

9. EQUATIONS QUASILINEAIRES DEGENEREEES

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la régularité du gradient des solutions dans $W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'équation

$$(9.1) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x,u,Du) + B(x,u,Du) = 0 ,$$

quand le théorème de Ladyzhenskaya et Ural'ceva démontré au chapitre précédent ne s'applique pas. Un exemple typique est le suivant :

$$(9.2) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (|Du|^{\alpha-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f .$$

Quand $\alpha > 2$ l'équation est dégénérée. Les premiers résultats concernant ces équations sont dûs à Ural'ceva [29] et indépendamment Uhlenbeck. La version très générale que nous exposerons est due à Tolksdorf [26]. Dans la suite Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N et nous supposons que les fonctions A_j appartiennent à $C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \cap \dots \cap C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N - \{0\})$ et que B définie dans $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est mesurable dans Ω et séparément continue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Nous supposons en outre les relations de croissance et d'ellipticité suivantes :

$$H.1 \quad A_j(x,r,0) = 0 ,$$

$$H.2 \quad \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,r,p) \xi_i \xi_j \geq \gamma (\kappa + |p|)^{\alpha-2} |\xi|^2 ,$$

$$H.3 \quad \sum_{i,j} \left| \frac{\partial A_i}{\partial p_i}(x,r,p) \right| \leq \Gamma (\kappa + |p|)^{\alpha-2} ,$$

$$H.4 \quad \sum_{i,j} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} A_j(x,r,p) \right| + \sum_i \left| \frac{\partial}{\partial r} A_j(x,r,p) \right| \leq \Gamma (\kappa + |p|)^{\alpha-2} |p| ,$$

$$H.5 \quad |B(x,r,p)| \leq \Gamma (1+|p|)^\alpha ,$$

où $\kappa \in [0,1]$, γ et Γ sont des constantes positives et ce, pour tout $(x,r,p,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N - \{0\} \times \mathbb{R}^N$. Le cas $\kappa = 0$ est le plus difficile et correspond aux opérateurs réellement dégénérés si $\alpha > 2$. Le cas $\kappa > 0$ se rattache au chapitre précédent.

Dans la suite nous supposons $x_0 \in \Omega$, et $R \in]0,1[$ tels que $B_{x_0}(3R) \subset \Omega$. D'après le Théorème 8.1, pour toute solution faible u de (8.1) dans Ω il existe $\lambda \in [0,1]$ et $c_0 \geq 0$ dépendant de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, R$ et $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ tels que

$$(9.3) \quad |u(x) - u(x')| \leq c_0 |x - x'|^\lambda, \quad \forall x, x' \in B_{x_0}(2R).$$

Le résultat essentiel de ce chapitre est le suivant :

THEOREME 9.1. Soient $u \in W^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution faible de (9.1) dans Ω et $B_{x_0}(3R) \subset \Omega$. Il existe alors $\sigma > 0$ et $c \geq 0$ dépendant de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et c_0 tels que

$$(9.4) \quad |Du(x)| \leq c R^{\lambda-1},$$

$$(9.5) \quad |Du(x) - Du(x')| \leq c R^{\lambda-1-\sigma} |x - x'|^\sigma,$$

pour tout $x, x' \in B_{x_0}(R)$.

REMARQUE 9.1. Dans le cas de l'équation

$$(9.6) \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (|Du|^{\alpha-2} Du) = -N,$$

on a une solution particulière $u(x) = \frac{\alpha-1}{\alpha} |x|^{\alpha/(\alpha-1)}$. On trouve donc que Du est holdérien d'exposant optimal $1/(\alpha-1) < 1$ si $\alpha > 2$.

9.1. Quelques lemmes d'analyse

Dans ce chapitre nous exposons quelques résultats à la "De Giorgi et Morrey" fondamentaux pour prouver le Théorème 1. Nous appelons $B(R)$, $R \in]0,1[$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon R de \mathbb{R}^N et soit $v \in W^{1,\alpha}(B(R))$. Pour $r \in (0,R)$ et $\ell, k \in \mathbb{R}$ soit

$$(9.7) \quad A_{\ell,k,r} = \{x \in B(r) = k \leq v(x) \leq \ell\}.$$

PROPOSITION 9.1. Supposons $\alpha > 1$, $\sigma \in]0, \alpha/N[$ et

$$(9.8) \quad \int_{A_{\ell, k, R}} |Dv|^\alpha dx \leq M^\alpha (r' - r)^{-\alpha} R^{N\sigma} (\text{mes } A_{\infty, k, r'})^{1-\sigma},$$

où $M > 0$ est une constante, pour tous $\ell, k, r, r' \in \mathbb{R}$ vérifiant $R/2 < r < r' \leq R$ et $0 \leq k \leq \ell \leq \delta M$ où δ est une constante positive. Il existe alors $\mu > 0$ dépendant de N, α, σ et δ tel que si on a

$$(9.9) \quad \text{mes. } A_{\infty, 0, R} \leq \mu R^N,$$

on a aussi

$$(9.10) \quad \sup_{B(R/2)} \text{ess } v \leq \delta M.$$

La démonstration de la proposition suivante utilise le résultat suivant dû à De Giorgi

LEMME 9.1. Soit $v \in W^{1,1}(B(R))$. Alors

$$(9.11) \quad (\ell - k) (\text{mes. } A_{\infty, \ell, R})^{1-1/N} \leq c R^N (\text{mes. } (B(R) - A_{\infty, k, R}))^{-1} \int_{A_{\ell, k, R}} |Dv| dx$$

pour tout $\ell > k$, c ne dépendant que de N .

Démonstration. Définissons \bar{v} par

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(x) \leq k, \\ v(x) - k & \text{si } k \leq v(x) \leq \ell, \\ \ell - k & \text{si } v(x) \geq \ell. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_{A_{\infty, \ell, R}} \bar{v}(x) dx = (\ell - k) \text{mes. } A_{\infty, \ell, R} \quad \text{et aussi}$$

$$\int_{B(R)} |D\bar{v}| dx = \int_{A_{\ell, k, R}} |Dv| dx. \quad \text{En utilisant le Lemme 4.3}$$

(avec une légère variation laissée au lecteur), on a

$$\int_{A_{\infty, \ell, R}} \bar{v} dx \leq C \frac{R^N (\text{mes. } A_{\infty, \ell, R})^{1/N}}{\text{mes. } (B(R) - A_{\infty, k, R})} \int_{B(R)} |Dv| dx \quad \text{d'où (9.11).}$$

Démonstration de la Proposition 9.1. On désigne par c une constante générique ne dépendant que de N, α, σ et δ . Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$(9.12) \quad \begin{cases} r_i = R/2 + 2^{-i-1} R, \\ k_i = \delta(1-2^{-i}) M, \\ A_i = A_{\infty, k_i, r_i}. \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 9.1, (9.7) et l'inégalité de Hölder, on a

$$(9.13) \quad 2^{-i} \delta M (\text{mes. } A_{i+1})^{1-\frac{1}{N}} \leq c (\text{mes. } A_i)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{A_{k_{i+1}, k_i, r_{i+1}}} |Dv|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et le terme de droite est majoré par $c 2^i M R^{(N\sigma-\alpha)/\alpha} (\text{mes. } A_i)^{1-\sigma/\alpha}$ en utilisant (9.9). Par suite on a

$$(9.14) \quad R^{-N} \text{mes. } A_{i+1} \leq c^i (R^{-N} \text{mes. } A_i)^{N(\alpha-\sigma)/\alpha(N-1)}.$$

