

### 8. EQUATIONS QUASILINEAIRES GENERALES

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la régularité holdérienne des solutions faibles de l'équation suivante posée dans  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$

$$(8.1) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0 .$$

Ces résultats généralisent ceux de De Giorgi et Nash et sont essentiellement dus à Ladyzenskaya, Ural'ceva et Serrin. La forme que nous exposerons est due à Trudinger [27] et utilise de façon fondamentale la technique itérative de Moser. Les hypothèses que nous ferons sont les suivantes :

Les fonctions  $A_j$  et  $B$  sont définies sur  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Si on note  $(x, r, p) \mapsto A_j(x, r, p)$  et  $(x, r, p) \mapsto B(x, r, p)$ , elles sont mesurables en  $x$  et continues séparément en  $r$  et en  $p$ . Nous supposons aussi qu'elles vérifient

$$(8.2) \quad |A_j(x, r, p)| \leq a_0 |p|^{\alpha-1} + a_1 |r|^{\alpha-1} + a_2 ,$$

$$(8.3) \quad \sum_j A_j(x, r, p) p_j \geq |p|^\alpha - a_3 |r|^\alpha - a_4 ,$$

$$(8.4) \quad |B(x, r, p)| \leq b_0 |p|^\alpha + b_1 |p|^{\alpha-1} + b_2 |r|^{\alpha-1} + b_3 ,$$

où les coefficients  $a_0, \dots, b_3$  sont des réels positifs et où  $\alpha$  est supérieur à 1 (strictement).

DEFINITION 8.1. Une fonction  $u \in W_{loc}^{1, \alpha}(\Omega)$  est une solution (resp. sur-solution, sous-solution) faible de (8.1) si pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  (resp.  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ) on a

$$(8.5) \quad \int_\Omega \left\{ \sum_j A_j(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - B(x, u, Du) \varphi \right\} dx = 0$$

(resp.  $\geq 0$ ,  $\leq 0$ ).

On peut remarquer que l'on peut, par densité, choisir  $\varphi \in W^{1,\alpha}(\Omega)$  avec un support compact dans  $\Omega$ . L'obtention de la régularité holdérienne utilise la méthode des estimations de Harnack.

### 8.1. Inégalités de Harnack

On suppose  $x_0 \in \Omega$  et  $K(\rho)$  désigne un cube de  $\mathbb{R}^N$  de centre  $x_0$ , de côtés parallèles aux axes de longueur  $\rho > 0$ . On suppose aussi  $a_2 = a_4 = b_3 = 0$ .

THEOREME 8.1. Soit  $u$  une solution faible de (8.1) dans  $K(3\rho) \subset \Omega$  telle que  $0 \leq u \leq M$ . Il existe alors une constante  $C = C(N, \alpha, a_0, b_0, M, a_1, a_3, b_0, b_1, b_2, \rho)$  telle que

$$(8.6) \quad \sup_{K(\rho)} \text{ess } u(x) \leq C \inf_{K(\rho)} \text{ess } u(x) .$$

Ce résultat est conséquence de deux résultats suivants concernant les sur-solutions (sous-solutions) faibles de (8.1).

THEOREME 8.2. Soit  $u$  une sur-solution faible de (8.1) dans  $K(3\rho)$ , telle que  $0 \leq u \leq M$ . Alors

$$(8.7) \quad \rho^{-N/\gamma} \|u\|_{L^\gamma(K(2\rho))} \leq C \inf_{x \in K(\rho)} \text{ess } u(x)$$

où  $C$  est une constante structurelle et  $\gamma < N(\alpha-1)/(N-\alpha)$  si  $\alpha \leq N$ ,  $\gamma \leq +\infty$  si  $\alpha > N$ .

THEOREME 8.3. Soit  $u$  une sous-solution faible de (8.1) dans  $K(2\rho)$ , telle que  $0 \leq u < M$ . Alors

$$(8.8) \quad \sup_{x \in K(\rho)} \text{ess } u(x) \leq C \rho^{-N/\gamma} \|u\|_{L^\gamma(K(2\rho))}$$

pour n'importe quel  $\gamma > \alpha-1$ , où  $C$  est comme dans le Théorème 8.2.

REMARQUE 8.1. Le Théorème 8.3 est valable même si  $\alpha = 1$  (opérateurs de courbure moyenne par exemple). Quand les coefficients  $a_2, a_4$  et  $b_3$  ne sont pas nuls on peut appliquer les Théorèmes 8.1, 8.2 et 8.3 à  $\bar{u}(x) = u(x) + \mu\rho + (\mu\rho)^{\alpha/(\alpha-1)}$  où  $\mu = \max_{\substack{i>0 \\ j>0}} (|a_i|, |b_j|)$ .

