

5. THEORIE DE CALDERON-ZYGMUND ET REGULARITE $W^{2,p}$

Dans ce chapitre nous étudions la régularité dans des espaces de Sobolev des solutions dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de l'équation

$$(5.1) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x) .$$

Si f appartient à $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ et les coefficients a_{ij} , b_i et c sont continus, nous montrons que u est dans $W_{loc}^{2,p}(\Omega)$. Ce résultat repose fondamentalement sur l'interpolation et la théorie de Caldéron et Zygmund des intégrales singulières.

5.1. Théorème d'interpolation et Lemme de décomposition

DEFINITION 5.1. Une application linéaire $T : L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ est dite

a) de type (p-p) (fort) si il existe $C \geq 0$ tel que

$$(5.2) \quad \|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^N) .$$

b) de type (p-p)-faible ($p < \infty$) si il existe $C \geq 0$ tel que

$$(5.3) \quad \text{mes} \{x \in \mathbb{R}^N : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p, \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

Si T est de type (p-p) ($p < \infty$) elle est de type (p-p)-faible puisque pour $\alpha > 0$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \alpha^p \text{mes} \{x \in \mathbb{R}^N : |Tf(x)| > \alpha\} &\leq \int_{\{|Tf| > \alpha\}} |Tf(x)|^p dx, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |Tf(x)|^p dx \leq C^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p . \end{aligned}$$

Par contre la réciproque est fausse.

DEFINITION 5.2. a) Pour $1 \leq p, q \leq \infty$ on note

$$(5.4) \quad L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N) = \{f : \exists f_1 \in L^p(\mathbb{R}^N), \exists f_2 \in L^q(\mathbb{R}^N), f = f_1 + f_2\} .$$

b) On appelle fonction de distribution d'une fonction g mesurable dans \mathbb{R}^N la fonction ϕ définie sur \mathbb{R}_*^+ par

$$(5.5) \quad \phi(\alpha) = \text{mes}\{x : |g(x)| > \alpha\} \quad , \quad \forall \alpha > 0 .$$

LEMME 5.1. Soient $1 \leq p < \infty$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors

$$(5.6) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p dx = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \phi(\alpha) d\alpha .$$

Démonstration. Soit $G = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 \leq t < |g(x)|^p\}$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p dx = \iint_G dt dx = \iint_G dx dt \quad \text{en utilisant le théorème de Fubini. Or } \iint_G dx dt = \int_0^{+\infty} \text{mes}\{x : |g(x)|^p > t\} dt .$$

On pose $t = \alpha^p$ et on a (5.6).

THEOREME 5.1. (Marcinkiewicz). Soient $1 \leq p < q < \infty$ et T une application linéaire définie sur $L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$. Supposons que T soit de type $(p-p)$ -faible et de type $(q-q)$ -faible alors pour tout r tel $p < r < q$, T est de type $(r-r)$ -fort, c'est-à-dire

$$(5.7) \quad \|Tf\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C(r) \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \quad , \quad \forall f \in L^r(\mathbb{R}^N) .$$

Démonstration. Soit $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. On écrit $f = f_1 + f_2$ avec, pour $\alpha > 0$,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \end{cases}, \quad \text{et } f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > \alpha \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \end{cases}.$$

On a $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $f_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et $|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$.

Si ϕ est la fonction de distribution de Tf , on obtient

$$\phi(\alpha) = \text{mes}\{x: |Tf(x)| > \alpha\} \leq \text{mes}\{x: |Tf_1(x)| > \alpha/2\} + \text{mes}\{x: |Tf_2(x)| > \alpha/2\}$$

d'où $\phi(\alpha) \leq \frac{C}{(\alpha/2)^p} \int_{\mathbb{R}^N} |f_1(x)|^p dx + \frac{C}{(\alpha/2)^q} \int_{\mathbb{R}^N} |f_2(x)|^q dx$ ce qui signifie

$$(5.8) \quad \phi(\alpha) \leq \frac{2^p C}{\alpha^p} \int_{\{|f| > \alpha\}} |f(x)|^p dx + \frac{2^q C}{\alpha^q} \int_{\{|f| \leq \alpha\}} |f(x)|^q dx.$$

Or $\|Tf\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^r = r \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} \phi(\alpha) d\alpha$ d'après (5.6) d'où

$$\|Tf\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^r \leq 2^p C r \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1-p} \int_{\{|f| > \alpha\}} |f(x)|^p dx d\alpha + \dots$$

$$\dots 2^q C r \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1-q} \int_{\{|f| \leq \alpha\}} |f(x)|^q dx d\alpha.$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1-p} \int_{\{|f| > \alpha\}} |f(x)|^p dx d\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \int_0^{|f|} \alpha^{r-1-p} d\alpha dx = \frac{1}{r-p} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r dx$$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1-q} \int_{\{|f| \leq \alpha\}} |f(x)|^q dx d\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^q \int_{|f|}^{+\infty} \alpha^{r-1-q} d\alpha dx = \frac{1}{q-r} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r dx,$$

et par suite

$$(5.9) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |Tf(x)|^r dx \leq \frac{2^q r C (q-p)}{(q-r)(r-p)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r dx.$$

ce qui termine la démonstration du théorème de Marcinkiewicz.

THEOREME 5.2. (Lemme de décomposition de Riesz-Besicovitch). Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$ presque partout. Il existe alors deux ensembles F et Ω tels que

(i) $\mathbb{R}^N = F \cup \Omega = \emptyset$, $F \cap \Omega = \emptyset$,

(ii) $f(x) \leq \alpha$ presque partout dans F ,

(iii) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k$, où les Q_k sont des cubes dont les intérieurs

sont disjoints et

$$(5.10) \quad \alpha < \frac{1}{\text{mes.}(Q_k)} \int_{Q_k} f(x) dx \leq 2^N \alpha .$$

En particulier

$$(5.11) \quad \text{mes.}(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Démonstration. On décompose \mathbb{R}^N en un réseau de cubes de côté égal choisi assez grand pour que si Q' est un quelconque de ces cubes on ait

$$(5.12) \quad \frac{1}{\text{mes.}(Q')} \int_{Q'} f dx \leq \alpha .$$

On divise alors chacun de ces cubes Q' en 2^N cubes égaux d'intérieurs disjoints et deux cas se présentent si Q'' est un de ces cubes :

premier cas. $\frac{1}{\text{mes.}(Q'')} \int_{Q''} f(x) dx \leq \alpha$,

deuxième cas. $\frac{1}{\text{mes.}(Q'')} \int_{Q''} f(x) dx > \alpha$.

Dans le deuxième cas on choisit Q'' comme un des cubes Q_k de l'énoncé et on a (5.10) puisque $\frac{1}{\text{mes.}(Q'')} \int_{Q''} f(x) dx \leq \frac{1}{2^{-N} \text{mes.}(Q')} \int_{Q'} f(x) dx \leq \alpha$.

Dans le premier cas on continue les subdivisions en 2^N cubes disjoints à chaque fois jusqu'au moment où on rencontre un cube du deuxième cas (si il y en a). On appelle Ω la réunion des cubes Q_k pour lesquels on est dans le deuxième cas et $F = \mathbb{R}^N - \Omega$. Si $y \in F$ il existe une suite de cubes $\{Q^l\}$ pour lesquels $\frac{1}{\text{mes.}(Q^l)} \int_{Q^l} f(x) dx \leq \alpha$ et $\text{mes.}(Q^l) \rightarrow 0$. En utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue

$f(y) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{mes.}(Q^l)} \int_{Q^l} f(x) dx$ pour presque tout y (en tout point de Lebesgue de f) et par suite $f(y) \leq \alpha$ en un tel point.

