on ait

$$(4.67) \quad \int_{B(x_0, R)} u^2 dx \leq C \left(\frac{R^N}{\text{mes.}(\Sigma)} \right)^2 R^2 \int_{B(x_0, R)} |Du|^2 dx .$$

Démonstration. Sans perdre en généralité on suppose $x_0 = 0$ et on note $B(R)=B(0, R)$. Soient $y \in \Sigma$ et $x \in B(R) - \Sigma$, $y = x + r\xi$ avec $r = |x - y|$ et $|\xi| = 1$. On a

$$u(x) = u(x) - u(y) = - \int_0^r \frac{d}{dt} (u(x + t\xi)) dt = - \int_0^r \sum_i \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} (x + t\xi) dt$$

d'où $|u(x)| \leq \int_0^r |Du(x + t\xi)| dt$. En intégrant cette relation par rapport à y sur Σ , nous avons

$$|u(x)| \text{ mes.}(\Sigma) \leq \int_{\Sigma} \int_0^r |Du(x + t\xi)| dt dy \leq \int_{B(R)} \int_0^r |Du(x + t\xi)| dt dy$$

En intégrant sur $B(R)$ en coordonnées sphériques, on en déduit

$$(4.68) \quad |u(x)| \text{ mes.}(\Sigma) \leq \int_0^R \int_{|\xi|=1} r^{N-1} \int_0^r |Du(x + t\xi)| dt d\sigma(\xi) dr .$$

Posons $z = x + t\xi$, $t = |x - z|$ on a

$$|u(x)| \text{ mes.}(\Sigma) \leq \int_0^R \left(\int_0^r \int_{|\xi|=1} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{N-1}} t^{n-1} d\sigma(\xi) dt \right) r^{N-1} dr$$

c'est-à-dire

$$(4.69) \quad |u(x)| \text{ mes.}(\Sigma) \leq \frac{R^N}{N} \int_{B(R)} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz .$$

En intégrant sur $B(R)$ on en déduit

$$(4.70) \quad \int_{B(R)} |u(x)| dx \leq \frac{R^N}{N \text{ mes.}(\Sigma)} \int_{B(R)} \int_{B(R)} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz dx$$

$$\text{or} \quad \int_{B(R)} \int_{B(R)} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{N-1}} dz dx \leq \left(\sup_{|z| \leq R} \int_{B(R)} \frac{dx}{|x-z|^{N-1}} \right) \int_{B(R)} |Du(z)| dz .$$

$$\text{Mais pour } |z| \leq R, \quad \int_{B(R)} \frac{dx}{|x-z|^{N-1}} \leq \int_{B(2R)} \frac{dx}{|x|^{N-1}} = 2k_N R, \quad ,$$

où k_N est le volume $N-1$ dimensionnel de la sphère unité de \mathbb{R}^N .
Par suite

$$(4.71) \quad \int_{B(R)} |u(x)| dx \leq \frac{2k_N R^{N+1}}{N \text{ mes.}(\Sigma)} \int_{B(R)} |Du(x)| dx .$$

Si nous remplaçons u par u^2 dans (4.71) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} u^2(x) dx &\leq \frac{4k_N R^{N+1}}{N \text{ mes.}(\Sigma)} \int_{B(R)} |Du(x)| |u(x)| dx, \\ &\leq \frac{4k_N R^{N+1}}{N \text{ mes.}(\Sigma)} \left(\int_{B(R)} u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(R)} |Du(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où (4.67).

4.4. Continuité holdérienne à l'intérieur

LEMME 4.4. Soit u une solution faible de (4.38) dans $B(x_0, 2R)$ appartenant à $W^{1,2}(B(x_0, 2R))$, les coefficients de \tilde{L} appartenant à $L^\infty(B(x_0, 2R))$ et vérifiant (4.3). Supposons aussi que $0 \leq u \leq 1$ et que

$$(4.72) \quad \text{mes.}(\{x \in B(x_0, R) / u(x) \geq \frac{1}{2}\}) \geq \frac{1}{2} \text{ mes.}(B(x_0, R)) .$$

Il existe alors une constante $C > 0$ ne dépendant que de \tilde{L} et N telle que

$$(4.73) \quad \min_{B(x_0, R/2)} u(x) \geq C .$$

Démonstration. Soient $\phi(x) = \max(-(x - \frac{1}{2})^2 \text{Log } 2x, 0)$ et, pour $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x + \frac{\varepsilon}{2})$, $x \geq 0$. Pour $x \geq (1-\varepsilon)/2$, $\phi_\varepsilon = 0$ et pour $0 \leq x \leq (1-\varepsilon)/2$, $\phi_\varepsilon(x) = -(x - \frac{1-\varepsilon}{2})^2 \text{Log}(2x + \varepsilon)$, et aussi

$$\phi'_\varepsilon(x) = -2(x + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}) \text{Log}(2x + \varepsilon) - \frac{(x + \varepsilon/2 - 1/2)^2}{x + \varepsilon/2} ,$$

$$\phi''_\varepsilon(x) = -2\text{Log}(2x + \varepsilon) - 2 \frac{x + \varepsilon/2 - 1/2}{x + \varepsilon/2} + \frac{(x + \varepsilon/2 - 1/2)^2}{(x + \varepsilon/2)^2} - 2 \frac{x + \varepsilon/2 - 1/2}{x + \varepsilon/2} ,$$

$$\phi'''_\varepsilon(x) = -2\text{Log}(2x + \varepsilon) - 4 \frac{x + \varepsilon/2 - 1/2}{x + \varepsilon/2} + \frac{(x + \varepsilon/2 - 1/2)^2}{(x + \varepsilon/2)^2} .$$