Il est alors très facile de vérifier par récurrence que

$$(9.15) \quad R^{-N} \text{mes. } A_{i+1} \leq c^i \left(c^{\frac{(1+\varepsilon)^i - 1}{\varepsilon^2} - \frac{i}{\varepsilon}} R^{-N} (\text{mes. } A_0)^{(1+\varepsilon)^i} \right)^{1+\varepsilon},$$

où $1+\varepsilon = N(\alpha-\sigma)/\alpha(N-1)$ et $\varepsilon > 0$ par hypothèse. Or

$R^{-N} \text{mes. } A_0 = R^{-N} \text{mes. } A_{\infty, 0, R} \leq \mu$ en utilisant (9.9). Par suite si on choisit $0 < \mu < \mu_0 = c^{-1/\varepsilon^2}$, on en déduit

$$(9.16) \quad R^{-N} \text{mes. } A_i \leq \mu c^{-i/\varepsilon},$$

et par suite $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\text{mes. } A_i) = 0$, c'est-à-dire (9.10).

COROLLAIRE 9.1. Supposons $\alpha > 1$, $\sigma \in]0, \alpha/N[$ et que v vérifie

$$\int_{B(R)} |v| dx \leq M R^N,$$

$$\int_{A_{\infty, k, r}} |Dv|^\alpha dx \leq M^\alpha (r'-r)^{-\alpha} R^{N\sigma} (\text{mes. } A_{\infty, k, r'})^{1-\sigma},$$

où M est une constante et $R/2 < r < r' \leq R$. Il existe alors une constante c dépendant de N, α et σ telle que

$$v(x) \leq c M \quad \text{p.p. dans } B(R/2) .$$

La démonstration du Corollaire 9.1. est immédiate à partir de la Proposition 9.1.

PROPOSITION 9.2. Supposons $\alpha > 1$ et qu'il existe $\mu \in]0, 1[$ tel que

$$(9.17) \quad \text{mes. } A_{\infty, 0, R/2} \leq \mu \text{ mes. } B(R/2) ,$$

et que

$$(9.18) \quad \int_{A_{M, k, r}} |Dv|^{\alpha} dx \leq c (\text{mes. } A_{\infty, k, r'}) \{ (r'-r)^{-\alpha/2} K^{\alpha} + (r'-r)^{-\alpha} (M-k)^{\alpha} \} ,$$

où c, K et M sont des constantes positives et ce pour tout $k \in [0, M]$ et pour tous r, r' tels que $0 < r < r' \leq R$. Il existe alors une constante $\delta \in]0, 1[$ dépendant de N, α , c et μ telle que

$$(9.19) \quad \sup_{B(R/4)} \text{ess } v(x) \leq (1-\delta) M + \frac{1}{\delta} K R^{1/2} .$$

Démonstration. On désigne par g une constante générique dépendant de N, α , c et μ . Pour $i \in \mathbb{N}$ on pose

$$(9.20) \quad \begin{cases} k_i = (1-2^{-i}) M , \\ A_i = A_{\infty, k_i, R/2} . \end{cases}$$

Soient $\delta > 0$ et i_0, i entiers tels que

$$(9.21) \quad \begin{cases} M \geq \frac{1}{\delta} K R^{1/2} , \\ i \leq i_0 , \\ 2^{-i_0} \geq \delta . \end{cases}$$

On déduit du Lemme 9.1, de (9.17), (9.18) et (9.21) que

$$2^{-i} M(\text{mes. } A_{i+1})^{1-1/N} \leq g(\text{mes. } (A_i - A_{i+1}))^{1-1/\alpha} \left(\int_{A_i - A_{i+1}} |Dv|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}, \text{ d'où}$$

$$2^{-i} M(\text{mes. } A_{i+1})^{1-1/N} \leq g 2^{-i} M R^{(N-\alpha)/\alpha} (\text{mes. } (A_i - A_{i+1}))^{1-1/\alpha}.$$

Cette inégalité peut être transformée en

$$(R^{-N} \text{mes. } A_{i+1})^{(N-1)\alpha/N(\alpha-1)} \leq g R^{-N} \text{mes. } (A_i - A_{i+1}).$$

En sommant on en déduit

$$i_0 (R^{-N} \text{mes. } A_{i+1})^{(N-1)\alpha/N(\alpha-1)} \leq g R^{-N} \text{mes. } B(R/2).$$

En utilisant alors la Proposition 9.1 et (9.18), on peut trouver $\delta > 0$ ne dépendant que de N, α, c et μ tel que (9.19) découle de (9.21) (plus exactement de $M \delta \geq K \sqrt{R}$). Comme (9.19) est valable si on n'a pas (9.21), on en déduit la Proposition 9.2.

9.2. Estimations dans un cas simple et non dégénéré

Notons B la boule unité de \mathbb{R}^N . Soient $f \in L^\infty(B)$ et $u \in W^{1,\alpha}(B) \cap C^0(B)$ deux fonctions telles que

$$(9.22) \quad \int_B \sum_j A_j(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_B f \varphi dx,$$

pour tout $\varphi \in W^{1,\alpha}(B)$. Nous supposons aussi, pour un réel u_0 :

$$(9.23) \quad \|f\|_{L^\infty(B)} \leq 1,$$

$$(9.24) \quad \|u\|_{L^\infty(B)} \leq u_0.$$

En plus des hypothèses H.1, ..., H.5, nous ferons l'hypothèse de non dégénérescence suivante :

$$H.6 \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_i} A_j(x, r, p) \xi_i \xi_j \geq \varepsilon |\xi|^2,$$

où ε est une constante positive et $(x, r, p, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N - \{0\} \times \mathbb{R}^N$.

LEMME 9.2. Il existe des constantes γ_0 et Γ_0 positives et ne dépendant que de N, α, γ et Γ telles que

$$(9.25) \left\{ \begin{array}{l} \sum_i (A_j(x,r,p) - A_j(x,r,p'))(p_j - p'_j) \dots \\ \dots \geq \begin{cases} \gamma_0 (1+|p|+|p'|)^{\alpha-2} |p-p'|^2 & \text{si } \alpha \leq 2, \\ \gamma_0 |p-p'|^\alpha & \text{si } \alpha \geq 2, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$(9.26) \sum_j |A_j(x,r,p)| \leq \Gamma_0 (\kappa + |p|^{\alpha-2}) |p|,$$

pour tous $x \in B, r \in \mathbb{R}$ et $p, p' \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. L'inégalité (9.26) est une conséquence immédiate de H.3 et de l'égalité $A_j(x,r,p) = \int_0^1 \sum_i A_i(x,r,t p) p_i dt$. Pour démontrer (9.25) nous pouvons supposer $|p| \leq |p'|$. Par suite

$$\frac{1}{4} |p-p'| \leq \kappa + |p'+t(p-p')| \leq 1 + |p| + |p'|$$

pour tout $t \in [0, \frac{1}{4}]$. En combinant cette inégalité avec

$$(9.27) \left\{ \begin{array}{l} \sum_j (A_j(x,r,p) - A_j(x,r,p'))(p_j - p'_j) \geq \dots \\ \dots + \frac{1}{4} \int_0^{1/4} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_i} A_j(x,r,p'+t(p-p'))(p_i - p'_i)(p_j - p'_j) dt, \end{array} \right.$$

on en déduit (9.25).

