6. THEORIE DE SCHAUDER ET REGULARITE $C^{2,\alpha}$

Dans ce chapitre nous étudions la régularité des solutions du problème de Dirichlet dans Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$,

$$(6.1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i,j} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_i b_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\, u = f(x) , \\ u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega , \end{cases}$$

dans la classe des fonctions holdériennes. Les résultats, en grande partie dûs à Schauder, constituent historiquement la première grande avancée dans la théorie de la régularité (et de l'existence) des solutions elliptiques du second ordre. Ils montrent essentiellement que si les coefficients de l'opérateur et f sont holdériens dans Ω, il en est de même des dérivées secondes de u. L'idée demeure la même que dans la théorie de Calderon et Zygmund : établir les estimations sur les dérivées secondes du potentiel newtonien de f puis considérer localement l'opérateur différentiel comme une perturbation d'un opérateur à coefficients constants.

6.1. Rappels sur le potentiel newtonien

La solution fondamentale de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^N$ est définie par

$$(6.2)\quad \Gamma(x) = \frac{-1}{N(N-2)\omega_N |x|^{N-2}} \quad , \qquad x \neq 0 ,$$

où ω_N est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^N$ et on a

$$(6.3)\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{N\,\omega_N\,|x|^N} ,$$

$$(6.4)\quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{1}{N\,\omega_N}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - N\,\frac{x_i x_j}{|x|^{N+2}}\right) .$$

Si $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ le potentiel newtonien de f dans Ω est défini par

$$(6.5) \qquad u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy \, .$$

Comme on l'a vérifié dans le Lemme 5.4, si $f \in L^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et

$$(6.6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\, f(y)\, dy \, .$$

Si $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ pour $0 < \alpha \leq 1$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (cf. Lemme 5.4 et Remarque 5.1) et on a

$$(6.7) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\Omega_o} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_o} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y \, ,$$

pour tout domaine Ω_o de bord $\partial\Omega_o$ de classe C^1 tel que $\overline{\Omega} \subset \Omega_o$ et $x \in \Omega$, f étant prolongé par 0 dans $\Omega_o - \Omega$.

PROPOSITION 6.1. <u>Soit $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$ et soit u le potentiel newtonien de f . Alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $\Delta u = f$ dans Ω</u> .

<u>Démonstration</u>. Comme on l'a vu dans la démonstration du Lemme 5.4 (deuxième étape) il suffit de supposer f holdérienne pour assurer $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et (6.7). On considère $x \in \Omega$ et $\Omega_o = B(x,R) \supset \overline{\Omega}$. On a alors

$$(6.8) \qquad \Delta u(x) = \int_{\Omega_o} \Delta\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dx - f(x)\int_{\partial\Omega_o} \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y)d\sigma_y \, .$$

Or $\Delta\Gamma(x-y) = 0$ d'où $\Delta u(x) = -f(x)\sum_i \int_{\partial\Omega_o} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y)d\sigma_y$.

Or $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y) = \frac{1}{N\omega_N}\frac{y_i - x_i}{|x-y|^N} = -\frac{1}{N\omega_N}\frac{(x_i-y_i)^2}{|x-y|^{N+1}}$. Par suite

$$\sum_i \int_{\partial\Omega_o} \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_i(y)d\sigma_y = -\int_{\partial B(x,R)} \frac{1}{N\omega_N} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^{N+1}} d\sigma_y = -1 \quad \text{d'où}$$

(6.9) $\Delta u(x) = f(x)$.

Compte tenu de la Proposition 6.1 qui donne une représentation explicite d'une solution de (6.9) et de la relation (6.7) qui exprime les dérivées secondes de cette solution nous sommes en mesure de rechercher des estimations $C^{2,\alpha}$ sur cette solution particulière.

6.2. Estimations $C^{2,\alpha}$ sur le potentiel newtonien

L'estimation fondamentale est la suivante

PROPOSITION 6.2. Soient $B_1 = B(x_o,R)$ et $B_2 = B(x_o,2R)$ et soit $f \in C^\alpha(\overline{B}_2)$, $0 < \alpha < 1$. Il existe une constante C dépendant de α et N telle que le potentiel newtonien u de f dans B_2 appartienne à $C^{2,\alpha}(\overline{B}_1)$ et vérifie

(6.10) $$\sup_{B_1}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| + R^\alpha\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{\alpha,B_1} \leq C\left(\sup_{B_2}|f| + R^\alpha[f]_{\alpha,B_2}\right) ,$$

pour tout $1 \leq i,j \leq N$.

Démonstration. Nous commençons par estimer $\sup\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|$ en utilisant (6.7) avec $\Omega_o = B_2$ c'est-à-dire si $x \in B_1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{B_2} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial B_2} \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y .$$

Or $|f(y)-f(x)| \leq [f]_{\alpha,B_2} |y-x|^\alpha$ et

(6.11) $$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)\right| \le \frac{1}{N\,\omega_N\,|x-y|^{N-1}} \quad ,$$

(6.12) $$\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial x_j}(x-y)\right| \le \frac{1}{\omega_N|x-y|^N} \quad .$$

Par suite

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right| \le \frac{1}{N\,\omega_N}[f]_{\alpha,B_2}\int_{B_2}|x-y|^{\alpha-N}dy+\frac{R^{1-N}}{N\,\omega_N}\,|f(x)|\int_{\partial B_2}d\sigma_y \quad ,$$

c'est-à-dire

(6.13) $$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right| \le \frac{2^\alpha R^\alpha}{N\alpha}[f]_{\alpha,B_2} + 2^{N-1}|f(x)| \quad .$$

L'estimation de $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{\alpha,B_1}$ est beaucoup plus longue. Soit $\bar{x}\in B_1$, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{x})=\int_{B_2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy-f(\bar{x})\int_{\partial B_2}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y)\nu_j(y)d\sigma_y \quad ,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\bar{x})-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)=f(x)I_1+(f(x)-f(\bar{x}))(I_2+I_3)+I_4+I_5+I_6$$

avec

$$I_1=\int_{\partial B_2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x-y)-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y)\right)\nu_j(y)d\sigma_y \quad ,$$

$$I_2=\int_{\partial B_2}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y)\,\nu_j(y)\,d\sigma_y \quad ,$$

$$I_3 = \int_{B_2 - B(\xi,\delta)} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy \quad , \quad \text{où} \quad \xi = \frac{x+\bar{x}}{2} \, , \; \delta = |x-\bar{x}| \quad ,$$

$$I_4 = \int_{B(\xi,\delta)} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\,(f(x)-f(y))dy \quad ,$$

$$I_5 = \int_{B(\xi,\delta)} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy \quad ,$$

$$I_6 = \int_{B_2 - B(\xi,\delta)} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y)\right)(f(\bar{x})-f(y))dy \quad .$$

<u>Estimation de I_1</u> . En utilisant le théorème des accroissements finis

$$|I_1| \le \int_{\partial B_2} |x-\bar{x}|\,|(D(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i})(\hat{x}-y)|d\sigma_y \quad \text{où} \quad \hat{x} \quad \text{est sur le segment } [x,\bar{x}] .$$

Comme $\hat{x} \in B_1$, $|\hat{x}-y| \ge R$ pour tout $y \in \partial B_2$ et $|D(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i})(\hat{x}-y)| \le \frac{N}{\omega_N R^N}$,

d'où $|I_1| \le \frac{N}{\omega_N R^N}|x-\bar{x}|\int_{\partial B_2} d\sigma_y = 2^{N-1} N \frac{|x-\bar{x}|}{R} \le 2^{N-\alpha}\, N(\frac{|x-\bar{x}|}{R})^{\alpha}$.