Ainsi ϕ_ε est convexe bornée et de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ sauf en $1/2$, uniformément lipschitzienne. En outre

$$\phi'^2_\varepsilon(x) = 4(x + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2})^2 (\text{Log}(2x + \varepsilon))^2 + \frac{(x + \varepsilon/2 - 1/2)^4}{(x + \varepsilon/2)^2} + \frac{4(x + \varepsilon/2 - 1/2)^3}{x + \varepsilon/2} \text{Log}(2x + \varepsilon)$$

On a donc $\phi'^2(y) \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{16y^2}$ et $\phi''(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4y^2}$ et aussi

$\phi'^2(y) \underset{y \rightarrow \frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{36}(y - \frac{1}{2})^4$ et $\phi''(y) \underset{y \rightarrow \frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{12}(\frac{1}{2} - y)$. Par suite il existe

une constante $\theta > 0$ telle que $\phi'^2(y) \leq \theta \phi''(y)$ pour tout $y \in [0, \frac{1}{2}]$ et

$$(4.74) \quad (\phi'_\varepsilon(x))^2 \leq \theta \phi''_\varepsilon(x) \quad , \quad \forall x \geq 0 \quad , \quad \forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[.$$

Sans restreindre le problème on peut toujours supposer $x_0 = 0$ et soit $\zeta \in C^\infty_0(\Omega)$ à support dans $B(2R)$, valant 1 dans $B(R)$, telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et $|D\zeta| \leq 2/R$. On choisit $\zeta^2 \phi'_\varepsilon(u)$ comme fonction test et on a

$$(4.75) \quad 0 = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta^2 \phi'_\varepsilon(u)) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \phi''_\varepsilon(u) \zeta^2 dx \dots$$

$$\dots + 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \phi'_\varepsilon(u) \zeta dx .$$

Soit $v = \phi(u)$, alors

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \zeta^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\phi'_\varepsilon(u))^2 \zeta^2 dx ,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \zeta^2 dx \leq \theta \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \phi''_\varepsilon(u) \zeta^2 dx ,$$

en utilisant (4.74) et (4.3), d'où en utilisant (4.75)

$$(4.76) \quad \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\phi'_\varepsilon(u))^2 \zeta^2 dx \leq -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \phi'_\varepsilon(u) \zeta dx .$$

Comme $\frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\phi'_\varepsilon(u))^2 \zeta^2 dx \geq \frac{\lambda}{\theta} \int_{\Omega} \zeta^2 |D(\phi_\varepsilon(u))|^2 dx$ et

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \phi'_\varepsilon(u) \zeta dx \right| \leq C \left(\int_{\Omega} \zeta^2 |D(\phi_\varepsilon(u))|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D\zeta|^2 dx \right)^{1/2} ,$$

on a

$$(4.77) \quad \int_{\Omega} \zeta^2 |D(\phi_\varepsilon(u))|^2 dx \leq \frac{\theta^2 C^2}{\lambda^2} \int_{\Omega} |D\zeta|^2 dx .$$

où $C = C(\tilde{L})$. Compte tenu du choix de ζ , il existe $K = K(\tilde{L})$ tel que

$$(4.78) \quad \int_{B(R)} |D(\phi_\varepsilon(u))|^2 dx \leq K R^{N-2} .$$

Comme ϕ_ε est convexe, $\phi_\varepsilon(u)$ est une sous-solution (Lemme 4.1) et

$$(4.79) \quad \max_{B(R/2)} \phi_\varepsilon^2(u) \leq \frac{C}{R^N} \int_{B(R)} \phi_\varepsilon^2(u) \, dx .$$

Par hypothèse $v = \phi_\varepsilon(u) = 0$ sur $\Sigma = \{x \in B(R) / u(x) \geq \frac{1}{2}\}$. Comme $\text{mes.}(\Sigma) \geq \frac{1}{2} \text{mes.}(B(R))$, on déduit du Lemme 4.3

$$(4.80) \quad \int_{B(R)} (\phi_\varepsilon(u))^2 \, dx \leq C R^2 \int_{B(R)} |D(\phi_\varepsilon(u))|^2 \, dx .$$

où $C = C(\tilde{L})$. En combinant (4.78), (4.79) et (4.80) on obtient

$$(4.81) \quad \max_{B(R/2)} \phi_\varepsilon(u) \leq C' ,$$

où C' ne dépend que de \tilde{L} . Par suite

$$-(u(x) - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})^2 \text{Log}(2u(x) + \varepsilon) \leq C' , \quad \forall x \in B(R/2) ,$$

et en faisant tendre ε vers 0 : $-(u(x) - \frac{1}{2})^2 \text{Log}(2u(x)) \leq C'$ sur $B(R/2)$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0^+} -(r - \frac{1}{2})^2 \text{Log} 2r = +\infty$ on en déduit (4.73).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de régularité