Le résultat suivant donne des renseignements sur les dérivées secondes des solutions de (9.22).

PROPOSITION 9.3. Soit $u \in W^{1,\alpha}(B) \cap C^0(B)$ une solution de (9.22) vérifiant (9.23) et (9.24). On suppose H.1, ..., H.5 et H.6. Alors

$$(9.28) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad u \in W_{loc}^{2,2}(B) \cap W_{loc}^{1,\infty}(B) \quad \text{si } \alpha \geq 2, \\ (ii) \quad u \in W_{loc}^{2,\alpha}(B) \cap W_{loc}^{1,\alpha+2}(B) \quad \text{si } \alpha \leq 2. \end{array} \right.$$

En outre si $\psi \in C^2_0(B)$, $\psi \geq 0$ et si G est une fonction réelle de classe C^1 par morceaux telle que

$$(9.29) \quad 0 \leq G' \leq c_0 ,$$

où c_0 est une constante positive, alors pour tout $s \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$(9.30) \quad \begin{aligned} & \int_B \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_i} A_j(x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} G' \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \psi \, dx \leq \dots \\ & \dots \int_B \sum_j A_j(x,u,Du) \frac{\partial}{\partial x_s} \left(G \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \, dx \dots \\ & \dots - \int_B \sum_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_s}(x,u,Du) + \frac{\partial A_j}{\partial r}(x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} \right) G' \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \psi \, dx \dots \\ & \dots - \int_B f \frac{\partial}{\partial x_s} \left(G \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \psi \right) \, dx . \end{aligned}$$

Démonstration. (9.28) (i) a été démontrée au Chapitre précédent (et une estimation de $\|u\|_{W_{loc}^{1,\infty}}$ sera donnée plus loin). Nous supposons donc $\alpha < 2$. Pour $h > 0$, $K > 0$, $s \in \{1, \dots, N\}$ et \vec{e}_s le s -ième vecteur unité de \mathbb{R}^N on pose $h_s = h\vec{e}_s$ et

$$\begin{aligned} u_h(x) &= h^{-1} \{u(x+h_s) - u(x)\} , \\ u_{h,k} &= \begin{cases} K & \text{si } u_h \geq K , \\ u_h & \text{si } u_h \in [-K, K] , \\ -K & \text{si } u_h \leq -K , \end{cases} \\ u_{s,k} &= \max \left(-K, \min \left(K, \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \right) . \end{aligned}$$

On peut remarquer que $u_{h,k} = \max(-K, \min(K, u_h))$. On notera par la suite g et g_ψ des constantes indépendantes de h et K (mais pas de ψ concernant g_ψ). Définissons alors

$$\varphi(x) = h^{-1} (u_{h,K}(x) \psi^2(x) - u_{h,K}(x+h_s) \psi^2(x+h_s))$$

et utilisons φ comme fonction test dans (9.22). En utilisant H.2, H.4, (9.23) et le Lemme 9.2 on obtient

$$\begin{aligned}
 & g^{-1} \int_B (1+|Du|+|Du(x+h_s)|)^{\alpha-2} |Du_{h,K}(x)|^2 \varphi^2(x) dx \dots \\
 & \leq \int_0^1 \int_B \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x+h_s, u(x+h_s), \tau Du(x+h_s) + (1-\tau)Du(x)) \frac{\partial u_{h,K}}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_{h,K}}{\partial x_j}(x) dx d\tau \dots \\
 & \leq 2 \int_0^1 \int_B \sum_i A_j(x+\tau h_s, u(x+\tau h_s), Du(x+\tau h_s)) \frac{\partial}{\partial x_s}(u_{h,K}(x)\varphi(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)) dx d\tau \dots \\
 & \dots - \int_0^1 \int_B \sum_i \left\{ \frac{\partial A_j}{\partial r}(x+h_s, \tau u(x+h_s) + (1-\tau)u(x), Du(x)) u_{h,K}(x) + \dots \right. \\
 & \quad \dots + \left. \frac{\partial A_j}{\partial x_s}(x+\tau h_s, u(x), Du(x)) \right\} \frac{\partial u_{h,K}}{\partial x_j}(x) \varphi^2(x) dx d\tau \dots \\
 & \quad \dots - \int_0^1 \int_B f(x+\tau h_s) \frac{\partial}{\partial x_s}(u_{h,K}(x) \varphi^2(x)) dx d\tau .
 \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est majorée par

$$\begin{aligned}
 & g_\varphi \int_0^1 \int_B (1+|Du(x+\tau h_s)|)^{\alpha-1} \{ |Du_{h,K}(x)| \varphi(x) + |u_{h,K}(x)| (\varphi(x) + |D\varphi(x)|) \} dx d\tau \\
 & \quad \dots + g \int_B (1+|Du(x)|)^{\alpha-1} (1+|u_{h,K}(x)|) |Du_{h,K}(x)| \varphi^2(x) dx \dots \\
 & \quad + g_\varphi \int_B (|Du_{h,K}(x)| + |u_{h,K}(x)|) \varphi(x) dx .
 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young on a

$$\begin{aligned}
 (9.31) \quad & \int_B |Du_{h,K}|^\alpha \varphi^\alpha dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_B (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_{h,K}|^2 \varphi^2 dx + \dots \\
 & \quad \dots + \frac{2-\alpha}{2} \int_B (1+|Du|)^\alpha \varphi^{2\alpha/(2-\alpha)} dx .
 \end{aligned}$$

En utilisant (9.31) on en déduit alors que $Du_{h,K}$ demeure borné dans $W_{loc}^{1,\alpha}(B)$ et en faisant tendre h vers 0 on en déduit aussi

$$(9.32) \quad \int_B (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_{s,K}|^2 \varphi^2 dx \leq g_\varphi + g \int_B (1+|Du|)^\alpha u_{s,K}^2 \varphi^2 dx .$$

Pour estimer le terme de droite de (9.32) on choisit comme fonction test $\varphi = (u-u_0) u_{s,K}^2 \varphi^2$ et on a

$$(9.33) \quad \int_B \sum_j A_j(x, u, Du) \frac{\partial u}{\partial x_j} u_{s,K}^2 \phi^2 dx = \int_B f(u-u_0) u_{s,K}^2 \phi^2 dx \dots$$

$$\dots - 2 \int_B \sum_i (u-u_0) A_j(x, u, Du) u_{s,K} \phi \left\{ \frac{\partial u_{s,K}}{\partial x_j} \phi + u_{s,K} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} dx .$$

