

7. SURFACES A COURBURE MOYENNE DONNEE

Dans ce chapitre nous étudions la régularité des solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne donnée H dans Ω ouvert de \mathbb{R}^N

$$(7.1) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = NH \quad .$$

Lorsque $H = 0$ la surface est dite minimale et on est conduit au problème de Plateau. Le résultat essentiel de régularité générale pour (7.1) est le caractère naturellement lipschitzien des solutions de (7.1). Il est dû à Bombieri, De Giorgi et Miranda.

7.1. Courbures principales , courbure moyenne

Soit \mathcal{E} une hypersurface de \mathbb{R}^{N+1} de classe C^2 , bord un ouvert $\tilde{\Omega}$. Pour $y \in \mathcal{E}$ on appelle $\bar{n}(y)$ le vecteur normal unitaire rentrant en y à \mathcal{E} et $T(y)$ l'hyperplan tangent à \mathcal{E} en y . Par un changement de coordonnées dans \mathbb{R}^{N+1} on peut supposer que pour un $y_0 \in \mathcal{E}$, la direction x_{N+1} est parallèle à $\bar{n}(y_0)$. Il existe alors un voisinage \mathcal{G} de y_0 dans \mathbb{R}^{N+1} et $\varphi \in C^2(\mathcal{G} \cap T(y_0))$ tels que

$$(7.2) \quad \begin{cases} \mathcal{E} \cap \mathcal{G} = \{x=(x', x_{N+1}) : x_{N+1}=\varphi(x'), x' \in T(y_0) \cap \mathcal{G}\} \quad , \\ D\varphi(y'_0) = 0 \quad . \end{cases}$$

Les valeurs propres de la $N-N$ matrice symétrique $\text{Hess } \varphi(y'_0) = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(y'_0) \right]$ sont les courbures principales de \mathcal{E} en y_0 . On les note (K_1, \dots, K_N) . Les vecteurs propres associés forment une base orthogonale de $T(y_0)$ et sont les directions des courbures principales en y_0 . La courbure moyenne en y_0 , notée $H(y_0)$, est définie par

$$(7.3) \quad H(y_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} (y'_0) \quad .$$

Si on choisit pour nouveaux axes de coordonnées les directions des courbures principales en y_0 , ξ_1, \dots, ξ_N , on obtient le système des coordonnées principales en y_0 . Dans ce repère on a alors

$$(7.4) \quad \text{Hers } \varphi(y'_0) = \text{diag}(K_1, \dots, K_N) \quad .$$

Les coordonnées du vecteur $\bar{n}(y)$ en $y \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{G}$ sont données par

$$(7.5) \quad \bar{n}_i(y) = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |D\varphi|^2}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \bar{n}_{N+1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |D\varphi|^2}} \quad .$$

Si on se place dans le système des coordonnées principales on a

$$(7.6) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\bar{n}_j)(y_0) = K_i \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad .$$

Si au lieu de considérer que $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{G}$ est paramétré par φ , on le considère comme l'ensemble des zéros d'une fonction Φ définie dans \mathfrak{G} de classe C^2 et non singulière, c'est-à-dire

$$(7.7) \quad \mathfrak{E} \cap \mathfrak{G} = \{x: \Phi(x)=0\} \quad \text{et} \quad D\Phi \neq 0 \quad \text{dans} \quad \mathfrak{G},$$

un vecteur normal à \mathfrak{E} en y est donné par

$$(7.8) \quad n(y) = (n_1(y), \dots, n_{N+1}(y)) = \frac{D\Phi(y)}{|D\Phi(y)|},$$

(n est orienté selon le sens de croissance de Φ) . Si K_1, \dots, K_N sont les courbures principales de \mathcal{E} en y on montre que dans le système des coordonnées principales (ξ_1, \dots, ξ_N) en y on a

$$(7.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial n_j}{\partial \xi_i}(y) = -K_i \delta_{ij} , & 1 \leq i, j \leq N , \\ \frac{\partial n_{N+1}}{\partial \xi_i}(y) = 0 & , \quad 1 \leq i \leq N+1 . \end{cases}$$

Par suite les valeurs propres de la matrice $[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(y)]$ sont

$(-K_1, \dots, -K_N, 0)$ et la courbure moyenne de \mathcal{E} en y est donnée par

$$(7.10) \quad H(y) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{|D\Phi|} \right) (y) .$$

Dans le cas particulier où \mathcal{E} est le graphe d'une fonction u au dessus de Ω ouvert de \mathbb{R}^N , c'est-à-dire

$$(7.11) \quad \mathcal{E} = \{(x', x_{N+1}) : x_{N+1} = u(x) , x \in \Omega\} ,$$

on applique les résultats précédents à $\Phi(x', x_{N+1}) = x_{N+1} - u(x)$ et on en déduit que la courbure moyenne de \mathcal{E} en $y = (x, u(x))$ est

$$(7.12) \quad H(y) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) (x') .$$

REMARQUE 7.1. L'origine physique des problèmes de surfaces minimales peut être concrétisée de la façon suivante. On prend un fil de fer formant une courbe fermée et gauche de \mathbb{R}^3 et on le trempe dans de l'eau savonneuse. Une fois ressorti, si on a de la chance, il se

forme une bulle de savon qui s'appuie sur le fil de fer. Pour des raisons de tensions superficielles sur cette bulle, en tout point sa courbure moyenne est nulle et on a une surface minimale.

7.2. Opérateurs différentiels et formule de Green sur une hypersurface

Soit \mathfrak{e} un ouvert de \mathbb{R}^{N+1} , Φ une fonction de classe C^2 dans \mathfrak{e} , $D\Phi \neq 0$ dans \mathfrak{e} et $\mathfrak{E} = \{x \in \mathfrak{e} : \Phi(x) = 0\}$. Le vecteur n étant défini en (7.8) on définit pour $g \in C^1(\mathfrak{e})$ le gradient tangentiel de g à \mathfrak{E} par

$$(7.13) \quad \delta g = Dg - (n \cdot Dg) \cdot n \quad ,$$

c'est-à-dire $\delta_i g = \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{N+1} n_i n_j \frac{\partial g}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq N+1$, et

l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur \mathfrak{E} , pour $g \in C^2(\mathfrak{e})$, par

$$(7.14) \quad \Delta g = \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i (\delta_i g) \quad .$$

On peut remarquer que $\delta g(x)$ est la projection de $Dg(x)$ sur l'hyperplan vectoriel tangent à \mathfrak{E} en x , par suite

$$(7.15) \quad n \cdot \delta g = 0 \quad ,$$

$$(7.16) \quad |\delta g|^2 = |Dg|^2 - (n \cdot Dg)^2 \quad .$$

On peut remarquer que si \bar{g} est une fonction de $C^1(\mathfrak{e})$ coïncidant avec g sur \mathfrak{E} (mais pas dans \mathfrak{e}) $D(g-\bar{g})$ n'a pas de composante tangentielle à \mathfrak{E} par suite sa projection $\delta(g-\bar{g})$ sur l'hyperplan tangent à x en \mathfrak{E} est nulle.

