Mécanique des milieux continus

Michel Maya

▶ **To cite this version:**

Michel Maya. Mécanique des milieux continus. Engineering school. Arts et Métiers ParisTech Centre de Cluny, 2010, pp.87. cel-00533397

HAL Id: cel-00533397
https://cel.hal.science/cel-00533397

Submitted on 6 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Centre d'Enseignement et de Recherche de CLUNY

Cours de Mécanique des Milieux Continus

Année scolaire 2010 – 2011

Michel MAYA

maya@cluny.ensam.fr

www.mmaya.fr

Ce cours est en constante amélioration en partie grâce aux retours que vous pouvez apporter par vos commentaires. Ces derniers sont les bienvenus sous forme de mails à l'adresse :

maya@cluny.ensam.fr

Dans le cadre des améliorations, un travail est fait pour avoir une version multimédia sonore. L'avancement de ce travail est consultable sur :

www.mmaya.fr/MMC

Sommaire

Descriptions de la Mécanique des Milieux Continus *5*

Domaine d'étude **5**

Hypothèse de continuité **6**

Variables d'études **8**
Référentiels - Répères 8
Description Lagrangienne 9
Description Eulérienne 10
Dérivation temporelle 11

Déformations d'un milieu continu *13*

Tenseur Gradient **13**
Exemple dans le cas d'une déformation homogène triaxiale 14
Etude tridimensionnelle des déformations 14
Interprétation des résultats 16
Base principale 18
Tenseur des déformations linéarisé 18
Etude des petites perturbations 21

Représentations graphiques **24**

Conditions de compatibilité **26**

Vitesse de déformation **28**
Taux de déformation lagrangien 28
Taux de déformation eulérien 29
Interprétation du tenseur taux de déformation 30

Etat de contrainte dans les milieux continus *31*

Lois de conservation **31**
Dérivée particulaire d'une intégrale de volume 31

Théorème de l'intégrale nulle **32**

Théorème de la divergence **33**

Expression générale d'une loi de conservation **33**

Contraintes dans un domaine matériel **34**
Loi fondamentale de la mécanique 34
Vecteur contrainte 35
Tenseur des contraintes 36
Equilibre dynamique 38
Propriétés du tenseur des contraintes 41

Lois de Comportement des milieux continus *45*

Bilan des Equations **45**
Théorème de l'énergie cinétique 46

Thermodynamique des milieux continus **49**
Premier Principe de la thermodynamique 49
Second Principe de la thermodynamique 50
Equation de la chaleur 51

Thermo-élasticité linéaire **53**
Première approche de l'élasticité linéaire 53
Deuxième approche de l'élasticité linéaire 55
Convention d'écriture 57
Matériau isotrope 59
Matériau orthotrope 59
Matériau isotrope transverse 60

Elasticité linéaire *62*

Loi de comportement **62**

Equations supplémentaires en élasticité **64**
Equations de NAVIER 64
Equations de BELTRAMI 65

Critères de limite élastique **67**
Les résultats d'essai 67
Les différents critères 69

Les schémas de résolution **72**
Théorème d'unicité 72
Schémas de résolution 73
Exemple d'application 73

Elasticité bidimensionnelle **77**
Définition des états plans 77
Fonction d'Airy 80
Exemple d'application : flexion simple d'une poutre rectangulaire 81
Elasticité plane en coordonnées polaires 83
Application en coordonnées polaires 84

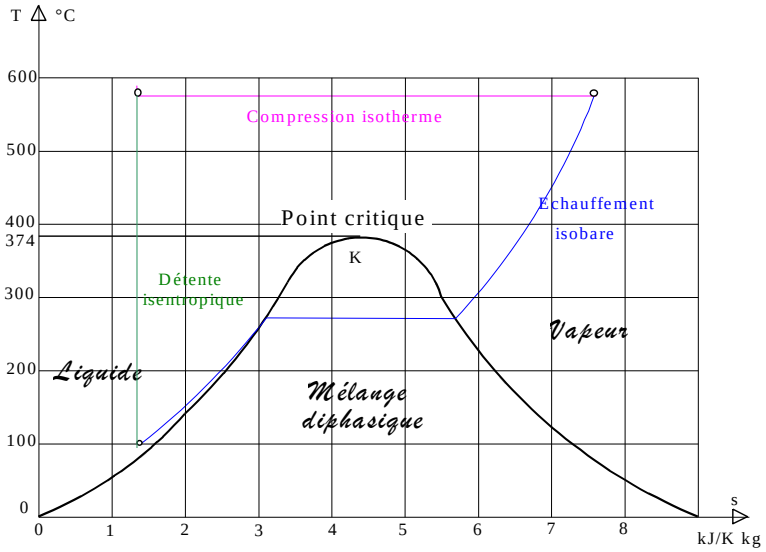
Quelques formules *86*

Elasticité linéaire en coordonnées polaires *87*

Descriptions de la Mécanique des Milieux Continus

Domaine d'étude

L'objectif de ce cours est de présenter (hélas succinctement) la mécanique des milieux continus. Nous allons trouver dans ce cours l'application du principe fondamental de la mécanique à tous types de domaines matériels. En particulier nous pourrons nous intéresser aussi bien à des domaines ayant des comportements de corps solide ou des comportements de fluide (liquide ou gaz). La généralité de ce cours apparaît ainsi évidente.



Il est à noter que la distinction entre ces différents états de la matière n'est pas évidente. Ainsi comment ne pas s'interroger devant le phénomène de changement d'état liquide-vapeur-liquide pour un cycle englobant dans le diagramme Température - Entropie le point K sommet de la courbe d'ébullition.

Le dictionnaire ne nous aide pas particulièrement dans notre démarche de distinction. Ainsi « Le Petit Larousse » donne les définitions suivantes :

*Fluide Se dit des corps (gaz et liquides) qui n'ayant pas de forme propre, sont déformables sans effort.

*Gaz Tout fluide aériforme (qui a les propriétés physiques de l'air (fluide gazeux qui forme l'atmosphère)). Un des trois états de la matière, caractérisé par la compressibilité et l'expansibilité.

*Liquide Qui coule ou qui tend à couler. Se dit d'un état de la matière présenté par les corps n'ayant pas de forme propre, mais dont le volume est invariable.

*Solide Qui a une forme propre.

Comment avec ces définitions trouver la frontière entre un solide plus ou moins mou et un liquide plus ou moins visqueux? Le sable est-il un solide ou un fluide? Certaines peintures ont un comportement de solide mais après brassage deviennent fluides. Le verre est un solide à notre échelle de temps, mais avec les siècles, on constate que c'est un liquide à très forte viscosité. Le yaourt peut être considéré comme un fluide à mémoire. Et encore nous ne dirons rien des Alliages à Mémoire de Forme (AMF).

Comme on peut le constater, la détermination n'est pas simple et peut être fonction de nombreux paramètres (Pression, Température, Temps ...). En conséquence, on peut considérer que la démarche du mécanicien qui consiste à regrouper dans un seul enseignement l'étude mécanique de ces différents états de la matière est légitime, mais quelle risque de se heurter à de nombreuses difficultés. L'étude de ces différents comportements est appelée la Rhéologie.

Pour mener à bien une étude de mécanique, la notion de référentiel est essentielle. D'une part, afin de connaître les évolutions cinématiques d'un domaine matériel on devra lui associer un référentiel, et d'autre part le Principe Fondamental de la Mécanique s'appuie sur l'existence d'un repère privilégié appelé "Repère Galiléen".

Un repère est défini par la donnée d'une base vectorielle associée à une origine. Il est à noter qu'en aucun cas il n'est fait l'obligation d'une base orthonormée. Bien évidement, pour des questions de simplifications, nous essaierons toujours d'employer de telle base, mais nous pourrons aussi constater que suite aux déformations imposées à notre domaine, nous ne pourrons pas constamment conserver cette notion d'orthogonalité. Le mécanicien est ainsi tout naturellement guidé vers l'utilisation des notations tensorielles. A ce sujet, il est à noter que l'algèbre et l'analyse tensorielle professées en mathématique sont des enseignements directement issus de notions mécaniciennes. Le mot tenseur ne provient-il pas du mot tension ? Ainsi on peut constater ce que la science mécanicienne a apporté à la connaissance des autres sciences. Cette remarque peut aussi bien s'adapter aux méthodes de résolutions numériques fortement issues de la méthode des éléments finis.

Hypothèse de continuité

Nous allons orienter notre étude sur des domaines matériels continus subissant des transformations continues. Dans cette simple phrase on peut constater l'importance de l'hypothèse de continuité. De nouveau le Petit Larousse ne nous est que d'un faible secours (Continu : non divisé dans son étendue, non interrompu dans sa durée).

Continuité du domaine matériel étudié.

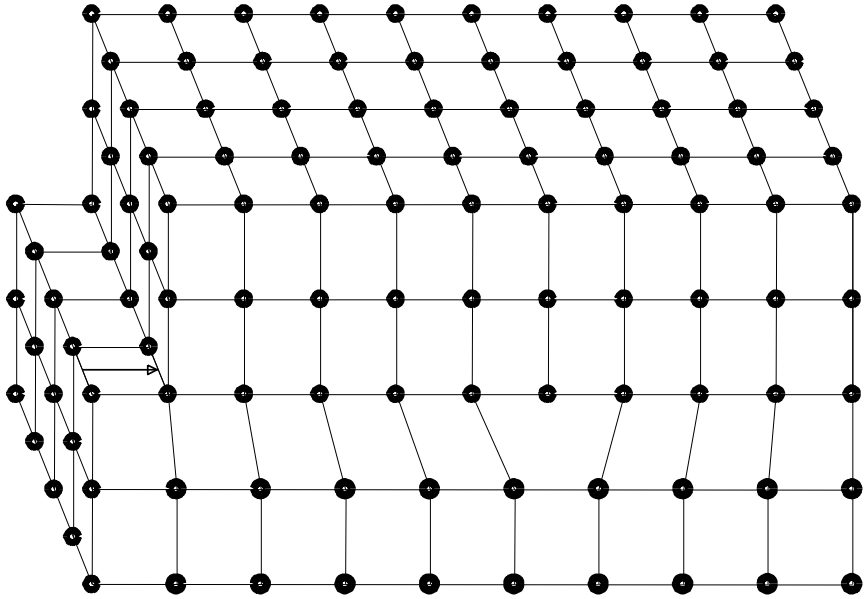
Pour le physicien, la continuité du domaine sera traduite mathématiquement par le fait que les fonctions caractéristiques du domaine sont des fonctions continues au sens mathématique du terme. Ainsi, si on considère des grandeurs physiques telles que la masse volumique, la température, la pression, on doit pouvoir les représenter par des fonctions continues. Déjà, avec cette définition, on peut constater qu'il existe des limites à notre étude. Ainsi nous ne pourrons pas étudier un milieu diphasique, de même pour un mélange eau-huile. Toutefois, il sera possible de mener à bien de telles études en considérant *n* domaines continus. On conçoit que ceci ne nous mènera pas vers une simplification.

De plus il est à noter que la continuité parfaite d'un domaine matériel n'existe pas. Ainsi, sans aller à une définition atomique de la matière, les moyens d'investigation tels que les microscopes (électroniques ou non) montrent clairement que la matière est faite de juxtaposition d'éléments ne possédant pas les mêmes caractéristiques. De fait la continuité du domaine matériel ne pourra qu'être une approximation. Suivant le

degré de respect ou de non-respect de cette hypothèse, notre étude sera plus ou moins entachée d'erreur. Il faut noter que malgré tout, nous pourrons utiliser ce cours pour étudier des matériaux tels que le béton, le bois ...

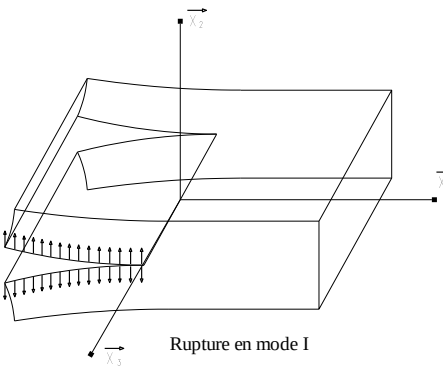
Heureusement, il existe actuellement un processus dit d'homogénéisation qui permet de limiter les erreurs. Ainsi les matériaux plastiques chargés de fibre de verre pourront être traités dans le cadre de cette étude.

Continuité de la transformation.

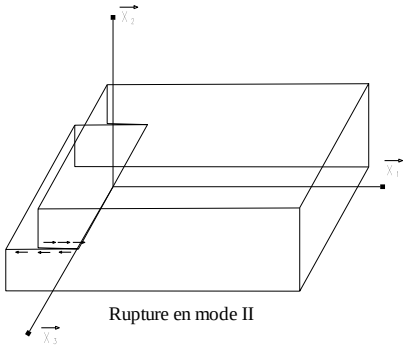


Dislocation coin

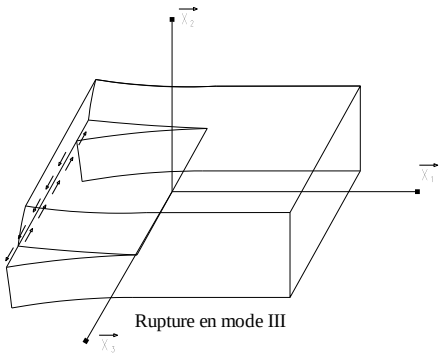
Comme nous le verrons ensuite, la transformation sera essentiellement caractérisée par la donnée d'un champ vectoriel appelé champ de déplacement. L'hypothèse de continuité de la transformation va se traduire par le fait que les fonctions scalaires du champ vectoriel doivent être des fonctions continues des variables d'espaces et de temps. De nouveau nous nous trouvons devant une limitation de notre étude. On peut facilement constater qu'il existe des transformations non continues. Ainsi les problèmes métallurgiques de dislocation, l'apparition du phénomène de cavitation dans les écoulements de domaine fluide et les fissurations font clairement apparaître des discontinuités de transformation. Ces cas particuliers pourront être traités en considérant la notion de continuité par sous-domaines.



Rupture en mode I



Rupture en mode II



Rupture en mode III

Variables d'études

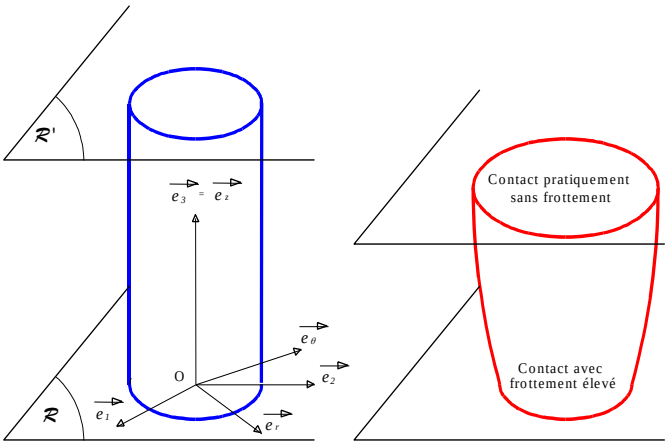
Référentiels - Répères

L'étude d'un domaine matériel impose que l'on procède à sa description et à son repérage tout au long de son évolution au cours du temps. La notion de référentiel doit être développée pour préciser les évolutions.

Le référentiel $\mathcal{R}$ est lié à l'observateur. Il représente l'ensemble des points animés du mouvement de corps rigide de l'observateur. Pour effectuer les repérages spatiaux des points matériels dans un référentiel $\mathcal{R}$ on utilise une base vectorielle associée à un point origine O. On obtient ainsi un repère **R**. Ce repère, animé du mouvement de corps rigide du référentiel $\mathcal{R}$ permet de matérialiser ce référentiel.

Pour les besoins de l'étude, on peut être amené à effectuer des changements de repère. On réalisera ainsi la même transformation des coordonnées spatiales sur les composantes des êtres mathématiques (vecteur, tenseur ...) utilisés pour décrire le domaine. Il est à noter que l'on peut associer plusieurs repères à un même référentiel.

Parallèlement, on peut imaginer un changement d'observateur, ce qui va se traduire par un changement de référentiel. On peut se représenter une telle transformation en associant à chacun des référentiels un repère. Les deux repères étant choisis de telle sorte qu'ils soient coïncidant à un instant donné, on examine leur évolution au cours du temps.



Pour fixer les idées, prenons l'exemple d'un lopin cylindrique écrasé par une presse.

On peut penser faire des observations à partir du référentiel $\mathcal{R}$ associé au plateau "fixe" de la presse. La notion de fixe étant prise ici dans le sens de non-déplacement vis à vis du référentiel terrestre $\mathcal{R}_\mathcal{T}$. Pour effectuer ces observations, on peut soit utiliser un repère cartésien orthonormé $\mathbf{R_C}$ $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, soit employer pour des raisons de symétrie cylindrique un repère cylindro-polaire orthonormé $\mathbf{Rp}$ $(O;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.

Mais il est tout à fait pensable que, par exemple pour étudier le contact pièce-plateau mobile, l'on veuille faire des observations à partir du référentiel $\mathcal{R}'$ associé au plateau mobile.

Avec cet exemple, on conçoit fort bien la notion d'*objectivité*, c'est à dire du caractère d'indépendance vis à vis de l'observateur choisi. On parle alors de phénomène *intrinsèque* vis à vis du changement de référentiel. Certaines grandeurs sont objectives (déformations, contraintes, masse volumique ...), d'autre ne le sont pas (vitesse, matrice de changement de base ...).

Enfin pour décrire la configuration d'un domaine matériel, il est possible de choisir parmi deux types de variables.

Description Lagrangienne

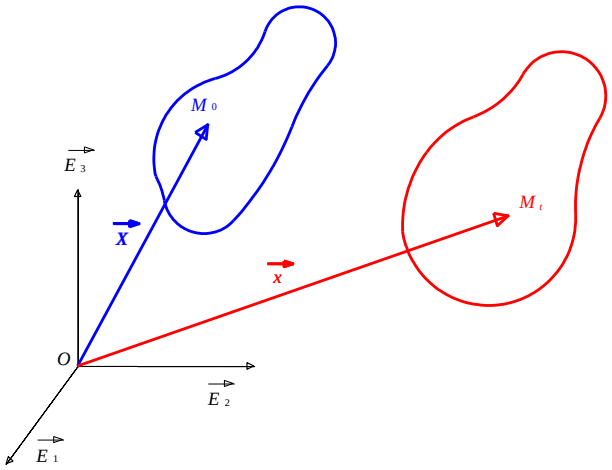
Considérons un repère orthonormé **R** $(O;\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$ associé à un référentiel $\mathcal{R}$. La cinématique classique d'un milieu continu est construite à partir des notions :

* de temps, pouvant être représentée par une variable réelle *t* déterminée par deux valeurs extrêmes.

* d'espace physique, pouvant être représenté par un espace affine de dimension 3. Les points de cet espace sont appelés "points matériels".

Dans le repère **R**, à un instant *t* =0, le point M_0 a des coordonnées X_1, X_2, X_3 qui définissent la position du point matériel *M*. On appelle aussi ce système de coordonnées le système de coordonnées matérielles dans la configuration de référence C_0. Nous pourrons ainsi écrire :

$$\vec{OM}_0 = X_1\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3 = X_i\vec{E}_i = \vec{X}$$



Pour décrire le mouvement du domaine, il convient donc de se donner la loi d'évolution au cours du temps des positions de l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine. On obtient donc la configuration actuelle C_t. Ainsi il est nécessaire de définir les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point M_t qui à l'instant *t* représente la position du point matériel *M*.

$$\vec{OM}_t = x_1\vec{E}_1 + x_2\vec{E}_2 + x_3\vec{E}_3 = x_i\vec{E}_i = \vec{x}$$

Ce qui revient à dire qu'il faut se donner les fonctions scalaires suivantes :

$$x_i = \Phi_i(X_J, t)$$

Dans cette description, les variables indépendantes X_1, X_2, X_3 et *t* sont dites "variables ou coordonnées de Lagrange".

Les fonctions Φ_i représentent la description lagrangienne du mouvement de notre domaine par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Connaissant la position à chaque instant du point matériel *M* il est possible de définir alors sa vitesse et son accélération vis à vis du référentiel $\mathcal{R}$.

vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(M,t)} = \frac{d\vec{OM}_t}{dt}$$

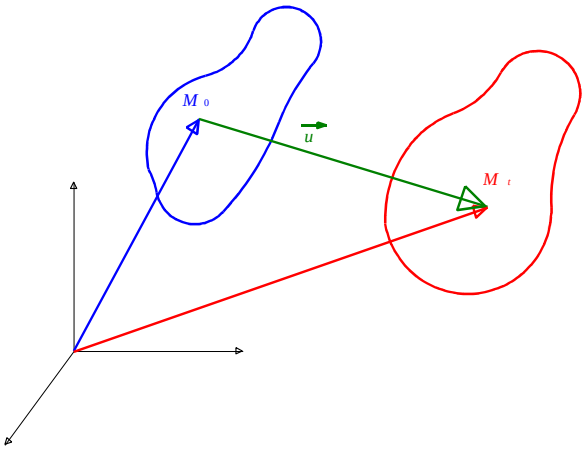
Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont $v_i = \frac{d\,\Phi_i}{dt}(X_J, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(X_J, t)$.

Dans cette dernière formule, le symbole $\frac{\partial}{\partial t}$ représente la dérivation partielle par rapport au temps, c'est à dire la dérivation en considérant les variables de position X_J indépendantes du temps.

vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma(M,t)} = \frac{d\,\overrightarrow{V(M,t)}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}_t}{dt^2}$$

Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont $\gamma_i = \frac{d^2\Phi_i}{dt}(X_J,t) = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}(X_J,t)$



vecteur déplacement :

Souvent on préfère employer le vecteur déplacement au lieu du vecteur position :

$$\overrightarrow{u(X_J,t)} = \vec{OM}_t - \vec{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}$$

On peut alors remarquer l'égalité :

$$\overrightarrow{V(M,t)} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_J,t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(X_J,t)$$

$$\overrightarrow{\gamma(M,t)} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}(X_J,t) = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}(X_J,t)$$

Description Eulérienne

Les hypothèses de continuité (milieu et transformation) imposent que les fonctions Φ_i soient des bijections de la configuration de référence C_0 sur la configuration actuelle C_t. Cette bijectivité impose l'existence d'une relation inverse entre les variables de position de référence et les variables de position actuelle. On a donc :

$$X_I = \psi_I(x_j,t)$$

On constate donc qu'il est possible de changer de variables spatiales. La description dite eulérienne consiste à considérer les variables x_1, x_2, x_3 et t comme indépendantes et à les utiliser sous forme de "variables ou coordonnées d'Euler".

Dans la description eulérienne, on ne se préoccupe pas de savoir ce qu'il advient de chaque particule. En fait on étudie ce qui se passe, à chaque instant, en chaque point de l'espace.

On peut exprimer la vitesse et l'accélération en fonction des variables d'Euler :

vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(M,t)} = \frac{d\vec{OM}_t}{dt} \quad \text{avec} \quad v_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t}(X_J,t) = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\left(\psi_J(x_k,t),t\right)$$

vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma(M,t)} = \frac{d^2\vec{OM}_t}{dt^2} \quad \text{avec} \quad \gamma_i = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}(X_J,t) = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}\left(\psi_J(x_k,t),t\right)$$

Pratiquement, on peut dire qu'en description lagrangienne, on suit le domaine dans son mouvement, alors qu'en description eulérienne, on observe l'évolution du système en un point géométrique fixe pour l'observateur.

Dérivation temporelle

Souvent nous aurons à considérer les variations d'une grandeur physique, que nous noterons $\mathbf{A}$, au cours du temps. Cette grandeur peut être une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle. Nous avons donc :

$\mathbf{A}=\mathbf{a}(x_i,t)$ pour une détermination vis à vis des variables eulériennes

$\mathbf{A}=\mathbf{A}(X_i,t)$ pour une détermination vis à vis des variables lagrangiennes.

On peut au niveau de cette grandeur, s'intéresser à deux types de variation.

Ainsi, si nous considérons un point géométrique de l'espace, la grandeur $\mathbf{A}$ étant définie en ce point, nous pourrons exprimer les variations en utilisant la dérivée partielle par rapport au temps. On appelle parfois cette dérivée "dérivée locale". En variables eulériennes nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathrm{t}}(x_i,t)$$

Cependant, les grandeurs utilisées sont souvent attachées à un domaine matériel (température, masse volumique, vitesse ...). Il convient de considérer aussi la variation de ce domaine matériel au cours du temps. Pour ce faire on utilise la dérivée totale par rapport au temps, appelée "dérivée particulaire" (du fait que c'est une particule que l'on suit dans son mouvement).

En représentation lagrangienne, puisque les grandeurs physiques sont repérées vis à vis de l'élément de matière, il y a identification entre la dérivée particulaire et la dérivée locale :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}(X_I,t)=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(X_I,t)=\mathring{\mathbf{A}}$$

Par contre, pour la représentation eulérienne, le calcul de la dérivée particulaire nécessite de prendre en compte la variation du domaine délimité par des variables x_i qui sont fonctions du temps :

$$\mathring{\mathbf{A}}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}(x_i,t)=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x_i,t)+\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$$

Dans cette formule on remarque la présence de $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ qui est la i$^{\text{ème}}$ composante du vecteur vitesse.

D'autre part le terme $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}$ peut aussi être interprété comme la composante de l'opérateur gradient appliqué à la grandeur $\mathbf{A}$. On peut donc écrire, sous une forme générale :

$$\boxed{\mathring{\mathbf{A}}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x_i,t)+\mathbf{grad}\ \mathbf{a}(x_i,t).\vec{V}(x_i,t)}$$

Exemple d'application : calcul de l'accélération en représentation Eulérienne.

La formule précédente donne la relation suivante :

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\mathbf{grad}\ \ \vec{V}.\vec{V}$$

Soit sous forme développée, dans un repère cartésien orthonormé :

$$\gamma_i=\frac{dV_i}{dt}=\frac{\partial V_i}{\partial t}+\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$$

Imaginons par exemple que l'on soit dans un véhicule automobile un vendredi soir de départ en vacance à l'entrée du tunnel sous Fourvière de Lyon. Connaissant depuis longue date le problème du bouchon, nous avons pris la précaution de ne pas partir trop tôt. Toutefois à l'approche du tunnel, nous constatons un ralentissement. Notre vitesse diminue et à bord de notre véhicule nous enregistrons une décélération (accélération négative). Par contre déception pour le badaud qui s'amuse à regarder circuler les voitures assis sur le bord de la route depuis une paire d'heure. En effet, comme le bouchon est en train de sauter, la vitesse des véhicules passant en un point précis de la route est en constante augmentation. Suite à ce phénomène d'accélération (positive), il n'y aura bientôt plus rien à voir.

