



# Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie

Jérôme Bastien

## ► To cite this version:

Jérôme Bastien. Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie. Engineering school. Université de technologie de Belfort Montbéliard (UTBM), 2007, pp.188. cel-00555485

**HAL Id: cel-00555485**

**<https://cel.hal.science/cel-00555485>**

Submitted on 13 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**NOTES DE COURS DE L'UV MT25**

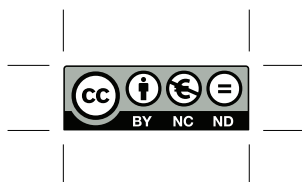
**APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE ET DE L'ANALYSE  
À LA GÉOMÉTRIE**

**Printemps 2007**

**Jérôme BASTIEN**

Document compilé le 12 janvier 2011

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons :  
Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

# Table des matières

Avant-propos	v
Chapitre 1. Courbes paramétrées	1
1.1. Introduction	1
1.2. Définitions et notations	1
1.3. Étude locale d'une courbe	2
1.4. Diverses propriétés	12
1.5. Plan général d'étude	18
1.6. Deux exemples complets	19
1.7. Une remarque sur la structure euclidienne utilisée	19
1.8. Applications	19
Chapitre 2. Courbes paramétrées en coordonnées polaires	21
2.1. Introduction	21
2.2. Coordonnées et repère polaires	21
2.3. Définitions et notations	23
2.4. Étude locale d'une courbe en polaire	23
2.5. Diverses propriétés	27
2.6. Plan général d'étude	32
2.7. Un exemple complet	32
Chapitre 3. Propriétés métriques des courbes paramétrées	33
3.1. Introduction	33
3.2. Arc rectifiable, longueur, abscisses curvilignes	33
3.3. Vecteur normé tangent $\vec{T}$	37
3.4. Simplifications de notations	37
3.5. Repère de Frenet, courbure, Rayon de courbure	38
3.6. Un peu de cinématique du point	48
3.7. Enveloppes d'une famille de droites, développée d'une courbe	50
3.8. Applications	55
Chapitre 4. Fonctions de plusieurs variables	59
4.1. Applications différentiables et différentielles	59
4.2. Applications plusieurs fois différentiables et différentielles d'ordres supérieurs	64
4.3. Formules de Taylor-Young	66
4.4. Quelques applications des différentielles	67
4.5. Applications	74

Chapitre 5. Intégrales multiples (théorie)	77
5.1. Introduction	77
5.2. Compacts mesurables	77
5.3. Intégrale d'une fonction sur un compact mesurable de $\mathbb{R}^n$	78
5.4. Propriétés sur les intégrales multiples	79
5.5. Changement de variables	80
Chapitre 6. Calcul pratique d'intégrales multiples (simples, doubles et triples)	83
6.1. Introduction	83
6.2. Intégrales simple	83
6.3. Intégrale double	84
6.4. Intégrale triple	89
6.5. Applications à la résistance des matériaux	93
Chapitre 7. Produit scalaire, espace préhilbertien réel et espace euclidien	99
7.1. Produit scalaire et espace préhilbertien réel	99
7.2. Orthogonalité	102
7.3. Cas de la dimension finie : espace euclidien	110
7.4. Applications	112
Chapitre 8. Endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace Euclidien	115
Chapitre 9. Coniques et quadriques	117
Bibliographie	119
Annexe A. La règle de l'Hospital	121
Annexe B. Étude d'une cycloïde (sous forme d'exercice corrigé)	123
Énoncé	123
Corrigé	124
Annexe C. Un exemple de courbe dense dans une partie de $\mathbb{R}^2$	131
Annexe D. Démonstration de l'inégalité (3.14)	133
Annexe E. Indépendance de la longueur de l'arc $L(\Gamma)$ par rapport à $F$ et $I$	135
E.1. Étude d'un exemple	135
E.2. Arc et courbe simple	136
E.3. Arc et courbes non simples	138
E.4. Longueurs discrètes	138
E.5. Coordonnées polaires	138
Annexe F. Définition du vecteur normé tangent $\vec{T}$ aux points stationnaires	139
Annexe G. Pourquoi le cercle de courbure s'appelle-t-il ainsi ?	141
Annexe H. Calcul informatique du rayon et du centre de courbure en un point birrégulier	145
Annexe I. Étude d'une clothoïde (sous forme d'exercice corrigé)	147

Énoncé	147
Corrigé	150
Annexe J. Rappels sur les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques dans l'espace	159
J.1. Coordonnées polaires	159
J.2. Coordonnées cylindriques	159
J.3. Coordonnées sphériques	160
Annexe K. Un exemple de calcul de volume (sous forme d'exercice corrigé)	163
Énoncé	163
Corrigé	165
Annexe L. Espaces vectoriels normés	169
L.1. Définitions	169
L.2. Continuité et boules	169
L.3. En dimension finie	170
Annexe M. Deux caractérisations du produit scalaire	171
Annexe N. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	175
Annexe O. Réduction informatique de coniques et de quadriques	177
O.1. Étude dans le cas où $A$ est inversible	177
O.2. Étude dans le cas où $A$ n'est pas inversible	178



## Avant-propos

Ces notes de cours constituent un support de cours pour l'UV MT25 (Printemps 2007).

Je remercie Claude Petitjean dont les notes de cours m'ont été précieuses ainsi que Jean-Louis Seichepine qui a soigneusement relu ces notes !

Ce polycopié de cours est disponible en ligne sur le site <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>. On y trouvera aussi les sujets de TD , des archives de sujets et de corrigés d'examens, ainsi que des softs matlab qui permettront d'illustrer certains points du cours ou du TD.

On trouvera en début de la plupart des chapitres des références bibliographiques (voir page 119). Enseignant au département Génie Mécanique et Conception, je tâcherai d'évoquer aussi diverses applications des différentes notions de mathématiques de cette UV à la mécanique. Bien entendu, d'autres domaines sont largement concernés par les maths de cette UV !

Ce polycopié de cours est disponible en ligne sur le site <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>. On y trouvera aussi les sujets de TD , des archives de sujets et de corrigés d'examens, ainsi que des softs matlab qui permettront d'illustrer certains points du cours ou du TD.

Jérôme BASTIEN





## CHAPITRE 1

### Courbes paramétrées

On pourra consulter [GAJ94] (dont ce chapitre est fortement inspiré). D'autres ouvrages, plus difficiles, peuvent être intéressants dont [LFA01].

#### 1.1. Introduction

Dans tout ce chapitre, nous nous placerons, sauf indication contraire, dans le plan, muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ .

Nous distinguerons les deux notions suivantes : l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points du plan, espace affine et l'ensemble  $E$  ensemble des vecteurs du plan vectoriel, espace vectoriel. L'espace  $E$  est muni d'un produit scalaire (voir chapitre 7) et est dit euclidien. Ainsi,  $O$  est un élément de  $\mathcal{E}$  et  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base de  $E$ .

Moyennant le choix du repère  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ , on peut identifier  $\mathcal{E}$  et  $E$  : le point  $M = 0 + x\vec{i} + y\vec{j}$  est identifié au vecteur  $x\vec{i} + y\vec{j}$ . Nous les noterons tous les deux  $(x, y)$ .  $\diamond$

Les courbes du plan peuvent être décrites de nombreuses façons. Une d'entre elles consiste à associer, si c'est possible, à une courbe  $\mathcal{C}$ , une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ; la courbe est donc l'ensemble de points de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $y = f(x)$  avec  $x$  dans le domaine de définition de  $f$ . Naturellement, ce type de description ne permet pas d'obtenir toutes les courbes du plan. Une autre façon consiste à imaginer un point matériel se déplaçant, ses coordonnées étant définies pour tout instant  $t$ . Mathématiquement, ce chapitre peut être traité de façon fort complexe (et intéressante), ce qui est le cas de [LFA01]. Mais, de façon usuelle, moyennant quelques abus de notations, nous irons rapidement aux notions importantes de ce chapitre.

#### 1.2. Définitions et notations

DÉFINITION 1.1. On appelle courbe paramétrées de  $\mathcal{E}$  un triplet  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  où

- $\Gamma$  est une partie de  $\mathcal{E}$  (appelé le support de la courbe) ;
- $I$  est un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  ;
- $F$  est une fonction de  $I$  dans  $\mathcal{E}$ .

Voir la figure 1.1 page suivante. À chaque point  $M$  de la courbe est donc associé un réel  $t$  de  $I$  (non nécessairement unique) tel que  $M = F(t)$ . Nous noterons de façon abusive  $M(t)$ .

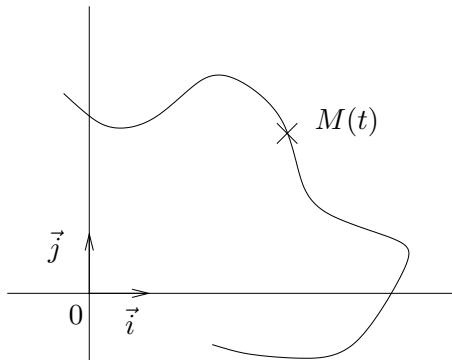
Le couple  $(I, F)$  est appelé un paramétrage de la courbe. Il n'est pas unique. Nous confondrons souvent la courbe  $\mathcal{C}$  et le support  $\Gamma$ .

Dans tout ce chapitre, nous poserons

$$\forall t \in I, \quad F(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \quad (1.1)$$

Nous assimilerons ainsi  $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  au couple de coordonnées  $(x(t), y(t))$ .

La courbe est dite de classe  $C^k$  si la fonction  $F$  est de classe  $C^k$ , c'est-à-dire  $k$  fois dérivable et dont la dérivée  $k$ -ième est continue. Cela revient à dire que chacune des deux composantes  $x$  et  $y$  sont

FIG. 1.1. Une courbe  $\mathcal{C}$  du plan.

elle-même de classe  $C^k$ . Pour  $k = 0$ , on étend cette définition en posant pour  $k = 0$  et, pour toute fonction  $f$ ,  $f^0 = f$ .

Par définition, on a

$$F'(t) = (x'(t), y'(t)),$$

et, de façon plus générale,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^{(k)}(t) = \left( x^{(k)}(t), y^{(k)}(t) \right). \quad (1.2)$$

EXEMPLE 1.2. Le cercle de centre l'origine et de rayon 1 est associé à la courbe définie par

- $\Gamma$  est le cercle de  $\mathcal{E}$  de centre l'origine et de rayon 1 ;
- $I = [0, 2\pi[$  ;
- $F(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ .

Imaginez d'autres paramétrages.

EXEMPLE 1.3. Une droite passant par  $A = (x_A, y_A)$  et de vecteur directeur  $u = (x_u, y_u)$  peut être paramétrée par  $F(\lambda) = (\lambda u_x + x_A, \lambda u_y + y_A)$ .

DÉFINITION 1.4. Nous dirons qu'un point  $M(t)$  de la courbe est stationnaire si  $F'(t) = 0$  et régulier si  $F'(t) \neq 0$ .

### 1.3. Étude locale d'une courbe

#### 1.3.1. Rappels sur les dérivées

Une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est localement approchée par une droite grâce à la notion de dérivée. On rappelle les deux formules suivantes

THÉORÈME 1.5 (Formule de Taylor-Young). Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie au moins sur un voisinage de  $a$ . Si  $f$  admet une dérivée  $n$ -ième en  $a$ , alors au voisinage de  $a$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n). \quad (1.3)$$

THÉORÈME 1.6 (Formule de Taylor-Lagrange). Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$  et admet une dérivée d'ordre  $n+1$  en tout point de  $]a, b[$ ,

alors il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \quad (1.4)$$

La première formule est dite locale, la seconde globale. La seconde ne se généralise pas aux fonctions vectorielles (à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ ), tandis que la première se généralise de la façon suivante :

**THÉORÈME 1.7** (Formule de Taylor-Young pour des fonctions vectorielles). *Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , définie au moins sur un voisinage de  $a$ . Si  $F$  admet une dérivée  $n$ -ième en  $a$ , alors au voisinage de  $a$ ,*

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n). \quad (1.5)$$

Dans l'équation, (1.5), chacun des  $F^{(k)}(a)$  est défini par (1.2).

Naturellement, si  $F$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^p$ , cette propriété demeure vraie.

### 1.3.2. Vecteur tangent à une courbe

Soient une courbe  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  et  $t_0$  dans  $I$ .

Supposons que  $F$  est de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$  et qu'il existe un entier  $n \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $F^{(n)}(t_0) \neq 0$ . Notons  $p$  le plus petit de ces entiers  $n$ .

L'entier  $p$  peut ne pas exister ! Méditer l'exemple suivant : soit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Montrer que  $f$  est  $C^\infty$  et que toutes ses dérivées sont nulles en zéro.  $\diamond$

**PROPOSITION 1.8.** *La tangente à la courbe au point  $M(t_0)$  est dirigée par le vecteur  $F^{(p)}(t_0)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par définition de  $p$ , on obtient, grâce à la formule de Taylor-Young (1.5), pour  $h$  assez petit (de telle sorte que  $t_0 + h$  appartiennent à  $I$ )

$$F(t_0 + h) = \sum_{l=0}^p \frac{F^{(l)}(t_0)}{l!} h^l + o(h^p) = F(t_0) + 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{F^{(p)}(t_0)}{p!} h^p + o(h^p)$$

soit

$$\frac{1}{h} (F(t_0 + h) - F(t_0)) = \frac{F^{(p)}(t_0)}{p!} h^{p-1} + h^{p-1} \varepsilon(h), \quad (1.7a)$$

avec

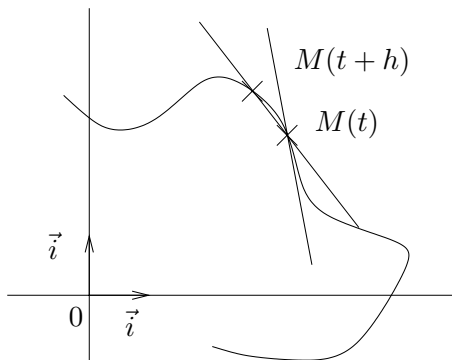
$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (1.7b)$$

La tangente est la limite quand  $h$  tend vers 0 de la droite passant par les points  $M(t_0 + h)$  et  $M_0(t)$  (voir figure 1.2). Le vecteur directeur de la droite  $(M(t_0)M(t_0 + h))$  est colinéaire à

$$\frac{1}{h^{p-1}} \frac{1}{h} (F(t_0 + h) - F(t_0)) = \frac{F^{(p)}(t_0)}{p!} + \varepsilon(h),$$

d'après (1.7a). D'après (1.7b), sa limite est  $F^{(p)}(t_0)/p!$ , vecteur non nul.  $\square$

Précisons maintenant la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.

FIG. 1.2. la tangente en  $M(t_0)$ .

### 1.3.3. Applications à la classification des points et position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Supposons maintenant de plus qu'il existe un entier  $n$ , avec  $p < n \leq k$ , tel que la famille  $(F^{(p)}(t_0), F^{(n)}(t_0))$  soit libre. Notons  $q$  le plus petit de ces entiers  $n$ .

DÉFINITION 1.9 (classification du point  $M(t_0)$ ). On note les quatre cas de figure suivants :

	$q$ pair	$q$ impair
$p$ impair	point ordinaire	point d'inflexion
$p$ pair	Rebroussement de seconde espèce	Rebroussement de première espèce

Notons

$$V_1(t_0) = F^{(p)}(t_0), \quad V_2(t_0) = F^{(q)}(t_0).$$

D'après ce qui précède, la tangente à la courbe en  $M(t_0)$  est portée par  $V_1(t_0)$ .

PROPOSITION 1.10. Les quatre cas de figure de la définition 1.9 correspondent aux quatre figures 1.3 page suivante avec

- Dans le cas d'un point ordinaire (a), la courbe reste localement du même côté que  $V_2(t_0)$ .
- Dans le cas d'un point d'inflexion (b), la courbe traverse localement la tangente  $V_1(t_0)$ .
- Dans le cas d'un point de rebroussement de seconde espèce, la courbe reste localement du même côté de  $V_1(t_0)$  et de  $V_2(t_0)$  («elle rebrousse chemin»).
- Dans le cas d'un point de rebroussement de première espèce, la courbe reste localement du même côté de  $V_1(t_0)$  et traverse localement sa tangente. («elle rebrousse chemin»).

Sur la figure 1.3, ont été indiqués par des flèches le sens des  $t$  croissant.

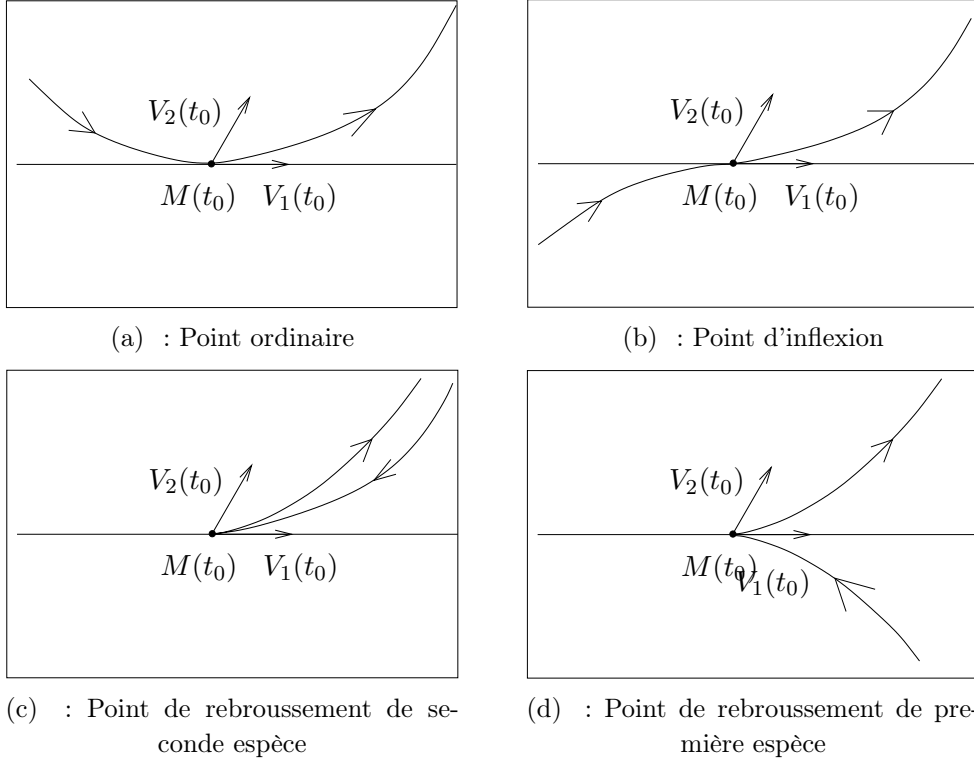


FIG. 1.3. les quatre cas de la définition 1.9.

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve de la proposition 1.8, on utilise la formule de Taylor-Young (1.5)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} &= F(t_0+h) - F(t_0), \\
 &= \sum_{l=1}^q \frac{F^{(l)}(t_0)}{l!} h^l + o(h^q), \\
 &= \frac{F^{(p)}(t_0)}{p!} h^p + \sum_{l=p+1}^{q-1} \frac{F^{(l)}(t_0)}{l!} h^l + \frac{F^{(q)}(t_0)}{q!} h^q + o(h^q).
 \end{aligned}$$

Par définition chacun des vecteurs  $F^{(l)}(t_0)$ , pour  $p+1 \leq l \leq q-1$ , est colinéaire à  $F^{(p)}(t_0)$ , et on peut donc écrire

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p \left( \frac{1}{p!} + \sum_{l=p+1}^{q-1} \frac{\alpha_l(t_0)}{l!} h^{l-p} \right) V_1(t_0) + h^q \frac{1}{q!} V_2(t_0) + h^q \varepsilon(h),$$

où  $\alpha_l(t_0)$  sont des réels. Ainsi, il existe une fonction  $\delta(t_0, h)$  tendant vers 0 quand  $h$  tend vers 0 telle que

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p \left( \frac{1}{p!} + \delta(t_0, h) \right) V_1(t_0) + \frac{h^q}{q!} V_2(t_0) + h^q \varepsilon(h). \quad (1.8)$$

Ainsi, il existe deux réels  $\beta(t_0)$  et  $\gamma(t_0)$  non nuls tels que

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p (\beta(t_0) + \delta(t_0, h)) V_1(t_0) + \gamma(t_0) h^q V_2(t_0) + h^q \varepsilon(h). \quad (1.9)$$

On sait que  $(V_1(t_0), V_2(t_0))$  est une base de  $E$ , sur lequel on peut projeter le vecteur  $\varepsilon(h)$ . On peut donc réécrire (1.9) sous la forme plus symétrique

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p(\beta(t_0) + \eta_1(t_0, h))V_1(t_0) + h^q(\gamma(t_0) + \eta_2(t_0, h))V_2(t_0), \quad (1.10)$$

où  $\eta_1(t_0, h)$  et  $\eta_2(t_0, h)$  sont deux fonctions tendant vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

La composante de  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  sur  $V_1(t_0)$  vaut  $h^p(\beta(t_0) + \eta_1(t_0, h))$  qui est du signe de  $h^p$  (ou de son opposé) au voisinage de  $h \rightarrow 0$ . Ainsi, si  $p$  est pair, elle reste du même signe, quelque soit le signe de  $h$ . Ainsi, la courbe reste localement du même côté de  $V_1(t_0)$ . Au contraire, si  $p$  est impair, cette quantité change de signe au voisinage de zéro et la courbe change de côté par rapport à  $V_1(t_0)$ .

De même, la composante de  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  sur  $V_2(t_0)$  vaut  $h^q(\gamma(t_0) + \eta_2(t_0, h))$  qui est du signe de  $h^q$  (ou de son opposé) au voisinage de  $h \rightarrow 0$ . Ainsi, si  $q$  est pair, elle reste du même signe, quelque soit le signe de  $h$  et la courbe reste localement du même côté de  $V_2(t_0)$ . Au contraire, si  $q$  est impair, cette quantité change de signe au voisinage de zéro et la courbe change de côté par rapport à  $V_2(t_0)$ .

En regroupant les quatre cas, on aboutit à la conclusion attendue.  $\square$

DÉFINITION 1.11. Si  $p = 1$  et  $q = 2$ , le point est dit birrégulier.

Un point birrégulier est donc un point ordinaire et régulier.

EXEMPLE 1.12. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers tels que  $1 \leq m < n$ . On pose

$$F(t) = (t^m, t^n), \quad t_0 = 0. \quad (1.11)$$

On vérifie que, pour tout couple d'entiers non nuls  $(r, s)$ , la dérivée  $s$ -ième de la fonction  $t \mapsto t^r$  vaut en zéro :

$$(t^r)^{(s)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq r, \\ s! & \text{si } s = r. \end{cases} \quad (1.12)$$

On en déduit donc

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad F^{(r)}() = \begin{cases} 0 & \text{si } r < m, \\ (m!, 0) & \text{si } r = m, \\ 0 & \text{si } m < r < n, \\ (0, n!) & \text{si } r = n, \\ 0 & \text{si } r > n. \end{cases} \quad (1.13)$$

On en déduit donc que  $p = m$ ,  $q = n$  et que, avec les notations précédentes,

$$V_1(0) = m! \vec{i}, \quad V_2(0) = n! \vec{j}. \quad (1.14)$$

On a donc, par exemple, les quatre situations suivantes :

- $m = 1$  et  $n = 2$ , point ordinaire (cas (a)) ;
- $m = 1$  et  $n = 3$ , point d'inflexion (cas (b)) ;
- $m = 2$  et  $n = 4$ , point de rebroussement de seconde espèce (cas (c)) ;
- $m = 2$  et  $n = 3$ , point de rebroussement de première espèce (cas (d)).

Voir la figure 1.4., où ont été indiqués, la courbe, ainsi que les directions des vecteurs  $V_1$  et  $V_2$ .

Grâce aux logiciels formels (maple, mathematica ou matlab symbolique), on peut désormais confier ces tâches lourdes à un soft. Voir l'exemple donné en matlab (sous forme de script) `exemple01`, qui appelle les deux fonctions `calculpq` et `trace_V1V2`, grâce auxquelles ont été tracées les figures 1.4, sans aucun calculs.

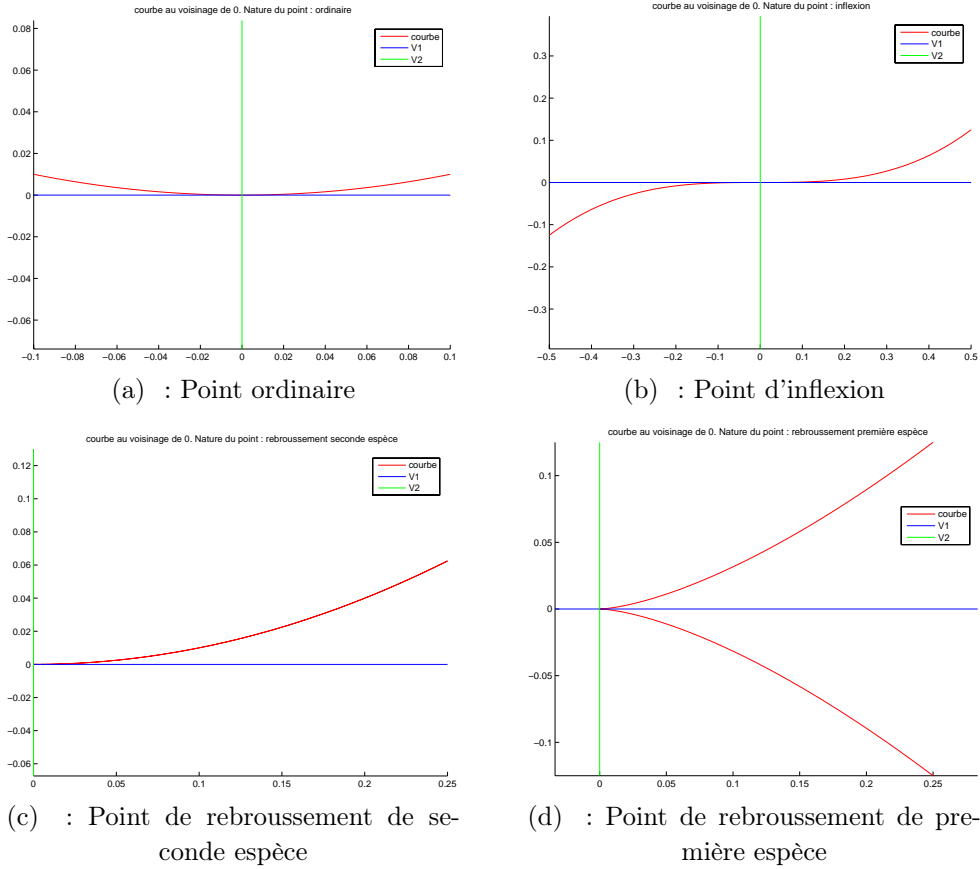


FIG. 1.4. les quatre cas de l'exemple 1.12.