La démonstration de ces résultats est donnée sur la technique itérative de Moser en définissant les fonctions  $\Phi$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$(8.9) \quad \Phi(p, h) = \left( \int_{K(h)} |u|^p dx \right)^{1/p},$$

en remarquant que

$$(8.10) \quad \sup_{K(h)} \text{ess } u(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi(p, h) = \Phi(\infty, h),$$

$$(8.11) \quad \inf_{K(h)} \text{ess } u(x) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \Phi(p, h) = \Phi(-\infty, h).$$

En remplaçant  $x$  par  $x/\rho$  on peut supposer  $\rho = 1$  et par suite (8.6), (8.7) et (8.8) se lisent respectivement

$$(8.12) \quad \Phi(\infty, 1) \leq C \Phi(-\infty, 1),$$

$$(8.13) \quad \Phi(\gamma, 2) \leq C \Phi(-\infty, 1),$$

$$(8.14) \quad \Phi(\infty, 1) \leq C \Phi(\gamma, 2).$$

Un autre outil crucial pour la démonstration du Théorème 8.2 est le résultat suivant dû à John et Nirenberg (démonstration difficile, Cf. [17])

LEMME 8.1. Soit  $K_0$  un cube de  $\mathbb{R}^N$  de côtés parallèles aux axes de coordonnées et  $v \in W^{1, \alpha}(K_0)$ . On suppose que pour tout sous-cube  $K$  de  $K_0$  aux côtés parallèles aux axes on a, pour une constante  $\gamma$ ,

$$(8.15) \quad \|Du\|_{L^\alpha(K)} \leq \gamma (\text{mes. } K)^{(N-\alpha)/\alpha N}.$$

Il existe alors deux constantes  $p_0 > 0$  et  $C \geq 0$  dépendant de  $\gamma, \alpha$  et  $N$  telles que

$$(8.16) \quad \left( \int_{K_0} e^{p_0 u} dx \right) \left( \int_{K_0} e^{-p_0 u} dx \right) \leq C(\text{mes. } K_0)^2 .$$

Démonstration des Théorèmes 8.1, 8.2, 8.3. Sans perdre en généralité on peut supposer  $u(x) \geq \varepsilon > 0$  (sinon on remplace  $u$  par  $u+\varepsilon$  et on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0). Soient  $\beta \neq 0$  et  $\eta \in C_0^\infty(K(2\rho))$ ,  $\eta \geq 0$ . On choisit comme fonction test dans (8.5) la fonction

$$(8.17) \quad \varphi(x) = \eta^\alpha(x) u^\beta(x) e^{\text{sign}(\beta)b_0 u(x)},$$

et on a

$$(8.18) \quad D\varphi = \text{sign}(\beta) \eta^\alpha e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} (b_0 u^\beta + |\beta| u^{\beta-1}) Du + \dots \\ \dots + \alpha \eta^{\alpha-1} u^\beta e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} D\eta .$$

En substituant (8.17) et (8.18) dans (8.5) on obtient

$$\text{sign}(\beta) \sum_j \int_{K(2)} \eta^\alpha e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} (b_0 u^\beta + |\beta| u^{\beta-1}) \frac{\partial u}{\partial x_j} A_j(x, u, Du) dx \dots \\ (8.19) \quad \dots + \alpha \sum_j \int_{K(2)} \eta^{\alpha-1} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} A_j(x, u, Du) dx \dots$$

$$\dots - \int_{K(2)} \eta^\alpha u^\beta e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} B(x, u, Du) dx \begin{cases} \leq 0 & \text{si } u \text{ sous-solution,} \\ \geq 0 & \text{si } u \text{ sur-solution.} \end{cases}$$

Dans les calculs suivants on suppose  $\beta > 0$  si  $u$  satisfait aux hypothèses du Théorème 8.3,  $\beta < 0$  si  $u$  satisfait aux hypothèses du Théorème 8.2. On déduit de (8.19) en utilisant (8.2), (8.3) et (8.4)

$$\int_{K(2)} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} \eta^\alpha (b_0 u^\beta + |\beta| u^{\beta-1}) |Du|^\alpha dx \leq \dots$$

$$\int_{K(2)} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} \eta^\alpha (b_0 u + |\beta|) a_3 u^{\alpha+\beta-1} dx \dots$$

$$(8.20) \quad \dots + \alpha \int_{K(2)} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} \eta^{\alpha-1} |D\eta| (a_0 |Du|^{\alpha-1} + a_1 u^{\alpha-1}) u^\beta dx \dots$$

$$\dots + \int_{K(2)} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} \eta^\alpha (b_0 |Du|^{\alpha+b_1} |Du|^{\alpha-1+b_2} u^{\alpha-1}) u^\beta dx .$$