La première accélération (la négative) est celle d'une particule que l'on suit dans son mouvement. En variable de Lagrange, c'est la dérivée particulaire. Pour la seconde accélération (positive), on observe le mouvement en un point fixe de l'espace et on ne considère que les variations de vitesse dues au temps : c'est la dérivée locale.

Déformations d'un milieu continu

Tenseur Gradient

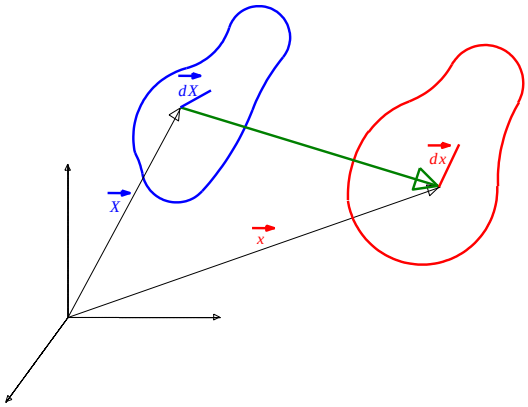
Il convient de bien différencier la notion de déplacement de la notion de déformation. Ainsi que nous avons déjà pu le constater en faisant l'étude mécanique des solides dits indéformables, il existe des champs vectoriels de déplacement qui ne créent aucune déformation.

Autant il est facile de définir le champ vectoriel des déplacements, autant la notion de déformation est délicate à bien cerner. Ainsi que nous allons le voir nous ne pourrons pas parler d'une déformation, mais de scalaire déformation, de vecteur déformation et de tenseur d'ordre 2 des déformations. Il convient donc de bien faire attention à toutes ces entités.

Pour matérialiser la déformation, on étudie la transformation d'un vecteur "matériel", c'est à dire d'un vecteur ayant origine et extrémité confondus avec des points matériels. Toutefois on conçoit bien que l'état de déformation n'étant généralement pas homogène dans la matière, il faille utiliser des points matériels infiniment voisins afin de bien caractériser la déformation au voisinage d'un élément matériel.

Nous sommes ainsi amenés à considérer la transformation suivante :

$$d\vec{X} \rightarrow d\vec{x}$$



D'autre part, nous avons les relations suivantes :

$$x_i = \Phi_i(X_J, t) \qquad X_I = \psi_I(x_j, t)$$

Par abus de langage, et pour rester dans la tradition, nous écrirons :

$$x_i = x_i(X_J, t) \qquad X_I = X_I(x_j, t)$$

Sous forme différentielle nous obtenons :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J \quad \text{et}$$

Ces relations nous permettent de mettre en évidence les composantes d'un tenseur définies par :

$$dx_i = F_{iJ}\, dX_J \qquad \text{avec} \qquad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{d\vec{x} = \mathbf{F}\, d\vec{X}}$$

Ce qui implique :

$$\boxed{d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}}$$

Le tenseur $\mathbf{F}$ qui apparaît est appelé "**tenseur gradient**" ou encore "**application linéaire tangente**".

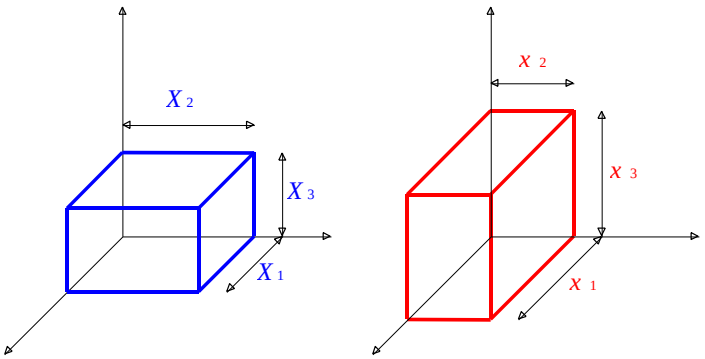
Il permet de caractériser les différentes transformations.

Les composantes de ce tenseur peuvent être calculées à partir du champ de déplacement en différenciant la relation suivante :

$$\vec{u}(X_J, t) = \vec{OM}_t - \vec{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}$$

On a donc : $F_{iJ} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{iJ} + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_J}$ $\quad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad}\ \vec{U}} \quad \boxed{d\vec{x} - d\vec{X} = \mathbf{F}\, d\vec{X} - d\vec{X} = \mathbf{Grad}\ \vec{U}\, d\vec{X}}$

Exemple dans le cas d'une déformation homogène triaxiale



Les équations de la transformation sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

On peut donc définir le tenseur gradient :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

On a alors pour la variation d'un volume infinitésimal unitaire :

$$dv_0 = 1 \Rightarrow dv = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\, dv_0$$

Cette expression est le cas particulier d'une formule plus générale :

$$dv = J\, dv_0 \qquad \text{avec} \qquad J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det \mathbf{F}$$

Etude tridimensionnelle des déformations

D'après l'étude précédente, on serait tenté de croire que le tenseur $\mathbf{F}$ est suffisant pour représenter l'état de déformation d'un domaine matériel. En effet il permet de bien faire apparaître les différences entre les deux vecteurs $d\vec{X}$ et $d\vec{x}$. Il semble même que la différence entre ces deux vecteurs soit à associer directement au champ de déplacement. En effet nous avons :

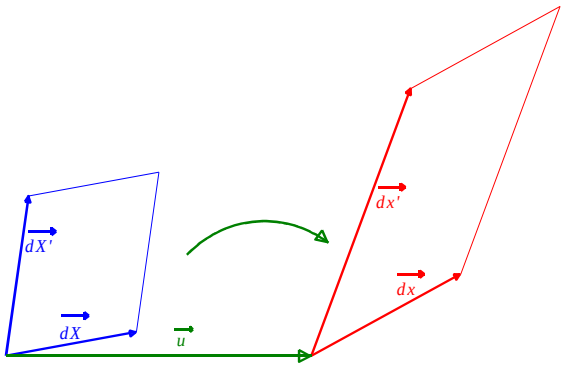
$$\boxed{d\vec{x} - d\vec{X} = \mathbf{F}\, d\vec{X} - d\vec{X} = \mathbf{Grad}\ \vec{U}\, d\vec{X}}$$

On pourrait alors conclure que le tenseur gradient du champ de déplacement est le tenseur qui suffit à caractériser les déformations d'un domaine matériel. Cette conclusion est erronée, car il existe des cas de déplacement d'un domaine matériel qui respectent la notion de solides indéformables alors que le tenseur gradient du champ de déplacement est non nul. On peut par exemple imaginer le phénomène de rotation autour d'un axe. Il faut donc définir proprement un état de déformation.

Pour caractériser les déformations d'un domaine matériel, il faut en fait considérer les variations entre deux configurations de la distance existante initialement entre deux points matériels arbitraires. Hélas cette notion de distance n'est pas simple à mettre en œuvre et on préfère considérer les variations de deux vecteurs "matériels". Mathématiquement, cela revient à examiner les variations du produit scalaire de ces deux

vecteurs. Un produit scalaire invariant quels que soient les deux vecteurs considérés est équivalent à une déformation nulle du milieu (pas de variation de longueur, pas de variation d'angle). On aura alors défini les changements de formes.

Imaginons deux vecteurs "matériels" $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$. Après transformation, nous obtenons les vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$.



Nous avons les relations :

$$d\vec{x}=\mathbf{F}\,d\vec{X} \qquad d\vec{x}'=\mathbf{F}\,d\vec{X}'$$

Ce qui nous donne :

$$d\vec{x}^{\,T}.d\vec{x}'=\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right)^{T}.\mathbf{F}\,d\vec{X}'$$

$$d\vec{x}^{\,T}.d\vec{x}'=\left(d\vec{X}\right)^{T}\mathbf{F}^{T}\otimes\mathbf{F}\,d\vec{X}'=\left(d\vec{X}\right)^{T}\mathbf{C}\,d\vec{X}'$$

En utilisant les notations indicielles et en omettane par abus de notation le signe de transposition, nous obtenons :

$$d\vec{x}.d\vec{x}'=dx_i\,dx_i'=(F_{iJ}\,dX_J)(F_{iK}\,dX_K')$$

$$d\vec{x}.d\vec{x}'=(F_{iJ}\,F_{iK})(dX_J\,dX_K')$$

$$d\vec{x}.d\vec{x}'=C_{JK}\,dX_J\,dX_K'$$

La déformation locale est alors définie par le tenseur $\mathbf{C}$

$$C_{JK}=F_{iJ}\,F_{iK}=F_{Ji}^{T}\,F_{iK}$$

On a ainsi:

$$\boxed{d\vec{x}.d\vec{x}'=d\vec{X}\,\mathbf{C}\,d\vec{X}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}=\mathbf{F}^{T}\otimes\mathbf{F}}$$

Dans cette relation $\mathbf{C}$ est un tenseur symétrique d'ordre deux (représentable par une matrice 3*3) appelé **tenseur des dilatations** ou **tenseur de Cauchy-Green droit**.

C'est un tenseur lagrangien car ses deux références sont faites vis à vis de la configuration de référence C_0. Ce tenseur peut être défini à partir du tenseur gradient du champ de déplacement :

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^{T}\otimes\mathbf{F}=(\mathbf{I}+\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}\otimes(\mathbf{I}+\mathbf{Grad}\,\vec{U})$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{I}+\mathbf{Grad}\,\vec{U}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}\otimes\mathbf{Grad}\,\vec{U}$$

La variation de notre produit scalaire devient alors :

$$d\vec{x}.d\vec{x}'-d\vec{X}\,d\vec{X}'=d\vec{X}\,(\mathbf{C}-\mathbf{I})\,d\vec{X}'$$

Soit encore :

$$d\vec{x}.d\vec{x}'-d\vec{X}\,d\vec{X}'=d\vec{X}\left[\mathbf{Grad}\,\vec{U}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}\otimes\mathbf{Grad}\,\vec{U}\right]d\vec{X}'$$

$$d\vec{x}.d\vec{x}'-d\vec{X}\,d\vec{X}'=2\,d\vec{X}\,\mathbf{E}\,d\vec{X}'$$

Nous obtenons ainsi un nouveau tenseur :

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\,\vec{U}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}+(\mathbf{Grad}\,\vec{U})^{T}\otimes\mathbf{Grad}\,\vec{U}\right]}$$

Ce tenseur est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange**.

C'est aussi un tenseur symétrique. On peut remarquer qu'il est identiquement nul dans un mouvement de corps solide $(\mathbf{C}=\mathbf{I})$. Ses composantes sont :

$$E_{IJ}=\frac{1}{2}\left(F_{kI}\,F_{kJ}-\delta_{IJ}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J}+\frac{\partial u_J}{\partial X_I}+\frac{\partial u_K}{\partial X_I}\frac{\partial u_K}{\partial X_J}\right)$$

On dira que la déformation du système est **homogène** si le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ ne dépend pas des coordonnées spatiales de référence X_I.

Remarque

De la même façon que l'on définit le produit scalaire $\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'}$ à partir du produit scalaire $d\vec{X}\,d\vec{X}'$, on peut, de manière tout à fait symétrique, définir le produit scalaire $d\vec{X}\,d\vec{X}'$ à partir du produit scalaire $\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx'}$.On aura alors les relations suivantes :

$d\vec{X}.d\vec{X}'=d\vec{x}\mathbf{B}^{-1}d\vec{x}'$ avec $\mathbf{B}=\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}^T$: Tenseur de Cauchy-Green gauche.

$d\vec{x}.d\vec{x}'-d\vec{X}.d\vec{X}'=2d\vec{x}\,\mathbf{A}\,d\vec{x}'$

$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1}\right)$ Tenseur des déformations d'Euler-Almansi.

Le tenseur des déformations d'Euler-Almansi et le tenseur de Cauchy Green gauche sont des tenseurs eulériens, symétriques.

D'autre part, il est possible de démontrer la relation suivante :

$$\mathbf{A}=(\mathbf{F}^{-1})^T\otimes\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}^{-1}$$

Soit en composantes :

$$A_{ij}=F^{-1}{}_{Ki}\,F^{-1}{}_{Lj}\,E_{KL}$$

Interprétation des résultats

Variation de longueur :

Prenons un vecteur "matériel" de longueur initiale dX orienté selon une direction unitaire $\vec{N}$ au voisinage d'un point M_0. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{dX}=dX\,\vec{N}$$

La transformation nous donne alors :

$$\overrightarrow{dx}=dx\,\vec{n}$$

Il est noter que le vecteur obtenu non seulement n'a pas la même longueur que le vecteur initial, mais qu'en plus il ne garde pas la même orientation.

On peut alors définir **l'allongement** (ou la **dilatation linéaire**) au point M_0 dans la direction $\vec{N}$

$$\varepsilon\left(M_0;\vec{N}\right)=\frac{dx-dX}{dX}$$

C'est en fait la variation relative de longueur de notre segment initial.

A partir des tenseurs précédents, nous pouvons écrire :

$$d\vec{x}.d\vec{x} = dx^2 = d\vec{X}\,\mathbf{C}\,d\vec{X} = dX^2\left(\vec{N}\,\mathbf{C}\,\vec{N}\right)$$

$$\varepsilon\left(M_0;\vec{N}\right)=\frac{dx-dX}{dX}=\sqrt{\vec{N}\,\mathbf{C}\,\vec{N}}-1=\sqrt{\vec{N}\,(\mathbf{I}+2\,\mathbf{E})\,\vec{N}}-1$$

En effet nous avons la relation :

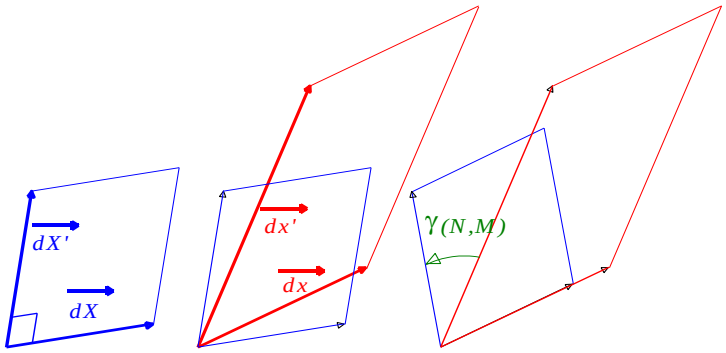
$$dx=\left(d\vec{x}\,d\vec{x}\right)^{1/2}=\left(C_{IJ}\,dX_I\,dX_J\right)^{1/2}=\left(\vec{N}\,\mathbf{C}\,\vec{N}\right)^{1/2}dX$$

Ainsi, dans le cas particulier de la direction $\vec{E}_1$, on obtient :

$$\varepsilon\left(M_0;\vec{E}_1\right)=\sqrt{\vec{E}_1\,\mathbf{C}\,\vec{E}_1}-1=\sqrt{C_{11}}-1=\sqrt{1+2E_{11}}-1$$

De même, on peut définir **le glissement** (ou la **distorsion angulaire**) au point M_0 dans les directions initialement perpendiculaires $\vec{N}$ et $\vec{M}$:

$$\gamma\left(M_0;\vec{N},\vec{M}\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\vec{n},\vec{m}\right)$$



Cette entité correspond à la variation d'un angle choisi initialement droit. Pour la calculer, on utilise les propriétés du produit scalaire entre deux vecteurs, qui dans la géométrie euclidienne fait apparaître le cosinus de l'angle formé entre ces deux vecteurs. On a ainsi :

$$\mathbf{cos}\left(d\vec{x},d\vec{x}'\right)=\frac{d\vec{x}\,d\vec{x}'}{dx\,dx'}=\mathbf{sin}\,\gamma$$

D'où :

$$\gamma\left(M_0;\vec{N},\vec{M}\right)=Arc\,\sin\left(\frac{\vec{N}\,\mathbf{C}\,\vec{M}}{\sqrt{\vec{N}\,\mathbf{C}\,\vec{N}}\sqrt{\vec{M}\,\mathbf{C}\,\vec{M}}}\right)=Arc\,\sin\left(\frac{2\vec{N}\,\mathbf{E}\,\vec{M}}{\left(1+\varepsilon(\vec{N})\right)\left(1+\varepsilon(\vec{M})\right)}\right)$$

Par exemple, pour les deux directions orthogonales $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, on aura :

$$\gamma\left(\vec{E}_1,\vec{E}_2\right)=Arc\,\sin\left(\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}}\right)=Arc\,\sin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}\right)$$

Enfin, il est possible d'obtenir **la dilatation volumique** ou variation relative de volume :

$$\theta=\frac{dv-dV}{dV}$$

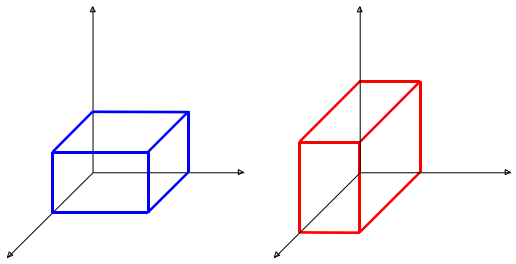
Base principale

Comme le tenseur de Green Lagrange $\mathbf{C}$ est un tenseur symétrique, sa représentation matricielle est symétrique dans tout repère. On a en fait affaire à une application bilinéaire symétrique. Il existe alors une base de vecteurs $(\vec{E}_I, \vec{E}_{II}, \vec{E}_{III})$ dans laquelle la représentation matricielle de l'application est une matrice diagonale. On dit que l'on a la base propre ou base principale.

Les vecteurs de cette base sont appelés les vecteurs propres de l'application. En mécanique, nous parlerons plus facilement de directions principales.

Donc dans cette base, nous avons :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_I & 0 & 0 \\ 0 & C_{II} & 0 \\ 0 & 0 & C_{III} \end{pmatrix} \left(\vec{E}_i\right)$$



Un volume élémentaire construit selon ces directions et de cotés dX_I, dX_{II}, dX_{III} est transformé en un volume parallélépipèdique (pas de glissement) de cotés dx_I, dx_{II}, dx_{III}. On peut alors calculer la variation relative de volume :

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV}$$

On a d'autre part les relations :

$dV = dX_I\, dX_{II}\, dX_{III}$ et $dv = dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}$

Avec par exemple :

$$dx_I = \sqrt{C_I}\, dX_I$$

On obtient donc :

$$dv = \sqrt{C_I}\, dX_I \sqrt{C_{II}}\, dX_{II} \sqrt{C_{III}}\, dX_{III} = \sqrt{C_I C_{II} C_{III}}\, dV$$

$$dv = \sqrt{\det(\mathbf{C})}\, dV$$

On fait ainsi apparaître le jacobien de la transformation :

$$J = \frac{dv}{dV}$$

Ce qui nous donne pour la variation relative de volume :

$$\theta = J - 1$$

Tenseur des déformations linéarisé

Comme nous venons de le voir, la caractérisation de l'état de déformation d'un domaine matériel passe par la détermination de tenseurs plus ou moins compliqués. Quel que soit le choix fait au niveau des tenseurs, on constate une non-linéarité provenant essentiellement des termes du type $(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T \otimes \mathbf{Grad}\ \vec{U} = \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}$. Cette non-linéarité de l'état de déformation par rapport au champ de déplacement complique sérieusement les calculs.

Cependant, dans de nombreux cas, on pourra linéariser l'état de déformation en faisant l'hypothèse des transformations infinitésimales. Cette hypothèse, encore dénommée hypothèse des petites perturbations, se décompose en deux idées :

* Le déplacement de chacun des points du domaine matériel est petit. On pourra ainsi confondre l'état actuel avec l'état de référence.

* Le tenseur gradient de déplacement ne contient que des termes négligeables devant l'unité.

Avec ces hypothèses, les différents tenseurs déformations deviennent :

$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\otimes\mathbf{F}=\left[\mathbf{I}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]\otimes\left[\mathbf{I}+\mathbf{Grad}\ \vec{U}\right]=\mathbf{I}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T+\mathbf{Grad}\ \vec{U}$ Cauchy-Green droit

$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\frac{1}{2}\left[(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T+\mathbf{Grad}\ \vec{U}\right]$ Green-Lagrange

$\mathbf{B}=\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}^T=\left[\mathbf{I}+\mathbf{Grad}\ \vec{U}\right]\otimes\left[\mathbf{I}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]=\mathbf{I}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T+\mathbf{Grad}\ \vec{U}=\mathbf{C}$ Cauchy-Green gauche

$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]=\mathbf{E}$ Euler-Almansi

On remarque donc qu'il y a une identification entre les descriptions lagrangienne et eulérienne.

Ainsi que nous l'avons déjà constaté, ce sont les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi qui, plus que les tenseurs de déformation de Cauchy-Green, représente l'état de déformation en un point. En effet dans un déplacement de corps solide indéformable, les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi sont nuls, alors que les tenseurs de déformation de Cauchy-Green sont confondus avec le tenseur identité.

On convient de dire que, dans le cas de petites perturbations, l'état de déformation est représenté par le tenseur des déformations linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$ défini par :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]=\mathbf{E}=\mathbf{A}$$

Ce qui nous donne pour les coordonnées cartésiennes :

$$\varepsilon_{IJ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J}+\frac{\partial u_J}{\partial X_I}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ij}$$

Ce nouveau tenseur est en fait la partie symétrique du tenseur gradient. Pour traiter de nombreuses applications, il peut être fait l'usage de la partie antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$ du tenseur gradient. Les relations sont les suivantes :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U}+(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]$$

$$\overline{\overline{\omega}}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U}-(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right]$$

$$\mathbf{Grad}\ \vec{U}=\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{\omega}}$$

$$(\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T=\overline{\overline{\varepsilon}}-\overline{\overline{\omega}}$$

L'emploi du tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ en lieu et place du tenseur de Green Lagrange **E** ou du tenseur d'Euler Almansi **A** est une simplification importante car on obtient une linéarisation des déformations vis à vis du champ de déplacement. En effet si l'on considère deux champs de déplacement $\vec{U}_a$ et $\vec{U}_b$, on peut écrire :

$$\mathbf{Grad}\left[\lambda\overrightarrow{U_a}+\mu\overrightarrow{U_b}\right]=\lambda\,\mathbf{Grad}\,\overrightarrow{U_a}+\mu\,\mathbf{Grad}\,\overrightarrow{U_b}$$

On en déduit alors la relation :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}\left[\lambda\overrightarrow{U_a}+\mu\overrightarrow{U_b}\right]=\lambda\,\overline{\overline{\varepsilon}}\left[\overrightarrow{U_a}\right]+\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}}\left[\overrightarrow{U_b}\right]$$

Interprétation géométrique

Avec ce qui précède nous pouvons écrire :

$$d\vec{x}-d\vec{X}=\mathbf{F}\,d\vec{X}\;-\;d\vec{X}\;=\;\mathbf{grad}\;\vec{U}\;d\vec{X}$$

$$d\vec{x}-d\vec{X}=\overline{\overline{\varepsilon}}\,d\vec{X}\;+\;\overline{\overline{\omega}}\,d\vec{X}$$

Supposons que $d\vec{X}$ représente, dans la configuration initiale, deux points M_0 et M'_0. Le vecteur $d\vec{x}$ représentera alors, dans la configuration actuelle les deux points M_t et M'_t, transformés des deux points initiaux dans le champ de déplacement.

On a alors les relations suivantes :

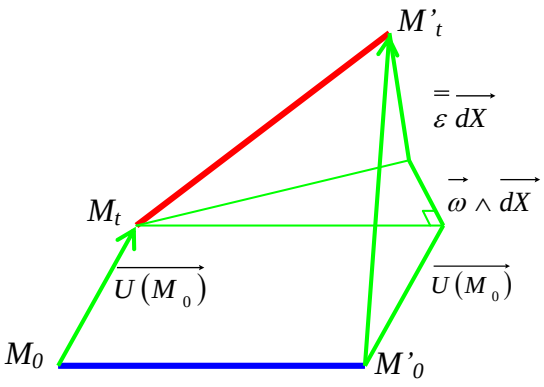
$$d\vec{X}=\overrightarrow{M_0M'_0}\qquad d\vec{x}=\overrightarrow{M_tM'_t}$$

$$\overrightarrow{U(M_0)}=\overrightarrow{M_0M_t}\qquad \overrightarrow{U(M'_0)}=\overrightarrow{M'_0M'_t}$$

$$\overrightarrow{M_tM'_t}-\overrightarrow{M_0M'_0}=\overrightarrow{M'_0M'_t}-\overrightarrow{M_0M_t}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{U(M'_0)}=\overrightarrow{U(M_0)}+\overline{\overline{\omega}}\,d\vec{X}+\overline{\overline{\varepsilon}}\,d\vec{X}$$



De plus, on peut montrer qu'à un tenseur antisymétrique du second ordre, il est possible d'associer un vecteur de tel sorte que l'on puisse remplacer le produit tensoriel par un produit vectoriel :

$$\overline{\overline{\omega}}\,d\vec{X}=\vec{\omega}\wedge d\vec{X}$$

Ainsi , au voisinage du point M_0, le champ de déplacement se présente sous la forme suivante :

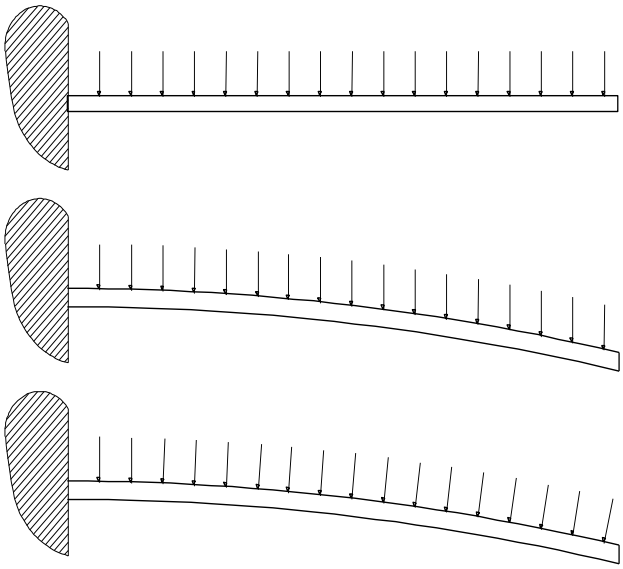
$$\boxed{\overrightarrow{U(M'_0)}=\overrightarrow{U(M_0)}+\vec{\omega}\wedge d\vec{X}+\overline{\overline{\varepsilon}}\,d\vec{X}}$$

On peut reconnaître les composantes d'un champ de déplacement de solide indéformable avec une translation $\overrightarrow{U(M_0)}$ et une rotation $\vec{\omega}\wedge d\vec{X}$. Le reste représente donc la déformation du solide. C'est pourquoi le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est appelé **tenseur de déformation.**

Remarques

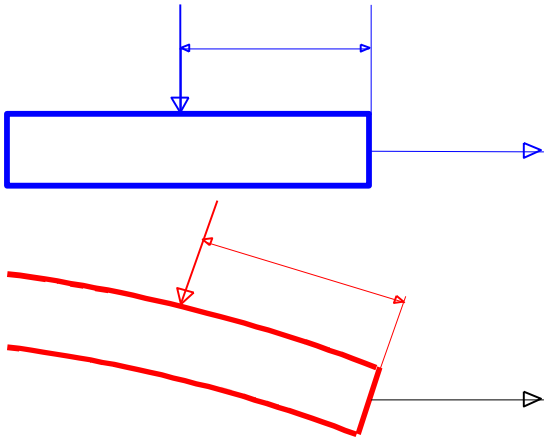
Il existe malheureusement des cas d'études qui ne respectent pas l'hypothèse de petites perturbations.