REMARQUE 1.13. Grace à matlab, on peut tracer la courbe définie par

$$F(t) = (2 \sin(t) - \sin(2t), 2 \cos(t) - \cos(2t)),$$

en tapant par exemple

```
tmin=0;
tmax=2*pi;
h=0.001;
t=tmin:h:tmax;
x=2*sin(t)-sin(2*t);
y=2*cos(t)-cos(2*t);
plot(x,y);
```

Avec matlab, on pourra aussi utiliser la fonction sympathique `comet` en tapant par exemple :

```
t=0:0.01:2*pi;
x=2*sin(t)-sin(2*t);
y=2*cos(t)-cos(2*t);
comet(x,y);
```



On pourra voir la fonction matlab disponible sur le ouaib `trace_parametrique_gen.m`.

REMARQUE 1.14. Je prônerai souvent l'emploi des logiciel de calculs symboliques, numériques ou graphiques non pour encourager la paresse ; une fois que la technique de calcul est acquise sur des petits exemples, il est préférable d'user de son temps à comprendre les concepts acquis et de tester des exemples simples, plutôt que de faire de longs calculs fastidieux !

REMARQUE 1.15. Les quatre cas de la définition 1.9 ne sont pas exhaustifs : il se peut, par exemple, que la courbe traverse localement sa tangente un infinité de fois !

EXEMPLE 1.16. Si on pose  $t_0 = 0$  et

$$F(t) = (1, t), \quad (1.15)$$

montrer que l'entier  $q$  n'est pas défini ! Quelle est la tangente à la courbe en  $t_0$ . Montrer qu'on est, à la fois, dans le cas a) et le cas b) !

EXEMPLE 1.17. On pose

$$F(t) = (\cos t, (1 + \cos t)\sin(t)), \quad (1.16)$$

Montrer qu'en  $t_0 = \pi$ , le point est un point de rebroussement de première espèce et qu'en  $t_1 = \arccos((1 - \sqrt{3})/2)$  et  $t_2 = 2\pi - t_1$ , les points sont des points d'inflexion.

Voir la figure 1.5.

On pourra consulter le script `exemple02`.

EXEMPLE 1.18. On pose  $t_0 = 0$  et

$$F(t) = \left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t^3 - 1}{t^2 + 1} \right), \quad (1.17)$$

Montrer que le point étudié est un point de rebroussement de première espèce.

Voir la figure 1.6.

On pourra consulter le script `exemple03`.

Concluons par une proposition non démontrée (voir [GAJ94]) :

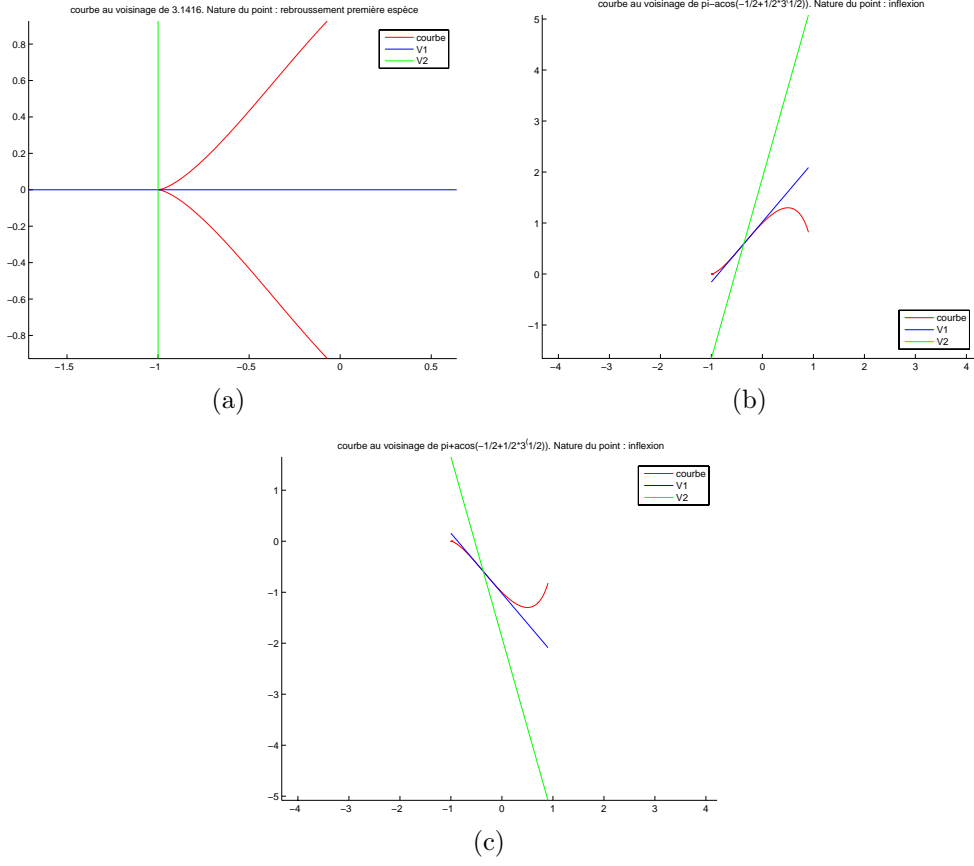
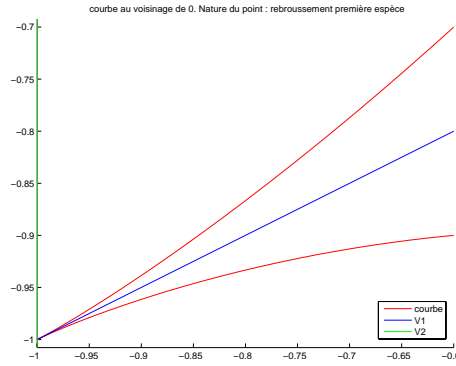
PROPOSITION 1.19. *On se place dans le cadre de la définition 1.9. On considère toutes les droites passant par le point  $M(t_0)$ . Parmi toutes ces droites, localement,*

- *la tangente est l'unique droite non traversée par la courbe en un point ordinaire ;*
- *elles traversent toutes la courbe, en un point d'inflexion ;*
- *la tangente est l'unique droite traversée par la courbe en un point de rebroussement de première espèce ;*
- *aucune droite ne traverse la courbe en un point de rebroussement de seconde espèce.*

#### 1.3.4. Utilisation de la fonction $m = y'/x'$

Supposons, pour l'instant, que  $x$  et  $y$  sont deux fonctions numériques continues sur un voisinage  $V$  du réel  $t_0$ , dérivables sur  $V$  (sauf peut-être en  $t_0$ ), et telles que  $x'$  ne s'annule pas sur  $V$  (sauf peut-être en  $t_0$ ).

Sous ces hypothèses, on a la proposition suivante

FIG. 1.5. courbe définie par (1.16) au voisinage de  $t_0$  (a),  $t_1$  (b) et  $t_2$  (c).FIG. 1.6. courbe définie par (1.17) au voisinage de  $t_0 = 0$ .

PROPOSITION 1.20. Si la limite suivante existe dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y'(t)}{x'(t)} = l, \quad (1.18)$$

alors la courbe admet une tangente en  $M(t_0)$  dont le coefficient directeur est  $l$ .

DÉMONSTRATION. Montrons que le coefficient directeur de la droite  $(M(t_0)M(t_0 + h))$  tend vers  $l$  quand  $h$  tend vers zéro. On sait qu'il vaut

$$\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)}.$$

où  $t = t_0 + h$ . D'après la règle de l'Hospital de l'annexe A appliquées aux fonctions  $x - x(t_0)$  et  $y - y(t_0)$  et l'hypothèse (1.18), il vient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)} = l,$$

ce qui nous permet de conclure.  $\square$

On considère les entiers  $p$  et  $q$  introduits dans les sections 1.3.2 et 1.3.3.

La proposition 1.20 évite donc le calcul de l'entier  $p$ .

Donnons maintenant une proposition qui permet de calculer l'entier  $q$  (cette fois-ci, si  $p$  est connu). Elle s'utilise surtout dans le cas où le point est stationnaire (sinon, la tangente est connue).

Nous supposons de nouveau que  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  est une courbe de classe  $C^k \geq 1$  et que  $t_0$  est dans  $I$ . Nous supposons de nouveau que  $x'$  ne s'annule pas sur le voisinage  $V$  de  $t_0$  (sauf peut-être en  $t_0$ ).

PROPOSITION 1.21. *Supposons que la tangente à la courbe ne soit pas portée par  $\vec{j}$ .*

- *Si  $M(t_0)$  est un point de rebroussement ( $p$  pair), alors*
  - *On a un point de rebroussement de seconde espèce si et seulement si  $m$  présente un extrémum local en  $t_0$  ;*
  - *On a un point de rebroussement de première espèce si et seulement si  $m$  ne présente pas d'extrémum local en  $t_0$ .*
- *Si  $M(t_0)$  n'est pas un point de rebroussement ( $p$  impair), alors*
  - *On a un point d'inflexion si et seulement si  $m$  présente un extrémum local en  $t_0$  ;*
  - *On a un point ordinaire si et seulement si  $m$  ne présente pas d'extrémum local en  $t_0$ .*

DÉMONSTRATION. On se place dans le cas où la tangente n'est pas parallèle aux axes. On admettra que cette proposition est vraie si la tangente est portée par  $\vec{i}$ .

Comme pour l'établissement de la formule (1.8), en appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction  $F'$  en  $t_0$  à l'ordre  $q - 1$ , on obtient

$$F'(t_0 + h) = h^{p-1} \left( \frac{1}{(p-1)!} + \tilde{\delta}(t_0, h) \right) F^{(p)}(t_0) + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} F^{(q)}(t_0) + o(h^{q-1}),$$

où  $\tilde{\delta}(t_0, h)$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0. On a donc

$$F'(t_0 + h) = ph^{p-1} \left( \frac{1}{p!} + \tilde{\delta}(t_0, h) \right) F^{(p)}(t_0) + q \frac{h^{q-1}}{q!} F^{(q)}(t_0) + o(h^{q-1}), \quad (1.19)$$

soit encore, en posant

$$\frac{F^{(p)}(t_0)}{p!} = (a, c), \quad \frac{F^{(q)}(t_0)}{q!} = (b, d), \quad (1.20)$$

et en identifiant les deux composantes de (1.19) :

$$\begin{aligned} x'(t_0 + h) &= pah^{p-1}(1 + \hat{\delta}(t_0, h)) + qbh^{q-1} + o(h^{q-1}), \\ y'(t_0 + h) &= pch^{p-1}(1 + \hat{\delta}(t_0, h)) + qdh^{q-1} + o(h^{q-1}), \end{aligned}$$

où  $\widehat{\delta}(t_0, h)$  tend vers 0 pour  $h \rightarrow 0$ . Puisque  $(1 + \widehat{\delta}(t_0, h))^{-1} = 1 + o(1)$ , on peut factoriser  $(1 + \widehat{\delta}(t_0, h))$  dans l'expression ci-dessus et obtenir après simplification

$$\begin{aligned} x'(t_0 + h) &= (1 + \widehat{\delta}(t_0, h)) (pah^{p-1} + qbh^{q-1} + o(h^{q-1})), \\ y'(t_0 + h) &= (1 + \widehat{\delta}(t_0, h)) (pch^{p-1} + qdh^{q-1} + o(h^{q-1})). \end{aligned}$$

On pose  $t = t_0 + h$  et on écrit tant que  $x'(t)$  est non nul (ce qui loisible)

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{pch^{p-1} + qdh^{q-1} + o(h^{q-1})}{pah^{p-1} + qbh^{q-1} + o(h^{q-1})}.$$

La tangente est supposé non parallèle aux axes. D'après la propriété 1.20, son coefficient directeur vaut,  $c/a$  non nul. On a donc successivement

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{x'(t)} &= \frac{c}{a} \frac{1 + \frac{qd}{cp}h^{q-p} + o(h^{q-p})}{1 + \frac{qb}{ap}h^{q-p} + o(h^{q-p})}, \\ &= \frac{c}{a} \left( 1 + \frac{qd}{cp}h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right) \left( 1 + \frac{qb}{ap}h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right)^{-1}, \\ &= \frac{c}{a} \left( 1 + \frac{qd}{cp}h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right) \left( 1 - \frac{qb}{ap}h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right), \\ &= \frac{c}{a} \left( 1 + \left( \frac{qd}{cp} - \frac{qb}{ap} \right) h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right), \end{aligned}$$

et donc pour  $t$  assez proche de  $t_0$ , on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{c}{a} + \frac{q}{pa^2} (ad - bc) h^{q-p} + o(h^{q-p}).$$

soit encore

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{c}{a} + h^{q-p} \left( \frac{q}{pa^2} (ad - bc) + o(1) \right). \quad (1.21)$$

Par définition,  $q(ad - bc)/(pa^2)$  est non nul.

Nous avons les deux cas exclusifs suivants :

- Ou bien  $M(t_0)$  est un point de rebroussement ( $p$  pair). Dans ce cas,  $q - p$  est de la parité de  $q$ . La quantité  $q(ad - bc)/(pa^2) + o(1)$  reste de signe constant, égal au signe de  $q(ad - bc)/(pa^2)$ , pour  $t$  assez petit. Ainsi, selon (1.21),  $y'/x'$  présente un extrémum local en  $t_0$  (égal à  $c/a$ ) si et seulement si  $h^{q-p}$  reste de signe constant quand  $h$  tend vers zéro, c'est-à-dire si  $q - p$  est pair, soit, si  $q$  est pair, soit encore si on a un point de rebroussement de seconde espèce. On a donc :
  - un point de rebroussement de seconde espèce si et seulement si  $m$  présente un extrémum local en  $t_0$  ;
  - un point de rebroussement de première espèce si et seulement si  $m$  ne présente pas d'extrémum local en  $t_0$ .
- Ou bien  $M(t_0)$  n'est pas un point de rebroussement ( $p$  impair). Dans ce cas, on fait le même raisonnement, ce qui nous permet de conclure.

□

EXEMPLE 1.22. Reprenons l'exemple 1.18 page 8. D'après (1.17), on a

$$F'(t) = \left( \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}, \frac{t(t^3 + 3t + 2)}{(t^2 + 1)^2} \right).$$

Après calculs, il vient

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t + o(t). \quad (1.22)$$

Puisque la limite de  $y'/x'$  vaut  $1/2$  en  $t \rightarrow 0$ , on en déduit que le coefficient directeur de la tangente vaut  $1/2$ , selon la propriété 1.20. On vérifie que  $x'(0)$  et  $y'(0)$  sont nuls et que

$$x''(t) = \frac{1 - 3t^2}{(t^2 + 1)^3},$$

Ainsi  $x''(0)$  est non nul et  $p = 2$ . D'après (1.22),  $y'/x'$  n'a pas d'extrémum en zéro. D'après la proposition 1.21, on retrouve donc le fait que le point étudié est un point de rebroussement de première espèce.

Sans évoquer les entiers  $p$  et  $q$  on peut aussi déterminer si un point est un point d'inflexion grâce à :

PROPOSITION 1.23. *Soit  $M(t_0)$  un point régulier de la courbe. Ce point est un point d'inflexion si et seulement si*

$$t \mapsto x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \quad (1.23)$$

*s'annule en changeant de signe en  $t_0$ .*

DÉMONSTRATION. Admise. □

On remarquera que  $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$  est du même signe que  $m'$ .

## 1.4. Diverses propriétés

Nous donnons dans cette section, diverses propriétés des courbes paramétrées.

### 1.4.1. Branche infinie

On rappelle que l'ensemble de définition de la courbe est noté  $I$ . Soit  $t_0$  appartenant à la frontière  $\bar{I} \setminus I$  de  $I$ , cette frontière étant prise dans  $\mathbb{R}$ .

DÉFINITION 1.24. On dit que la courbe étudiée admet une branche infinie en  $t_0$ , si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} |x(t)| + |y(t)| = +\infty. \quad (1.24)$$

Dans  $\mathbb{R}^2$ , toute norme étant équivalente (voir annexe L page 169), on peut donc remplacer (1.24) par

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \|(x(t), y(t))\| = +\infty, \quad (1.25)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc aussi remplacer (1.24) par l'une des assertions suivantes :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \max(|x(t)|, |y(t)|) = +\infty, \quad (1.26a)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = +\infty. \quad (1.26b)$$

◇

Donnons la grosse définition suivante, dans le cas où la courbe étudiée admet une branche infinie en  $t_0$ .

DÉFINITION 1.25 (Branches infinies). Nous avons les cas exclusifs suivants :

(1) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) = y_0 \in \mathbb{R},$$

on dit que la droite d'équation  $y = y_0$  est asymptote horizontale à la courbe en  $t_0$  (cas a)).

(2) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} x(t) = x_0 \in \mathbb{R},$$

on dit que la droite d'équation  $x = x_0$  est asymptote verticale à la courbe en  $t_0$  (cas b)).

(3) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) = \pm\infty,$$

on étudie alors la direction asymptotique :

(a) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = 0,$$

la courbe admet  $\mathbb{R}\vec{i}$  pour direction asymptotique et présente une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}\vec{i}$  en  $t_0$  (cas c)).

(b) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty,$$

la courbe admet  $\mathbb{R}\vec{j}$  pour direction asymptotique et présente une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}\vec{j}$  en  $t_0$  (cas d)).

(c) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*,$$

la courbe admet  $\mathbb{R}(\vec{i} + \alpha\vec{j})$  pour direction asymptotique en  $t_0$ . Dans ce dernier cas :

(i) Si

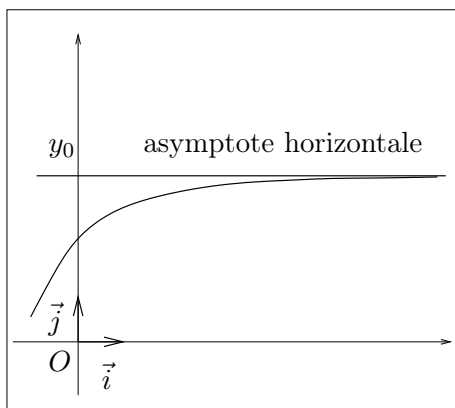
$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty,$$

la courbe admet  $\mathbb{R}\vec{j}$  pour direction asymptotique et présente une branche parabolique dans la direction de la droite  $y = \alpha x$  en  $t_0$  (cas e)).

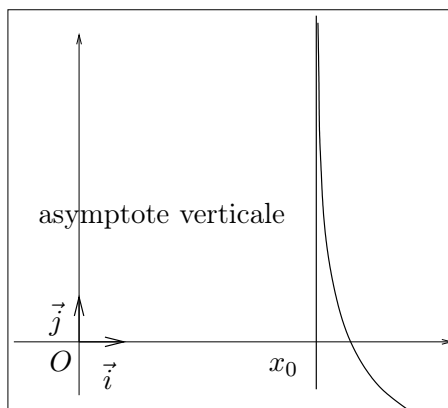
(ii) Si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R},$$

la droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$  est asymptote à la courbe en  $t_0$  (cas f)).



(a) : asymptote horizontale



(b) : asymptote verticale

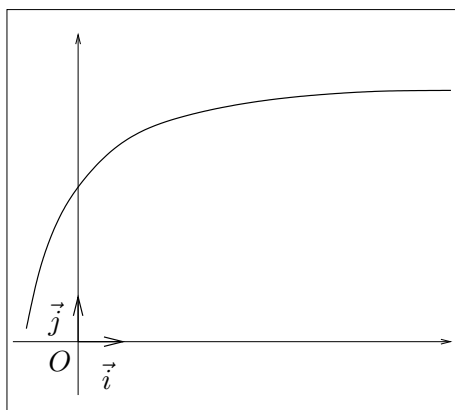
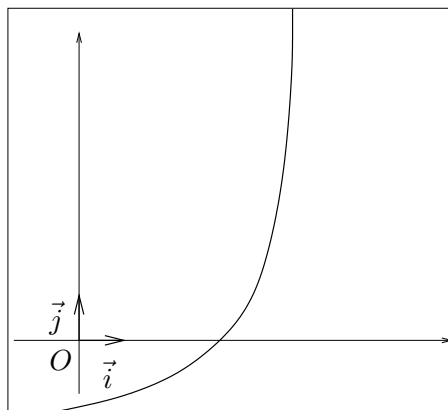
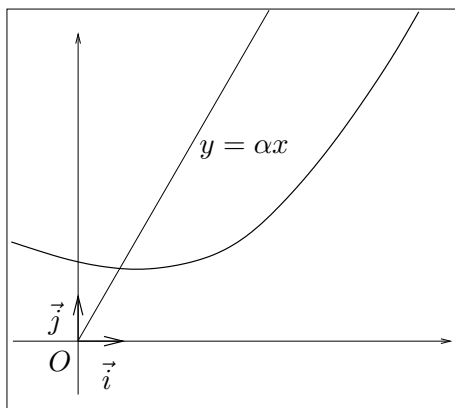
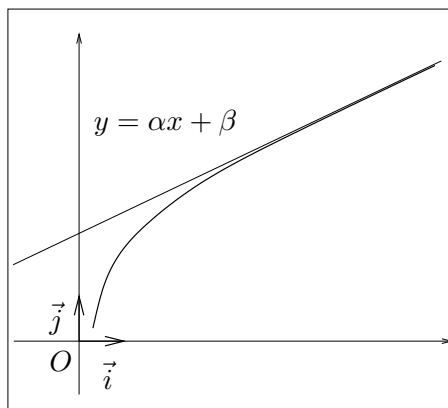
(c) : branche parabolique de direction  $\mathbb{R}\vec{i}$ (d) : branche parabolique de direction  $\mathbb{R}\vec{j}$ (e) : direction asymptotique  $\mathbb{R}(\vec{i} + \alpha\vec{j})$ (f) : asymptote droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$ .

FIG. 1.7. les six cas de la définition 1.25.

Nous admettrons que les cas a) à f) peuvent être illustrés par les figures 1.7 page ci-contre.

REMARQUE 1.26. On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote, dans le cas f), en étudiant le signe de  $y(t) - \alpha x(t) - \beta$ .

EXEMPLE 1.27. Montrer que dans les deux cas suivants, on a respectivement une asymptote horizontale et verticale en  $t_0 = 0$  :

$$F(t) = \left(\frac{1}{t}, 0\right) \quad G(t) = \left(0, \frac{1}{t}\right).$$

EXEMPLE 1.28. Montrer que dans les deux cas suivants, on a respectivement une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}\vec{i}$  et  $\mathbb{R}\vec{j}$  en  $t = \pm\infty$  :

$$F(t) = (t^2, t) \quad G(t) = (t, t^2).$$

EXEMPLE 1.29. Montrer que dans le cas suivant, on a une asymptote en  $t = -1$  :

$$F(t) = \left(\frac{1+t^2}{1+t}, \frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

REMARQUE 1.30. L'emploi de logiciel de calculs symboliques, permet d'automatiser l'étude de branches infinies (voir remarque 1.14 page 8).

REMARQUE 1.31. On pourra généraliser la notion d'asymptote en utilisant la notion de développement asymptotique. Voir les exercices 1.2 et 1.3 du TD 1.

### 1.4.2. Points doubles

Parfois, la fonction  $F$  est bijective, ce qui signifie que le support de la courbe est parcouru une et une seule fois, ce qui est le cas de l'exemple 1.2 page 2.