En utilisant le Lemme 9.2 et l'inégalité de Young on obtient

$$(9.34) \quad \int_B (1+|Du|)^\alpha u_{s,K}^2 \phi^2 dx \leq \dots$$

$$\dots g_\psi + g \int_B (u-u_0)(1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_{s,K}|^2 \phi^2 dx .$$

En utilisant la continuité de u et en prenant le support de ϕ assez petit, on peut rendre $|u-u_0|^2 \phi^2$ arbitrairement petit (quitte à changer de u_0). En combinant alors (9.31), (9.32) et (9.34) on en déduit que $\int_B |Du_{s,K}|^\alpha \phi^\alpha dx$ et $\int_B (1+|Du|)^\alpha u_{s,K}^2 \phi^2 dx$ sont bornés uniformément par rapport à K , d'où (9.28) (ii). Pour démontrer (9.30) on choisit comme fonction test

$$(9.35) \quad \varphi(x) = h^{-1} \{G(u_h(x)) \phi(x) - G(u_h(x+h_0)) \phi(x+h_s)\} .$$

Grâce à (9.28) (ii) le terme de droite de (9.22) obtenu alors converge vers $\frac{\partial}{\partial x_s} (G(\frac{\partial u}{\partial x_s}) \phi)$ et (9.30) découle alors du Lemme de Fatou.

Le résultat suivant donne une borne de $|Du(x)|$ indépendante de ε et de n .

PROPOSITION 9.4. Il existe une constante C ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 telle que

$$(9.36) \quad \|Du\|_{L^\infty(B(1/2))} \leq C .$$

Démonstration. Soit $x_0 \in B_{1/2}$ et ρ une fonction C^∞ positive telle que $\rho(t) = 0$ sur $[1, +\infty[$, $\rho(t) = 1$ sur $]-\infty, 0]$, $0 \leq \rho(t) \leq 1$ sur $]0, 1[$. Pour $R \in]0, 1/8[$ et $i \in \mathbb{N}$ on pose

$$(9.37) \quad \begin{cases} R_i &= R(2+2^{-i-1}) , \\ B_i &= B_{x_0}(R_i) , \\ \varphi_i(x) &= \rho(2^{i+1} R^{-1}(|x-x_0|-R_i)) . \end{cases}$$

Dans la suite g (resp. g_R) est une constante générique dépendant seulement de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 (resp. $N, \alpha, \gamma, \Gamma, u_0$ et R). Nous allons montrer qu'il existe $R_0 > 0$ dépendant de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 tel que

$$(9.38) \quad \int_{B_i} (1+|Du|)^{\alpha+2i} dx \leq g_R ,$$

pour $i = 1, 2, \dots, N(\alpha+2)$ pourvu que $R \leq R_0$.

Dans le cas $i = 0$ (9.38) découle du Lemme 9.2 avec pour fonction test $\varphi_0^p u$. Par récurrence nous supposons donc que (9.38) est valide pour $i \in \mathbb{N}$. Soit $M > 0$ et $s \in \{1, \dots, N\}$; posons

$$u_s = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_s} - 1 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \geq 1 , \\ 0 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \in [-1, 1] , \\ \frac{\partial u}{\partial x_s} + 1 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq -1 , \end{cases}$$

$$u_{s,M} = \begin{cases} M & \text{si } u_s \geq M , \\ u_s & \text{si } u_s \in [-M, M] , \\ -M & \text{si } u_s \leq -M . \end{cases}$$

Considérons $G(\frac{\partial u}{\partial x_s}) \psi = u_s |u_{s,M}|^{2i} \varphi_{i+1}^2$ comme fonction test dans (9.22). Comme on a

$$(9.39) \quad \frac{1}{2} (1+|Du|) \leq \kappa + |Du| \leq 1 + |Du| ,$$

si $G(\frac{\partial u}{\partial x_s}) \neq 0$, on déduit de H.2, H.3, H.4, (9.23), (9.26) et (9.39)

$$\begin{aligned}
 & \int_B (1+|D\varphi|)^{\alpha-2} |Du_s|^2 u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx \leq \dots \\
 (9.40) \quad & \dots g_R \int_B (1+|Du|)^{\alpha-1} u_{s,M}^{2i} |Du_s| \varphi_{i+1} dx \dots \\
 & \dots + g_R \int_B (1+|Du|)^{p+2i} (\varphi_{i+1} + |D\varphi_{i+1}|) dx \dots \\
 & \dots + g \int_B (1+|Du|)^\alpha |Du_s| u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx .
 \end{aligned}$$

En utilisant (9.38) et l'inégalité de Young on obtient alors

$$\begin{aligned}
 (9.41) \quad & \int_B (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_s|^2 u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx \leq \dots \\
 & \dots g_R + g \int_B (1+|Du|)^{p+2} u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx .
 \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Young et une intégration par parties on a

$$\int_B \sum_s (1+|Du|)^{\alpha+2} u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx \leq g_R + g \int_B \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_s} u_s |u_s|^\alpha u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 (9.42) \quad & \int_B \sum_s (1+|Du|)^{\alpha+2} u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx \leq \dots \\
 & \dots g_R + g \int_B \sum_s |u-u(x_0)| (1+|Du|)^{\alpha+2} u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx \dots \\
 & \dots + g \int_B \sum_s |u-u(x_0)| (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_s| u_{s,M}^{2i} \varphi_{i+1}^2 dx .
 \end{aligned}$$

D'après le Chapitre 8 il existe $\alpha > 0$ dépendant de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 tel que

$$(9.43) \quad |u(x)-u(x')| \leq g |x-x'|^\alpha , \quad \forall x, x' \in B(3/4) .$$

Si on choisit $R \leq R_0$ assez petit on en déduit que le terme de gauche de (9.41) demeure borné indépendamment de M , d'où (9.38) à l'indice $i+1$.

Nous fixons désormais $R = R_0$. Pour $k \geq 0$ et $R < r < r' < 2R$ nous posons

$$(9.44) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \rho((r'-r)^{-1}(|x-x_0|-r)) , \\ A_{k,r} = \{x \in B_{x_0}(r) : u_s(x) > k\} , \end{cases}$$

et nous choisissons $G(\frac{\partial u}{\partial x_s}) \psi = \max(u_s - k, 0) \varphi^2$ comme fonction test pour (9.22). En utilisant H.2, H.3, H.4, (9.39) et (9.26) on obtient

$$(9.45) \quad \begin{aligned} & \int_{A_{k,r'}} (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_0|^2 \varphi^2 dx \leq \dots \\ & \dots g \int_{A_{k,r'}} (1+|Du|)^\alpha \{(r'-r)^{-1}|Du_s|\varphi + (r'-r)^{-2}(1+|Du|)^2\} dx . \end{aligned}$$

En utilisant (9.38), (9.45) et les inégalités de Young et de Hölder on a

$$(9.46) \quad \int_{A_{k,r}} (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_s|^2 dx \leq g (r'-r)^{-2} (\text{mes. } A_{k,r'})^{1-1/N} .$$

Dans le cas $\alpha < 2$ on utilise aussi l'inégalité de Young pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,r}} |Du_s|^\alpha dx & \leq \frac{\alpha}{2} (r'-r)^{2-\alpha} \int_{A_{k,r}} (1+|Du|)^{\alpha-2} |Du_s|^2 dx + \dots \\ & \dots \frac{2-\alpha}{2} (r'-r)^{-\alpha} \int_{A_{k,r}} (1+|Du|)^\alpha dx , \end{aligned}$$

d'où

$$(9.47) \quad \int_{A_{k,r}} |Du_0|^\alpha dx \leq g (r'-r)^{-\alpha} (\text{mes. } A_{k,r'})^{1-1/N} .$$

En utilisant le Corollaire 9.1, (9.38), (9.46) et (9.47) on en déduit

$$(9.48) \quad \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq g_R ,$$

dans $B_{x_s}(R)$. Comme $-u$ est solution d'une équation vérifiant les mêmes conditions de croissance et d'ellipticité, on en déduit la Proposition 9.4.