<u>Estimation de I_2</u> . $|I_2| \le \int_{\partial B_2} \frac{d\sigma_y}{N\,\omega_N |\bar{x}-y|^{N-1}} \le 2^{N-1}$.

<u>Estimation de I_3</u> . En intégrant par parties on a

$$|I_3| = \left|\int_{\partial(B_2 - B(\xi,\delta))} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y\right| \le \int_{\partial B_2} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\right|d\sigma_y + \int_{\partial B(\xi,\delta)} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\right|d\sigma_y \quad ,$$

$$|I_3| \le \int_{\partial B_2} \frac{d\sigma_y}{N\,\omega_N |x-y|^{N-1}} + \int_{\partial B(\xi,\delta)} \frac{d\sigma_y}{N\,\omega_N |x-y|^{N-1}} \quad ,$$

$$|I_3| \leq 2^{N-1} + \frac{2^{N-1}}{N\,\omega_N\,\delta^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\delta)} d\sigma_y = 2^N .$$

Estimation de I_4 . $|I_4| \leq \int_{B(\xi,\delta)} \frac{1}{N\,\omega_N |x-y|^N} |f(x)-f(y)|dy$. Or

$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{\alpha}[f]_{\alpha,B_2}$ d'où

$$|I_4| \leq \frac{1}{N\omega_N}[f]_{\alpha,B_2} \int_{B(\xi,\delta)} |x-y|^{\alpha-N} dy$$. Mais $B(\xi,\delta) \subset B(x,\frac{3\delta}{2})$,

d'où $$|I_4| \leq \frac{1}{N\omega_N}[f]_{\alpha,B_2} \int_{B(x,\frac{3\delta}{2})} |x-y|^{\alpha-N} dy = \frac{3^{\alpha}}{\alpha N 2^{\alpha}} |x-\bar{x}|^{\alpha} [f]_{\alpha,B_2} .$$

Estimation de I_5 . $|I_5| \leq \frac{3^{\alpha}}{\alpha N 2^{\alpha}} |x-\bar{x}|^{\alpha} [f]_{\alpha,B_2}$ comme pour I_4 .

Estimation de I_6 . Par le théorème des accroissements finis

$$|I_6| \leq |x-\bar{x}| \int_{B_2-B(\xi,\delta)} \left|D\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)(\hat{x}-y)\right| |f(\bar{x})-f(y)|dy$$

où $\hat{x} \in [x,\bar{x}]$. Or $\left|D\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)(\hat{x}-y)\right| \leq \frac{C}{|\hat{x}-y|^{N+1}}$ d'où

$$|I_6| \leq C\delta \int_{|y-\xi|\geq\delta} \frac{|f(\bar{x})-f(y)|}{|\hat{x}-y|^{N+1}} dy$$ puisque $B_2-B(\xi,\delta) \subset \{y : |y-\xi| \geq \delta\}$.

En outre si $|y-\xi| \geq \delta$, $|\bar{x}-y| \leq |\bar{x}-\xi| + |\xi-y| = \frac{\delta}{2} + |\xi-y| \leq \frac{3}{2}|\xi-y|$ et
$|\xi-y| \leq |\xi-\hat{x}| + |\hat{x}-y| = |\hat{x}-y| + \frac{1}{2}\delta \leq |\hat{x}-y| + \frac{1}{2}|y-\xi|$ d'où $|\xi-y| \leq 2|\hat{x}-y|$.
Par suite

$$(6.14) \qquad |I_6| \leq C\delta[f]_{\alpha,B_2} \int_{|y-\xi|\geq\delta} \frac{|\bar{x}-y|^{\alpha}}{|\hat{x}-y|^{N+1}} dy ,$$

d'où $|I_6| \leq C\delta(\frac{3}{2})^\alpha \; 2^{N+1} \int_{|y-\xi|\geq\delta} |\xi-y|^{\alpha-N-1} \, dy$.

Comme $\int_{|y-\xi|\geq\delta} |\xi-y|^{\alpha-N-1} \, dy = \frac{N\omega_N}{1-\alpha} \delta^{\alpha-1}$, nous en déduisons

$$(6.15) \qquad |I_6| \leq C'|x-y|^\alpha \, [f]_{\alpha,B_2} \; .$$

Pour achever l'estimation de $[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}]_{\alpha,B_1}$ nous avons

$$(6.16) \qquad \begin{aligned} |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)| \leq C_1 (\frac{|x-\bar{x}|}{R})^\alpha \sup_{B_1}|f| + 2^{N+1}|x-\bar{x}|^\alpha [f]_{\alpha,B_2} + \ldots \\ \ldots + C_2|x-\bar{x}|^\alpha \, [f]_{\alpha,B_2} \; , \end{aligned}$$

où $C_1 = 2^{N-\alpha} N$ et $C_2 = \frac{3^\alpha \; 2^{1-\alpha}}{\alpha \; N} + C'$, d'où

$$(6.17) \qquad R^\alpha [\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}]_{\alpha,B_1} \leq C_1 \sup_{B_1}|f| + (2^{N+1} + C_2) R^\alpha [f]_{\alpha,B_2} \; ,$$

d'où (6.10).

Nous avons aussi le résultat suivant de régularité au bord

LEMME 6.1. <u>Soient $B_1^+ = B(x_o,R) \cap \mathbb{R}^{N+}$, $B_2^+ = B(x_o,2R) \cap \mathbb{R}^{N+}$ où x_o est sur l'hyperplan $\{x : x_N = 0\}$ et soit $f \in C^\alpha(\overline{B}_2^+)$, $0 < \alpha < 1$. Si u est le potentiel newtonien de f dans $\overline{B}_2^+$, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$ et il existe une constante C ne dépendant que de α et N telle que</u>

$$(6.18) \qquad \sup_{\overline{B}_1^+} |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}| + R^\alpha [\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}]_{\alpha,\overline{B}_1^+} \leq C(\sup_{\overline{B}_2^+}|f| + R^\alpha [f]_{\alpha,\overline{B}_2^+}) \; ,$$

<u>pour tout $1 \leq i,j \leq N$</u> .

Démonstration. Commençons par supposer $2 \leq i+j < 2N$ et par exemple $j < N$. En utilisant (6.7) on a pour tout $x \in \overline{B}_1^+$

$$(6.19) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{B_2^+} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial B_2^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y$$

(on peut remarquer que cette formule a un sens puisque $\nu_j(y)=0$ et donc $\int_{\partial B_2^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y = \int_{\partial B_2^+ \cap \{x : x_N > 0\}} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\nu_j(y)d\sigma_y)$. En utilisant (6.11) et (6.12) on a, comme dans la démonstration précédente,

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{N\omega_N}[f]_{\alpha,B_2^+} \int_{B_2^+} |x-y|^{\alpha-N}dy + \frac{R^{1-N}}{N\omega_N}|f(x)| \int_{\partial B_2^+} d\sigma_y \quad ,$$

c'est-à-dire

$$(6.20) \qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \frac{2^{\alpha-1}R^\alpha}{N\alpha}[f]_{\alpha,B_2^+} + 2^{N-2}\,|f(x)| \quad .$$