On trouve en particulier le non-respect de cette hypothèse simplificatrice dans des opérations de mise en forme imposant à la fois de grands déplacements et de grandes déformations. Mais on peut aussi trouver des applications qui ne respectent pas que l'une des conditions. Ainsi, en robotique, on est souvent confronté à des problèmes de grands déplacements, mais dans chacun des éléments, on peut considérer que les déformations sont très faibles.



Ces hypothèses sont d'une réelle importance pour la simplification des calculs. Prenons par exemple le cas d'une poutre console encastrée en une section extrémité, libre à l'autre extrémité et supportant une charge uniformément répartie.

Déjà la définition rigoureuse de la charge pose un problème. Cette charge conserve-t-elle une direction constante qu'elle que soit la déformée de la poutre (cas de l'attraction gravitationnelle), ou bien cette charge est-elle suiveuse, c'est-à-dire, conserve-t-elle une direction fixe vis à vis de l'élément de poutre sur lequel est s'applique (cas d'une pression) ?



La réponse à cette question étant trouvée, si on veut déterminer la déformée de notre poutre en utilisant la théorie classique des poutres, il convient de bien réaliser que, si cette déformée est grande, on a vite affaire à une poutre courbe. En conséquence la formule classique $M_{fz} = E I_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2}$ devra être délaissée au profit de la formule suivante qui fait apparaître le rayon de courbure de notre poutre initialement droite :

$$M_{fz} = \frac{E I_{Gz}}{R} = E I_{Gz} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{d y}{dx}\right)^2}}$$

Bien entendu les problèmes d'intégration sont accrus. De plus le calcul du moment de flexion pose tout de suite plus de difficultés. En effet suivant que l'on prenne en compte ou non la rotation des sections, on constate qu'il y a une différence dans l'évaluation du bras de levier.

Etude des petites perturbations

A partir des hypothèses simplificatrices, on peut s'intéresser à l'étude des allongements et des glissements au voisinage d'un point matériel.

Du fait des relations existantes entre les différents tenseurs, et en ayant remarqué que de nombreux termes sont négligeables devant l'unité, nous pouvons écrire :

$\varepsilon\left(M ; \vec{E}_1\right) = \sqrt{\vec{E}_1 \mathbf{C} \vec{E}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1+2E_{11}} - 1 \approx \varepsilon_{11}$ Pour l'allongement dans la direction $\vec{E}_1$

$\gamma\left(M ; \vec{E}_1, \vec{E}_2\right) = Arc\ \sin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}\right) \approx 2\varepsilon_{12}$ Pour le glissement dans les directions $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$

On peut donc donner une nouvelle détermination du tenseur des déformations linéarisé :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{E}_1) & \frac{\gamma(\vec{E}_1,\vec{E}_2)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_1,\vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1,\vec{E}_2)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_2) & \frac{\gamma(\vec{E}_2,\vec{E}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{E}_1,\vec{E}_3)}{2} & \frac{\gamma(\vec{E}_2,\vec{E}_3)}{2} & \varepsilon(\vec{E}_3) \end{pmatrix}_{(\vec{E}_i)}$$

D'une façon plus générale, si on considère deux vecteurs unitaires orthogonaux $\left(\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1 \; ; \; \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0\right)$, on peut écrire :

$\varepsilon(M;\vec{a}) = \vec{a}\,\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,\vec{a} = \varepsilon_{aa}$	**dilatation linéaire** dans la direction $\vec{a}$
$\gamma(M;\vec{a},\vec{b}) = 2\,\vec{a}\,\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,\vec{b} = 2\,\varepsilon_{ab}$	**distorsion angulaire** de l'angle droit formé entre les directions $\vec{a}$ et $\vec{b}$

D'une manière générale, on définira le vecteur déformation pure au point *M* dans la direction unitaire $\vec{a}$ par la relation :

$$\overrightarrow{D_p(M;\vec{a})} = \overline{\overline{\varepsilon(M)}}\,\vec{a}$$

On peut aussi remarquer que, du fait de la symétrie du tenseur de déformation, on a :

$$\gamma(M;\vec{a},\vec{b}) = 2\,\vec{a}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{b} = 2\,\varepsilon_{ab} = 2\,\vec{b}\,\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,\vec{a}$$

En ce qui concerne la variation relative de volume, on obtient :

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV} = J - 1 \approx tr\,\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial u_I}{\partial X_I} = div\,\vec{U}$$

Directions principales ; déformations principales

La matrice représentant l'état de déformation linéarisé étant une matrice réelle symétrique, on peut définir ses directions principales (vecteurs propres) et les valeurs des déformations principales (valeurs propres). Du fait de la forte dépendance entre le tenseur des déformations de Green Lagrange et le tenseur des déformations linéarisé, il y a identification totale entre les vecteurs propres des matrices associées à ces deux tenseurs.

Pour le tenseur $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, les relations sont les suivantes :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\overrightarrow{N_I} = \varepsilon_I\,\overrightarrow{N_I}$$

Avec comme représentation dans la base principale :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{N_I})}$$

Comme le tenseur des déformations linéarisé est symétrique, si les trois déformations principales sont différentes, il existe trois directions principales orthogonales deux à deux.

Si deux déformations principales sont distinctes, il y a alors une direction principale associée à la troisième déformation principale. Toute direction orthogonale à cette direction principale est principale. Si les trois directions principales sont identiques, toute direction est principale. On dit alors que le tenseur est sphérique.

La détermination des valeurs des directions principales de déformation conduit aussi à la détermination de trois invariants scalaires du tenseur. En effet, comme pour tout tenseur du second ordre $\mathbf{T}$, le calcul des valeurs propres passe par l'annulation du polynôme caractéristique $P_T(\lambda)$. Ce polynôme est obtenu par le déterminant de $(\mathbf{T}-\lambda\,\mathbf{I})$.

On a donc :

$$P_T(\lambda)=\det(\mathbf{T}-\lambda\,\mathbf{I})= -\lambda^3+T_I\lambda^2-T_{II}\lambda+T_{III}$$

Les termes T_I, T_{II}, T_{III} représentant **les invariants fondamentaux** du tenseur $\mathbf{T}$:

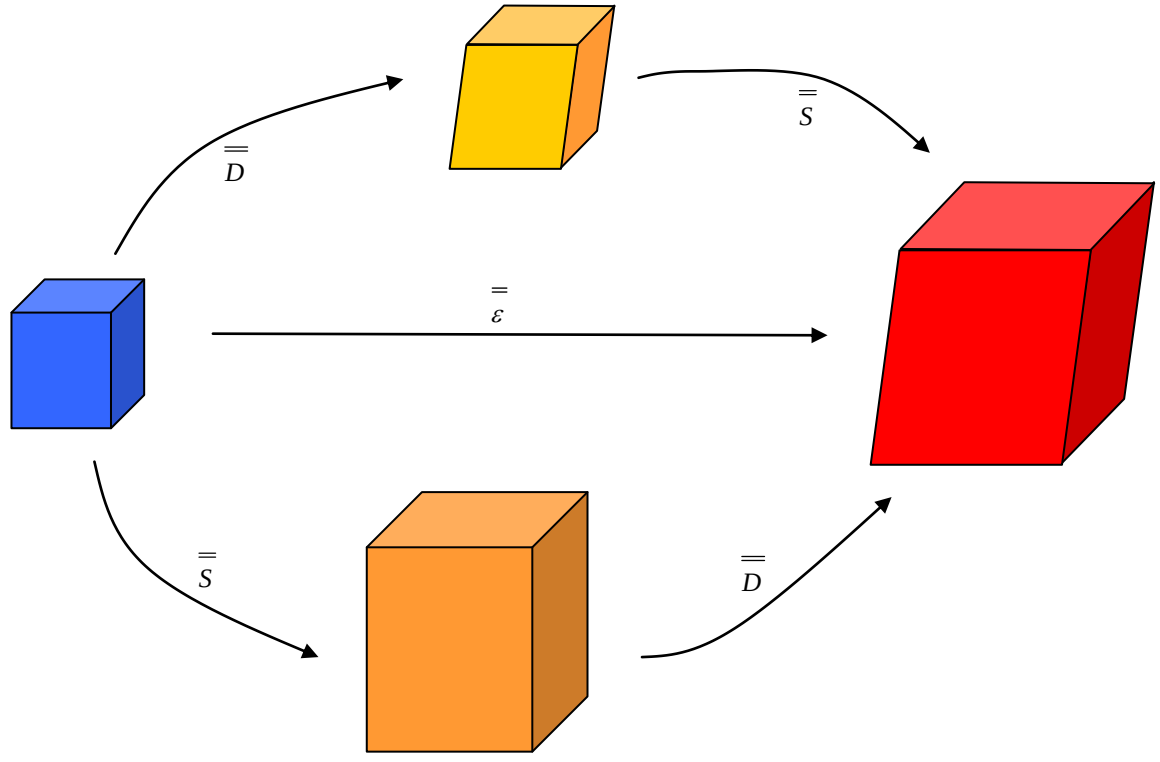
$$\begin{cases} T_I = tr\,\mathbf{T} \\ T_{II} = \frac{1}{2}\left((tr\,\mathbf{T})^2 - tr\,\mathbf{T}^2\right) \\ T_{III} = \det\mathbf{T} \end{cases}$$

Etat déviatorique :

Pour un tenseur du second ordre quelconque, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs de tel sorte que l'un soit sphérique et que l'autre ait une trace nulle. Les formules sont les suivantes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{D} \qquad \mathbf{S} = tr(\mathbf{T})\,\mathbf{I}/3 = T_{ii}\,\mathbf{I}/3 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$$

Dans le cas du tenseur de déformation, le tenseur sphérique associé change le volume sans changer la forme alors que le tenseur déviateur change la forme à volume constant (la trace est nulle donc pas de variation relative de volume).



Représentations graphiques

La notion de tenseur étant relativement délicate à appréhender, on recherche souvent des solutions plus parlantes pour représenter un état tensoriel. Il existe, pour des tenseurs de second ordre d'un espace vectoriel de dimension trois, des représentations graphiques, soit tridemensionnelle, soit plane, qui permettent de tirer quelques enseignements.

Imaginons que l'on connaisse un tenseur symétrique, à coefficients réels, **T** par ses composantes dans la base principale :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix} \left(\overrightarrow{N_i}\right)$$

Considérons un vecteur unitaire quelconque : $\vec{n} = n_i \overrightarrow{N_i}$

On peut alors calculer le vecteur obtenu dans la direction $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{A(\vec{n})} = \mathbf{T}\,\vec{n}$$

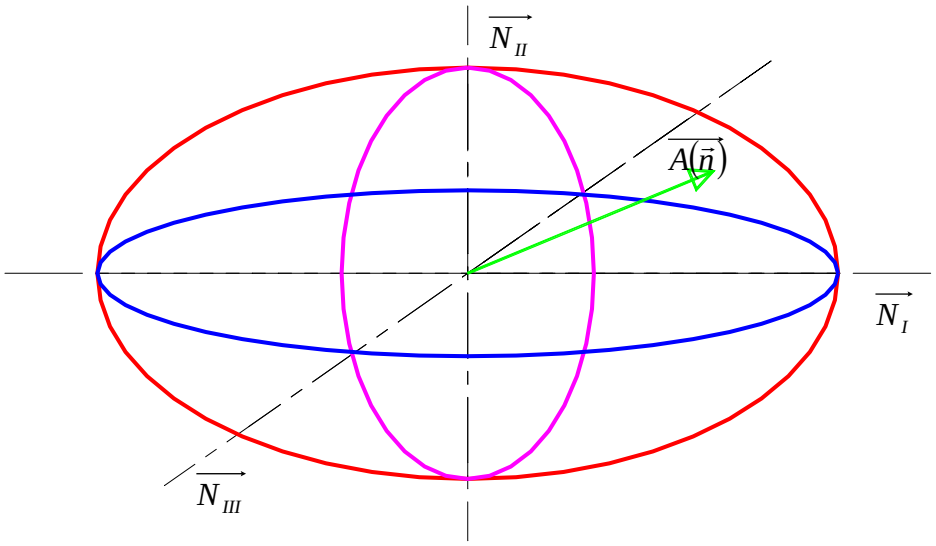
Dans la base principale, les composantes de ce vecteur sont :

$$\overrightarrow{A(\vec{n})} = A_i \overrightarrow{N_i} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_1 = T_I\, n_1 \\ A_2 = T_{II}\, n_2 \\ A_3 = T_{III}\, n_3 \end{cases}$$

D'autre part, comme le vecteur $\vec{n}$ est unitaire nous avons :

$$n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2} = 1 = \frac{A_1^{\,2}}{T_I^{\,2}} + \frac{A_2^{\,2}}{T_{II}^{\,2}} + \frac{A_3^{\,2}}{T_{III}^{\,2}}$$

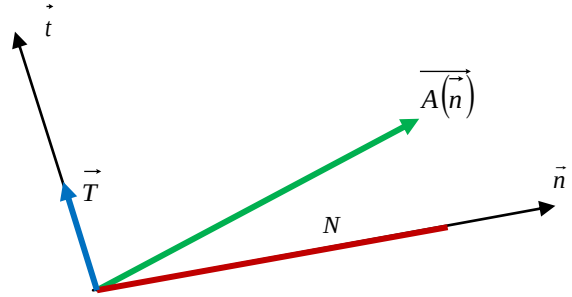
Nous constatons ainsi que les composantes du vecteur $\vec{A}$ peuvent très bien représenter les coordonnées d'un point *A* dans l'espace des vecteurs propres. Avec l'équation précédente, on peut dire que le lieu décrit dans l'espace des vecteurs propres est un ellipsoïde, appelé **ellipsoïde de Lamé**.



Cette première représentation graphique tridimensionnelle permet de constater que les valeurs propres représentent les valeurs extrêmales de l'état tensoriel.

Ainsi dans le cas du tenseur de déformation, la plus grande dilatation linéaire et la plus petite en un point sont données par deux des déformations principales ε_I, ε_{II} et ε_{III}.

Par contre cette représentation de l'état tensoriel présente l'inconvénient d'être tridimensionnelle et donc peu aisée à dessiner. Il est possible d'obtenir une représentation plane en considérant le plan formé par les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{A(\vec{n})}$. Ce plan présente généralement une intersection avec le plan orthogonal au vecteur $\vec{n}$. On désigne par N la projection du vecteur $\overrightarrow{A(\vec{n})}$ sur le vecteur $\vec{n}$, par $\vec{T}$ le vecteur obtenu par projection du vecteur $\vec{n}$ sur son plan orthogonal.



On a, avec des notations évidentes :

$$\begin{cases} \vec{N} = \left(\vec{n} \,.\, \overrightarrow{A(\vec{n})}\right)\vec{n} = N\ \vec{n} \\ \vec{T} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{A(\vec{n})} \wedge \vec{n} = T\ \vec{t} \end{cases}$$

avec $\vec{N}$ vecteur normal et $\vec{T}$ vecteur tangent, $\vec{t}$ étant le vecteur unitaire associé.

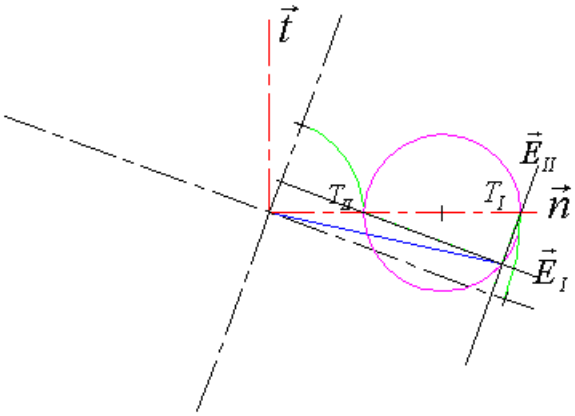
Supposons que le vecteur $\vec{n}$ appartienne au plan principal formé par les vecteurs $\left(\overrightarrow{N_I}, \overrightarrow{N_{II}}\right)$, et qu'il présente un angle α avec la direction principale $\overrightarrow{N_I}$. On peut donc écrire :

$$\vec{n} = \cos\alpha\ \overrightarrow{N_I} + \sin\alpha\ \overrightarrow{N_{II}} \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{A(\vec{n})} = A_1\ \overrightarrow{N_I} + A_2\ \overrightarrow{N_{II}} = a_n\ \vec{n} + a_t\ \vec{t}$$

Avec les formules de changement de base, il est facile de démontrer que l'on a :

$$\begin{cases} a_n = T_I\ \mathbf{cos}^{\,2}\,\alpha + T_{II}\ \mathbf{sin}^{\,2}\,\alpha = \dfrac{T_I + T_{II}}{2} + \dfrac{T_I - T_{II}}{2}\mathbf{cos}(-2\alpha) \\ a_t = (T_{II} - T_I)\,\mathbf{cos}\ \alpha\ \mathbf{sin}\ \alpha = \dfrac{T_I - T_{II}}{2}\mathbf{sin}(-2\alpha) \end{cases}$$

On constate donc que dans le plan vectoriel $(\vec{n}, \vec{t})$, lorsque l'angle varie, l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{A(\vec{n})}$ parcourt un cercle dont le centre a $\left(\dfrac{T_I + T_{II}}{2}\,;0\right)$ pour coordonnées. Le rayon du cercle est os. Le point extrémité décrit le cercle en sens inverse et du double de l'angle de position α. Le cercle ainsi obtenu est appelé **cercle de Mohr** dans le plan principal $\left(\overrightarrow{N_I}, \overrightarrow{N_{II}}\right)$. On conçoit aisément qu'il soit ainsi possible de construire trois cercles. La figure obtenue montre ainsi le tricercle de Mohr de l'état tensoriel.



A partir de la représentation de Lamé, on peut déduire que pour une direction unitaire quelconque, l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{A(\vec{n})}$ doit se trouver à l'intérieur du tricercle. Les valeurs propres formant le diamètre de plus grand des cercles de Mohr sont les valeurs extrémales du vecteur normal. Leur différence constitue la plus grande valeur du vecteur tangent.

Conditions de compatibilité

Ainsi que nous l'avons constaté, les différents tenseurs déformations sont issus de la donnée d'un champ vectoriel, le champ de déplacement. Les relations permettent sans ambigüité de calculer, dans un repère quelconque, les composantes de chacun de ces tenseurs dès lors que l'on connaît les composantes du vecteur déplacement.

Par contre la démarche inverse n'est pas immédiate. On conçoit en effet qu'il soit délicat de « remonter » à un champ de déplacement à partir de la connaissance d'un tenseur déformation.

Nous allons raisonner sur la forme linéarisée des déformations, donc à partir du tenseur de déformation $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Ce tenseur, symétrique est déterminé par 6 composantes. Il est clair que des relations doivent exister entre ces six composantes si le tenseur représente un état de déformation obtenu à parti d'un champ vectoriel ayant trois composantes.

Ces relations s'appelle les **conditions de compatibilité** et elles ne sont en fait que les conditions d'intégrabilité au sens de Cauchy pour un système d'équations différentielles.

Dans un système de coordonnées cartésiennes nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$$

Nous venons ainsi de montrer que nous sommes capables de calculer les composantes du vecteur gradient de ω_{ij}. Toutefois nous obtiendrons effectivement un vecteur gradient si le rotationnel est nul, c'est à dire si nous pouvons vérifier les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0 = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

Ce sont en fait les conditions d'intégrabilité de Cauchy de la différentielle $d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} dx_m$.

Exprimées en fonction des composantes du tenseur de déformations ces conditions nous donnent un système de six équations :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0}$$

Soit sous forme développée :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right) = 0$$

On peut aussi démontrer que ces conditions de compatibilité prennent la forme intrinsèque suivante :

$$\boxed{\textbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)} + \left(\textbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)}\right)^T - \textbf{grad}\left(\overrightarrow{grad\ \left[tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right]}\right) - \Delta\,\overline{\overline{\varepsilon}} = 0}$$

Donc, si ces équations sont vérifiées, il est possible de déterminer le champ de déplacement. La méthode consiste à calculer les composantes du tenseur antisymétrique à l'aide des différentielles totales exactes :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}\right) dx_k$$

Puis de déterminer les composantes du champ de déplacement à l'aide des trois autres différentielles totales exactes :

$$du_i = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) dx_j$$

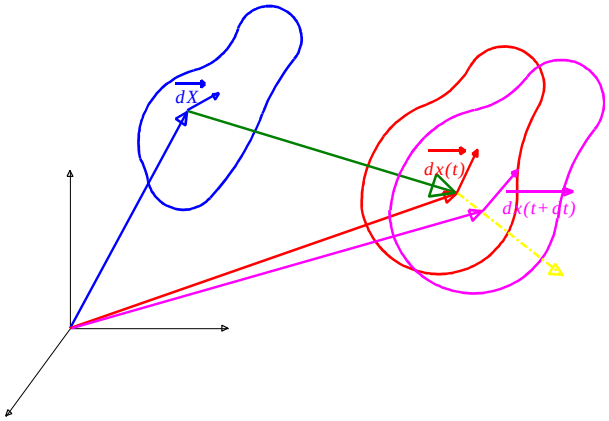
Le champ de déplacement ainsi obtenu est défini à un champ de déplacement de solide indéformable près.

En application, nous proposons au lecteur de définir le champ de déplacement qui crée l'état de déformation suivant :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \nu\, b\, x_1 & a\, x_1\, x_2 & 0 \\ a\, x_1\, x_2 & \nu\, b\, x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -b\, x_1 \end{pmatrix} \left(\vec{e}_i\right)$$

Vitesse de déformation

Dans l'étude précédente, on s'est intéressé aux transformations du système entre une configuration de référence C_0 et une configuration actuelle C_t.



Sans se soucier du chemin de déformation suivi lors du mouvement entre ces deux configurations, on a étudié la transformation sous un aspect purement géométrique, d'un état initial vers un état final. On conçoit très bien que cette étude puisse convenir dans toute transformation pour laquelle l'état de déformation soit une fonction d'état (au sens thermodynamique du terme). Peu importe alors le chemin suivi pour passer d'un état à l'autre.

Hélas, de plus en plus fréquemment, suite à une modélisation plus fine, suite à une meilleure connaissance, suite à des développements de moyens de calcul, il devient de plus en plus nécessaire d'étudié les évolutions du système suivant un chemin de déformation. Nous sommes alors amenés à faire l'étude de façon incrémentale, c'est à dire à étudier la transformation entre deux états infiniment voisins, puis, par un processus de type intégration, en déduire le chemin réel de déformation.

Pour caractériser les vitesses, on introduit le vecteur vitesse $\vec{V}(M,t)$ que l'on peut considérer comme :

* fonction du temps et des coordonnées de référence X_I (description Lagrangienne)
* fonction du temps et des coordonnées actuelles x_i (description Eulérienne)

Taux de déformation lagrangien

Entre les instants *t* et *t* + d*t*, un vecteur "matériel" infinitésimal $d\vec{x}^t$ se transforme en $d\vec{x}^{t+dt}$. De la même manière que, pour les déformations, nous nous sommes intéressés à la variation du produit scalaire, nous allons cette fois considérer sa vitesse de variation.

La vitesse de variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels est alors :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=\frac{d}{dt}\left(\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right)\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}'\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.\mathbf{C}\,d\vec{X}'\right)=\frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.d\vec{X}'+2d\vec{X}.\mathbf{E}\,d\vec{X}'\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=2d\vec{X}.\frac{d\mathbf{E}}{dt}d\vec{X}'$$

Le tenseur $\frac{d\mathbf{E}}{dt}\left(\vec{X},t\right)=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\left(\vec{X},t\right)=\dot{\mathbf{E}}\left(\vec{X},t\right)$ est appelé **taux de déformation Lagrangien**

Il est obtenu en dérivant par rapport au temps le tenseur des déformations de Green-Lagrange. C'est donc la vitesse d'évolution de la déformation lorsque celle-ci est mesurée à partir d'un état de référence initial.

Taux de déformation eulérien

Etudions à présent la même variation de produit scalaire mais en variables eulériennes. On a donc :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=\frac{d}{dt}\left(\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right).\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}'\right)\right)=\frac{d\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right)}{dt}.\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}'\right)+\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right).\frac{d\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}'\right)}{dt}$$

En utilisant la relation : $\frac{d(d\vec{x})}{dt}=\frac{d\left(\mathbf{F}\;d\vec{X}\right)}{dt}=\dot{\mathbf{F}}\;d\vec{X}=\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}d\vec{x}$

On obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=\frac{d\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}\right)}{dt}.d\vec{x}'+d\vec{x}.\frac{d\left(\mathbf{F}\,d\vec{X}'\right)}{dt}=\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}d\vec{x}.d\vec{x}'+d\vec{x}.\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}d\vec{x}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=d\vec{x}.\left(\left(\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}\right)^{T}+\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}\right)d\vec{x}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=d\vec{x}.\left(2\;\mathbf{D}\right)d\vec{x}'$$

Cette dernière relation nous permet de faire apparaître le **tenseur taux de déformation eulérien** $\mathbf{D}$. Il peut être déterminé à partir du tenseur gradient des vitesses.

Nous avons en effet la relation :

$$\dot{F}_{iK}\;F_{Kj}^{\;-1}=\frac{\partial V_i}{\partial X_K}\frac{\partial X_K}{\partial x_j}=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=L_{ij}$$

Ainsi le produit $\dot{\mathbf{F}}\;\mathbf{F}^{-1}$ défini un tenseur $\mathbf{L}$ qui n'est autre que le tenseur gradient des vitesses :

$$\mathbf{L}=\mathbf{Grad}\;\vec{V}$$

Le tenseur $\mathbf{D}$ représente la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses. On peut aussi faire apparaître le tenseur $\mathbf{W}$ qui représente la partie antisymétrique.