On peut remarquer que le terme  $b_0 \int_{K(2)} e^{\text{sign}(\beta)b_0 u} u^\alpha u^\beta |Du|^\alpha dx$  disparaît. En utilisant l'inégalité de Young

$$a b^{\alpha-1} \leq \alpha^{-1} e^\alpha a^\alpha + (1-\alpha^{-1}) e^{\alpha(1-\alpha)} b^\alpha$$

et l'estimation  $0 \leq b_0 u \leq b_0 M$  on peut faire disparaître les termes de droite de (8.20) qui contiennent  $|Du|^\alpha$  et par suite

$$(8.21) \quad \int_{K(2)} \eta^\alpha u^{\beta-1} |Du|^\alpha dx \leq C(1+|\beta|^{-1})^\alpha \int_{K(2)} \{ (\varepsilon a_1^{1/(\alpha-1+a_2^{1/\alpha+b_1+b_2^{1/\alpha}})})^\alpha \eta^\alpha \dots$$

$$\dots + \varepsilon^{\alpha(1-\alpha)} |D\eta|^\alpha \} u^{\alpha+\beta-1} dx ,$$

pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . En prenant  $\varepsilon = 1$  on en déduit

$$(8.22) \quad \int_{K(2)} \eta^\alpha u^{\beta-1} |Du|^\alpha dx \leq C(1+|\beta|^{-1})^\alpha \int_{K(2)} (\eta^\alpha + |D\eta|^\alpha) u^{\alpha+\beta-1} dx .$$

Posons alors

$$(8.23) \quad v(x) = \begin{cases} u^q(x) & \text{avec } \alpha q = \alpha + \beta - 1 \text{ si } \alpha + \beta - 1 \neq 0 , \\ \text{Log } u(x) & \text{si } \beta = 1 - \alpha . \end{cases}$$

On peut alors écrire (8.22) de la façon suivante selon le cas

$$\|\eta \text{ } Dv\|_{L^\alpha(K(2))} \leq \begin{cases} C |q| (1+\beta^{-1}) \|\eta + |D\eta|\} v \|_{L^\alpha(K(2))} , \\ C \|\eta + |D\eta|\} \|_{L^\alpha(K(2))} . \end{cases}$$

Supposons tout d'abord  $\beta \neq 1-\alpha$ . En utilisant l'inégalité de Sobolev on en déduit

$$(8.24) \quad \|\eta v\|_{L^{\alpha\chi}(K(2))} \leq C |q| (1+|\beta|^{-1}) \|\eta + |D\eta|v\|_{L^{\alpha}(K(2))}$$

où  $\chi = N/(N-\alpha)$  si  $\alpha < N$ ,  $\chi$  est arbitrairement grand si  $\alpha = N$  et  $\chi = +\infty$  si  $\alpha > N$ . Soient maintenant  $h'$  et  $h''$  tels que  $1 \leq h' < h'' \leq 2$  et  $\eta$  une fonction tronquante valant 1 dans  $K(h')$ , 0 en dehors de  $K(h'')$  telle que  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $|D\eta| \leq 2/(h''-h')$ . On a alors

$$(8.25) \quad \|v\|_{L^{\alpha\chi}(K(h'))} \leq C |q| (1+|\beta|^{-1}) (h''-h')^{-1} \|v\|_{L^{\alpha}(K(h''))} .$$

En prenant la racine  $q$ -ième de chaque côté et en posant  $p = aq = \alpha + \beta - 1$ , on obtient, pour  $p > 0$  :

$$(8.26) \quad \Phi(\chi p, h') \leq [C p (1+|\beta|^{-1}) (h''-h')^{-1}]^{\alpha/p} \Phi(p, h'') ,$$

et pour  $p < 0$  :

$$(8.27) \quad \Phi(\chi p, h') \geq [-C p (h''-h'')^{-1}]^{\alpha/p} \Phi(p, h'') .$$

Ce sont ces estimations que nous allons itérer selon la méthode de Moser. Pour  $p_0 > 0$  nous posons

$$(8.28) \quad p_\nu = \chi^\nu p_0 , \quad h_\nu = 1 + 2^{-\nu} , \quad \nu = 1, 2, \dots .$$

Nous pouvons en outre choisir  $p_0$  tel que  $p_\nu \neq \alpha - 1$  pour tout  $\nu$ . Ainsi  $1 + |\beta|^{-1} < C$  pour tout  $\nu$  puisque  $p = \alpha - 1$  implique  $\beta = 0$ . On déduit alors de (8.26)

$$(8.29) \quad \Phi(p_{\nu+1}, h_{\nu+1}) \leq [C (2\chi)^\nu]^{\alpha\chi^{-\nu/p_0}} \Phi(p_\nu, h_\nu) ,$$

d'où

$$(8.30) \quad \Phi(p_{\nu+1}, h_{\nu+1}) \leq C \chi^{-\nu} [ (2\chi)^{\alpha/p_0} ]^{\sum \nu \chi^{-\nu}} \Phi(p_0, 2) = C \Phi(p_0, 2) .$$

En faisant tendre  $\nu$  vers  $+\infty$  on en déduit

$$(8.31) \quad \Phi(\infty, 1) \leq C \Phi(p_0, 2) ,$$

ce qui implique le Théorème 8.3 si  $p_0 = \gamma > \alpha - 1$ .