Soit maintenant $\overline{x} \in \overline{B}_1^+$. On a comme précédemment

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f(x) I_1^+ + (f(x)-f(\overline{x}))(I_2^+ + I_3^+) + I_4^+ + I_5^+ + I_6^+$$

avec

$$I_1^+ = \int_{\partial B_2^+} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(\overline{x}-y)\right)\nu_j(y)d\sigma_y \quad ,$$

$$I_2^+ = \int_{\partial B_2^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(\overline{x}-y)\nu_j(y)d\sigma_y \quad ,$$

$$I_3^+ = \int_{B_2^+ - B^+(\xi,\delta)} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy \ , \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{x+\overline{x}}{2} \ , \ \delta = |x-\overline{x}| \quad \text{et}$$

$$B^+(\xi,\delta) = B(\xi,\delta) \cap \mathbb{R}^{N+} ,$$

$$I_4^+ = \int_{B^+(\xi,\delta)} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\ (f(x)-f(y))dy ,$$

$$I_5^+ = \int_{B^+(\xi,\delta)} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy ,$$

$$I_6^+ = \int_{B_2^+ - B^+(\xi,\delta)} \left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y)\right)(f(\bar{x})-f(y))dy .$$

L'estimation des termes I_1^+, I_3^+, ..., I_6^+ se fait comme la Proposition 6.2. Pour le terme I_2^+ on a vu que $\displaystyle\int_{\partial B_2^+ \cap \{x:x_N=0\}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(\bar{x}-y)\nu_j(y)d\sigma_y = 0$; quant au terme $\displaystyle\int_{\partial B_2^+ \cap \{x:x_N>0\}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}-y)\nu_j(y)d\sigma_y$ il s'estime comme le terme I_2 de la démonstration précédente. On obtient donc (6.18) pour $2 \le i+j < N$.

1ère étape. On achève la démonstration en remarquant que u vérifie

$$(6.21) \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \qquad , \qquad \forall\, x \in B_2^+ .$$

Par suite $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$. En utilisant la 1ère étape on en déduit (6.18) pour $i = j = N$.

Comme conséquence de la Proposition 6.2 nous avons

COROLLAIRE 6.1. Soit $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ à support compact et soit $x_o \in \mathbb{R}^N$. Pour $0 < \alpha < 1$, il existe des constantes $C_1 = C_1(N)$, $C_2 = C_2(N)$ et $C_3 = C_3(N,\alpha)$ telles que pour tout R tels que supp.u soit inclu dans $B(x_o,R)$ on ait

$$
(6.22)\begin{cases}
\text{(i)} \quad \sup\limits_{\mathbb{R}^N} |u| \le C_1 R^2 \sup\limits_{\mathbb{R}^N} |f| \quad , \\[2ex]
\text{(ii)} \quad \sup\limits_{\mathbb{R}^N} |Du| \le C_2 R \sup\limits_{\mathbb{R}^N} |f| \quad , \\[2ex]
\text{(iii)} \quad \sup\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| + R^\alpha \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]_\alpha \le C_3 (\sup\limits_{\mathbb{R}^N} |f| + R^\alpha [f]_\alpha) \quad .
\end{cases}
$$

Démonstration. D'après le Lemme 5.3 u est le potentiel newtonien de f. Si on pose $B = B(x_o,R)$, alors $u(x) = \int_B \Gamma(x-y)f(y)dy$.

Si $|x-x_o| \ge 2R$, $|\Gamma(x-y)| \le \dfrac{1}{N(N-2)\omega_N R^{N-2}}$ et on a

$|u(x)| \le \sup\limits_{\mathbb{R}^N} |f| \dfrac{R^2}{N(N-2)}$.

Si $|x-x_o| \le 2R$, $B \subset B(x,3R)$ et $|u(x)| \le \sup\limits_{\mathbb{R}^N}|f| \int_{B(x,3R)} \dfrac{dy}{N(N-2)\omega_N |x-y|^{N-2}}$

d'où $|u(x)| \le \sup\limits_{\mathbb{R}^N}|f| \dfrac{9R^2}{2N(N-2)}$, d'où (i).

On démontre (ii) de la même façon. Pour démontrer (iii) on applique la Proposition 6.2 avec $B_1 = B(x_o,R)$ et $B_2 = B(x_o,2R)$.

6.3. Estimations $C^{2,\alpha}$ globales

Nous considérons dans cette section l'équation (6.1) en faisant sur les coefficients les hypothèses suivantes

(6.23) $\quad a_{ij}, b_i$ et $c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ et $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\forall 1 \le i,j \le N$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

(6.24) $\quad \sum\limits_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda \sum\limits_i \xi_i^2$, $\lambda > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\forall \xi = (\xi_1,\dots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

LEMME 6.2. $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ est une algèbre normée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. (Ce résultat est à comparer aux algèbres de Schauder $W^{m,p}(\Omega)$, $mp > N$) . Il est évident que $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour la multiplication soient f , $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$

$$[fg]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)g(x)-f(y)g(y)|}{|x-y|^{\alpha}} ,$$

$$[fg]_{\alpha,\Omega} \leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left(|f(x)| \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + |g(y)| \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\right) , \text{ d'où}$$

$$(6.25) \qquad [fg]_{\alpha,\Omega} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} [g]_{\alpha,\Omega} + \|g\|_{L^{\infty}(\Omega)} [f]_{\alpha,\Omega} ,$$

qui implique

$$(6.26) \qquad \|fg\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|g\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} .$$

Notre deuxième lemme est un résultat d'interpolation à comparer au Corollaire 1.1

LEMME 6.3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ on ait l'estimation

$$(6.27) \qquad \|u\|_{C^{2}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C(\varepsilon) \sup_{\Omega} |u| .$$

Démonstration. 1ère étape : l'injection de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^{2}(\overline{\Omega})$ est compacte. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée dans $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire que $\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K$ pour K indépendant de n . Par suite

$$(6.28)\begin{cases}
\text{(i)}\ |u_n(x)| + \sum_i \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| + \sum_{i,j}\left|\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right| \leq K\ ,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}\ , \\
\text{(ii)}\ |u_n(x)-u_n(y)| \leq K|x-y|\ ,\ \forall\, x,y \in \overline{\Omega}\ , \\
\text{(iii)}\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(y)\right| \leq K|x-y|\ ,\ \forall\, x,y \in \overline{\Omega}\ ,\ \forall\, 1 \leq i \leq N\ , \\
\text{(iv)}\ \left|\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\partial x_j}(x) - \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\partial x_j}(y)\right| \leq K|x-y|^\alpha\ ,\ \forall\, x,y \in \overline{\Omega}\ ,\ \forall 1 \leq i,j \leq N\ .
\end{cases}$$

On déduit de (i) et (ii) que la suite $\{u_n\}$ est équicontinue et bornée dans $C(\overline{\Omega})$, par suite elle est relativement compacte dans $C(\overline{\Omega})$ (théorème d'Ascoli) et il existe $\{u_{n_k}\}$ et $v \in C(\overline{\Omega})$ tels que $\{u_{n_k}\}$ converge vers v dans $C(\overline{\Omega})$. Par (iii) $\{\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\}$ est équicontinue dans $C(\overline{\Omega})$ et par (i) $\{\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\}$ est relativement compacte dans $C(\overline{\Omega})$. Quitte à extraire une sous-suite $\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}$ converge vers v_i dans $C(\overline{\Omega})$ et $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $\overline{\Omega}$. On procède de même avec les dérivées secondes en utilisant (iv).

<u>2ème étape</u> : <u>démonstration de (6.27)</u>. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tel que

$$(6.29)\qquad \|u_n\|_{C^2(\overline{\Omega})} \geq \varepsilon\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + n \sup_\Omega |u_n|\ .$$

Nous pouvons normaliser en supposant $\|u_n\|_{C^2(\overline{\Omega})} = 1$ et par suite

$$(6.30)\qquad \|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \frac{1}{\varepsilon}\ .$$

Par compacité il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ et $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tels que $\{u_{n_k}\}$ converge vers u dans $C^2(\overline{\Omega})$. De toute évidence $\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} = 1$ et par suite $\sup_\Omega |u| \leq \frac{1}{n}$ d'où $u = 0$, contradiction.