Dans le cas contraire, tout ou partie de la courbe peut être atteint plusieurs fois par  $F$ . On parle de point double s'il existe  $t_1$  et  $t_2$  distincts avec

$$F(t_1) = F(t_2).$$

On étudiera cette équation sous la forme

$$x(t_1) - x(t_2) = 0 \text{ et } y(t_1) - y(t_2) = 0. \quad (1.27)$$

Souvent, puisque  $t_1 = t_2$  est un cas particulier de (1.27), on l'écrit sous la forme

$$(t_1 - t_2)^r (\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_2)) = 0 \text{ et } (t_1 - t_2)^r (\tilde{y}(t_1) - \tilde{y}(t_2)) = 0, \quad (1.28)$$

où  $r$  est un entier non nul. On résoudra donc

$$\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_2) = 0 \text{ et } \tilde{y}(t_1) - \tilde{y}(t_2) = 0. \quad (1.29)$$

EXEMPLE 1.32. Soit  $F$  définie par

$$F(t) = \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3}\right). \quad (1.30)$$

On écrit  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$ , soit

$$t_1^3 t_2^2 - 9 t_1^3 = t_2^3 t_1^2 - 9 t_2^3,$$



et

$$t_2 t_1^2 - 3t_1^2 + 6t_1 = t_1 t_2^2 - 3t_2^2 + 6t_2,$$

soit encore, après avoir factorisé et simplifié par  $t_1 - t_2$  non nul :

$$t_1^2 t_2^2 = 9(t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2),$$

et

$$t_1 t_2 - 3(t_1 + t_2) + 6 = 0.$$

En introduisant de façon classique  $p = t_1 t_2$  et  $s = t_1 + t_2$ , cela s'écrit de façon équivalente

$$p^2 = 9(s^2 - 2p),$$

et

$$p + 6 = 3s,$$

dont l'unique solution est  $p = -12$  et  $s = -2$ . Connaissant la somme et le produit de  $t_1$  et  $t_2$ , en résolvant

$$t^2 + 2t - 12 = 0, \tag{1.31}$$

on obtient (à une permutation près)

$$t_1 = -1 - \sqrt{13},$$

et

$$t_2 = -1 + \sqrt{13}.$$

Pour connaître les coordonnées du point correspondant, on réutilise (1.30) en remplaçant  $t$  par  $t_1$  ou  $t_2$ . Il est plus rapide de se servir de (1.31) et de remplacer  $t^2$  successivement par  $12 - 2t$  ;

$$\begin{aligned} x &= \frac{t^3}{t^2 - 9} = \frac{t(12 - 2t)}{12 - 2t - 9} = \frac{12t - 2t^2}{3 - 2t} = \frac{16t - 24}{3 - 2t}, \\ y &= \frac{t(t - 2)}{t - 3} = \frac{12 - 2t - 2t}{t - 3} = \frac{12 - 4t}{t - 3}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$x = -8, \quad y = -4. \tag{1.32}$$

### 1.4.3. Symétries et périodicités

Donnons la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.33** (réduction par isométrie). *On suppose qu'il existe une fonction  $\phi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $I = J \cup \phi(J)$ , où  $J$  est une partie de  $I$ . Il existe, de plus, une isométrie  $\mathcal{S}$  du plan dans lui-même telle que*

$$\forall t \in J, \quad M(\phi(t)) = \mathcal{S}(M(t)). \tag{1.33}$$

*On étudie alors la courbe  $\Gamma_J$  sur l'intervalle  $J$ . Pour avoir la courbe complète, on complétera en traçant  $\mathcal{S}(\Gamma_J)$ .*

DÉMONSTRATION. Voir la figure 1.8. □

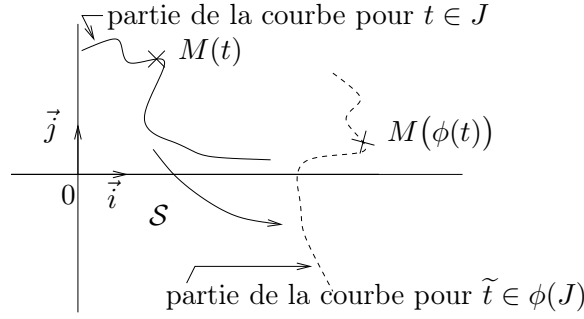


FIG. 1.8. Réduction de l'intervalle d'étude : cas général.

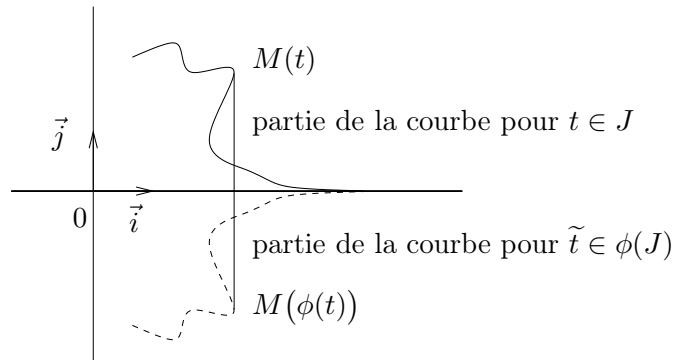
On en déduit alors les cas particulier suivants dans les cas où  $\mathcal{S}$  est la symétrie d'axe  $(0, \vec{j})$ , la symétrie d'axe  $(0, \vec{i})$ , la symétrie de centre  $O$  ou la symétrie d'axe  $\Delta$ , la première bissectrice.

PROPOSITION 1.34 (réduction par symétrie d'axe  $(0, \vec{i})$ ).

Si on a

$$\forall t \in J, \quad \begin{cases} x(\phi(t)) = x(t), \\ y(\phi(t)) = -y(t), \end{cases} \quad (1.34)$$

alors, on se contentera d'étudier la courbe pour  $t$  décrivant  $J$  ; pour avoir ensuite la courbe complète, on fera une symétrie axiale de la portion de courbe obtenue pour  $t$  décrivant  $J$  par rapport à l'axe  $(0, \vec{i})$ .

FIG. 1.9. Symétrie par rapport l'axe  $(0, \vec{i})$ .

Voir la figure 1.9.

De même, on a

PROPOSITION 1.35 (réduction par symétrie d'axe  $(0, \vec{j})$ ).

Si on a

$$\forall t \in J, \quad \begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t), \\ y(\phi(t)) = y(t), \end{cases} \quad (1.35)$$

alors, on se contentera d'étudier la courbe pour  $t$  décrivant  $J$  ; pour avoir ensuite la courbe complète, on fera une symétrie axiale de la portion de courbe obtenue pour  $t$  décrivant  $J$  par rapport à l'axe  $(0, \vec{j})$ .

PROPOSITION 1.36 (réduction par symétrie de centre  $O$ ).

Si on a

$$\forall t \in J, \quad \begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t), \\ y(\phi(t)) = -y(t), \end{cases} \quad (1.36)$$

alors, on se contentera d'étudier la courbe pour  $t$  décrivant  $J$  ; pour avoir ensuite la courbe complète, on fera une symétrie centrale de la portion de courbe obtenue pour  $t$  décrivant  $J$  par rapport au point  $O$ .

PROPOSITION 1.37 (réduction par symétrie d'axe  $y = x$ ).

Si on a

$$\forall t \in J, \quad \begin{cases} x(\phi(t)) = y(t), \\ y(\phi(t)) = x(t), \end{cases} \quad (1.37)$$

alors, on se contentera d'étudier la courbe pour  $t$  décrivant  $J$  ; pour avoir ensuite la courbe complète, on fera une symétrie axiale de la portion de courbe obtenue pour  $t$  décrivant  $J$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

Souvent, on aura le cas particulier suivant : l'intervalle  $I$  est symétrique par rapport à zéro et il existe  $J \subset I$  inclus dans  $\mathbb{R}_+$  ou  $\mathbb{R}_-$  tel que  $I = J \cup (-J)$ , c'est-à-dire  $\phi = -I_d$ .

PROPOSITION 1.38 (réduction par périodicité). Si les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $T$ -périodiques, il suffira de se restreindre à une partie  $J$  de  $I$  qui « engendre »  $I$  au sens suivant :

$$\forall t \in I, \quad \exists (n, \tilde{t}) \in \mathbb{Z} \times J, \quad t = \tilde{t} + nT. \quad (1.38)$$

EXEMPLE 1.39. C'est le cas des fonctions trigonométriques de période  $2\pi$ .

## 1.5. Plan général d'étude

- définir l'intervalle de définition de  $F$  ;
- exploiter les propriétés de symétries et de périodicité pour réduire cet intervalle d'étude ;
- Calculer  $x'$  et  $y'$ , tâcher de définir leur signe, dresser, dans un même tableau, les tableaux de variation de  $x$  et  $y$ . Y indiquer les limites et valeurs particulières (de  $x$ ,  $y$ ,  $x'$  et  $y'$ ) ;
- étudier les éventuelles tangentes aux points stationnaires ; déterminer éventuellement la classification de ces points ;
- déterminer les points d'inflexion ;
- déterminer les branches infinies ;
- déterminer les points doubles ;
- faire une ébauche de tracé en utilisant toutes ces propriétés, en traçant les points particuliers étudiés, ainsi que les tangentes en ces points ; on pourra s'appuyer sur un tracé informatique, à la calculatrice ou l'ordinateur (voir remarque 1.14 page 8) !

## 1.6. Deux exemples complets

EXEMPLE 1.40. Étudier la courbe de l'exemple 1.29 page 15 pour  $t$  décrivant  $\mathbb{R}$ .

EXEMPLE 1.41. Voir annexe B page 123

## 1.7. Une remarque sur la structure euclidienne utilisée

Dans ce chapitre, le repère  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$  a été supposé orthonormé. À part la représentation proprement dite des courbes, cette propriété n'a pas été utilisée et un peu de réflexion montre que toutes les notions de ce chapitre demeurent valables si la base  $\mathcal{R}$  est quelconque : seul l'aspect vectoriel ou affine du plan a été utilisé ; ce n'est qu'au chapitre 3 qu'on utilisera la métrique et le produit scalaire du plan.

## 1.8. Applications

Naturellement l'étude de trajectoire de points matériels dans le plan utilise toutes les notions de ce chapitre.

On peut aussi citer la résistance des matériaux où la fibre moyenne d'une poutre est représentée par une courbe paramétrée ; voir par exemple les chapitres 1 et 4 et l'annexe B de [Bas04b], disponible sur le ouaib.

Les notions de repères de Frenet sont fort utiles et s'appuient aussi sur les notions du chapitre 3.

On pourra consulter un exercice «amusant» donné en examen de MT25 et proposé en annexe B page 123.



## CHAPITRE 2

### Courbes paramétrées en coordonnées polaires

On pourra consulter [GAJ94] (dont ce chapitre est fortement inspiré).

#### 2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un cas particulier des courbes paramétrées étudiées dans le chapitre 1. Les résultats de ce chapitre sont naturellement toujours valables, mais certaines techniques sont particulières et méritent d'être étudiées.

Les notations sont donc identiques, toujours valables et le plan sera très proche du chapitre 1.

#### 2.2. Coordonnées et repère polaires

Un point  $M$  du plan de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , est repéré en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (2.1)$$

où<sup>1</sup>

$$r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

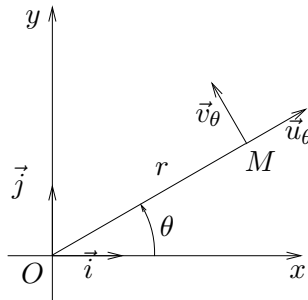


FIG. 2.1. Les coordonnées polaires

Voir figure 2.1.

---

<sup>1</sup>En toute rigueur, à l'origine  $r = 0$  et  $\theta$  n'est pas défini

Puisque  $r$  est la longueur  $OM$  et  $\theta$  est égal à l'angle  $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ , on a donc<sup>2</sup>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

Ces équations fournissent une unique valeur de  $r$  et une unique valeur de  $\theta$ , modulo  $2\pi$ ; en effet, si  $a$  et  $b$  vérifient

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (2.3a)$$

alors, il existe un unique  $\theta$ , modulo  $2\pi$ , tel que

$$a = \cos \theta, \quad (2.3b)$$

$$b = \sin \theta. \quad (2.3c)$$

Notons, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad (2.4a)$$

$$\vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}. \quad (2.4b)$$

Parfois, ces vecteurs sont aussi notés  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ .  $\diamond$

On peut vérifier que ces deux vecteurs forment une base orthonormée directe. On note  $\mathcal{R}_\theta = (0, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  le repère mobile (ou tournant) ainsi défini.

On vérifie que

$$\vec{u}_{\theta+\pi/2} = \vec{v}_\theta, \quad (2.5a)$$

$$\vec{u}'_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \vec{v}_\theta, \quad (2.5b)$$

$$\vec{v}'_\theta = \frac{d\vec{v}_\theta}{d\theta} = \vec{u}''_\theta = -\vec{u}_\theta, \quad (2.5c)$$

et que

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_\theta. \quad (2.6)$$

On peut inverser (2.4) sous la forme

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\theta - \sin \theta \vec{v}_\theta, \quad (2.7a)$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\theta + \cos \theta \vec{v}_\theta. \quad (2.7b)$$

---

<sup>2</sup>C'est exactement équivalent à l'écriture en complexe

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

où  $r$  est le module de  $z$  et  $\theta$  un de ses argument.

### 2.3. Définitions et notations

Soient  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\theta$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $r$  une fonction de  $\theta(I)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On considère maintenant la courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  où  $F$  est définie par

$$\forall t \in I, \quad F(t) = \overrightarrow{OM(t)} = r(\theta(t))\vec{u}_{\theta(t)}. \quad (2.8)$$

D'après la section 2.2, on a donc  $F(t) = (x(t), y(t))$  où, pour tout  $t \in I$

$$x(t) = r(\theta(t)) \cos \theta(t), \quad (2.9a)$$

$$y(t) = r(\theta(t)) \sin \theta(t). \quad (2.9b)$$

En fait, on se restreindra souvent au cas où  $\theta(t) = t$ ; le paramètre est donc noté  $\theta$  et on a la définition (voir définition 1.1 page 1) :

**DÉFINITION 2.1** (courbe définie par une équation polaire). On appelle une courbe définie par une équation polaire une courbe  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  où  $r$  est une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et

$$\forall \theta \in I, \quad F(\theta) = \overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta)\vec{u}_{\theta}, \quad (2.10)$$

ou, ce qui revient au même, pour tout  $\theta \in I$

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, \quad (2.11a)$$

$$y(\theta) = r(\theta) \sin \theta. \quad (2.11b)$$

### 2.4. Étude locale d'une courbe en polaire

Reprenons l'étude faite en section 1.3 page 2. On suppose  $r$  de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ .

#### 2.4.1. règles de dérivation

**LEMME 2.2.** *On a*

$$\forall \theta \in I, \quad F'(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_{\theta} + r(\theta)\vec{v}_{\theta}. \quad (2.12)$$

**DÉMONSTRATION.** D'après (2.5b),

$$F'(\theta) = (r(\theta)\vec{u}_{\theta})' = r'(\theta)\vec{u}_{\theta} + r(\theta)\vec{u}_{\theta}' = r'(\theta)\vec{u}_{\theta} + r(\theta)\vec{v}_{\theta}.$$

□

De même, on montre que, si  $k \geq 2$

**LEMME 2.3.** *On a*

$$\forall \theta \in I, \quad F''(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\vec{u}_{\theta} + 2r'(\theta)\vec{v}_{\theta}. \quad (2.13)$$

#### 2.4.2. Position locale d'une courbe polaire par rapport à sa tangente

Dans cette section, on suppose que  $k \geq 2$ .

D'après (2.12),  $M$  est un point stationnaire si et seulement si  $r(\theta)$  et  $r'(\theta)$  sont nuls.

**LEMME 2.4.** *En un point régulier, l'angle  $V(\theta)$  entre la droite  $\mathbb{R}\vec{u}_{\theta}$  et la tangente  $T(\theta)$  à la courbe est donné par*

$$\forall \theta \in I, \quad \tan(V(\theta)) = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (2.14)$$



DÉMONSTRATION. Immédiate d'après (2.12). □

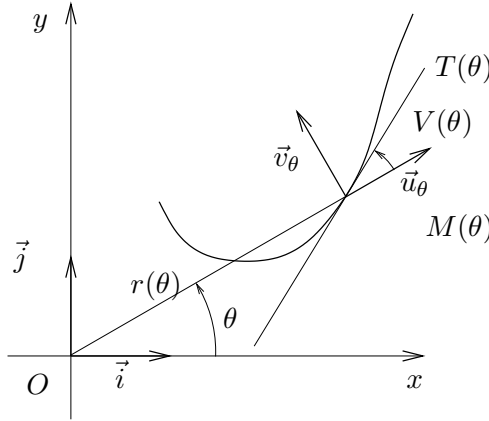


FIG. 2.2. L'angle  $V(\theta)$

Voir la figure 2.2.

Seule l'origine peut être un point stationnaire et on peut étudier les points distincts de 0 puis 0.

En un point différent de l'origine (c'est-à-dire si  $r(\theta) \neq 0$ ), on envisage seulement deux cas de figure :

PROPOSITION 2.5 (Étude en un point différent de l'origine). *Un point différent de l'origine  $M(\theta_0)$  est un point*

- *birrégulier (donc ordinaire) si et seulement si  $r^2(\theta_0) + 2r'(\theta_0)r''(\theta_0) - r(\theta_0)r'''(\theta_0) \neq 0$  ;*
- *d'inflexion si et seulement si  $\theta \mapsto r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta)$  s'annule en changeant de signe en  $\theta_0$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $r(\theta) \neq 0$ , alors  $F'(\theta)$  est non nul. La famille  $(F'(\theta), F''(\theta))$  est une base si et seulement le déterminant dans toute base de ces deux vecteurs est non nul ; dans la base  $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ , on a, d'après (2.13),

$$\Delta(\theta) = \det(F'(\theta), F''(\theta)) = \det \begin{pmatrix} r'(\theta) & r''(\theta) - r(\theta) \\ r(\theta) & 2r'(\theta) \end{pmatrix} = r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta),$$

et donc

$$\det(F'(\theta), F''(\theta)) = r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta), \quad (2.15)$$

ce qui nous permet de conclure pour la première assertion.

Pour la seconde, remarquons que le déterminant étant invariant par changement de base, on a, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ,

$$r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta) = \Delta(\theta) = \det \begin{pmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{pmatrix} = x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta).$$

On conclue alors grâce à la proposition 1.23 page 12. □

REMARQUE 2.6. Si  $\theta \mapsto r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta)$  s'annule sans changer de signe en  $\theta_0$ , le point  $M(\theta_0)$  n'est pas birrégulier et il faut alors utiliser les dérivées successives de  $F$  pour conclure.

On peut simplifier le calcul de la quantité  $r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)$  en remarquant que

LEMME 2.7. *En un point régulier, on a, en posant  $u(\theta) = 1/r(\theta)$ ,*

$$u(\theta) + u''(\theta) = \frac{1}{r^3(\theta)} (r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)). \quad (2.16)$$

*Il suffit donc d'étudier  $\mapsto u(\theta) + u''(\theta)$  pour utiliser la proposition 2.5.*

DÉMONSTRATION. Immédiate. □

On étudie maintenant l'origine, si elle est atteinte par la courbe, c'est-à-dire si  $M(\theta_0) = 0$ .

On suppose qu'il existe un entier  $n \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $r^{(n)}(\theta_0) \neq 0$ . Notons  $s$  le plus petit de ces entiers  $n$ . Supposons que  $r$  est de classe  $C^{s+1}$ .

PROPOSITION 2.8 (Étude en l'origine). *L'origine  $M(\theta_0) = 0$  est un point*

*– ordinaire si et seulement si  $s$  est impair ;*

*– de rebroussement de première espèce si et seulement si  $s$  est pair ;*

*Dans tous les cas, la tangente est portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ .*

DÉMONSTRATION. On introduit les entiers  $p$  et  $q$  des sections 1.3.2 page 3 et 1.3.3 page 4 et on utilise la proposition 1.10 page 4.

Si  $s = 1$ , on a  $r(\theta_0) = 0$  et  $r'(\theta_0) \neq 0$ , on a, d'après (2.12)

$$F'(\theta_0) = r'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}, \quad (2.17)$$

et la tangente est donc portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ . Par ailleurs, d'après (2.15), on a

$$\det(F'(\theta_0), F''(\theta_0)) = 2r'^2(\theta_0) \neq 0. \quad (2.18)$$

Ainsi  $p = 1$ ,  $q = 2$  et d'après la proposition 1.10 page 4, on peut conclure.

Si  $s = 2$ , on a  $r(\theta_0) = 0$ ,  $r'(\theta_0) = 0$  et  $r''(\theta_0) \neq 0$ . D'après (2.10) et (2.13), on a

$$F'(\theta_0) = 0, \quad (2.19a)$$

$$F''(\theta_0) = r''(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}. \quad (2.19b)$$

Ainsi, la tangente est donc portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ . D'autre part, d'après (2.13),

$$F^{(3)}(\theta_0) = (r^{(3)}(\theta_0) - r'(\theta_0))\vec{u}_{\theta_0} + (r''(\theta_0) - r(\theta_0))\vec{v}_{\theta_0} + 2r''(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0} - 2r'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}$$

et donc

$$F^{(3)}(\theta_0) = r^{(3)}(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + 3r''(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}.$$

On a donc

$$\det(F''(\theta_0), F^{(3)}(\theta_0)) = 3r''(\theta_0) \neq 0. \quad (2.20)$$

Ainsi  $p = 2$ ,  $q = 3$  et d'après la proposition 1.10 page 4, on peut conclure.

On peut montrer par récurrence sur  $s \geq 1$ , comme pour (2.17), (2.18), (2.19a), (2.19b) et (2.20), que

$$\forall j \in \{1, \dots, s-1\}, \quad F^{(j)}(\theta_0) = 0, \quad (2.21a)$$

$$F^{(s)}(\theta_0) = \alpha_s r^{(s)}(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}, \quad (2.21b)$$

$$\det(F^{(s)}(\theta_0), F^{(s+1)}(\theta_0)) = \beta_s r^{(s)}(\theta_0), \quad (2.21c)$$

où  $\alpha_s$  et  $\beta_s$  sont deux réels non nuls. On a donc une tangente portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$  et  $p = s$  et  $q = s+1$  et la conclusion annoncée. □

EXEMPLE 2.9. En  $\theta = 0$ , la courbe définie en polaire par

$$r(\theta) = \ln(1 - \sin \theta), \quad (2.22)$$

présente en l'origine un point ordinaire. En effet,  $r(0) = 0$  et

$$r'(\theta) = -\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta},$$

et donc  $r'(0) = -1$ . Ainsi,  $s = 1$  est impair et on peut conclure.

Donnons maintenant un résultat plus fort qui n'utilise pas  $s$  et le fait que  $r$  est dérivable!

On suppose seulement que  $r(\theta_0) = 0$ , que  $r$  est continue en  $\theta_0$ . On suppose qu'il existe un voisinage de  $\theta_0$  sur lequel  $r$  ne s'annule pas, sauf en  $\theta_0$ .

PROPOSITION 2.10 (Étude en l'origine (autre résultat)). *L'origine  $M(\theta_0) = 0$  est un point*

- ordinaire si et seulement si  $r$  s'annule en  $\theta_0$  en changeant de signe ;*
- de rebroussement de première espèce si et seulement si  $r$  s'annule en  $\theta_0$  en restant de signe constant.*

*Dans tous les cas, la tangente existe et est portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ .*

DÉMONSTRATION. Étudions la direction du vecteur  $\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta_0+h)}/h$  quand  $h$  tend vers zéro. Ce vecteur est égal à  $(r(\theta_0+h)\vec{u}_{\theta_0+h} - r(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0})/h$ , colinéaire à  $\vec{u}_{\theta_0+h}$ . Quand  $h$  tend vers zéro, ce vecteur tend vers  $\vec{u}_{\theta_0}$ , ce qui montre que la tangente existe et est portée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ .

D'autre part, d'après la formule de Taylor-Young appliquée à  $\theta \mapsto \vec{u}_\theta$ , on a

$$\vec{u}_{\theta_0+h} = \vec{u}_{\theta_0} + h\vec{u}'_{\theta_0} + o(h) = \vec{u}_{\theta_0} + h\vec{v}_{\theta_0} + o(h).$$

Puisque  $(\vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$  constitue une base, on peut réécrire cela sous la forme

$$\vec{u}_{\theta_0+h} = (1 + \alpha(\theta_0, h))\vec{u}_{\theta_0} + h(1 + \beta(\theta_0, h))\vec{v}_{\theta_0},$$

où  $\alpha(\theta_0, h)$  et  $\beta(\theta_0, h)$  tendent vers zéro quand  $h$  tend vers zéro. On a donc

$$\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta_0+h)} = r(\theta_0+h)(1 + \alpha(\theta_0, h))\vec{u}_{\theta_0} + r(\theta_0+h)h(1 + \beta(\theta_0, h))\vec{v}_{\theta_0}.$$

La composante de  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  sur  $\vec{u}_{\theta_0}$  vaut  $r(\theta_0+h)(1 + \alpha(\theta_0, h))$  qui est du signe de  $r(\theta_0+h)$  au voisinage de  $h \rightarrow 0$ . Ainsi, si  $r$  s'annule en  $\theta_0$  en changeant de signe, la courbe change de côté par rapport à  $\vec{u}_{\theta_0}$ . De même, dans ce cas, la composante de  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  sur  $\vec{v}_{\theta_0}$  vaut  $r(\theta_0+h)h(1 + \beta(\theta_0, h))$  et reste de signe constant. En raisonnant comme à la fin de la preuve de la proposition 1.10, on en déduit que l'origine  $M(\theta_0) = 0$  est un point ordinaire.