THEOREME 4.3. (De Giorgi, Nash, Moser) Soit u une solution faible de (4.38) dans $W^{1,2}(\Omega)$. On suppose que les coefficients a_{ij} de \tilde{L} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient la condition d'ellipticité (4.3). Alors pour tout ouvert Ω' , relativement compact dans Ω il existe deux constantes $C \geq 0$ et γ , $0 < \gamma < 1$, ne dépendant que de \tilde{L} , N et $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, telles que pour tout $x, y \in \Omega'$, on ait

$$(4.82) \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\gamma .$$

Démonstration. Soient $x_0 \in \Omega'$ et $\omega(R) = \sup_{B(x_0, R)} \text{ess } u(x) - \inf_{B(x_0, R)} \text{ess } u(x)$.

Posons $R_0 = \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ et nous nous limiterons à $0 \leq R \leq R_0$.
 Par le Corollaire 4.1 u est borné dans Ω' . Comme
 $(u - \inf_{B(x_0, R)} \text{ess } u) / \|u - \inf_{B(x_0, R)} \text{ess } u\|_{L^\infty(B(x_0, R))}$ est solution de (4.38), nous
 pouvons supposer

$$(4.83) \quad \sup_{B(x_0, R)} \text{ess } u = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{B(x_0, R)} \text{ess } u = 0 .$$

Nous pouvons remarquer que u et $1-u$ sont solutions positives de
 (4.38), bornées par 1 ; aussi deux cas se présentent

Premier cas : $\text{mes.}(\{x \in B(x_0, R/2) / u(x) \geq \frac{1}{2}\}) \geq \frac{1}{2} \text{mes.}(B(x_0, R/2))$. Par
 le Lemme 4.4, il existe $C > 0$ tel que $u(x) \geq C$, $\forall x \in B(x_0, R/4)$,
 c'est-à-dire $\inf_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u \geq C$. Par suite

$$\omega(R/4) = \sup_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u - \inf_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u \leq \sup_{B(x_0, R)} \text{ess } u - \inf_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u = 1 - C$$

or $1 - C = (1 - C)\omega(R)$. Par suite en posant $\eta = 1 - C$, $0 < \eta < 1$,

$$(4.84) \quad \omega(R/4) \leq \eta \omega(R)$$

et cette relation est indépendante du fait que u ait été remplacé
 par $\alpha u + \beta$ en supposant (4.83).

Deuxième cas : $\text{mes.}(\{x \in B(x_0, R/2) / 1 - u(x) \geq \frac{1}{2}\}) \geq \frac{1}{2} \text{mes.}(B(x_0, R/2))$.
 Par le Lemme 4.4, il existe $C > 0$ tel que $1 - u(x) \geq C$, $\forall x \in B(x_0, R/4)$
 c'est-à-dire $\sup_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u \leq 1 - C$. Par suite

$$\omega(R/4) = \sup_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u - \inf_{B(x_0, R/4)} \text{ess } u \leq 1 - C - \inf_{B(x_0, R)} \text{ess } u = 1 - C ,$$

d'où (4.84), pour $0 < R \leq R_0$.

On déduit alors du Lemme 4.2 qu'il existe deux constantes $C \geq 0$ et γ , $0 < \gamma < 1$ telles que

$$(4.86) \quad \omega(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0}\right)^\gamma, \quad \forall 0 \leq R \leq R_0 = \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\Omega).$$

Par suite si x et y appartiennent à Ω' , $|x-y|=R \leq R_0^* = \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ on a l'estimation

$$(4.87) \quad |u(x) - u(y)| \leq \frac{C}{(R_0^*)^\gamma} |x-y|^\gamma.$$

Une extension de ce théorème a été donnée par Stampacchia

THEOREME 4.4. (Stampacchia). Soit u une solution faible de

$$(4.88) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

dans $W^{1,2}(\Omega)$. On suppose que les coefficients a_{ij} de \tilde{L} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et vérifient (4.3), que $g \in L^{q/2}(\Omega)$ et $f_i \in L^q(\Omega)$, $\forall 1 \leq i \leq N$, avec $q > N$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω , il existe deux constantes $C \geq 0$ et γ , $0 < \gamma < 1$, C dépendant de \tilde{L} , N , $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\|g\|_{L^{q/2}(\Omega)}$, $\|f_i\|_{L^q(\Omega)}$ et $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, γ dépendant des mêmes quantités sauf de $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, telles que pour tout $x, y \in \Omega'$ on ait

$$(4.89) \quad |u(x) - u(y)| \leq C |x-y|^\gamma.$$

Démonstration. Soient $x_0 \in \Omega'$ et v la solution faible dans $W_0^{1,2}(B(x_0, 2R))$ de