On peut aussi remarquer que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_i = \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{|D\Phi|} \right) - \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}}{|D\Phi|^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right\}$$

en utilisant (7.8), d'où, par (7.10) ,

$$\sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_i = - NH - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (|n|^2) \quad , \quad \text{et puisque } |n| = 1 \quad ,$$

$$(7.17) \quad \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_i = - NH \quad ,$$

où H est la courbure moyenne de \mathcal{E} par rapport à n .

Notre premier résultat d'intégration par partie est le suivant

LEMME 7.1. Soit dA l'élément de surface N-dimensionnel sur \mathcal{E} . Alors pour tout $g \in C^1_0(\mathcal{E})$ on a pour tout $1 \leq i \leq N+1$

$$(7.18) \quad \int_{\mathcal{E}} \delta_i g dA = - N \int_{\mathcal{E}} g H n_i dA \quad .$$

Démonstration. Nous établirons (7.18) dans le cas où \mathcal{E} est le graphe d'une fonction u de classe C^2 dans $\Omega : H(x', x_{N+1}) = x_{N+1} - u(x')$. On a alors

$$(7.19) \quad \begin{cases} n_i = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{v} \quad , \quad n_{N+1} = \frac{1}{v} \quad , \\ H = \frac{1}{N} \sum_1^{N+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{v} \right) \quad , \quad v = \sqrt{1 + |Du|^2} \quad , \end{cases}$$

en outre $dA = v dx$. On définit $\tilde{g} \in C^1_0(\mathcal{E})$ en posant

$$\tilde{g}(x', x_{N+1}) = g(x', u(x')) \quad , \quad \forall x' \in \Omega \quad .$$

On a $g = \tilde{g}$ sur \mathcal{E} et par suite $\delta\tilde{g} = \delta g$. D'où pour $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \delta_i g dA &= \int_{\mathcal{E}} \delta_i \tilde{g} dA = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i} - n_i \sum_{j=1}^{N+1} n_j \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j} \right) v dx \\ &= - \int_{\Omega} \tilde{g} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_j v) \right) dx \quad \text{en intégrant par parties.} \end{aligned}$$

Mais $-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_j v) = -\sum_{j=1}^N n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i v) + N v H n_i$ en utilisant (7.19),

d'où $\int_{\mathcal{E}} \delta_i g dA = -N \int_{\Omega} \tilde{g} H n_i v dx - \int_{\Omega} \tilde{g} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^N n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i v) \right) dx$. En utilisant

les relations (7.19) on a

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^N n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i v) = \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\frac{\partial u}{\partial x_j}}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

d'où (7.18).

$$\begin{aligned} \text{Pour } i = N+1 \quad \int_{\mathcal{E}} \delta_{N+1} g dA &= \int_{\mathcal{E}} \delta_{N+1} \tilde{g} dA = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{N+1}} - n_{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} n_j \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j} \right) v dx \\ &= \int_{\Omega} \tilde{g} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (n_j) dx = -N \int_{\mathcal{E}} \tilde{g} H dx, \end{aligned}$$

d'où (7.18).

En utilisant deux fois le Lemme 7.1 on en déduit la formule de Green pour l'opérateur \mathfrak{D} :

LEMME 7.2. Pour tous $g, \varphi \in C_0^2(\mathcal{E})$ on a

$$(7.20) \quad \int_{\mathcal{E}} \varphi \mathfrak{D} g dA = \int_{\mathcal{E}} g \mathfrak{D} \varphi dA = - \int_{\mathcal{E}} \delta g \cdot \delta \varphi dA.$$

7.3. Propriété de moyenne sur une hypersurface

Nous supposons toujours que \mathcal{E} est une hypersurface définie par $\{x \in \mathcal{E} : \Phi(x) = 0\}$

LEMME 7.3. Soient $y \in \mathcal{E}$, $|x-y|=r$, $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{\Phi}(x) = \phi(r)$. Alors

$$(7.21) \quad \Delta \tilde{\Phi}(x) = \frac{N\phi'(r)}{r} + (\phi''(r) - \frac{\phi'(r)}{r}) |\delta r|^2 + \frac{N\phi'(r)}{r} H(x) \cdot n \cdot (x-y) \quad ,$$

où $H(x)$ est la courbure moyenne de \mathcal{E} en x .

Démonstration. On a $\delta_i \tilde{\Phi}(x) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i} - \sum_j n_i n_j \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j}$. Mais $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} = \phi'(r) \frac{x_j - y_j}{r}$,

d'où $\delta_i \tilde{\Phi}(x) = (x_i - y_i - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j)) \frac{\phi'(r)}{r}$. Par suite

$$\delta_i \delta_i \tilde{\Phi}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((x_i - y_i - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j)) \frac{\phi'(r)}{r} \right) \dots$$

$$\dots - \sum_j n_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left((x_i - y_i - \sum_k n_i n_k (x_k - y_k)) \frac{\phi'(r)}{r} \right).$$

$$\text{Or } \frac{\partial}{\partial x_i} \left((x_i - y_i - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j)) \frac{\phi'(r)}{r} \right) = (1 - \sum_j (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_i} (n_i n_j) - n_i^2) \frac{\phi'(r)}{r} \dots$$

$$\dots + (x_i - y_i - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j)) \left(\frac{\phi''(r)}{r} - \frac{\phi'(r)}{r^2} \right) \frac{x_i - y_i}{r}.$$

$$\text{Et } \sum_i (1 - \sum_j (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_i} (n_i n_j) - n_i^2) = N - \sum_i \sum_j (x_j - y_j) \left(\frac{\partial n_j}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial n_i}{\partial x_i} n_j \right)$$

$$= N + NH(n \cdot (x-y)) - \sum_{ij} (x_j - y_j) \frac{\partial n_j}{\partial x_i} n_i \quad ,$$

$$\begin{aligned} \text{tandis que } \sum_i ((x_i - y_i)^2 - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j) (x_i - y_i)) &= |x-y|^2 - (n \cdot (x-y))^2 \\ &= r^2 \left(1 - \frac{(n \cdot (x-y))^2}{r^2} \right) , \end{aligned}$$

d'où

$$(7.22) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left((x_i - y_i - \sum_j n_i n_j (x_j - y_j)) \frac{\psi'(r)}{r} \right) = (N + NH(n \cdot (x-y)) - \sum_{ij} (x_j - y_j) \frac{\partial n_j n_i}{\partial x_i}) \frac{\psi'(r)}{r} \dots$$

$$\dots + \left(1 - \frac{(n \cdot (x-y))^2}{r^2} \right) (\psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r}) .$$