La démonstration des théorèmes de Schauder se fait en deux étapes comme dans la théorie de Calderon et Zygmund : estimations dans une boule et estimations dans une demi-boule.

LEMME 6.4. Supposons que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient (6.23) et (6.24) avec $0 < \alpha < 1$. Il existe alors des constantes $R_0 > 0$, C_1, $C_2 > 0$ ne dépendant que de λ, N et de la norme des coefficients a_{ij}, b_i et c dans $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ telles que pour tout $R_0/2 \leq R \leq R_0$, toute boule ouverte $B_R \subset \Omega$, tout $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ et tout $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ à support compact dans B_R solution de (6.1) on ait

$$(6.31) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_R)} \leq C_1 \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_R)} + C_2 \sup_{B_R}|u| \quad .$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Lemme 5.6. On suppose la boule B_R centrée en 0 et on a

$$(6.32) \qquad \sum_{i,j} a_{ij}(0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j}(a_{ij}(0)-a_{ij}(x))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} -(x)u-f(x)$$

Comme $A(0) = [a_{ij}(0)]$ est une matrice symétrique, il existe une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^N$ φ, de matrice B, telle que

$$(6.33) \qquad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = B\,A(0)\,{}^tB \ ,$$

et, si on pose $y = \varphi(x)$ et $\tilde{u}(y) = \tilde{u}\circ\varphi(x) = u(x)$, (6.32) devient

$$(6.34) \qquad \sum_k \lambda_k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k^2} = \sum_{k,l}(\delta_{k,l}\lambda_k - a'_{k,l}(y))\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_k b'_k(y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} - \tilde{c}(y)\tilde{u}+\tilde{f}(y) \ ,$$

avec $a'_{k,l}(y) = \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi^{-1}(y))\frac{\partial k_l}{\partial x_i}\,\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$, $b'_k(y) = \sum_i b_i(\varphi^{-1}(y))\,\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$,

$\tilde{c}(y) = c \circ \varphi^{-1}(y)$, $\tilde{f}(y) = f \circ \varphi^{-1}(y)$. En posant $z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} y_k$, $1 \leq k \leq N$

$z = (z_1, \dots, z_N)$ et $v(z) = \tilde{u}(y)$, l'équation (6.34) devient

$$(6.35) \qquad \sum_k \frac{\partial^2 v}{\partial z_k^2} = f'(z) ,$$

dans l'ellipsoïde $B'_R = \{z : \sum_k \lambda_k z_k^2 < R^2\}$, avec

$$(6.36) \qquad f'(z) = \sum_{k,l} (\delta_{k,l} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{k,l}(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l} - \sum_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} b''_k(z) \frac{\partial v}{\partial z_k} - c'(z) v + \tilde{f}'(z) ,$$

où $a''_{k,l}(z) = a'_{k,l}(y)$, $b''_k(z) = a'_k(y)$, $\tilde{c}'(z) = \tilde{c}(y)$ et $\tilde{f}'(z) = \tilde{f}(y)$.
Comme $B'_R \subset B_{R/\sqrt{\lambda}}$ on peut appliquer la Proposition 6.1 et on a

$$(6.37) \qquad \sup_{B'_R} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right| + R^\alpha \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right]_{\alpha, B'_R} \leq C(\sup_{B'_R} |f'| + R^\alpha [f']_{\alpha, B'_R}) \quad ,$$

pour tous $1 \leq k,l \leq N$ .. Par suite

$$(6.38) \qquad \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} + R^\alpha \sum_{k,l} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right]_{\alpha, B'_R} \leq C \sup_{B'_R} |f'| + C R^\alpha [f']_{\alpha, B'_R} + \|v\|_{C^1(\overline{B}'_R)}$$

Or on a

$$\sup_{B'_R} |f'| \leq \sup_{k,l} \sup_{B'_R} \left|\delta_{k,l} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{k,l}\right| \sum_{k,l} \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right\|_{L^\infty(B'_R)} + C_1 \|v\|_{C^1(\overline{B}'_R)} + \|\tilde{f}'\|_{L^\infty(B'_R)}$$

et en utilisant (6.25)

$$[f']_{\alpha, B'_R} \leq \sup_{k,l} \sup_{B'_R} \left|\delta_{k,l} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{kl}\right| \sum_{k,l} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right]_{\alpha, B'_R} + [\tilde{f}']_{\alpha, B'_R} + \dots$$

$$\dots + \sup_{k,l} [\delta_{kl} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{kl}]_{\alpha, B'_R} \sum_{k,l} \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\right\|_{L^\infty(B'_R)} + C_2 \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} \quad .$$

Posons $\varepsilon(R) = \sup_{k,l} \sup_{B'_R} |\delta_{k,l} - \frac{1}{\lambda_k} a''_{kl}|$, $\lim_{R\to 0} \varepsilon(R) = 0$ et on déduit de (6.38)

$$(6.39) \begin{cases} \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} + R^\alpha \sum_{k,l} [\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}]_{\alpha,B'_R} \leq C\,\varepsilon(R) \sum_{k,l} \|\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}\|_{L^\infty(B'_R)} + C\|v\|_{C^1(\overline{B}'_R)} \cdots \\ \quad \cdots + CR^\alpha(\varepsilon(R) \sum_{k,l} [\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}]_{\alpha,B'_R} + \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)}) + \cdots \\ \quad \cdots C \max(1,R^\alpha) \|\tilde{f}\|_{C^\alpha(\overline{B}'_R)} \quad , \end{cases}$$

où C ne dépend que de l'opérateur et N . Si nous choisissons $R \leq R_o$ assez petit pour que $C\,\varepsilon(R) < \frac{1}{2}$, $\forall\, 0 < R \leq R_o$, nous déduisons de (6.39)

$$(6.40) \quad \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} + R^\alpha \sum_{k,l} [\frac{\partial^2 v}{\partial z_k \partial z_l}]_{\alpha,B'_R} \leq 2C\|v\|_{C^1(\overline{B}'_R)} + 2C \max(1,R_o^\alpha)\|\tilde{f}\|_{C^\alpha(\overline{B}'_R)} \cdots$$

$$\cdots + 2C\, R^\alpha \|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} \; .$$

Si on choisit $R \geq R_o/2$ on en déduit

$$(6.41) \quad \min(1,\frac{R_o^\alpha}{2^\alpha}) \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}'_R)} \leq 2C \max(1,R_o^\alpha)(\|v\|_{C^2(\overline{B}'_R)} + \|\tilde{f}\|_{C^\alpha(\overline{B}'_R)}) \; .$$

En utilisant le Lemme 6.3 avec $\varepsilon = (\min(1,R_o^\alpha/2^\alpha))/(C\max(1,R_o^\alpha))$, on en déduit

$$(6.42) \quad \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}'_R)} \leq C'_2 \|f\|_{C^\alpha(\overline{B}'_R)} + C'_2 \sup_{B'_R} |v| \; .$$

Comme la transformation $v \mapsto u$ est un isomorphisme de $C^{k,\alpha}(B'_R)$ dans $C^{k,\alpha}(B_R)$ pour tout $0 \leq k \leq 2$, on en déduit (6.31). En outre

C_1 et C_2 ne dépendent pas du centre de B_R mais uniquement de N et des coefficients.