Le résultat suivant établit la continuité holdérienne de Du indépendamment de ε .

PROPOSITION 9.5. Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $c \geq 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_s telles que

$$(9.49) \quad |Du(x) - Du(0)| \leq c |x|^\alpha, \quad \forall x \in B(1/2).$$

Nous désignons encore par g une constante générique dépendant de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 . Nous choisissons $R \in]0, 1/2[$ et posons

$$M = \max_s \sup_{B(R)} \text{ess} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|,$$

$$m_s = (\text{mes. } B(R))^{-1} \int_{B(R)} \frac{\partial u}{\partial x_s} dx.$$

LEMME 9.3. Il existe $\mu > 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 tel que l'une des deux inégalités suivantes

$$(9.50) \quad \text{mes. } \{x \in B(R) : \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq M/2\} \leq \mu R^N,$$

$$(9.51) \quad \text{mes. } \{x \in B(R) : -\frac{\partial u}{\partial x_s} \leq M/2\} \leq \mu R^N,$$

implique l'inégalité suivante

$$(9.52) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_s}(x) \right| \geq M/4 - R^{1/(\alpha-1)} - R,$$

pour presque tout $x \in B(R/2)$.

Démonstration. Dans la suite ρ est une fonction du type de celle de la Proposition 9.4. Nous supposons (9.51) et soient r, r', k, ℓ tels que

$$(9.53) \quad \begin{cases} R/2 \leq r < r' \leq R, \\ 0 \leq k < \ell \leq M/4. \end{cases}$$

Posons

$$(9.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \rho^2 ((r'-r)^{-1}(|x|-r)) , \\ A_{\ell, k, r} = \{x \in B(r) : k < M/2 - \frac{\partial u}{\partial x_s}(x) \leq \ell\} . \end{array} \right.$$

On peut en outre supposer

$$(9.55) \quad M/4 \geq R^{1/(\alpha-1)} + R ,$$

sinon il n'y a rien à démontrer. Considérons la fonction G suivante

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \geq M/2 - k , \\ \frac{\partial u}{\partial x_s} + k - M/2 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \in [M/4, M/2 - k] , \\ k - M/4 & \text{si } \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq M/4 , \end{cases}$$

et $G\psi$ comme fonction test dans (9.22). En utilisant H.2, H.3, H.4, (9.26) et l'inégalité de Young, on obtient

$$(9.56) \quad \int_{A_{\ell, k, r'}} (\kappa + |Du|)^{\alpha-2} |D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)| \psi \, dx \leq g(r'-r)^{-2} M \int_{A_{\infty, k, r'}} (\kappa + |Du|)^{\alpha-2} |Du| \, dx \dots$$

$$\dots + g \int_{A_{\ell, k, r'}} |D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)| \psi \, dx + g(r'-r)^{-2} M \text{mes.}(A_{\infty, k, r'}) .$$

Dans le cas " $\alpha \geq 2$ " ou " $1 < \alpha < 2$ et $M \leq \kappa$ " on a

$$(9.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\kappa+M)^{\alpha-2} \leq g (\kappa+|Du|)^{\alpha-2} \quad \text{dans } A_{\ell, k, r'} , \\ (\kappa+|Du|)^{\alpha-2} \leq g (\kappa+M)^{\alpha-2} \quad \text{dans } A_{\infty, k, r'} , \\ 1 \leq (r'-r)^{-1} M (\kappa+M) . \end{array} \right.$$

En utilisant l'inégalité de Young, (9.56) et (9.57) on a

$$(9.58) \quad \int_{A_{\ell, k, r}} |D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)|^2 \, dx \leq g (r'-r)^{-2} M^2 \text{mes.}(A_{\infty, k, r'}) .$$

Dans l'autre cas " $1 < \alpha < 2$ et $M \geq \kappa$ " on déduit de (9.55), (9.56) et de l'inégalité de Young que

$$\int_{A_{\ell,k,r}} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right|^\alpha dx \leq \frac{\alpha}{2} (r'-r)^{2-\alpha} \int_{A_{\ell,k,r}} (\kappa + |Du|)^{\alpha-2} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right|^2 dx + \dots$$

$$\dots + \frac{2-\alpha}{2} \int_{A_{\ell,k,r}} (\kappa + |Du|)^\alpha dx ,$$

d'où

$$(9.59) \quad \int_{A_{\ell,k,r}} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right|^\alpha dx \leq g (r'-r)^{-\alpha} M^\alpha \text{ mes. } A_{\infty,k,r'}$$

Les inégalités (9.58) et (9.59) ainsi que la Proposition 9.1 appliquée à $M/2 - \frac{\partial u}{\partial x_s}$ impliquent (9.52).

Démonstration de la Proposition 9.5. Nous supposons tout d'abord

$$(9.60) \quad M/8 \geq \sqrt{R} + R^{1/2(\alpha-1)} .$$

En utilisant le Lemme 9.3 nous n'avons à considérer que deux cas .

1er cas : $|m_s| \leq (1-\varepsilon) M$ pour $s = 1, \dots, N$ et $\varepsilon > 0$ dépendant seulement de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 .

Dans ce cas, pour $k \geq 0$ et r, r' tels que $0 < r < r' \leq R$ nous posons

$$(9.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = \rho ((r'-r)^{-1}(|x|-r)) , \\ A_{k,r} = \{x \in B(r) : \frac{\partial u}{\partial x_s}(x) - (1-\frac{\varepsilon}{2}) M > k\} , \end{array} \right.$$

où ρ est la fonction utilisée dans la démonstration de la Proposition 9.4. Nous remarquons que

$$(9.62) \quad \frac{1}{g} (\kappa+M) \leq \kappa + |Du| \leq g (\kappa+M) \quad \text{dans } A_{k,r'}$$

Considérons la fonction test suivante dans (9.22)

$$(9.63) \quad G \left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \psi = \max \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_s} - (1-\frac{\varepsilon}{2}) M - k, 0 \right\} \varphi^2 ,$$

et intégrons le deuxième terme de (9.22) par parties. En utilisant H.2, H.3, H.4, (9.62) et la Proposition 9.4 on en déduit

$$(9.64) \quad \int_{A_{k,r'}} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right|^2 \varphi^2 dx \leq g(r'-r)^{-1} (\epsilon M/2-k) \int_{A_{k,r'}} (\varphi \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right| + 1) dx \dots$$

$$\dots + g \int_{A_{k,r'}} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right| \varphi dx + g(\kappa+M)^{2-\alpha} \int_{A_{k,r'}} (\varphi \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right| + (r'-r)^{-1} (\epsilon M/2-k)) dx .$$