5.2. Intégrales singulières

DEFINITION 5.3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors la transformée de Fourier \hat{f} est définie par

$$(5.12) \quad \hat{f}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq n} e^{2i\pi \langle x, y \rangle} f(x) dx ,$$

la limite étant prise dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

La transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$(5.13) \quad \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g} \quad , \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^N) ,$$

* désignant la convolution et

$$(5.14) \quad \widehat{f \circ \tau_\varepsilon} = \varepsilon^{-N} \hat{f} \circ \tau_{1/\varepsilon} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad ,$$

où $\tau_\varepsilon(x) = \varepsilon x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Nous allons maintenant étudier l'opérateur T associé à la convolution de f avec un noyau K défini dans $\mathbb{R}^N - \{0\}$ à valeurs réelles et vérifiant pour une constante C

$$(K.1) \quad |K(x)| \leq C|x|^{-N} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N - \{0\} \quad ,$$

$$(K.2) \quad \int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C \quad , \quad \forall y \in \mathbb{R}^N - \{0\} \quad ,$$

$$(K.3) \quad \int_{R_1 \leq |x| \leq R_2} K(x) dx = 0 \quad , \quad \forall R_1, R_2 \quad , \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty \quad .$$

LEMME 5.2. Soient K vérifiant (K.1), (K.2) et (K.3) et pour $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases} \quad . \quad \underline{\text{Alors } K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ et il existe } C}$$

indépendant de ε tel que

$$(5.15) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |\hat{K}_\varepsilon(y)| \leq C \quad .$$

Démonstration. Compte tenu que $|K_\varepsilon(x)| \leq C \min(\varepsilon^{-N}, |x|^{-N})$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer (5.15) on commence par supposer $\varepsilon = 1$. K_ε vérifie de toute évidence (K.1) et (K.3). Soit $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2|y|} |K_1(x-y) - K_1(x)| dx &= \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| \geq 1 \\ |x-y| \geq 1}} |K(x-y) - K(x)| dx + \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| \geq 1 \\ |x-y| < 1}} |K(x)| dx \dots \\ &\dots + \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| < 1 \\ |x-y| \geq 1}} |K(x-y)| dx \quad . \end{aligned}$$

La première intégrale du terme de droite est majorée par C . En outre

$$\int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| \geq 1 \\ |x-y| < 1}} |K(x)| dx \leq \int_{1 \leq |x| \leq 2} |K(x)| dx \leq C \int_{1 \leq |x| \leq 2} |x|^{-N} dx = C C(N)$$

où $C(N) = \int_{1 \leq |x| \leq 2} |x|^{-N} dx$. De la même façon

$$\int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| < 1 \\ |x-y| \geq 1}} |K(x-y)| dx \leq C C(N) , \text{ et } K_1 \text{ vérifie (K.2) avec } C \text{ remplacé}$$

par $(1+2C(N))C$. Pour $y \neq 0$ nous avons

$$(5.16) \quad \hat{K}_1(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq n} e^{2i\pi \langle x, y \rangle} K_1(x) dx ,$$

$$\text{c'est-à-dire } \hat{K}_1(y) = \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi \langle x, y \rangle} K_1(x) dx + \dots$$

$$\dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/|y| \leq |x| \leq n} e^{2i\pi \langle x, y \rangle} K_1(x) dx , = I_1 + I_2 .$$

Estimation de I_1 . Grâce à l'hypothèse (K.3) on a

$$I_1 = \int_{|x| \leq 1/|y|} (e^{2i\pi \langle x, y \rangle} - 1) K_1(x) dx \quad \text{d'où par la formule des}$$

$$\text{accroissements finis } |I_1| \leq 2\pi |y| \int_{|x| \leq 1/|y|} |x| |K_1(x)| dx \leq 2\pi C |y| \int_{|x| \leq 1/|y|} |x|^{1-N} dx$$

$$\text{et finalement } |I_1| \leq 2\pi C |S^{N-1}| .$$

Estimation de I_2 . Soit $z = \frac{1}{2} \frac{y}{|y|^2}$, $|z| = \frac{1}{2|y|}$ et $e^{2i\pi\langle y, z \rangle} = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int_{|x| \leq n} K_1(x) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx &= \int_{|x-z| \leq n} K_1(x-z) e^{2i\pi\langle y, x-z \rangle} dx , \\ &= - \int_{|x-z| \leq n} K_1(x-z) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } \int_{|x| \leq n} K_1(x) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx &= \frac{1}{2} \int_{|x| \leq n} (K_1(x) - K_1(x-z)) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \int_{\substack{|x-z| \leq n \\ |x| > n}} K_1(x-z) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx , \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_{\substack{|x-z| \leq n \\ |x| > n}} K_1(x-z) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx = - \int_{\substack{|x| \leq n \\ |x+z| > n}} K_1(x) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx .$$

Si on pose $B_{z,n} = \{x : |x| \leq n \text{ et } |x+z| > n\}$ alors

$\text{mes.}(B_{z,n}) \leq C_1 n^{N-1}$ et $|x| \geq n - |z|$, $\forall x \in B_{z,n}$. Compte tenu de (K.1) , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{z,n}} K_1(x) e^{2i\pi\langle y, x \rangle} dx = 0$ et

$$\begin{aligned} (5.17) \quad I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x| \leq n} (K_1(x) - K_1(x-z)) e^{2i\pi\langle x, y \rangle} dx - \dots \\ &\dots - \frac{1}{2} \int_{|x| \leq 1/|y|} (K_1(x) + K_1(x-z)) e^{2i\pi\langle x, y \rangle} dx , \end{aligned}$$

$I_2 = J_1 + J_2$. Nous avons

$$|J_1| \leq \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x|} |K_1(x) - K_1(x-z)| dx = \frac{1}{2} \int_{2|z| \leq |x|} |K_1(x) - K_1(x-z)| dx \leq C(1+2 C(N)) .$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_{|x| \leq 1/|y|} K_1(x) e^{2i\pi \langle x, y \rangle} dx + \frac{1}{2} \int_{|x+z| \leq 1/|y|} K_1(x) e^{2i\pi \langle x, y \rangle} dx ,$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_{\substack{|x| \leq 1/|y| \\ |x+z| \geq 1/|y|}} K_1(x) e^{2i\pi \langle x, y \rangle} dx + \frac{1}{2} \int_{\substack{|x| \geq 1/|y| \\ |x+z| \leq 1/|y|}} K_1(x) e^{2i\pi \langle x, y \rangle} dx .$$

Mais $\{x : |x| \leq 1/|y| \text{ et } |x+z| \geq 1/|y|\} \subset \{x : 1/2|y| \leq |x| \leq 1/|y|\}$

et $\{x : |x| \geq 1/|y| \text{ et } |x+z| \leq 1/|y|\} \subset \{x : 1/|y| \leq |x| \leq 3/2|y|\}$, d'où

$$|J_2| \leq \int_{1/2|y| \leq |x| \leq 3/2|y|} |K_1(x)| dx \leq C \int_{1/2|y| \leq |x| \leq 3/2|y|} |x|^{-N} dx = C |S^{N-1}| \text{Log } 3 .$$

Par suite J_1 et J_2 sont bornés indépendamment de y et compte tenu de l'estimation sur I_1 , on a, pour une constante $C' > 0$,

$$(5.18) \quad |\hat{K}_1(y)| \leq C' , \quad \forall y \in \mathbb{R}^N .$$

Pour prouver (5.15) pour \hat{K}_ε , on pose $K'(x) = \varepsilon^N K(\varepsilon x)$, $x \neq 0$.

En effectuant le changement de variable $\varepsilon x = \tilde{x}$ il est immédiat de vérifier que K' vérifie (K.1), (K.2) et (K.3) avec la même constante C . Par suite

$$(5.19) \quad |\hat{K}'_1(y)| \leq C' , \quad \forall y \in \mathbb{R}^N .$$

Comme $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} K'_1(\frac{x}{\varepsilon})$, $\hat{K}_\varepsilon(y) = \hat{K}'_1(\varepsilon y)$ d'après (5.14) d'où (5.15).

DEFINITION 5.4. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$ nous définissons

$$a) \quad T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} K(y) f(x-y) dy = (K_\varepsilon * f)(x) , \quad x \in \mathbb{R}^N ,$$

$$b) \quad Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$$

quand ces expressions ont un sens.

THEOREME 5.3. (Caldéron et Zygmund). Supposons que K vérifie les hypothèses (K.1), (K.2) et (K.3), alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, $T_\varepsilon f$ est défini presque partout dans \mathbb{R}^N et appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$. Il existe en outre une constante C ne dépendant que de p et N telle que

$$(5.20) \quad \|T_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est de montrer que T_ε est de type (2-2) (ce qui est facile) puis de type (1-1)-faible (ce qui est difficile) puis d'utiliser le théorème de Marcinkiewicz pour $1 < p < 2$ et d'en déduire (5.20) dans ce cas. Par un argument de dualité on en déduit (5.20) pour $2 < p < \infty$.