En outre $\sum_j n_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left((x_i - y_i - \sum_k n_i n_k (x_k - y_k)) \frac{\psi'(r)}{r} \right) = \dots$

$$\dots \sum_j n_i n_j (\delta_{ij} - \sum_k (x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_k) - n_i n_j) \frac{\psi'(r)}{r} \dots$$

$$\dots + \sum_j n_i n_j (x_i - y_i - \sum_k n_i n_k (x_k - y_k)) \left(\frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right) \frac{x_j - y_j}{r} .$$

Or $\sum_i \sum_j n_i n_j (\delta_{ij} - \sum_k (x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_k) - n_i n_j) = - \sum_{ijk} \sum_l (x_l - y_l) n_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_k)$

en utilisant le fait que $\sum_j n_i^2 = 1$, et le terme de droite vaut

$$- \sum_j \sum_k n_j (x_k - y_k) \frac{\partial n_k}{\partial x_j} . \text{ En outre } \sum_{ij} \sum_k n_i n_j ((x_i - y_i)(x_j - y_j) - \sum_k n_i n_k (x_k - y_k)(x_j - y_j)) = 0,$$

d'où

$$(7.23) \quad \sum_{ij} \sum_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left((x_i - y_i - \sum_k n_i n_k (x_k - y_k)) \frac{\psi'(r)}{r} \right) = - \left(\sum_{jk} (x_k - y_k) n_j \frac{\partial n_k}{\partial x_j} \right) \frac{\psi'(r)}{r} .$$

De (7.22) et (7.23) on déduit

$$(7.24) \quad \mathfrak{Q}\tilde{\psi}(x) = (N + NH(n \cdot (x-y))) \frac{\psi'(r)}{r} + \left(1 - \frac{(n \cdot (x-y))^2}{r^2} \right) (\psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r}) .$$

En remarquant que $|\delta |x-y||^2 = 1 - \frac{(n \cdot (x-y))^2}{r^2}$ on en déduit (7.21).

PROPOSITION 7.1. Soient \mathcal{G} une hypersurface minimale de classe C^2 de \mathbb{R}^{N+1} ouvert de \mathbb{R}^{N+1} et g une fonction intégrable, presque partout positive et faiblement sous-harmonique sur \mathcal{G} . Alors pour tout $y \in \mathcal{G}$, $R > 0$ tels que $B_R(y) \subset \mathcal{G}$, on a

$$(7.25) \quad g(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathcal{G} \cap B_R(y)} g dA \quad \text{p.p. } y \in \mathcal{G},$$

où ω_N est la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^N .

Démonstration. Par définition de g , pour toute fonction $\varphi \in C_0^2(\mathcal{G})$, $\varphi \geq 0$, on a

$$(7.26) \quad \int_{\mathcal{G}} g \varphi dA \geq 0.$$

1ère étape : Soit χ une fonction positive décroissante de classe C^1 sur \mathbb{R} à support dans $]-\infty, 1[$ et soit, pour $0 < \rho < R$, ψ définie par

$$(7.27) \quad \psi(r) = \int_r^{+\infty} \tau \chi(\tau/\rho) d\tau.$$

En appliquant la relation (7.21) on a en posant $r = |x-y|$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(r)$,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi}(x) &= -\{N\chi(r/\rho) + r\chi'(r/\rho)|\delta r|^2/\rho - N\chi(r/\rho)\text{Hn.}(x-y)\} \\ &= \rho^{N+1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{-N} \chi(r/\rho)) + r\chi'(r/\rho)(1-|\delta r|^2)/\rho - N\chi(r/\rho)\text{Hn.}(x-y), \end{aligned}$$

d'où

$$(7.28) \quad \Delta \tilde{\psi}(x) \leq \rho^{N+1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{-N} \chi(r/\rho)) - n \chi(r/\rho) \text{Hn.}(x-y).$$

Dans le cas particulier où \mathcal{E} est minimale, on a $H = 0$ et

$$\tilde{\Psi}(x) \leq \rho^{N+1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{-N} \chi(r/\rho)) .$$

Fin de la démonstration. On choisit $g(x) = \tilde{\Psi}(x)$ pour (7.26) et on a

$$(7.29) \quad \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho^N} \int_{\mathcal{E}} g\chi(r/\rho) dA \right) \geq 0 .$$

Par suite, si on pose $I_{\chi}(\rho) = \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{\mathcal{E}} g\chi(r/\rho) dA$, la fonction I_{χ}

est croissante sur $(0, R)$. Si on fait tendre χ vers la fonction caractéristique de $]-\infty, 1]$ I_{χ} converge vers I définie par

$$(7.30) \quad I(\rho) = \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{\mathcal{E} \cap B_{\rho}(y)} dA .$$

Comme $\lim_{\rho \downarrow 0} I(\rho) = g(y)$ pour presque tout $y \in \mathcal{E}$ on en déduit

$$(7.31) \quad g(y) \leq I(\rho) \quad \forall \rho \in]0, R] ,$$

d'où (7.25) .

REMARQUE 7.2. Si on prend $g = 1$ on en déduit l'inégalité

$$(7.32) \quad A(\mathcal{E} \cap B_R(y)) \geq \omega_N R^N ,$$

où $A(\mathcal{E} \cap B_R(y))$ désigne la mesure $(N-1)$ -dimensionnelle surfacique de $\mathcal{E} \cap B_R(y)$.