De même, on montre l'autre assertion de cette proposition. □

De cette propriété, on peut déduire une autre preuve de la proposition 2.8 qui permet d'éviter la récurrence (2.21) :

AUTRE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.8. Il suffit de démontrer que les hypothèses de la proposition 2.8 entraînent celles de la proposition 2.10. Par définition de  $s$ , on a

$$r(\theta_0+h) = h^s \left( \frac{r^{(s)}(\theta_0)}{s!} + o(1) \right).$$

La parité ou l'impairité de  $s$  entraîne donc que  $r$  reste de signe constant ou change de signe au voisinage de  $\theta_0$ , ce qui permet de conclure. □

Il est des cas où l'entier  $s$  peut ne pas être défini ; par exemple si  $r(\theta) = f(\theta)$ , définie par 1.6 page 3. Dans ce cas, on peut utiliser la proposition 2.10, mais pas la proposition 2.8. On pourra consulter l'interrogation de TD du 13 avril 2005 et sa correction disponibles sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/UTBM/index.html> ◇

REMARQUE 2.11. Comme pour l'exemple 1.12 page 6, il est possible d'automatiser la procédure de classement des points en utilisant la proposition 1.10, pour calculer, en symbolique, les entiers  $p$ ,  $q$  et les vecteurs  $V_1(\theta_0)$  et  $V_2(\theta_0)$ . Il sera plus facile de les calculer dans la base  $(\vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ . Conformément à la preuve de la proposition 2.8, on peut montrer que, pour tout  $l \geq 0$

$$F^{(l)}(\theta_0) = A_l(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + B_l(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}, \quad (2.23)$$

où  $A_l$  et  $B_l$  sont deux fonctions. On peut les définir par récurrence en remarquant que

$$A_l(\theta_0) = r(\theta_0), \quad B_l(\theta_0) = 0. \quad (2.24)$$

Si (2.23) est vraie, alors, par dérivation

$$\begin{aligned} F^{(l)}(\theta_0) &= (A_l(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + B_l(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0})', \\ &= A'_l(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + A_l(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0} + B'_l(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0} - B_l(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}, \\ &= (A'_l(\theta_0) - B_l(\theta_0))\vec{u}_{\theta_0} + (A_l(\theta_0) + B'_l(\theta_0))\vec{v}_{\theta_0}. \end{aligned}$$

Ainsi (2.23) est vraie à l'ordre  $l + 1$  à condition de poser

$$A_{l+1}(\theta_0) = A'_l(\theta_0) - B_l(\theta_0), \quad (2.25a)$$

$$B_{l+1}(\theta_0) = A_l(\theta_0) + B'_l(\theta_0). \quad (2.25b)$$

EXEMPLE 2.12. Reprenons l'exemple 2.9 page ci-contre. Le fonction  $r$  s'annule en zéro en changeant de signe. On retrouve donc le fait que l'origine est un point ordinaire.

## 2.5. Diverses propriétés

### 2.5.1. Branche infinie

On rappelle que l'ensemble de définition de la courbe est noté  $I$ . Soit  $\theta_0$  réel appartenant à la frontière  $\bar{I} \setminus I$  de  $I$ .

Comme pour la définition 1.25 page 13, donnons la définition suivante :

DÉFINITION 2.13 (Branches infinies). Nous avons les cas exclusifs suivants :

(1) Si

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0}} r(\theta) = \pm\infty,$$

on dit que la courbe possède une branche infinie de direction asymptotique, celle de la droite d'équation polaire  $\theta = \theta_0$ . Dans ce cas,

(a) Si

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0}} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = a \in \mathbb{R},$$

la droite d'équation  $y = a$  dans le repère  $\mathcal{R}_{\theta_0}$  est asymptote à la courbe (cas a)).

(b) Si

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0}} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty, ,$$

la courbe présente une branche parabolique de direction la droite d'équation polaire  $\theta = \theta_0$  (cas b)).

(2) Si

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r(\theta) = \pm\infty,$$

on dit que la courbe présente une branche infinie en spirale (cas c)).

(3) Si

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r(\theta) = a \in \mathbb{R},$$

on dit que le cercle de centre  $O$  et de rayon  $|a|$  est cercle asymptote à la courbe (cas d)).

REMARQUE 2.14. On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote, dans le cas 1a, en étudiant le signe de  $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) - a$  et dans le cas 3, en étudiant le signe de  $r(\theta) - a$ .

De (2.4a) et (2.10), on tire

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta) \left( \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \right),$$

et donc, grâce à (2.7), il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM(\theta)} &= r(\theta) \left( \cos \theta (\cos \theta_0 \vec{u}_{\theta_0} - \sin \theta_0 \vec{v}_{\theta_0}) + \sin \theta (\sin \theta_0 \vec{u}_{\theta_0} + \cos \theta_0 \vec{v}_{\theta_0}) \right), \\ &= r(\theta) \left( (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) \vec{u}_{\theta_0} + (-\cos \theta \sin \theta_0 + \sin \theta \cos \theta_0) \vec{v}_{\theta_0} \right), \\ &= r(\theta) (\cos(\theta - \theta_0) \vec{u}_{\theta_0} + \sin(\theta - \theta_0) \vec{v}_{\theta_0}). \end{aligned}$$

Ainsi, dans le repère  $\mathcal{R}_{\theta_0}$ ,  $M(\theta)$  a pour coordonnées  $(r(\theta) \cos(\theta - \theta_0), r(\theta) \sin(\theta - \theta_0))$  et nous admettons que les cas a) à d) peuvent être illustrés par les figures 2.3 page ci-contre.

EXEMPLE 2.15. La courbe de l'exemple 2.9 page 26 admet l'asymptote  $Oy$  en  $\theta = \pi/2$ .

En effet, on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \ln(1 - \sin \theta) = -\infty. \quad (2.26)$$

D'autre part, si on pose  $u = \pi/2 - \theta$ , on a

$$\sin(\theta - \pi/2)r(\theta) = -\sin u r(\pi/2 - u) \sim -u \ln(1 - \cos u) \sim -u \ln(u^2) = -2u \ln u,$$

ce qui tend vers zéro quand  $u$  tend zéro.

REMARQUE 2.16. L'emploi de logiciel de calculs symboliques, permet d'automatiser l'étude de branches infinies.

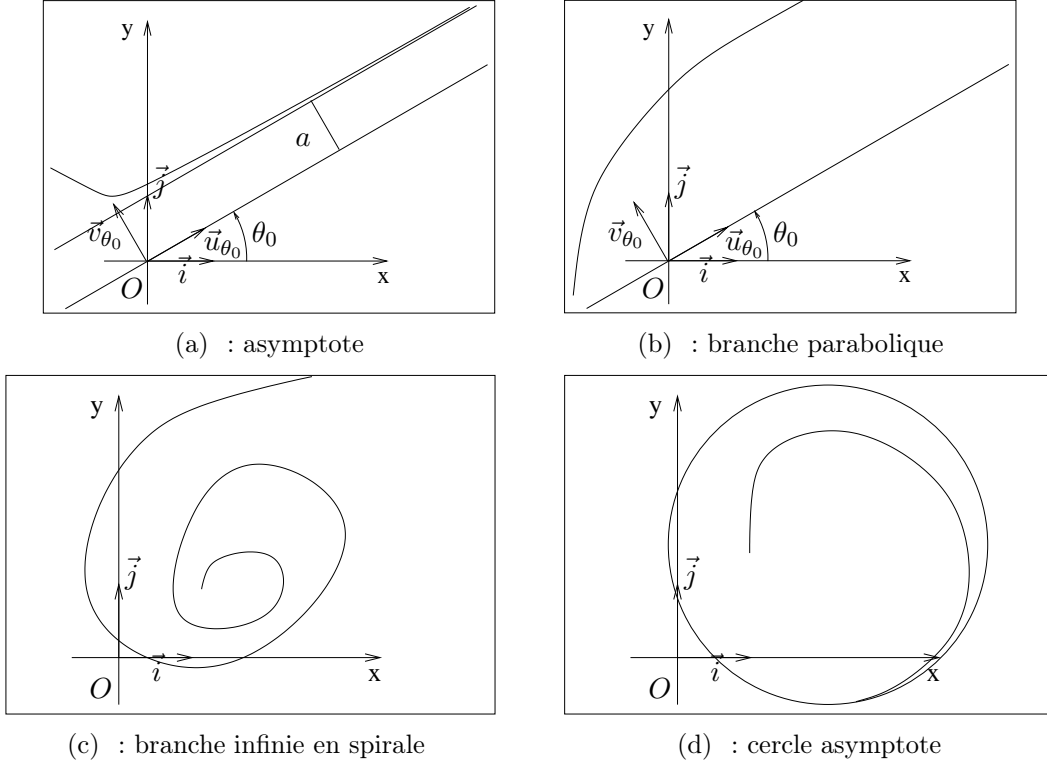


FIG. 2.3. les quatre cas de la définition 2.13.

### 2.5.2. Points doubles

Remarquons que, pour tout  $\theta$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\vec{u}_{\theta+2k\pi} = \vec{u}_{\theta}, \quad (2.27a)$$

$$\vec{u}_{\theta+(2k+1)\pi} = -\vec{u}_{\theta}. \quad (2.27b)$$

et ce sont les seules valeurs d'angles  $\theta$  et  $\theta'$  pour lesquelles  $\vec{u}_{\theta}$  et  $\vec{u}_{\theta'}$  sont colinéaires.

Ainsi,

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta'),$$

est équivalent à

$$r(\theta')\vec{u}_{\theta'} = r(\theta)\vec{u}_{\theta}.$$

Cela est donc encore équivalent à

$$\theta - \theta' = 2k\pi \text{ et } r(\theta) = r(\theta'),$$

ou

$$\theta - \theta' = (2k+1)\pi \text{ et } r(\theta) = -r(\theta'),$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ .

On cherchera donc les points doubles comme solution de

$$r(\theta + 2k\pi) = r(\theta), \quad (2.28a)$$

ou

$$r(\theta + (2k + 1)\pi) = -r(\theta), \quad (2.28b)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 2.5.3. Symétries et périodicités

On rappelle la définition suivante :

DÉFINITION 2.17 (antipériode). Soit  $f$  une application de  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , dans  $\mathbb{R}$ . Le réel  $T > 0$  est dit antipériode si et seulement si

$$\forall \theta \in I, \quad \theta + T \in I \text{ et } f(\theta + T) = -f(\theta). \quad (2.29)$$

On peut réduire l'intervalle d'étude de la façon suivante :

PROPOSITION 2.18 (réduction par périodicité).

*Si  $T > 0$  est période de  $r$ , alors*

- *Si  $T = 2n\pi$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient toute la courbe en se limitant à un sous intervalle de  $I$ , d'amplitude  $T$  ;*
- *Sinon, on se limite à un sous intervalle de  $I$ , d'amplitude  $T$  et on complète par des rotations de centre 0 et d'angle  $T$ .*

PROPOSITION 2.19 (réduction par antipériodicité).

*Si  $T > 0$  est antipériode de  $r$ , alors*

- *Si  $T = (2n + 1)\pi$  où  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient toute la courbe en se limitant à un sous intervalle de  $I$ , d'amplitude  $T$  ;*
- *Sinon, on se limite à un sous intervalle de  $I$ , d'amplitude  $T$  et on complète par des rotations de centre 0 et d'angle  $T + \pi$ .*

DÉMONSTRATIONS DES PROPOSITIONS 2.18 ET 2.19. Il suffit d'utiliser (2.27). On a aussi, si  $T$  est période,

$$\overrightarrow{OM}(\theta + T) = r(\theta + T)\vec{u}_{\theta+T} = r(\theta)\vec{u}_{\theta+T},$$

et donc  $M(\theta + T)$  s'obtient comme l'image de  $M(\theta)$  par l'image de  $M(\theta)$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $T$ . De même, si  $T$  est antipériode,  $M(\theta + T)$  s'obtient comme l'image de  $M(\theta)$  par l'image de  $M(\theta)$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $T + \pi$ .  $\square$

REMARQUE 2.20. Remarquons que si  $T$  est antipériode de  $r$ , alors  $2T$  est période de  $r$ . De façon pratique, on déterminera  $T$ , la plus petite période de  $r$  et on examinera si  $T/2$  est une antipériode de  $r$ .

PROPOSITION 2.21 (réduction par symétrie axiale).

- *S'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\forall \theta \in I, \quad \alpha - \theta \in I \text{ et } r(\alpha - \theta) = r(\theta), \quad (2.30)$$

*alors on se limite à l'un des deux intervalles  $(\inf(I), \alpha/2]$  ou  $[\alpha/2, \sup(I))$  et on complète par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation polaire  $\theta = \alpha/2$ .*

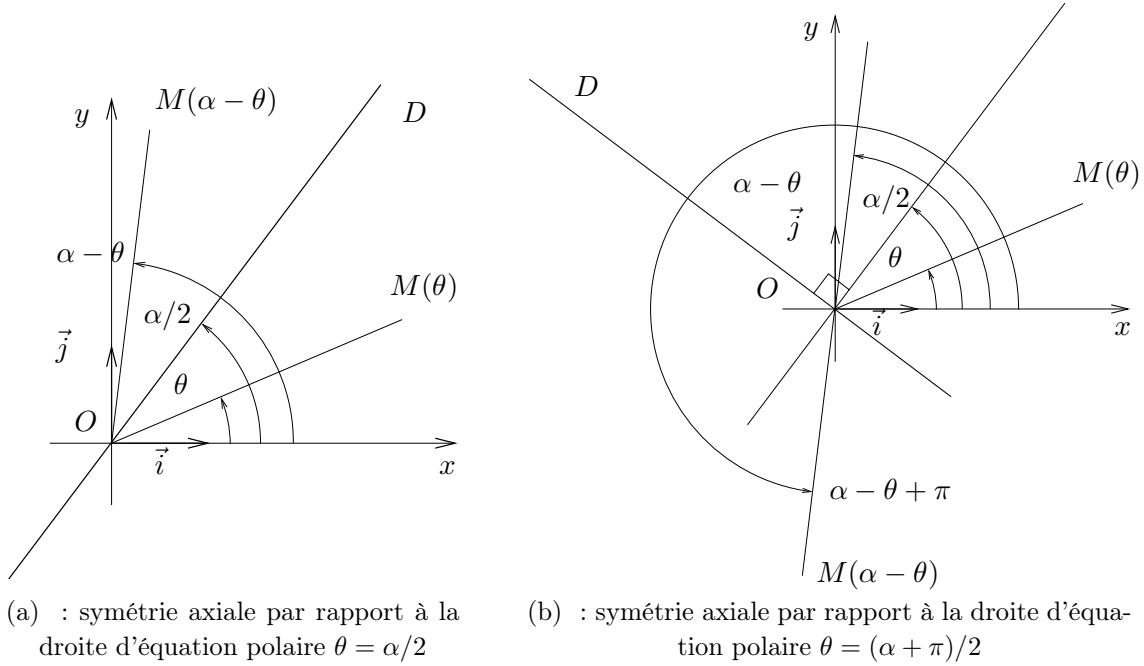


FIG. 2.4. réduction par symétrie axiale.

– S'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \theta \in I, \quad \alpha - \theta \in I \text{ et } r(\alpha - \theta) = -r(\theta), \quad (2.31)$$

alors on se limite à l'un des deux intervalles  $(\inf(I), \alpha/2]$  ou  $[\alpha/2, \sup(I))$  et on complète par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation polaire  $\theta = (\alpha + \pi)/2$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, dans les deux cas,  $I$  est centré autour de  $\alpha/2$  et que, dans le premier cas,

$$\overrightarrow{OM}(\alpha - \theta) = r(\alpha - \theta)\vec{u}_{\alpha - \theta} = r(\theta)\vec{u}_{\alpha - \theta}.$$

Cela traduit le fait que  $M(\alpha - \theta)$  est l'image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha - 2\theta$  de  $M(\theta)$ , soit encore que  $M(\alpha - \theta)$  est l'image par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation polaire  $\theta = \alpha/2$  de  $M(\theta)$  (voir figure 4(a)). On montrera de même la seconde assertion de la proposition (voir figure 4(b)).  $\square$

On les deux cas particuliers suivants, correspondant à  $\alpha = 0$  :

PROPOSITION 2.22 (réduction par symétrie axiale (bis)).

– Si

$$\forall \theta \in I, \quad -\theta \in I \text{ et } r(-\theta) = r(\theta), \quad (2.32)$$

alors on se limite à l'un des deux intervalles  $(\inf(I), 0]$  ou  $[0, \sup(I))$  et on complète par la symétrie axiale par rapport à  $Ox$ .

– Si

$$\forall \theta \in I, \quad -\theta \in I \text{ et } r(-\theta) = -r(\theta), \quad (2.33)$$

alors on se limite à l'un des deux intervalles  $(\inf(I), 0]$  ou  $[0, \sup(I))$  et on complète par la symétrie axiale par rapport à  $Oy$ .



On a de même :

PROPOSITION 2.23 (réduction par symétrie centrale). *S'il existe  $J$ , un sous-intervalle de  $I$ , tel que  $I = J \cup (J + \pi)$*

$$\forall \theta \in J, \quad r(\theta + \pi) = r(\theta), \quad (2.34)$$

*alors on se limite à l'intervalle  $J$  et on complète par la symétrie centrale de centre  $O$ .*

REMARQUE 2.24. En fait, cette proposition constitue un cas particulier de la proposition 2.18.

REMARQUE 2.25. Grâce à matlab, on peut très facilement tracer la courbe définie par

$$r(\theta) = 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

en tapant par exemple :

```
theta=-2*pi:0.01:2*pi;
polar(theta,1-sin(theta/2));
```

On pourra aussi voir la fonction matlab disponible sur le ouaib `trace_parametrique_pol.m`.

## 2.6. Plan général d'étude

- définir l'intervalle de définition de  $r$  ;
- exploiter les propriétés de symétries et de périodicité pour réduire cet intervalle d'étude ;
- Calculer  $r'$ , tâcher de définir son signe, dresser, dans un même tableau, le tableau de variation de  $r$ . Y indiquer les limites et valeurs particulières (de  $r$  et  $r'$ ) ;
- donner les valeurs des angles définissant les tangentes aux points réguliers ;
- étudier les éventuelles tangentes aux points stationnaires ; déterminer éventuellement la classification de ces points ;
- déterminer les points d'inflexion ;
- déterminer les branches infinies ;
- déterminer les points doubles ;
- faire une ébauche de tracé en utilisant toutes ces propriétés, en traçant les points particuliers étudiés, ainsi que les tangentes en ces points.

## 2.7. Un exemple complet

Étudier la courbe de l'exemple 2.9 page 26.

## CHAPITRE 3

### Propriétés métriques des courbes paramétrées

On pourra consulter [GAJ94] (dont ce chapitre est fortement inspiré).

#### 3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés métriques<sup>1</sup> des courbes vues au cours des chapitres 1 et 2, dont on reprend les notations.

Dans tout ce chapitre, on utilise la norme euclidienne, notée  $\|\cdot\|$  : pour tout vecteur  $u = (x, y)$  du plan vectoriel  $E$

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.1)$$

Avec l'identification faite en page 1, on a pour, tout point  $M = (x, y)$  du plan affine  $\mathcal{E}$ ,

$$OM = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.2)$$

Soit une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ . On se place dans le cas où  $I = [a, b]$ , avec  $a < b$ .

#### 3.2. Arc rectifiable, longueur, abscisses curvilignes

##### 3.2.1. Arc rectifiable et longueur

On cherche à mesurer la longueur d'un arc de courbe, c'est-à-dire, d'une portion de courbe paramétrées.

On pourra, pour une approche «empirique», consulter le chapitre 4 et l'annexe E de [Bas04a], disponible sur le ouaib.

DÉFINITION 3.1. Pour tout entier  $N$  non nul, on appelle  $\sigma$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  un  $N + 1$ -uplet  $(t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N)$  de réels tels que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ . On note

$$h = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i) > 0, \quad (3.3)$$

le pas de la subdivision  $\sigma$ .

DÉFINITION 3.2. Pour toute une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$   $\sigma$ , on note, pour tout  $0 \leq i \leq N$ ,  $M_i = F(t_i)$ . On appelle la longueur de la ligne polygonale  $(M_i)_{0 \leq i \leq N}$ , associée à la subdivision  $\sigma$  et on note le réel  $L_\sigma(\Gamma)$  défini par

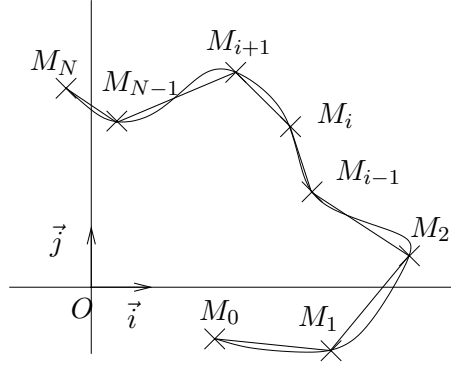
$$L_\sigma(\Gamma) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i M_{i+1}. \quad (3.4)$$

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des subdivision de  $[a, b]$ .

$L_\sigma(\Gamma)$  est donc une longueur approchée (voir figure 3.1) ; on va «faire tendre  $h$  vers zéro».

---

<sup>1</sup>voir section 1.7 page 19

FIG. 3.1. La longueur  $L_\sigma(\Gamma)$ .

DÉFINITION 3.3. On appelle longueur de la courbe paramétrées  $\Gamma$  l'élément de  $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$L(\Gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} L_\sigma(\Gamma). \quad (3.5)$$

On dit que  $\Gamma$  est rectifiable lorsque  $L(\Gamma)$  est un réel, ce qui revient à dire qu'il existe un réel  $M$  tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \quad L_\sigma(\Gamma) \leq M. \quad (3.6)$$

THÉORÈME 3.4. Soit une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^1$ . Alors, l'arc  $\Gamma$  est rectifiable et

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|F'(t)\| dt. \quad (3.7)$$

On peut aussi écrire (et de façon formelle car la limite n'a guère de sens, puisque  $\sigma$  dépend de  $N$  paramètres) :

$$L(\Gamma) = \lim_{h \rightarrow 0} L_\sigma(\Gamma). \quad (3.8)$$

DÉMONSTRATION. Démontrons tout d'abord que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \quad L_\sigma(\Gamma) \leq \int_a^b \|F'(t)\| dt. \quad (3.9)$$

Remarquons tout d'abord que,

$$\forall (u, v) \in [a, b], \quad F(v) - F(u) = \int_u^v F'(t) dt, \quad (3.10)$$

et, donc en particulier,

$$\forall (u, v) \in [a, b] \quad u < v \implies \|F(v) - F(u)\| \leq \int_u^v \|F'(t)\| dt, \quad (3.11)$$

ce qui donne aussi

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad M_i M_{i+1} \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F'(t)\| dt. \quad (3.12)$$

Par sommation sur  $i$ , on déduit (3.9). On en déduit donc que l'arc est rectifiable et que, en prenant le sup :

$$L(\Gamma) \leq \int_a^b \|F'(t)\| dt. \quad (3.13)$$

L'inégalité contraire, plus difficile,

$$L(\Gamma) \geq \int_a^b \|F'(t)\| dt, \quad (3.14)$$

est rédigée en annexe D.  $\square$

REMARQUE 3.5. On peut réduire les hypothèses de régularité de  $F$  pour définir la longueur d'un arc ; par exemple, supposer que  $F$  n'est que  $C^1$  par morceaux, le nombre de ses points de discontinuité étant fini (ou dénombrables, c'est à dire en bijection avec  $\mathbb{N}$ ).

REMARQUE 3.6. Il existe des arc sans longueur ! C'est le cas des courbes fractales, qui possèdent un nombre infini de discontinuité, celles-ci «ne disparaissant pas par grossissement». C'est aussi le cas de la côte de la France, si on suppose la matière continue : chaque grossissement fait apparaître de nouveaux détails et  $L(\Gamma)$  est infini !

REMARQUE 3.7. Attention, la longueur de l'arc de courbe  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  est notée  $L(\Gamma)$ , mais dépend *a priori* de  $\Gamma$ ,  $I$  et  $F$ . Il en de même de la longueur  $L_\sigma(\Gamma)$ , associée à la subdivision  $\sigma$ . Moyennant certaines précautions, on peut montrer que  $L(\Gamma)$  ne dépend que de la partie de  $\Gamma$  de  $\mathcal{E}$  et que  $L_\sigma(\Gamma)$  ne dépend que de  $\Gamma$  et de  $\sigma$ . Voir annexe E.

On pourra ne mesurer qu'une partie de la longueur d'une courbe grâce à la proposition suivante, dont la preuve est immédiate :

PROPOSITION 3.8. *Soit une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^1$ . Pour tout couple  $(t_1, t_2)$  de  $I^2$  avec  $t_1 \leq t_2$ , la courbe  $\mathcal{C}_{|[t_1, t_2]}$  est définie par  $(\Gamma_{|[t_1, t_2]}, [t_1, t_2], F_{|[t_1, t_2]})$  où  $F_{|[t_1, t_2]}$  désigne la restriction de  $F$  à  $[t_1, t_2]$ . Elle est rectifiable et sa longueur vaut*

$$L(\Gamma_{|[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \|F'(t)\| dt. \quad (3.15)$$

### 3.2.2. Calcul pratique

On a, sous les hypothèses de régularité suffisante :

PROPOSITION 3.9.

– Si  $F$  est définie par  $F(t) = (x(t), y(t))$ , on a

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (3.16)$$

– Si  $F$  est définie en polaires, on a

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (3.17)$$

– Si la courbe est définie par  $y = f(x)$  sur  $[a, b]$  on a

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3.18)$$

DÉMONSTRATION. Cela vient de de (1.2) et de (2.12). Pour démontrer (3.18), il suffit de vérifier que la courbe peut être paramétrée par  $x(t) = t$  et  $y(t) = f(x(t)) = f(t)$ .  $\square$

### 3.2.3. Abscisse curviligne

Grâce à la proposition 3.8, on peut donner la définition suivante :

DÉFINITION 3.10. Soit une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^1$ . Soit  $t_0 \in I$  fixé. On définit l'application  $S$  sur  $I$  par

$$\forall t \in I, \quad S(t) = \begin{cases} -L(\Gamma|_{[t, t_0]}) & \text{si } t \leq t_0, \\ L(\Gamma|_{[t_0, t]}) & \text{si } t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Cette application est appelée abscisse curviligne orientée dans le sens de  $t$  croissants correspondant au choix de  $t_0$  pour origine. On dit que  $s = S(t)$  est l'abscisse curviligne de  $M(t)$ .

Pour toute cette section, on se donne une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^1$ .

On a la proposition suivante, dont la preuve est immédiate (grâce à la proposition 3.8 page précédente) :

PROPOSITION 3.11. On a, pour tout  $t \in I$ ,

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|F'(u)\| du, \quad (3.20a)$$

$$S'(t) = \|F'(t)\|. \quad (3.20b)$$

PROPOSITION 3.12.