Si  $u$  est une sur-solution de (8.1), l'inégalité (8.30) est valable pour tout  $p_0 > 0$  et  $p_\nu < \alpha - 1$ . Par suite, en choisissant  $h_\nu$  d'une façon légèrement différente, on a

$$(8.32) \quad \Phi(\gamma, 2) \leq C \Phi(p_0, \frac{3}{2}),$$

pour tout  $p_0 > 0$ ,  $\gamma < N(\alpha - 1)/(N - \alpha)$  si  $\alpha \leq N$  et  $\gamma \leq \infty$  si  $\alpha > N$ . En itérant (8.27) on obtient

$$(8.33) \quad \Phi(-p_0, \frac{3}{2}) \leq C \Phi(-\infty, 1),$$

pour tout  $p_0 > 0$ . On achève la démonstration des Théorèmes 8.1 et 8.2 en montrant l'existence d'un  $p_0 > 0$  tel que

$$(8.34) \quad \Phi(p_0, \frac{3}{2}) \leq C \Phi(-p_0, \frac{3}{2}).$$

Ceci découle en fait du Lemme 8.1 et de la définition de  $v$  en (8.23) dans le cas  $\beta = \alpha - 1$ , puisqu'on a alors, en choisissant un cube  $K_y(h)$  à côtés parallèles à  $K(3/2)$  et inclus dans  $K(3/2)$  et  $\eta$  valant 1 dans  $K_y(h)$  à support dans  $K_y(2h)$  telle que  $|D\eta| \leq 2/h$  :

$$(8.35) \quad \|Dv\|_{L^\alpha(K_y(h))} \leq C h^{(N-\alpha)/\alpha} = C (\text{mes. } K_y(h))^{(N-\alpha)/N\alpha}.$$

Dans les deux paragraphes suivants nous utilisons les Théorèmes 8.1, 8.2 et 8.3 pour démontrer deux importants résultats de Ladyzhenskaya et Ural'ceva concernant la régularité des solutions de (8.1).

## 8.2. Continuité holdérienne des solutions faibles

Pour étudier la régularité des solutions faibles de (8.1) il est nécessaire de considérer une structuration des opérateurs  $A_i$  et  $B$  où les termes  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $b_1$  et  $b_2$  ont été absorbés par les autres termes (c'est toujours possible lorsque les solutions sont localement bornées). On supposera donc les hypothèses structurelles suivantes

$$(8.36) \quad |A_j(x,r,p)| \leq a_0 |p|^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1},$$

$$(8.37) \quad \sum_j p_j A_j(x,r,p) \geq |p|^\alpha - a_4^\alpha,$$

$$(8.38) \quad |B(x,r,p)| \leq b_0 |p|^\alpha + b_3,$$

en supposant  $\max(|a_2|, |a_4|, (b_3)) = \mu$  on définit alors

$$(8.39) \quad m(\rho) = \mu\rho + (\mu\rho)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

En utilisant la Remarque 8.1, on a démontré dans le premier paragraphe le résultat suivant

THEOREME 8.2'. Soit  $u$  une sur-solution faible, positive et localement bornée de (8.1) dans  $K(3\rho) \subset \Omega$ . Alors

$$(8.40) \quad \rho^{N/(1-\alpha)} \|u\|_{L^{\alpha-1}(K(2\rho))} \leq C \left\{ \min_{K(\rho)} u + m(\rho) \right\},$$

où  $C = C(\alpha, N, a_0, b_0, \sup_{K(2\rho)} u)$ .

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant

THEOREME 8.4. Soit  $u$  une solution faible localement bornée de (8.1) dans  $\Omega$ . Alors  $u$  est localement holdérienne dans  $\Omega$ , après redéfinition sur un ensemble de mesure nulle et, si  $K = K(\rho_0) \subset \Omega$ , on a pour tout  $\rho \leq \rho_0$  :

$$(8.41) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq C \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\delta \left\{ \sup_{K(\rho)} |u| + m(\rho_0) \right\}$$

où  $\text{osc}_{K(\rho)} u$  désigne l'oscillation de  $u$  et  $C$  dépend de  $\alpha, N, a_0, b_0, \sup_{K(\rho)} |u|$ .

Ce résultat dépend du lemme suivant :



LEMME 8.2. Soit  $u$  une fonction bornée dans  $K = K_{x_0}(\rho_0)$  et telle que pour  $\rho < \frac{1}{3}\rho_0$  on ait

$$(8.42) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq \nu \text{osc}_{K(3\rho)} u + \varepsilon(\rho)$$

où  $\nu < 1$  est fixe et  $\varepsilon$  est une fonction croissante. Alors pour tout  $\rho < \rho_0$  et  $\alpha < 1$  on a

$$(8.43) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq C(\nu) \left\{ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\delta \text{osc}_K u + \varepsilon(\rho^\alpha \rho_0^{1-\alpha}) \right\} .$$

où  $\delta$  dépend de  $\nu$  et  $\alpha$ .