Dans le cas des hypersurfaces générales la formule (7.25) se complique mais on peut donner une inégalité de représentation pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

PROPOSITION 7.2. Soient \mathcal{E} une hypersurface de classe C^2 de l'ouvert \mathcal{G} de \mathbb{R}^{N+1} et $g \in C^1(\mathcal{G})$, $g \geq 0$. Alors pour tout $y \in \mathcal{E}$ et tout $R > 0$ tels que $B_R(y) \subset \mathcal{G}$ on a

$$(7.33) \quad g(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathcal{E}_R} g |\delta r|^2 dA + \frac{1}{4\omega_N} \int_{\mathcal{E}_R} g H^2 r^2 (r^{-N} - R^{-N}) dA + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathcal{E}_R} (r^{-N} - R^{-N})(x-y) \cdot \delta g dA ,$$

où $\mathcal{E}_R = \mathcal{E} \cap B_R(y)$.

Démonstration. Soit $\chi \in C^1([0, +\infty[)$ une fonction décroissante à support dans $[0, R]$ et $\psi \in C^2(\mathcal{G})$ définie par

$$(7.34) \quad \psi(r) = \int_r^{+\infty} \tau \chi(\tau) d\tau .$$

Si on pose $\tilde{\psi}(x) = \psi(r)$, $r = |x-y|$, on a

$$\Delta \tilde{\psi}(x) = -\{N\chi(r) + r\chi'(r)|\delta r|^2 + N\chi(r)Hn.(x-y)\} \quad \text{que l'on écrit}$$

$$(7.35) \quad \Delta \tilde{\psi}(x) = -(N\chi(r) + r\chi'(r)) + r\chi'(r)(1 - |\delta r|^2) - N\chi(r)Hn.(x-y) .$$

En utilisant le Lemme 7.2, on a $\int_{\mathcal{E}_R} g \Delta \tilde{\psi} dA = - \int_{\mathcal{E}_R} \delta g \cdot \delta \tilde{\psi} dA$, d'où

$$(7.36) \quad \int_{\mathcal{E}_R} (N\chi(r) + r\chi'(r))g dA - \int_{\mathcal{E}_R} r\chi'(r)(1 - |\delta r|^2)g dA = \int_{\mathcal{E}_R} \delta g \cdot \delta \tilde{\psi} dA \dots$$

$$\dots - N \int_{\mathcal{E}_R} \chi(r)g Hn.(x-y) dA .$$

Si nous supposons que $\chi(r) = \varepsilon^{-N} - R^{-N}$ pour $r < \varepsilon < R$, la relation (7.36) devient

$$(7.37) \quad N(\varepsilon^{-N} - R^{-N}) \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} g dA + \int_{\mathfrak{S}_R - \mathfrak{S}_\varepsilon} (N\chi(r) + r\chi'(r)) g dA - \int_{\mathfrak{S}_R - \mathfrak{S}_\varepsilon} r\chi'(r)(1 - |\delta r|^2) g dA = \dots$$

$$\dots - N \int_{\mathfrak{S}_R} \chi(r) g \text{Hn.}(x-y) dA + \int_{\mathfrak{S}_R} \delta\psi \cdot \delta g dA .$$

L'idée est alors de définir χ_ε par

$$(7.38) \quad \chi_\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon^{-N} - R^{-N} & \text{pour } 0 \leq r < \varepsilon , \\ r^{-N} - R^{-N} & \text{pour } \varepsilon \leq r < R , \\ 0 & \text{pour } r \geq R . \end{cases}$$

On ne peut remplacer directement χ par χ_ε dans (7.37) mais par une suite $\{\chi_m\}$ de fonctions positives décroissantes de $C^1([0, +\infty[)$ à support dans $[0, R[$ bornées ainsi que $\{\chi'_m\}$ sur $[0, +\infty[$ uniformément par rapport à m , telles que $\{\chi_m\}$ converge vers χ_ε uniformément sur $[0, R]$ et $\{\chi'_m\}$ converge vers χ'_ε en tout point de $[0, R]$, χ'_ε étant défini par $\chi'_\varepsilon(r) = 0$ si $r \notin [\varepsilon, R[$, $\chi'_\varepsilon(r) = -Nr^{-(N+1)}$ si $r \in [\varepsilon, R[$. On déduit alors de (7.37)

$$(7.39) \quad (\varepsilon^{-N} - R^{-N}) \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} g dA + \int_{\mathfrak{S}_R - \mathfrak{S}_\varepsilon} r^{-N} g (1 - |\delta r|^2) dA = R^{-N} \int_{\mathfrak{S}_R - \mathfrak{S}_\varepsilon} g dA \dots$$

$$\dots - (\varepsilon^{-N} - R^{-N}) \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} g \text{Hn.}(x-y) dA - \int_{\mathfrak{S}_R - \mathfrak{S}_\varepsilon} g (r^{-N} - R^{-N}) \text{Hn.}(x-y) dA + \frac{1}{N} \int_{\mathfrak{S}_R} \delta g \cdot \delta\psi_\varepsilon dA ,$$

où $\psi_\varepsilon(r) = \int_r^R \tau \chi_\varepsilon(\tau) d\tau$. En faisant tendre ε vers 0 et en divisant par ω_N on obtient

$$g(y) + \frac{1}{\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} r^{-N} g(1-|\delta r|^2) dA = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathfrak{E}_R} g dA + \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} \delta g \cdot \delta \tilde{\psi} dA \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} g(r^{-N} - R^{-N}) \text{Hn} \cdot (n-y) dA \dots$$

où $\tilde{\psi}(x) = \psi(r) = \int_r^R \tau(\tau^{-N} - R^{-N}) d\tau$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\text{Hn} \cdot (x-y)| \leq r^{-2} (n \cdot (x-y))^2 + \frac{1}{4} r^2 H^2 = 1 - |\delta r|^2 + \frac{1}{4} r^2 H^2, \text{ d'où}$$

$$g(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathfrak{E}_R} g |\delta r|^2 dA - \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} (r^{-N} - R^{-N}) (x-y) \cdot \delta g dA \dots$$

(7.40)

$$\dots + \frac{1}{4\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} g H^2 r^2 (r^{-N} - R^{-N}) dA \dots$$

ce qui est (7.33).

REMARQUE 7.3. L'inégalité (7.33) permet de retrouver la propriété de moyenne sur les hypersurfaces minimales en utilisant (7.39) et (7.20). C'est un outil fondamental pour démontrer le théorème de régularité des solutions des équations des surfaces à courbure moyenne donnée et aussi pour l'étude des applications quasi-conformes sur des hypersurfaces (cf.[14]).