Les relations sont les suivantes :

$$\mathbf{D}\left(\vec{x},t\right)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\;\vec{V}+\left(\mathbf{Grad}\;\vec{V}\right)^{T}\right]=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}+\mathbf{L}^{T}\right)$$

$$\mathbf{W}\left(\vec{x},t\right)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\;\vec{V}-\left(\mathbf{Grad}\;\vec{V}\right)^{T}\right]=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}-\mathbf{L}^{T}\right)$$

$$\mathbf{Grad}\;\vec{V}=\mathbf{D}+\mathbf{W}=\mathbf{L}\left(\vec{x},t\right)$$

$$\left(\mathbf{Grad}\;\vec{V}\right)^{T}=\mathbf{D}-\mathbf{W}=\left[\mathbf{L}\left(\vec{x},t\right)\right]^{T}$$

On montre que le tenseur $\mathbf{W}$ est un tenseur qui représente la vitesse de rotation de la matière.

Remarques

1- L'égalité des produits scalaires en définition lagrangienne et eulérienne nous conduit à la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right)=d\vec{x}.\left(2\;\mathbf{D}\right)d\vec{x}'=d\vec{X}.\left(2\;\dot{\mathbf{E}}\right)d\vec{X}'$$

On peut alors en déduire la relation :

$$\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{F}^{T}\otimes\mathbf{D}\otimes\mathbf{F}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}$$

Ainsi les dérivées par rapport au temps des tenseurs lagrangiens décrivant la déformation sont directement reliées au tenseur des taux de déformation. Il n'en va pas de même pour les tenseurs eulériens. Par exemple pour le tenseur de Cauchy-Green gauche, on a :

$$\dot{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{F} \overset{*}{\otimes} \mathbf{F}^T\right] = \dot{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \otimes \dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{L} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{L}^T$$

2- Si l'on considère la transformation infiniment petite entre les configurations C_t et C_{t+dt}, en prenant la configuration C_t comme configuration de référence (on parle alors de description lagrangienne réactualisée), le déplacement est alors :

$$d\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{V}(\vec{x},t)dt$$

Le tenseur de déformation est alors dans une forme linéarisée :

$$d\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ (d\vec{u}) + \left(\mathbf{Grad}\ (d\vec{u})\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ (d\vec{V}) + \left(\mathbf{Grad}\ (d\vec{V})\right)^T\right]dt$$

$$d\overline{\overline{\varepsilon}} = \mathsf{D}\ dt$$

Ainsi, le tenseur $\mathbf{D}$ apparaît comme le tenseur "tangent" aux déformations, à partir de la configuration actuelle. Cette description est souvent utilisée en calcul numérique, car on réactualise souvent la configuration de référence à chaque pas de calcul.

3- Dans le cadre des transformations infinitésimales, $\mathbf{Grad}\ (d\vec{u})$ peut être considéré comme un infiniment petit. On a donc :

$$\mathbf{D} \approx \dot{\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \approx \dot{\mathbf{E}}$$

Les tenseurs des taux de déformations lagrangien et eulérien peuvent être confondus.

Interprétation du tenseur taux de déformation

Cette interprétation est tout à fait similaire à celle des tenseurs de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$ et des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}$.

Taux de dilatation linéaire

En considérant par exemple les deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ confondus, de longueur *dl* et dans la direction $\vec{E}_1 \left(d\vec{x} = d\vec{x}' = dl\,\vec{E}_1\right)$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right) = \frac{d\left(dl\right)^2}{dt} = d\vec{x}.\left(2\mathbf{D}\right)d\vec{x}' = 2D_{11}\left(dl\right)^2$$

Ainsi, D_{11} est le **taux de dilatation linéaire** (ou encore taux d'allongement ou vitesse d'extension) dans la direction $\vec{E}_1$.

Taux de glissement

Nous devons cette fois prendre les deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ dans deux directions orthogonales. En les supposants normés $\left(d\vec{x} = \vec{E}_1, d\vec{x}' = \vec{E}_2\right)$, nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x}'\right) = d\vec{x}.\left(2\mathbf{D}\right)d\vec{x}' = 2D_{12}$$

Etat de contrainte dans les milieux continus

Lois de conservation

La mécanique des milieux continus repose sur des lois ou des principes de la physique. Tout le monde pense bien entendu immédiatement au principe fondamental de la mécanique, mais il ne faut en aucun négliger les autres lois constatées. L'évolution d'un domaine matériel sera souvent l'occasion d'échange avec le milieu extérieur et ces échanges sont réglementés. Ainsi on conçoit que les variations entre les domaines soit assujetties aux principes de la thermodynamique. Le premier principe permet de traduire la conservation de l'énergie et il se présente sous la forme d'une égalité. A l'opposé, le second principe de la thermodynamique ne sert qu'à constater l'impossibilité que l'on a à réaliser certaines transformations. Il est alors donné par une inégalité.

A ces trois lois, il faut impérativement ajouter la loi de conservation de la masse. Souvent, en mécanique, on oublie de traduire le fait que le domaine étudié ne transforme pas sa masse dans son mouvement. Cela provient du fait que l'enseignement traditionnel de la mécanique du solide se fait en variables de Lagrange et que l'on suit la particule (ou le domaine) dans son mouvement. Par contre, en variables d'Euler, il faut bien traduire le fait qu'il n'y a pas de transformation de la masse du milieu étudié même si localement il peut y avoir une modification de la masse volumique.

Ainsi que nous allons le constater, ces lois peuvent s'exprimer soit sous forme globale, c'est à dire écrites pour un domaine matériel, soit sous forme locale, c'est à dire en équation différentielle valable en chaque point du domaine.

Avant de donner des expressions d'une loi de conservation, il convient de compléter le bagage mathématique en précisant la notion de dérivée particulaire d'une intégrale de volume et les énoncés de deux théorèmes importants, le théorème de la divergence et le théorème de l'intégrale nulle.

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

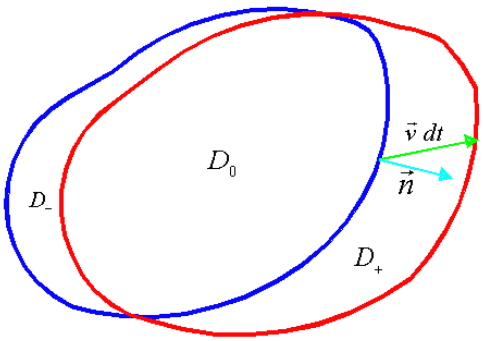
Soit un domaine D que l'on suit dans son mouvement et considérons la variation entre deux instants infiniment proche de l'intégrale d'un champ tensoriel volumique sur le domaine : $\frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\, dv$

Cette variation est due à deux contributions, d'une part la variation propre du champ tensoriel entre les deux instants $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$ et d'autre part la variation du domaine entre les deux instants.

Pour calculer l'expression totale, désignons par D_t le domaine à l'instant t et par D_{t+dt} le domaine à l'instant $t+dt$. L'instant les séparants étant infiniment petit, on peut supposer qu'ils possèdent une large intersection commune que l'on désignera par D_0.

Ainsi le domaine à l'instant *t* se décompose en deux sous domaines, l'intersection commune D_0 et la perte de domaine D_-, alors que le domaine à l'instant *t+dt* se décompose en D_0 et le gain de domaine D_+.

On peut écrire :



$$\mathbf{J}_t = \int_{D_t} \mathbf{a}(t)\,dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t)\,dv + \int_{D_-} \mathbf{a}(t)\,dv$$

$$\mathbf{J}_{t+dt} = \int_{D_{t+dt}} \mathbf{a}(t+dt)\,dv = \int_{D_0} \mathbf{a}(t+dt)\,dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt)\,dv$$

On peut alors calculer la variation :

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} \mathbf{a}(t+dt)\,dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt)\,dv - \int_{D_0} \mathbf{a}(t)\,dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t)\,dv$$

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} \left[\mathbf{a}(t+dt) - \mathbf{a}(t)\right] dv + \int_{D_+} \mathbf{a}(t+dt)\,dv - \int_{D_-} \mathbf{a}(t)\,dv$$

Mais pour les domaines D_+ et D_-, l'accroissement et la diminution de volume sont dus au déplacement de la surface génératrice. On peut donc écrire :

Pour D_+ $\qquad dv = d\vec{x}\,\vec{n}\,ds = (\vec{v}\,dt)\,\vec{n}\,ds$

Pour D_- $\qquad dv = -\,d\vec{x}\,\vec{n}\,ds = -(\vec{v}\,dt)\,\vec{n}\,ds$

L'intervalle de temps étant infiniment court, on a alors :

$$\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t = \int_{D_0} \left[\frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t}\,dt\right] dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t)\,\vec{v}\,\vec{n}\,dt\,ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t)\,\vec{v}\,\vec{n}\,dt\,ds$$

$$\frac{\mathbf{J}_{t+dt} - \mathbf{J}_t}{dt} = \frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\,dv = \int_{D_0} \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t}\,dv + \int_{\partial D_+} \mathbf{a}(t)\,\vec{v}\,\vec{n}\,ds + \int_{\partial D_-} \mathbf{a}(t)\,\vec{v}\,\vec{n}\,ds$$

Dans ces expressions, ∂D_+ (resp. ∂D_-) représente la surface commune aux domaines D_0 et D_+ (resp. D_-). On peut donc en déduire la relation fondamentale suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\,dv = \int_D \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t}\,dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}(t)\,\vec{v}\,\vec{n}\,ds$$

Théorème de l'intégrale nulle

L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Considérons un champ vectoriel volumique a défini et continu sur un domaine D. Si quelque soit le sous domaine D' inclus dans D, l'intégrale du champ tensoriel sur le domaine D' est nulle, alors le champ tensoriel est identiquement nul.

$$\int_{D'} \mathbf{a}\,dv = 0 \quad \forall\, D' \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Pour la démonstration de ce théorème, il suffit d'imaginer que le champ tensoriel n'est pas nul en un point donné du domaine D. Du fait de la continuité, il est alors possible de définir un domaine D' infiniment petit enveloppant le point et tel que l'intégrale du champ tensoriel ne soit pas nul, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse de départ.

Théorème de la divergence

Nous nous contenterons de donner, sans démonstration, un énoncé de ce théorème appelé aussi théorème de Green – Ostrogradski :

Le flux d'un champ tensoriel $\mathbf{A}$ au travers de la surface ∂D enveloppant le domaine D est égal à l'intégrale de la divergence du champ tensoriel sur le domaine :

$$\int_{\partial D} \mathbf{A}\,\vec{n}\,ds = \int_{D} div\,\mathbf{A}\,dv$$

Remarques :

Dans le cas où $\mathbf{A}$ représente un champ vectoriel constant, on obtient $\int_{\partial D} \vec{n}\,ds = \vec{0}$

Dans le cas où $\mathbf{A}$ représente un champ scalaire f, on obtient $\int_{\partial D} f\,\vec{n}\,ds = \int_{D} \overrightarrow{grad\ (f)}\,dv$

Expression générale d'une loi de conservation

On peut dire que d'une manière générale, une loi de conservation exprime un bilan d'une grandeur tensorielle $\mathbf{A}$. On peut alors associer à cette grandeur :

La densité volumique dans le domaine considéré : $\mathbf{a}$

La densité volumique produite par unité de temps dans le domaine considéré : $\mathbf{a}_v$

La densité surfacique associée au flux de $\mathbf{A}$ entrant à travers de la frontière du domaine : $\mathbf{a}_s$

La loi de conservation a alors comme expression générale :

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{D} \mathbf{a}\,dv = \int_{D} \mathbf{a}_v\,dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}_s\,ds$$

Equation qui traduit le fait que la variation de la grandeur $\mathbf{A}$ au cours de l'intervalle de temps *dt* est égale à la somme de la quantité produite (algébriquement) à l'intérieur du domaine et de la quantité entrant (algébriquement) à travers la frontière ∂D du domaine.

Exemple : Equation de continuité

Le principe de conservation de la masse postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. En conséquence la variation de la masse au cours du temps est nulle :

$$\frac{d\,M}{dt} = 0$$

La masse peut se calculer à partir de la masse volumique :

$$M = \int_{D} \rho\,dv \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{D} \rho\,dv = 0$$

Avec la notion de dérivée particulaire d'une intégrale de volume, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\, dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, ds = 0$$

On peut encore utiliser le théorème de la divergence :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\, dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, ds = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_D div\,(\rho\, \vec{v})\, dv = 0$$

Ce qui nous donne une forme locale de l'équation de continuité avec le théorème de l'intégrale nulle :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho\, \vec{v}) = 0}$$

De plus nous avons les relations :

$$div\,(\rho\, \vec{v}) = \rho\, div\,(\vec{v}) + \vec{v}\,.\,\overrightarrow{grad\ \ \rho} \qquad \frac{d\,\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\,.\,\overrightarrow{grad\ \ \rho}$$

On obtient ainsi une autre forme locale de l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{d\,\rho}{dt} + \rho\, div\,(\vec{v}) = 0}$$

Contraintes dans un domaine matériel

Loi fondamentale de la mécanique

Il existe plusieurs formulations de la loi fondamentale de la mécanique. Suivant l'énoncé choisi, ce qui est axiomatique dans un cas devient théorème dans un autre cas. Toutes ces formulations (principe de moindre action, principe des puissances virtuelles, principe fondamental de la mécanique) sont équivalentes. Toutefois suivant l'application traitée, certaines formes peuvent être plus intéressantes que d'autres.

Pour notre part, nous nous contenterons de l'énoncé classique du principe fondamental de la mécanique:

Il existe au moins un repère R_g, dit galiléen, et une chronologie, dite absolue, tels que, à chaque instant et pour toute partie D d'un système Σ, la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen est égal au torseur des actions extérieures s'exerçant sur D.

Pour pouvoir exploiter le principe fondamental de la mécanique, nous devons donc définir une représentation des efforts appliqués à toute partie D d'un système Σ.

On peut classer ces efforts suivant deux types :

* les efforts exercés sur D par les systèmes extérieurs au système Σ. On parle alors d'efforts extérieurs.

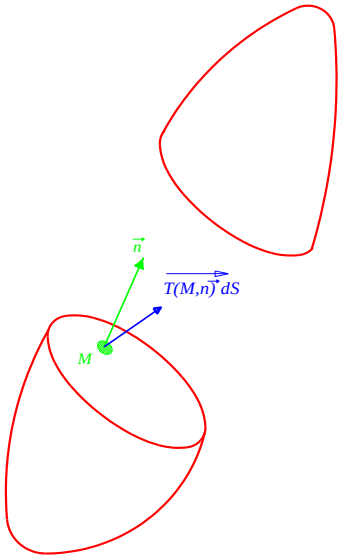
* les efforts exercés sur D par les parties de Σ extérieures à la partie D. On a ainsi les efforts intérieurs.

Généralement, les efforts extérieurs sont dus à des actions à distance telles que la pesanteur, les forces électromagnétiques, les forces d'inertie. Ceux-ci sont souvent connus et leur modélisation ne pose pas de problème. On les supposera représentables par une densité massique de force $\vec{f}(M,t)$.

Pour pouvoir progresser, il faut définir les efforts intérieurs.

Vecteur contrainte

La modélisation des efforts intérieurs passe par une axiomatique. Il existe en effet plusieurs modèles employés suivant les domaines d'études. Pour notre part, nous nous contenterons de l'exploitation du postulat de Cauchy, ce qui va nous conduire à la représentation la plus fréquente de l'état de contrainte en un point matériel.



Postulat de Cauchy

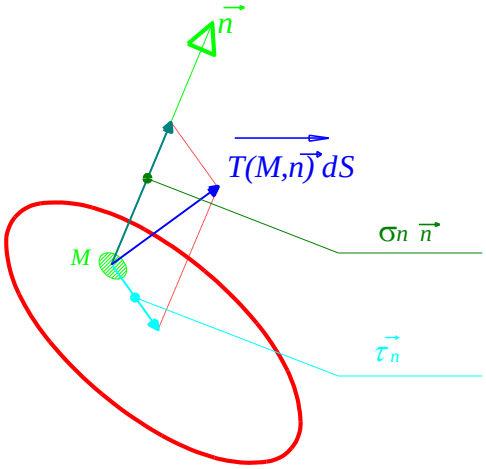
* Les efforts exercés sur une partie D d'un milieu continu par le complémentaire de D dans le système Σ peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces.

* Cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par la normale extérieure au domaine pour le point d'étude.

On a donc une représentation par un vecteur du type $\vec{T}(M,\vec{n})$ appelé **vecteur contrainte** en M dans la direction $\vec{n}$.

On peut considérer que chaque élément de matière est en effet soumis à des forces de liaison provenant soit d'une frontière si celle-ci est contiguë, soit du reste du système.

Avec l'hypothèse de densité surfacique de forces, nous pouvons dire que sur chaque surface élémentaire dS autour du point M et de normale $\vec{n}$, les éléments du système Σ situés dans la région de M et n'appartenant pas à la partie D exercent sur les éléments du système Σ appartenant à la partie D une force élémentaire $d\vec{F}$ déterminée par : $d\vec{F} = \vec{T}(M,\vec{n})dS$



Généralement, on appelle facette le plan tangent en M au domaine étudié. La normale $\vec{n}$ défini l'orientation de cette facette.

On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale $\vec{n}$ du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$.

De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (encore appelé cission ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

On a :

$$\sigma_n = \vec{T}(M,\vec{n}).\vec{n}$$
$$\vec{\tau}_n = \vec{n}\wedge\vec{T}(M,\vec{n})\wedge\vec{n} = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n\vec{n}$$

Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si au contraire elle est négative, nous avons localement un état de compression.

Remarques

1- Les composantes du vecteur contrainte sont homogènes à une pression, c'est à dire qu'ils ont la dimension d'une force par unité de surface.

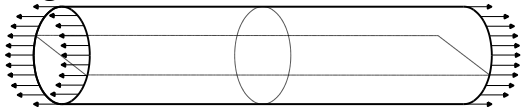
2- Le vecteur contrainte ainsi défini est déterminé dans la configuration actuelle. Nous avons ainsi une représentation eulérienne de ce vecteur.

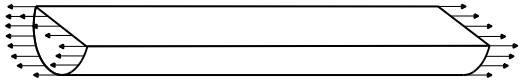
3- Une autre axiomatique pourrait être de considérer une densité de couples en plus de la densité surfacique $\vec{T}(M,\vec{n})$ et de la densité volumique $\vec{f}(M,t)$. Cette modélisation est souhaitable en présence de champ magnétique élevé (accélérateur de particules).

Tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte ne suffit pas à lui seul pour caractériser l'état de contrainte en un point matériel. Sa dépendance vis à vis de la direction de normale à la facette montre clairement qu'il est nécessaire d'envisager une autre représentation pour l'état de contrainte.

Considérons par exemple une poutre droite circulaire sollicitée en traction simple. Si on peut négliger les actions gravitationnelles, on obtient une modélisation des efforts extérieurs très simple.





L'étude de la répartition des contraintes en un point donné M passe par la définition de plans de coupe. Pour un plan de section droite, la répartition de contrainte (supposée homogène) qui permet de maintenir l'équilibre du tronçon étudié est facilement calculable.

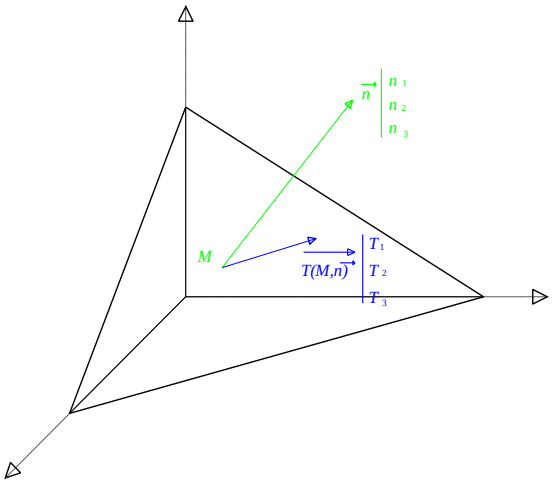
$$\vec{T}(M,\vec{E}_x) = \frac{F}{S}\vec{E}_x$$

De même, en faisant une coupe par un plan méridien, on peut facilement constater que la répartition des vecteurs contraintes pour une facette de normale $\vec{E}_\theta$ est nulle.

$$\vec{T}(M,\vec{E}_\theta) = \vec{0}$$

Ainsi, en un même point on peut avoir deux vecteurs contraintes totalement différents.

Ce qui caractérise l'état de contrainte, c'est la relation existante entre le vecteur contrainte et la direction de normale à la facette. Pour obtenir cette relation, il suffit de considérer l'équilibre d'un domaine matériel de forme tétraédrique ayant trois faces de normales $(-\vec{E}_1,-\vec{E}_2,-\vec{E}_3)$.



Sur chacune de ces faces, nous pouvons définir le vecteur contrainte par ses projections dans le trièdre de base :

$$\begin{cases} \vec{T}(M,\vec{E}_1) = \sigma_{11}\vec{E}_1 + \sigma_{12}\vec{E}_2 + \sigma_{13}\vec{E}_3 \\ \vec{T}(M,\vec{E}_2) = \sigma_{21}\vec{E}_1 + \sigma_{22}\vec{E}_2 + \sigma_{23}\vec{E}_3 \\ \vec{T}(M,\vec{E}_3) = \sigma_{31}\vec{E}_1 + \sigma_{32}\vec{E}_2 + \sigma_{33}\vec{E}_3 \end{cases}$$

On utilise alors la notation suivante :

σ_{ij}	premier indice *i*	indice de normale
	deuxième indice *j*	indice de projection

Avec ces notations, σ_{ii} représente la contrainte normale pour une facette de normale $\vec{E}_i$ alors que σ_{ij} (avec les indices différents) représente une composante tangentielle du vecteur contrainte pour la facette de normale $\vec{E}_i$.

D'autre part nous sommes amenés à définir la quatrième face de notre quadrilatère par les composantes (n_1, n_2, n_3) de la normale $\vec{n}$ à la facette. Si on désigne par S_i l'aire de la face de normale $-\vec{E}_i$, et par S l'aire de la surface de normale $\vec{n}$, on a la relation :

$$S_i = n_i S$$

L'équilibre de notre domaine va faire intervenir aussi bien des forces de surface (associées aux vecteurs contraintes) que des forces de volumes (associées aux efforts extérieurs). Toutefois, ces dernières faisant intervenir des éléments différentiels d'ordre supérieur, on peut les négliger devant les forces de surfaces si les dimensions de notre tétraèdre sont infinitésimales.

L'équation d'équilibre est donc :

$$\vec{0} = \int_S \vec{T}(M,\vec{n})dS + \int_{S_1} \vec{T}(M,-\vec{E}_1)dS + \int_{S_2} \vec{T}(M,-\vec{E}_2)dS + \int_{S_3} \vec{T}(M,-\vec{E}_3)dS$$

$$\vec{0} \approx \vec{T}(M,\vec{n})dS + \vec{T}(M,-\vec{E}_1)dS_1 + \vec{T}(M,-\vec{E}_2)dS_2 + \vec{T}(M,-\vec{E}_3)dS_3$$

$$\vec{0} \approx \left(\vec{T}(M,\vec{n}) + n_1\vec{T}(M,-\vec{E}_1) + n_2\vec{T}(M,-\vec{E}_2) + n_3\vec{T}(M,-\vec{E}_3)\right)dS$$

Or, d'après la définition du vecteur contrainte, on conçoit relativement bien la relation suivante :

$$\vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})$$

On obtient donc :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = n_1\vec{T}(M,\vec{E}_1) + n_2\vec{T}(M,\vec{E}_2) + n_3\vec{T}(M,\vec{E}_3)$$

Ainsi, la donnée des vecteurs contraintes dans les trois directions de base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ suffit pour déterminer le vecteur contrainte dans une direction de facette quelconque.

En utilisant les composantes (T_1, T_2, T_3) du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans la base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, la relation précédente se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} T_1 = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12} + n_3\sigma_{13} \\ T_2 = n_1\sigma_{21} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{23} \\ T_3 = n_1\sigma_{31} + n_2\sigma_{32} + n_3\sigma_{33} \end{cases}$$

Soit en notation indicielle : $T_i = \sigma_{ij} n_j$

On a ainsi déterminé les composantes σ_{ij} d'un tenseur d'ordre deux $\overline{\overline{\sigma}}$ dans la base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$. Ce tenseur nous permet de calculer le vecteur contrainte en M dans la direction $\vec{n}$ grâce à la relation :

$$\boxed{\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}}$$

Ce tenseur est appelé **tenseur des contraintes** ou encore tenseur de Cauchy. Il est fonction uniquement du point d'étude.

La donnée du champ tensoriel dans le domaine d'étude permet de connaître l'état de contrainte en tout points de notre domaine. Bien entendu, cette répartition de contrainte n'est pas indépendante des sollicitations exercées sur notre domaine. Les équations d'équilibre vont nous permettre de mettre en évidence cette dépendance.

Equilibre dynamique

Pour écrire les équations d'équilibre, il convient d'isoler un domaine matériel et de lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

D'un coté de l'égalité nous trouvons le torseur résultant des efforts extérieurs. Celui-ci est la somme de deux torseurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_D \vec{f}(M,t)\,dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M,t)\,dm \end{array} \right\}$$ Torseur des actions extérieures (densité massique)

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_{\partial D} \vec{T}(P,\vec{n})\,dS \\ \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P,\vec{n})\,dS \end{array} \right\}$$ Torseur des actions intérieures (densité surfacique)

Le domaine d'intégration du deuxième torseur est ∂D, c'est la surface contour délimitant notre domaine matériel D. C'est donc une surface fermée.

De l'autre coté de l'égalité nous avons la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique galiléen de notre domaine

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}\int_D \vec{V}(M, t/R_g)\,dm \\ \frac{d}{dt}\int_D \vec{OM} \wedge \vec{V}(M, t/R_g)\,dm \end{array} \right\}$$

Le calcul de cette dérivée est compliqué par le fait que le domaine d'intégration est fonction du temps en variable d'Euler.

Toutefois en variables de Lagrange nous obtenons le torseur dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_D \vec{\gamma}(M,t/R_g)dm \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M,t/R_g)dm \end{array} \right\}$$

Le Principe Fondamental de la Mécanique nous donne alors deux égalités vectorielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \vec{\gamma}(M,t/R_g)dm = \int_D \vec{f}(M,t)dm + \int_{\partial D} \vec{T}(P,\vec{n})dS \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M,t/R_g)dm = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M,t)dm + \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(P,\vec{n})dS \end{array} \right.$$

Présenté sous cette forme, le Principe Fondamental de la Mécanique apparaît bien comme une loi de bilan.

Ainsi, dans cette égalité nous trouvons avec deux torseurs ayant D comme domaine d'intégration et le torseur des efforts intérieurs avec ∂D comme domaine d'intégration.