Démonstration. Pour simplifier  $\rho_0 = 1$  et soit  $\rho_1 < \rho_0$ . Pour tout  $\rho \leq \frac{1}{3}\rho_1$  on a puisque  $\varepsilon$  est croissante :

$$(8.44) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq \nu \text{osc}_{K(3\rho)} u + \varepsilon(\rho_1)$$

En itérant cette inégalité on a pour tout entier  $m$

$$(8.45) \quad \text{osc}_{K(3^{-m}\rho_1)} u \leq \nu^m \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \varepsilon(\rho_1) \sum_{i=0}^{m-1} \nu^i \leq \nu^m \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \frac{\varepsilon(\rho_1)}{1-\nu} .$$

On choisit maintenant  $\rho < \frac{1}{3}\rho_1$ . Il existe alors un  $m$  tel que

$$3^{-(m+1)}\rho_1 \leq \rho < 3^{-m}\rho_1 .$$

Par suite

$$(8.46) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq \text{osc}_{K(3^{-m}\rho_1)} u \leq \nu^m \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \frac{\varepsilon(\rho_1)}{1-\nu} .$$

On a aussi  $\nu^m \leq \nu^{-1} \nu^{-\text{Log}(\rho/\rho_1)/\text{Log}3} \leq \nu^{-1} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\text{Log}\nu/\text{Log}3}$  ; par

suite on a

$$(8.47) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq \frac{1}{v} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\delta_1} \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \frac{\varepsilon(\rho_1)}{1-v} \leq C \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\delta_1} \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \varepsilon(\rho_1) \right\} .$$

Cette inégalité est valable pour tout  $\rho < \rho_1 < 1$ . Soit  $\rho_1 = \rho^\alpha$ , nous avons alors avec  $\delta = \delta_1(1-\alpha)$  :

$$(8.48) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq C \left\{ \rho^\delta \text{osc}_{K(\rho_1)} u + \varepsilon(\rho^\alpha) \right\} .$$

En éliminant la condition de normalisation  $\rho_0 = 1$ , on en déduit (8.41).

Démonstration du Théorème 8.4. Considérons pour cela les fonctions  $\bar{u} = \sup_{K(3\rho)} \text{ess } u - u$  et  $\underline{u} = u - \inf_{K(3\rho)} \text{ess } u$ . Il est clair que  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont des sur-solutions positives de (8.1) et par suite elles vérifient (8.41), c'est-à-dire

$$\rho^{N/(1-\alpha)} \left\| \sup_{K(3\rho)} \text{ess } u - u \right\|_{L^{\alpha-1}(K(2\rho))} \leq C \left\{ \inf_{K(\rho)} \text{ess} (\sup_{K(3\rho)} \text{ess } u - u) + m(\rho) \right\} ,$$

$$\rho^{N/(1-\alpha)} \left\| u - \inf_{K(3\rho)} \text{ess } u \right\|_{L^{\alpha-1}(K(2\rho))} \leq C \left\{ \inf_{K(\rho)} \text{ess} (u - \inf_{K(3\rho)} \text{ess } u) + m(\rho) \right\} .$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient à droite

$$C \left\{ \text{osc}_{K(3\rho)} u - \text{osc}_{K(\rho)} u + 2m(\rho) \right\} \quad \text{et à gauche un terme minoré par}$$

$$\rho^{N(1-\alpha)} \left\| \sup_{K(3\rho)} \text{ess } u - \inf_{K(3\rho)} \text{ess } u \right\|_{L^{\alpha-1}(K(2\rho))} = 2^{N/(\alpha-1)} \text{osc}_{K(3\rho)} u , \quad \text{d'où}$$

$$(8.49) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u \leq \left( 1 - \frac{2^{N/(\alpha-1)}}{C} \right) \text{osc}_{K(3\rho)} u + \frac{2}{C} m(\rho) ,$$

ce qui implique (8.41) en utilisant le Lemme 8.2.

### 8.3. Continuité holdérienne du gradient des solutions fortes

Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux solutions fortes d'équations quasilineaires du second ordre à forme non divergente suivante :

$$(8.50) \quad \sum_{i,j} A_{i,j}(x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B(x,u,Du) = 0 .$$

On suppose que les fonctions  $(x,r,p) \mapsto A_{i,j}(x,r,p)$  et  $B(x,r,p)$  sont définies dans  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ , y sont différentiables et, si  $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  nous posons

$$(8.51) \quad f(x) = \sup_{i,j,k} (|\frac{\partial}{\partial x_k} A_{i,j}(x,u,Du)|, |\frac{\partial}{\partial r} A_{i,j}(x,u,Du)|) .$$

L'équation (8.50) est supposée elliptique, c'est-à-dire que

$$(8.52) \quad \sum_{i,j} A_{i,j}(x,r,p) \xi_i \xi_j > 0 ,$$

pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  dans  $\mathbb{R}^N - \{0\}$  et tout  $(x,r,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Le résultat suivant, dû à Ladyzhenskaya et Ural'ceva, généralise le Théorème 4.2 à des dimensions quelconques.