7.4. Théorème de régularité de Bombieri-De Giorgi-Miranda

Le résultat de Bombieri, De Giorgi et Miranda donne une estimation localement uniforme du gradient d'une hypersurface minimale. Par la suite ce résultat a été généralisé par Ladyzhenskaya et Ural'tseva aux hypersurfaces dont la courbure moyenne est donnée et c'est la démonstration plus simple de Trudinger que nous exposons.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $u \in C^2(\Omega)$. Nous appelons \mathfrak{E} le graphe de u dans \mathbb{R}^{N+1} : $\mathfrak{E} = \{x=(x', u(x')), x' \in \Omega\}$. La courbure moyenne de \mathfrak{E} en x' (par rapport à la normale unitaire supérieure n) est donnée par

$$(7.41) \quad \begin{cases} H(x') = -\frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial n_i}{\partial x_i}(x') = \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{v} \right) (x') , \\ v = \sqrt{1 + |Du|^2} . \end{cases}$$

Le résultat essentiel est le suivant

THEOREME 7.1. Il existe deux fonctions positives \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 localement bornées sur \mathbb{R}^3 telles que pour tout $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et tout $y' \in \Omega$ on ait l'estimation

$$(7.42) \quad |Du(y')| \leq C_1 \exp\{C_2 \sup_{\Omega} (u - u(y')) / d(y')\} ,$$

où $d(y') = \text{dist}(y', \partial\Omega)$, $C_i = \tilde{C}_i(N, d(y')H_0, d^2(y')H_1)$, $i=1,2$, et

$$(7.43) \quad H_0 = \sup_{z' \in \Omega} |H(z')| , \quad H_1 = \sup_{z' \in \Omega} |DH(z')| .$$

Avant de démontrer le Théorème 7.1 notons la conséquence suivante

COROLLAIRE 7.1. Si dans le Théorème 1 on suppose $u \geq 0$ dans Ω , on a

$$(7.44) \quad |Du(y')| \leq C_1 \exp\{C_2 u(y') / d(y')\} ,$$

pour tout $y' \in \Omega$, où C_1 et C_2 sont comme dans le Théorème 1 .

Démonstration. On applique (7.42) à $v = -u$, H_0 , H_1 et $|Dv|$ étant inchangés.

Nous utiliserons tout d'abord le résultat suivant pour prouver le Théorème 7.1.

LEMME 7.4. Soient $\mathcal{G} = \mathbb{R} \times \Omega$ et $w = \text{Log} \sqrt{1 + |Du|^2}$. Alors pour tout $\varphi \in C^1_0(\mathcal{G})$ on a

$$(7.45) \quad \int_{\mathcal{G}} (\delta w \cdot \delta \varphi + |\delta w|^2 \varphi - N \varphi \text{ n.DH}) dA \leq 0 .$$

Démonstration. On peut tout d'abord remarquer que (7.45) n'est que la forme faible de

$$(7.46) \quad \delta w \geq |\delta w|^2 - N \text{ n.DH} .$$

Si on écrit (7.41) sous la forme faible, on a

$$(7.47) \quad \int_{\Omega} (\text{n.D}\varphi - N H \varphi) dx' = 0 ,$$

pour tout $\varphi \in C^1_0(\Omega)$. Si on remplace φ par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq N$ et si on intègre par parties, on a

$$(7.48) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \text{n}}{\partial x_k} \cdot D\varphi - N \varphi \frac{\partial H}{\partial x_k} \right) dx' = 0 .$$

Dans (7.48) nous remplaçons φ par $n_k \varphi = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_k}}{v} \varphi$, $v = \sqrt{1 + |Du|^2}$, et on a

$$(7.49) \quad \int_{\Omega} \varphi \sum_i \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \frac{\partial n_k}{\partial x_i} dx' + \int_{\Omega} \left(n_k \sum_i \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - N \varphi n_k \frac{\partial H}{\partial x_k} \right) dx' = 0 .$$

Mais
$$n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_k}}{v} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{v} \right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_k}}{v} \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}}{v} - \sum_j \frac{\frac{\partial u}{\partial x_j}}{v^3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right),$$

$$\sum_k n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} = - \sum_k \frac{n_k}{v} \sum_j (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = - v \sum_j (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{v} \right),$$

d'où
$$\sum_k n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} = - v \delta_i (n_{N+1})$$
 puisque $\frac{\partial}{\partial x_{N+1}} \left(\frac{1}{v} \right) = 0$ et $n_{N+1} = \frac{1}{v}$.

Si nous posons $c = \sum_i \sum_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \frac{\partial n_k}{\partial x_i}$. Alors c est la trace de la matrice $\left[\frac{\partial n_i}{\partial x_j} \right]^2$ c'est-à-dire en introduisant les courbures principales x_i

$$(7.50) \quad c = \sum_{i=1}^N K_i^2.$$

En sommant les relations (7.49) pour $k = 1, \dots, N$, on a

$$(7.51) \quad \int_{\Omega} c \varphi \, dx' - \int_{\Omega} v \left(\sum_i \delta_i (n_{N+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - N \varphi \delta_{N+1} H \right) \, dx',$$

en remarquant que $\delta_{N+1} H = \frac{\partial H}{\partial x_{N+1}} - \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{N+1} n_k \frac{\partial H}{\partial x_k} = - \frac{1}{v} \sum_{k=1}^N n_k \frac{\partial H}{\partial x_k}$.