En utilisant le théorème de la divergence, il est possible de redéfinir D comme domaine d'intégration du torseur des efforts intérieurs.

$$\int_{\partial D} \vec{T}(P,\vec{n})dS = \int_{\partial D} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}\,dS = \int_D \vec{div}\,\overline{\overline{\sigma}}\,dv$$

L'équation de résultante devient alors :

$$\int_D \vec{\gamma}(M,t/R_g)dm = \int_D \vec{div}\,\overline{\overline{\sigma}}\,dv + \int_D \vec{f}(M,t)dm$$

On peut en déduire la relation suivante :

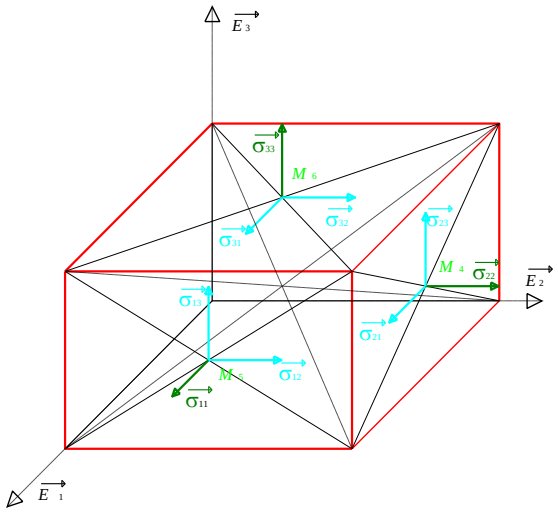
$$\boxed{\rho\vec{\gamma}(M,t/R_g) = \vec{div}\,\overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{f}(M,t)}$$

Avec ρ masse volumique du domaine matériel au point considéré.

Cette équation fondamentale est la traduction locale du principe fondamental de la mécanique. Elle montre bien les liens entre l'état de contrainte en un point et les sollicitations extérieures.

Il est possible d'avoir une démonstration plus "physique" de cette équation en isolant un parallélépipède rectangle construit avec des arrêtes communes avec les axes de base.

Ce domaine infinitésimal a pour longueur d'arête dx_1, dx_2, dx_3.



Nous nous trouvons en présence des forces suivantes :

*force de volume appliquée au centre de gravité de notre domaine : $\rho \vec{f}\, dx_1 dx_2 dx_3$

*force d'inertie (en mouvement relatif) appliquée au centre de gravité du domaine :
$-\rho \vec{\gamma}(M, t/R_g) dx_1 dx_2 dx_3$

*forces de surface dues aux vecteurs contraintes.

Pour une facette de normale $\vec{E}_i$ et de surface $dx_j dx_k$, la force associée est du type $\sigma_{il}\, dx_j dx_k \vec{E}_l$

Toutefois, pour cette dernière représentation, il convient de bien faire attention aux points d'application de ces forces, la valeur des contraintes σ_{il} étant fonction des coordonnées de ces points.

La situation peut être résumée sous forme d'un tableau :

Points	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M6
Coordonnée	$\begin{cases} x_1 \\ x_2+dx_2/2 \\ x_3+dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+dx_1 \\ x_2+dx_2/2 \\ x_3+dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+dx_1/2 \\ x_2 \\ x_3+dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+dx_1/2 \\ x_2+dx_2 \\ x_3+dx_3/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+dx_1/2 \\ x_2+dx_2/2 \\ x_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+dx_1/2 \\ x_2+dx_2/2 \\ x_3+dx_3 \end{cases}$
Normale	$-\vec{E}_1$	$+\vec{E}_1$	$-\vec{E}_2$	$+\vec{E}_2$	$-\vec{E}_3$	$+\vec{E}_3$
Aire	$dx_2\, dx_3$	$dx_2\, dx_3$	$dx_3\, dx_1$	$dx_3\, dx_1$	$dx_1\, dx_2$	$dx_1\, dx_2$
Première composante du vecteur contrainte	$-\sigma_{11}(x_1,x_2,x_3) - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2}$	$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2}$	$-\sigma_{21}(x_1,x_2,x_3) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2}$	$\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2}$	$-\sigma_{31}(x_1,x_2,x_3) - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2}$	$\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{2}$

A l'écriture des équations d'équilibres, nous pouvons constater de nombreuses simplifications. Ainsi il nous reste les trois équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \rho(f_1-\gamma_1)+\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}=0 \\ \rho(f_2-\gamma_2)+\dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}=0 \\ \rho(f_3-\gamma_3)+\dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}=0 \end{cases}$$

Nous obtenons donc sous forme indicielle l'équation locale d'équilibre :

$$\rho\vec{\gamma}(M,t/R_g)=\vec{div}\,\overline{\overline{\sigma}}+\rho\vec{f}(M,t)$$

L'avantage de la présentation précédente est qu'elle permet une utilisation rapide de l'équation du moment dynamique. On peut tout d'abord remarquer que les forces de volume et les forces d'inertie induisent des moments d'ordre 4, négligeables vis à vis des moments associés aux forces de surface qui eux sont d'ordre 3.

Dans le calcul du moment des forces de surface, seules les composantes tangentielles (cissions) donnent ces moments d'ordre 3. Une simple équation conduit alors à la relation suivante :

$$\boxed{\sigma_{ij}=\sigma_{ji}}$$

Cette équation, appelée "**équation de réciprocité des cissions**", entraîne la symétrie du tenseur des contraintes. Ainsi, comme le tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$, le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ ne sera déterminé que par 6 termes. Il suffira de se donner trois contraintes normales sur la diagonale et trois contraintes tangentielles hors diagonale.

Propriétés du tenseur des contraintes

Changement de base

La relation $\vec{T}(M,\vec{n})=\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}$ montre que le vecteur contrainte dépend linéairement de la direction de normale à la facette. Le tenseur des contraintes est donc une application linéaire qui fait passer de $\vec{n}$ à $\vec{T}(M,\vec{n})$.

Si on choisit une base orthonormée $(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$, cette application linéaire est représentée par une matrice dont les éléments sont σ_{ij}. Dans une nouvelle base orthonormée $(\vec{E}_1',\vec{E}_2',\vec{E}_3')$ les nouvelles composantes du tenseur des contraintes σ_{ij}' seront déduites des anciennes à l'aide de la formule suivante :

$$\sigma_{ij}'=Q_{ik}\,Q_{jl}\,\sigma_{kl}$$

Dans cette formule, les termes Q_{ij} représentent la matrice de passage :

$$\vec{E}_i'=Q_{ij}\vec{E}_j \qquad \text{avec} \quad Q_{ij}\,Q_{kj}=Q_{ji}\,Q_{jk}=\delta_{ik}$$

Contraintes principales

Le tenseur des contraintes étant symétrique à coefficients réels, il est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Il existe donc trois contraintes principales (valeurs propres) associées à trois directions principales (vecteurs propres). Nous avons ainsi des relations du type :

$$\vec{T}(M,\vec{E}_I)=\overline{\overline{\sigma}}\vec{E}_I=\sigma_I\vec{E}_I$$

Dans la base des vecteurs propres $(\vec{E}_I,\vec{E}_{II},\vec{E}_{III})$, la matrice représentant l'état des contraintes est diagonale

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans cette base, les contraintes tangentielles sont nulles.

Généralement, on décompose le tenseur des contraintes en une somme d'un tenseur sphérique $\overline{\overline{\sigma_S}}$ et d'un tenseur déviatorique $\overline{\overline{\sigma_D}}$. Le tenseur déviatorique $\overline{\overline{\sigma_D}}$ est un tenseur ayant une trace nulle. La décomposition est alors unique.

On a les relations :

$$\begin{cases} \overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma_S}} + \overline{\overline{\sigma_D}} \\ tr\left(\overline{\overline{\sigma_D}}\right) = 0 \\ tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = tr\left(\overline{\overline{\sigma_S}}\right) \\ \overline{\overline{\sigma_S}} = \left(\frac{tr\,\overline{\overline{\sigma}}}{3}\right) = \mathrm{I} \end{cases}$$

La trace du tenseur des contraintes est un invariant. A partir de cette notion, on peut définir la pression hydrostatique :

$$p = -\frac{tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)}{3} = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) = -\frac{1}{3}\left(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}\right)$$

Le tenseur déviateur $\overline{\overline{\sigma_D}}$ est symétrique et il admet les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes. On dit que la pression *p* représente la partie sphérique du tenseur des contraintes et que le tenseur $\overline{\overline{\sigma_D}}$ représente la partie "cisaillement".

Invariants

Comme pour le tenseur des déformations, l'annulation du polynôme caractéristique montre qu'il existe des invariants scalaires.

Ceux ci sont définis par :

$$\begin{cases} I_1 = tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = tr\left(\overline{\overline{\sigma_S}}\right) \\ I_2 = \frac{1}{2}\left(\left(tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right)^2 - tr\left(\overline{\overline{\sigma}}^2\right)\right) \\ I_3 = \mathbf{det}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) \end{cases}$$

soit sous forme indicielle :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ I_3 = \mathbf{det}\left(\sigma_{ij}\right) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

Les invariants du tenseur déviateur sont :

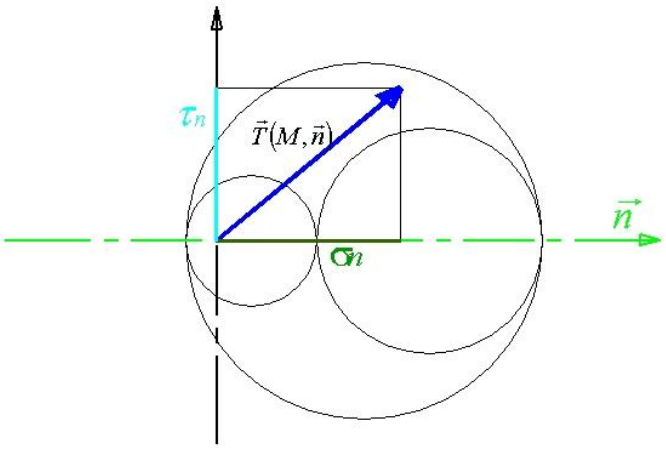
$$\begin{cases} J_1 = tr\left(\overline{\overline{\sigma_D}}\right) = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}\left(\left(tr\left(\overline{\overline{\sigma_D}}\right)\right)^2 - tr\left(\left(\overline{\overline{\sigma_D}}\right)^2\right) \right) = S_I S_{II} + S_{II} S_{III} + S_{III} S_I = -\frac{1}{6}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right] \\ I_3 = \mathbf{det}\left(\overline{\overline{\sigma_D}}\right) = S_I S_{II} S_{III} \end{cases}$$

Cercle de Mohr

L'état de contrainte est donc représenté par un tenseur. Ainsi que nous l'avons déjà vu il est possible d'obtenir une représentation graphique plane par cercle de Mohr.

Dans le plan de cette représentation, on trace le lieu de l'extrémité du vecteur contrainte, en fonction de l'orientation de la normale à la facette choisie au point considéré. Si la normale appartient à un plan principal, ce lieu est l'un des trois cercles de Mohr associés aux plans principaux. Si la normale appartient à deux plans principaux, c'est à dire si la normale est confondue avec une direction, alors le vecteur contrainte est situé sur l'axe de la normale, l'extrémité du vecteur étant alors confondu avec le point commun aux deux cercles de Mohr. Enfin si la normale est quelconque dans l'espace des vecteurs propres, l'extrémité du vecteur contrainte se trouve à l'intérieur du tricercle.

L'avantage de cette représentation graphique réside dans la facilité de visualisation des composantes normales et tangentielles d'un vecteur contrainte. On vérifie aisément que la plus grande contrainte principale est en fait la valeur maximale de la contrainte normale en un point alors la valeur minimale est donnée par la plus petite contrainte principale. Pour ce qui est de la contrainte tangentielle, la plus grande valeur est donnée par la demi différence entre la plus grande contrainte principale et la plus petite contrainte principale. Elle est obtenue pour la direction de normale qui correspond à la bissectrice du plan principal associé à la contrainte principale maximale et la contrainte principale minimale.



Si on se donne la convention d'ordonner les contraintes principales selon une décroissance, on a :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

$$(\sigma_n)_{MAX} = \sigma_I \qquad (\sigma_n)_{\min} = \sigma_{III} \qquad (\tau_n)_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Application

Considérons une poutre droite de section circulaire sollicitée en flexion pure combinée avec de la torsion. On désigne par $\vec{E}_x$ l'axe de la poutre (ligne des centres de gravité) et par $\vec{E}_z$ l'axe du moment de flexion. Il est alors possible de démontrer que, dans le cadre des hypothèses de la théorie des poutres, les tenseurs contraintes associés à ces deux sollicitations sont dans la base cylindro polaire :

Pour la flexion : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\left(\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta\right)}$ avec $\sigma = \frac{Mf_z}{I_{Gz}} y$

Pour la torsion : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\left(\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta\right)}$ avec $\tau = \frac{Mt}{I_G} r$

L'état de contrainte résultant est donc :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\left(\vec{E}_x, \vec{E}_r, \vec{E}_\theta\right)}$$

A partir de ce tenseur, il est simple de représenter le tricercle de Mohr. En effet, on constate aisément que le vecteur $\vec{E}_r$ représente une direction principale, la contrainte principale associée étant nulle. Le plan $\left(\vec{E}_x, \vec{E}_\theta\right)$ est donc un plan principal de contraintes auquel il est possible d'associer un cercle de Mohr.

Pour la construction de ce cercle, il suffit de représenter quelques points appartenant à ce cercle, c'est à dire de définir l'extrémité de vecteur contrainte pour quelques directions de normales appartenant au plan principal. On peut alors choisir de représenter les vecteurs contraintes associés aux directions $\vec{E}_x$ et $\vec{E}_\theta$. On a :

$$\overrightarrow{T\left(M;\vec{E}_x\right)} = \sigma \vec{E}_x + \tau \vec{E}_\theta$$
$$\overrightarrow{T\left(M;\vec{E}_\theta\right)} = \tau \vec{E}_x$$

La construction du cercle de Mohr est alors possible et elle montre que les valeurs des contraintes principales sont :

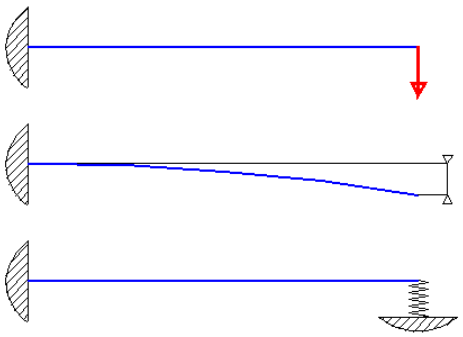
$$\begin{cases} \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{cases}$$

Lois de Comportement des milieux continus

Bilan des Equations

Nous venons de décrire un problème de mécanique sous deux angles différents. D'un coté, une description cinématique nous a permis d'introduire les quantités tensorielles de déformation, de l'autre coté, par une description dynamique, nous avons obtenu les quantités tensorielles de contrainte.

Toutefois, l'expérience montre qu'il est impossible de dissocier les deux approches et qu'il y a une dépendance étroite entre ces deux descriptions. Il existe une dualité entre les notions de déplacement – déformation et les notions de force – contrainte. A tel point qu'il est souvent impossible de distinguer la cause de l'effet.



Prenons par exemple le cas d'une poutre console encastrée à une extrémité et libre à son autre extrémité. Plusieurs cas de sollicitation peuvent apparaîtrent. On peut envisager qu'à son extrémité libre on impose une force F d'intensité connue (pilotage en force). On obtient alors une déformation générale de la poutre qui se traduit aussi par une flèche mesurable à l'extrémité libre. A l'inverse, on peut, par un système mécanique imposer la flèche f à l'extrémité libre (pilotage en déplacement). Cette déformation ne pourra être obtenue que si le système mécanique exerce une certaine force sur la poutre. Ces deux exemples montrent bien que ce qui est la cause (resp. l'effet) dans un cas peut devenir l'effet (resp. la cause) dans l'autre cas. Il est même possible de compliquer un peu l'étude précédente en imaginant qu'il existe un appui élastique à l'extrémité libre de la poutre. On établit ainsi une relation entre la force et le déplacement, relation donnée par la fonction de réponse de l'appui élastique.

Dans une étude de mécanique il est nécessaire de définir toutes les variables. Il convient donc d'en faire le dénombrement et de rechercher toutes les équations à notre disposition pour mener à bien cette étude.

Les variables peuvent se classer dans les deux catégories cinématique et dynamique. Pour l'aspect cinématique on peut, dans l'hypothèse des petites perturbations dire que les variables d'étude sont le champ vectoriel de déplacement et le champ tensoriel de déformation. Du coté de l'aspect dynamique, les seules variables d'études sont les composantes du champ tensoriel de contrainte. Le dénombrement des inconnues d'une étude de mécanique est alors le suivant :

Masse	1 scalaire	1 fonction scalaire
Champ de déplacement	1 vecteur	3 fonctions scalaires
Champ de déformation	1 tenseur symétrique	6 fonctions scalaires
Champ de contrainte	1 tenseur symétrique	6 fonctions scalaires

Pour ce qui concerne les équations, nous avons à notre disposition d'une part les relations déplacement – déformation issue de l'étude cinématique, d'autre part les équations d'équilibre issues de l'étude dynamique.

Le dénombrement des équations disponibles est alors le suivant :

Equation de continuité	1 relation
Relations déplacement – déformation	6 relations
Equations d'équilibre (équation de résultante)	3 relations

Il est à noter que dans ce dénombrement d'équations, il n'est pas fait état de l'équation du moment dynamique, cette dernière étant directement utilisée pour obtenir un tenseur des contraintes symétrique.

Le bilan inconnues – équations montre brutalement qu'il existe un déficit de 6 relations pour traiter un problème de mécanique. Ce déficit sera comblé par les relations issues de l'expérience, relations que l'on appellera **Lois de comportement**.

Pour être correctes, les nouvelles équations doivent respecter certaines conditions et en particuliers ne pas aller à l'encontre des principes fondamentaux de la physique (mécanique et thermodynamique). Il convient donc dans un premier temps de formuler clairement ces principes en fonction de nos inconnues d'étude. Ces principes faisant apparaître essentiellement des quantités énergétiques, il nous faut les expressions des grandeurs utilisées.

Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème est une conséquence directe du principe fondamental de la mécanique. L'équation locale nous donne :

$$\rho\,\vec{\gamma} = \rho\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)} + \rho\,\vec{f}$$

On peut alors faire le produit scalaire avec le vecteur vitesse :

$$\rho\,\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V} = \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)}.\vec{V} + \rho\,\vec{f}.\vec{V}$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}^{\,2}}{2}\right) = \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)}.\vec{V} + \rho\,\vec{f}.\vec{V}$$

D'autre part nous avons la relation suivante :

$$div\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{V}\right) = \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)}.\vec{V} + \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{grad\ \left(\vec{V}\right)}}$$

Dans cette expression, le dernier terme représente le produit doublement contracté entre le tenseur contrainte et le tenseur gradient du champ des vitesses. Sous forme développée, on peut, dans une base cartésienne, écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\,V_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\right)V_j + \sigma_{ij}\,\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Considérons de manière séparée le dernier terme. On a :

$$\sigma_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}=\sigma_{ji}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}=\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}=\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)=\sigma_{ij}\,D_{ij}=\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathrm{D}}}$$

Donc, grâce à la symétrie du tenseur de contrainte, ce terme apparaît comme le produit doublement contracté entre le tenseur contrainte et le tenseur taux de déformation.

On a donc :

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)=\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{V}\right)}-\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathrm{D}}}+\rho\,\vec{f}.\vec{V}$$

Soit pour un domaine matériel :

$$\int_D\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)dv=\int_D div\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{V}\right)dv+\int_D\rho\,\vec{f}.\vec{V}\,dv-\int_D\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathrm{D}}}\,dv$$

Dans cette expression, le premier membre représente la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du domaine que l'on suit dans son mouvement. En effet, en utilisant la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{dt}\int_D\rho\frac{\vec{V}^2}{2}dv=\int_D\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)dv+\int_{\partial D}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}.\vec{n}\,ds$$

Le premier terme du second membre peut encore s'écrire :

$$\int_D\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)dv=\int_D\left\{\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)+\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}dv$$

Le dernier terme peut être modifié en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\partial D}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}.\vec{n}\,ds=\int_D div\left[\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}\right]dv$$

$$\int_{\partial D}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}.\vec{n}\,ds=\int_D\left\{\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)div\left[\vec{V}\right]+\vec{V}.\overrightarrow{grad\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)}\right\}dv$$

$$\int_{\partial D}\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}.\vec{n}\,ds=\int_D\left\{\left(\rho\frac{\vec{V}^2}{2}\right)div\left[\vec{V}\right]+\rho\vec{V}.\overrightarrow{grad\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)}+\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)\vec{V}.\overrightarrow{grad\,\rho}\right\}dv$$

De plus nous pouvons utiliser l'équation de continuité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\vec{V}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\,div\left(\vec{V}\right)+\vec{V}.\overrightarrow{grad\;\rho}=0$$

La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps devient alors :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \frac{\vec{V}^2}{2} dv = \int_D \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) + \rho \vec{V} \,.\, \overrightarrow{grad}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) \right\} dv$$

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \frac{\vec{V}^2}{2} dv = \int_D \left\{ \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) \right\} dv$$

Ce qui nous donne pour l'équation précédente :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \int_D div\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{V}\right) dv + \int_D \rho \, \vec{f}.\vec{V}\, dv - \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dv$$

Dans le second membre on peut utiliser le théorème de la divergence :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \int_{\partial D} \left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{V}\right).\vec{n}\, ds + \int_D \rho \, \vec{f}.\vec{V}\, dv - \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dv$$

Ce que nous pouvons écrire, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \int_{\partial D} \left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}\right).\vec{V}\, ds + \int_D \rho \, \vec{f}.\vec{V}\, dv - \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dv$$

Dans le second membre, le premier terme représente la puissance mécanique des efforts surfacique, le second terme représente la puissance mécanique des efforts volumique et le dernier terme représente la puissance mécanique des efforts de cohésion, c'est à dire des efforts intérieurs :

$$P_{ext} = \int_{\partial D} \overrightarrow{T(M;\vec{n})}.\vec{V}\, ds + \int_D \rho \, \vec{f}.\vec{V}\, dv$$

$$P_{int} = -\int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dv$$

La puissance des efforts intérieurs est parfois appelée puissance de déformation.

On obtient ainsi l'énoncé du Théorème de l'énergie :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \frac{d\,K}{dt} = P_{ext} + P_{int}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un domaine *D* que l'on suit dans son mouvement est égale à la somme de la puissance mécanique des efforts extérieurs et de la puissance mécanique des efforts intérieurs.

Thermodynamique des milieux continus

Sous réserve d'admettre certains résultats, il est possible de déterminer la loi de comportement traduisant l'élasticité linéaire sans faire appel aux notions de thermodynamique. Toutefois, afin de rester encore un peu général et d'avoir les bagages mathématiques qui par la suite permettront d'établir d'autres lois de comportement (comme la plasticité), nous allons maintenant regarder les deux principes de la thermodynamique. De plus il ne faut pas oublier que de nombreux problèmes technologiques impliquent un couplage entre les effets mécaniques et les phénomènes thermiques.

Premier Principe de la thermodynamique

Ce premier principe est encore appelé loi de conservation de l'énergie. Il exprime le fait que la variation de l'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) d'un domaine est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développés sur le système et de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps.

$$\frac{d\,E}{dt} + \frac{d\,K}{dt} = P_{ext} + \dot{Q} = \frac{\delta\,W_{ext}}{\delta t} + \frac{\delta\,Q}{\delta t}$$

On remarquera cette fois l'emploi de la notation $\frac{\delta}{\delta t}$ qui est utilisée pour indiquer que les fonctions dérivées ne sont pas des fonctions d'état et qu'elles ne dérivent pas d'un potentiel.

L'énergie interne est une grandeur extensive (additive) et on peut définir une énergie interne massique :

$$E = \int_D \rho\, e\, dv$$

De la même façon, on pourra écrire pour l'énergie cinétique :

$$K = \int_D \rho \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv$$

Pour la détermination de la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps, on suppose que les échanges sont de deux types :

Surfacique $\Rightarrow$ conduction
Volumique $\Rightarrow$ rayonnement

Le terme de conduction sur la surface frontière est l'intégrale de surface d'une densité surfacique $h(M;\vec{n})$, où $\vec{n}$ représente la normale extérieure en M à la surface. Cette densité s'exprime sous la forme d'un flux d'un vecteur courant de chaleur sortant :

$$h(M;\vec{n}) = -\overrightarrow{q(M)}.\overrightarrow{n(M)}$$

Par convention, les quantités de chaleur reçues par le système seront notées positivement et celles perdues négativement.

Le terme de rayonnement est l'intégrale d'une densité volumique qui correspond au taux de chaleur reçue (rayonnement externe, effet joule, réaction chimique interne …).

On a donc pour la quantité de chaleur apportée au système par unité de temps :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -\int_{\partial D} \vec{q}\,.\vec{n}\,ds + \int_D r\,dv$$

L'équation de conservation de l'énergie se met sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\left(e + \frac{\vec{V}^2}{2}\right)dv = \int_{\partial D} \overrightarrow{T(M;\vec{n})}.\vec{V}\,ds + \int_D \rho\,\vec{f}\,.\vec{V}\,dv - \int_{\partial D} \vec{q}\,.\vec{n}\,ds + \int_D r\,dv$$

D'autre part on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)dv = \int_{\partial D} \overrightarrow{T(M;\vec{n})}.\vec{V}\,ds + \int_D \rho\,\vec{f}\,.\vec{V}\,dv - \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\,dv$$

Le premier principe de la thermodynamique peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt}E = \frac{\delta Q}{\delta t} - P_{int}$$

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\,e\,dv = \int_D \left(\overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} + r\right)dv - \int_{\partial D} \vec{q}\,.\vec{n}\,ds$$

En utilisant l'équation de continuité et en appliquant les théorèmes de la divergence et de l'intégrale nulle, on peut donner une expression locale de ce bilan :

$$\boxed{\rho\frac{d\,e}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} + r - div\left(\vec{q}\right)}$$

On peut donc dire que la variation de l'énergie interne massique est due à la puissance massique dissipée par les efforts intérieurs et à un apport de chaleur.

Second Principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique postule l'existence d'un champ scalaire positif, appelé température absolue et noté *T* et d'une fonction d'état du système additive, appelée entropie, notée *S* et telle que l'on ait toujours l'inégalité :

$$\frac{d\,S}{dt} \geq \int_D \frac{r}{T}\,dv - \int_{\partial D} \frac{\vec{q}}{T}\,.\vec{n}\,ds$$

Il est à noter que nous n'avons plus une loi de conservation, mais au contraire une détérioration de l'entropie.

L'égalité n'est obtenue que dans le cas très particulier des transformations réversibles.