En utilisant (9.60) et l'inégalité de Young on en déduit

$$(9.65) \quad \int_{A_{k,r}} \left| D\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) \right|^2 dx \leq g(r'-r)^{-1} \{1+(r'-r)^{-1} (\epsilon M/2-k)^2\} \text{mes. } A_{k,r'} .$$

En utilisant (9.65) et la Proposition 9.2 on en déduit alors

$$(9.66) \quad \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq \delta \{M + g(\sqrt{R} + R^{1/2(\alpha-1)})\} \quad \text{dans } B(R/4)$$

pour un $\delta \in]0,1[$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et u_0 . Comme $-u$ vérifie une équation du même type avec les mêmes conditions d'ellipticité et de croissance on a alors

$$(9.67) \quad \max_s \sup_{B(R/4)} \text{ess } \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right| \leq \delta \{ \max_s \sup_{B(R)} \text{ess } \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right| + g(\sqrt{R} + R^{1/2(\alpha-1)}) \} .$$

2ème cas : il existe $s' \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\left| \frac{\partial u}{\partial x_{s'}} \right| \geq M/8$ dans $B(R/2)$.

Dans ce cas on a

$$(9.68) \quad \frac{1}{g} (\kappa+M) \leq \kappa + |Du| \leq g (\kappa+M) \quad \text{dans } B(R/2) .$$

Pour $s \in \{1, \dots, N\}$ nous posons

$$(9.69) \quad u_s^- = \inf_{B(R/2)} \text{ess } \frac{\partial u}{\partial x_s} \quad , \quad u_s^+ = \sup_{B(R/2)} \text{ess } \frac{\partial u}{\partial x_s} .$$

Etant donné $s \in \{1, \dots, N\}$, l'une des inégalités suivantes doit être vraie :

$$(9.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \text{mes.} \{x \in B(R/4) : \frac{\partial u}{\partial x_s}(x) \geq \frac{1}{2}(u_s^+ + u_s^-)\} \leq \frac{1}{2} \text{mes. } B(R/4) , \\ \text{(ii) } \text{mes.} \{x \in B(R/4) : \frac{\partial u}{\partial x_s}(x) \leq \frac{1}{2}(u_s^+ + u_s^-)\} \leq \frac{1}{2} \text{mes. } B(R/4) . \end{array} \right.$$

Par suite on utilisant (9.30), (9.68) et la Proposition 9.2 on peut prouver comme dans le premier cas

$$(9.71) \quad \max_s \operatorname{osc}_{B(R/8)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \leq \delta \left\{ \max_s \operatorname{osc}_{B(R/2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + g(\sqrt{R} + R^{1/2}(\alpha-1)) \right\},$$

pour un $\delta \in]0, 1[$, $\delta = \delta(N, \alpha, \gamma, \Gamma, u_0)$. Nous choisissons maintenant $\sigma \in]0, \frac{1}{4}[$ tel que $\sigma < 1/4(\alpha-1)$ et $\delta \leq 8^{-\sigma}$. Pour $j \in N$ nous posons $R_j = 8^{-j}$. Les relations (9.67) et (9.71) sont valables même si on n'a pas (9.60). En outre si

$$(9.72) \quad \inf_{B(R_{j_0}/2)} \operatorname{ess} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{s'}} \right| \geq \frac{1}{8} \max_s \sup_{B(R_{j_0})} \operatorname{ess} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|,$$

pour un $j_0 \in \mathbb{N}$ et un $s' \in \{1, \dots, N\}$ alors cette relation est vraie pour tout $j \geq j_0$. Par suite (9.67), (9.71) et la Proposition 9.4 impliquent

$$(9.73) \quad \operatorname{osc}_{B(R_j)} \frac{\partial u}{\partial x_s} \leq g R_j^\sigma,$$

ce qui démontre la Proposition 9.5.

9.3. Estimations pour un problème de Dirichlet non dégénéré.

Dans cette section nous considérons $u \in W^{1,\alpha}(Q) \cap C^0(Q)$ vérifiant

$$(9.74) \quad \begin{cases} \int_Q \sum_j A_j(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_Q f \varphi dx, & \forall \varphi \in W_0^{1,\alpha}(Q) \\ u = g & \text{sur } \partial Q \end{cases}$$

où $Q = \{x = (x_1, \dots, x_N) : 0 < x_i < q\}$ et $q \in]0, 1[$. On conserve sur A_j les hypothèses du Paragraphe 9.2, on suppose que $f \in L^\infty(Q)$ et on note $d(x)$ la distance de x à ∂Q . On suppose que pour un $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$(9.75) \quad |f| \leq d^{(\alpha-1)(\lambda-1)-1}$$

et que la fonction g est la trace sur ∂Q d'une fonction encore notée g élément de $W^{1,\alpha}(Q)$. On suppose en outre

$$(9.76) \quad \frac{\partial A_j}{\partial r}(x,r,p) = 0 \quad , \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad ,$$

$$(9.77) \quad |g(x) - g(x')| \leq g_0 |x - x'|^\lambda \quad , \quad \forall x, x' \in Q$$

où g_0 est une constante, p est quelconque dans \mathbb{R}^N et r vérifie

$$(9.78) \quad |r - g(0)| \geq 1 \quad .$$

PROPOSITION 9.6. Il existe $\alpha > 0$ et une constante c ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 tels que

$$(9.79) \quad |Du(x)| \leq c (d(x))^{\lambda-1} \quad ,$$

$$(9.80) \quad |Du(x) - Du(x')| \leq c (d(x))^{\lambda-1-\alpha} |x - x'|^\alpha \quad ,$$

pour tous $x, x' \in Q$ vérifiant

$$(9.81) \quad |x - x'| \leq d(x)/2 \quad .$$

La démonstration de la Proposition 9.6 est fondée sur le résultat suivant :

LEMME 9.4. Sous les hypothèses de la Proposition 9.6 il existe une constante c ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 telle que l'on ait

$$(9.82) \quad |u(x) - g(x)| \leq c (d(x))^\lambda \quad , \quad \forall x \in Q \quad .$$

Démonstration. Il existe $\beta > 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ et g_0 tel que

$$(9.83) \quad \sum_i (A_j(x, u, p) - A_j(x, u, p'))(p_j - p'_j) \geq \dots$$

$$\dots 2 (\text{osc. } g+2) |p| \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial r}(x, u, p') \right| \quad ,$$

pour tout $x \in Q$ et tous $p, p' \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $|p| \geq \beta$ et $|p'| \geq \beta$.