Soient maintenant $\mathfrak{G} = \mathbb{R} \times \Omega$ et $\varphi \in C^1(\mathfrak{G})$. On pose

$$\tilde{\varphi}(x', x_{N+1}) = \varphi(x', u(x')), \text{ et on a } \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i \varphi = \sum_{i=1}^N \delta_i n_{N+1} \delta_i \tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^N \delta_i n_{N+1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}.$$

Par suite (7.51) devient

$$(7.52) \quad \int_{\mathfrak{G}} \left(c n_{N+1} \varphi - \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i \varphi + N \varphi \delta_{N+1} H \right) \, dA = 0,$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathfrak{G})$. Si $w = \text{Log}(\sqrt{1 + |Du|^2}) = - \text{Log}(n_{N+1})$, on a en utilisant la positivité de c et en prenant φv comme fonction test :

$$(7.53) \quad \int_{\mathfrak{G}} \left(- \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i (\varphi v) + N \varphi v \delta_{N+1} H \right) \, dA \leq 0.$$

$$\text{Or } \delta_{N+1} H = - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial x_i} n_i = - \frac{1}{v} n \cdot DH \text{ et}$$

$$- \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i(\varphi v) = - v \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i \varphi - \varphi \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i v \text{ et comme}$$

$$w = \text{Log } v, \quad - \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i(\varphi v) = -v \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i \varphi - \varphi v \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i w. \text{ Or}$$

$$\delta_i w = -v \delta_i n_{N+1}, \quad \text{d'où } - \sum_{i=1}^{N+1} \delta_i n_{N+1} \delta_i(\varphi v) = \delta w \cdot \delta \varphi + |\delta w|^2 \varphi \text{ et (7.53) devient}$$

$$(7.54) \quad \int_{\mathfrak{E}} (\delta w \cdot \delta \varphi + \varphi |\delta w|^2 - N \varphi n \cdot DH) dA \leq 0.$$

REMARQUE 7.4. Dans le cas où \mathfrak{E} est à courbure moyenne constante la fonction w est faiblement sous-harmonique sur \mathfrak{E} . On déduit alors de la Proposition 7.1 que pour tout $y \in \mathfrak{E}$ et $R > 0$

$$(7.55) \quad w(y') = \text{Log } \sqrt{1 + |Du(y)|^2} \leq \frac{1}{\omega_{N,R}^N} \int_{\mathfrak{E} \cap B_R(y)} w(z) dA.$$

Comme $w(z) \leq |Du(z)|$ et $dA = \sqrt{1 + |Du|^2} dz \leq (1 + |Du|) dz$, on obtient une première estimation ponctuelle :

$$(7.56) \quad w(y') \leq \frac{1}{\omega_{N,R}^N} \int_{B_R(y')} (1 + |Du|^2) dz.$$

Par suite en exponentiant, une estimation a priori sur Du dans $L^2(B_R(y'))$ implique une estimation ponctuelle sur $|Du|$.

Démonstration du Théorème 7.1. On utilise la Proposition 7.2 et on a

$$(7.57) \quad w(y') \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathfrak{E}_R} w |\delta r|^2 dA + \frac{1}{4\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} w H^2 r^2 (r^{-N} - R^{-N}) dA \dots$$

$$\dots - \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} (r^{-N} - R^{-N})(x-y) \cdot \delta w dA .$$

où $\mathfrak{E}_R = \mathfrak{E} \cap B_R(y)$, $y = (y', u(y'))$ et ce à condition que $R < \text{dist}(y', \partial\Omega)$. On définit φ et $\tilde{\psi}$ par

$$(7.58) \quad \varphi(r) = \int_r^R \tau(\tau^{-N} - R^{-N}) d\tau, \quad \tilde{\psi}(x) = \varphi(|x-y|) .$$

Or si $v = \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x-y}{r}$, $-(r^{-N} - R^{-N})(x-y) = \varphi'(r)v = D\tilde{\psi}(x)$ et $\delta\tilde{\psi}(x) = D\tilde{\psi}(x) \cdot (n \cdot \delta\tilde{\psi})n$. Comme $n \cdot \delta = 0$ on en déduit que $\delta\tilde{\psi} \cdot \delta w = D\tilde{\psi} \cdot \delta w$ et

$$- \int_{\mathfrak{E}_R} (r^{-N} - R^{-N})(x-y) \cdot \delta w dA = \int_{\mathfrak{E}_R} \delta\tilde{\psi} \cdot \delta w dA .$$

En utilisant (7.54) on en déduit

$$(7.58) \quad - \int_{\mathfrak{E}_R} (r^{-N} - R^{-N})(x-y) \cdot \delta w dA \leq N \int_{\mathfrak{E}_R} \tilde{\psi} n \cdot D H dA - \int_{\mathfrak{E}_R} \tilde{\psi} |\delta w|^2 dA ,$$

d'où

$$(7.59) \quad w(y') \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathfrak{E}_R} w |\delta r|^2 dA + \frac{1}{4\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} w H^2 r^2 (r^{-N} - R^{-N}) dA + \frac{1}{\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} \tilde{\psi} n \cdot D H dA .$$

et comme $|\delta r| \leq 1$ on obtient

$$(7.60) \quad w(y') \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\mathfrak{E}_R} w dA + \frac{H_0^2}{4\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} w r^2 (r^{-N} - R^{-N}) dA + \frac{H_1}{\omega_N} \int_{\mathfrak{E}_R} \tilde{\psi} dA .$$

En utilisant la formule de Fubini pour la mesure $dp dA$ et en posant $A(\epsilon_\rho) = \int_{\epsilon_\rho} dA$, on a

$$\int_{\epsilon_R} wr^2(r^{-N}-R^{-N})dA=N\int_{\epsilon_R} wr^2\int_r^R \rho^{-N-1}d\rho dA=N\int_0^R \rho^{-N-1}\int_{\epsilon_\rho} wr^2dAd\rho .$$

D'un autre côté

$$\int_{\epsilon_R} \tilde{\varphi}dA=\int_{\epsilon_R} \int_r^R \rho(\rho^{-N}-R^{-N})d\rho dA=\int_0^R \rho(\rho^{-N}-R^{-N})\int_{\epsilon_\rho} dAd\rho \quad \text{d'où}$$

$$\int_{\epsilon_R} \tilde{\varphi}dA=\int_0^R \rho(\rho^{-N}-R^{-N})A(\epsilon_\rho)d\rho \leq \int_0^R \rho^{1-N}A(\epsilon_\rho)d\rho \quad \text{et (7.60)}$$

devient

$$(7.61) \quad w(y') \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\epsilon_R} wdA + \frac{NH_0^2}{4\omega_N} \int_0^R \rho^{1-N} \int_{\epsilon_\rho} wdAd\rho + \frac{H_1}{\omega_N} \int_0^R \rho^{1-N} A(\epsilon_\rho) d\rho .$$

Par suite l'estimation de w et donc de Du se ramène à celles de $A(\epsilon_\rho)$ et $\int_{\epsilon_\rho} wdA$.