THEOREME 8.5. Soit u une solution de (8.50) dans  $\Omega$  appartenant à  $W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  et soit  $K(\rho_0) = K_{x_0}(\rho_0) \subset \Omega$ . On suppose

- (i)  $\|Du\|_{L^\infty(K(\rho_0))} \leq M < \infty$ ,
- (ii)  $\sup_{i,j,k} |\frac{\partial}{\partial p_k} A_{i,j}(x,u,Du)| \leq \lambda$  dans  $K(\rho_0)$ ,
- (iii)  $\sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} A_{i,j}(x,u,Du) \xi_i \xi_j \leq \lambda \sum_i \xi_i^2$  pour  $x \in K(\rho_0)$  et  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,
- (iv)  $f(x) \leq \mu$  dans  $K$ .

Alors  $Du$  est holdérien dans  $K(\rho_0)$  et pour tous  $\rho < \rho_0$  et  $i = 1, \dots, N$ , on a

$$(8.53) \quad \operatorname{osc}_{K(\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq C \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\delta,$$

où  $\delta > 0$  dépend de  $M, N$  et  $\lambda$  et  $C \geq 0$  dépend de  $M, N, \lambda$  et  $\mu$ .

L'idée essentielle pour prouver (8.53) est de montrer que certaines combinaisons des  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  sont des sous-solutions faibles d'une équation de la forme (8.1). Puisque  $|Du(x)| \leq M$  dans  $K(\rho_0)$  on peut supposer, par renormalisation de (8.50), que

$$(8.54) \quad 0 \leq \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \leq 1, \quad \forall x \in K(\rho_0), \quad 1 \leq i \leq N.$$

On définit alors les fonctions

$$(8.55) \quad \begin{cases} \text{(i)} & w_\ell^+(x) = \gamma N \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \sum_1^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \quad \ell = 1, \dots, N, \\ \text{(ii)} & w_\ell^-(x) = \gamma N \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right) + \sum_1^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \quad \ell = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Le choix de la constante  $\gamma > 0$  se fera de telle sorte que  $w_\ell^+$  et  $w_\ell^-$  se comportent en quelque sorte comme  $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$  et  $1 - \frac{\partial u}{\partial x_\ell}$  (on verra par la suite que  $\gamma = 10$  convient). Une étape essentielle dans la démonstration de (8.53) est la suivante :

LEMME 8.3. Sous les hypothèses du Théorème 8.5 les fonctions  $w_\ell^+$  et  $w_\ell^-$  sont des sous-solutions faibles et positives d'une équation de la forme (8.1) vérifiant des relations structurelles de la forme (8.2), (8.3) et (8.4).

Démonstration. Pour  $\zeta \in W^{1,2}(K(\rho_0))$ , à support compact dans  $K(\rho_0)$ , on a pour tout  $s = 1, \dots, N$

$$(8.56) \quad \int_{K(\rho_0)} \left\{ \sum_{i,j} A_{i,j}(x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B(x,u,Du) \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x_s} dx = 0.$$

Supposons temporairement que  $u$  est de classe  $C^3$  dans  $K$ , on intègre alors (8.56) par parties et on a pour tout  $s \in \{1, \dots, N\}$  :

$$(8.57) \quad \int_{K(\rho_0)} \left\{ \sum_{i,j} A_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \left( \sum_{m,i,j} A_{i,j}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_0} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \sum_j A^j \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} + \sum_{i,j} B_{i,j}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \zeta + B \frac{\partial \zeta}{\partial x_s} \right\} dx = 0 ,$$

où

$$A_{i,j}^m = \frac{\partial}{\partial p_m} A_{i,j}(x, u, Du) - \frac{\partial}{\partial p_j} A_{i,j}(x, u, Du) ,$$

$$A^j = \sum_i \frac{\partial}{\partial r} A_{i,j}(x, u, Du) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_{i,j}(x, u, Du) ,$$

$$B_{i,j}^s = - \frac{\partial}{\partial r} A_{i,j}(x, u, Du) \frac{\partial u}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s} A_{i,j}(x, u, Du) .$$

En fait, par un argument d'approximation (8.57) reste valide si  $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ . Nous posons maintenant  $\zeta = \frac{\partial u}{\partial x_s}$  où  $\eta \geq 0$ ,  $\eta$  de classe  $C^1$  à support compact dans  $K(\rho_0)$  et nous sommes sur  $s$ . Si  $v = \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$ ,  $v$  vérifie

$$\int_{K(\rho_0)} \left\{ \sum_{i,j,s} A_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} \eta + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \dots \right.$$

$$(8.58) \quad \left. \dots + \frac{1}{2} \sum_j A^j \frac{\partial v}{\partial x_j} \eta + \frac{1}{2} \sum_{i,j,m} A_{i,j}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \eta + \dots \right.$$

$$\left. \dots \sum_{i,j,s} B_{i,j}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_s} \eta + B \eta \Delta u + \sum_s B \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial \eta}{\partial x_s} \right\} dx = 0 .$$