On pose $B_R^+ = \{x=(x_1,\ldots,x_N) : |x| < R , x_N > 0\}$ et on a

LEMME 6.5. Supposons que $\Omega = \mathbb{R}^{N+} = \{x=(x_1,\ldots,x_N):x_N>0\}$ et que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient (6.23) et (6.24) pour un $\alpha \in]0,1[$. Il existe des constantes $R_o' > 0$, C_1, $C_2 > 0$ ne dépendant que de N, λ et de la norme des coefficients dans $C^\alpha(\overline{B}^+_{R_o})$ telles que pour tout $R_o/2 \le R \le R_o$, tout $f \in C^\alpha(\overline{B}_R^+)$ et tout $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_R^+)$ à support compact dans $\overline{B}^+_{R-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, u s'annulant en outre sur $\{x:x_N=0\}$, vérifiant (6.1) dans B_R^+, on ait

$$(6.43) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_R^+)} \le C_1\|f\|_{C^\alpha(\overline{B}_R^+)} + C_2 \sup_{\overline{B}_R^+} |u| .$$

Démonstration. Définissons $B_R^- = \{x=(x_1,\ldots,x_N) : |x| < R , x_N < 0\}$ et $x^* = (x_1,\ldots,x_{N-1}, -x_N)$ pour $x =(x_1,\ldots,x_N)$. Si $x\in B_R^+$, $x^*\in B_R^-$.

$$\text{Posons} \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in B^+(R) , \\ f(x_1,\ldots,x_{N-1}, -x_n) & \text{si} \quad x \in B^-(R) . \end{cases}$$

On a $\|f^*\|_{C^\alpha(B_R)} \le 2\|f\|_{C^\alpha(B_R^+)}$. Comme dans le Lemme 5.7 on utilise les changements de variables $y = \varphi(x)$, $\tilde{u}(y) = u(x)$, $z'_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} y_k$, $1 \le k \le N$, $\tilde{v}(z') = \tilde{u}(y)$ et

$$(6.44) \qquad \sum_k \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial z'^2_k} = \tilde{f}(z') \qquad \text{dans} \quad \tilde{B}_R^+ ,$$

$\tilde{B}_R^+=\{z':\sum_k\lambda_k z'^2_k<R^2, \sum_k\sqrt{\lambda_k}\, \frac{\partial x_N}{\partial y_k}\, z'_k> 0\}$ et $v'=0$ sur $\sum_k \sqrt{\lambda_k}\, \frac{\partial x_N}{\partial y_k}\, z'_k = 0$.
Par un nouveau changement de base orthonormal ψ le bord de $\tilde{B}_R^+$ est amené sur $\{z:z_N=0\}$. Posons $B'^+_R = \psi(\tilde{B}_R^+)$, $z = \psi(z')$, $v(z) = \tilde{v}(z')$ $f'(z) = \tilde{f}(z')$. On obtient alors

$$(6.45)\quad \begin{cases} \sum_k \dfrac{\partial^2 v}{\partial z_k^2} = f' & \text{dans} \quad B'^+_R \ , \\ v = 0 & \text{sur} \quad \{z : z_N = 0\} \ ; \end{cases}$$

en outre v est à support compact dans $\overline{B'^+_{R-\varepsilon}}$. L'idée de la démonstration n'est pas d'utiliser une réflexion comme dans le Lemme 5.7 (la dérivée seconde serait discontinue) mais de donner une représentation de v .

Posons pour cela

$$(6.46)\quad w(z) = \int_{B'^+_R} (\Gamma(z-y)-\Gamma(z^*-y))f'(y)dy \ ;$$

w **s'annule** sur $\{z : z_N = 0\}$. En outre dans $\{z : z_N > 0\}$, on a $\Delta\int_{B'^+_R} \Gamma(z^*-y)f'(y)dy = \int_{B'^+_R} \Delta\Gamma(z^*-y)f'(y)dy=0$. Par suite $\Delta w = f$ dans $\mathbb{R}^{N+}$. Si on étend u par 0 dans $\mathbb{R}^{N+}$, on constate que u et w vérifient la même équation dans $\mathbb{R}^{N+}$ et s'annulent sur $z_N = 0$, d'où $v = w$. D'un autre côté $|z^*-y|=|z-y^*|$ et $\Gamma(z^*-y)=\Gamma(z-y^*)$ d'où

$$\begin{aligned} \int_{B'^+_R} \Gamma(z^*-y)f'(y)dy &= \int_{B'^+_R} \Gamma(z-y^*)f'(y)dy \ , \\ &= \int_{B'^-_R} \Gamma(z-y)f'^*(y)\,dy \ . \end{aligned}$$

où B'^-_R est obtenu par réflexion sur $z_N = 0$ à partir de B'^+_R . Si on pose $B'_R = B'^-_R \cup B'^+_R$, comme $\int_{B'^+_R} \Gamma(z-y)f'(y)dy+\int_{B'^-_R} \Gamma(z-y)f'^*(y)dy) = \dots$ $\dots \int_{B'_R} \Gamma(z-y)f'^*(y)dy$, on en déduit

$$(6.47)\quad v(z) = 2\int_{B'^+_R} \Gamma(z-y)f'(y)dy - \int_{B'_R} \Gamma(z-y)f'^*(y)dy \ .$$

En utilisant la Proposition 6.1 et le Lemme 6.1, on obtient

$$(6.48) \qquad \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}'_R)} \leq C\|f'\|_{C^{\alpha}(\overline{B}'_{2R})} .$$

En replaçant f' par sa valeur et en utilisant le Lemme 6.3 ; puis en revenant aux variables initiales on en déduit (6.43).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les estimations de Schauder globales

THEOREME 6.1. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de (6.1) avec $\varphi = 0$. On suppose que $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ et que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient (6.23) et (6.24). Alors $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et on a l'estimation

$$(6.49) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} + C_2 \sup_{\Omega}|u| ,$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de Ω et des coefficients a_{ij}, b_i et c. En outre $C_2 = 0$ si $c \leq 0$.

Démonstration. Elle est très proche de celle du Théorème 5.5 aussi ne ferons nous que l'esquisser. On considère une partition de l'unité $(\zeta_k)_{k=1}^{M}$ où $\zeta_k \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp} \zeta_k \subset B(x_k , R)$ et

$$(6.50) \qquad \sum_{k=1}^{M} \zeta_k(x) = 1 , \quad \forall x \in \overline{\Omega} .$$

En outre on peut avoir $R_0/4 \leq R \leq R_0/2$. On pose $u_k(x) = \zeta_k(x)\, u(x)$ et on a dans $B(x_k , R)$

$$(6.51) \qquad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + c(x)u_k = f_k(x) ,$$

avec $f_k = \zeta_k f - \sum_{i,j} a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \sum_i b_i\, u \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}$, Premier cas : $B(x_k, R) \subset \Omega$. Comme f_k et u_k sont à support compact dans $B(x_k, R)$ on a d'après le Lemme 6.4, en notant $B_k = B(x_k, R)$

$$(6.52) \qquad \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_k)} \leq C_k \|f_k\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_k)} + C'_k \sup_{B_k} |u_k|$$

Deuxième cas : $B(x_k, R) \cap \partial\Omega \neq \{\emptyset\}$. On peut supposer $x_k \in \partial\Omega$ et soit φ_k un difféomorphisme de classe $C^{2,\alpha}$ de $B(x_k, R)$ dans $\mathbb{R}^N$ tel que $\varphi_k(x_k) = 0$ et $\varphi_k(\Omega \cap B(x_k, R)) = B_k^+ = B(0, R) \cap \mathbb{R}^{N+}$. On pose $v(y) = u_k(x) = v(\varphi_k(x))$. On a dans B_k^+

$$(6.53) \qquad \sum_{l,h} \tilde{a}_{l,h}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_h} + \sum_{l} \tilde{b}_l(y) \frac{\partial v}{\partial y_l} + \tilde{c}(y)\, v = \tilde{f}(y) \quad ,$$

avec $\tilde{a}_{l,h}(y) = \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j}$, $\tilde{c}(y) = c(\varphi(x))$, $\tilde{f}(y) = f_k(\varphi(x))$

et $\tilde{b}_l(y) = \sum_{i} b_i(\varphi(x)) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}$. Les fonctions $\tilde{a}_{l,h}$, $\tilde{b}_l$, $\tilde{c}$ et $\tilde{f}$ vérifient (6.23) et en outre pour $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ on a