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}) = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

où $R \leq R_0 = \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, et soit $w = u - v$; w vérifie l'équation (4.38). Par le Théorème 4.1, il existe une constante C_1 telle que

$$(4.90) \quad \|\nabla\|_{L^\infty(B(x_0, 2R))} \leq C_1 R^{1 - \frac{N}{q}} (\sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega')} + R^{1 - \frac{N}{q}} \|g\|_{L^{q/2}(\Omega')}) ,$$

d'où $\|\nabla\|_{L^\infty(B(x_0, 2R))} \leq C_2 R^{1 - \frac{N}{q}}$. Soit ω' l'oscillation de v et ω'' celle de w . D'après le théorème 4.2, on a

$$(4.91) \quad \omega''(R/4) \leq \eta \omega''(R) \quad , \quad \forall 0 < R \leq R_0 \quad ,$$

où $0 < \eta < 1$. Si ω est l'oscillation de u , on a pour $0 < R \leq R_0$

$$\omega(R/4) \leq \omega''(R/4) + \omega'(R/4) \quad ; \quad \text{d'où par (4.90) et (4.91)}$$

$$\omega(R/4) \leq \eta \omega''(R) + C_2 R^{1 - \frac{N}{q}} \quad , \quad \text{d'où}$$

$$(4.92) \quad \omega(R/4) \leq \eta \omega(R) + C R^{1 - \frac{N}{q}} \quad , \quad \forall 0 < R \leq R_0 \quad ,$$

puisque $\omega''(R) \leq \omega(R) + \omega'(R) \leq \omega(R) + C_3 R^{1 - \frac{N}{q}}$ (C_1, C_2, C_3 et C étant des constantes). Comme $1 - \frac{N}{p} > 0$, on déduit du Lemme 4.2

$$(4.93) \quad \omega(R) \leq C_4 (R/R_0)^\gamma \quad ,$$

où C_4 et γ sont des constantes positives, $0 < \gamma < 1$. On en déduit alors (4.89) comme dans le Théorème 4.3.

4.5. Continuité holdérienne au bord

Afin d'obtenir une régularité holdérienne globale dans Ω des solutions d'équations elliptiques du second ordre, la seconde étape est de prouver cette régularité au bord $\partial\Omega$ sous réserve d'une condition

de régularité faible de $\partial\Omega$. Nous supposons que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

DEFINITION 4.3. $\partial\Omega$ est dit admissible si il existe $A > 0$ et $R_0 > 0$ tels que

$$(4.94) \quad \text{mes.}(B(x_0, R) \cap \Omega) \geq A \text{mes.}(B(x_0, R)) \quad ,$$

pour tous $x_0 \in \partial\Omega$ et $0 \leq R \leq R_0$.

THEOREME 4.5. Soient Ω un ouvert quelconque, $x_0 \in \partial\Omega$, $R_0 > 0$ et $v \in W^{1,2}(\Omega)$ une sous-solution positive de (4.38) s'annulant sur $\partial\Omega \cap B(x_0, R_0)$, les coefficients a_{ij} de \tilde{L} appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et vérifiant (4.3). Il existe alors C ne dépendant que de \tilde{L} et N tel que pour tout $0 < R \leq R_0$ on ait

$$(4.95) \quad \sup_{B(x_0, R/2) \cap \Omega} \text{ess } v \leq C \left(\frac{1}{R^N} \int_{B(x_0, R) \cap \Omega} v^2 dx \right)^{1/2} .$$

Démonstration. Comme elle est très proche de celle du Théorème 4.2, nous ne ferons que l'esquisser. Pour $R \leq R_0$ nous considérons la même suite $R_k = \frac{R}{2}(1 + 2^{-k})$ et la suite de fonctions $\zeta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \zeta_k \leq 1$, vérifiant (4.46) et $|D\zeta_k| \leq 2^{k+3}/R$. Pour $p \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \max(n, v)$; $\zeta_k^2 v_n^{p-1}$ est une fonction test admissible (c'est-à-dire appartenant à $W_0^{1,2}(B(x_0, R_k) \cap \Omega)$). L'utilisation de l'inégalité de Sobolev ne pose pas de problème puisque $\zeta v_n^{p/2}$ s'annule sur $\partial(\Omega \cap B(x_0, R_k))$.

DEFINITION 4.4. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ nous notons pour $R > 0$.

$$(i) \quad \omega^+(R) = \sup_{B(x_0, R) \cap \Omega} \text{ess } u ,$$

$$(ii) \quad \omega^-(R) = - \inf_{B(x_0, R) \cap \Omega} \text{ess } u .$$

Si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\omega^+(R) \geq 0$ et $\omega^-(R) \geq 0$.