- Si l'ensemble des points stationnaires est discret <sup>2</sup> alors  $S$  définit une bijection strictement croissante de  $I$  sur  $J = S(I)$  et la bijection réciproque  $S^{-1}$  est strictement croissante de  $J$  sur  $I$ .
- Si, de plus,  $F$  est régulière <sup>3</sup> et de classe  $C^k$ , pour  $k \geq 1$ , alors  $S$  et  $S^{-1}$  sont de classe  $C^k$ . La fonction  $\psi$  définie par

$$\psi = F \circ S^{-1} \quad (3.21)$$

est de classe  $C^k$  et  $(I, F)$  et  $(J, \psi)$  constituent deux paramétrages de  $\Gamma$ .

- Dans ce cas,

$$\forall s \in J, \quad \|\psi'(s)\| = 1, \quad (3.22)$$

ce qu'on traduit en disant que  $\psi$  est un paramétrage normal de  $\mathcal{C}$ .

DÉMONSTRATION.

- Ce point vient de (3.20b) et du cours d'analyse.
- Puisqu'en tout point,  $\|F'(t)\|$ , on a

$$\forall s \in S, \quad (S^{-1})'(s) = \frac{1}{S'(S^{-1}(s))} = \frac{1}{S'(t)},$$

et donc

$$\forall s \in S, \quad (S^{-1})'(s) = \frac{1}{\|F'(t)\|}. \quad (3.23)$$

<sup>2</sup>Un ensemble discret  $D$  d'un intervalle  $I$  est défini par la propriété suivante : chaque élément de  $D$  peut être isolé, c'est-à-dire, pour tout  $t$  de  $D$ , il existe  $\varepsilon$  tel que  $[t - \varepsilon, t] \cup ]t, t + \varepsilon]$  et  $D$  sont disjoints.

<sup>3</sup>tout point de  $\Gamma$  est régulier.

D'après le cours d'analyse,  $S$  et  $S^{-1}$  sont de classe  $C^k$ . On a aussi, par définition,

$$\forall (s, t) \in J \times I, \quad s = S(t),$$

et donc

$$\forall (s, t) \in J \times I, \quad F(t) = F(S^{-1}(s)) = F \circ S^{-1}(s).$$

– Enfin, d'après (3.23),

$$\forall s \in J, \quad \psi'(s) = (F \circ S^{-1})'(s) = F'(S^{-1}(s)) (S^{-1})'(s) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|},$$

dont découle (3.22).

□

### 3.3. Vecteur normé tangent $\vec{T}$

Pour toute cette section, on se donne une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^k$  où  $k \geq 1$  et régulière.  $S$  désigne l'abscisse curviligne orientée dans le sens des  $t$  croissants correspondant à une origine  $t_0$ . La fonction  $\psi$  a été définie par (3.21).

DÉFINITION 3.13. Le vecteur défini par

$$\forall s \in J, \quad \vec{T}(s) = \psi'(s), \tag{3.24}$$

est le vecteur normé tangent en  $M = F(t) = \psi(s)$ . La fonction  $\psi'$  est la fonction vecteur normé tangent.

Puisque  $\psi'(s)$  est colinéaire (et de même orientation) à  $F'(t) \neq 0$  et de norme 1, cela justifie ce vocable.

REMARQUE 3.14. On se méfiera des cas où l'ensemble des points doubles de  $F$  n'est pas fini ; on considérera, en pratique, des courbes où les points doubles sont en nombre fini (voir annexe E).

REMARQUE 3.15. En toute rigueur, le vecteur  $\vec{T}$  n'est pas défini aux points stationnaires (puisque  $\|F'(t)\|$  est nul). On pourra néanmoins, moyennant certaines précaution, le définir en ces points ; voir l'annexe F.

### 3.4. Simplifications de notations

Les notations précédentes  $S$ ,  $F \circ S^{-1}$ , ..., sont rigoureuses mais ne correspondent pas toujours aux notations des «mécaniciens» qui utilisent beaucoup ces notions, mais avec des notations plus simples et, somme toute, plus pratiques, même si cela s'accompagne d'une perte de rigueur. Nous prenons aussi ce parti pris simplificateur.

Nous assimilerons la fonction  $S$  et sa valeur  $s$  en les notant toutes les deux  $s$ . Nous noterons de même les fonctions sans leur variable, sauf ambiguïté ; par exemple, on notera  $\vec{T}$ ,  $\vec{OM}$  ...

Par ailleurs, si  $h = f \circ g$ , on sait que la formule des dérivations composée s'écrit

$$\forall x, \quad (f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{3.25}$$

Dans le terme de gauche de cette équation,  $f$  dépend de  $x$ , via  $g$  ; dans le terme de droite,  $f'$  dépend de  $g(x)$  et  $g$  dépend de  $x$ . On utilisera finalement, dans le même abus de notation signalé, la notation

suivante

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}, \quad (3.26)$$

mnémotechniquement plus simple à retenir ; on «simplifie» par  $dg$ .

On retiendra donc la formule (3.20b) sous la forme

$$\frac{ds}{dt} = \|F'(t)\| \quad (3.27)$$

La formule (3.24) pourra se retenir de la façon suivante :

$$\vec{T} = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} = \frac{dF}{ds} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}, \quad (3.28)$$

et se «justifier» de la façon suivante, grâce à (3.26) et (3.27),

$$\vec{T} = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} = \frac{dF}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dF}{ds}.$$

### 3.5. Repère de Frenet, courbure, Rayon de courbure

Pour toute cette section, on se donne une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^k$  où  $k \geq 2$  et régulière.

#### 3.5.1. Repère de Frenet

DÉFINITION 3.16. Pour tout  $t \in I$ , au point  $M(t)$  de  $\Gamma$ , on associe le repère orthonormé direct  $(M, \vec{T}, \vec{N})$ , appelé repère de Frenet en  $M(t)$ , où  $\vec{T}$  est le vecteur normé tangent et  $\vec{N}$  est le vecteur obtenu par rotation d'angle  $\pi/2$ .

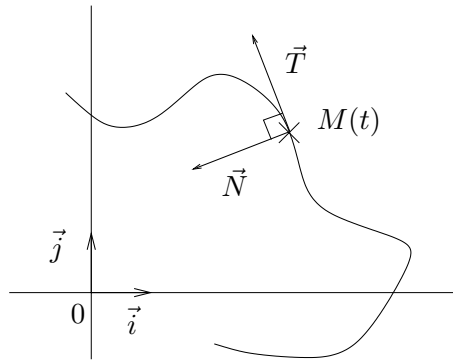


FIG. 3.2. Le repère de Frenet  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  au point  $M(t)$ .

Voir figure 3.2.

REMARQUE 3.17. Si le point  $M$  n'est pas simple, il existe, en toute rigueur, plusieurs repères de Frenet en ce point !

PROPOSITION 3.18 (Courbure et rayon de courbure).

- Le vecteur  $d\vec{T}/ds$  est colinéaire à  $\vec{N}$  et le nombre <sup>4</sup>  $c(s)$  tel que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c(s)\vec{N}, \quad (3.29)$$

est appelé courbure algébrique de la courbe en  $M$  ; le nombre  $|c(s)|$  est la courbure géométrique <sup>5</sup>.

- Si la courbure est non nulle, le nombre <sup>6</sup>  $R(s)$  défini par

$$R(s) = \frac{1}{c(s)}, \quad (3.30)$$

est appelé rayon de courbure algébrique ; le nombre  $|R(s)|$  est le rayon de courbure géométrique.

DÉMONSTRATION. Puisque  $F$  est au moins  $C^2$  et régulière,  $\vec{T}$  est défini et on peut le dériver une seconde fois. On a, puisque  $\vec{T}$  est unitaire

$$1 = \|\vec{T}\|^2 = \vec{T} \cdot \vec{T},$$

et par dérivation,

$$0 = \frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{T}) = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Ainsi  $d\vec{T}/ds$  est orthogonal à  $\vec{T}$  et donc colinéaire à  $\vec{N}$ . □

DÉFINITION 3.19 (Centre et cercle de courbure).

- Au point  $M$  de la courbe, si la courbure est non nulle, le point  $I$  tel que

$$\overrightarrow{MI} = R\vec{N}, \quad (3.31)$$

est appelé centre de courbure.

- Le cercle de centre  $I$  et de rayon  $|R|$  est appelé le cercle de courbure.

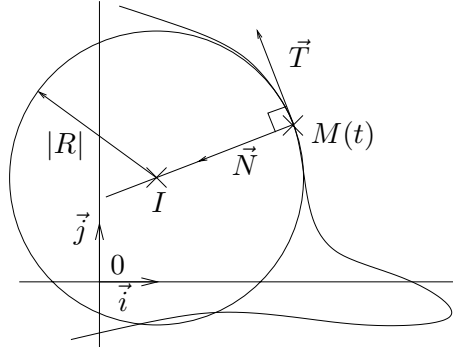


FIG. 3.3. Le repère de Frenet  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  au point  $M(t)$ , le centre et le cercle de courbure.

<sup>4</sup>aussi noté  $c$ .

<sup>5</sup>par défaut, en l'absence de précision, une courbure sera algébrique.

<sup>6</sup>aussi noté  $R$ .



REMARQUE 3.20. La définition implique que le cercle de courbure passe par le point  $M$  et qu'il est tangent à la courbe en  $M$ .

De plus, c'est le cercle qui épouse au mieux la forme de la courbe (voir figure 3.3). On parle aussi de cercle osculateur. Une justification de ce fait et de la terminologie employée est donnée en annexe G. On y verra aussi la notion de parabole osculatrice.

REMARQUE 3.21. Avec la notation  $\psi$ , on a, pour tout  $s \in J$ ,

$$\psi(s) = F \circ S^{-1}(s), \quad (3.32a)$$

$$\psi'(s) = \vec{T}, \quad (3.32b)$$

$$\psi''(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} = c(s)\vec{N}. \quad (3.32c)$$

REMARQUE 3.22. La fonction  $s \mapsto c(s)$  est de classe  $C^{k-2}$ .

EXEMPLE 3.23. Étudions un cercle de centre l'origine et de rayon  $\rho$  dont un paramétrage peut être :

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad F(t) = \rho(\cos t, \sin t) = \rho \vec{u}_t, \quad (3.33)$$

avec la notation (2.4) du chapitre 2. On vérifie aisément que

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad F'(t) = \rho(-\sin t, \cos t) = \rho \vec{v}_t. \quad (3.34)$$

et donc

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad \|F'(t)\| = \rho. \quad (3.35)$$

et que, si l'origine est choisie en  $t_0 = 0$ , on a

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad S(t) = \int_0^t \rho du,$$

soit

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad S(t) = \rho t. \quad (3.36)$$

On a donc

$$t = S(t)/\rho = s/\rho = S^{-1}(s),$$

et donc

$$\forall s \in [0, 2\pi\rho[, \quad S^{-1}(s) = \frac{s}{\rho}. \quad (3.37)$$

On a ainsi un paramétrage normal du cercle  $\psi(s) = F(S^{-1}(s))$  soit

$$\forall s \in [0, 2\pi\rho[, \quad \psi(s) = \rho \left( \cos \left( \frac{s}{\rho} \right), \sin \left( \frac{s}{\rho} \right) \right). \quad (3.38)$$

ci, pour calculer  $S^{-1}$ , il est important de dissocier  $s$  et  $S$  !

Pour calculer  $\vec{T}$ , on peut utiliser (3.28) :

$$\vec{T} = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} = \frac{\rho \vec{v}_t}{\rho},$$

et donc

$$\vec{T} = \vec{v}_t \quad (3.39)$$

On peut aussi utiliser le paramétrage normal (3.38) :

$$\vec{T} = \psi'(s) = \left( -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right), \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right) = \vec{v}_t.$$

De (3.39), on déduit

$$\vec{N} = -\vec{u}_t \quad (3.40)$$

De (3.39), on déduit aussi

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{v}_t. \quad (3.41)$$

Grâce à (3.29), (3.40) et (3.41), on a

$$R = \rho. \quad (3.42)$$

On en déduit que

$$I = 0. \quad (3.43)$$

Ainsi, le cercle se confond avec son cercle de courbure.

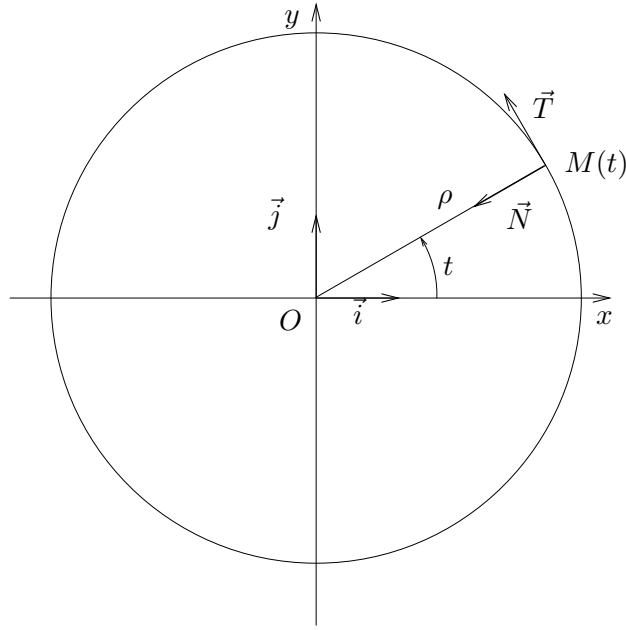


FIG. 3.4. courbure et cercle de courbure

Voir la figure 3.4.

EXEMPLE 3.24. On vérifie que pour une droite, le vecteur  $\vec{T}$  est le vecteur directeur unitaire de la droite et est constant. De (3.29), on déduit donc que

$$c = 0, \quad R = +\infty. \quad (3.44)$$

PROPOSITION 3.25 (première et seconde formule de Frenet). *On a*

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c(s)\vec{N}, \quad (3.45a)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -c(s)\vec{T}. \quad (3.45b)$$

DÉMONSTRATION. La formule (3.45a) n'est autre que (3.29). On écrit, de même, puisque  $\vec{N}$  est unitaire

$$1 = \|\vec{N}\|^2 = \vec{N} \cdot \vec{N},$$

et par dérivation,

$$0 = \frac{d}{ds} (\vec{N} \cdot \vec{N}) = \vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 2\vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}.$$

Ainsi  $d\vec{N}/ds$  est orthogonal à  $\vec{N}$  et donc colinéaire à  $\vec{T}$ . Ainsi, il existe  $\lambda(s)$  tel que

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \lambda(s)\vec{T}. \quad (3.46)$$

Puisque  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  sont orthogonaux, on a

$$0 = \vec{T} \cdot \vec{N},$$

et par dérivation,

$$0 = \frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{N}) = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}.$$

Ainsi, d'après (3.45a) et (3.46), il vient

$$0 = \vec{N} \cdot (c(s)\vec{N}) + \vec{T} \cdot (\lambda(s)\vec{T}) = c(s) + \lambda(s),$$

ce qui nous permet de conclure. □

### 3.5.2. Fonction angulaire

DÉFINITION 3.26. Pour tout  $M$  de  $\Gamma$ , on définit l'angle  $\phi$  par

$$\phi = \left( \widehat{\vec{i}, \vec{T}} \right) \quad [2\pi]. \quad (3.47)$$

On a donc une fonction  $\phi$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}$ .

On admet la proposition suivante :

PROPOSITION 3.27. *La fonction  $\phi$  est de classe  $C^{k-1}$ .*

On a aussi

PROPOSITION 3.28. *On peut écrire :*

$$\vec{T} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}, \quad (3.48a)$$

$$\vec{N} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}, \quad (3.48b)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad (3.48c)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \phi, \quad (3.48d)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = c. \quad (3.48e)$$

DÉMONSTRATION. Les égalités (3.48a) et (3.48b) proviennent des définitions.

On en déduit

$$\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} = \vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d}{ds} (x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j},$$

dont on déduit (3.48c) et (3.48d).

Enfin, grâce à (3.45a), on a

$$\begin{aligned} c(s) \left( -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \right) &= \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \right) = \\ &= \frac{d\phi}{ds} \frac{d}{d\phi} \left( \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \right) = \frac{d\phi}{ds} \left( -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \right). \end{aligned}$$

On en déduit (3.48e). □

### 3.5.3. Calcul explicite du rayon de courbure en un point birrégulier

Nous supposons de plus que le point  $M(t)$  est birrégulier, c'est-à-dire  $(F'(t), F''(t))$  forme une base (ou encore  $p = 1, q = 2$ ).

PROPOSITION 3.29. *On a*

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}. \quad (3.49)$$

DÉMONSTRATION. Puisque le  $M(t)$  est birrégulier, le dénominateur du terme de droite de (3.49) est non nul.

Par ailleurs, si  $x'$  est non nul, il est immédiat que

$$\tan \phi = \frac{y'}{x'}, \quad (3.50)$$

dont on déduit par dérivation

$$\frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} (\tan \phi) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{x'} \right) = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}.$$

Ainsi, en réutilisant (3.50),

$$\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} = \frac{d\phi}{dt} (1 + \tan^2 \phi) = \frac{d\phi}{dt} \left( 1 + \left( \frac{y'}{x'} \right)^2 \right) = \frac{d\phi}{dt} \frac{x'^2 + y'^2}{x'^2}.$$

Ainsi, par transitivité, il vient

$$\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{d\phi}{dt}. \quad (3.51)$$

Par ailleurs, grâce à (3.48e), on a

$$c = \frac{d\phi}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\|F'(t)\|} \frac{d\phi}{dt},$$

et donc

$$c = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{d\phi}{dt} \quad (3.52)$$

De (3.51) et (3.52), on tire donc

$$c = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Puisque  $x'y'' - x''y'$  est non nul, on peut inverser cette égalité et obtenir (3.49).

Si  $y'$  est non nul, on fait le même raisonnement avec

$$\frac{1}{\tan \phi} = \frac{x'}{y'}.$$

□

PROPOSITION 3.30. *Pour une courbe d'équation  $y = f(x)$ , on a*

$$R(x) = \frac{\left(1 + f'^2(x)\right)^{3/2}}{f''(x)}. \quad (3.53)$$

DÉMONSTRATION. On applique la formule (3.49), avec  $x(t) = t$  et  $y = f(t) = f(x)$ . □

PROPOSITION 3.31. *On peut écrire les formules intrinsèques :*

$$R = \frac{1}{\det(\psi'(s), \psi''(s))}, \quad (3.54a)$$

$$R = \frac{\|F'(t)\|^3}{\det(F'(t), F''(t))}. \quad (3.54b)$$

DÉMONSTRATION. D'après les formules de Frenet, on a successivement

$$\vec{T} = \psi'(s),$$

et

$$c\vec{N} = \vec{T}' = \psi''(s).$$

Ainsi,

$$\det(\psi'(s), \psi''(s)) = \det(\vec{T}, c\vec{N}) = c \det(\vec{T}, \vec{N}) = c, \quad (3.55)$$

dont on déduit (3.54a).

Par ailleurs, on a

$$F'(t) = \frac{ds}{dt} \frac{d\psi}{ds} = s'(t) \psi'(s)$$

De même,

$$F''(t) = \frac{d}{dt} (s'(t) \psi'(s)) = s''(t) \psi'(s) + s'(t) \frac{ds}{dt} \frac{d\psi'(s)}{ds} = s''(t) \psi'(s) + s'^2(t) \psi''(s).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(F'(t), F''(t)) &= \det\left(s'(t)\psi'(s), s''(t)\psi'(s) + s'^2(t)\psi''(s)\right) = \det\left(s'(t)\psi'(s), s''(t)\psi'(s)\right) \\ &\quad + \det\left(s'(t)\psi'(s), s'^2(t)\psi''(s)\right) = s'(t)^3 \det(\psi'(s), \psi''(s)) = \|F'(t)\|^3 \det(\psi'(s), \psi''(s)), \end{aligned}$$

et donc, d'après (3.54a),

$$\det(F'(t), F''(t)) = \|F'(t)\|^3 c,$$

dont on déduit (3.54b).  $\square$

AUTRE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.29. D'après (3.54b), il vient

$$c = \frac{\det(F'(t), F''(t))}{\|F'(t)\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$\square$

PROPOSITION 3.32. On a, pour une courbe en coordonnées polaires,

$$R(\theta) = \frac{\left(r^2(\theta) + r'^2(\theta)\right)^3}{r^2(\theta) + 2r'(\theta)r''(\theta) - r(\theta)r'''(\theta)}. \quad (3.56)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser (3.54b) et les résultats (2.12) et (2.15) du chapitre 2.  $\square$

PROPOSITION 3.33. On a, pour une courbe en coordonnées polaires, en posant  $u(\theta) = 1/r(\theta)$ ,

$$R(\theta) = \frac{u^2(\theta) + u'^2(\theta)}{u^3(\theta)(u(\theta) + u''(\theta))}. \quad (3.57)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le lemme 2.7 page 25 du chapitre 2.  $\square$

### 3.5.4. Calcul informatique du rayon et du centre de courbure en un point birrégulier

Voir les propositions de l'annexe H.

Les formules de l'annexe H peuvent être confiées à un langage symbolique, comme maple ou matlab. On consultera les fonctions matlab `prepar_courbure` et `prepar_courbure_pol` qui exploitent les résultats des propriétés H.1 et H.2. Voir aussi les fonctions `trace_frenet_courbure` et `trace_frenet_courbure_pol` qui tracent, en un point, le cercle de courbure et la parabole osculatrice (voir définition en annexe G).

Grâce à ces fonctions, on a pu traiter les exemples suivants :

EXEMPLE 3.34. Cercle de courbure de la courbe définie par

$$F(t) = 1, 5(\cos t, \sin t), \quad (3.58)$$

au voisinage de  $t = \pi/4$ . Voir figure 5(a) page suivante

EXEMPLE 3.35. Cercle de courbure de la courbe définie par

$$F(t) = (\cos(t) - 2\cos(t/2), \sin(t) - 2\sin(t/2)), \quad (3.59)$$

au voisinage de  $t = \pi/2$ . Voir figure 5(b) page suivante.

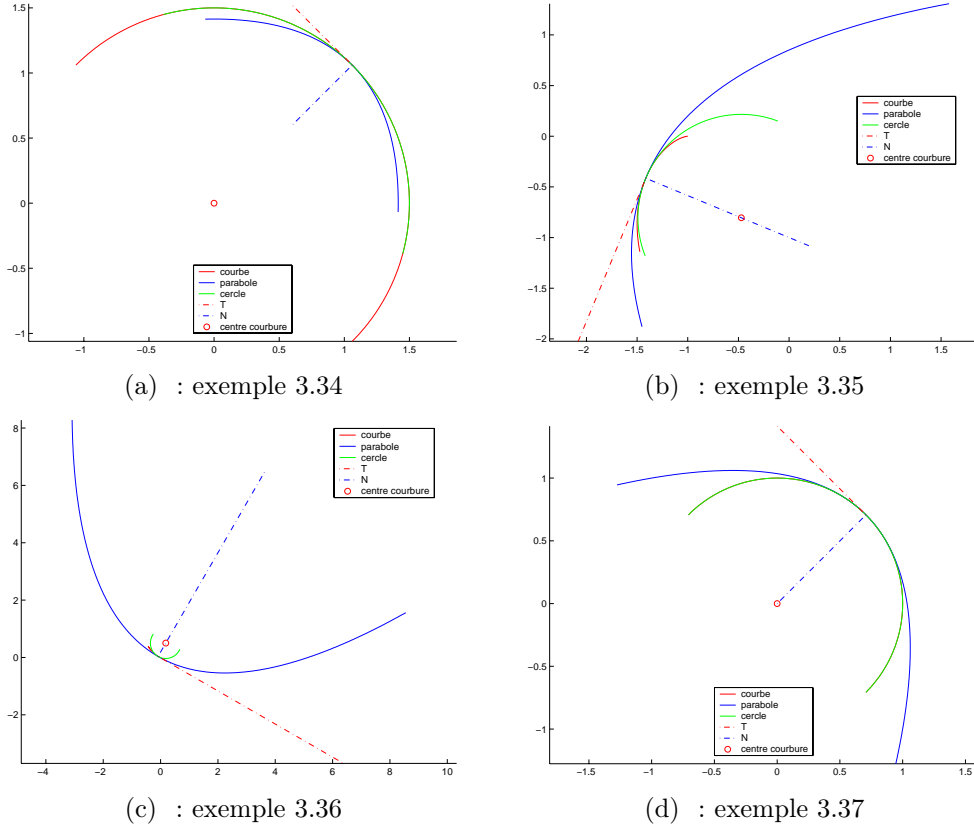


FIG. 3.5. Cercle de courbure et parabole osculatrice pour les exemples 3.34 à 3.37.

EXEMPLE 3.36. Cercle de courbure de la courbe définie par

$$F(t) = (t + \sin(t) - 4 \sin(t/2), 3 + \cos(t) - 4 \cos(t/2)), \quad (3.60)$$

au voisinage de  $t = \pi/3$ . Voir figure 5(c).

EXEMPLE 3.37. Cercle de courbure de la courbe définie en polaire par

$$r(\theta) = 1, \quad (3.61)$$

au voisinage de  $\theta = \pi/4$ . Voir figure 5(d).

### 3.5.5. Calcul pratique du rayon et du centre de courbure en un point birrégulier

Les formules de la section 3.5.3 ou celles de l'annexe H ne sont guère utilisées pour des calculs «à la main».