1ère étape : T_ε est de type (2-2). Nous avons $T_\varepsilon f = K_\varepsilon * f$ d'où

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|K_\varepsilon * f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|K_\varepsilon * f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{K}_\varepsilon \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ,$$

mais $\|\hat{K}_\varepsilon \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ d'après (5.15).

Donc T_ε est de type (2-2) donc aussi de type (2-2)-faible et

$$(5.21) \quad \text{mes.}\{x: |T_\varepsilon f(x)| > \alpha\} \leq \frac{C^2}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(x) dx .$$

2ème étape : T_ε est de type (1-1)-faible. Soit $\alpha > 0$, nous devons montrer qu'il existe une constante $C' \geq 0$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$(5.22) \quad \text{mes.}\{x: |T_\varepsilon f(x)| > \alpha\} \leq \frac{C'}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx .$$

Nous pouvons décomposer \mathbb{R}^N en deux régions F et Ω disjointes telles que

- (i) $|f(x)| \leq \alpha$ presque partout dans F ,
- (ii) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, $\text{mes.}(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$,
- (iii) $\frac{1}{\text{mes.}(Q_k)} \int_{Q_k} |f(x)| dx \leq 2^N \alpha$, $\forall k \geq 1$.

avec les notations du Théorème 5.2. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F, \\ \frac{1}{\text{mes.}(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) dy & \text{si } x \in Q_k \subset \Omega. \end{cases}$$

et $h(x) = f(x) - g(x)$. On en déduit

$$(5.22) \begin{cases} \text{(i)} & h(x) = 0 \quad \text{presque partout dans } F, \\ \text{(ii)} & |g(x)| \leq 2^N \alpha \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^N, \\ \text{(iii)} & \int_{Q_k} h(y) dy = 0 \quad \text{pour tout cube } Q_k. \end{cases}$$

On a alors $T_\varepsilon f = T_\varepsilon g + T_\varepsilon h$ et

$$(5.23) \quad \text{mes.}\{x: |T_\varepsilon f(x)| > \alpha\} \leq \text{mes}\{x: |T_\varepsilon g(x)| > \frac{\alpha}{2}\} + \text{mes.}\{x: |T_\varepsilon h(x)| > \frac{\alpha}{2}\}.$$

Estimation de $T_\varepsilon g$: on constate tout d'abord que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ puisque

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_F g^2(x) dx + \int_\Omega g^2(x) dx \leq \alpha \int_F |f(x)| dx + 4^N \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx$$

d'où $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq (1 + 4^N) \alpha \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. En appliquant (5.21), on a

$$(5.24) \quad \text{mes.}\{x: |T_\varepsilon g(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{C^2}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(x) dx \leq \frac{C^2(1+4^N)}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx.$$

Estimation de $T_\varepsilon h$: On pose $h_k = h \chi_{Q_k}$, $k \geq 1$, où χ_{Q_k} est la fonction caractéristique de Q_k . Par suite $h = \sum_1^\infty h_k$ et $T_\varepsilon h = \sum_1^\infty T_\varepsilon h_k$. Soit y_k le centre de Q_k , alors $T_\varepsilon h_k(x) = \int_{Q_k} K_\varepsilon(x-y) h_k(y) dy$. Comme $\int_{Q_k} h_k(y) dy = 0$ on a

$$(5.25) \quad T_\varepsilon h_k(x) = \int_{Q_k} (K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_k)) h_k(y) dy .$$

Soient Q_k^* le cube déduit de Q_k par l'homothétie de centre y_k et de rapport $2\sqrt{N}$, $\Omega^* = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k^*$ et $F^* = \mathbb{R}^N - \Omega^*$. On a alors

$$(5.26) \quad \text{mes.}(\Omega^*) \leq (2\sqrt{N})^N \text{mes.}(\Omega) ,$$

et si $x \notin Q_k^*$

$$(5.27) \quad |x-y^k| \geq 2|y-y^k| , \quad \forall y \in Q_k .$$

En utilisant (5.25) on obtient grâce au théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |T_\varepsilon h_k(x)| dx \leq \left(\int_{Q_k} |h_k(y)| dy \right) \sup_{y \in Q_k} \left(\int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_k)| dx \right) ,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |T_\varepsilon h_k(x)| dx \leq \left(\int_{Q_k} |h_k(y)| dy \right) \sup_{y \in Q_k} \int_{\substack{\mathbb{R}^N - Q_k^* \\ |x-y_k| \geq 2|y-y_k|}} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_k)| dx .$$

On pose alors $x' = x - y_k$, $y' = y - y_k$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |T_\varepsilon h_k(x)| dx \leq \int_{Q_k} |h_k(y)| dy \sup_{y \in Q_k} \left(\int_{\substack{\mathbb{R}^N - Q_k^* \\ |x| \geq 2|y'|}} |K_\varepsilon(x'-y') - K_\varepsilon(x')| dx' \right) .$$

En utilisant (K.1) et (K.2) comme dans le Lemme 5.2 il existe C'' indépendant de ε et de y tel que $\int_{|x| \geq 2|y'|} |K_\varepsilon(x'-y') - K_\varepsilon(x')| dx' \leq C''$ et

par suite

$$(5.28) \quad \int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |T_\varepsilon h_k(x)| dx \leq C'' \int_{Q_k} |h(y)| dy .$$

Comme $F^* \subset \mathbb{R}^N - Q_k^*$ on a

$$\int_{F^*} |T_\varepsilon h(x)| dx \leq \sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}^N - Q_k^*} |T_\varepsilon h_k(x)| dx \leq C'' \sum_1^\infty \int_{Q_k} |h(y)| dy ,$$

$$\int_{F^*} |T_\varepsilon h(x)| dx \leq C'' \int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| dy \leq 2C'' \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| dy . \text{ Par suite}$$

$$(5.29) \quad \text{mes.}\{x \in F^* : |T_\varepsilon h(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{4C''}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| dy .$$

Comme $\text{mes.}(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| dy$ et $\text{mes.}(\Omega^*) \leq (2\sqrt{N})^N \text{mes.}(\Omega)$ on en déduit

$$(5.30) \quad \text{mes.}\{x : |T_\varepsilon h(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{(2\sqrt{N})^N + 4C''}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| dy .$$

En utilisant (5.23), (5.24) et (5.30) on en déduit que T_ε est de type (1-1)-faible avec une constante indépendante de ε .

3ème étape : T_ε est de type (p-p), $1 < p \leq 2$. En utilisant les première et deuxième étapes ainsi que le Théorème 5.1, T_ε est de type (p-p), $1 < p < 2$ et il existe une constante $C = C(p, N, K)$ telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$(5.31) \quad \|T_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

En outre (5.31) est aussi valide si $p = 2$ puisque T_ε est de type (2-2).

4ème étape : T_ε est de type (p-p), $2 \leq p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < \infty$ et $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $q = \frac{p}{p-1}$, tel que $\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq 1$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} T_\varepsilon f(y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(y-x) f(x) \varphi(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{T}_\varepsilon \varphi(x) f(x) dx ,$$

où $\tilde{T}_\varepsilon \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(y-x) \varphi(y) dy = \tilde{K}_\varepsilon * \varphi(x)$ et où \tilde{K} est défini par

$\tilde{K}(x) = K(-x)$. \tilde{T}_ε vérifie (5.31) et par suite comme $1 < q < 2$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} T_\varepsilon f(y) \varphi(y) dy \right| \leq C(q) \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

Par suite $T_\varepsilon f \in (L^q(\mathbb{R}^N))' = L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$(5.32) \quad \|T_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

COROLLAIRE 5.1. Supposons que K vérifie (K.1), (K.2) et (K.3),
alors pour tout $1 < p < \infty$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $T_\varepsilon f$ converge vers
 Tf dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand ε tend vers 0 et il existe une constante
 $C = C(N, p, K)$ telle que

$$(5.33) \quad \|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

Démonstration. Nous avons pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} K(y) f(x-y) dy = \int_{|y| \geq 1} K(y) f(x-y) dy + \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1} K(y) (f(x-y) - f(x)) dy$$

en utilisant (K-3). Comme $|K(y)(f(x-y) - f(x))| \leq C |y|^{1-N} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |Df(x)|$, on

déduit du théorème de Lebesgue que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$ existe pour tout x .