LEMME 4.5. Soient Ω un ouvert de bord $\partial\Omega$ admissible, $x_0 \in \partial\Omega$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ solution faible de (4.38) s'annulant sur $\partial\Omega \cap B(x_0, R_0)$, $R_0 > 0$ donné, les coefficients a_{ij} de \tilde{L} étant dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifiant (4.3). Supposons en outre que pour $0 < R < R_0/2$,

$$(4.96) \quad \sup_{\Omega \cap B(x_0, 2R)} \text{ess } u = 1 \quad .$$

Il existe alors $C > 0$ ne dépendant que de \tilde{L} , N et A (relation (4.94)) tel que

$$(4.97) \quad \sup_{\Omega \cap B(x_0, R/2)} \text{ess } u \leq 1 - C \quad .$$

Démonstration. Comme dans le Lemme 4.4 nous définissons sur \mathbb{R} $\phi(x) = \max(-(x - \frac{1}{2})^2 \log(2(1-x)), 0)$ et pour $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x - \frac{\varepsilon}{2})$ ϕ_ε est croissante, convexe, de classe C^2 sur $[0, 1] - \{(1+\varepsilon)/2\}$ et il existe $\theta > 0$ tel que

$$(4.98) \quad (\phi'_\varepsilon(x))^2 \leq \theta \phi''_\varepsilon(x) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

On suppose $x_0 = 0$ et on considère $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(2R)$, valant 1 dans $B(R)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et $|D\zeta| \leq 2/R$. Comme ϕ_ε est identiquement nulle sur $]-\infty, (1+\varepsilon)/2]$, $\zeta^2 \phi'_\varepsilon(u)$ est une fonction test admissible et $v = \phi_\varepsilon(u)$ est une sous-solution positive. On en déduit comme dans le Lemme 4.4 qu'il existe $K = K(\tilde{L})$ tel que

$$(4.99) \quad \int_{B(R) \cap \Omega} |D\phi_\varepsilon(u)|^2 dx \leq KR^{N-2} \quad .$$

En utilisant le Théorème 4.5 nous avons

$$(4.100) \quad \sup_{B(R/2) \cap \Omega} \text{ess } (\phi_\varepsilon(u))^2 \leq \frac{C}{R^N} \int_{B(R) \cap \Omega} (\phi_\varepsilon(u))^2 dx \quad .$$

En étendant u par 0 dans $\int \Omega$, $\psi_\varepsilon(u) = 0$ dans $B(R) \cap \int \Omega$ et comme $\text{mes.}(B(R) \cap \int \Omega) \geq A \text{ mes.}(B(R)) > 0$, nous déduisons du Lemme 4.3

$$(4.101) \quad \int_{B(R) \cap \int \Omega} (\psi_\varepsilon(u))^2 dx \leq CR^2 \int_{B(R) \cap \int \Omega} |D\psi_\varepsilon(u)|^2 dx ,$$

où C ne dépend que de N . En combinant (4.99), (4.100) et (4.101), on en déduit

$$(4.102) \quad \sup_{B(R/2) \cap \int \Omega} \text{ess} (\psi_\varepsilon(u))^2 \leq C ,$$

où C est indépendant de R , de u et de ε . Par suite

$$(4.103) \quad -(u(x) - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2})^2 \text{Log}(2(u(x)-1) + \varepsilon) \leq C , \quad \forall x \in B(R/2), \forall \varepsilon > 0 .$$

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$(4.104) \quad \sup_{\int \Omega \cap B(R/2)} \text{ess} u(x) \leq 1 - \alpha .$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat de régularité holdérienne globale.

THEOREME 4.6. Soit u une solution faible de

$$(4.105) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} ,$$

dans $W_0^{1,2}(\int \Omega)$. On suppose $\partial \int \Omega$ admissible, que les coefficients a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\int \Omega)$ et vérifient (4.3), que $g \in L^{q/2}(\int \Omega)$ et $f_i \in L^q(\int \Omega)$, $\forall 1 \leq i \leq N$, pour $q > N$. Il existe alors deux constantes $C \geq 0$ et γ , $0 < \gamma < 1$, ne dépendant que de $N, \tilde{L}, \text{mes.}(\int \Omega)$,

$\|g\|_{L^{q/2}(\int \Omega)}$ et $\sum_i \|f_i\|_{L^q(\int \Omega)}$ telles que pour tout $x, y \in \bar{\int \Omega}$ on ait

$$(4.106) \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\gamma .$$

Démonstration. Première étape. Soit $x_0 \in \partial\Omega$, R_0 le nombre donné dans la Définition 4.3 d'admissibilité de Ω et $0 < R \leq R_0/2$. Nous allons tout d'abord montrer que

$$(4.107) \quad |u(x)| \leq C|x-x_0|^\gamma, \quad \forall x \in B(x_0, R_0/2) \cap \Omega,$$

où C et γ sont deux constantes positives, $0 < \gamma < 1$. Pour voir cela, soient v la solution faible dans $W_0^{1,2}(B(x_0, 2R) \cap \Omega)$ de

$$(4.108) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}) = g - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

et $w = u - v$, c'est-à-dire que $w \in W^{1,2}(\Omega \cap B(x_0, 2R))$, $w = 0$ sur $\partial\Omega \cap B(x_0, 2R)$. Par le Théorème 5.1