La fonction entropie n'est donc définie que par sa différentielle et elle ne peut être calculée qu'à une constante additive près. Généralement on travaillera avec l'entropie massique *s*.

On a donc, compte tenu de l'équation de continuité, et des théorèmes de la divergence et de l'intégrale nulle :

$$\rho\frac{ds}{dt}+div\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)-\frac{r}{T}\geq 0$$

De plus on a une identité fondamentale :

$$div\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)=\frac{1}{T}div\left(\vec{q}\right)-\frac{1}{T^2}\overrightarrow{grad\ T}.\vec{q}$$

On peut donc obtenir **l'inégalité de Clausius - Duhem** :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathbf{D}}}+\rho\left(T\frac{ds}{dt}-\frac{de}{dt}\right)-\frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad\ T}\geq 0}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathbf{D}}}-\rho\left(\frac{d\psi}{dt}+s\frac{dT}{dt}\right)-\frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad\ T}\geq 0$$

En faisant intervenir **l'énergie libre massique** $\psi = e - Ts$.

En fait le second principe permet d'exprimer l'écart entre le processus étudié et un processus réversible. Comme on peut le constater, cette différence fait apparaître deux origines :

* thermique par le terme $-\frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad\ T}$

* mécanique par le terme $\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathbf{D}}}-\rho\left(\frac{d\psi}{dt}+s\frac{dT}{dt}\right)$

Le signe négatif du terme d'origine thermique s'explique facilement par la convention choisie. En fait on traduit ainsi l'irréversibilité thermique. Un corps chaud ne peut que céder de la chaleur à un environnement plus froid, alors qu'à l'inverse un corps froid ne pourra que recevoir de la chaleur (apport d'énergie sous forme calorifique).

Le terme d'origine mécanique se présente sous la différence de deux quantités. La seconde quantité est définie comme étant la partie réversible de la puissance dissipée par la déformation. Elle vient toujours en déduction de la puissance de déformation.

Equation de la chaleur

Le premier principe introduit quatre nouvelles inconnues dans notre problème. En effet l'énergie interne et le vecteur courant de chaleur ne sont à priori pas déterminés. De même le second principe nous apporte deux nouvelles inconnues, l'entropie et la température absolue.

Il convient donc de trouver les équations supplémentaires qui permettront de définir complètement toutes ces inconnues. A nouveau ces équations seront issues de l'expérience et elles feront souvent intervenir à la fois les quantités thermiques et les quantités mécaniques.

Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous nous contenterons d'une formulation simplifiée dans laquelle les composantes thermiques interviendront très peu. En conséquence nous n'aurons qu'un déficit inconnues / équations égal à 6, comme exposé dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Toutefois il existe de nombreux cas où le découplage mécanique / thermique est effectif. Il est alors bon de déterminer la loi de distribution des températures en utilisant l'équation de la chaleur.

Pour établir cette équation, nous formons les hypothèses suivantes :

* le matériau est à liaisons parfaites et on néglige toute transformation chimique ou physique de la matière. On montre qu'alors l'énergie interne est proportionnelle à la température absolue *T* par l'intermédiaire d'une constante *c* appelée capacité calorifique massique :

$$\frac{de}{dt}=c\frac{dT}{dt}$$

* on néglige le terme volumique de taux de chaleur reçu :

$$r\approx 0$$

L'équation de l'énergie devient alors :

$$\rho c\frac{dT}{dt}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}.\overrightarrow{grad\ T}\right)=\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathbf{D}}}-div\,(\vec{q})$$

On fait généralement l'hypothèse que le matériau suit la **loi de conduction de Fourier**, c'est à dire que le flux de chaleur est une fonction linéaire du gradient thermique :

$$\vec{q}=-k\overrightarrow{grad}\ (T)$$

Le scalaire *k* est la conductivité thermique. Si le corps n'est pas isotrope, la conductivité thermique sera représentée par un tenseur. Si le corps est homogène, cette conductivité thermique est une constante.

On obtient alors **l'équation de la chaleur** :

$$\boxed{\rho c\frac{dT}{dt}=\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}.\overrightarrow{grad\ T}\right)=\overline{\overline{\sigma}}\otimes\overline{\overline{\mathbf{D}}}+k\Delta T}$$

La résolution de cette équation permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Pour être résolue, cette équation nécessite une bonne connaissance des conditions initiales et des conditions aux limites du domaine.

Les conditions thermiques que l'on peut rencontrer aux limites sont :

* température imposée (dans le cas d'une paroi parfaitement régulée thermiquement).

* flux imposé (un flux nul correspond à une paroi parfaitement isolée, c'est à dire adiabatique).

* échange par convection : $-k\vec{n}.\overrightarrow{grad}\ (T)=\alpha(T-T_{ext})$

où α est le coefficient de convection et T_{ext} la température du second milieu.

* échange par rayonnement : $-k\vec{n}.\overrightarrow{grad}\ (T)=\varepsilon\sigma(T^4-T_{ext}{}^4)$

où ε est l'émissivité, σ la constante de Stefan et T_{ext} la température du second milieu.

Thermo-élasticité linéaire

Ainsi que nous venons de le démontrer, nous avons un déficit inconnues / équations. Cet état de fait ne doit pas nous surprendre, car il difficilement envisageable qu'une théorie générale puisse englober des comportements aussi différents que ceux des solides et des fluides. Il faut faire appel aux résultats expérimentaux pour déterminer les relations manquantes que nous appellerons les lois de comportement. Toutefois, une telle loi de comportement ne peut pas être quelconque. Elle se doit de respecter certains principes que l'on considérer de bon sens. L'objet de ce cours n'étant pas de faire une étude exhaustive de toutes les lois de comportement, nous nous contenterons de ne citer que les principes évidents auxquels devra souscrire le comportement étudié, à savoir le comportement élastique linéaire.

En premier lieu nous rappellerons qu'une loi de comportement ne peut en aucun cas déroger au principe fondamental de la mécanique et aux principes de la thermodynamique

Ensuite, nous pouvons dire qu'une loi doit être **objective**, c'est à dire invariante dans tous changement de référentiel. Elle doit être la même pour tous les observateurs. Cette condition d'objectivité suppose une invariance pour les changements de chronologie (changement d'origine des temps et/ou changement d'unité de temps), et une invariance pour les changements de repères.

Enfin nous dirons qu'une loi doit être **déterministe** c'est à dire que la réponse du milieu à l'instant *t* ne doit dépendre que de l'histoire antérieure du milieu.

Bien évidemment, ces généralités ne permettent pas de définir la forme détaillée des lois de comportement et encore moins d'obtenir une loi de comportement universelle. Pour poursuivre il faut faire des hypothèses supplémentaires, hypothèses qui seront souvent déduites de l'observation expérimentale.

Nous pouvons maintenant donner la formulation d'un comportement élastique linéaire. Toutefois afin d'aider le lecteur dans sa compréhension, nous indiquons deux approches quelques peu différentes pour aboutir au même résultat.

Première approche de l'élasticité linéaire

Pour traduire le phénomène élastique d'un comportement de matériau, on peut dire que la réponse du milieu est parfaitement décrite par la connaissance de la température et du tenseur des déformations.

Reprenons l'inégalité de Clausius - Duhem :

$$\overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} - \rho\left(\frac{d\psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) - \frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad\ T} \geq 0$$

Avec l'hypothèse formulée, on peut dire que la fonction d'état ψ (énergie libre massique) est une fonction uniquement des paramètres T et $\overline{\overline{\varepsilon}}$. On peut donc écrire :

$$\frac{d\psi\left(\overline{\overline{\varepsilon}},T\right)}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}} \otimes \overline{\overline{\frac{d\overline{\overline{\varepsilon}}}{dt}}} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\frac{dT}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\frac{dT}{dt}$$

En reportant dans l'inégalité de Clausius - Duhem, on obtient :

$$\left(\overline{\overline{\sigma}}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}\right)\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{D}-\rho\left(s+\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt}-\frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad\ T}\geq 0$$

Comme les seuls paramètres retenus pour l'étude sont la température et le tenseur des déformations, l'inégalité précédente doit être satisfaite quels que soient $\mathbf{D}$ et $\frac{d\,T}{dt}$. On peut donc dire :

$$\overline{\overline{\sigma}}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}=0 \qquad \text{et} \qquad s+\frac{\partial\psi}{\partial T}=0$$

Ainsi on constate que la connaissance de la fonction d'état énergie libre massique permet de définir la loi de comportement du matériau. Pour cette raison on donne le nom de **potentiel élastique** à la fonction énergie libre $\rho\psi$.

Pour poursuivre, on peut formuler l'hypothèse des petites perturbations, c'est à dire que la température T et le tenseur des déformations **linéarisé** sont les seules variables d'état du système.

La relation de comportement s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}$$

Par cohérence avec l'approximation, nous ne garderons dans le développement du tenseur des contraintes en fonction du tenseur des déformations que les termes d'ordre 1. De même pour le paramètre température.

On obtient alors la loi de comportement **thermoélastique linéaire** :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}=\overline{\overline{\sigma^{0}}}+\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\overline{\varepsilon}}-\overline{\overline{\beta}}\left(T-T^{0}\right)}$$

avec :

$\overline{\overline{\sigma^{0}}}$	:	tenseur des contraintes dans la configuration initiale
$\overline{\overline{A}}$	:	tenseur d'élasticité du quatrième ordre
$\overline{\overline{\beta}}$	:	tenseur des coefficient de dilatation thermique
T^{0}	:	température dans la configuration initiale

Si le matériau est homogène et isotrope, la condition d'objectivité nous conduit alors à un tenseur d'élasticité déterminé par deux constantes et le tenseur des coefficients de dilatation thermique est sphérique $\left(\overline{\overline{\beta}}=\beta\overline{\overline{I}}\right)$.

La loi de comportement devient alors :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}=\overline{\overline{\sigma^{0}}}+2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}+\left(\lambda\,trace\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)-\beta\left(T-T^{0}\right)\right)\overline{\overline{I}}}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}}=\frac{1+\nu}{E}\left(\overline{\overline{\sigma}}-\overline{\overline{\sigma^{0}}}\right)+\left[\alpha\left(T-T^{0}\right)-\frac{\nu}{E}\,trace\left(\overline{\overline{\sigma}}-\overline{\overline{\sigma^{0}}}\right)\right]\overline{\overline{I}}}$$

avec les relations :

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Premier coefficient de Lamé = Module de Coulomb

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ Deuxième coefficient de Lamé

$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ Module d'Young

$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ Coefficient de Poisson

$\alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu}$ Coefficient de dilatation thermique linéaire

Deuxième approche de l'élasticité linéaire

Nous allons reconstruire cette loi de comportement en essayant de montrer l'importance de chaque hypothèse formulée.

Dans un premier temps nous dirons que nous faisons subir à notre **milieu continu une transformation géométrique continue, infinitésimale**. Nous nous plaçons ainsi dans le cas des petites perturbations et l'état de déformation peut être, aussi bien en variables de Lagrange qu'en variables d'Euler, déterminé par la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement, c'est à dire le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$.

La transformation est **monotherme réversible**. Ainsi le milieu n'échange de la température qu'avec une seule source thermique. La réversibilité permet de traduire le second principe par une égalité. Il est à noter que cette réversibilité est double, mécanique et thermique. La réversibilité mécanique exclue tous les problèmes de frottement entre deux pièces alors que la réversibilité thermique impose au domaine étudié d'être constamment à la température de la source thermique, c'est à dire à une température uniforme (mais pouvant évoluer au cours du temps).

Dès à présent nous écrire les conséquences de ces hypothèses sur le second principe de la thermodynamique :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \dot{Q} = T\ dS$$

D'autre part nous supposons que le domaine ne subit **aucune transformation chimique, ni de changement d'état**. Il n'y a donc aucune création de chaleur interne et par voie de conséquence, comme le domaine est constamment à la température de la source, l'échange de chaleur est nul.

$$\dot{Q} = 0$$

L'écriture du premier principe de la thermodynamique se simplifie et devient :

$$\frac{d\ E}{dt} = -P_{int} = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\ dv$$

Ainsi la puissance de déformation est la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentielle.

On peut alors définir l'énergie de déformation qui est l'opposé du travail développé par les efforts intérieurs dans la transformation permettant de passer de l'état naturel à l'état considéré. On a :

$$d\,W_{def} = -\,P_{int}\;dt = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \left(\mathbf{D}\;dt\right) dv = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{d\,\varepsilon}}\;dv = \int_D \sigma_{ij}\;d\,\varepsilon_{ij}\;dv$$

Avec le premier principe de la thermodynamique, on peut alors constater que l'énergie de déformation, qui, à une constante additive près, est égale à l'énergie interne, est une fonction d'état. Ainsi la différentielle que nous venons de former doit être une différentielle totale exacte et les conditions d'intégrabilité de Cauchy doivent s'appliquer. L'énergie de déformation ne dépend donc que de l'état initial et de l'état final. Le matériau restitue intégralement l'énergie que l'on fournit pour le déformer. On dit qu'il a un **comportement élastique**, c'est à dire réversible.

Cette énergie de déformation ne sera une différentielle totale exacte que si les contraintes σ_{ij} ne sont fonctions que des déformations ε_{ij} , à une constante près. On obtient alors :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\,0} + f_{ij}\left(\varepsilon_{kl}\right)$$

Les contraintes $\sigma_{ij}^{\,0}$ représentent l'état de contrainte en l'absence de déformation. Ce sont les contraintes initiales. Dans l'état initial naturel, elles sont nulles.

Pour avancer dans notre étude nous supposerons que d'une part l'état initial est naturel, et que d'autre part le matériau a un **comportement élastique linéaire**, c'est à dire que les relations entre l'état de contrainte et l'état de déformation sont des fonctions linéaires.

On peut donc écrire :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\;\varepsilon_{kl}$$

Le tenseur du quatrième ordre A représente le **tenseur de raideur**. Dans l'hypothèse d'un milieu continu **homogène**, ses composantes sont indépendantes des coordonnées du point considéré. Compte tenu de la symétrie des tenseurs contrainte et déformation, le tenseur de raideur est caractérisé par 36 termes. Toutefois le nombre de paramètres indépendants est de 21 car il faut respecter les conditions d'intégrabilité de Cauchy pour la forme différentielle de l'énergie de déformation. Ces conditions sont au nombre de 15 :

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\,\sigma_{kl}}{\partial\,\varepsilon_{ij}} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{ijkl} = A_{klij}$$

Dans le cas le plus général, il conviendra donc de trouver les essais de caractérisation de ces 21 fonctions. Dans la pratique ces fonctions sont dépendantes de la température et du temps (vitesse d'application des charges). Comme on travaille en général dans des plages de température bien définies , relativement limitées et que ces fonctions sont faiblement dépendantes de la température, on peut facilement les assimilées à des coefficients constants pour une cinétique donnée.

L'identification de ces coefficients élastiques repose sur l'évaluation de la raideur dans des essais statiques (traction-compression, torsion ...), dans des essais de vibrations ou dans des essais de propagation d'ondes. On constate une différence au niveau des résultats donnés par ces essais. Cet écart s'explique car les méthodes dynamiques ne permettent pas de prendre en compte certains mouvements internes visqueux et de ce fait donnent des rigidités un peu plus grandes.

Convention d'écriture

Le tenseur de raideur est un tenseur d'ordre 4. Il est donc particulièrement délicat à expliciter. Les formules développées sont relativement lourdes. Il convient donc de trouver une méthode qui permette une simplification d'écriture.

La solution réside en des applications linéaires. L'une va nous permettre de passer de l'espace vectoriel de dimension 2 associé aux tenseurs d'ordre 2 vers un espace vectoriel de dimension 1 auquel on associera des tenseurs d'ordre 1. Pour le tenseur des contraintes, cette application se présente sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23}=\sigma_{32} \\ \sigma_{31}=\sigma_{13} \\ \sigma_{12}=\sigma_{21} \end{pmatrix}$$

Par contre pour le tenseur des déformations, on préfère utiliser l'application définie par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23}=2\varepsilon_{23}=2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31}=2\varepsilon_{31}=2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12}=2\varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

Ces transformations sur les tenseurs des contraintes et des déformations induisent l'existence d'une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension 4 (associé au tenseur de raideur) vers un espace vectoriel de dimension 2 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \hat{\sigma} = \hat{\hat{C}}\,\hat{\varepsilon}$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Compte tenu des conditions d'intégrabilité de Cauchy sur le travail de déformation, nous avons les relations suivantes :

$$c_{12}=c_{21} \quad c_{14}=2c_{41} \quad c_{24}=2c_{42} \quad c_{34}=2c_{43} \quad c_{45}=c_{54}$$
$$c_{13}=c_{31} \quad c_{15}=2c_{51} \quad c_{25}=2c_{52} \quad c_{35}=2c_{53} \quad c_{46}=c_{64}$$
$$c_{23}=c_{32} \quad c_{16}=2c_{61} \quad c_{26}=2c_{62} \quad c_{36}=2c_{63} \quad c_{56}=c_{65}$$

Ces relations étant au nombre de 15, nous nous retrouvons bien avec 21 coefficients indépendants.

La structure de la matrice C devient alors :

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} X_{ij} & \vdots & 2Z_{ij} \\ \cdots & \cdots\vdots\cdots & \cdots \\ Z_{ij} & \vdots & Y_{ij} \end{pmatrix}$$

Les sous-matrices *X*, *Y* et *Z* étant des matrices (3,3), les matrices *X* et *Y* étant symétriques.

Les hypothèses supplémentaires portant sur le degré d'**anisotropie** du matériau vont nous permettent de diminuer le nombre des coefficients indépendants.

Ces hypothèse portent essentiellement sur les symétries et rotations possibles sans changement de la loi de comportement. L'invariance du comportement dans un certain type de changement de base ne sera en effet vérifié qu'avec des relations particulières du tenseur de raideur.

Pour mettre en évidence ces relations on rappelle les règles de transformation des composantes d'un tenseur dans un changement de bases orthonormées :

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\leftrightarrow(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3) \quad \vec{e}_i=a_i^{\ J}\vec{E}_J \quad \vec{E}_I=b_I^{\ j}\vec{e}_j \text{ avec } a_i^{\ J}b_J^{\ k}=\delta_i^{\ k}$$

Pour un tenseur d'ordre 2, on a :

$$T=t^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=T^{IJ}\vec{E}_I\otimes\vec{E}_J \qquad t^{ij}=b_I^{\ i}b_J^{\ j}T^{IJ} \quad T^{IJ}=a_i^{\ I}a_j^{\ J}t^{ij}$$

Pour un tenseur d'ordre 4, on obtient :

$$T=t^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l=T^{IJKL}\vec{E}_I\otimes\vec{E}_J\otimes\vec{E}_K\otimes\vec{E}_L$$
$$t^{ijkl}=b_I^{\ i}b_J^{\ j}b_K^{\ k}b_L^{\ l}T^{IJKL}$$
$$T^{IJKL}=a_i^{\ I}a_j^{\ J}a_k^{\ K}a_l^{\ L}t^{ijkl}$$

Remarque La notation précédente (avec des indices supérieurs et inférieurs) peut choquer à première vue mais cette notation est en conformité avec les notions de variance et de contravariance. Elle permet des écritures avec des simplifications systématiques. De plus, dans le cas d'une métrique non euclidienne, elle seule permettra de prendre en compte correctement les nouvelles notions de longueur.

Toutefois, dans un souci de simplicité, nous continuerons à utiliser des notations avec des indices inférieurs pour les tenseurs.

Matériau isotrope

L'hypothèse d'**isotropie** impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. On peut alors démontrer que la seule forme possible de ce tenseur est :

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right)$$

On obtient ainsi la loi de comportement faisant apparaître les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Avec cette forme de relation, on constate que les directions principales de contraintes sont confondues avec les directions principales de déformations.

Cette loi de comportement fera l'objet d'une étude approfondie dans la suite du cours.

Matériau orthotrope

Un milieu est dit **orthotrope** pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux.

On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise.

Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois (dans certains cas), les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés.

Supposons que nous ayons une symétrie par rapport au plan de coordonnées $x_3 = 0$. La matrice de changement de base traduisant cette symétrie est :

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation d'indépendance du tenseur de raideur **A** dans ce changement va se traduire par le fait que toutes les composantes K_{ijkl} ayant un nombre impair d'indice 3 sont nulles. Ainsi pour la matrice *C* on obtient :

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{64} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{65} = 0$$

Le tenseur de raideur n'a plus que 13 coefficients indépendants.

Il nous reste maintenant à traduire la condition de symétrie par rapport à un plan orthogonal, par exemple celui de coordonnées $x_1 = 0$.

On aura donc :

$$(c_{15}) = c_{16} = (c_{25}) = c_{26} = (c_{35}) = c_{36} = c_{45} = (c_{46}) = 0$$

Il ne reste donc que 9 coefficients indépendants pour traduire le comportement de notre matériau. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Les conditions de symétrie se traduisent par les relations :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \; ; \; \frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3} \; ; \; \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Le matériau est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

* 3 modules d'élasticité longitudinal E_1, E_2 et E_3 dans les directions de l'orthotropie.
* 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23} et G_{31}.
* 3 coefficients de contraction ν_{12}, ν_{23} et ν_{31}.

De plus, des considérations thermodynamiques sur le travail de déformation permettent de démontrer les inégalités suivantes :

$$1-\nu_{12}\nu_{21}>0 \; ; \; 1-\nu_{23}\nu_{32}>0 \; ; \; 1-\nu_{31}\nu_{13}>0$$
$$1-\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}-\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{31}\nu_{31}-\nu_{32}\nu_{23}>0$$

Matériau isotrope transverse

Un milieu est dit **isotrope transverse** pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Nous pouvons donc remarquer que le milieu est déjà orthotrope.

Imaginons par exemple que l'axe $\vec{E}_3$ soit l'axe d'isotropie. Il est donc nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par :

$$(P)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conçoit facilement qu'en plus des relations du cas orthotrope, on obtienne de nouvelles relations entre les coefficients élastiques du tenseur de raideur.

On aura par exemple :

$$K_{1212} = -\sin\alpha\cos\alpha A_{1p}A_{2q}K_{11pq} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)A_{1p}A_{2q}K_{12pq} + \sin\alpha\cos\alpha A_{1p}A_{2q}K_{22pq}$$

$$K_{1212} = -\sin\alpha\cos\alpha(-\sin\alpha\cos\alpha K_{1111} + \sin\alpha\cos\alpha K_{1122}) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 K_{1212} + \sin\alpha\cos\alpha(-\sin\alpha\cos\alpha K_{2211} + \sin\alpha\cos\alpha K_{2222})$$

Ce qui nous donnera :

$$c_{66} = \sin^2\alpha\cos^2\alpha(c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 c_{66}$$

$$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha c_{66} = 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(c_{11} - c_{12}) \quad \text{car } c_{22} = c_{11}$$

D'où la relation :

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

En définitive on retrouvera 4 nouvelles équations (dont $c_{22} = c_{11}$). Il n'y a donc plus que 5 composantes indépendantes. Les équations deviennent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Les 4 relations supplémentaires étant :

$$E_1 = E_2 \; ; \; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \; ; \; G_{13} = G_{23} \; ; \; 2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}}$$

Elasticité linéaire

Loi de comportement

Dans le chapitre précédent, nous avons expliqué la nécessité d'écrire des relations issues de l'expérience afin de solutionner un problème. Nous allons maintenant étudié de façon plus approfondie l'une de ces lois de comportement, l'élasticité linéaire.

Dans la pratique, c'est certainement le comportement qui est le plus facilement employé. Il s'applique, moyennant certaines approximations, dans de nombreux cas. Pratiquement tous les métaux présentent ces propriétés, sous réserve que le niveau de contrainte ne soit pas trop élevé. Mais la théorie de l'élasticité linéaire peut aussi s'appliquer à des matériaux non isotropes, comme le bois par exemple. La mécanique des sols utilise aussi cette théorie. Enfin, dans une certaine mesure, les matières plastiques peuvent avoir une phase de comportement élastique.

Toutefois la loi que nous utiliserons sera limitée à des matériaux isotropes, c'est à dire que la formulation de cette loi de comportement doit être identique quel que soit le référentiel utilisé, lié ou non au matériau étudié.

Si le matériau est homogène, isotrope, si la transformation est continue, infinitésimale, monotherme réversible, si le domaine ne subit aucune transformation chimique, ni de changement d'état, si le comportement est linéaire, alors nous avons les relations suivantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma^0}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}} + \left(\lambda tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right) - \beta\left(T - T^0\right)\right)\mathbf{I}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}}\right) + \left[\alpha\left(T - T^0\right) - \frac{\nu}{E}tr\left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}}\right)\right]\mathbf{I}$$

avec : $\overline{\overline{\sigma^0}}$: tenseur des contraintes dans la configuration initiale

T^0 : température dans la configuration initiale

et avec les relations :

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$ Premier coefficient de Lamé = Module de Coulomb

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ Deuxième coefficient de Lamé

$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ Module d'Young

$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ Coefficient de Poisson

$\alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu}$ Coefficient de dilatation thermique linéaire

Dans le cas d'une transformation isotherme à partir d'un état initial naturel (sans contraintes initiales), les formules prennent les expressions suivantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda\, tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\mathbf{I}$$
$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\overline{\overline{\sigma}} - \left[\frac{\nu}{E}\, tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right]\mathbf{I}$$

En notation indicielle, on obtient, dans n'importe quelle base (isotropie du comportement) :

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\theta\,\delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{ij} + \frac{\nu\,E}{(1+\nu)(1-2\,\nu)}\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,I_1\,\delta_{ij} = \frac{1}{2\,\mu}\,\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\,\mu\,(2\,\mu+3\,\lambda)}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$$

On peut facilement constater avec ces relations que les bases principales de l'état de déformation et de l'état de contrainte sont confondues.

La loi de comportement n'est caractérisée que par deux grandeurs indépendantes, par exemple les coefficients de Lamé ou le module d'Young et le coefficient de Poisson. Généralement on préfère employer ces deux dernières grandeurs que l'on peut facilement déterminer par un simple essai de traction.

Le tableau suivant donne certaines de ces valeurs pour une température de 20°C:

Matériaux	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse Volumique (kg/dm^3)
Acier de construction	210	0,285	7,8
Acier Inox 18-12	203	0,29	7,9
Fonte grise	90 à 120	0,29	7,1 à 7,2
Alliage TA6V	105	0,25	7,8
Aluminium	71	0,34	2,6
Zinc	78	0,21	7,15
Titane	105	0,34	4,5
Verre	60	0,25	2,8
Béton en compression	10 à 13	0,15	2 à 2,4
Caoutchouc	0,2	0,5	1,8
Bois (pin)	7	0,2	0,4
Marbre	26	0,3	2,8
Graphite	250 à 350	0,3 à 0,4	1,75 à 1,92
Elastomère	0,2	0,5	1

(Valeurs données dans l'ouvrage de G. DUVAUT)

Equations supplémentaires en élasticité

Dans le cas général nous aurons, grâce à la loi de comportement, suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité. Toutefois souvent nous serons face à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. Il peut être utile d'employer des équations complémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique. Les équations de NAVIER et les équations de BELTRAMI en sont un exemple.