Soit $Tf(x)$ cette limite. On a $Tf \in L^p(\mathbb{R}^N)$ en utilisant (5.20) et le lemme de Fatou, en outre $T_\varepsilon f$ converge vers Tf dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $\{f_n\}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tendant vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. On a pour $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_\varepsilon f - T_{\varepsilon'} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|T_\varepsilon(f - f_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|T_\varepsilon f_n - T_{\varepsilon'} f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|T_{\varepsilon'}(f_n - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant (5.20) :

$$\|T_\varepsilon f - T_{\varepsilon'} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2C\|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|T_\varepsilon f_n - T_{\varepsilon'} f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

Comme $\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \|T_\varepsilon f_n - T_{\varepsilon'} f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$ on en déduit

$$\limsup_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \|T_\varepsilon f - T_{\varepsilon'} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2C\|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et par suite le filtre $\{T_\varepsilon f\}$ est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Sa limite est Tf et Tf vérifie (5.33).

5.3. Applications à $-\Delta$ sur \mathbb{R}^N

DEFINITION 5.5. Soient $N \geq 3$ et ω_N la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^N ; on définit

(a) la solution fondamentale Γ de l'équation de Laplace dans \mathbb{R}^N

$$(5.34) \quad \Gamma(x) = \frac{-1}{N(N-2)\omega_N |x|^{N-2}}, \quad \forall x \neq 0,$$

(b) le potentiel newtonien u de $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$(5.35) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)dy = (\Gamma * f)(x).$$

LEMME 5.3. Soit $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(5.36) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) \Delta f(y) dy .$$

Démonstration. Soient $\rho > 0$ et $B_\rho = \{y: |y-x| < \rho\}$. Comme f est à support compact on déduit de la formule de Green

$$(5.37) \quad \int_{\mathbb{R}^N - B_\rho} \Gamma(x-y) \Delta f(y) dy = \int_{\partial B_\rho} (\Gamma(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) - f(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)) d\sigma ,$$

où ν est la normale unitaire extérieure à $\mathbb{R}^N - B_\rho$ sur ∂B_ρ .

Mais $\int_{\partial B_\rho} \Gamma(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) d\sigma = \Gamma(\rho) \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) d\sigma$ d'où

$$\left| \int_{\partial B_\rho} \Gamma(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) d\sigma \right| \leq \rho \sup_{\partial B_\rho} |Df| \quad \text{qui tend vers } 0 \text{ avec } \rho \text{ et}$$

$$\int_{\partial B_\rho} f(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) d\sigma = - \Gamma'(\rho) \int_{\partial B_\rho} f(y) d\sigma = - \frac{1}{N \omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B_\rho} f(y) d\sigma$$

comme $\int_{\partial B_\rho} d\sigma = N \omega_N \rho^{N-1}$ on en déduit (5.36) en faisant tendre ρ vers 0 et en utilisant la continuité de f .

Concernant Γ on peut remarquer que

$$(5.38) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{N \omega_N} \frac{x_i}{|x|^N} , \quad \forall x \neq 0 , \quad \forall 1 \leq i \leq N ,$$

$$(5.39) \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{N \omega_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - N \frac{x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right) , \quad \forall x \neq 0 , \quad \forall 1 \leq i, j \leq N .$$

DEFINITION 5.6. Soient $1 \leq i, j \leq N$ on définit K par

$$(5.40) \quad K(x) = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x) \quad , \quad \forall x \neq 0 \quad ,$$

et pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$(5.41) \quad Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} K(y) f(x-y) dy \quad ,$$

si cette limite existe.

LEMME 5.4. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $Tf(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et

$$(5.42) \quad Tf(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x) - \frac{\delta_{ij}}{N} f(x) \quad ,$$

où u est le potentiel newtonien de f .

Démonstration. 1ère étape : $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et on a dans \mathbb{R}^N

$$(5.43) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} (x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) f(y) dy \quad .$$

Compte tenu de (5.38), $\int \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) f(y) dy$ est bien défini. Considérons une fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta = 1$ sur $[2, +\infty[$ et $\eta = 0$ sur $]-\infty, 1]$ et pour $\varepsilon > 0$ définissons $v_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^N)$ par

$$(5.44) \quad w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) f(y) dy \quad .$$

et posons $v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) f(y) dy$. Nous avons

$$|v(x) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} (x)| = \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \Gamma(x-y) (1 - \eta(|x-y|/\varepsilon)) \} dx$$

$$|v(x) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |f| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} (|D\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\varepsilon} |\Gamma(x-y)|) dx$$

comme $|D\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{N\omega_N |x-y|^{N-1}}$ on en déduit

$$(5.45) \quad |v(x) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}(x)| \leq \frac{2N\varepsilon}{N-2} \sup_{\mathbb{R}^N} |f| .$$

Par suite w_ε et $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}$ convergent uniformément vers u et v quand ε tend vers 0. Donc $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2ème étape : $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et on a pour tout ouvert Ω de bord $\partial\Omega$ de classe C^1 tel que $\text{supp.}(f) \subset \Omega$

$$(5.46) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) v_j(y) d\sigma_y .$$

Compte tenu de (5.38) et (5.39) les deux intégrales de droite de (5.46) sont bien définies. Posons

$$(5.47) \quad v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) f(y) dy ,$$

$v_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) \right) f(y) dy ,$$

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) \right) (f(y) - f(x)) dy + \dots$$

$$\dots f(x) \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) \right) dy .$$

En intégrant par parties on a pour ε assez petit et x tel que $\text{dist}(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon$

$$(5.48) \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta(|x-y|/\varepsilon) \right) (f(y) - f(x)) dy - \dots$$

$$\dots f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad .$$

Si on appelle $u_{ij}(x)$ le terme de droite de (5.46), on a

$$|u_{ij}(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x)| = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) (1 - \eta(|x-y|/\varepsilon)) \right) (f(y) - f(x)) dy \quad ,$$

$$|u_{ij}(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |Df| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} |x-y| \left(\left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| + \frac{2}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| \right) dy \quad .$$

Comme $\left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| \leq \frac{1}{\omega_N |x-y|^N}$ on a

$$(5.49) \quad |u_{ij}(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x)| \leq 2\varepsilon(N+2) \sup_{\mathbb{R}^N} |Df| \quad .$$

Par suite $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}$ converge vers u_{ij} uniformément dans \mathbb{R}^N , donc $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$.

3ème étape : Soient $\varepsilon > 0$ et $B_\varepsilon = \{y : |x-y| < \varepsilon\}$. Compte tenu de (5.46), on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad .$$

$$\text{Or } \int_{\Omega - B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) (f(y) - f(x)) dy = \int_{\Omega - B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) f(y) dy - \dots$$

$$\dots f(x) \int_{\Omega - B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy$$

$$\text{et } \int_{\Omega-B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) \nu_j(y) d\sigma_y - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) \nu_j(y) d\sigma_y ,$$

où la normale sur ∂B_ε est sortante de B_ε . Par suite

$$\int_{\Omega-B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) (f(y)-f(x)) dy = \int_{\Omega-B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) f(y) dy + \dots$$

(5.50)

$$\dots f(x) \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) \nu_j(y) d\sigma$$

$$\text{Or } \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} (x-y) \nu_j(y) d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{N \omega_N |x-y|^{N+1}} d\sigma(y) = \frac{\delta_{ij}}{N}$$

Par suite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega-B_\varepsilon} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} (x-y) f(y) dy$ existe et on a (5.42).

REMARQUE 5.1. Le Lemme 5.4 demeure vrai sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Ainsi le résultat de la première étape et (5.43) sont valides si f est bornée et intégrable. Les résultats des étapes 2 et 3 et (5.46) et (5.42) sont valides si f est bornée et localement holdérienne. Ce résultat sera fondamental dans le chapitre suivant.

LEMME 5.5. Le noyau K défini en (5.40) vérifie (K.1), (K.2) et (K.3).