Si maintenant nous ajoutons (8.58) à  $\frac{1}{2} \gamma$  - fois (8.57), nous obtenons après avoir substitué  $s = \ell$  et  $\zeta = \eta$  dans (8.56), en prenant  $w = w_\ell^+$

$$(8.59) \quad \int_{K(\rho_0)} \left\{ \sum_{i,j,s} A_{i,j}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j} \eta + \sum_j \left( \frac{1}{2} \sum_i A_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + C_j^\ell \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right\} dx = \dots$$

$$\dots - \int_{K(\rho_0)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j,m} A_{i,j}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_j A_j^j \frac{\partial w}{\partial x_j} + \sum_{i,j} C_{i,j}^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \eta dx = 0$$

où

$$C_{i,j}^\ell = - \sum_s B_{i,j}^s \frac{\partial u}{\partial x_s} - B \delta_i^j + \frac{1}{2} B_{i,j}^\ell,$$

$$C_j^\ell = B \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \gamma B \delta_i^\ell.$$

En utilisant les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv) du Théorème 8.5 on obtient

$$(8.60) \quad \int_{K(\rho_0)} \sum_j \left( \sum_i A_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + 2C_j^\ell \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx \leq -2 \int_{K(\rho_0)} \sum_{s,i} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \right)^2 \eta dx \dots$$

$$\dots + C(M) \int_{K(\rho_0)} \left\{ \sum_{i,j,m} \lambda \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| + f(x) \left( \sum_j \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right) \right\} \eta dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young les termes de la dernière intégrale de la relation (8.60) contenant des dérivées partielles secondes de  $u$  sont absorbés par le terme précédent :  $-2 \int_{K(\rho_0)} \sum_{s,i} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \right)^2 \eta dx$ .

On obtient alors une relation du type suivant :

$$(8.61) \quad \int_{K(\rho_0)} \sum_j \left( \sum_i A_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + 2C_j^\ell \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx \leq C(\lambda, M) \int_{K(\rho_0)} (|Dw|^2 + f^2(x)) \eta dx.$$

Par suite  $w$  est sous-solution d'une équation de la forme (8.1)

$$(8.62) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} G_j(x, w, Dw) + \mathfrak{B}(x, w, Dw) = 0,$$

avec  $G_j(x, w, Dw) = \sum_i A_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + 2 C_j^\ell$  et

$\mathfrak{B}(x, w, Dw) = C(\lambda, M) (f^2(x) + |Dw|^2)$ . Par suite

$$|a_j(x,u,p)| \leq \lambda |p| + C(\lambda, M) f(x) ,$$

$$\sum_j a_j(x,u,p) p_j \geq |p|^2 - C(\lambda, M) f^2(x) ,$$

$$|B(x,u,p)| \leq C(\lambda, M) (f^2(x) + |p|^2) .$$

Compte tenu de l'hypothèse (iv) du Théorème 8.5,  $a$  et  $B$  vérifient les relations structurelles (8.2), (8.3) et (8.4) avec  $\alpha = 2$  .

On démontre de la même façon que  $w_\ell^m$  vérifie une inégalité de la forme (8.60), ce qui termine la démonstration du Lemme 8.3.

Le résultat suivant est une généralisation du Lemme 8.2.

LEMME 8.4. Soient  $(u_1, \dots, u_N)$  et  $(w_1, \dots, w_{N'})$  deux systèmes de fonctions bornées dans  $K(\rho_0)$  tels que pour tout  $\rho < \frac{1}{3} \rho_0$  il existe  $r \in \{1, \dots, N'\}$  tel que

$$(8.63) \quad \text{osc}_{K(3\rho)} w_r \geq \delta_0 \text{osc}_{K(3\rho)} u_i \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

et

$$(8.64) \quad \text{osc}_{K(\rho)} w_r \leq \nu \text{osc}_{K(3\rho)} w_r + \varepsilon(\rho) ,$$

où  $\delta_0 > 0$  et  $\nu \in ]0, 1[$  sont fixes et  $\varepsilon$  une fonction croissante. Alors pour tous  $\rho < \rho_0$  et  $\alpha < 1$ , on a

$$(8.65) \quad \text{osc}_{K(\rho)} u_i \leq C \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\delta w_0 + \varepsilon(\rho^\alpha \rho_0^{1-\alpha}) \right\} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

où  $C = C(\nu, \delta_0, N')$ ,  $\delta = \delta(\nu, N', \alpha)$  et  $w_0 = \max_{\ell=1, \dots, N'} \text{osc}_{K(\rho_0)} w_\ell$ .