Pour $x_0 \in Q$, $\sigma > 0$ et $k = 1, 2, \dots, N$, nous posons

$$(9.84) \quad \begin{cases} b^k(x) &= (e^{\sigma x_k} - 1)^\lambda + g_0 |x - x_0|^\lambda + g(x_0), \\ b^{k+N}(x) &= (e^{\sigma(q-x_k)} - 1)^\lambda + g_0 |x - x_0|^\lambda + g(x_0), \\ b(x) &= \min_k b^k(x). \end{cases}$$

Soit $\tilde{Q} = \{x \in Q \text{ tel que } b \text{ soit deux fois différentiable en } x\}$.

Il est aisé de vérifier qu'on peut trouver un $\sigma > 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 tel que

$$(9.85) \quad \begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,u,Db) \frac{\partial^2 b}{\partial x_i \partial x_j} &\geq d^{(\alpha-1)(\lambda-1)-1} + \dots \\ &\dots \sum_j (|\frac{\partial A_j}{\partial x_j}(x,u,Db)| + \beta |Db| |\frac{\partial A_j}{\partial r}(x,u,Db)|) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \tilde{Q}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$ et soit $\tilde{b} = \min(b^k, b^\ell)$ pour $k \neq \ell$. On a alors :

$$(9.86) \quad \begin{aligned} \int_Q \sum_j A_j(x,u,D\tilde{b}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= - \int_{\{b^k \neq b^\ell\}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j(x,u,D\tilde{b}) \varphi) dx \dots \\ &\dots + \int_{\{b^k = b^\ell\}} |D(b^k - b^\ell)|^{-1} \sum_j (A_j(x,u,Db^k) - A_j(x,u,Db^\ell)) \frac{\partial}{\partial x_j} (b^k - b^\ell) \varphi d\sigma, \end{aligned}$$

où $d\sigma$ est la mesure surfacique portée par $\{b^k = b^\ell\}$. Compte tenu de la positivité du dernier terme on en déduit

$$(9.87) \quad \int_Q \sum_j A_j(x,u,D\tilde{b}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \geq - \int_{\{b^k \neq b^\ell\}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j(x,u,D\tilde{b}) \varphi) dx.$$

Pour tout $\delta > 0$ la fonction $\varphi = \max(u - \delta - b, 0)$ a un support compact. Par suite on déduit de (9.74), (9.76) et (9.87) que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\{u-b>\delta\}} \sum_j (A_j(x,u,Du) - A_j(x,u,Db)) \frac{\partial}{\partial x_j}(u-b) dx \leq \dots \\
 & \dots \int_Q \left(\sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,u,Db) \frac{\partial^2 b}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial x_j}(x,u,Db) \right| + |f| \right) \varphi dx \dots \\
 (9.88) \quad & \dots + \int_{\{|Du| \leq \beta |Db|\}} \beta |Db| \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial r}(x,u,Db) \right| \varphi dx + \dots \\
 & \dots + \int_{\{|Du| > \beta |Db|\}} (\text{osc } g+2) |Du| \sum_j \left| \frac{\partial A_j}{\partial r}(x,u,Db) \right| dx .
 \end{aligned}$$

En utilisant (9.88), (9.83) et (9.85) on en déduit

$$(9.89) \quad u \leq b + \delta \quad \text{dans } Q .$$

Ainsi nous avons montré que $u - g \leq c d^\lambda$ dans Q , où c ne dépend que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g . En opérant de même avec $-u$ on en déduit (9.82).

Démonstration de la Proposition 9.6. D'après le Lemme 9.4, pour tout $x \in Q$ la fonction

$$(9.90) \quad \tilde{u}(y) = d^{-\lambda}(x) (u(d(x)y+x) - g(x)) ,$$

vérifie les hypothèses du paragraphe 9.2, pour un u_0 ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 . Par suite la Proposition 9.6 découle des Propositions 9.4 et 9.5.

9.4. Un résultat d'existence pour un problème de Dirichlet

Dans ce paragraphe Q, q, A_j, B, d, g_0 et λ sont définis comme dans le Paragraphe 9.3 et A vérifie H.5. On ne suppose cependant ni H.6 ni (9.75). On conserve les notations du paragraphe 9.3.

PROPOSITION 9.7. Il existe $q_0 > 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 tel que pour tout $0 < q < q_0$ il existe une fonction $u \in W^{1,\alpha}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ vérifiant pour tout $\varphi \in C_0^\infty(Q)$

$$(9.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q \sum_j A_j(x,u,Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + B(x,u,Du)\varphi \, dx = 0 , \\ u = g \quad \underline{\text{sur}} \quad \partial Q . \end{array} \right.$$

En outre il existe $\sigma > 0$ et $c \geq 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 tels que l'on ait (9.79) et (9.80) pour tous $x, x' \in Q$ vérifiant (9.81).

La démonstration de ce résultat est quelque peu technique et utilise des résultats d'analyse fonctionnelle que nous admettrons comme le théorème du point fixe de Schauder ou des résultats de [20].

THEOREME 9.2. (Schauder) Soient X un espace de Banach sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , C un sous-ensemble convexe non vide et borné de X et g une application continue de C dans C telle que $g(C)$ soit relativement compacte alors g possède un point fixe.

On désigne par \vec{e}_i le i -ième vecteur de base de \mathbb{R}^N et par ρ une fonction de classe C^∞ vérifiant

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1 , \\ t & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] , \\ -1 & \text{si } t \leq -1 . \end{cases}$$

Pour $h > 0$ et $v \in C^0(\bar{Q})$ nous posons

$$D_h v(x) = \begin{cases} \{h^{-1}(v(x+h\vec{e}_i) - v(x))\}_{i=1, \dots, N} & \text{si } d(x) > h , \\ 0 & \text{si } d(x) \leq h , \end{cases}$$

$$A_j^h(x, r, p) = A^j(x, \rho(r-g(0)) + g(0), p) + h \max(0, \alpha-2) \eta_j ,$$

$$d^h(x) = \min \{h^{-1}, d(x)\}^{(\alpha-1)(\lambda-1)-1} ,$$

$$B^h(x, v) = \max \{-d^h(x), \min -d^h(x), B(x, v, D_h v)\} .$$

Le problème régularisé que nous considérerons est le suivant : étant donné une fonction $v \in C^0(\bar{Q})$ trouver $\omega \in W^{1, \alpha}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ vérifiant

$$(9.92) \left\{ \begin{array}{l} \int_Q \left\{ \sum_j A_j^h(x, v, D\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + B^h(x, v) \varphi \right\} dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q), \\ \omega = g \quad \text{sur } \partial Q. \end{array} \right.$$

Le deuxième point est de montrer que l'application T_h qui à v associe $\omega = T_h v$ admet un point fixe et le troisième point est de calculer la limite de $T_h v$ quand h tend vers 0 et de regarder l'équation que vérifie cette limite.