Démonstration. Pour (K.1) on a déjà utilisé $|K(x)| \leq \frac{1}{\omega_N |x|^N}$.

$$\text{Pour (K.2), } \frac{\partial K}{\partial x_k} = -\frac{1}{\omega_N} \left(\frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i}{|x|^{N+2}} + (N+2) \frac{x_i x_j x_k}{|x|^{N+4}} \right)$$

et par suite $|DK| \leq \frac{C}{|x|^{N+1}}$ dans $\mathbb{R}^N - \{0\}$ et par le théorème des

accroissements finis $|K(x-y) - K(x)| \leq |y| |DK(z)|$ où z appartient au segment $[x-y, x]: z = x - \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1$. Par suite si $|x| \geq 2|y|$, $|z| \geq \frac{|x|}{2}$ et

$$(5.51) \quad \int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C \int_{|x| \geq 2|y|} |y| \frac{2^{N+1}}{|x|^{N+1}} dx .$$

$$\text{Or } \int_{|x| \geq 2|y|} |y| |x|^{-N-1} dx = \frac{1}{2} |S^{N-1}| \text{ d'où (K.2).}$$

Pour (K.3), nous avons en intégrant en coordonnées sphériques

$$R_1 \leq |x| \leq R_2 \quad K(x) dx = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{S^{N-1}} K(r, \sigma) d\sigma \right) r^{N-1} dr , \text{ avec } r=|x| , \sigma = \frac{x}{|x|} .$$

$$\text{Or } \int_{S^{N-1}} K(r, \sigma) d\sigma = \int_{S^{N-1}} \frac{1}{N\omega_N} \left(\frac{\delta_{ij}}{r^N} - N \frac{x_i x_j}{r^{N+2}} \right) d\sigma = \frac{1}{r^N N\omega_N} \int_{S^{N-1}} \left(\delta_{ij} - N \frac{x_i x_j}{r^2} \right) d\sigma .$$

$$\text{Si } i \neq j \quad \int_{S^{N-1}} \frac{x_i x_j}{r^2} d\sigma = 0 \quad \text{par raison d'imparité.}$$

$$\text{Si } i = j \quad \int_{S^{N-1}} \frac{x_i^2}{r^2} d\sigma = \frac{1}{N} \int_{S^{N-1}} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{r^2} d\sigma = \frac{1}{N} \int_{S^{N-1}} d\sigma ; \text{ d'où}$$

$$\int_{S^{N-1}} K(r, \sigma) d\sigma = 0 \quad \text{et on a (K.3).}$$

THEOREME 5.4. Soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que pour tout $u \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq i, j \leq N$ on ait

$$(5.52) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .$$

Démonstration. D'après (5.42) et (5.36) on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = T(\Delta u)(x) + \frac{\delta_{ij}}{N} \Delta u(x) . \text{ Comme le noyau } K \text{ vérifie (K.1),}$$

$$(K.2) \text{ et (K.3) on a } \|T\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C' \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \text{ d'où (5.52).}$$

REMARQUE 5.2. Le Théorème 5.4 admet diverses extensions. En particulier soit u appartenant à $L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall 1 \leq i, j \leq N$ et on a (5.52).

5.4. Estimations $W^{2,p}$ globales

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , considérons le problème de Dirichlet suivant

$$(5.53) \quad \begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les hypothèses naturelles de la théorie sont les suivantes

$$(5.54) \quad a_{ij}, b_i \text{ et } c \text{ sont bornées dans } \Omega, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

$$(5.55) \quad a_{ij} \text{ est continue dans } \bar{\Omega} \text{ et } a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N.$$

$$(5.56) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_i \xi_i^2, \quad \lambda > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N).$$

LEMME 5.6. Supposons que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient les hypothèses (5.54), (5.55) et (5.56) et soit $1 < p < \infty$. Il existe alors des constantes $R_0 > 0, C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de λ, N , du module de continuité des a_{ij} , du maximum des coefficients et de p telles que pour tout $0 < R \leq R_0$, toute boule ouverte $B_R \subset \Omega$, tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $u \in C^2(\Omega)$ à support compact dans B_R solution de (5.53), on ait

$$(5.57) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B_R)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(B_R)} + C_2 \|u\|_{W^{1,p}(B_R)}.$$

Démonstration. Pour simplifier les solutions on ne considérera que des boules centrées en 0 (on s'y ramène par translation), et (5.53) s'écrit

$$(5.58) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j} (a_{ij}(0) - a_{ij}(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x)u + f(x) .$$

Comme dans la matrice $A(0) = (a_{ij}(0))$ est symétrique, il existe une matrice orthogonale B et une matrice diagonale Λ telles que

$$(5.59) \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B A(0) B^t .$$

Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^N de matrice B et $y = \varphi(x)$. Posons $\tilde{u}(y) = \tilde{u} \circ \varphi(x) = u(x)$, on a

$$(5.60) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(0) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \delta_{k,l} \lambda_k \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = a'_{k,l}(y) .$$

Par suite l'équation (5.58) devient

$$(5.61) \quad \sum_k \lambda_k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k^2} = \sum_{k,l} (\delta_{k,l} \lambda_k - a'_{k,l}(y)) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_k b'_k(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} - \tilde{c}(y) \tilde{u} + \tilde{f}(y) ,$$

dans B_R (qui est invariante par φ), où $\tilde{c}(y) = c(x)$, $\tilde{f}(y) = f(x)$ et $b'_k(y) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$. Comme $\lambda_k \geq \lambda > 0$, on pose $z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} y_k$, $1 \leq k \leq N$, $z = (z_1, \dots, z_N)$ et $v(z) = \tilde{u}(y)$. L'équation (5.61) devient

$$(5.62) \quad \sum_k \frac{\partial^2 v}{\partial z_k^2} = f'(z) \quad \text{dans} \quad B'_R = \{z : \sum_k \lambda_k z_k^2 < R^2\} ,$$

avec

$$(5.63) \quad f'(z) = \sum_{k,l} (\delta_{k,l} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{k,l}(z)) \frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l} - \sum_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} b''_k(z) \frac{\partial v}{\partial z_k} - \dots$$

$$\dots \tilde{c}'(z)v + \tilde{f}'(z) ,$$

où $a''_{k,l}(z) = a'_{k,l}(y)$, $b''_{k,l}(z) = b'_{k,l}(y)$, $\tilde{c}'(z) = \tilde{c}(y)$ et $\tilde{f}'(z) = \tilde{f}(y)$.

Comme u est à support compact dans B_R , v est à support compact dans B'_R et on peut l'étendre par 0 à \mathbb{R}^N . On déduit du Théorème 5.4

$$(5.64) \quad \sum_{k,1} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_1} \right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \|f'\|_{L^p(B')} .$$

En utilisant la définition de f' , on a

$$(5.65) \quad \begin{aligned} \|f'\|_{L^p(B'_R)} &\leq C' \sup_{k,1} \sup_{B'_R} \left| \delta_{k,1} - \frac{a''_{k,1}(z)}{\lambda_k} \right| \sum_{k,1} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_1} \right\|_{L^p(B'_R)} + \dots \\ &\dots C \|\tilde{f}'\|_{L^p(B'_R)} + C' \|v\|_{W^{1,p}(B'_R)} . \end{aligned}$$

Comme les a''_{kl} sont continus en 0, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $0 < R \leq R_0$ on ait

$$(5.66) \quad C \sup_{k,1} \sup_{B'_R} \left| \delta_{k,1} - \frac{a''_{k,1}(z)}{\lambda_k} \right| \leq \frac{1}{2} ;$$

en outre R_0 est indépendant du point 0 auquel on s'est ramené, d'où

$$(5.67) \quad \sum_{k,1} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_1} \right\|_{L^p(B'_R)} \leq 2C \|\tilde{f}'\|_{L^p(B'_R)} + 2C' \|v\|_{W^{1,p}(B'_R)}$$

et (5.57) en revenant aux variables y et x .