$\sum_{l,h} \tilde{a}_{l,h} \xi_l \xi_h = \sum_{l,h,i,j} a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \xi_l \xi_h = \sum_{i,j} a_{ij} \left(\sum_{l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \xi_l\right)\left(\sum_{h} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \xi_h\right)$, d'où

$$(6.54) \qquad \sum_{l,h} \tilde{a}_{l,h} \xi_l \xi_h \geq \lambda \sum_{i} \Big(\sum_{l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i} \xi_l\Big)^2 \geq \lambda\, \alpha \sum_{l} \xi_l^2 \quad ,$$

où $\alpha > 0$. Par suite (6.24) est vérifié. Comme v et $\tilde{f}$ sont à support dans B_k^+ , on déduit du Lemme 6.5

$$(6.55) \qquad \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_k^+)} \leq C_k \|\tilde{f}\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_k^+)} + C'_k \sup_{B_k^+} |v| \quad .$$

On revient à u_k par φ^{-1} et on a (6.52), d'où (6.49).

Si $c \leq 0$, on déduit du Théorème 2.1

$$(6.56) \qquad \sup_{\Omega} |u| \leq C \sup_{\Omega} |f| ,$$

ce qui termine la démonstration.

Dans le cas où u ne s'annule pas sur $\partial\Omega$ on utilise le résultat de relèvement suivant

PROPOSITION 6.2. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\partial\Omega$ de classe $C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$ et Ω' un ouvert qui contient $\overline{\Omega}$. Alors

(i) pour tout $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ il existe $\phi \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ tel que

$v|_{\Omega} = u$ et

$$(6.57) \qquad \|v\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C(\Omega) \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} ,$$

(ii) pour tout $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ il existe $\epsilon \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ tel que

$\phi|_{\partial\Omega} = \varphi$ et

$$(6.58) \qquad \|\phi\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C(\Omega) \|\varphi\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} .$$

Démonstration. Nous commençons par la construction de l'opérateur de prolongement en (i). Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et ψ un difféomorphisme de classe $C^{k,\alpha}$ de la boule $B(x_0,R)$ sur $B(0,R)$ tel que $\psi(B(x_0,R) \cap \Omega) = \ldots$ $\ldots B(0,R) \cap \mathbb{R}^{N+} = B^+(0,R)$. Si u est à support compact dans $B(x_0,R) \cap \overline{\Omega}$ nous posons $\tilde{u}(y) = u \circ \psi^{-1}(y)$ $y=(y_1,\ldots,y_{N-1}, y_N)=(y', y_N)$ et nous définissons le prolongement local de $\tilde{u}$ par

$$(6.59)\qquad \tilde{v}(y',y_N) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i\ \tilde{u}(y', -y_N/i) \quad , \quad y_N < 0 \ .$$

Le choix de constantes c_i est tel que $\frac{\partial^m \tilde{v}}{\partial y_N^m}(y',0) = \frac{\partial^m \tilde{u}}{\partial y_N^m}(y',0)$ pour $0 \leq m \leq k$. On obtient alors le système

$$(6.60)\qquad \sum_{i=1}^{k+1} c_i(-1/i)^m = 1 \ , \quad \forall\ 0 \leq m \leq k$$

qui est un système de Cramer. En outre

$$(6.61)\qquad \|\tilde{v}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{B}(0,R))} \leq C\ \|\tilde{u}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{B}^+(0,R))} \ .$$

Si on pose $v(x) = \tilde{v} \circ \psi(x)$, v prolonge u dans $B(x_o\ , R)$.

<u>Démonstration de (i)</u>. Pour tout point $x_k \in \partial\Omega$ il existe une boule $B(x_k, R_k)$ et un difféomorphisme ψ_k de classe $C^{k,\alpha}$ qui applique $B(x_k, R_k)$ dans $B(0, R_k)$ et $B(x_k, R_k) \cap \Omega$ dans $B(0, R_k) \cap \mathbb{R}^{N+}$. On peut en outre supposer que $R_k < \mathrm{dist}(\Omega, \partial\Omega')$. Par compacité $\partial\Omega$ est recouvert par un nombre fini de telles boules $(1 \leq k \leq M)$ et on pose $\Omega_o = \Omega - \bigcup_{k=1}^{M} (B(x_k,R_k) \cap \Omega)$. On considère alors une partition C^∞ de l'unité, c'est-à-dire $M+1$ fonctions ζ_k telles que $0 \leq \zeta_k \leq 1$, supp. $\zeta_k \subset B(x_k,R_k)$, $\forall\ 1 \leq k \leq M$, $\mathrm{supp}(\zeta_o) \subset \Omega_o$ et

$$(6.62)\qquad \sum_{k=0}^{M} \zeta_k(x) = 1 \quad , \quad \forall\ x \in \overline{\Omega} \ .$$

Si $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u_k = \zeta_k\, u$ est à support compact dans $B(x_k,R_k) \cap \overline{\Omega}$ et peut être prolongé par v_k dans $B(x_k,R_k)$ et v_k est à support dans $B(x_k,R_k)$. On pose alors

$$(6.63) \qquad v = u\,\zeta_o + \sum_{k=1}^{M} v_k\,\zeta_k \ ,$$

(en supposant $v_k = 0$ si $\zeta_k = 0$) . v prolonge u à Ω' , est à support compact dans Ω' et on a (6.57).

Démonstration de (ii). On utilise le recouvrement de $\partial\Omega$ par les $B(x_k, R_k)$ et les difféomorphismes ψ_k et on définit localement le relèvement de φ par

$$(6.64) \qquad \Phi_k(y',y_N) = \zeta_k \circ \psi_k^{-1}(y',0)\ \varphi \circ \psi_k^{-1}(y',0) \ ,$$

pour $(y',y_N) \in B(0,R)$. Si $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, $\phi_k \in C^{k,\alpha}(B(0,R))$. On définit le prolongement de φ par

$$(6.65) \qquad \phi = \sum_{k=1}^{M} \zeta_k\, \phi_k \circ \psi_k \ ,$$

et ϕ vérifie (ii) et (6.58).

REMARQUE 6.1. Compte tenu de la Proposition 6.2 l'estimation de Schauder pour la solution du problème de Dirichlet inhomogène (6.1) devient

$$(6.66) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C_1\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} + C_2 \sup_{\Omega}|u| + C_3\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \ .$$

6.4. Estimations $C^{2,\alpha}$ à l'intérieur

Soient $x, y \in \Omega$ on pose

$$(6.67) \qquad d(x)=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega),\ d(y)=\mathrm{dist}(y,\partial\Omega),\ d(x,y)=\min(d(x),d(y)) \ .$$

Pour étudier la régularité de solutions de (6.1) à l'intérieur de Ω sans qu'on ait connaissance de leur comportement au bord on est amené à introduire des normes holdériennes pondérées.