Le problème de l'existence de ω solution de (9.92) dans $W^{1,\alpha}(Q)$ découle du Lemme 9.2 et d'un résultat de Lions [20]. Compte tenu du Chapitre 8 la fonction ω appartient à $C^0(\bar{Q}) \cap C^\sigma(Q)$ pour un $\sigma \in]0, 1[$. Si v parcourt un borné de $C^0(\bar{Q})$ la fonction ω (qui est unique) appartient à un ensemble borné de $C^0(\bar{Q}) \cap C^\sigma(Q)$ et donc relativement compact d'après le Théorème d'Ascoli. En utilisant le Théorème de Schauder on en déduit que T_h admet un point fixe $u_h \in C^0(\bar{Q}) \cap C^\sigma(Q) \cap W^{1,\alpha}(Q)$ et on a

$$(9.93) \left\{ \begin{array}{l} \int_Q \left\{ \sum_j A_j^h(x, u_h, Du_h) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + B^h(x, u_h) \varphi \right\} dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q), \\ u_h = g \quad \text{sur } \partial Q. \end{array} \right.$$

En utilisant la Proposition 9.6 et le Théorème d'Ascoli il existe u dans $C^1(Q) \cap C^\sigma(\bar{Q})$ et une suite h_ν tendant vers 0 tels que l'on ait $\lim_{h_\nu \rightarrow 0} u_{h_\nu} = u$ pour la topologie de $C^\sigma(\bar{Q})$ et la convergence

compacte dans $C^1(Q)$. La fonction u vérifie évidemment (9.91) et on a (9.79) et (9.80). Pour achever la démonstration de la Proposition 9.7 il nous faut montrer que $u \in W^{1,\alpha}(Q)$. Pour cela on considère un $\varepsilon > 0$ et une fonction positive $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on prend comme fonction test dans (9.91)

$$(9.94) \quad \varphi = \min \{u - g + \varepsilon, \max(u - g + \varepsilon, 0)\} \psi^\alpha.$$

En utilisant H.5, le Lemme 2 et la continuité holdérienne de u et de g il est aisé de démontrer que la quantité suivante :

$$(9.95) \quad \int_{Q \cap \{|u-g| > \varepsilon\}} |Du|^\alpha \phi^\alpha dx ,$$

demeure bornée indépendamment de ε pourvu que le support de ϕ soit assez petit. Par suite $u \in W^{1,\alpha}(Q)$.

9.5. Démonstration du Théorème 9.1.

En utilisant H.2 et H.4 on peut trouver $\Gamma^* > 0$ ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma$ tel que

$$(9.96) \quad \begin{aligned} & \sum_i \left| \frac{\partial A_j}{\partial r^i}(x, r, \tau p + (1-\tau)\tilde{p}) \right| |p - \tilde{p}| |r'| \leq \dots \\ & \dots \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x, r, \tau p + (1-\tau)\tilde{p})(p_i - \tilde{p}_i)(p_j - \tilde{p}_j) + \Gamma^*(1+|\tilde{p}|) r'^2 , \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$, tous $r, r' \in \mathbb{R}$, tout $\tau \in [0, 1]$ et tous $p, \tilde{p} \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $|p - \tilde{p}| \leq \frac{1}{2} |\tilde{p}|$. Soit $y \in B_{x_0}(R)$; pour $q \in (0, R/N)$ nous posons

$$(9.97) \quad \tilde{B}(x, p) = \max\{-\Gamma(2+2|p|)^\alpha, \min\{B(x, u(x), Du(x)), \Gamma(2+2|p|)^\alpha\}\} ,$$

$$(9.98) \quad b(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(x) - r \geq 1 , \\ u(x) - \mu & \text{si } u(x) - r \in [-1, 1] , \\ -1 & \text{si } u(x) - r \leq -1 , \end{cases}$$

$$(9.99) \quad \tilde{b}(x, r, p) = \Gamma^*(1+|p|)^\alpha b(x, r) ,$$

$$Q = \{x : |x_i - y_i| < q\} , \quad d(x) = \text{dist}(x, \partial Q) .$$

D'après la Proposition 9.7 il existe $q > 0$ dépendant seulement de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et c_0 (définis en (9.3)) tel que le problème

$$(9.100) \quad \begin{cases} \int_Q \sum_j A_j(x, \tilde{u}, D\tilde{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_Q (\tilde{B} + \tilde{b})(x, \tilde{u}, D\tilde{u}) \varphi dx , & \forall \varphi \in C_0^\infty(Q) , \\ \tilde{u} = u & \text{sur } \partial Q , \end{cases}$$

admette une solution $\tilde{u} \in W^{1,\alpha}(Q) \cap C^0(\bar{Q})$. En outre il existe des constantes σ et c ne dépendant que de $N, \alpha, \gamma, \Gamma, \lambda$ et g_0 telles que

$$(9.101) \quad |D\tilde{u}(x)| \leq c (d(x))^{\lambda-1},$$

$$(9.102) \quad |D\tilde{u}(x) - D\tilde{u}(x')| \leq c (d(x))^{\lambda-1-\sigma} |x-x'|^\sigma,$$

pour tous $x, x' \in Q$ vérifiant

$$(9.103) \quad |x-x'| \leq \frac{1}{2} d(x).$$

D'après (9.3) et (9.101) on peut supposer que

$$\tilde{b}(x, \tilde{u}, D\tilde{u}) = \Gamma^*(1+|D\tilde{u}|)^\alpha (u-\tilde{u}).$$

Posons $Q' = \{x \in Q : |Du(x) - D\tilde{u}(x)| \leq \frac{1}{2} |D\tilde{u}(x)|\}$.

D'après (9.1) et (9.100) on en déduit

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_Q \sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x, \tau u + (1-\tau)\tilde{u}, \tau Du + (1-\tau)D\tilde{u}) \frac{\partial}{\partial x_i}(u-\tilde{u}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u-\tilde{u}) dx d\tau \dots \\ &= \dots - \int_0^1 \int_Q \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial r}(x, \tau u + (1-\tau)\tilde{u}, \tau Du + (1-\tau)D\tilde{u})(u-\tilde{u}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u-\tilde{u}) dx d\tau \dots \\ & \dots + \int_Q \{B(x, u, Du) - \tilde{B}(x, D\tilde{u}) - \tilde{b}(x, \tilde{u}, D\tilde{u})\} (u-\tilde{u}) dx. \end{aligned}$$

En utilisant H.2, H.4, (9.96) et (9.103) et en remarquant que B et \tilde{B} ne diffèrent que si $|Du| \geq 1 + 2 |D\tilde{u}|$, on en déduit

$$(9.104) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 \int_Q (u + |\tau Du + (1-\tau)D\tilde{u}|)^{\alpha-2} |D(u-\tilde{u})|^2 dx d\tau \dots \\ & \dots \leq g' \int_0^1 \int_{Q'} (u + |\tau Du + (1-\tau)D\tilde{u}|)^\alpha |D(u-\tilde{u})|^2 |u-\tilde{u}| dx d\tau. \end{aligned}$$

où g' est une constante ne dépendant que de N, α, γ et Γ . En utilisant (9.3) et (9.101) on peut supposer q assez petit et on en déduit

$$(9.105) \quad \int_0^1 \int_Q (u + |\tau Du + (1-\tau)D\tilde{u}|)^{\alpha-2} |D(u-\tilde{u})|^2 dx d\tau \leq 0,$$

ce qui implique $u = \tilde{u}$ dans Q ; le Théorème 9.1 découle alors de (9.101) et de (9.102).