Notre second lemme étudie la régularité au bord dans $W^{2,p}$. Pour cela posons

$$(5.68) \quad B_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R, x_N > 0\}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) .$$

LEMME 5.7. Supposons que $\Omega = \mathbb{R}^{N+} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ et que les coefficients vérifient les hypothèses du Lemme 5.6 et soit $1 < p < \infty$. Il existe des constantes $R'_0 > 0, C_1, C_2 > 0$ dépendant des mêmes quantités que dans le Lemme 5.6 telles pour tout $0 < R \leq R'_0$, tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $u \in C^2(\Omega)$ à support compact dans $\overline{B_{R-\varepsilon}^+}$

($\varepsilon > 0$ quelconque) s'annulant sur $\{x: x_N = 0\}$, solution de (5.53), on ait

$$(5.69) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B_R^+)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(B_R^+)} + C_2 \|u\|_{W^{1,p}(B_R^+)} .$$

Démonstration. Comme dans le Lemme 5.6 on suppose que les boules sont centrées en 0. En effectuant les changements de variable précédents $y = \varphi(x)$, $\tilde{u}(y) = u(x)$, $z'_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} y_k$, $1 \leq k \leq N$, $v'(z') = \tilde{u}(y)$, on a

$$(5.70) \quad \sum_k \frac{\partial^2 v'}{\partial z'_k{}^2} = f'(z') \quad \text{dans } \tilde{B}_R^+ ,$$

$\tilde{B}_R^+ = \{z' : \sum_k \lambda_k z'_k{}^2 < R^2 ; \sum_k \sqrt{\lambda_k} \frac{\partial x_N}{\partial y_k} z'_k > 0\}$ et v' est nul

sur $\sum_k \sqrt{\lambda_k} \frac{\partial x_N}{\partial y_k} z'_k = 0$ et sur un voisinage de $\sum_k \lambda_k z'_k{}^2 = 0$. Par un

nouveau changement de base orthonormale $z = \psi(z')$ le bord de B'_R peut être amené sur $\{z: z_N = 0\}$. Si on pose $v(z) = v'(z')$, $g(z) = f'(z')$ on a $\Delta v(z) = \Delta v'(z')$ et l'équation $\Delta v = g$ est vérifiée dans $\psi(\tilde{B}_R^+) \cap \{z: z_N > 0\}$. On va effectuer une réflexion sur $\{z: z_N = 0\}$ pour avoir une équation satisfaite dans $\psi(\tilde{B}_R) = \psi(\{z': \sum_k \lambda_k z'_k{}^2 < R^2\})$. Pour cela on définit

$$(5.71) \quad \bar{v}(z) = \begin{cases} v(z) & \text{si } z_N > 0 \\ -v(z_1, \dots, z_{N-1}, -z_N) & \text{si } z_N < 0 \end{cases} .$$

La fonction \bar{v} est définie dans $\psi(\tilde{B}_R)$, \bar{v} est à support compact. Comme v est nulle sur $\{z: z_N = 0\}$ \bar{v} est de classe C^1 dans $\psi(\tilde{B}_R)$ et par suite appartient à $W^{2,p}(\psi(\tilde{B}_R))$. En outre \bar{v} vérifie

$$(5.72) \quad \Delta \bar{v}(z) = \bar{g}(z) \quad \text{dans } \psi(\tilde{B}_R) ,$$

$$\text{où } \bar{g}(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z_N \geq 0, \\ -g(z_1, \dots, z_{N-1}, -z_N) & \text{si } z_N < 0. \end{cases}$$

Si on étend \bar{v} et \bar{g} par 0 dans $(\psi(\tilde{B}_R))$ et on utilise le Théorème 5.4 et la Remarque 5.2, on en déduit

$$(5.73) \quad \sum_{k,1} \left\| \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z_k \partial z_1} \right\|_{L^p(\psi(\tilde{B}_R))} \leq C \|\bar{g}\|_{L^p(\psi(\tilde{B}_R))},$$

d'où la même relation en remplaçant $\psi(\tilde{B}_R)$ par $\psi(\tilde{B}_R^+)$, puis (5.69) en revenant aux variables initiales, et en prenant $R \leq R_0$ assez petit comme dans le Lemme 5.6.

THEOREME 5.5. Supposons que Ω soit un ouvert borné de \mathbb{R}^N de bord de classe C^2 , que les coefficients a_{ij} , b_i et c vérifient (5.54), (5.55) et (5.56) et soit $1 < p < \infty$. Il existe alors deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ ne dépendant que de N, λ, p des bornes des coefficients et du module de continuité des a_{ij} telles que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $u \in C^2(\Omega)$ solution du problème de Dirichlet (5.53), on ait

$$(5.74) \quad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

et $C_2 = 0$ si $\inf_{\Omega} \text{ess } c(x) \geq \lambda$ et λ est assez grand.

Démonstration. L'idée, due à Korn, est d'utiliser une partition de l'unité et des changements locaux de coordonnées pour se ramener aux cas couverts par les Lemmes 5.6 et 5.7. On considère M fonctions $\zeta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$(5.75) \quad \sum_{k=1}^M \zeta_k(x) = 1, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

$$(5.76) \quad \text{diam}(\text{supp.}\zeta_k) \leq R \leq R_0/2, \quad \forall k = 1, 2, \dots, M,$$

où R_0 est le plus petit des nombres R_0, R'_0 des Lemmes 5.6 et 5.7. On pose

$$(5.77) \quad u_k(x) = \zeta_k(x) u(x), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

et u_k est à support dans l'intersection d'une balle $B(x_k, R)$ avec $\bar{\Omega}$.

Premier cas : $B(x_k, R) \subset \Omega$. La fonction u_k vérifie dans $B(x_k, R) = B_k$

$$(5.78) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + c(x)u_k = f_k(x),$$

$$\text{où } f_k = \zeta_k f - \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_i b_i u \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}.$$

En outre u_k est à support compact dans B_k . On déduit du Lemme 5.6 que

$$(5.79) \quad \|u_k\|_{W^{2,p}(B_k)} \leq C_k^1 \|f_k\|_{L^p(B_k)} + C_k^2 \|u_k\|_{W^{1,p}(B_k)}.$$

En utilisant la définition de f_k et le fait que $\text{supp.}u_k \subset B_k$ on en déduit

$$(5.80) \quad \|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C'_k \|f\|_{L^p(\Omega)} + C''_k \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Deuxième cas : $B(x_k, R) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. On peut toujours s'arranger pour que x_k soit sur $\partial\Omega$. Il existe un C^2 -difféomorphisme φ_k de $B(x_k, R)$ dans \mathbb{R}^N tel que $\varphi_k(x_k) = 0$ et $\varphi_k(B(x_k, R) \cap \Omega) = B'_k = B'(0, R) \cap \mathbb{R}^{N+}$ (on peut toujours construire de tels difféomorphismes). On pose $v(y) = u_k(x) = v(\varphi_k(x))$ et $\varphi = \varphi_k = (y_1, \dots, y_N)$, pour simplifier. On a

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \sum_l \frac{\partial v}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{l,h} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_h} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} + \sum_l \frac{\partial v}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j \partial x_i}$$

Par suite v vérifie dans B'_k

$$(5.81) \quad \sum_{l,h} \tilde{a}_{lh}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_h} + \sum_l \tilde{b}_l(y) \frac{\partial v}{\partial y_l} + \tilde{c}(y) v = \tilde{f}(y) \quad ,$$

$$\text{avec } \tilde{a}_{lh}(y) = \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \quad ,$$

$$\tilde{b}_l(y) = \sum_i b_i(\varphi(x)) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \quad ,$$

$$\tilde{c}(y) = c(\varphi(x)) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(y) = f(\varphi(x)) \quad .$$

Les fonctions $\tilde{a}_{l,h}$, \tilde{b}_l et \tilde{c} vérifient (5.54) et (5.55) dans B'_k , $f \in L^p(B'_k)$ et pour $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{l,h} \tilde{a}_{l,h} \xi_l \xi_h = \sum_{l,h,i,j} a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \xi_l \xi_h = \sum_{i,j} a_{ij} \left(\sum_l \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \xi_l \right) \left(\sum_h \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \xi_h \right)$$

comme dans la démonstration du Théorème 3.3. Par suite

$$\sum_{l,h} \tilde{a}_{l,h} \xi_l \xi_h \geq \lambda \sum_i \left(\sum_l \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \xi_l \right)^2 \geq \lambda \alpha \sum_l \xi_l^2$$

où $\alpha > 0$ (puisque φ est un difféomorphisme $\left[\frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right]$ est inversible uniformément). Par suite (5.56) est vérifié. Comme v s'annule sur $\{x : x_N = 0\} \cap B'_k$ et sur un voisinage de $\partial B'_k \cap \mathbb{R}^{N+}$, on déduit du Lemme 5.7 que

$$(5.82) \quad \|v\|_{W^{2,p}(B'_k)} \leq C'_1 \|\tilde{f}\|_{L^p(B'_k)} + C'_2 \|v\|_{W^{1,p}(B'_k)} \quad .$$

En revenant aux variables initiales on en déduit

$$(5.83) \quad \|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_k \|f\|_{L^p(\Omega)} + C'_k \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

En combinant les relations (5.80) et (5.83) on en déduit

$$(5.84) \quad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)} + C' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

En utilisant la relation (1.12) du Corollaire 1.1 on en déduit (5.74). Si $\lambda \leq \inf_{\Omega} c(x)$ et λ est assez grand il y a unicité de la solution du Ω problème (5.53) par le principe du maximum (Théorème 2.1) ; par suite $C_2 = 0$.