$$(4.109) \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega \cap B(x_0, 2R))} \leq C_2 R^{1 - \frac{N}{q}},$$

où $C_2 = C_1 (\|g\|_{L^q/2(\Omega)} R^{1 - \frac{N}{q}} + \sum_i \|f_i\|_{L^q(\Omega)})$. Soit $\omega_w^+ = \sup_{B(x_0, R) \cap \Omega} \text{ess } w$; en utilisant Lemme 4.5 (et en remplaçant w par aw), nous avons

$$(4.110) \quad \omega_w^+(R/4) \leq \eta \omega_w^+(R), \quad \forall 0 < R \leq R_0,$$

où $0 < \eta < 1$. En utilisant (4.109), (4.110) et le Lemme 4.2 on en déduit comme dans le Théorème 4.4

$$(4.111) \quad \omega^+(R) \leq C^+ R^{\gamma^+}, \quad \forall 0 < R \leq R_0/2,$$

où C^+ et γ^+ sont des constantes et $\omega^+(R) = \sup_{\Omega \cap B(x_0, R)} \text{ess } u$. De la même façon

$$(4.112) \quad \omega^-(R) = - \inf_{\Omega \cap B(x_0, R)} \text{ess } u \leq C^- R^{\gamma^-}, \quad \forall 0 < R \leq R_0/2,$$

d'où (4.107), avec $C = \max(C^+, C^-)$, $\gamma = \min(\gamma^+, \gamma^-)$ quantités indépendantes de x_0 .

Deuxième étape : puisque Ω et u sont bornés on a, en changeant la constante C

$$(4.113) \quad |u(x)| \leq C|x-x_0|^\gamma,$$

pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ et $x \in \bar{\Omega}$. Soient $x, y \in \Omega$, $d(x) = \text{dist.}(x, \partial\Omega)$, $d(y) = \text{dist.}(y, \partial\Omega)$ et $d(x, y) = \max(d(x), d(y))$. Soit $\omega(R)$ l'oscillation de u dans $B(x, R)$ pour $R \leq d(x)$. Dans le Théorème 4.4 nous avons montré que

$$(4.114) \quad \omega(R) \leq C\left(\frac{R}{d(x)}\right)^\gamma.$$

Soient $x, y \in \Omega$. Si $|x-y| \leq \min(d(x, y), (d(x, y))^2)$ nous pouvons toujours supposer que $|x-y| \leq \min(d(x), (d(x))^2)$. Ainsi

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(|x-y|) \leq C \frac{|x-y|^\gamma}{(d(x))^\gamma},$$

en utilisant (4.114) ; d'où

$$(4.115) \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\gamma/2}.$$

Si $|x-y| > \min(d(x, y), (d(x, y))^2)$ deux cas se présentent. Dans le premier cas $d(x, y) \geq 1$ et (4.115) est évident avec $C = 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Dans le deuxième cas $|x-y| > (d(x, y))^2$ et on a

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq C((d(x))^\gamma + (d(y))^\gamma)$$

en utilisant (4.113) d'où

$$(4.116) \quad |u(x) - u(y)| \leq 2C(d(x, y))^\gamma \leq 2C|x-y|^{\gamma/2}$$

d'où (4.106).

4.6. Applications à des problèmes non linéaires

Donnons tout d'abord une application à un problème de minimisation. Soit $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^2(\Omega)$. On définit \mathfrak{H} sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ par

$$\mathfrak{H}(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} H(Du) dx - \int_{\Omega} f u dx & \text{si } H(Du) \in L^1(\Omega) , \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si H vérifie pour $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}^N$

$$(4.117) \quad H(p) \geq \alpha |p|^2 - \beta$$

il est alors aisé de vérifier qu'il existe au moins un $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimisant \mathfrak{H} . Cela peut se voir de la façon suivante : soit $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ une suite minimisante de \mathfrak{H} (il en existe puisque $\mathfrak{H}(0) < +\infty$), c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{H}(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} \mathfrak{H}(v) .$$

Si la suite $\{u_n\}$ n'est pas bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ il en est de même de la suite $\{|Du_n|\}$ dans $L^2(\Omega)$. On déduit de (4.117) et de l'inégalité de Poincaré que

$$\mathfrak{H}(u_n) \geq \alpha \int_{\Omega} |Du_n|^2 - c \|f\|_{L^2(\Omega)} \|Du_n\|_{L^2(\Omega)} - \beta |\Omega| ,$$

et par suite $\mathfrak{H}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\{u_n\}$ n'est pas minimisante. Il existe donc $\{u_{n_k}\}$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tels que $\{u_{n_k}\}$ converge vers u dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ -faible. On a alors

$$(4.118) \quad \mathfrak{H}(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} \mathfrak{H}(v) .$$

Pour montrer (4.118) il suffit de prouver que \mathfrak{H} est semi-continue inférieurement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ -faible. Comme elle est convexe il suffit de montrer que \mathfrak{H} est semi-continue inférieurement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ -fort. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F_\lambda = \{\phi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \mathfrak{H}(\phi) \leq \lambda\}$ (F_λ est convexe). Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de F_λ tendant vers φ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite telle que $\{D\varphi_{n_k}\}$ converge vers $D\varphi$ p.p. dans Ω . Comme H est minorée par $-\beta$ on déduit du lemme de Fatou

$$(4.119) \quad \int_{\Omega} H(D\varphi) \, dx \leq \liminf_{n_k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} H(D\varphi_{n_k}) \, dx \quad ;$$

par suite $\mathfrak{H}(\varphi) \leq \lambda$ et F_λ est fermé, d'où la semi-continuité inférieure.