De façon pratique, on pourra procéder ainsi en utilisant les différentes formules de ce chapitre :

- Pour une courbe définie par  $F$  :

(1) On calcule  $s$  grâce à

$$\frac{ds}{dt} = \|F'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}. \quad (3.62a)$$

(2) On calcule  $\vec{T}$  en écrivant

$$\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{1}{\|F'(t)\|} F'(t). \quad (3.62b)$$

(3) Si  $\vec{T} = (a, b)$ , on a alors

$$\vec{N} = (-b, a). \quad (3.62c)$$

(4) Grâce à la première formule de Frenet, on a

$$\frac{1}{\|F'(t)\|} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = c\vec{N}, \quad (3.62d)$$

dont on déduit la valeur de  $c$ .

(5) On peut en déduire la valeur de  $\phi$  grâce à

$$c = \frac{d\phi}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\|F'(t)\|} \frac{d\phi}{dt}. \quad (3.62e)$$

ou grâce à

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \phi, \quad (3.62f)$$

dont on tire

$$\frac{1}{\|F'(t)\|} \frac{dx}{dt} = \cos \phi, \quad \frac{1}{\|F'(t)\|} \frac{dy}{dt} = \sin \phi. \quad (3.62g)$$

- Variante : on calcule d'abord  $\phi$  grâce à (3.62g), on en déduit ensuite  $c$  grâce à (3.62e).
- Autre variante : on calcule  $s$  d'abord  $\phi$  grâce à (3.62a), on en déduit alors  $t$  en fonction de  $s$ . On peut donc déterminer le paramétrage normal  $\psi(s)$ . On détermine toutes les grandeurs précédentes directement en fonction de  $s$ .
- Pour une courbe définie en polaire, le plan est le même, sauf que  $t$  est remplacé par  $\theta$  et (3.62a) est remplacé par

$$F'(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta. \quad (3.63)$$

On travaillera dans la base locale  $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ .

EXEMPLE 3.38. Reprenons une généralisation de l'exemple 3.35 page 45 : soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs distincts et  $F$  définie par

$$F(t) = (a \cos(t/a) - b \cos(t/b), a \sin(t/a) - b \sin(t/b)). \quad (3.64)$$

Grâce aux formules de trigonométrie usuelles, on a

$$x'(t) = 2 \sin(At) \cos(Bt), \quad (3.65)$$

$$y'(t) = 2 \sin(Bt) \sin(At). \quad (3.66)$$

où

$$A = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (3.67)$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (3.68)$$



On en déduit

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 4 \sin^2 \left( \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{t}{2} \right),$$

et donc

$$\|F'(t)\| = 2 |\sin(At)| = 2\varepsilon(t) \sin(At), \quad (3.69)$$

où, si  $\sin(At)$  est non nul,  $\varepsilon(t)$  est défini par

$$\varepsilon(t) = \text{sign}(\sin(At)) \in \{-1, 1\}. \quad (3.70)$$

On en déduit donc

$$\vec{T} = \varepsilon(t) (\cos(Bt), \sin(Bt)), \quad (3.71)$$

et donc

$$\vec{N} = \varepsilon(t) (-\sin(Bt), \cos(Bt)). \quad (3.72)$$

Grâce à (3.62d), on a

$$R = \frac{1}{c} = \frac{4ab}{a+b} |\sin(At)|. \quad (3.73)$$

Grâce à (3.62e), on en déduit, si  $\varepsilon(t) = 1$  par exemple

$$\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) t. \quad (3.74)$$

Si, on utilise la variante proposée, on obtient en utilisant (3.62g),

$$\cos \left( \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{t}{2} \right) = \varepsilon(t) \cos \phi, \quad \sin \left( \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{t}{2} \right) = \varepsilon(t) \sin \phi. \quad (3.75)$$

On retrouve donc (3.74),  $\varepsilon(t) = 1$  par exemple. Si on utilise ensuite (3.62e), on déduit alors le résultat de (3.73).

### 3.6. Un peu de cinématique du point

Les notions des sections 3.3 et 3.5 sont naturellement utilisées en cinématique du point matériel : on se suppose la trajectoire connue sous la forme  $t \mapsto F(t) = (x(t), y(t))$ , où ici  $t$  désigne le temps, paramètre naturel. L'arc  $\Gamma$  est donc l'ensemble des positions prises par le point matériel.

Pour toute cette section, on supposera  $F$  de classe  $C^2$  (ou seulement deux fois dérivable).

Aux point stationnaires, le repère de Frenet peut être défini grâce aux résultats de l'annexe F.

Rappelons la définition usuelle suivante, en terme de cinématique :

DÉFINITION 3.39. Si la fonction  $F$  est connue, on appelle

$$\overrightarrow{OM} = F(t), \text{ la position à l'instant } t; \quad (3.76a)$$

$$\vec{v} = F'(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \text{ la vitesse à l'instant } t; \quad (3.76b)$$

$$v = \|\vec{v}\|, \text{ la vitesse scalaire à l'instant } t; \quad (3.76c)$$

$$\vec{\gamma} = F''(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}, \text{ l'accélération à l'instant } t. \quad (3.76d)$$

PROPOSITION 3.40. *On a*

$$\vec{v} = v\vec{T}, \quad (3.77a)$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (3.77b)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}. \quad (3.77c)$$

DÉMONSTRATION. Les deux équations (3.77a) et (3.77b) sont immédiates si on utilise le fait que  $v = \|F'(t)\| = ds/dt$ . Pour démontrer (3.77c), on écrit, grâce à la première formule de Frenet

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= F''(t), \\ &= \frac{d}{dt} (v\vec{T}), \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}, \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{ds}, \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2c\vec{N}, \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}. \end{aligned}$$

□

Pour que (3.77c) demeure vraie si  $c = 0$ , on posera  $0 = 1/\infty$ .

On appellera  $dv/dt$  l'accélération tangentielle (la composante de  $\vec{\gamma}$  sur  $\vec{T}$ ) et  $v^2/R$  l'accélération normale (la composante de  $\vec{\gamma}$  sur  $\vec{N}$ ).

Dans le cas particulier d'une trajectoire rectiligne, on vérifie (voir exemple 3.24 page 41) que  $c = 1/R = 0$ . Le vecteur  $\vec{T}$  est constant et on a

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T}. \quad (3.78)$$

Dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire,  $R$  est constant et l'accélération normale ne dépend que de la vitesse scalaire.

Dans le cas particulier où la vitesse scalaire  $v$  est constante, on a

$$\vec{\gamma} = \frac{v^2}{R}\vec{N}. \quad (3.79)$$

REMARQUE 3.41. Si le point matériel de masse  $M$ , n'est soumis qu'à une réaction  $\vec{\sigma}$  du sol, on sait que le principe fondamental de la dynamique fournit

$$\vec{\sigma} = M \left( \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \right). \quad (3.80)$$

Si on imagine un point matériel immobile dans le référentiel lié à ce point en mouvement (un passager dans une voiture ou un wagon, considéré comme ponctuel), lui même soumis à une seule

réaction  $\vec{\sigma}$ , le principe fondamental de la dynamique donne alors<sup>7</sup>

$$\vec{\sigma} = m \left( \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \right). \quad (3.81)$$

La force  $(mv^2/R) \vec{N}$  est la réaction qui s'oppose à la force centrifuge, qui a tendance à expulser le voyageur ; la force  $dv/dt \vec{T}$  est la réaction qui s'oppose à la force qui plaque le voyageur sur son fauteuil (en phase d'accélération).

Si on utilise le système de coordonnées polaires généralisées  $(\theta(t), r(t))$  (voir (2.8), on a :

PROPOSITION 3.42 (Coordonnées polaires généralisées). *On a*

$$\vec{v} = r'(t) \vec{u}_{\theta(t)} + \theta'(t) r(t) \vec{v}_{\theta(t)}, \quad (3.82a)$$

$$\gamma = \left( r''(t) - r\theta'^2(t) \right) u_{\theta(t)} + \left( 2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) \right) v_{\theta(t)}. \quad (3.82b)$$

DÉMONSTRATION. Démontrons par exemple (3.82a). On écrit successivement :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= F'(t), \\ &= (r(t) \vec{u}_{\theta(t)})', \\ &= r'(t) u_{\theta(t)} + r(t) \frac{d}{dt} (u_{\theta(t)}), \\ &= r'(t) u_{\theta(t)} + r(t) \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} (u_{\theta(t)}), \\ &= r'(t) u_{\theta(t)} + r(t) \frac{d\theta}{dt} v_{\theta(t)}. \end{aligned}$$

L'égalité (3.82b) se démontre de même. □

Dans le cas des coordonnées polaires usuelles, on a  $\theta = t$  et donc on retrouve les règles de dérivations déjà vues.

PROPOSITION 3.43 (Coordonnées polaires). *On a*

$$\vec{v} = r'(\theta) \vec{u}_{\theta} + r(\theta) \vec{v}_{\theta}, \quad (3.83a)$$

$$\gamma = (r''(\theta) - r(\theta)) u_{\theta} + 2r'(\theta) v_{\theta}. \quad (3.83b)$$

EXEMPLE 3.44. Voir l'annexe I.

## 3.7. Enveloppes d'une famille de droites, développée d'une courbe

### 3.7.1. Enveloppe d'une famille de droites

DÉFINITION 3.45. Soit  $(D_t)_{t \in I}$  une famille de droites du plan d'équation

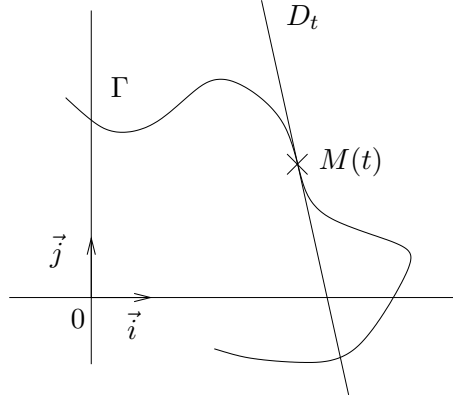
$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0, \quad (3.84)$$

où pour tout  $t$ ,  $(a(t), b(t))$  est non nul.

Une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  de classe  $C^1$  est une enveloppe de la famille  $(D_t)_{t \in I}$  lorsque, pour tout  $t \in I$ , la droite  $D_t$  est la tangente en  $M(t)$  à  $\Gamma$ . Le point  $M(t)$  où  $D_t$  est la tangente à  $\Gamma$  s'appelle le point caractéristique de  $D_t$ .

---

<sup>7</sup>si les dimensions de la voiture ou du wagon sont «faibles» ou que le point matériel est «proche» du centre de gravité.

FIG. 3.6. La droite  $D_t$ , le point  $M(t)$  et la courbe.

Voir la figure 3.6.

Cette définition ne fait intervenir que la structure de l'espace  $E$  ou  $\mathcal{E}$ .

Pour la suite on suppose que  $a$  et  $b$  sont  $C^1$ .

PROPOSITION 3.46. Soit  $(D_t)_{t \in I}$  une famille de droites du plan d'équation (3.84), où pour tout  $t$ ,  $(a(t), b(t))$  est non nul. On suppose que, pour tout  $t \in I$ ,

$$\delta(t) = \det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.85)$$

Il existe une unique courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  qui soit une enveloppe de la famille  $(D_t)_{t \in I}$ . Elle est définie par  $F(t) = (x(t), y(t))$  où

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0, \quad (3.86a)$$

$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0, \quad (3.86b)$$

ce qui est équivalent à

$$x(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \det \begin{pmatrix} c(t) & b(t) \\ c'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \det \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  soit une enveloppe de la famille  $(D_t)_{t \in I}$ . Notons  $M(t) = (x(t), y(t))$  le point caractéristique de la droite  $D_t$ . On a donc, pour tout  $t \in I$

$$M(t) \in D_t, \quad (3.88a)$$

$$F'(t) \in \Delta_t, \quad (3.88b)$$

où  $\Delta_t$  désigne la direction de la droite  $D_t$ . Cela est donc équivalent à, pour tout  $t \in I$

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0, \quad (3.89a)$$

$$a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0. \quad (3.89b)$$

On a, pour tout  $t$ ,

$$(a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t))' = a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) + a(t)x'(t) + b(t)y'(t).$$

Ainsi en dérivant (3.89a), compte tenu de (3.89b), on constate que (3.89) implique pour tout  $t \in I$

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0, \quad (3.90a)$$

$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0. \quad (3.90b)$$

Réciproquement, si on a (3.90), on peut montrer, sous réserve de régularité suffisante, que (3.88b) est vraie (voir [GAJ94]).

Ainsi, l'existence et l'unicité de la courbe est montrée. Elle est définie par (3.86) équivalent à (3.87).  $\square$

Donnons une proposition admise (voir [GAJ94]) :

PROPOSITION 3.47. *Soit  $(D_t)_{t \in I}$  une famille de droites du plan d'équation (3.84), où pour tout  $t$ ,  $(a(t), b(t))$  est non nul. On suppose que, pour tout  $t \in I$ , on a (3.85).*

*Alors, il existe un voisinage  $V$  de 0 tel que, pour tout  $h \in V \setminus \{0\}$ , les droites  $D_{t+h}$  et  $D_t$  sont sécantes. Notons  $P_t(h)$  l'unique point d'intersection de ces deux droites. On a alors*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} P_t(h) = M(t). \quad (3.91)$$

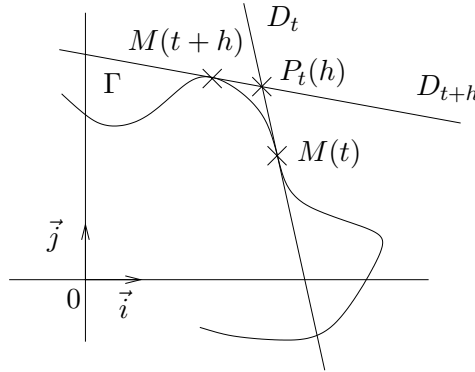


FIG. 3.7. Les droites  $D_t$  et  $D_{t+h}$  et les points  $P_t(h)$  et  $M(t)$ .

Voir la figure 3.7.

EXEMPLE 3.48. Pour tout  $t \in I = ]0, 1[$ , on considère le point  $A_t = (t, 0)$  et  $B_t = (0, 1 - t)$  et  $D_t = (A_t B_t)$ .

Voir la figure 3.8.

On vérifie que son équation est

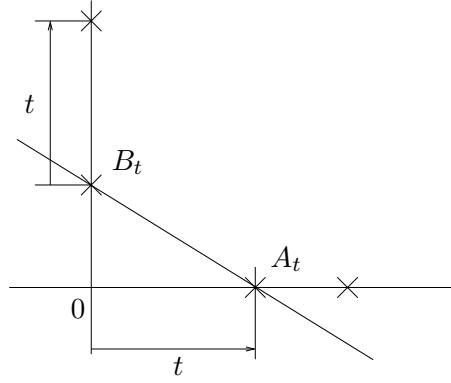
$$y = -\frac{1-t}{t}x + 1-t,$$

soit

$$(t-1)x - ty + (1-t)t = 0.$$

On a donc, pour tout  $t \in I$ ,

$$a(t) = t-1, \quad b(t) = -t, \quad c(t) = (1-t)t = -t^2 + t. \quad (3.92)$$

FIG. 3.8. la droite  $(A_t B_t)$ .

Ainsi, il vient

$$\delta(t) = \det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -t \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(t-1) + t = 1.$$

On a donc

$$x(t) = -\det \begin{pmatrix} -t^2 + t & -t \\ 1 - 2t & -1 \end{pmatrix} = t - t^2 - t(1 - 2t) = t^2,$$

$$y(t) = -\det \begin{pmatrix} t-1 & -t^2 + t \\ 1 & -2t + 1 \end{pmatrix} = -(-2t^2 + 2t + t^2 - 1) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2.$$

On a donc la courbe paramétrée pour  $t \in ]0, 1[$  :

$$F(t) = (t^2, (t-1)^2). \quad (3.93)$$

Elle est symétrique par rapport à la droite  $Y = X$  et admet l'équation cartésienne suivante :

$$Y = (\sqrt{X} - 1)^2. \quad (3.94)$$

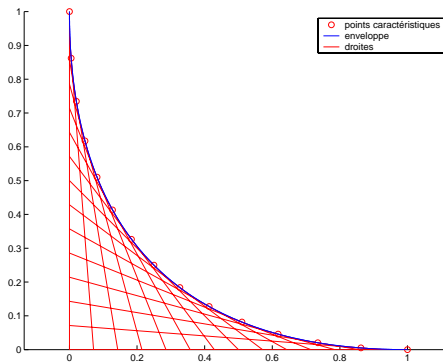


FIG. 3.9. Quelques droites  $D_t$ , quelques points caractéristiques et la courbe enveloppe de l'exemple 3.48.

Voir la figure 3.9, faite à partir du script matlab `exemple_evlppe_droite01.m`.

Il est aussi possible de programmer de façon symbolique les formules (3.87) et d'en faire un soft matlab. Voir les fonctions `prepar_enveloppe.m` et `trace_enveloppe.m`.

### 3.7.2. Développée d'une courbe

DÉFINITION 3.49 (Normale, développée). Soit  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  une courbe paramétrée régulière.

- Pour tout  $t \in I$ , on appelle la normale à  $\Gamma$  en  $M(t)$  la perpendiculaire à la tangente en  $M(t)$ .
- On appelle développée d'une courbe paramétrée l'enveloppe de ses normales.

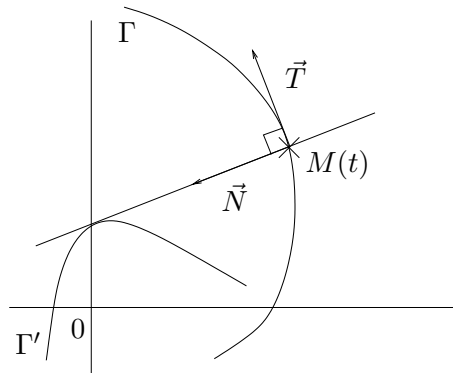


FIG. 3.10. la courbe et sa développée  $\Gamma'$ .

Voir la figure 3.10.

Puisque la normale  $N_t$  est perpendiculaire au vecteur  $(x'(t), y'(t))$  et passe par le point  $M(t)$ , on vérifie que son équation est

$$(X - x(t))x'(t) + (Y - y(t))y'(t) = 0. \quad (3.95)$$

PROPOSITION 3.50. *Si la courbe paramétrée est birrégulière, sa développée est l'ensemble des centres de courbure.*

DÉMONSTRATION. Avant de donner la preuve «rigoureuse», on peut donner l'argument formel suivant : selon la proposition 3.47, le point caractéristique  $M(t)$  est la limite, pour  $h$  tendant vers zéro de l'intersection de la normale  $N_t$  et de la normale  $N_{t+h}$ . D'autre part, d'après l'annexe G, la courbe s'identifie localement à l'ordre deux à son cercle de courbure. On peut estimer, à l'ordre un, que la tangente et sa normale sont donc approchées par la tangente et sa normale au cercle de courbure. Or, toutes les normales au cercle de courbure passent par son centre et donc la limite de l'intersection  $N_t$  et de  $N_{t+h}$  serait le centre de courbure.

Justifions maintenant cela avec rigueur. Avec les notations de la proposition (3.46), la normale d'équation (3.95) vérifie

$$a(t) = x'(t), \quad b(t) = y'(t), \quad c(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t). \quad (3.96)$$

On a

$$\delta(t) = a(t)b'(t) - a'(t)b(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \neq 0, \quad (3.97)$$

puisque la courbe est birrégulière. L'existence et l'unicité de la courbe enveloppe est donc acquise d'après la proposition 3.46.

On pourrait poursuivre les calculs et montrer de façon analytique ce résultat en calculant les coordonnées du point caractéristique. Cette méthode sera vue en TD (voir TD 3, exercice 3.2).

On adopte ici une méthode moins analytique. On peut supposer que la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne, de même que le centre de courbure  $I(s)$  au point  $M(s)$ . Notons  $\Gamma'$  la courbe constituée de l'ensemble des centres de courbure  $I(s)$ .

Montrons que le centre de courbure  $I(s)$  est le point caractéristique de la normale  $N_s$ . Par définition,  $I(s)$  appartient à la normale  $N_s$ . Il ne reste plus qu'à montrer que la tangente à la courbe  $\Gamma'$  en  $I(s)$  est portée par  $N_s$ , c'est à dire  $d\vec{OI}/ds$  est colinéaire à  $\vec{N}_s$ . En utilisant la seconde formule de Frenet et la définition du centre  $I$  de courbure, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{OI}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{OM} + \vec{MI}), \\ &= \vec{T} + \frac{d}{ds} (R\vec{N}), \\ &= \vec{T} + \frac{dR}{ds}\vec{N} + R\frac{d\vec{N}}{ds}, \\ &= \vec{T} + \frac{dR}{ds}\vec{N} - R\kappa\vec{T}, \\ &= \frac{dR}{ds}\vec{N},\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure si  $dR/ds$  est non nul. Si cela est nul, on admettra que cela sera vrai.  $\square$

On peut donc, pour déterminer la développée d'une courbe :

- Utiliser la définition (3.95) de la normale  $N_t$  et grâce à la proposition 3.46, en déterminer l'enveloppe.
- Utiliser les coordonnées explicites du centre de courbure.

En fait, ces deux méthodes mènent exactement aux mêmes calculs (voir résultat (3.3), TD 3, exercice 3.2).

Grâce aux résultats de l'annexe H, on peut donc programmer en symbolique le tracé d'une développée ! Voir les fonctions `prepar_developee.m`, `trace_developee.m`, `prepar_developee_pol.m` et `trace_developee_pol.m`.

EXEMPLE 3.51. Reprenons l'exemple 3.35 page 45.

Voir la figure 3.11 faite à partir du script matlab `exemple_developee01.m`.

EXEMPLE 3.52. Reprenons l'exemple 3.36 page 46.

Voir la figure 3.12 faite à partir du script matlab `exemple_developee02.m`.

## 3.8. Applications

Elles sont très nombreuses.

### 3.8.1. Résistance des matériaux

On rappellera la section 1.8 page 19.



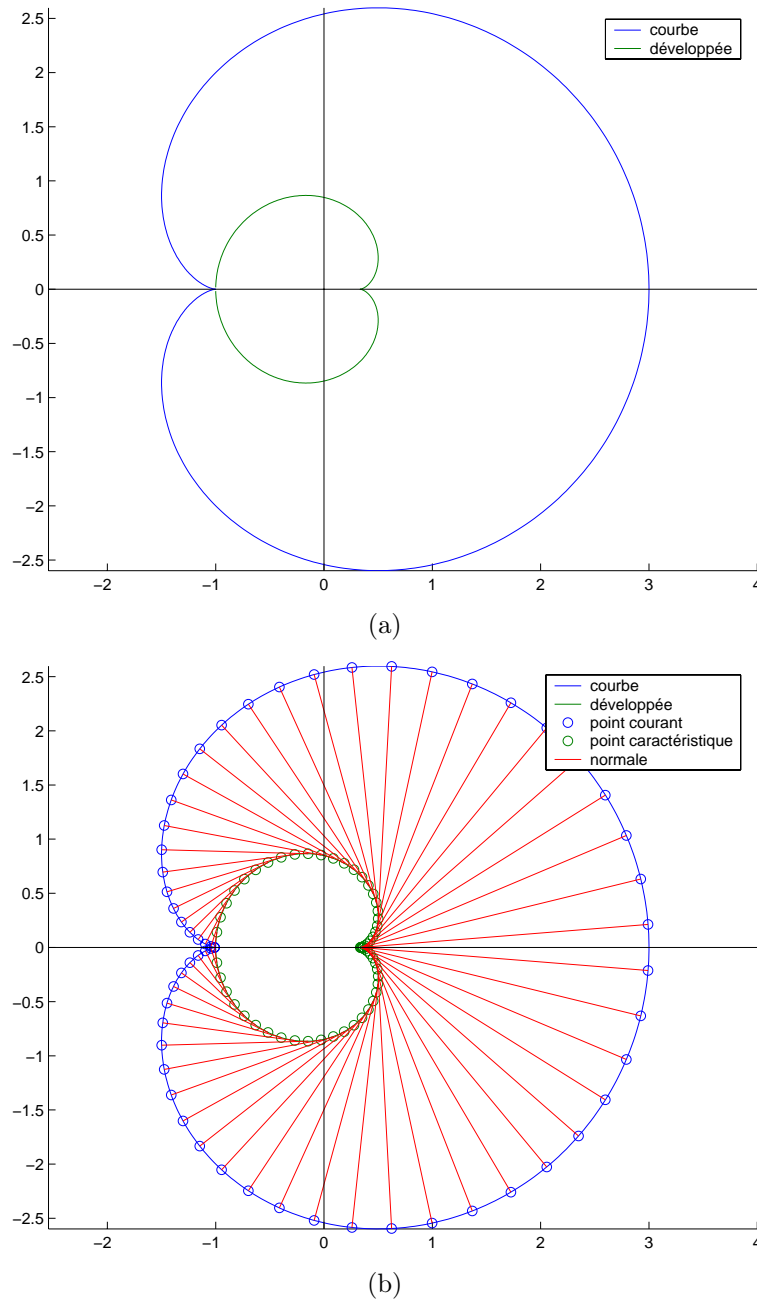
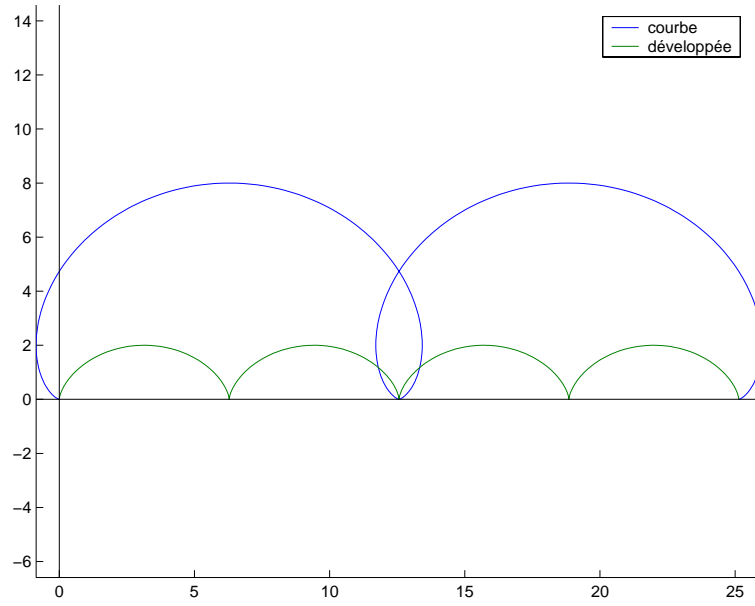


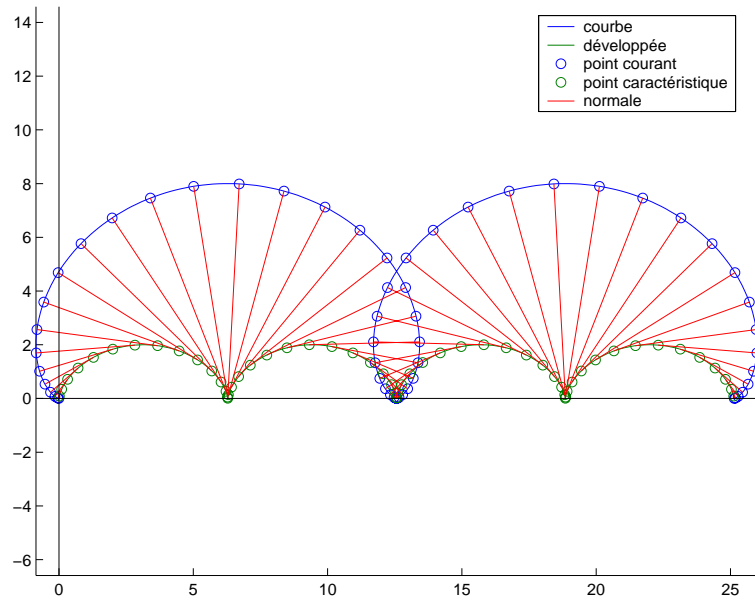
FIG. 3.11. Exemple de tracé de développée de courbe de l'exemple 3.51.