Equations de NAVIER

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations d'équilibre en terme de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations – déplacements.

Sous forme locale, les équations d'équilibre nous donnent :

$$\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)} + \rho\left(\vec{f} - \vec{\gamma}\right) = \vec{0}$$

Avec la loi d'élasticité linéaire, nous obtenons :

$$2\,\mu\,\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)} + \lambda\,\overrightarrow{grad\ (\theta)} + \rho\left(\vec{f} - \vec{\gamma}\right) = \vec{0}$$

D'autre part nous avons les relations suivantes :

$$\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{div\ (\mathbf{grad}\ (\vec{u}))} + \frac{1}{2}\overrightarrow{div\left(\mathbf{grad}\ (\vec{u})^T\right)}$$

$$\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta(\vec{u})} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad\ (div\,(\vec{u}))}$$

$$\theta = tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right) = div\,(\vec{u})$$

On obtient alors les formes vectorielles suivantes des équations de NAVIER :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mu\,\overrightarrow{\Delta(\vec{u})} + (\mu+\lambda)\,\overrightarrow{grad\ (div\,(\vec{u}))} + \rho\left(\vec{f} - \vec{\gamma}\right) = \vec{0} \\ (\lambda + 2\,\mu)\,\overrightarrow{grad\ (div\,(\vec{u}))} - \mu\,\overrightarrow{rot\left(\overrightarrow{rot\ (\vec{u})}\right)} + \rho\left(\vec{f} - \vec{\gamma}\right) = \vec{0}\end{array}}$$

Il est possible de retrouver ces équations en utilisant la notation indicielle. On peut ainsi dériver la loi de comportement élastique linéaire exprimée dans une base cartésienne.

On obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 2\,\mu\,\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\,\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\delta_{ij} = 2\,\mu\,\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\,\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Ce qui nous permet d'écrire les équations d'équilibre sous la forme :

$$2\,\mu\,\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\,\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho\left(f_i - \gamma_i\right) = 0$$

Avec les relations déplacement – déformation, nous obtenons :

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\lambda\ \frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\rho\left(f_i-\gamma_i\right)=0$$

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^{\,2}}+\mu\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\lambda\ \frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\rho\left(f_i-\gamma_i\right)=0$$

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^{\,2}}+\left(\mu\ +\lambda\ \right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\rho\left(f_i-\gamma_i\right)=0$$

$$\mu\,\Delta u_i+\left(\mu\ +\lambda\ \right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\rho\left(f_i-\gamma_i\right)=0$$

Ce qui nous donne bien la relation vectorielle :

$$\mu\,\overrightarrow{\Delta\left(\vec{u}\right)}+\left(\mu+\lambda\right)\overrightarrow{grad\ \left(div\left(\vec{u}\right)\right)}+\rho\left(\vec{f}-\vec{\gamma}\right)=\vec{0}$$

D'autre part, il est possible d'obtenir une équation supplémentaire à partir de la formulation précédente. En utilisant l'opérateur divergence, on obtient :

$$\mu\ div\left[\Delta\left(\vec{u}\right)\right]+\left(\mu+\lambda\right)div\left[\overrightarrow{grad\ \left(div\left(\vec{u}\right)\right)}\right]+div\left[\rho\left(\vec{f}-\vec{\gamma}\right)\right]=0$$

Mais nous avons aussi les relations :

$$div\left[\Delta\left(\vec{u}\right)\right]=\Delta\left[div\left(\vec{u}\right)\right]$$

$$div\left[\overrightarrow{grad\ \left(div\left(\vec{u}\right)\right)}\right]=\Delta\left[div\left(\vec{u}\right)\right]$$

Ce qui nous donne alors l'équation scalaire :

$$\left(2\ \mu+\lambda\right)\Delta\left[div\left(\vec{u}\right)\right]+div\left[\rho\left(\vec{f}-\vec{\gamma}\right)\right]=0$$

$$\left(2\ \mu+\lambda\right)\Delta\theta+div\left[\rho\left(\vec{f}-\vec{\gamma}\right)\right]=0$$

<u>Cas particulier :</u> Dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force volumique à divergence nulle $\left(div\ \vec{f}=0\right)$, on obtient :

$$\Delta\theta=0$$

<u>Equations de BELTRAMI</u>

Lorsque l'on désire résoudre le problème en contrainte, sans vouloir à priori définir les champs de déplacement et de déformation, on utilise une méthode dite « inverse ». Il convient alors, en plus de la vérification des équations d'équilibre, de s'assurer que l'état de contrainte conduit, par l'intermédiaire de la loi de comportement, à un état de déformation compatible avec un champ de déplacement.

Les équations de BELTRAMI permettent justement de faire cette dernière vérification sans jamais calculer les composantes du tenseur de déformation. Elles proviennent des équations de compatibilité :

$$\mathbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)}+\left(\mathbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)}\right)^T-\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{grad\ \left[tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right]}\right)-\overline{\overline{\Delta\,\varepsilon}}=0$$

La loi de comportement nous permet d'écrire :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}} - \left[\frac{\nu}{E} tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right]\overline{\overline{I}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\overline{\Delta\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\Delta\sigma}} - \left[\frac{\nu}{E}\Delta\left(tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right)\right]\overline{\overline{I}}$$

D'autre part nous avons :

$$tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = I_1 = \frac{E}{1-2\nu} tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right) = \frac{E}{1-2\nu}\theta$$

$$\Delta I_1 = \frac{E}{1-2\nu}\Delta\theta$$

Avec la forme scalaire des équations de NAVIER :

$$(2\mu+\lambda)\Delta\theta = div\left[\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right] \qquad \Rightarrow \qquad \Delta I_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} div\left[\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right]$$

De plus nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{E}\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}} - \frac{\nu}{E}\overrightarrow{grad\ (I_1)}$$

$$\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\varepsilon}}}\right) = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}}\right) - \frac{\nu}{E}\mathbf{grad}\left[\overrightarrow{grad\ (I_1)}\right]$$

$$\left(\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\varepsilon}}}\right)\right)^T = \frac{1+\nu}{E}\left(\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}}\right)\right)^T - \frac{\nu}{E}\mathbf{grad}\left[\overrightarrow{grad\ (I_1)}\right]$$

Enfin nous pouvons utiliser les équations d'équilibre :

$$\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}} = \rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)$$

L'équation de compatibilité devient alors :

$$\boxed{\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}}\right) + \left(\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma}}}\right)\right)^T - \frac{1}{1+\nu}\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{grad\ (I_1)}\right) - \overline{\overline{\Delta\sigma}} + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) div\left[\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right]\overline{\overline{\mathbf{I}}} = 0}$$

Sous forme indicielle on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial\left[\rho\left(\gamma_i - f_i\right)\right]}{\partial x_j} + \frac{\partial\left[\rho\left(\gamma_j - f_j\right)\right]}{\partial x_i} - \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta\sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right]\delta_{ij} = 0}$$

Cas particulier : Dans le cas d'un domaine à masse volumique constante, en équilibre et placé dans un champ de force volumique à divergence nulle $\left(div\ \vec{f} = 0\right)$, on obtient :

$$\frac{1}{1+\nu}\mathbf{grad}\left(\overrightarrow{grad\ (I_1)}\right) + \overline{\overline{\Delta\sigma}} = \overline{\overline{0}}$$

$$\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \Delta\sigma_{ij} = 0$$

Critères de limite élastique

La loi de comportement que nous venons de définir admet malheureusement des limites. Dans pratiquement toutes les expériences, on constate en effet que, lorsque les efforts appliqués sont trop grands, le matériau perd ses qualités d'élasticité et qu'il subsiste des déformations permanentes appelées déformations plastiques. L'ingénieur est alors soumis à deux contradictions : assurer un prix de revient minimal, c'est à dire employer le moins de matière possible, et définir une structure performante et résistante, c'est à dire utilisant beaucoup de matière. Il est donc nécessaire pour lui de se trouver constamment à la frontière entre ces deux contraintes et pour cela il lui faut donc avoir les éléments qui définissent cette frontière.

Les résultats d'essai

La connaissance d'un état limite se détermine par les essais effectués en laboratoire. Il est logique de penser que cet état limite est lié au tenseur des contraintes car c'est l'expression tensorielle qui traduit la répartition des efforts à l'intérieur de la matière. En vertu de l'hypothèse d'isotropie du matériau, il est logique de penser que la limite élastique sera reliée aux valeurs propres de l'état de contrainte, c'est à dire aux contraintes principales. De plus il faut pouvoir tenir compte des différents résultats obtenus lors des essais expérimentaux.

Nous pouvons donc envisager la forme générale d'un critère comme étant une relation du type :

$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, c_1, c_2, \ldots, c_n) \leq 0$$

Dans cette expression, les coefficients c_i permettent de prendre en compte les différents résultats expérimentaux. On supposera que les contraintes principales sont ordonnées :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Tout état de contrainte élastique vérifie l'inégalité, l'égalité étant obtenu en limite d'élasticité.

Afin de bien se représenter cette limite élastique, on peut envisager une représentation graphique. Pour cela on peut penser que le plan des cercles de Mohr, plan qui contient toutes les informations sur l'état de contrainte, doit convenir. On va donc commencer par représenter dans ce plan les différents résultats expérimentaux.

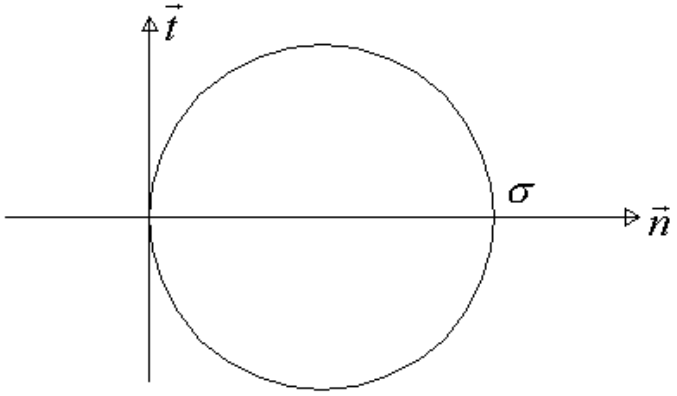
Traction uniaxiale

Parfaitement normalisé, c'est l'essai le plus couramment pratiqué. Sa mise en œuvre est relativement simple à condition de bien respecter le processus opératoire. L'essai de traction est aussi beaucoup utilisé pour définir les constantes élastiques du matériau. On démontre que, en des points au centre de l'éprouvette, l'état de contrainte est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)}$$

$\vec{E}_z$ représente l'axe de la poutre.

Nous sommes donc dans les directions principales et le tricercle de Mohr associé est de la forme :



Les essais montrent que l'on est dans le domaine de comportement élastique tant que l'on vérifie la relation :

$$\sigma \leq \sigma_e \Rightarrow \sigma_I \leq \sigma_e$$

On définit ainsi la limite élastique en traction du matériau σ_e.

Compression uniaxiale

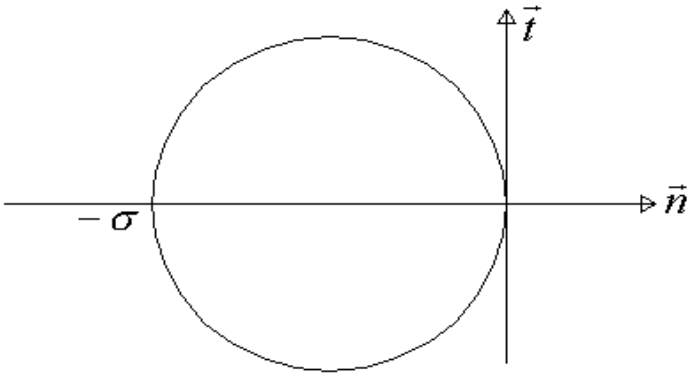
C'est un essai plus difficile à mettre en œuvre. Pour éviter les phénomènes de bord (frottement entre la pièce et les plateaux de compression) il faut une pièce élancée, mais on risque alors le flambement.

En des points au centre de la pièce l'état de contrainte est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}_{\left(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z\right)}$$

avec $\sigma \geq 0$, contrainte normale de compression

Le tricercle de Mohr prend alors la forme suivante :



Les essais montrent que l'on est dans le domaine de comportement élastique tant que l'on vérifie la relation :

$$\sigma \leq \sigma'_e \Rightarrow \sigma_I \leq \sigma'_e$$

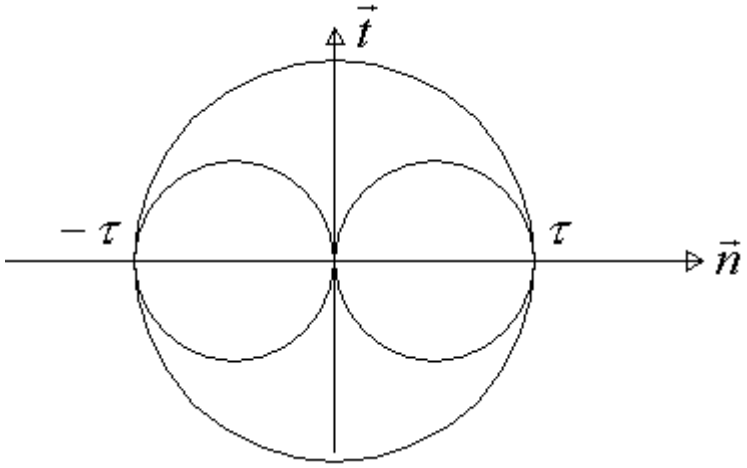
On définit ainsi la limite élastique en compression du matériau σ'_e.

Cisaillement simple

Cet état peut être obtenu dans le cas de la torsion d'un tube de faible épaisseur. Bien entendu nous sommes à nouveau confrontés à des problèmes de flambement. C'est pourquoi nous utilisons souvent l'essai de torsion sur des poutres droites circulaires à section pleine. L'état de contrainte est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)}$$

Après calcul des valeurs propres $(\sigma_I = \tau, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = -\tau)$, il est facile de représenter le tricercle de Mohr :



L'expérience montre qu'il existe une valeur de contrainte tangentielle à ne pas dépasser si l'on veut rester dans un état élastique :

$$\tau \leq \tau_e$$

Compression isotrope

C'est en fait le cas d'un corps auquel on applique une pression uniforme sur sa surface. L'état de contrainte est alors sphérique est on a :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\,\overline{\overline{I}}$$

L'expérience montre qu'en fait il n'y a pratiquement pas de limite à la valeur de la pression appliquée. Après retour à un état de pression nulle, le corps retrouve intégralement sa forme initiale : il n'y a aucune déformation permanente.

Les différents critères

La détermination d'un critère est particulièrement délicate. Il n'existe malheureusement pas de critère universel qui intègre tous les résultats expérimentaux. Même si il était possible de déterminer un tel critère, il est à craindre que le coût d'établissement et le coût d'utilisation ne seraient pas admissibles industriellement. En effet la détermination des différentes limites élastiques associées aux différents essais fait appel à des machines d'essai plus ou moins sophistiquées qui peuvent être onéreuses. Aussi on préfère utiliser des

critères qui ne font appel qu'à un ou deux essais et qui sont plus simples à mettre en œuvre. On est alors parfaitement conscient que l'on perd de la précision, mais il faut relativiser cette perte vis à vis des incertitudes de mesures expérimentales des limites élastiques, ou de détermination des grandeurs caractéristiques de la loi de comportement.

Le critère de Von Misès

Ce critère est basé sur le dernier constat concernant la compression isotrope et sur l'énergie de déformation. Comme il n'y a aucune limite, il faut que ce critère permette de quantifier une énergie de déformation qui ne dépende pas de la compression isotrope.

En se basant sur les résultats obtenus par l'expérience, à savoir que l'on modifie le volume sans modifier la forme, on peut montrer que le tenseur des contraintes, comme le tenseur des déformations, est purement sphérique. Les parties déviatoriques sont nulles.

L'idée associée au critère de Von Misès est donc de limiter l'énergie de déformation élastique déviatorique, c'est à dire celle obtenue à partir des tenseurs déviateurs.

On a vu que l'énergie de déformation avait l'expression infinitésimale suivante :

$$d\,W_{def} = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{d\varepsilon}}\; dv = \int_D \sigma_{ij}\; d\varepsilon_{ij}\; dv$$

Avec une loi de comportement élastique linéaire on obtient :

$$W_{def} = \frac{1}{2}\int_D \sigma_{ij}\; \varepsilon_{ij}\; dv = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\varepsilon}}\; dv$$

Avec la décomposition en partie sphérique et déviatorique, on obtient :

$$W_{def} = \frac{1}{2}\int_D tr\,(\overline{\overline{\sigma}}_S \otimes \overline{\overline{\varepsilon}}_S)\; dv + \frac{1}{2}\int_D tr\,(\overline{\overline{\sigma}}_D \otimes \overline{\overline{\varepsilon}}_D)\; dv = \left(W_{def}\right)_S + \left(W_{def}\right)_D$$

Pour le critère de Von Misès on a :

$$\left(\frac{d\,W_{def}}{dv}\right)_D = \frac{1}{2}tr\,(\overline{\overline{\sigma}}_D \otimes \overline{\overline{\varepsilon}}_D) = \frac{1}{2}tr\left[\left(\sigma_{ij}\right)_D \left(\varepsilon_{ij}\right)_D\right] \le K$$

En tenant compte des résultats donnés par l'essai de traction et en exprimant l'énergie de déformation déviatorique en fonction de l'état de contrainte, on obtient :

$$tr\left(\overline{\overline{\sigma}}_D^{\,2}\right) \le \frac{2}{3}\sigma_e^{\,2}$$

En fonction des contraintes principales on a :

$$\boxed{\left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II} - \sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III} - \sigma_I\right)^2 \le 2\,\sigma_e^{\,2}}$$

Ce critère, qui vérifie particulièrement bien le cas de la compression hydrostatique, présente l'inconvénient d'être symétrique en traction et en compression. Il ne permet pas de prendre en compte une différence entre la limite élastique en traction et la limite élastique en compression. Son principal intérêt réside dans sa simplicité d'usage.

Le critère de Tresca

Ce critère est basé sur une limitation du cisaillement en un point. Il revient en fait à limiter le rayon du plus grand des cercles de Mohr et de ce fait il est particulièrement bien adapté à des sollicitations de cisaillement comme la torsion d'une poutre.

Son expression est simplement donnée en contraintes principales ordonnées $(\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III})$ par la formule :

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \leq \tau_e$$

Comme pour le critère de Von Misès, on se trouve devant un critère simple à définir et à mettre en œuvre mais qui ne permet pas de prendre en compte la complexité des différents résultats d'essais. En particulier, comme pour le critère précédent, on constate qu'il n'y a aucune limitation à une sollicitation de traction isotrope, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux.

Les schémas de résolution

Nous avons maintenant tous les outils pour traiter un problème de mécanique. Avec la loi de comportement nous avons comblé le déficit entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues. Avec un critère de limite élastique, nous savons vérifier la validité concernant l'utilisation de la loi élastique linéaire.

En définitive, on pourrait penser qu'il suffit maintenant de traiter le problème simplement du point de vue mathématique. Hélas, la réalité est toute autre. Le problème est complexe, car pour déterminer les inconnues (3 fonctions déplacement, 6 fonctions déformation, 6 fonctions contrainte) nous avons effectivement le bon nombre d'équations mais ces dernières peuvent prendre une forme différentielle du premier ordre (relations déformation – déplacement) ou du second ordre (équations d'équilibre, équations de compatibilité …). Si bien que, même avec la connaissance des conditions aux limites (portant soit sur les déplacements, soit sur les efforts), il est pratiquement impossible de donner une solution analytique exacte du problème dans le cas général.

La détermination de la solution passe alors soit par des méthodes numériques approchées (différences finies, éléments finis …), soit par des méthodes inverses permettant de simplifier le problème posé. Les schémas de résolution permettent de traiter ces méthodes inverses. Ils sont basés sur le fait que la solution existante est généralement unique.

Théorème d'unicité

Indépendamment des critères associés à la loi de comportement, les états de contrainte et de déformation solutions du problème ne sont pas quelconques. Ils doivent vérifier certaines conditions qui permettent de les classer dans les champs admissibles ou non.

Un champ de contrainte est **Statiquement Admissible** s'il vérifie les conditions statiques, c'est à dire s'il satisfait aux équations d'équilibre (ou aux équations de Navier) et s'il permet de valider les conditions aux limites sur les forces.

Un champ de déformation est **Cinématiquement Admissible** s'il vérifie les conditions cinématiques, c'est à dire s'il satisfait aux équations de compatibilité (ou aux équations de Beltrami) et s'il permet de valider les conditions aux limites sur les déplacements.

Un problème est dit **Régulier** si en tout point de la surface délimitant le domaine d'étude nous connaissons les trois composantes complémentaires de l'effort et du déplacement.

Cette dernière définition mérite une petite explication. Considérons par exemple le cas d'un solide en déplacement sur une surface lisse. On peut admettre que le frottement est nul. En conséquence, on peut affirmer que pour le vecteur déplacement, la composante normale au plan tangent commun est nulle. Par contre les deux composantes tangentielles de la résultante des inter efforts sont nulles aussi. Vu la complémentarité des informations, on dira que localement le problème est régulier.

En fait pour qu'un problème soit régulier, il faut que l'intégrale représentant le travail des efforts de contact puisse se décomposer en deux termes :

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{T(M;\vec{n})}.\overrightarrow{u(M)}\,ds = W_F(\vec{u}) + W_u(\vec{F})$$

Le premier terme représente le travail des efforts donnés dans le déplacement inconnu et le second représente le travail des efforts de contact inconnu dans les déplacements donnés.

Fort de toutes ces définitions, il est alors possible de démontrer le théorème d'unicité :

Si, pour un problème régulier, on a trouvé un champ de contrainte statiquement admissible associé par l'intermédiaire de la loi de comportement à un champ de déformation cinématiquement admissible, alors on a la solution unique du problème.

Dans ce théorème, non démontré dans ce cours, il faut surtout remarquer que pour un problème régulier, la solution existe et elle est unique.

Dans la suite nous admettrons que tous nos problèmes sont des problèmes réguliers.

Schémas de résolution

En conséquence, peu importe le chemin utilisé pour obtenir la solution d'un problème régulier, seul compte le résultat. Toutefois il faut aussi comprendre que la solution en terme de contrainte ne pourra être trouvé que dans les champs statiquement admissible, alors que la solution en terme de déformation ne se trouvera que dans les champs cinématiquement admissible.

Il est alors possible de concevoir des schémas de résolution basés sur le principe suivant. En premier lieu, à partir de l'expérience et de la logique, on formule des hypothèses simplificatrices permettant de réduire notablement le nombre d'inconnues du problème. Ensuite on vérifie si ces hypothèses permettent d'avoir un champ de contrainte statiquement admissible et un champ de déformation cinématiquement admissible. Enfin, si tous les tests sont corrects, on vérifie enfin que l'on est bien en droit d'employer la loi de comportement en utilisant les critères limites.

Cette méthode présente l'avantage de donner des solutions analytiques exactes dans des cas simples. Ensuite par superposition, il est possible d'envisager des cas plus complexes. De plus historiquement, la détermination de solutions analytiques a permis de faire le calage des codes de calcul numérique. Il n'est pas rare en effet de valider de nouveaux éléments numériques en faisant la comparaison des résultats de calcul avec un cas d'école.

Il est à noter que cette méthode n'est valable que si elle correctement utilisée. En particulier, il faut impérativement faire tous les tests avant d'affirmer que l'on détient la solution.

Exemple d'application

Imaginons que nous ayons à définir la solution d'un tube sollicité par une pression intérieure p_i au rayon R_i, une pression extérieure p_e au rayon R_e et une traction σ sur les surfaces extrémités.

Il est possible de faire des hypothèses sur les composantes du champ de déplacement. En effet, vu les symétries du problème, on peut raisonnablement penser que le champ de déplacement n'a pas de composantes orthoradiales, que la composante radiale ne dépend que de la coordonnée radiale et que la composante axiale n'est fonction de la coordonnée axiale. On suppose que, dans la base cylindro-polaire, le champ de déplacement est de la forme :

$$\overrightarrow{U(M)} = u_r(r)\vec{E}_r + u_z(z)\vec{E}_z$$

Essayons de valider nos hypothèses. Dans un premier temps on peut remarquer que comme dans notre problème nous n'avons aucune condition de déplacement imposé sur la surface de notre domaine et que d'autre part nous partons d'un champ de déplacement, le champ de déformation associé sera nécessairement cinématiquement compatible.

Il reste à vérifier que le champ de contrainte associé soit statiquement admissible. En ce qui concerne les équations d'équilibre, on pourrait être tenté d'utiliser les équations de Navier, mais il faudra ensuite déterminer les composantes du tenseur des contraintes afin de valider les conditions aux limites sur les forces. Aussi autant calculer immédiatement les composantes du tenseur des contraintes.

Pour cela il faut utiliser les relations déplacement – déformation afin d'obtenir les composantes du tenseur des déformations. Attention les calculs doivent se faire dans la base cylindro-polaire et les formules utilisant les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien …) n'ont pas les mêmes expressions indicielles que dans le cas d'une base cartésienne. On a donc :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U} + \left(\mathbf{Grad}\ \vec{U}\right)^T\right]$$

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \dfrac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{du_z}{dz} \end{pmatrix}_{\left(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z\right)}$$

Il est à noter qu'avec ces hypothèses les distorsions angulaires sont nulles, ce qui est logique si on imagine la déformation du tube. Nous sommes avec les axes principaux.