Pour obtenir des renseignements supplémentaires sur la régularité des minimum des fonctions convexes on est amené à augmenter la régularité de H .

PROPOSITION 4.1. Soit H une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^N vérifiant pour des constantes α et $M > 0$

$$(i) \quad \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(p) \right| \leq M,$$

$$(ii) \quad \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(p) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2,$$

et soit $f \in L^q(\Omega)$, $q > N$. Il existe alors un unique $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant (4.118). En outre pour tout ouvert Ω' tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $u \in W^{2,2}(\Omega') \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega'})$ pour un λ tel que $0 < \lambda < 1$.

Démonstration. Existence Soient $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^N$ et $f(t) = H(tp + (1-t)\hat{p})$ ($0 \leq t \leq 1$); $f \in C^2([0, 1])$ et on a

$$f'(t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}(tp + (1-t)\hat{p})(p_i - \hat{p}_i),$$

$$f''(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} (tp + (1-t)\hat{p})(p_i - \hat{p}_i)(p_j - \hat{p}_j) \geq \alpha |p - \hat{p}|^2 \quad ;$$

d'où $f'(t) \geq f'(0) + t\alpha |p - \hat{p}|^2 = t\alpha |p - \hat{p}|^2 - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}(\hat{p}) \hat{p}_i$

et $f(1) \geq f(0) + \frac{\alpha}{2} |p - \hat{p}|^2 - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}(\hat{p}) \hat{p}_i$, d'où

$$(4.120) \quad H(p) \geq \frac{\alpha}{2} |p - \hat{p}|^2 - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}(\hat{p}) \hat{p}_i + H(\hat{p}) \quad .$$

En prenant $\hat{p} = 0$ on en déduit que H vérifie (4.117) d'où l'existence d'un minimum.

Unicité Soient $u \neq \hat{u}$ minimisant \mathfrak{H} dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. En utilisant la convexité de \mathfrak{H} , $t\hat{u} + (1-t)u$ minimise \mathfrak{H} pour $0 < t < 1$. Or H est strictement convexe du fait de (ii) et il en est de même de \mathfrak{H} , donc $\mathfrak{H}(t\hat{u} + (1-t)u) < t\mathfrak{H}(\hat{u}) + (1-t)\mathfrak{H}(u)$ ce qui est impossible, donc $u = \hat{u}$.

Régularité On introduit pour cela l'équation d'Euler-Lagrange que vérifie le u qui minimise \mathfrak{H} . Soit $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ on a

$$(4.121) \quad \int_{\Omega} \{H(D(u+t\varphi)) - H(Du)\} dx - \int_{\Omega} f t \varphi dx \geq 0 \quad ,$$

d'où en divisant par t et en faisant tendre $t > 0$ vers 0^+ , on obtient

$$\int_{\Omega} \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}(Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_{\Omega} f \varphi dx \geq 0 \quad .$$

En changeant φ en $-\varphi$ on en déduit que u vérifie au sens faible

$$(4.122) \quad -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}(Du) \right) - f = 0 \quad ,$$

qui est l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation. Soit $\varepsilon > 0$ et $\Omega'' \subset \Omega$ tel que $\text{dist}(\Omega'', \partial\Omega) > \varepsilon$. Pour h tel que $|h| < \varepsilon$ et $\varphi \in C^1_0(\Omega'')$ on pose $\Delta^h \varphi = \Delta^h_k \varphi = \frac{1}{h} (\varphi(x+he_k) - \varphi(x))$ $\Delta^h \varphi \in C^1_0(\Omega)$ et on a

$$\int_{\Omega} \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} (Du) \Delta^{-h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} f(\Delta^{-h} \varphi) dx ,$$

d'où
$$-\int_{\Omega} \sum_i \Delta^h \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} (Du) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \Delta^{-h} \varphi dx .$$

Or $\Delta^h \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} (Du) \right) = \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (\xi_i^h) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta^h u)$ où $\xi_i^h(x)$ appartient au segment $[Du(x+h), Du(x)]$. Par suite $\Delta^h u$ vérifie

$$(4.123) \quad -\int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (\xi_i^h) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta^h u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(\Delta^{-h} \varphi) dx ,$$

pour tout $\varphi \in C^1_0(\Omega'')$. Soient Ω' un ouvert de \mathbb{R}^N tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$ et $\zeta \in C^1_0(\Omega'')$, $0 \leq \zeta \leq 1$, valant 1 sur $\overline{\Omega'}$. On choisit comme fonction test $\varphi = \zeta^2 \Delta^h u$. On a $\frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta^2 \Delta^h u) = \zeta^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta^h u) + 2\zeta \Delta^h u \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}$, d'où