Estimation de $A(\epsilon_\rho)$. Sans perdre en généralité on peut supposer $3R < \text{dist}(y', \partial\Omega)$ et $y' = u(y') = 0$. Pour $0 \leq \rho \leq R$ posons $u_\rho = \text{sign}(u) \min(\rho, |u|)$. Soit η une fonction lipschitzienne sur Ω valant 1 dans $\{x' : |x'| \leq \rho\}$, 0 dans $\{x' : |x'| \geq 2\rho\}$ et telle que $|D\eta| \leq 1/\rho$. On peut choisir $\varphi = \eta u_\rho$ comme fonction test dans (7.47) c'est-à-dire

$$(7.62) \quad \int_{\Omega} (\eta n \cdot Du_\rho + u_\rho n \cdot D\eta - NH\eta u_\rho) dx' = 0 .$$

Or $n \cdot Du_\rho = -\frac{1}{v} |Du_\rho|^2$ presque partout, par suite

$$(7.63) \quad \int_{|x| \leq \rho} \frac{1}{v} |Du_\rho|^2 dx' \leq \rho \int_{|x'| \leq 2\rho} (|D\eta| + N|H|\eta) dx' .$$

Par voie de conséquence

$$A(\epsilon_\rho) = \int_{|x'|^2 + |u|^2 < \rho^2} v dx' \leq \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} v dx' \leq \int_{|x'| \leq \rho} \frac{1}{v} (1 + |Du_\rho|^2) dx' ,$$

et comme $\frac{1}{v} \leq 1$,

$$\int_{|x'| \leq \rho} \frac{1}{v} (1 + |Du_\rho|^2) dx' \leq \omega_N \rho^N + 2^N \omega_N \rho^N + N\rho \int_{|x'| \leq 2\rho} |H|\eta dx' ,$$

et finalement

$$(7.64) \quad A(\epsilon_\rho) \leq C(N) \rho^N (1 + RH_0) .$$

Estimation de $\int_{\epsilon_\rho} w dA$. On choisit comme fonction test dans (7.47) la

fonction $\varphi = \eta w(u_\rho + \rho)$ où $w = \log v$ et où u_ρ et η ont été définies plus haut. On a alors

$$\int_{\Omega} (\eta w n \cdot D(u_\rho + \rho) + w(u_\rho + \rho) n \cdot D\eta + \eta(u_\rho + \rho) n \cdot Dw - N\eta w(u_\rho + \rho)) dx' = 0 ,$$

d'où

$$(7.65) \quad \int_{|x'| < \rho} \frac{1}{v} w |Du_\rho|^2 dx' \leq 2\rho \int_{\substack{|x'| < \rho \\ u > -\rho}} (w |D\eta| + \eta |Dw| + N\eta w |H|) dx' .$$

Pour estimer $\int_{\substack{|x'| < \rho \\ u > -\rho}} \eta |Dw| dx'$ nous remplaçons φ par φ^2 dans (7.54)

et nous avons :

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 |\delta w|^2 dA \leq -2 \int_{\mathfrak{E}} \varphi \delta w \cdot \delta \varphi dA + N \int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 n \cdot D H dA ,$$

et, en utilisant $2 \left| \int_{\mathfrak{E}} \varphi \delta w \cdot \delta \varphi dA \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 |\delta w|^2 dA + 2 \int_{\mathfrak{E}} |\delta \varphi|^2 dA$, on obtient

$$(7.66) \quad \int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 |\delta w|^2 dA \leq 4 \int_{\mathfrak{E}} |\delta \varphi|^2 dA + 2NH_1 \int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 dA .$$

Si on choisit en particulier $\varphi = \eta \tau(x_{N+1})$ où $\tau \in C^2(\mathbb{R})$, $0 \leq \tau \leq 1$ et

$$(7.67) \quad \begin{cases} \tau \equiv 1 & \text{dans }]-\rho, \sup_{|x'| < 2\rho} u(x')[, \\ \tau \equiv 0 & \text{dans }]-\rho, \rho + \sup_{|x'| < 2\rho} u(x')[, \end{cases}$$

$|\tau'| \leq 2/\rho$ et où η est comme précédemment, (7.67) implique

$$(7.68) \quad \int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 |\delta w|^2 dA \leq (36 \rho^{-2} + 2NH_1) A(\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi) ,$$

où $A(\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi) = \int_{\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi} dA$. Comme $\frac{\partial w}{\partial x_{N+1}} = 0$, $\frac{1}{v} |Dw| \leq |\delta w|$

et $\int_{|x'| < 2\rho} \eta |Dw| dx' \leq \int_{\mathfrak{E}} \varphi |\delta w| dA \leq \left(\int_{\mathfrak{E}} \varphi^2 |\delta w|^2 dA \right)^{1/2} (A(\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi))^{1/2}$, d'où

$$(7.69) \quad \int_{|x'| < 2\rho} \eta |Dw| dx' \leq \frac{1}{\rho} (36 + 2NH_1 R^2)^{1/2} A(\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi) ,$$

et $A(\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi) = \int_{\mathfrak{E} \cap \text{supp} \cdot \varphi} dA \leq \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} v dx'$, d'où

$$(7.70) \quad \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} \eta |Dw| dx' \leq \frac{1}{\rho} (36 + 2NH_1 R^2)^{1/2} \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} v dx' .$$

D'un autre côté $w \leq v$ et donc $\int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} w dx' \leq \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} v dx' .$

Il reste donc à estimer $\int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -\rho}} v dx'$ et ceci peut être fait en consi-

dérant la fonction test $\varphi = \zeta \max\{u + 2\rho, 0\}$ où ζ est lipschitzienne dans \mathbb{R}^N , $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ pour $|x'| < 2\rho$, $\zeta \equiv 0$ pour $|x'| > 3\rho$ et $|D\zeta| \leq \frac{1}{\rho}$. On a alors comme pour l'estimation de $A(\mathfrak{E}_\rho)$

$$(7.71) \quad \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -2\rho}} \frac{1}{v} |Du|^2 dx' \leq (\sup u) \int_{\substack{|x'| < 3\rho \\ |x'| < 3\rho}} (|D\zeta| + N|H|\zeta) dx' .$$

Comme $v = \frac{1}{v} |Du|^2 + \frac{1}{v}$ on obtient

$$(7.72) \quad \int_{\substack{|x'| < 2\rho \\ u > -2\rho}} v dx' \leq C(N) \rho^N (1 + RH_0) (1 + \rho^{-1} \sup u) .$$