### 3.8.2. Cinématique et dynamique

Les notions de cinématique introduite en section 3.6 page 48 sont très importantes; elles permettent d'étudier les mouvements à accélération centrale, qui correspondent en particulier au trajectoire des planètes autour du soleil. On peut alors montrer alors les formules de Binet et la loi des aires, découvertes très tôt. Ces formules ont notamment permis grâce aux calculs de Newton et de Kepler de «prouver» la loi d'attraction en  $1/r^2$ ! Ils ont adopté une démarche inverse à celle souvent présentée



(a)



(b)

FIG. 3.12. Exemple de tracé de développée de courbe de l'exemple 3.52.

en mécanique : Newton a pu montrer que seule l'hypothèse d'une force de gravitation en  $1/r^2$  était cohérente avec les observations et les relevés des positions de planètes. Il a, dans un second temps, vérifié cette théorie sur les mouvements de la lune, et l'a étendue à tous les corps. Voir par exemple [GAJ94], pour une présentation mathématique ou [GS86] pour une présentation plus mécanique.

### 3.8.3. Calcul de certains trajectoires planes de routes et de voies ferrées

On pourra consulter l'annexe I page 147 où est donné un exercice amusant extrait d'un partiel ; il donne une application concrète, utilisée dans la construction de routes ou de voies ferrées.

### 3.8.4. Rotation instantanées d'un solide

Toutes les notions présentées en deux dimensions s'étendent aussi à trois dimensions, ce qui est souvent utilisé en mécanique, aussi bien pour la cinématique du point dans l'espace que la cinématique du solide : un solide peut-être défini grâce à l'un de ses points et ce qu'on appelle le vecteur rotation instantané. Voir [GAJ94, GS86, Bel88].

### 3.8.5. Abscisses curvilignes et circulations

La notion d'intégrale curviligne est très souvent utilisée en mécanique et en électromagnétisme et permet de calculer des «circulations». Voir par exemple le chapitre 6 et l'annexe E de [Bas04a], disponible sur le ouaib. Les intégrales curvilignes peuvent être définies grâce à l'abscisse curviligne. Les «circulations» définies permettent, par exemple, de calculer le travail d'une force s'exerçant sur une particule qui suit une trajectoire connue.

### 3.8.6. Développées et développantes

La notion de développée admet sa «réciproque» : sous certaines conditions, pour une courbe donnée  $\Gamma$ , il existe une seule courbe  $\tilde{\Gamma}$  dont la développée soit  $\Gamma$  ; on parle de développante. Voir par exemple [GAJ94]. La développante d'un cercle peut être obtenue en fixant une bobine de fil perpendiculairement à un plan et en déroulant le fil au bout du duquel un stylo est fixé, et en prenant soin de maintenir ce fil tendu. Ces développantes de cercles sont utilisées dans la conception d'engrenages. Voir par exemple, sur le ouaib, <http://www.mathcurve.com/courbes2d/developpantedecercle/developpantedecercle.shtml>.

## Fonctions de plusieurs variables

Pour une approche «empirique» de la notions de différentielle (ainsi que pour les opérateurs différentiels associés), on pourra consulter le chapitre 2 de [Bas04a]. Ces notions ont normalement déjà été vues en premier cycle (voir [Lan05], disponible sur le ouaib).

On pourra aussi consulter les ouvrages suivants (données dans un ordre croissant de difficulté) : [GAJ93, RDO76, AF89, AF90].

Pour les notions d'espace vectoriels, on pourra consulter le cours de MT11 et de MT12, [Lan05] ou [RDO74].

### 4.1. Applications différentiables et différentielles

Les formules (1.7) permettent d'écrire des approximations locales d'une fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Méditons les deux exemples suivants, qui fournissent une approximation locale d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , puis d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

EXEMPLE 4.1. On se donne  $f(x) = x^2 + 2x^3$ . Puisque  $f'(x) = 2x + 6x^2$ , on peut écrire

$$(x + h)^2 + 2(x + h)^3 = x^2 + 2x^3 + h(2x + 6x^2) + h\varepsilon(h), \quad (4.1)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (4.2)$$

On peut retrouver cela «à la main» :

$$\begin{aligned} (x + h)^2 + 2(x + h)^3 &= \underbrace{x^2 + 2x^3}_{f(x)} + \underbrace{h(2x + 6x^2)}_{\text{partie linéaire en } h} + \underbrace{h^2(1 + 3x)}_{\text{partie quadratique en } h} + \underbrace{2h^3}_{\text{partie cubique en } h}, \\ &= \underbrace{x^2 + 2x^3}_{f(x)} + \underbrace{h(2x + 6x^2)}_{\text{partie linéaire en } h} + \underbrace{h \times (h(1 + 3x) + 2h^2)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\varepsilon(h) = h((1 + 3x) + 2h^2).$$

EXEMPLE 4.2. On se donne maintenant une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + 2y^3.$$

Comme dans l'exemple 4.1, on écrit pour  $h$  et  $k$  réels quelconques :

$$g(x + h, y + k) = x^2 + 2y^3 + 2hx + 6y^2k + h^2 + 6yk^2 + k^3.$$

On peut écrire, de façon analogue à l'exemple 4.1,

$$g(x + h, y + k) = \underbrace{x^2 + 2y^3}_{g(x, y)} + \underbrace{2hx + 6y^2k}_{\text{partie linéaire en } (h, k)} + \underbrace{h^2 + 6yk^2 + k^3}_{\text{partie d'ordre supérieur}}. \quad (4.3)$$

REMARQUE 4.3. Ceux qui connaissent les dérivées partielles, définies plus loin, auront remarqué que

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \\ 6y^2 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} |h^2 + 6yk^2 + k^3| &\leq (|h| + |k|) (|h| + 6|y||k| + k^2), \\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k), \\ &= \sqrt{2} \|(h, k)\| \varepsilon(h, k), \end{aligned}$$

où

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Bref, on a montré qu'il existait  $a_1$  et  $a_2$ , dépendant de  $x$  et de  $y$  mais pas de  $h$  et de  $k$  tels que

$$g(x + h, y + k) = g(x, y) + \underbrace{ha_1 + ka_2}_{\text{partie linéaire en } (h, k)} + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2} \eta(h, k)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}, \quad (4.4)$$

où

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \eta(h, k) = 0.$$

Par la suite, nous allons généraliser cela pour des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  et même pour des fonctions d'un espace vectoriel normé dans un espace vectoriel normé.

#### 4.1.1. Cas général

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés (voir annexe L).

On considérera donc deux normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  de  $E$  et de  $F$ , notées désormais de la même façon, pour alléger les notations.

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un ouvert  $U$  (ou une boule ouverte) contenant  $a$  et sur lequel  $f$  est définie, à valeur dans  $F$ .

Donnons la définition suivante (c'est aussi une proposition dont on admettra la preuve).

DÉFINITION 4.4. S'il existe une application linéaire continue  $l$  de  $E$  dans  $F$  vérifiant

$$f(a + h) = f(a) + l.h + o(\|h\|), \quad (4.5)$$

alors cette application est unique ; on l'appelle différentielle de  $f$  au point  $a$ , on la note  $df(a)$  et on dit que  $f$  est différentiable au point  $a$ .

REMARQUE 4.5. Dans l'équation (4.5), on préfère noter  $l.h$  plutôt que  $l(h)$ .

REMARQUE 4.6. On peut donc écrire (4.5) sous la forme

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|). \quad (4.6)$$

REMARQUE 4.7. En vertu de la proposition L.6 page 170, la clause relative à la continuité de  $l$  est automatiquement remplie dans le cas où  $E$  est de dimension finie.

REMARQUE 4.8. Si  $E = F = \mathbb{R}$ , la différentiabilité de  $f$  en  $a$  est équivalente à sa dérivabilité et  $df(a).h = f'(a)h$ .

PROPOSITION 4.9. *Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$ .*

DÉMONSTRATION. Preuve immédiate.  $\square$

On rappelle que  $\mathcal{L}(E, F)$  désigne l'ensemble des applications linéaires continues de l'espace vectoriel normé  $E$  dans l'espace vectoriel normés  $F$ .

DÉFINITION 4.10. Soit  $U$  un ouvert de  $E$ . On dit que  $f : U \longrightarrow F$  est différentiable sur  $U$  si et seulement si elle est différentiable en tout point de  $U$ . L'application

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto df(x) \end{aligned}$$

est alors appelée application différentielle de  $f$  sur  $U$ . Si elle est continue, on dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ .

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés,  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $E$  et de  $F$ , et deux applications  $f : U \longrightarrow F$  et  $g : V \longrightarrow G$ .

THÉORÈME 4.11. *Si  $f$  et  $g$  sont respectivement différentiable aux point  $a$  et  $b = f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a). \quad (4.7)$$

DÉMONSTRATION. Preuve admise (voir page 290 de [RDO76]).

Remarquons seulement que  $d(g \circ f)(a)$  appartient à  $\mathcal{L}(E, G)$ ,  $d(a)$  appartient à  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $d(g)(f(a))$  appartient à  $\mathcal{L}(F, G)$ , ce qui est compatible avec (4.7).  $\square$

REMARQUE 4.12. Compte tenu de la remarque 4.8, dans le cas où  $E = F = G = \mathbb{R}$ , l'équation (4.7) est équivalente à

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad (4.8)$$

#### 4.1.2. Applications différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et dérivées partielles

Nous supposons dans cette section que  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^q$ .

Nous considérerons les bases canoniques  $e = (e_1, \dots, e_p)$  et  $e' = (e'_1, \dots, e'_q)$  de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$ . Les éléments de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$  sont notés

$$x = (x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p x_j e_j, \quad (4.9a)$$

$$y = (y_1, \dots, y_q) = \sum_{i=1}^q x_i e'_i. \quad (4.9b)$$

Ainsi, une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  (ou d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ ) dans  $\mathbb{R}^q$  est donnée sous la forme

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)), \quad (4.10)$$

où chacune des applications  $f_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, q\}$ , est une application de  $\mathbb{R}^p$  (ou d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ ) dans  $\mathbb{R}$ .

Conformément à la proposition L.5 page 170, les normes considérées n'ont pas d'influence. Traditionnellement, chacune des normes sur  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  est la norme euclidienne définie par (L.10) page 170.

Rappelons la définition suivante de la dérivée partielle

DÉFINITION 4.13. La fonction  $g$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  admet une dérivée partielle par rapport à la variable  $x_j$  en  $x = (x_1, \dots, x_p)$  si et seulement si, la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_q) - g(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_q)}{h}. \quad (4.11)$$

Dans ce cas, ce nombre est noté

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x). \quad (4.12)$$

Pour dériver partiellement par rapport à  $x_j$ , on fixe toutes les variables sauf  $x_j$ .

EXEMPLE 4.14. Si  $q = 2$  et

$$g(x, y) = x^2 + x(\cos x)y, \quad (4.13)$$

on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + y \cos x - xy \sin x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \cos x.$$

DÉFINITION 4.15 (Matrice jacobienne). Avec les notations (4.10), on définit en  $x = (x_1, \dots, x_q)$  la matrice jacobienne  $J_f(x) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  de la façon suivante : on suppose que chacune des dérivées partielles  $\partial f_i / \partial x_j(x)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  existe. On pose alors

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}, \quad (J_f(x))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad (4.14)$$

DÉFINITION 4.16 (Jacobien). Si  $p = q$ ,  $df(x)$  peut être considéré comme un endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  ; son déterminant est aussi le déterminant de la matrice jacobienne  $J_f(x)$  et est appelé jacobien de  $f$  en  $x$ . On le note

$$\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(x). \quad (4.15)$$

On donne trois résultats (seul le premier d'entre eux sera montré) : Soit  $f$  définie d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  et  $x$  appartenant à  $U$ .

THÉORÈME 4.17. Si  $f$  est différentiable en  $x$ , alors chacune des dérivées partielles  $\partial f_i / \partial x_j(x)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  existe. De plus, l'application linéaire  $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  peut s'écrire sous la forme

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad df(x).h = J_f(x)h. \quad (4.16)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $i \in \{j, \dots, p\}$ . D'après la définition 4.5 appliquée au vecteur  $h = (0, \dots, 0, \tilde{h}, 0, \dots, 0)$  où  $\tilde{h} \neq 0$  est la  $j$ -ième composante de  $h$ , on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \tilde{h}, x_{j+1}, \dots, x_q) - f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_q) = l.h + o(\|h\|). \quad (4.17)$$

En particulier, si on prend la  $i$ -ième composante, (pour  $i \in \{1, \dots, q\}$ ) on en déduit

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \tilde{h}, x_{j+1}, \dots, x_q) - f_i(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_q) = a_{ij}\tilde{h} + o(|\tilde{h}|), \quad (4.18)$$

où

$$l.(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^q a_{ij} e'_j. \quad (4.19)$$

L'égalité (4.18) implique donc, par définition que  $\partial f_i / \partial x_j(x)$  existe et que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}. \quad (4.20)$$

Par linéarité, (4.19) implique que pour tout  $h = \sum_{i=1}^q h_i e_i \in \mathbb{R}^q$

$$l. \left( \sum_{i=1}^q h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^q h_i l.(e_i) = \sum_{i=1}^q h_i \sum_{j=1}^q a_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q h_i a_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q (J_f(x))_{i,j} h_i e'_j = J_f(x).h,$$

D'après (4.20) et la définition (4.14).  $\square$

**THÉOREME 4.18.** *Si chacune des dérivées partielles  $\partial f_i / \partial x_j$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  est définie sur  $U$  et est continue en  $x$ , alors  $f$  est différentiable en  $x$ .*

Naturellement, dans ce cas (4.16) a lieu.

**THÉOREME 4.19.** *L'application  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si et seulement si chacune des dérivées partielles  $\partial f_i / \partial x_j$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  existe et est continue sur  $U$ .*

**DÉFINITION 4.20** (Indice de Kronecker). Pour tout couple d'entiers  $(i, j)$ , on définit l'indice de Kronecker  $\delta_{i,j}$  par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.21)$$

On écrit parfois l'égalité (4.16) sous une autre forme d'égalité entre fonction de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  :

**LEMME 4.21.** *On définit les applications linéaires  $\varepsilon_{ij}$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  par*

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad \varepsilon_{ij}(e_k) = \delta_{j,k} e'_i. \quad (4.22)$$

*La famille  $(\varepsilon_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}}$  est une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ .*

**DÉMONSTRATION.**  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  est un espace vectoriel de dimension  $pq$ . Il suffit donc de vérifier que la famille  $(\varepsilon_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}}$  est libre. Soit donc  $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}}$ ,  $pq$  réels tels que

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} = 0.$$

On a donc, pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$0 = \sum_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}(e_k) = \sum_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} \alpha_{ij} \delta_{j,k} e'_i = \sum_{i=1, \dots, q} \alpha_{ik} e'_i.$$

Ainsi, tous les réels  $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}}$  sont nuls.  $\square$



Dans les bases canoniques  $e$  et  $e'$  introduites initialement, la matrice de  $\varepsilon_{ij}$  est la matrice où tous les éléments sont nuls, sauf celui de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne, égal à 1. On peut donc écrire, si  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  et  $f$  désigne l'application linéaire associée dans la base  $e$  et  $e'$  :

$$f = \sum_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} m_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

On vérifie que l'on peut écrire l'égalité (4.16) sous la forme

$$df(x) = \sum_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \varepsilon_{ij}. \quad (4.23)$$

EXEMPLE 4.22. Dans le cas où  $q = 1$ ,  $f$  est la fonction numérique de  $p$  variables

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p). \quad (4.24)$$

On note traditionnellement

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \varepsilon_{1j} = dx_j. \quad (4.25)$$

Ainsi, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad dx_j(e_k) = \delta_{j,k}, \quad (4.26)$$

soit

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad dx_j(h) = h_j. \quad (4.27)$$

On peut écrire l'égalité (4.23) sous la forme

$$df(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j. \quad (4.28)$$

Grâce aux définitions de l'exemple 4.22, on peut aussi poser, si  $p$  et  $q$  sont deux entiers quelconques

$$df(x) = (df_1(x), \dots, df_q(x)), \quad (4.29)$$

et écrire l'égalité (4.16) sous la forme

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \quad df_i(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j. \quad (4.30)$$

EXEMPLE 4.23. Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers quelconques, si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$  et si  $f$  est l'application linéaire associée à cette matrice (dans les bases canoniques) par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad f(h) = Mh, \quad (4.31)$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad df(x).h = Mh \quad (4.32)$$

En effet, on a

$$f(x+h) - f(x) = M(x+h) - Mx = Mh.$$

## 4.2. Applications plusieurs fois différentiables et différentielles d'ordres supérieurs

On peut considérer les différentielles d'ordre supérieurs. On se restreindra au cas d'ordre deux.

### 4.2.1. Cas général

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $f$  une application d'un ouvert  $U$  de  $E$  dans  $F$ .

Si  $f$  est différentiable sur  $U$ , on dispose donc de l'application  $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ .

Si  $df$  est elle-même différentiable sur  $U$ , on dit que  $f$  est deux fois différentiable sur  $U$  et on dispose de  $d(df) : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ .

On notera  $d(df) = d^2f$  et on identifiera  $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$  à  $\mathcal{L}_2(E, F)$ , espace vectoriel des applications bilinéaires continues sur  $E \times F$ , de la façon suivante : soit  $v \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$  ; on lui associe  $u \in \mathcal{L}_2(E, F)$  grâce à

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad u(x, y) = (v.x).y \quad (4.33)$$

Nous admettrons que cette identification est loisible. On a donc la définition suivante :

**DÉFINITION 4.24.** On dit que  $f$  est 2 fois différentiable (resp. de classe  $C^2$ ) sur  $U$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $f$  est différentiable sur  $U$  ;
- $df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est différentiable (resp. de classe  $C^1$ ) sur  $U$ .

Dans ce cas,  $d(df)$ , est notée  $d^2(f)$ , et, pour tout  $x \in U$ ,  $d^2(f)(x)$  est un élément de  $\mathcal{L}_2(E, F)$  ; de plus, si  $(h, k)$  appartient à  $E^2$ , l'image de  $(h, k)$  par  $d^2(f)(x)$  est noté  $d^2f(x).h.k$ .

De même, on a la définition :

**DÉFINITION 4.25.** On dit que  $f$  est 2 fois différentiable en  $a \in U$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $f$  est différentiable sur  $U$  ;
- $df$  est différentiable en  $a$ .

Donnons le résultat sans preuve suivant :

**THÉORÈME 4.26** (Théorème de Schwarz). *Si  $f$  est deux fois différentiable en  $x$ , alors*

$$\forall (h, k) \in E^2, \quad d^2f(x).h.k = d^2f(x).k.h \quad (4.34)$$

### 4.2.2. Applications deux fois différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et dérivées partielles d'ordre 2

Comme dans la section 4.1.2, nous supposons dans cette section que  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^q$ .

Nous considérerons les bases canoniques  $e = (e_1, \dots, e_p)$  et  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$  et les éléments de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^q$  définis par (4.9).

On donne la définition suivante de la dérivée partielle d'ordre deux :

**DÉFINITION 4.27.** Supposons que la fonction  $g$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  admette une dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$  en  $x = (x_1, \dots, x_p)$  sur un voisinage de  $x$ . Nous dirons que la fonction  $g$  définie admet une dérivée partielle d'ordre deux par rapport aux variables (dans l'ordre)  $x_i$  et  $x_j$  si et seulement si  $x \mapsto \partial g / \partial x_j(x)$  admet une dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$  en  $x = (x_1, \dots, x_p)$ . Dans ce cas, la dérivée partielle d'ordre deux est notée

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x). \quad (4.35)$$

EXEMPLE 4.28. On reprend l'exemple 4.14. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= 2 - y \sin x - y \sin x - yx \cos x, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \cos x - x \sin x, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \cos x - x \sin x, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Pour toute la suite de cette section, on suppose que  $q = 1$ .

DÉFINITION 4.29 (Matrice Hessienne). Avec les notations (4.10), on définit en  $x = (x_1, \dots, x_p)$  la matrice hessienne  $H_f(x) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  de la façon suivante : on suppose que chacune des dérivée partielles d'ordre deux  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(x)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$  existe. On pose alors

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (H_f(x))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad (4.36)$$

On donne trois résultats sans preuve, analogues aux théorèmes 4.17 et 4.19. Soit  $f$  définie d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x$  appartenant à  $U$ .

THÉORÈME 4.30. Si  $f$  est deux fois différentiable en  $x$ , alors chacune des dérivées partielles  $\partial^2 f / (\partial x_i \partial x_j)(x)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$  existe. De plus

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x). \quad (4.37)$$

Ainsi, la matrice Hessienne de  $f$  en  $x$  est symétrique. Enfin, l'application bilinéaire  $d^2 f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  peut s'écrire sous la forme

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \forall k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{R}^p, \quad d^2 f(x).h.k = \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, p}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j = {}^t h (H_f(x)) k. \quad (4.38)$$

THÉORÈME 4.31. L'application  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  si et seulement si chacune des dérivées partielles  $\partial^2 f / (\partial x_i \partial x_j)$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\}$  existe et est continue sur  $U$ .

### 4.3. Formules de Taylor-Young

Notons que la définition (4.5) généralise la formule de Taylor-Young (1.5) du chapitre 1 pour  $n = 1$ .

Donnons une formule de Taylor-Young qui généralise cela pour  $n = 2$ . On se place dans le cas général, c'est-à-dire celui des section 4.1.1 et 4.2.1.

THÉORÈME 4.32. Si  $f$  est deux fois différentiable en  $x$ , alors

$$\forall h \in E, \quad f(x + h) = f(x) + df(x).h + \frac{1}{2} d^2 f(x).h.h + o(\|h\|^2). \quad (4.39)$$

Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}$  (soit  $q = 1$ ), grâce à (4.28) et (4.38), on a :

THÉOREME 4.33. Si  $f$  est deux fois différentiable en  $x$ , alors

$$\begin{aligned} \forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad f(x+h) &= f(x) + J_f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^t (H_f(x)) h + o(\|h\|^2) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, p}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j + o(\|h\|^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Moyennant la généralisation de différentielle à un ordre quelconque, on peut généraliser le théorème 4.32 pour tout  $n$  : voir [RDO76].