DEFINITION 6.1. Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ on définit

(6.68) $$\|u\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega |u| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} d^\alpha(x,y) \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} ,$$

(6.69) $$\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \sum_i \left(\sup_\Omega d(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} d^{1+\alpha}(x,y) \frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|}{|x-y|^\alpha}\right),$$

(6.70) $$\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} + \sum_{i,j} \left(\sup_\Omega d^2(x) \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} d^{2+\alpha}(x,y) \frac{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)\right|}{|x-y|^\alpha}\right) .$$

Pour $\alpha = 0$ on notera $\|\cdot\|^*_{C^0(\overline{\Omega})}$, $\|\cdot\|^*_{C^1(\overline{\Omega})}$ et $\|\cdot\|^*_{C^2(\overline{\Omega})}$. On a le résultat d'interpolation suivant :

LEMME 6.6. Supposons Ω borné, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in]0, 1]$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout u tel que $\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\Omega)} < \infty$ on ait

(6.71) $$\|u\|^*_{C^2(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \sup_\Omega |u| .$$

Démonstration. Soit $x \in \Omega$, posons $d = \mu\, d(x)$ où $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ sera précisé ultérieurement. On pose $B = B(x,d)$ et soient x' et x'' les intersections de ∂B avec la droite passant par x parallèle à l'axe x_j. Par le théorème des accroissements finis il existe $\overline{x} \in [x', x'']$ tel que

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\right| = \frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x'')\right|}{2d} \leq \frac{1}{d} \sup_B |Du| \quad .$$

Par suite $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right|$ d'où

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{d} \sup|Du| + d^\alpha \sup_{\substack{z,y\in B\\ z\neq y}} \frac{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right|}{|y-z|^\alpha}$$ puisque

$|y-z| \leq d$, d'où

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{d}\left(\sup_{y\in B} \frac{1}{d(y)}\right)\left(\sup_{y\in B} d(y)|Du(y)|\right) + \ldots$$

$$\ldots + d^\alpha\left(\sup_{y,z\in B} \frac{1}{d^{2+\alpha}(y,z)}\right)\left(\sup_{\substack{y,z\in B\\ y\neq z}} d^{2+\alpha}(y,z)\frac{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(z)\right|}{|y-z|^\alpha}\right).$$

Or $d = \mu d(x)$ et $\min(d(y),d(y,z)) \geq \frac{1}{2} d(x)$, $\forall$ y, z $\in$ B d'où

$$d^2(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq 2\mu\|u\|^*_{C^1(\bar{\Omega})} + \mu^\alpha 2^{2+\alpha}\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \quad .$$

On choisit alors μ assez petit de sorte que $C\mu^\alpha = \varepsilon$ et on a

$$(6.72) \qquad \|u\|^*_{C^2(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} + C_\varepsilon\|u\|^*_{C^1(\bar{\Omega})} \quad .$$

De la même façon on a

$$(6.73) \qquad \|u\|^*_{C^1(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon\|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} + C_\varepsilon \sup_\Omega |u| \quad ,$$

d'où (6.71).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer les estimations intérieures de Schauder.

THEOREME 6.2. Soient $\overline{\Omega}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^{\alpha}_{*}(\overline{\Omega})$ et $u \in C^2_{*}(\overline{\Omega})$ une solution de (6.1) dans Ω. On suppose que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient (6.23) et (6.24). Alors u est de classe $C^{2,\alpha}$ dans Ω et il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de Ω et des coefficients a_{ij}, b_i et c telles que

$$(6.74) \qquad \|u\|^{*}_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|f\|^{*}_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} + C_2 \sup_{\Omega} |u| .$$

Démonstration. Définissons

$$(6.75) \qquad M(u) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} d^{2+\alpha}(x,y) \sum_{i,j} \frac{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}}$$

et soient $x, y \in \Omega$ tels

$$(6.76) \qquad \frac{1}{2} M(u) \leq d^{2+\alpha}(x,y) \sum_{i,j} \frac{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}}$$

1er cas : $|x-y| \geq \frac{1}{4} d(x,y)$. On a alors

$$\frac{1}{2} M(u) \leq 4^{\alpha} d^2(x,y) \sum_{i,j} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)\right| .$$

Par suite

$$(6.77) \qquad M(u) \leq 16 \|u\|^{*}_{C^2(\overline{\Omega})} .$$

2ème cas : $|x-y| < \frac{1}{4} d(x,y)$. Sans perdre en généralité supposons $d(x,y) = d(x)$ et soient $B = B(x, \frac{3}{4} d(x))$ et $\zeta \in C_0^\infty(B)$ tels que

$$(6.78) \quad \begin{cases} \zeta = 1 \quad \text{dans} \quad B(x, \frac{d(x)}{2}) \quad , \\ \zeta = 0 \quad \text{dans} \quad B(x, \frac{3}{4} d(x)) - b(x, \frac{d(x)}{2}) \quad , \\ \|D\zeta\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{d(x)} \quad , \quad \|D\zeta\|_{C^\alpha} \leq \frac{C}{d^{1+\alpha}(x)} \quad , \quad \|\zeta\|_{C^\alpha} \leq \frac{C}{d^\alpha(x)} \quad , \\ \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{d^2(x)} \quad , \quad \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{C^\alpha} \leq \frac{C}{d^{2+\alpha}(x)} \quad , \forall\ 1 \leq i,j \leq N \ . \end{cases}$$

Posons alors $v = \zeta u$. La fonction v vérifie dans B

$$(6.79) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)\, v = f'(x) \quad ,$$

avec $f' = f\zeta - \sum_{i,j} a_{ij}(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j}) - \sum_i b_i u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$.

On déduit du Théorème 6.1

$$(6.80) \quad \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B})} \leq C'_1 \ \|f'\|_{C^\alpha(\overline{B})} + C'_2 \sup_B |v| \ .$$

Comme $|x-y| < \frac{1}{4} d(x,y)$, $\zeta(x) = \zeta(y) = 1$ et par suite

$$\sum_{i,j} \frac{|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\zeta u)(x) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\zeta u)(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sum_{i,j} \frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

d'où

$$(6.81) \quad \sum_{i,j} \frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C_1 \|f'\|_{C^\alpha(\overline{B}')} + C'_2 \sup_\Omega |u| \ .$$

D'un autre côté, on a

$$\|f'\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \|f\zeta\|_{C^\alpha(\overline{B})} + \sum_{i,j} \|a_{ij}(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j})\|_{C^\alpha(\overline{B})} + \dots$$

$$\dots + \sum_i \|b_i u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\|_{C^\alpha(\overline{B})} .$$

Or on a

$$\|f\zeta\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \sup_{\substack{z \neq t \\ z,t \in B}} |\zeta(z)| \frac{|f(z)-f(t)|}{|z-t|^\alpha} + \sup_{\substack{z \neq t \\ z,t \in B}} |f(t)| \frac{|\zeta(z)-\zeta(t)|}{|z-t|^\alpha} .$$

Mais dans B $d(z,t) \geq \frac{d(x)}{4}$, par suite

$$\|f\zeta\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \frac{4^\alpha}{d^\alpha(x)} \sup_{\substack{z \neq t \\ z,t \in B}} d^\alpha(z,t) \frac{|f(z)-f(t)|}{|z-t|^\alpha} + \frac{C}{d^\alpha(x)} \sup_B |f| ,$$

d'où

$$(6.82) \qquad \|f\zeta\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \frac{C+4^\alpha}{d^\alpha(x)} \|f\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} .$$

De même

$$(6.83) \qquad \sum_i \|b_i u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \frac{C}{d^{1+\alpha}(x)} \|u\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} ,$$

$$(6.84) \qquad \sum_{i,j} \|a_{ij}(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j})\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq \frac{C}{d^{2+\alpha}(x)} \|u\|^*_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} .$$

Finalement

$$(6.85) \qquad \|f'\|_{C^\alpha(\overline{B})} \leq C(d^{-\alpha}(x)\|f\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + d^{-(2+\alpha)}(x)\ \|u\|^*_{C^2(\overline{\Omega})}) \quad ,$$

où C ne dépend que de ζ , N et des coefficients. En replaçant cette estimation dans (6.81), en multipliant par $d^{2+\alpha}(x)$ on en déduit

$$(6.86) \qquad M(u) \leq C(\|u\|^*_{C^2(\overline{\Omega})} + \|f\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})}) \quad ,$$

et dans tous les cas ((6.77) ou (6.86))

$$(6.87) \qquad \|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C'\ \|u\|^*_{C^2(\overline{\Omega})} + C\ \|f\|^*_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \quad .$$

En utilisant alors (6.71) avec $C'\varepsilon = \frac{1}{2}$ on en déduit (6.74).