Comme la loi de comportement élastique linéaire est définie pour un matériau isotrope, elle peut être utilisée sous la même forme indicielle dans n'importe qu'elle base. On a alors pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = 2\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda\theta\,\overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{du_r}{dr} + \lambda\theta & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\dfrac{u_r}{r} + \lambda\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\dfrac{du_z}{dz} + \lambda\theta \end{pmatrix}_{\left(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z\right)}$$

Avec : $\theta = \dfrac{du_r}{dr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{du_z}{dz}$

Il reste maintenant à vérifier que le tenseur obtenu est bien statiquement admissible. Pour cela commençons par valider les équations d'équilibre, toujours en faisant bien attention à utiliser des formules valables en coordonnées cylindro-polaire. Comme le domaine est supposé être en équilibre et que les forces de volumes sont négligeables, le tenseur des contraintes doit avoir une divergence nulle :

$$\overrightarrow{div\ \overline{\overline{\sigma(M)}}} = \vec{0}$$

Compte tenu du fait que le tenseur des contraintes est diagonal, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Avec les hypothèses faites, la deuxième équation est identiquement satisfaite. La première et la troisième équation nous apportent deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_r}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d u_r}{dr} - \dfrac{u_r}{r} = \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{d\left|r\,u_r\right|}{dr}\right)\right] = 0 \\ \dfrac{d^2 u_z}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} u_r = \alpha\, r + \dfrac{\beta}{r} \\ u_z = \gamma\, z + \delta \end{cases}$$

Ce qui nous donne les expressions suivantes pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases}$$

avec $\begin{cases} A = 2\,\alpha\,(\mu + \lambda) + \gamma\,\lambda \\ B = 2\,\beta\,\mu \\ C = 2\,\alpha\,\lambda + \gamma\,(2\,\mu + \lambda) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \alpha = \dfrac{(2\,\mu + \lambda)A - \lambda\,C}{2\,\mu\,(2\,\mu + 3\,\lambda)} \\ \beta = \dfrac{B}{2\,\mu} \\ \gamma = \dfrac{(\mu + \lambda)C - \lambda\,A}{\mu\,(2\,\mu + 3\,\lambda)} \end{cases}$

Soit avec le module d'Young et le coefficient de Poisson :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\alpha + \gamma\,\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)}\,E \\ B = \dfrac{\beta}{1+\nu}\,E \\ C = \dfrac{2\,\alpha\,\nu + \gamma\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\,\nu)}\,E \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-\nu}{E}\,A - \dfrac{\nu}{E}\,C \\ \beta = \dfrac{1+\nu}{E}\,B \\ \gamma = -\dfrac{2\,\nu}{E}\,A + \dfrac{1}{E}\,C \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites, il est possible de fixer les constantes d'intégration :

$$\begin{cases} A = \dfrac{p_i\,R_i^{\,2} - p_e\,R_e^{\,2}}{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}} \\ B = \dfrac{(p_i - p_e)\,R_i^{\,2}\,R_e^{\,2}}{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}} \\ C = \sigma \end{cases}$$

La constante δ n'est pas fixée, mais en fait quelque soit sa valeur, les expressions des tenseurs des contraintes et des déformations sont les mêmes. En fait cette constante traduit un déplacement de solide indéformable le long de l'axe du tube.

Pour terminer l'étude, il ne reste qu'à vérifier que l'état de contrainte obtenu en tout point soit en accord avec la limite élastique du matériau, ce qui peut être fait en employant par exemple le critère de Von Misès :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \le 2\,\sigma_e^{\,2}$$

$$3\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 + (A - C)^2 \le \sigma_e^{\,2}$$

Le cas le plus défavorable étant obtenu au rayon intérieur, on a :

$$3\left(\frac{(p_i - p_e)^2\,R_e^{\,4}}{\left(R_e^{\,2} - R_i^{\,2}\right)^2}\right) + \left(\frac{p_i\,R_i^{\,2} - p_e\,R_e^{\,2}}{\left(R_e^{\,2} - R_i^{\,2}\right)} - \sigma\right)^2 \le \sigma_e^{\,2}$$

Elasticité bidimensionnelle

Parmi l'ensemble des hypothèses simplificatrices que l'on peut être amené à faire, l'hypothèse d'état plan apporte rapidement une étude avec beaucoup moins de variables. Nous avons alors une méthodologie particulière qui est développée et qui permet dans de nombreux cas d'aboutir à une solution. Toutefois il ne faut pas perdre de vue que l'hypothèse d'état plan, qui est très forte, n'est que rarement vérifiée dans son intégralité. De ce fait les résultats obtenus ne sont, comme souvent dans le cas de résultats analytiques sur un problème concret, qu'une estimation de la solution.

En pratique il semble qu'il y ait deux cas d'élasticité plan, soit l'état plan de contraintes planes, soit l'état de déformations planes. Mais en fait, on constate que les méthodes de détermination des solutions sont identiques et qu'en jouant sur la dualité entre contrainte et déformation, il est tout à fait possible de déterminer une méthode générale.

Définition des états plans

Etat plan de déformations

Considérons un corps dont la forme est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe $(O;\vec{E}_3)$. Si le champ de déplacement est tel qu'il soit indépendant de la coordonnée axiale (x_3) du point et que sa composante axiale soit nulle $(u_3 = 0)$, alors on dit que l'on a affaire à un état plan de déformations.

Le tenseur déformation est donné par la forme suivante :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

On constate bien que les déformations sont données exclusivement dans le plan orthogonal à l'axe de cylindre et qu'il suffit de connaître les déformations dans une section droite pour les connaître en tous points du domaine étudié.

Par l'intermédiaire de la loi de comportement, il est possible de définir les composantes du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

La contrainte normale dans la direction $\vec{E}_3$ n'est pas nulle, mais elle est liée aux autres contraintes normales :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Le champ de contrainte est donc, comme les champs de déplacement et de déformation, indépendant de x_3. On ne pourra donc être dans un état de déformations planes que si l'ensemble du problème est invariant par toute translation parallèle à l'axe $(O;\vec{E}_3)$. Ceci impose en particulier que le corps soit de longueur infinie dans la direction $\vec{E}_3$, ce qui est bien entendu irréel. Toutefois, par approximation, les cylindres de grandes longueurs pourront, selon certaines conditions, être en état plan de déformations. Ces conditions porteront en particulier sur le chargement de ce domaine.

La force de volume par unité de volume est donnée par les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho\ f_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

On constate qu'il ne peut pas y avoir de chargement axial. D'autre part si l'on considère un point de la surface latérale cylindrique, le vecteur contrainte dans la direction de normale extérieure au domaine montre qu'il ne peut y avoir de chargement normal à cette surface. En effet, compte tenu du fait que le domaine est cylindrique, la direction de normale extérieure au domaine en un point de la surface latérale est orthogonale à l'axe du cylindre :

$$\vec{n}.\vec{E}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{T(M;\vec{n})}.\vec{E}_3 = 0$$

Etat plan de contraintes

Un domaine sera en état plan de contraintes si le champ de contrainte en tout point ne dépend que de deux coordonnées spatiales (x_1, x_2 par exemple) et les composantes du tenseur contrainte associées à la troisième coordonnée sont nulles $(\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$.

Le tenseur des contraintes est donc de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Par l'intermédiaire de la loi de comportement il est possible de définir les composantes du tenseur des déformations :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1,x_2) \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

Par analogie avec l'état plan de déformations, il est possible de déterminer la dilatation linéaire dans la direction axiale en fonction des deux autres dilatations linéaires :

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Les équations d'équilibres prennent la même forme que pour l'état plan de déformations et pas conséquent la force de volume par unité de volume doit être orthogonale à la direction $\vec{E}_3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho\ f_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

D'autre part on constate que le chargement sur une face orthogonale à la direction $\vec{E}_3$ doit être nul, ce qui nous permet de dire que l'état plan de contraintes ne sera obtenu que dans le cas d'un cylindre chargé uniquement sur la surface latérale. Pratiquement c'est le cas des domaines de faible épaisseur chargée dans leur plan.

De plus on constate que les problèmes de déformations planes et de contraintes planes sont de même nature et que les équations qui les régissent sont analogues. En particulier, pour la loi de comportement on a dans le cas de l'état plan de contraintes planes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11} - \nu\,\sigma_{22}}{E} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22} - \nu\,\sigma_{11}}{E} \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{(1+\nu)\sigma_{12}}{E} \end{cases}$$

Dans le cas de l'état plan de déformations, les équations sont similaires à condition d'utiliser de nouvelles valeurs pour le module d'Young, le coefficient de Poisson et le premier coefficient de Lamé:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad \lambda' = \frac{2\,\lambda\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}$$

Les équations de compatibilité conduisent essentiellement à une condition qui est dans le cas de l'état plan de contraintes :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1+\nu)\ div\left(\rho\ \vec{f}\right) = 0$$

Dans le cas de l'état plan de déformations il suffit de remplacer le coefficient de Poisson par sa nouvelle valeur ν'.

Il est à noter toutefois que pour un état plan de contraintes, les équations de compatibilité conduisent aussi à la relation suivante :

$$\varepsilon_{33} = \alpha + \beta\ x_1 + \gamma\ x_2$$

Cette condition n'étant que rarement satisfaite, nous nous trouverons souvent dans le cas d'état approximativement plan de contraintes.

Comme on peut le constater, il n'existe, au niveau des équations, que très peu de différences entre un état plan de déformations et un état plan de contraintes. Pour passer d'une solution à une autre il suffit de transformer les équations en utilisant les coefficients fictifs :

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad \lambda' = \frac{2\,\lambda\,\mu}{\lambda + 2\,\mu}$$

Ainsi une solution obtenue dans le cas d'un état plan de contraintes sera tout à fait adaptable à un état plan de déformations. En conséquence, par la suite nous allons simplement chercher à définir des solutions dites de l'état plan, sans trop préciser si l'on considère un état plan de contraintes ou un état plan de déformations.

Fonction d'Airy

Dans de nombreuses applications la force de volume dérive d'un potentiel $w(x_1, x_2)$ et on a la relation :

$$\overrightarrow{f(M)} = -\overrightarrow{grad\ w}$$

Dans le cas de la statique, les équations d'équilibre deviennent alors :

$$\overrightarrow{\overline{\overline{div}}\ \sigma} + \rho\ \overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{\overline{\overline{div}}\ \sigma} - \rho\ \overrightarrow{grad\ w} = \vec{0}$$

Pour un matériau à masse volumique constante (incompressible) on obtient :

$$\overrightarrow{\overline{\overline{div}}\ \sigma} - \overrightarrow{grad\ (\rho\, w)} = \vec{0}$$

De plus nous avons la relation pour une fonction scalaire *f*:

$$\overrightarrow{grad\ f} = \overrightarrow{div\left(f\ \overline{\overline{I}}\right)}$$

Ce qui nous donne pour les équations d'équilibre :

$$\overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}} - (\rho\, w)\overline{\overline{I}}\right)} = \vec{0}$$

Cette équation est automatiquement satisfaite si l'on pose :

$$\overline{\overline{\sigma}} - (\rho\, w)\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{rot}}\left({}^{T}\overline{\overline{rot}}\ \overline{\overline{\Phi}}\right)$$

Le tenseur $\overline{\overline{\Phi}}$ nouvellement défini doit être symétrique. Il est appelé **tenseur de fonctions de contrainte**. Il est donc caractérisé par six composantes indépendantes.

Toutefois dans le cas de l'élasticité plane, comme nous n'avons que deux équations équilibre significatives, on constate que l'équilibre peut être obtenu en posant :

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi \end{pmatrix}\left(\overrightarrow{E_i}\right) \qquad \text{avec } \varphi = \varphi(x_1, x_2) \quad \textbf{fonction d'AIRY}$$

Ainsi dans le cas des coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\, x_2{}^2} + \rho w \\ \sigma_{22} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\, x_1{}^2} + \rho w \\ \sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} \end{cases}$$

Il est alors aisé de constater que les équations d'équilibre sont satisfaites.

L'équation de compatibilité nous apporte une condition supplémentaire sur la fonction d'Airy :

$$\Delta\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+\left(1+\nu\right) div\left(\rho\ \vec{f}\right)=0 \qquad \Delta\left(\Delta\varphi\right)+\left(1-\nu\right)\Delta\ \rho w=0$$

En particulier, dans le cas d'un champ de force de volume à divergence nulle, on a :

$$\Delta\left(\Delta\varphi\right)=0$$

Les fonctions d'Airy satisfaisant à cette condition sont dites **biharmoniques**.

Exemple d'application : flexion simple d'une poutre rectangulaire

On considère une poutre droite d'axe $\left(O;\vec{E}_1\right)$, de section rectangulaire (hauteur 2*h*, épaisseur 2*b*). Cette poutre est encastrée dans un massif à l'abscisse $x_1=0$. L'extrémité libre est la seule supportant un chargement. D'autre part on suppose que les forces de volume sont nulles. On suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Nous adoptons la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi=\frac{P}{I}\left(\frac{h^2}{2}x_1\,x_2+\frac{l}{6}{x_2}^3-\frac{x_1\,{x_2}^3}{6}\right) \qquad \text{avec} \quad I=\frac{\left(2\,b\right)\left(2\,h\right)^3}{12}=\frac{4}{3}b\,h^3$$

On constate aisément que la fonction ainsi définie est biharmonique. On peut alors déterminer l'état de contrainte obtenu :

$$\begin{cases}\sigma_{11}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2}=\dfrac{P}{I}\left(l-x_1\right)x_2\\ \sigma_{22}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2}=0\\ \sigma_{12}=-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}=-\dfrac{P}{2\,I}\left(h^2-{x_2}^2\right)\end{cases}$$

Cet état de contrainte est parfaitement compatible avec la condition de non chargement des faces supérieure $\left(x_2=h\right)$ et inférieure $\left(x_2=-h\right)$ de la poutre.

Pour la section extrémité $\left(x_1=l\right)$, on obtient un torseur équivalent avec un moment nul au centre de surface et une résultante n'ayant qu'une composante :

$$\int_S \overrightarrow{T\left(M;\vec{E}_1\right)}ds=-P\,\vec{E}_2$$

On peut donc considérer que la poutre est sollicitée en flexion simple. Il est a noter que l'état de contrainte ainsi obtenu est parfaitement en accord avec la théorie élémentaire des poutres.

Il reste à vérifier les conditions aux limites sur les déplacements et en particulier la condition d'encastrement de la section $x_1 = 0$.

Il convient donc de calculer la forme générale du champ de déplacement. Toutefois, dans le cas d'élasticité plane, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode générale avec la détermination du tenseur antisymétrique. L'intégration peut se faire directement à partir des relations déplacements-déformations.

Dans notre exemple nous avons le tenseur déformation suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{P}{E\,I}(l - x_1)\,x_2 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu\,P}{E\,I}(l - x_1)\,x_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12} = -\dfrac{(1+\nu)P}{2\,E\,I}\left(h^2 - {x_2}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

Les deux premières équations nous permettent d'écrire :

$$u_1 = \frac{P\,x_2}{E\,I}\left(l\,x_1 - \frac{{x_1}^2}{2}\right) + f(x_2) \qquad\qquad u_2 = -\frac{\nu\,P}{E\,I}(l - x_1)\frac{{x_2}^2}{2} + g(x_1)$$

A partir de la troisième équation, on obtient :

$$\begin{cases} f(x_2) = -K\,x_2 + \dfrac{P}{2\,E\,I}\left[(2+\nu)\dfrac{{x_2}^3}{3} - 2(1+\nu)h^2\,x_2\right] + K_2 \\ g(x_1) = K\,x_1 - \dfrac{P}{2\,E\,I}\left(l\,{x_1}^2 - \dfrac{{x_1}^3}{3}\right) + K_1 \end{cases}$$

Le champ de déplacement n'étant déterminé que par trois constantes, il est pratiquement impossible de respecter la condition d'encastrement pour tous les points de la section droite définie par $x_1 = 0$. Pour définir les constantes, on se contentera de donner leur valeur afin de respecter le non déplacement de certains points de la section origine. On peut écrire par exemple :

$$\begin{cases} u_1(0,0) = 0 \\ u_2(0,0) = 0 \\ u\left(0, \pm\dfrac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 0 \\ K_1 = 0 \\ K = -\dfrac{P\,h^2(4+5\nu)}{6\,E\,I} \end{cases}$$

On peut alors en déduire la déformée de la ligne moyenne $(x_2 = x_3 = 0)$:

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P\,h^2}{6\,E\,I}(4+5\nu)\,x_1 - \frac{P}{2\,E\,I}\left(l\,{x_1}^2 - \frac{{x_1}^3}{3}\right)$$

Ainsi la flèche à l'extrémité libre est :

$$u_2(l, 0) = -\frac{P\,h^2}{6\,E\,I}\,l\,(4+5\nu) - \frac{P\,l^3}{3\,E\,I}$$

Dans cette expression, le second terme correspond parfaitement à la valeur de la flèche donnée par la théorie élémentaire des poutres. Le premier terme apparaît donc comme un terme correctif vis à vis de cette théorie.

Elasticité plane en coordonnées polaires

Dans le cas d'une base curviligne, il suffit d'appliquer les relations intrinsèques. Par la connaissance des opérateurs différentiels dans la base, il est alors possible de donner les relations sous forme développée. Ainsi pour la base cylindro-polaire, on a toujours:

$$\overline{\overline{\sigma}} - (\rho\, w)\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{rot}}\left({}^{T}\overline{\overline{rot}}\ \overline{\overline{\Phi}} \right) \qquad \text{avec} \qquad \overline{\overline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(r,\theta) \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{E_i}\right)}$$

Ce qui nous permet de calculer les composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \rho\, w \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \rho\, w \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \theta} \end{cases}$$

La condition de compatibilité reste inchangée :

$$\Delta(\Delta\,\varphi) + (1-\nu)\,\Delta\,\rho w = 0$$

Avec dans le cas d'une fonction *F* dépendant des deux variables *r* et θ :

$$\Delta F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Il existe un cas particulier important associé au cas d'un solide de révolution par rapport à l'axe $(O;\vec{E}_z)$ et soumis à des charges purement radiales, distribuées symétriquement par rapport à l'axe du solide (solide et chargement axisymétriques). Les fonctions ne dépendent alors plus de la variable angulaire θ .

Les relations deviennent alors :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\,\varphi}{dr} + \rho w \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \rho w \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Delta F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

Ce qui nous donne pour l'équation de compatibilité :

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\,\varphi}{dr}\right)\right\}\right] = (\nu-1)\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\,\rho w}{dr}\right)$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$\varphi = A\,\mathbf{ln}\,r + B\,r^2\,\mathbf{ln}\,r + C\,r^2 + D$$

La solution de l'équation avec second membre sera alors obtenue en ajoutant une solution particulière dépendant de la force de volume.

Application en coordonnées polaires

On se propose d'étudier une plaque de largeur 2*b*, de faible épaisseur, tendue entre deux extrémités et possédant un trou médiant de rayon *a*. Les forces de volume sont négligeables. On fait l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

D'autre part on considère que le rayon du trou *a* est petit devant la demi largeur de la plaque *b*. On peut donc raisonnablement penser qu'en tout point d'un cercle de rayon *R* grand devant *a* l'état de contrainte n'est pas perturbé par la présence du trou. Ainsi en découpant virtuellement un cylindre de rayon *R*, on peut écrire que sur la surface extérieure l'état de contrainte est uniaxial, alors que le chargement est nul sur la surface intérieure de rayon *a*.

$$r = R \qquad \overline{\overline{\sigma(m)}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{T(M;\vec{E}_r)} = \sigma \cos\theta \ \vec{E}_1$$

$$r = a \qquad \overrightarrow{T(M;-\vec{E}_r)} = \vec{0}$$

Le chargement sur la surface cylindrique extérieure peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{T(M;\vec{E}_r)} = \left[\frac{\sigma}{2}\vec{E}_r\right] + \left[\frac{\sigma}{2}\left(\cos(2\theta)\vec{E}_r - \sin(2\theta)\vec{E}_\theta\right)\right]$$

Le premier cas de charge est radial et indépendant de l'angle polaire. Il correspond parfaitement au cas particulier précédemment traité. Comme la force de volume est nulle, la solution générale est de la forme :

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$$

La détermination des contraintes se fait par la vérification des conditions aux limites. On obtient alors :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{\sigma}{2}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\sigma}{2}\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Pour le deuxième cas de charge, on recherche une solution en adoptant une fonction d'Airy de la forme:

$$\varphi(r,\theta) = \psi(r)\cos(2\theta)$$

L'équation de compatibilité nous donne alors :

$$\frac{d^4\psi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\frac{d\psi}{dr} = 0$$

La solution générale est :

$$\psi(r) = A r^4 + B r^2 + C + \frac{D}{r^2}$$

Ce qui nous donne l'état de contrainte suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\left(2B + \dfrac{4C}{r^2} + \dfrac{6D}{r^4}\right)\mathbf{cos}\,(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = \left(12\,Ar^2 + 2B + \dfrac{6D}{r^4}\right)\mathbf{cos}\,(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \left(6\,Ar^2 + 2B - \dfrac{2C}{r^2} - \dfrac{6D}{r^4}\right)\mathbf{sin}\,(2\theta) \end{cases}$$

En retenant l'hypothèse que le rayon de la surface cylindrique extérieure est grand devant celui de la surface cylindrique intérieure $(R >> a)$, et en utilisant les conditions aux limites, on peut définir les valeurs des constantes :

$$A = 0 \qquad B = -\frac{\sigma}{4} \qquad C = a^2\frac{\sigma}{2} \qquad D = -a^4\frac{\sigma}{4}$$

On a ainsi la solution au deuxième cas de charge. Il suffit ensuite d'utiliser la superposition des cas de charges pour obtenir la solution du problème initial :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{\sigma}{2}\left(1 - \dfrac{4a^2}{r^2} + \dfrac{3a^4}{r^4}\right)\mathbf{cos}\,(2\theta) + \dfrac{\sigma}{2}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = -\dfrac{\sigma}{2}\left(1 + \dfrac{3a^4}{r^4}\right)\mathbf{cos}\,(2\theta) + \dfrac{\sigma}{2}\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\sigma}{2}\left(1 + \dfrac{2a^2}{r^2} - \dfrac{3a^4}{r^4}\right)\mathbf{sin}\,(2\theta) \end{cases}$$

A partir de ces résultats il est possible d'étudier la loi de répartition des contraintes normales dans la poutre au niveau de la section trouée.

On obtient :

$$\sigma_{\theta\theta}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4}\right)$$

Avec cette fonction, on constate que la contrainte normale est maximale au bord du trou et quelle est alors égale à trois fois la contrainte nominale. Cette étude fait clairement apparaître le phénomène de concentration de contrainte dû à la présence d'un trou.

Quelques formules

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\, dv = \int_D \frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}(t)\, \vec{v}\, \vec{n}\, ds$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\ \vec{U} + (\mathbf{Grad}\ \vec{U})^T\right] = \mathbf{E} = \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}\right) dx_k$$

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\, dv = \int_D \mathbf{a}_v\, dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}_s\, ds$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n}$$

$$\mathbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)} + \left(\mathbf{grad}\ \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)}\right)^T - \mathbf{grad}\left(\overrightarrow{grad\ \left[tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right]}\right) - \Delta\, \overline{\overline{\varepsilon}} = 0$$

$$\rho \vec{\gamma}(M, t/R_g) = \vec{div}\ \overline{\overline{\sigma}} + \rho\, \vec{f}(M, t)$$

$$\int_{\partial D} \mathbf{A}\, \vec{n}\, ds = \int_D div\, \mathbf{A}\, dv$$

$$du_i = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) dx_j$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -\int_{\partial D} \vec{q}\,.\,\vec{n}\, ds + \int_D r\, dv$$

$$\begin{cases} \int_D \vec{\gamma}(M, t/R_g) dm = \int_D \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) dS \\ \int_D \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M, t/R_g) dm = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t) dm + \int_{\partial D} \vec{OM} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) dS \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{S} = tr(\mathbf{T})\, \mathbf{I}/3 = T_{ii}\, \mathbf{I}/3$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$$

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}).\vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$$

$$\left(\overline{\overline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}}\right) : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - \rho\left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt} - \frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{grad}\ (T) \geq 0$$

$$div\left(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{V}\right) = \overrightarrow{div\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)}.\vec{V} + \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{grad\ (\vec{V})}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \int_{\partial D} \left(\overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n}\right)\vec{V}\, ds + \int_D \rho\, \vec{f}.\vec{V}\, dv - \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dv$$

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \frac{d\,K}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{grad\ (T)}\right) = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + k \Delta T$$

$$\left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II} - \sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III} - \sigma_I\right)^2 \leq 2\sigma_e^2$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}}\right) + \left[\alpha\left(T - T^0\right) - \frac{\nu}{E} trace\left(\overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma^0}}\right)\right]\overline{\overline{I}}$$

$$\frac{\partial\left[\rho\left(\gamma_i - f_i\right)\right]}{\partial x_j} + \frac{\partial\left[\rho\left(\gamma_j - f_j\right)\right]}{\partial x_i} - \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right]\delta_{ij} = 0$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\, \overline{\overline{\varepsilon}} + \left(\lambda\, tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right)\overline{\overline{I}}$$

$$\rho \frac{d\,e}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{D}}} + r - div\left(\vec{q}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_D \frac{r}{T} dv - \int_{\partial D} \frac{\vec{q}}{T}.\vec{n}\, ds$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma^0}} + \overline{\overline{A}} \otimes \overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\beta}}\left(T - T^0\right)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \qquad \alpha = \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu}$$

$$dW_{def} = -P_{int}\, dt = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \left(\overline{\overline{\mathbf{D}}}\, dt\right) dv = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{d\varepsilon}}\, dv = \int_D \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dv$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) - \left[\frac{\nu}{E} tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right]\overline{\overline{I}}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \theta\, \delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\, \delta_{ij}$$

$$\mu\, \overrightarrow{\Delta(\vec{u})} + (\mu + \lambda)\overrightarrow{grad\ (div(\vec{u}))} + \rho\left(\vec{f} - \vec{\gamma}\right) = \vec{0}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1\, \delta_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{kk}\, \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial x_J} + \frac{\partial u_J}{\partial x_I}\right)$$

Elasticité linéaire en coordonnées polaires

Relations Déplacement-Déformation

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{\theta z} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right] \\ \varepsilon_{zr} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right] \end{cases}$$

Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho(f_r - \gamma_r) = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(f_\theta - \gamma_\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(f_z - \gamma_z) = 0 \end{cases}$$

Equations de Beltrami

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial r} + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{rr} - \dfrac{2}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} = 0 \\ \dfrac{2}{r}\left(\dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial \theta} + \rho(f_r - \gamma_r)\right) + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{\theta\theta} + \dfrac{2}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial I_1}{\partial r}\right) = 0 \\ 2\dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial z} + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{zzr} + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial \theta} - \rho(f_\theta - \gamma_\theta)\right) + \Delta\sigma_{r\theta} + \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\sigma_{r\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial I_1}{\partial \theta}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial r} + \dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial z} + \Delta\sigma_{rz} - \dfrac{1}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial r\,\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial \theta} + \Delta\sigma_{\theta z} + \dfrac{1}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial \theta\,\partial z} = 0 \end{cases}$$

avec : $div\ \vec{f} = \dfrac{\partial f_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r\right) + \dfrac{\partial f_z}{\partial z}$ $\qquad \Delta A = \dfrac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$

$si\ \ g = g(r)$ $\qquad \dfrac{d^2 g}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d g}{dr} - \dfrac{1}{r^2} g = \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\, g)\right]$