REMARQUE 5.3. Le Théorème 5.5 n'est plus vrai dans les deux cas critiques $p = 1$ et $p = \infty$. En outre la condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$ peut être remplacée par $u|_{\partial\Omega} = \varphi \in C^2(\partial\Omega)$ par exemple.

5.5. Estimations $W^{2,p}$ locales

Les estimations $W^{2,p}$ précédentes admettent des versions locales pour u solution de

$$(5.85) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x) \quad \text{dans } \Omega ,$$

dans le cas $\partial\Omega$ n'est pas assez régulier et (ou) $u|_{\partial\Omega}$ ne l'est pas non plus. On se limitera d'abord au cas où $\Omega = B(x_0, R) = B(R)$ et R assez petit pour donner une estimation fine dans $W^{2,p}(\Omega')$, $\Omega' = B(x_0, R-r)$.

LEMME 5.8. On suppose que les coefficients a_{ij} , b_i et c vérifient (5.54), (5.55) et (5.56) dans Ω . Soient $x_0 \in \Omega$, R_0 la constante du Lemme 5.6 et $1 < p < \infty$. Il existe une constante C dépendant de N, p, R_0 et des a_{ij} , b_i et c telle que pour tout $0 < R \leq R_0$,

tout $0 < r \leq R$, tout $f \in L^\infty(B(R))$, tout $u \in C^2(B(R))$ solution de (5.85) on ait

$$(5.86) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(R-r))} \leq \frac{C}{r^2} (\|f\|_{L^p(B(R))} + \|u\|_{L^p(B(R))}) .$$

Démonstration. Soit $\zeta \in C_0^\infty(B(R))$ telle que

$$(5.87) \quad \begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, & \zeta \equiv 1 \text{ dans } B(R-r), \\ \zeta \equiv 0 & \text{dans } B(R) - B(R-r/2), \\ \|\Delta \zeta\|_{L^\infty(B(R))} \leq \frac{C}{r}, & \left\| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^\infty(B(R))} \leq \frac{C}{r^2}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N. \end{cases}$$

On pose $v = \zeta u$ et v vérifie

$$(5.88) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x) v = \varphi(x),$$

où $\varphi = \zeta f - \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_i b_i u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$. Par le Lemme 5.6 (applicable puisque v s'annule sur $\{x: R-r/2 \leq |x| \leq R\}$) on a

$$(5.89) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(R))} \leq K (\|\varphi\|_{L^p(B(R))} + \|v\|_{W^{1,p}(B(R))}) .$$

Or $\|v\|_{W^{1,p}(B(R))} \leq \frac{C}{r} \|u\|_{L^p(B(R))} + \|Du\|_{L^p(B(R-r/2))}$ et

$$\|\varphi\|_{L^p(B(R))} \leq \|f\|_{L^p(B(R))} + \frac{C}{r^2} \|u\|_{L^p(B(R))} + \frac{C}{r} \|Du\|_{L^p(B(R-r/2))} ,$$

D'après le Corollaire 1.1 (valable d'après la Remarque 1.3 puisque $\partial B(R)$ est régulier) on a pour $\varepsilon > 0$

$$(5.90) \quad \|Du\|_{L^p(B(R-r/2))} \leq \varepsilon \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(R-r/2))} + \frac{C'}{\varepsilon} \|u\|_{L^p(B(R-r/2))} .$$

Par suite en posant $\phi(r) = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(R-r))}$,

$$(5.91) \quad \begin{aligned} \phi(r) \leq & K \left\{ \frac{C}{r} \|u\|_{L^p(B(R))} + \varepsilon_1 \phi(r/2) + \frac{C'}{\varepsilon_1} \|u\|_{L^p(B(R))} + \|f\|_{L^p(B(R))} \right. \\ & \left. \dots + \frac{C}{r^2} \|u\|_{L^p(B(R))} + \frac{\varepsilon C}{r} \phi(r/2) + \frac{CC'}{\varepsilon r} \|u\|_{L^p(B(R))} \right\} \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon_1 = \frac{1}{16K}$ et $\varepsilon = \frac{r}{16KC}$ on en déduit

$$(5.92) \quad \phi(r) \leq \frac{1}{8} \phi\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{K'}{r^2} \left(\|u\|_{L^p(B(R))} + \|f\|_{L^p(B(R))} \right) ,$$

Posons $K' \left(\|u\|_{L^p(B(R))} + \|f\|_{L^p(B(R))} \right) = K''$ et on a

$$(5.93) \quad \phi(r) \leq \frac{1}{8} \phi\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{K''}{r^2} .$$

Il est alors immédiat d'établir par récurrence que pour n entier

$$(5.94) \quad \phi(r) \leq \frac{1}{8^{n+1}} \phi\left(\frac{r}{2^{n+1}}\right) + \frac{K''}{r^2} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} .$$

Comme $\phi(0) = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(R))} < +\infty$ on obtient

$$\phi(r) \leq \frac{2K''}{r^2} \quad \text{d'où (5.86).}$$

Nous avons finalement le résultat suivant de régularité locale

THEOREME 5.6. Supposons que Ω soit un ouvert de \mathbb{R}^N , que les coefficients a_{ij} , b_i et c vérifient (5.54), (5.55) et (5.56). Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω il existe une constante C ne dépendant que des a_{ij} , b_i , c , N et $\text{dist}(\bar{\Omega}', \partial\Omega)$ telle que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $u \in C^2(\Omega)$ on ait

$$(5.95) \quad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}) .$$

Démonstration. Comme $\bar{\Omega}'$ est précompact on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $B(x_k, R)$, $k = 1, \dots, M$ où R est tel que

$$(5.96) \quad R = \frac{1}{2} \min(R, \text{dist}(\bar{\Omega}', \partial\Omega)) .$$

On applique alors le Lemme 5.3 dans $B(x_k, 2R)$ en prenant $r = R$ et on a puisque $B(x_k, 2R) \subset \Omega$

$$(5.97) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(x_k, R))} \leq \frac{C}{R^2} (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) .$$

En additionnant les M inégalités obtenues on en déduit

$$(5.98) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega')} \leq \frac{MC}{R^2} (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) .$$

On estime alors $\|Du\|_{L^p(\Omega')}$ en utilisant le Corollaire 1.1 et la

Remarque 1.3 (on peut toujours supposer que $\partial\Omega'$ est régulier), d'où (5.95).

5.6. Applications à un problème non linéaire

Dans cette section Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N > 2$, de bord $\partial\Omega$ de classe C^2 et \tilde{L} est l'opérateur à forme divergentielle

$$(5.99) \quad \tilde{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) \quad .$$

On supposera toujours que les coefficients de \tilde{L} sont uniformément lipschitziens dans Ω et vérifient (5.56). Soient c et f des fonctions définies dans Ω et g une fonction définie sur \mathbb{R} . L'équation considérée est la suivante

$$(5.100) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x) u - g(u) = f(x) \quad .$$

Le résultat suivant étend la Proposition 3.2.