COROLLAIRE 6.2. Soient $u \in C^2(\Omega)$ et $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ vérifiant l'équation (6.1) dans Ω . On suppose que les coefficients a_{ij}, b_i et c vérifient (6.23) et (6.24). Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω , il existe une constante C dépendant de Ω' , dist(Ω', $\partial\Omega$) et des coefficients a_{ij}, b_i et c telle que

$$(6.88) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C_1\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + C_2 \sup_{\Omega} |u| \quad .$$

6.5. Théorème de Kellog

Dans cette partie Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, nous posons

$$(6.89) \qquad Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\ u \quad ,$$

et nous lions le problème de Dirichlet pour l'opérateur L au même problème de Dirichlet pour Δ : c'est là le théorème de Kellog.

THEOREME 6.3. <u>Supposons $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, et supposons aussi que les coefficients a_{ij}, b_i et c de L vérifient (6.23) et (6.24) avec $c \leq 0$. Si pour tout $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ l'équation</u>

(6.90) $\Delta u = f$ <u>dans</u> Ω , $u = \varphi$ <u>sur</u> $\partial\Omega$,

<u>a une (unique solution) dans $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, il en est de même de l'équation</u>

(6.91) $Lu = f$ <u>dans</u> Ω , $u = \varphi$ <u>sur</u> $\partial\Omega$.

La démonstration utilise la méthode de continuité prouvée dans le résultat suivant

PROPOSITION 6.3. <u>Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et L_0, L_1 des opérateurs linéaires continus de X dans Y. Pour chaque $t \in [0, 1]$ posons $L_t = (1-t)L_0 + t\, L_1$ et supposons qu'il existe une constante C telle que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in X$</u>

(6.92) $\|x\|_X \leq C \, \|L_t \, x\|_Y$.

<u>Alors L_1 est subjectif (et donc bijectif) si et seulement si L_0 est surjectif</u>.

<u>Démonstration</u>. Il est évident que L_0 et L_1 joue des rôles symétriques. En fait supposons que L_s est surjectif pour un $s \in [0, 1]$ et nous allons montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ L_t est surjectif. Définissons $L_s^{-1} : Y \to X$. Pour $t \in [0, 1]$ et $y \in Y$ l'équation $L_t \, x = y$ équivaut à

(6.92) $L_t(x) = y + (L_s - L_t)(x) = y + (t-s)L_0(x) - (t-s)L_1(x)$

c'est-à-dire

$$(6.93) \qquad x = L_s^{-1}(y) + (t-s)\ L_0^{-1}(L_0-L_1)(x) \ .$$

Définissons T par $T(z) = L_s^{-1}(y) + (t-s)\ L_s^{-1}(L_0-L_1)(z)$. Comme $\|L_s^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(Y,X)} \leq C$, nous en déduisons

$$(6.94) \qquad \|T(z_1)-T(z_2)\|_X \leq (t-s)\ C\|L_0-L_1\|_{\mathcal{L}_c(X,Y)}\ \|z_1-z_2\|_X \ .$$

Par suite si $|t-s| < \delta = [C\|L_0-L_1\|_{\mathcal{L}_c(X,Y)}]^{-1}$, T est une contraction stricte qui admet donc un point fixe. En divisant $[0, 1]$ en intervalles de longueur inférieure à δ on en déduit que L_t est inversible pour tout $t \in [0, 1]$ (ou même pour tout t).

Démonstration du Théorème 6.3. En utilisant le relèvement défini dans la Proposition 6.2 on peut supposer $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour $t \in [0, 1]$ posons $L_t = t\ L + (1-t)\ \Delta$ et considérons la famille d'équations

$$(6.95) \qquad L_t\ u = f \quad \text{dans } \Omega\ , \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\ .$$

$L_0 = \Delta$, $L_1 = L$. En outre si $\lambda = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \text{spec.}[a_{ij}(x)]$ et $\Lambda = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \text{spec.}[a_{ij}(x)]$ et si λ_t et Λ_t sont les mêmes bornes inférieure et supérieure du spectre de la matrice des dérivées secondes de L_t , on a

$$(6.96) \qquad \lambda_t = t\ \lambda + (1-t) \ , \quad \Lambda_t = t\ \Lambda + (1-t) \ ,$$

pour tout $t \in [0, 1]$; donc :

$$(6.97) \qquad \min(1, \lambda) \leq \lambda_t \leq \Lambda_t \leq \max(1, \Lambda) \ .$$

Soient $X = \{v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, $Y = C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Comme les opérateurs L_t sont uniformément elliptiques et $t\,c \leq 0$, on déduit du Théorème 2.1 que

$$(6.98) \qquad \sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\Omega} |f| = \sup_{\Omega} |L_t\, u| \leq \|L_t\, u\|_{C^{\alpha}(\Omega)}$$

Comme les coefficients de L_t sont uniformément holdériens dans Ω , on déduit du Théorème 6.1

$$(6.99) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C_1 \, \|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)} + C_2 \sup_{\Omega} |u| \quad .$$

En combinant (6.98) et (6.99) on en déduit

$$(6.100) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq (C_1 + C_2) \, \|L_t\, u\|_{C^{\alpha}(\Omega)}$$

d'où le théorème en utilisant la Proposition 6.3.

On en déduit le résultat d'existence suivant

COROLLAIRE 6.3. <u>Supposons $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, et que les coefficients a_{ij} , b_i et c vérifient (6.23) et (6.24) avec $c \leq 0$. Alors pour tout $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ et $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ il existe un unique $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ solution de (6.91)</u>.

REMARQUE 6.2. L'hypothèse $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ est excessive pour prouver l'existence d'une solution du problème de Dirichlet (6.91) et les hypothèses naturelles sont de supposer $\varphi \in C^{0}(\partial\Omega)$. Il est alors impossible d'obtenir la solution u dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ mais plutôt dans $C^{0}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$. Par de méthodes fines de <u>Théorie du Potentiel</u> on a le résultat suivant dû à Perron.

<u>Supposons L strictement elliptiques, que les coefficients a_{ij}, b_i et c soient bornés dans $\overline{\Omega}$ et appartiennent à $C^{\alpha}(\Omega)$</u>, <u>$c \leq 0$ et supposons que Ω satisfasse à la condition de la sphère extérieure. Alors pour tout $\varphi \in C^{0}(\partial\Omega)$ et tout $f \in C^{\alpha}(\Omega) \cap L^{p}(\Omega)$</u>, <u>$p > N/2$, l'équation (6.91) admet une unique solution dans $C^{0}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$</u> .

Des résultats encore plus fins de régularité au bord sont dus à Wiener [30] et utilisent la notion de capacité d'un sous-ensemble de R^{N} .