Démonstration. Nous ne ferons que l'esquisser tant elle suit les idées de celle du Lemme 8.2. Pour  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 < \rho_0$  et  $\rho \leq \frac{1}{3} \rho_0$  on a pour quelque  $r \in \{1, \dots, N'\}$

$$(8.66) \quad \text{osc}_{K(\rho)} w_r \leq \nu \text{osc}_{K(3\rho)} w_r + \varepsilon(\rho_1) .$$

En prenant  $\rho = 3^{-i} \rho_1$  et en itérant  $m N'$  fois nous obtenons pour un  $w_r$ ,  $r \in \{1, \dots, N'\}$

$$(8.67) \quad \text{osc}_{K(3^{-mN'} \rho_1)} w_r \leq v^m w_0 + \frac{\varepsilon(\rho_1)}{1-v}$$

et on achève comme dans le Lemme 8.2.

Démonstration du Théorème 8.5. Pour  $\rho < \frac{1}{3} \rho_0$ , nous choisissons  $r \leq N$  tel que

$$(8.68) \quad \text{osc}_{K(3\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \geq \text{osc}_{K(3\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_\ell}, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, N\}.$$

En prenant  $\gamma = 10$  dans la définition de  $w_r^+$  et  $w_r^-$  on a

$$(8.69) \quad 8 N \text{osc}_{K(3\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \leq \text{osc}_{K(3\rho)} w_r^+, \quad \text{osc}_{K(3\rho)} w_r^- \leq 12 N \text{osc}_{K(3\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_r}.$$

Posons  $W_r^\pm = \sup_{K(3\rho)} w_r^\pm$ . A partir du Lemme 8.3 les fonctions  $W_r^+ - w_r^+$  sont des sur-solutions positives d'une équation de la forme (8.62) et en définissant une fonction  $m_r$  à partir de la structure des opérateurs  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{B}$  on obtient

$$(8.70) \quad \rho^{-N} \int_{K(2\rho)} (W_r^\pm - w_r^\pm) dx \leq C \{W_r^\pm - \sup_{K(\rho)} w_r^\pm + m_r(\rho)\}.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} W_r^+ - w_r^+ + W_r^- - w_r^- &\geq 10N \left( \sup_{K(3\rho)} \text{ess} \frac{\partial u}{\partial x_r} - \inf_{K(3\rho)} \text{ess} \frac{\partial u}{\partial x_r} \right) \dots \\ &\dots + 2 \inf_{\Sigma_i} \text{ess} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - 2 \sup_{\Sigma_i} \text{ess} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \\ &'' \geq 6N \text{osc}_{K(3\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \geq \frac{1}{2} \text{osc}_{K(3\rho)} w_r^\pm \end{aligned}$$

en utilisant (8.69). Par suite on a



$$(8.71) \quad (2\rho)^{-N} \int_{K(2\rho)} (W_r^+ - w_r^+) dx \geq \frac{1}{4} \operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+$$

soit pour  $W^+ - w_r^+$  soit pour  $W^- - w_r^-$ . Supposons que l'on ait

$$(8.72) \quad (2\rho)^{-N} \int_{K(2\rho)} (W_r^+ - w_r^+) dx \geq \frac{1}{4} \operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+,$$

on déduit alors de (8.70)

$$\operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+ \leq C \left( W_r^+ - \sup_{K(\rho)} \operatorname{ess} w_r^+ + m(\rho) \right) \quad \text{d'où}$$

$$\operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+ \leq C \left( \operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+ - \operatorname{osc}_{K(\rho)} w_r^+ - m(\rho) \right)$$

et finalement

$$(8.73) \quad \operatorname{osc}_{K(\rho)} w_r^+ \leq \nu \operatorname{osc}_{K(3\rho)} w_r^+ + C m(\rho)$$

avec  $\nu = 1 - \frac{1}{C}$ . En utilisant (8.68), (8.69) et le Lemme 8.4 on en déduit (8.53).

REMARQUE 1. Les Théorèmes 8.4 et 8.5 donnent la régularité des solutions de (8.1) et (8.50) dans tout ouvert  $\Omega'$  relativement compact dans  $\Omega$  en utilisant un recouvrement fini par des courbes  $K(\rho_0)$ .

REMARQUE 2. Dans le cas où  $u$  est solution forte de l'équation à forme divergentielle (8.1), on a alors

$$(8.74) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + B(x,u,Du) = 0.$$

Il est alors classique de vérifier que pour tout  $\ell$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$  vérifie une équation linéaire à forme divergentielle. Si on suppose alors  $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  et

$$(i) \quad \|Du\|_{L^\infty(K(\rho_0))} \leq M,$$

$$(ii) \quad \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,u,Du) \xi_i \xi_j \leq \lambda \sum_i \xi_i^2 ,$$

$$(iii) \quad f(x) = \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| + \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right| + |B| \leq \mu \quad \text{dans } K(\rho_0) ,$$

on a pour tout  $\rho < \rho_0$

$$(8.75) \quad \text{osc}_{K(\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_l} \leq C \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\delta ,$$

où  $C$  et  $\delta$  sont des constantes positives dépendant de  $M, N, \lambda$  et  $\mu$ .