PROPOSITION 5.1. Supposons que g soit continue et $c \in L^\infty(\Omega)$ et vérifie : $c(x) \leq -\theta < 0$ presque partout alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, il existe un unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ vérifiant (5.100). Si \tilde{u} est la solution de (5.100) à second membre \hat{f} , on a

$$(5.101) \quad \theta \|u - \hat{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - \hat{f}\|_{L^p(\Omega)} \quad .$$

La démonstration de (5.101) et donc de l'unicité repose sur le résultat suivant

LEMME 5.9. Soient $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, et γ une fonction continue croissante nulle en 0 telle que $\gamma(w) \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$. On a alors

$$(5.102) \quad \int_{\Omega} \tilde{L} w \gamma(w) dx \leq 0 \quad .$$

Démonstration. 1ère étape. Nous supposons $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $w|_{\partial\Omega} = 0$ et $\gamma \in C^1(\mathbb{R})$. Nous avons par la formule de Green

$$(5.103) \quad \int_{\Omega} \tilde{L}w \gamma(w) dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\gamma(w)) dx + \dots$$

$$\dots + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \gamma(w) n_j d\sigma .$$

Comme $\frac{\partial}{\partial x_j} (\gamma(w)) = \gamma'(w) \frac{\partial w}{\partial x_j}$ et $w|_{\partial\Omega} = 0$, on déduit (5.102) de (5.56) et (5.103).

2ème étape. Nous supposons $w \in C^2(\bar{\Omega})$, $w|_{\partial\Omega} = 0$ et γ continue. On considère $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset]-1, 1[$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(y) dy = 1$ et pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\rho_n(y) = n \rho(ny)$ et on pose

$$(5.104) \quad \gamma_n(r) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y) (\gamma(r-y) - \gamma(-y)) dy .$$

$\gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et s'annule en 0. Par suite

$$(5.105) \quad \int_{\Omega} \tilde{L}w \gamma_n(w) dx \leq 0 .$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, γ_n converge vers γ uniformément sur tout compact de \mathbb{R} en particulier sur $w(\bar{\Omega})$, par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{L}w \gamma_n(w) dx = \int_{\Omega} \tilde{L}w \gamma(w) dx \text{ et on a (5.102).}$$

3ème étape. Nous supposons $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et γ continue et bornée. Il existe une suite $w_n \in C^2(\bar{\Omega})$, $w_n|_{\partial\Omega} = 0$ convergeant vers w dans $W^{2,p}(\Omega)$. Par suite

$$(5.106) \quad \int_{\Omega} \tilde{L}w_n \gamma(w_n) dx \leq 0 .$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ $\tilde{L}w_n$ converge vers $\tilde{L}w$ dans $L^p(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite w_n tend vers w presque partout dans Ω . Comme γ est continue $\gamma(w_n)$ tend vers $\gamma(w)$ presque partout dans Ω . Comme $|\gamma(r)| \leq C$ on déduit du théorème de Lebesgue que $\gamma(w_n)$ tend vers $\gamma(w)$ dans $L^1(\Omega)$ et comme

$$(5.107) \quad \|\gamma(w_n) - \gamma(w)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq (2C)^{1-1/p'} \|\gamma(w) - \gamma(w_n)\|_{L^1(\Omega)}^{1/p'}$$

$\gamma(w_n)$ converge vers $\gamma(w)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. On peut alors passer à la limite dans (5.106) et obtenir (5.102).

Fin de la démonstration. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on pose

$$(5.108) \quad \gamma_n(r) = \begin{cases} \gamma(n) & \text{si } r > n, \\ \gamma(r) & \text{si } |r| \leq n, \\ \gamma(-n) & \text{si } r < -n. \end{cases}$$

γ_n est continue sur \mathbb{R} et par suite

$$(5.109) \quad \int_{\Omega} \tilde{L}w \gamma_n(w) dx \leq 0.$$

Or $|\gamma_n(w)| \leq |\gamma(w)|$ pour tout n et presque partout dans Ω ; comme $\gamma_n(w)$ converge vers $\gamma(w)$ presque partout dans Ω et comme $\gamma(w) \in L^{p'}(\Omega)$, $\gamma_n(w)$ converge vers $\gamma(w)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. On peut passer à la limite dans (5.109) et obtenir (5.102).

Démonstration de la Proposition 5.1.

Unicité et relation (5.101). Soient u et \hat{u} solutions de (5.100) dans $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ avec seconds membres f et $\hat{f} \in L^p(\Omega)$. On pose $w = u - \hat{u}$ et $\gamma(r) = r|r|^{p-2}$; γ est continue croissante. Comme $\gamma(w) \in L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} cw\gamma(w)dx - \int_{\Omega} (g(u) - g(\hat{u})) \gamma(w)dx \geq \int_{\Omega} (f - \hat{f}) \gamma(w) dx.$$

Comme $(g(u) - g(\hat{u})) \gamma(w) \geq 0$ presque partout on en déduit

$$\int_{\Omega} c w^p dx \geq \int_{\Omega} (f - \hat{f}) \gamma(w) dx.$$

Par suite, puisque $c \leq -\theta$, on a

$$\theta \|u - \hat{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - \hat{f}\|_{L^p(\Omega)} ,$$

d'où l'unicité et (5.101).

Existence. Pour $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ on pose $f_k = \text{sign}(f) \min(k, f)$; $f_k \in L^\infty(\Omega)$ et soit $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ la solution de

$$(5.110) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) + c(x) u_k - g(u_k) = f_k(x) ,$$

dans Ω (voir Proposition 3.2). En prenant $\gamma(r) = r|r|^{p-2}$, on définit γ_n par (5.108) et on a en utilisant (5.102)

$$(5.111) \quad \int_{\Omega} c u_k \gamma_n(u_k) dx \geq \int_{\Omega} f_k \gamma_n(u_k) dx .$$

Par suite en utilisant l'inégalité de Hölder

$$(5.112) \quad \theta \left(\int_{|u_k| \leq n} |u_k|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f_k|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} .$$

donc $\theta \left(\int_{\Omega} |u_k|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$ et u_k demeure borné dans

L^p indépendamment de k . En prenant $\tilde{\gamma}(r) = g(r)|g(r)|^{p-2}$ et en définissant $\tilde{\gamma}_n$ par (5.108) on a en utilisant (5.102)

$$(5.113) \quad - \int_{\Omega} g(u_k) \tilde{\gamma}_n(u_k) dx \geq \int_{\Omega} f_k \tilde{\gamma}_n(u_k) dx ,$$

d'où en utilisant l'inégalité de Hölder et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit comme précédemment

$$(5.114) \quad \left(\int_{\Omega} |g(u_k)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} .$$

Ainsi $g(u_k)$ demeure borné dans $L^p(\Omega)$. En utilisant le Théorème 5.5 u_k demeure borné dans $W^{2,p}(\Omega)$ indépendamment de k . En outre comme

u_k est dans $W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, u_k est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ce résultat est évident si $p \leq 2$, un peu plus délicat si $p > 2$). Comme l'injection de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est compacte, il existe une suite $\{u_{k_1}\}$ qui converge vers un u de $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et presque partout dans Ω . On peut en outre supposer que $\tilde{L}u_{k_1}$ converge vers $\tilde{L}u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dans $L^p(\Omega)$ -faible et que $g(u_{k_1})$ converge vers ψ dans $L^p(\Omega)$ -faible. Comme $g(u_{k_1})$ converge vers $g(u)$ presque partout on en déduit comme dans la démonstration de la Proposition 3.2 que $\psi = g(u)$ et u vérifie (5.100) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et presque partout dans Ω .

REMARQUE 5.4. Compte tenu des estimations (5.101) et (5.114) on a

$$(5.115) \quad \|\tilde{L}u\|_{L^p(\Omega)} \leq 3\|f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Par suite si $f \in L^\infty(\Omega)$ il en est de même de $\tilde{L}u$. Malheureusement l'espace $L^\infty(\Omega)$ (comme l'espace $L^1(\Omega)$) est mal adapté à l'étude de la régularité des solutions d'équations elliptiques. On peut cependant arriver à un résultat "quasi optimal" en supposant $f \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ et en introduisant la classe $VB(\Omega)$ des fonctions à variations bornées (*) dans Ω . On a alors le résultat suivant dû à Brézis [8]

$$(5.116) \quad \|\tilde{L}u\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{L}u\|_{VB(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,1}(\Omega)}) .$$

(*) On rappelle que l'espace $VB(\Omega)$ est l'ensemble des $f \in L^1(\Omega)$ tels que $\int_{\Omega} |f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| dx \leq C_i \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Il est muni de la norme $\|f\|_{VB(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} (\int_{\Omega} |f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| dx) (\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)})^{-1}$.