Pour terminer l'estimation de $\int_{\mathfrak{E}_\rho} w dA$ on écrit

$$\int_{\mathfrak{E}_\rho} w dA \leq \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} w v dx' = \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} \frac{1}{v} w |Du_\rho|^2 dx' + \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} \frac{w}{v} dx' \quad \text{donc}$$

$$\int_{\mathfrak{E}_\rho} w dA \leq \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} \frac{1}{v} w |Du_\rho|^2 dx' + \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} w dx' \leq \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} \frac{1}{v} w |Du_\rho|^2 dx' + \int_{\substack{|x'| < \rho \\ |u| < \rho}} v dx' .$$

En utilisant (7.65), (7.70) et (7.72) on en déduit

$$\int_{\mathcal{E}_\rho} wdA \leq NC(N)\rho^N(1+RH_0)^2\left(1+\frac{1}{\rho}\sup_{|x'|<3\rho} u\right) + \dots$$

$$\dots 2C(N)\rho^N(1+RH_0)\left(1+\frac{1}{\rho}\sup_{|x'|<3\rho} u\right)(36+2NR^2H_1)^{1/2} .$$

En définitive nous obtenons

$$(7.73) \quad \int_{\mathcal{E}_\rho} wdA \leq C_1(N)\rho^N(1+RH_0)^2\left(1+\rho^{-1}\sup_{|x'|<3\rho} u\right)(1+R^2H_1)^{1/2} .$$

Fin de la démonstration du Théorème 7.1. Dans l'inégalité (7.61) on a

$$\int_{\mathcal{E}_R} wdA \leq C(N) R^N(1+RH_0) ,$$

$$\int_0^R \rho^{1-N} \int_{\mathcal{E}_\rho} wdAd\rho \leq C_1(N)R^2\left(1+R^{-1}\sup_{|x'|<3R} u\right)(1+RH_0)^2(1+R^2H_1)^{1/2} ,$$

$$\int_0^R \rho^{1-N} A(\mathcal{E}_\rho) d\rho \leq \frac{R^2}{2} C(N) (1+RH_0) ,$$

et $w(y') \leq C(N, R, H_0, H_1)$. En exponentiant on en déduit (7.42).

COROLLAIRE 7.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in C^2(\Omega)$ une fonction telle que la courbure moyenne de son graphe dans \mathbb{R}^{N+1} appartienne à $C^k(\overline{\Omega})$, $2 \leq k \leq \infty$. Alors $u \in C^{k+1}(\Omega)$ et pour tout $y \in \Omega$ de multi-indice β , $|\beta| = k + 1$ on a

$$(7.74) \quad |D^\beta u(y)| \leq C ,$$

où $C = C(N, k, \|H\|_{C^k(\overline{\Omega})}, \sup_{\Omega} |u|, \text{dist}(y, \partial\Omega))$.

Démonstration. H étant la courbure moyenne du graphe de u , u vérifie

$$(7.75) \quad \sum_i (1+|Du|^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = NH(1+|Du|^2)^{3/2} .$$

L'opérateur du second ordre L défini par

$$(7.76) \quad Lv = \sum_{i,j} (\delta_{ij}(1+|Du|^2) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$$

a ses coefficients de classe C^1 . Il est uniformément elliptique tant que $|Du|$ est borné. Comme u vérifie

$$(7.77) \quad Lu = NH(1+|Du|^2)^{1/2} ,$$

et que le second membre de (7.77) est de classe C^1 dans Ω , en utilisant la théorie de Schauder $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ pour tout $\alpha < 1$. Par suite les coefficients de L sont dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$ et le second membre de (7.77) est dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$. Par suite $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$, $\forall \alpha < 1$. En itérant on en déduit la régularité C^{k+1} de u si H est de classe C^k .

En utilisant les estimations de Schauder on a à partir de (7.77)

$$(7.78) \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') \right| \leq C H_0 \sup_{\Omega''} (1+|Du|^2)^{1/2} ,$$

pour tout $x' \in \Omega'$, $\bar{\Omega} \subset \Omega'' \subset \bar{\Omega}'' \subset \Omega$, d'où (7.74) pour $|\beta| = 2$. En itérant on obtient (7.74) dans le cas général.

REMARQUE 7.5. La théorie de l'existence pour le problème de Dirichlet

$$(7.79) \quad \begin{cases} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = NH & \text{dans } \Omega , \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega , \end{cases}$$

est également fort difficile à étudier. Dans le cas des surfaces minimales dans R^3 le premier résultat d'existence est dû à Bernstein qui a montré que le problème (7.79) avec $H = 0$ admet une solution pour tout $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ si et seulement si Ω est convexe. En dimension supérieure à 2, Jenkins et Serrin ont remplacé la condition de convexité de Ω par la condition que la courbure moyenne de $\partial\Omega$ soit positive ou nulle partout. Dans le cas des surfaces à courbure moyenne H donnée dans $C^1(\bar{\Omega})$ le problème (7.79) admet une solution unique $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ pour tout $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ si H vérifie

$$(7.80) \quad H'(y) \geq \frac{N}{N-1} |H(y)|, \quad \forall y \in \partial\Omega,$$

où H' est la courbure moyenne de $\partial\Omega$, et

$$(7.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon_0 \in]0, 1[\text{ tel que } \forall \eta \in C^1_0(\Omega), \\ \left| \int_{\Omega} H \eta \, dx' \right| \leq \frac{1-\varepsilon_0}{N} \int_{\Omega} |D\eta| \, dx'. \end{array} \right.$$

Une autre manière d'étudier (7.79) est de considérer la fonctionnelle

$$J(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv|^2} \, dx' - N \int_{\Omega} H v \, dx',$$

définie sur $V = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega\}$. Les minima de J (ou plus généralement les minima locaux) sont alors localement lipschitziens et l'estimation (7.42) reste valable (Cf. [25]).

REMARQUE 7.6. L'estimation (7.42) montre que la régularité naturelle d'une surface minimale est la régularité lipschitzienne et le Corollaire 7.2 montre que si une surface minimale est de classe C^2 elle est de classe C^∞ . Si la surface minimale n'est pas de classe C^2 (l'équation (7.1) avec $H = 0$ étant prise au sens faible) elle peut n'être que lipschitzienne. Ainsi Bombieri, De Giorgi et Giusti ont montré que dans R^8 le cône d'équation

$$(7.82) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2,$$

est minimal.