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} \zeta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (\xi_i^h) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta^h u) \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta^h u) + 2\zeta \Delta^h u \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} (\xi_i^h) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta^h u) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\} dx \dots \\ = \dots \int_{\Omega} f \Delta^{-h} (\zeta^2 \Delta^h u) dx . \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (i) et (ii) on a

$$(4.124) \quad \alpha \|\zeta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2NM \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\zeta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta^h u\|_{L^2(\Omega'')} \dots \\ \dots \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta^{-h} (\zeta^2 \Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \|\Delta^{-h}(\zeta^2 \Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} (\zeta^2 \Delta^h u) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \|\zeta \Delta^h u \frac{\partial \zeta}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et $\|\zeta^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\zeta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}$. Par suite

$$\begin{aligned} \alpha \|\zeta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (2NM \|D\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|\zeta D(\Delta^h u)\|_{L^2(\Omega)} \\ (4.125) \quad &\dots + 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \zeta}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On déduit de (4.125) que $\zeta D(\Delta^h u)$ demeure borné dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de h . Par suite $\zeta D(\frac{\partial u}{\partial x_k})$ appartient à $L^2(\Omega)$ et $u \in W^{2,2}(\Omega')$.

En faisant tendre h vers 0 dans (4.123), ξ_i^h tend vers $Du(x)$ et en utilisant la continuité et la bornitude de $\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j}$ on en déduit

$$(4.126) \quad - \int_{\Omega} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx .$$

En utilisant le Théorème 4.4 on en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}')$ pour un $\lambda = \lambda(k, \Omega')$ tel que $0 < \lambda < 1$, d'où le résultat.

En utilisant la théorie de Schauder (cf. chap. 6) on obtient le remarquable résultat suivant dû à De Giorgi

COROLLAIRE 4.2. Soient H une fonction convexe de classe $C^{k,\lambda}$ sur \mathbb{R}^N ($k \geq 2$) et $0 < \lambda < 1$ et $f \in C^{k-2,\lambda}(\Omega)$. On suppose que H vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la Proposition 1 et on appelle u la solution du problème de minimisation (4.118). Alors pour tout ouvert Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $u \in C^{k,\nu}(\bar{\Omega}')$ pour un ν tel que $0 < \nu < 1$. En particulier si H et f sont de classe C^∞ , il en est de même de u .

Démonstration. On ne fera la démonstration que pour $k = 2$, la généralisation étant immédiate. La fonction u vérifie l'équation d'Euler-Lagrange (4.122) au sens faible, mais comme $Du \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ on a presque partout dans Ω

$$(4.127) \quad - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = f \quad .$$

Comme Du et $\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}$ sont localement holdériens dans Ω (grâce à la Proposition 4.1), il en est de même de $\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} (Du)$. Par suite (Théorème 6.5) $u \in C^{2,\nu}(\bar{\Omega}')$ pour tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ et un ν tel que $0 < \nu < 1$.

Notre deuxième application est la suivante

PROPOSITION 4.2. Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et a, b, c et f des fonctions mesurables et bornées dans Ω . On suppose que a, b, c vérifient

$$(4.128) \quad a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geq \lambda(\xi^2 + \eta^2) \quad , \quad \underline{\text{p.p. dans } \Omega} \quad , \quad \underline{\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} \quad , \quad \lambda > 0 \quad .$$

Soit $u \in W^{2,2}(\Omega)$ vérifiant p.p. dans Ω

$$(4.129) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad .$$

Alors pour tout ouvert Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $u \in C^{1,\nu}(\bar{\Omega}')$ pour un ν tel que $0 < \nu < 1$.

Démonstration. Comme $c \geq \lambda$ presque partout, on écrit (4.129) sous la forme

$$(4.130) \quad \frac{a}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{b}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{f}{c} \quad .$$

Soit $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, comme $\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx$,
on a en posant $v = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$(4.131) \quad \iint_{\Omega} \left(\frac{a}{c} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2 \frac{b}{c} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \frac{f}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \quad .$$

Par suite v est solution faible dans $W^{1,2}(\Omega)$ de

$$(4.132) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{c} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{b}{c} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{c} \right) \quad .$$

Comme $\frac{a}{c} \xi^2 + 2 \frac{b}{c} \xi \eta + \eta^2 \geq \frac{\lambda}{c} (\xi^2 + \eta^2)$, on déduit des Théorèmes 3.2 et 4.4 que $v \in W^{1,2}(\Omega') \cap C^v(\bar{\Omega}')$ (les résultats de régularité holdérienne sont aussi valables en dimension 1 et 2). On procède de même pour $w = \frac{\partial v}{\partial y}$.

On peut aussi remarquer que si les coefficients a , b et c sont uniformément lipschitziens dans Ω et si $f \in W^{1,2}(\Omega)$ alors $u \in W^{3,2}(\Omega')$.