## 4.4. Quelques applications des différentielles

### 4.4.1. Composition des fonctions et changement de variables

Soient  $p, q, m$  trois entiers non nuls,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ , et deux fonctions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que  $f(U) \subset V$ . Notons, conformément à la notation (4.10) :

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)) \quad (4.41)$$

$$g : V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (y_1, \dots, y_q) \mapsto (g_1(y_1, \dots, y_q), \dots, g_m(y_1, \dots, y_q)). \quad (4.42)$$

On dispose ainsi de l'application composée  $g^* = g \circ f$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^m$  qui sera notée

$$g^* : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto (g_1^*(x_1, \dots, x_p), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_p)). \quad (4.43)$$

Nous supposons que  $f$  est différentiable en  $a \in U$  et que  $g$  est différentiable en  $b = f(a) \in V$ . D'après le théorème 4.11,  $g^* = g \circ f$  est différentiable en  $a$  et

$$dg^*(a) = dg(b) \circ df(a). \quad (4.44)$$

Matriciellement, grâce à (4.16), cela se traduit par

$$J_{g^*}(a) = J_g(b) J_f(a), \quad (4.45)$$

où  $J_{g^*}(a)$ ,  $J_g(b)$  et  $J_f(a)$  sont des matrices respectivement dans  $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ . On notera (4.45) sous la forme abusive suivante :

$$J_{g \circ f} = J_g J_f. \quad (4.46)$$

L'égalité (4.45) s'écrit aussi pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$(J_{g^*}(a))_{k,j} = \sum_{i=1}^q (J_g(b))_{k,i} (J_f(a))_{i,j} \quad (4.47)$$

soit encore, grâce à (4.14),

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}, \quad \frac{\partial g_k^*}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^q \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(b_1, \dots, b_q) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_p). \quad (4.48)$$

Supposons maintenant que  $p = q = m$ . Si  $f$  est localement inversible en  $a$  et si  $g = f^{-1}$ , alors  $a = f^{-1}(b)$ ,  $g^* = I$  et l'égalité (4.45) implique que

$$I = J_{f^{-1}}(b) J_f(f^{-1}(b)), \quad (4.49)$$

Ainsi,  $J_{f^{-1}}(b)$  est inversible et

$$J_{f^{-1}}(b) = (J_f(f^{-1}(b)))^{-1}. \quad (4.50)$$

Avec l'abus de notation identique à celui de (4.46), on notera

$$J_{f^{-1}} = (J_f)^{-1}. \quad (4.51)$$

Parfois, on écrira en utilisant la notation (4.15) :

$$\frac{D(x_1, \dots, x_p)}{D(f_1, \dots, f_p)} = \left( \frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)} \right)^{-1}. \quad (4.52)$$

Supposons maintenant que  $p = q$ , que  $m$  soit quelconque, et que  $f$  soit localement inversible. On fait un changement de variables :  $g$  dépend des «anciennes» variables  $y_1, \dots, y_p$ , elles-mêmes fonctions inversibles des «nouvelles» variables  $x_1, \dots, x_p$ . Au lieu de considérer la fonction  $g$  des variables  $y_1, \dots, y_q$ , on considère la fonction  $g^*$  des variables  $x_1, \dots, x_p$  :

$$g^*(x_1, \dots, x_p) = g \circ f(x_1, \dots, x_p) = g(y_1, \dots, y_q), \quad (4.53)$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_p). \quad (4.54)$$

La formule (4.48) s'écrit, en «omettant» les variables  $a$  et  $b$

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}, \quad \frac{\partial g_k^*}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial g_k}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (4.55)$$

La formule (4.54) s'écrit, en «omettant» les variables

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad y_i = f_i. \quad (4.56)$$

On utilise le même abus de notations de la section 3.4 page 37 du chapitre 3 et on notera de la même façon  $g$  et  $g^*$ .

Finalement, pour toute fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^m$ , dépendant des «anciennes» variables  $y_1, \dots, y_p$ , elles-mêmes fonctions inversibles des «nouvelles» variables  $x_1, \dots, x_p$ , on peut écrire (4.55) et (4.56) sous la forme

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, m\}, \quad \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}, \quad (4.57)$$

ce qui constitue la «règle de la chaîne».

Si on a  $p = m = 1$ , on obtient

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

On retrouve la généralisation de la règle (3.26).

EXEMPLE 4.34 (Changement de variables en polaires). Supposons que  $g$  soit une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  ( $p = 2$  et  $m = 1$ ) dépendant des «anciennes» variables  $x$  et  $y$ , elles même dépendant des

«nouvelles» variables  $r$  et  $\theta$ , correspondant aux variables polaires définie par (2.1). Grâce à (2.1), on a

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad (4.58a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad (4.58b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad (4.58c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta. \quad (4.58d)$$

D'après (4.57), pour  $j = 1, 2$ , on obtient donc les dérivées partielles de  $g$  par rapport aux «nouvelles variables»  $r$  et  $\theta$  en fonction des dérivées partielles de  $g$  par rapport aux «anciennes variables»  $x$  et  $y$  :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (4.59a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (4.59b)$$

Parfois, on aura besoin d'exprimer les dérivées partielles de  $g$  par rapport aux «anciennes variables»  $x$  et  $y$  en fonction des dérivées partielles de  $g$  par rapport aux «nouvelles variables»  $r$  et  $\theta$ . Pour cela, soit on inverse (4.59) soit on utilise (4.57) «à l'envers» et en utilisant (4.51) (ce qui revient au même). On a, d'après (4.58), la matrice jacobienne de  $x$  et  $y$  en fonction de  $r$  et  $\theta$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ainsi, selon (4.51), la matrice jacobienne de  $r$  et  $\theta$  en fonction de  $x$  et  $y$  est donnée par

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix},$$

dont on déduit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (4.60a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}. \quad (4.60b)$$

#### 4.4.2. Recherche d'extremas d'une fonctions à valeurs réelles

Dans toute cette section, on suppose que  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}$  (soit  $q = 1$ ).

On suppose que  $f$  est définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^p$ .

**DÉFINITION 4.35** (Extremums relatifs). On dit que  $f$  admet un extremum relatif (ou local) en  $a \in D$  si et seulement il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que l'une des deux assertions suivantes soit

vérifiée :

$$\begin{aligned}\forall u \in E, \quad a + u \in V \cap D &\longrightarrow f(a + u) \leq f(a) \text{ (maximum)}, \\ \forall u \in E, \quad a + u \in V \cap D &\longrightarrow f(a + u) \geq f(a) \text{ (minimum)}.\end{aligned}$$

On parle d'extremum strict, si de plus,

$$u \neq 0 \longrightarrow f(a + u) \neq f(a).$$

Pour toute la suite, on suppose que  $f$  est définie sur  $U$  un ouvert de  $E$ .

PROPOSITION 4.36 (Conditions nécessaires d'extremum). *Supposons que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $U$ . Pour que  $f$  admette un extremum relatif en  $a \in U$ , il est nécessaire que*

$$df(a) = 0, \tag{4.61}$$

*c'est-à-dire, que*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0. \tag{4.62}$$

*Un tel point est dit critique.*

DÉMONSTRATION.  $U$  contient un pavé du type  $P = \prod_{i=1}^p ]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[$ .

Si  $f$  admet un extrémum, chaque fonction partielle  $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  admet un extremum en  $a_i$  sur l'ouvert  $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[$ . par hypothèse, cette fonction est dérivable en  $a_i$  et d'après le cours sa dérivée est nulle en  $a_i$ , ce qui implique (4.61).  $\square$

REMARQUE 4.37. Cette condition n'est pas suffisante, comme on peut le voir sur la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = xy \tag{4.63}$$

autour de 0.

DÉFINITION 4.38 (Point col). On dit que  $f$  admet un point col (ou point selle) en  $a \in D$  si et seulement si tout voisinage  $V$  de  $a$  contient des points  $y$  en lesquels  $f(y) > f(a)$  et des points  $z$  en lesquels  $f(z) < f(a)$ .

PROPOSITION 4.39 (Conditions suffisantes d'extremum et de point col). *Supposons que  $f$  soit de classe  $C^2$  sur  $U$ . Soit  $a$  un point critique de  $f$ . La matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est symétrique et diagonalisable et*

- (1) *si toutes les valeurs propres de la hessienne de  $f$  en  $a$  sont strictement positives, alors  $a$  est un minimum local de  $f$  ;*
- (2) *si toutes les valeurs propres de la hessienne de  $f$  en  $a$  sont strictement négatives, alors  $a$  est un maximum local de  $f$  ;*
- (3) *s'il existe des valeurs propres de la hessienne de  $f$  en  $a$  strictement positives et des valeurs propres de la hessienne de  $f$  en  $a$  strictement négatives, alors  $a$  est un point col de  $f$ .*

DÉMONSTRATION. On sait que, d'après le théorème 4.30 page 66, la matrice hessienne  $H_f(a)$  de  $f$  en  $a$  est symétrique. On verra au cours du chapitre 8 qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et qu'il existe une matrice  $Q$  orthogonale (c'est-à-dire que  ${}^tQQ = I$ ) telle que

$$H_f(a) = QD{}^tQ, \tag{4.64}$$

où  $D$  est une matrice diagonale où apparaissent les valeurs propres de  $H_f(a)$ . D'autre part, d'après (4.40) et les hypothèses de cette proposition, on a, pour tout  $h$ ,

$$f(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} {}^t h (H_f(a)) h + o(\|h\|^2) = f(a) + \frac{1}{2} {}^t h (H_f(a)) h + o(\|h\|^2).$$

Ainsi

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} {}^t h Q D {}^t Q h + o(\|h\|^2).$$

Posons  $\tilde{h} = {}^t Q h$ , de même norme que  $h$ . Ainsi,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \tilde{h} D \tilde{h} + o(\|\tilde{h}\|^2).$$

Si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ , on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \lambda_i \tilde{h}_i^2 + o(\|\tilde{h}\|^2). \quad (4.65)$$

Dans le premier cas, on peut écrire  $\lambda_i \geq \lambda_{\min} > 0$  où  $\lambda_{\min}$  est la plus petite des valeurs propres de  $H_f(a)$ . On a donc

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{\lambda_{\min}}{2} \sum_{i=1}^q \tilde{h}_i^2 + o(\|\tilde{h}\|^2),$$

et donc

$$f(a+h) - f(a) \geq \|\tilde{h}\|^2 \left( \frac{\lambda_{\min}}{2} + o(1) \right), \quad (4.66)$$

ce qui permet de conclure. De même, dans le second cas, on a

$$f(a+h) - f(a) \leq \|\tilde{h}\|^2 \left( \frac{\lambda_{\max}}{2} + o(1) \right). \quad (4.67)$$

Dans le dernier cas, on peut réaliser une partition  $J_+ \cup J_- \cup J_0$  de  $\{1, \dots, q\}$ , où  $J_0$  est éventuellement vide et pour tout  $i$  de  $J_+$ ,  $\lambda_i > 0$ , pour tout  $i$  de  $J_-$ ,  $\lambda_i < 0$  et pour tout  $i$  de  $J_0$ ,  $\lambda_i = 0$ . Ainsi, selon (4.65),

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i \in J_+} \lambda_i \tilde{h}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in J_-} \lambda_i \tilde{h}_i^2 + o(\|\tilde{h}\|^2). \quad (4.68)$$

Si on choisit un  $h$  associé à un vecteur  $\tilde{h}$  dont seules les composantes relatives à  $J_+$  sont non nulles, on constate que  $f(a+h) - f(a) > 0$  pour tout  $\tilde{h}$  assez petit. De même, si on choisit un  $h$  associé à un vecteur  $\tilde{h}$  dont seules les composantes relatives à  $J_-$  sont non nulles, on constate que  $f(a+h) - f(a) < 0$  pour tout  $\tilde{h}$  assez petit. Ainsi, le troisième cas est montré.  $\square$

Pour toute la fin de cette section, on suppose que  $p = 2$  et  $q = 1$ .

**DÉFINITION 4.40** (Notations de Monge). Si  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 en  $a$ , on pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a). \quad (4.69)$$

**PROPOSITION 4.41** (Conditions suffisantes d'extremum et de point col en dimension 2). *Supposons que  $f$  soit de classe  $C^2$  sur  $U$ . Soit  $a$  un point critique de  $f$ .*



(1) Si

$$s^2 - rt < 0, \quad r > 0, \quad (4.70a)$$

alors  $a$  est un minimum local de  $f$ .

(2) Si

$$s^2 - rt < 0, \quad r < 0, \quad (4.70b)$$

alors  $a$  est un maximum local de  $f$ .

(3) Si

$$s^2 - rt > 0, \quad (4.70c)$$

alors  $a$  est un point col de  $f$ .

DÉMONSTRATION. On sait que la matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est diagonalisable. On constate, par invariance de la trace et du déterminant de cette matrice que, en notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux valeurs propres de cette matrice,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(H_f(a)) = rt - s^2, \quad (4.71a)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace}(H_f(a)) = r + t. \quad (4.71b)$$

Il suffit alors d'utiliser la proposition 4.39. On est dans le premier cas de cette proposition si et seulement si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $s^2 - rt < 0$  et  $r + t > 0$ , ce qui est équivalent à  $s^2 - rt < 0$  et  $r > 0$ . En effet, si  $s^2 - rt < 0$  et  $r + t > 0$ , alors  $rt > s^2 \geq 0$  et  $r + t > 0$ , ainsi  $r > 0$ . réciproquement, si  $s^2 - rt < 0$  et  $r > 0$ ,  $rt \geq 0$  et donc  $t > 0$  et donc  $r + t > 0$ . On conclut de même dans le deuxième cas. Le troisième cas a lieu si et seulement si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , c'est-à-dire, si et seulement si  $s^2 - rt > 0$ .  $\square$

REMARQUE 4.42. Dans le cas où ( $s^2 - rt < 0$  et  $r = 0$ ) ou si  $s^2 - rt = 0$ , on ne peut conclure. Il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur ou faire des développements à la main.

REMARQUE 4.43. Il est plus facile de retenir la caractérisation grâce aux valeurs propres de la proposition 4.39 et d'en déduire les résultats de la proposition 4.41.

REMARQUE 4.44. Comme d'habitude, on peut automatiser ce classement des points grâce au calcul symbolique.

REMARQUE 4.45. Si  $f$  est défini sur un fermé  $D$ , on ne peut étudier les extremum de  $f$  qui peuvent aussi être atteints aux bords de  $D$ .

REMARQUE 4.46. On peut remarquer que, localement au voisinage de  $a$ , on a, grâce à (4.65),

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} (\lambda_1 \tilde{h}_1^2 + \lambda_2 \tilde{h}_2^2) + o\left(\|\tilde{h}\|^2\right) = P(h) + o\left(\|\tilde{h}\|^2\right), \quad (4.72)$$

où

$$P(h) = f(a) + \frac{1}{2} (\lambda_1 \tilde{h}_1^2 + \lambda_2 \tilde{h}_2^2). \quad (4.73)$$

$P$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de type conique (voir chapitre 9). Ses isovaleurs (ou lignes de niveaux, définies par la section d'équation  $P(h)$  constant) sont des ellipses dans le cas d'un maximum ou d'un minimum et des hyperboles dans le cas d'un point selle. Ainsi, les isovaleurs de  $f$  seront localement autour de  $a$  du même type.

On peut tracer localement la fonction  $f$  grâce au code `trace_3D.m` de trois façons différentes : par grilles (vision dans l'espace), par ligne de niveau ou par niveaux de couleurs.

EXEMPLE 4.47. Étudier la nature de  $a = (0, 0)$  pour  $f$  définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} - (\cos y)\sqrt{6 - x^2}. \quad (4.74)$$

On peut vérifier que  $a$  appartient à l'intérieur du domaine de  $f$ . De plus, après calcul, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{x \cos y}{\sqrt{6 - x^2}}, \quad (4.75a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\sin y)\sqrt{6 - x^2}, \quad (4.75b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{2a} + \frac{6 \cos y}{(6 - x^2)^{3/2}}, \quad (4.75c)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -(x \sin y)\sqrt{6 - x^2}, \quad (4.75d)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (\cos y)\sqrt{6 - x^2}. \quad (4.75e)$$

Ainsi, en  $a = (0, 0)$ ,  $df(a)$  est nul et avec les notations de Monge, on a

$$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad s = 0, \quad t = \sqrt{6}, \quad s^2 - rt < 0, \quad r > 0,$$

et donc  $a$  est minimum local.

Voir la figure le fichier `exemple_courbe3D_01.m` qui appelle la fonction `trace_3D.m` évoquée dans la remarque 4.46 page ci-contre et la figure 4.1.

On observe bien des lignes de niveaux de type elliptique.

EXEMPLE 4.48. Étudier la nature de  $a = (0, \pi)$  pour  $f$  définie par (4.74).

On peut vérifier que  $a$  appartient à l'intérieur du domaine de  $f$ . De plus, après calcul et d'après (4.75), on a  $df(a)$  est nul et avec les notations de Monge, on a

$$s^2 - rt > 0$$

et donc  $a$  est un point col.

Voir la figure le fichier `exemple_courbe3D_02.m` qui appelle la fonction `trace_3D.m` évoquée dans la remarque 4.46 page précédente et la figure 4.2.

On observe bien des lignes de niveaux de type hyperbolique.

#### 4.4.3. Calculs d'incertitudes et raisonnement linéarisés à l'ordre 1

Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ , Les équations (4.6) et (4.28) sont parfois écrites en physique abusivement sous la forme

$$f(a + dx) = f(a) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j + o(\|h\|) \approx f(a) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j, \quad (4.76)$$

où  $dx$  désigne un «petit» vecteur dont les «petites» composantes sont  $dx_i$ . Cette écriture est à la base du calcul d'incertitude (voir par exemple le chapitre 7 de [Bas04a]).

Si  $dx$  et  $dx_i$  désignent des variations infinitésimales, destinées à tendre vers zéro, l'écriture (4.76) est à la base des raisonnements différentiels linéarisés, permettant d'établir des équations différentielles gouvernant tel ou tel type de problème de physique (voir par exemple l'annexe C de [Bas04b]).

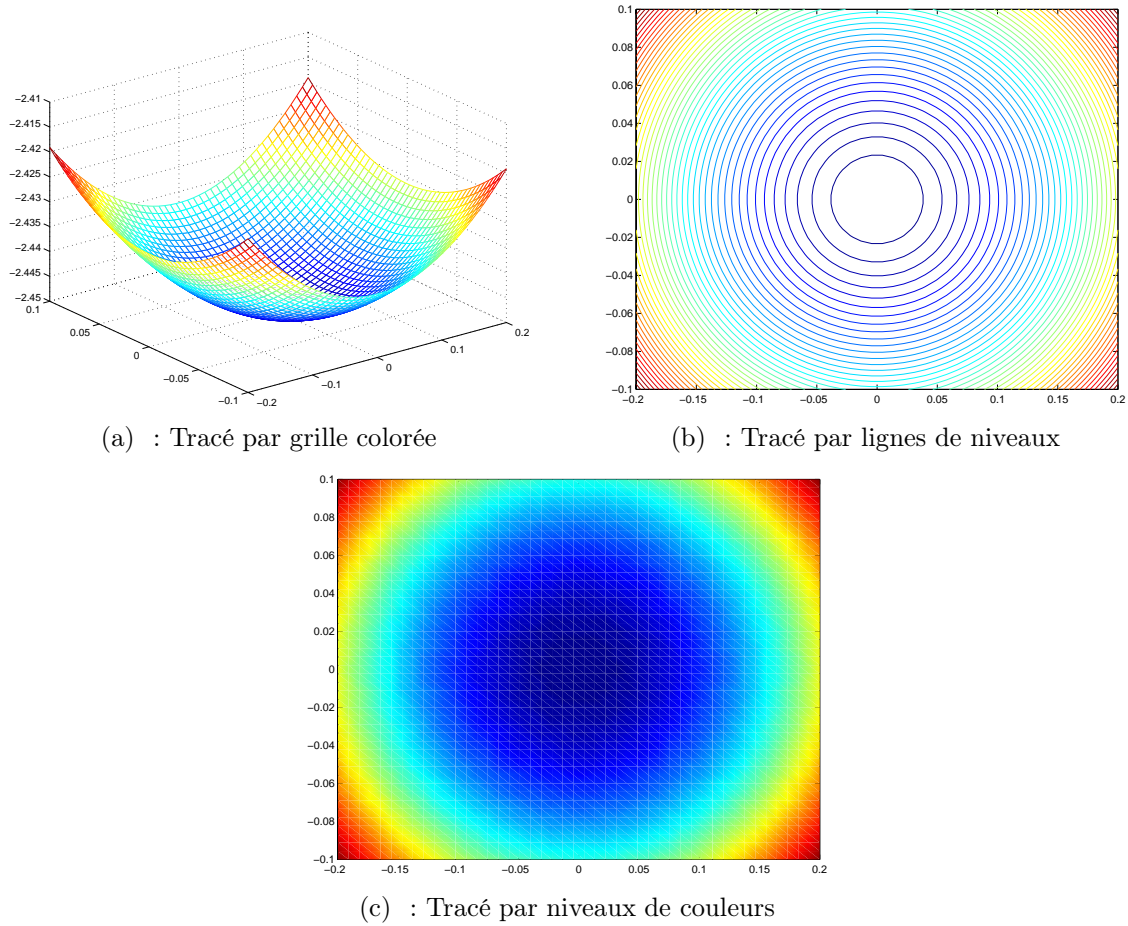


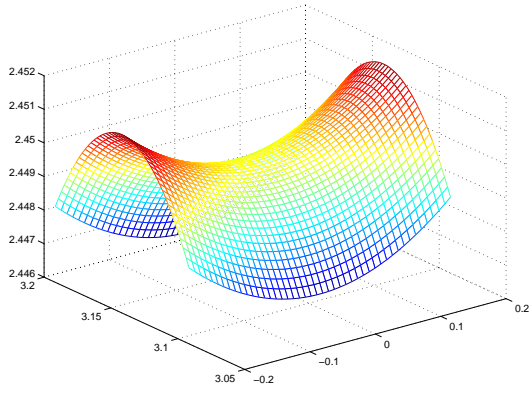
FIG. 4.1. la fonction  $f$  définie par (4.74) au voisinage de  $a = 0$ .

#### 4.5. Applications

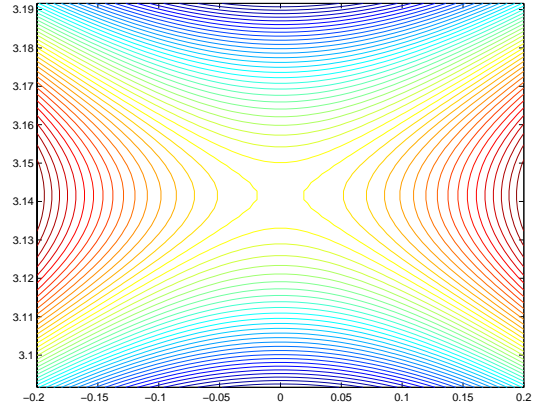
Les applications du calcul différentiel sont très nombreuses en mécanique.

Voir la section 4.4.3.

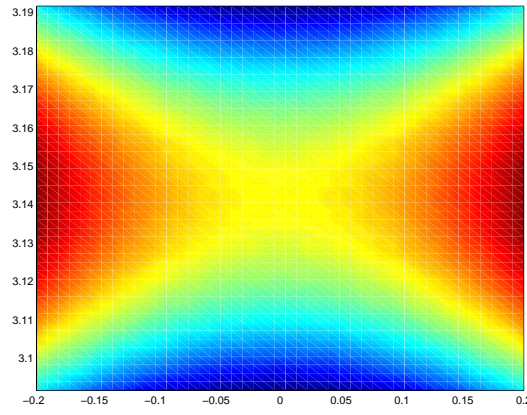
La différentielle permet de définir d'autres opérateurs différentiels (gradient, rotationnel, divergence), très utilisés en mécanique des fluides ou électromagnétisme (voir par exemple le chapitre 2 de [Bas04a] ou [GS86, GS95, GS96]).



(a) : Tracé par grille colorée



(b) : Tracé par lignes de niveaux



(c) : Tracé par niveaux de couleurs

FIG. 4.2. la fonction  $f$  définie par (4.74) au voisinage de  $a = (0, \pi)$ .



## Intégrales multiples (théorie)

On pourra consulter les références suivantes (données dans un ordre croissant de difficulté) : le chapitre 4 de [Bas04a] et [GAJ93, BD02b, BD02a, LFA77, AF89].

Ce chapitre est fortement inspiré de [GAJ93].

### 5.1. Introduction

La théorie des intégrales multiples est fort complexe ! La théorie d'intégration de Lebesgue permettrait d'englober la théorie de l'intégrale simple à celle de l'intégration sur un espace quelconque, mais est difficile (voir par exemple [AF89]).

Grâce aux sommes de Darboux, vues succinctement, on présente la théorie des intégrales multiples (dans le cadre de l'intégrale de Riemman) et quelques résultats généraux. On présentera ensuite dans le chapitre 6 les calculs pratiques et les applications des intégrales doubles et triples.

### 5.2. Compacts mesurables

Pour toute cette section,  $n$  est un entier naturel non nul.

On donne les définitions et les propositions sans preuve suivantes :

DÉFINITION 5.1 (Pavé). On dit qu'une partie  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est un pavé si et seulement si  $P = \emptyset$  ou s'il existe  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $b = (b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i \in [a_i, b_i] \right\}. \quad (5.1)$$

Dans ce dernier cas, on dit que  $P$  est le pavé d'extrémités  $\{a, b\}$ .

DÉFINITION 5.2 (mesure d'un pavé). Soit  $P$  un pavé de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $P$  est d'extrémités  $\{a, b\}$ , on appelle mesure de  $P$ , le nombre

$$\mu(P) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|. \quad (5.2)$$

Si  $P$  est vide, on pose  $\mu(P) = 0$ .

DÉFINITION 5.3 (mesure d'une réunion de pavés). Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux pavés de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle mesure de leur réunion le réel :

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2) - \mu(P_1 \cap P_2). \quad (5.3)$$

On peut donc définir par itération la mesure d'une réunion finie de pavés.

DÉFINITION 5.4 (parties négligeables). On dit qu'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  est négligeable si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de pavé de  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(P_k) \leq \varepsilon. \quad (5.4)$$

DÉFINITION 5.5 (compacts mesurables). Un compact (fermé borné) de  $\mathbb{R}^n$  est dit mesurable si et seulement si sa frontière  $\partial X = X \setminus \overset{\circ}{X}$  est négligeable. On note  $\mathcal{M}_c$  l'ensemble des parties compactes et mesurables de  $\mathbb{R}^n$ .

PROPOSITION 5.6 (mesure d'un compact mesurable). Soit  $X \in \mathcal{M}_c$ . Soit  $\mathcal{P}_X$ , la famille des réunions finies de pavés inclus dans  $X$ . L'ensemble  $\{\mu(S) : S \in \mathcal{P}_X\}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ ; elle admet une borne supérieure appelée mesure de  $X$  et notée  $\mu(X)$ . On a donc

$$\mu(X) = \sup \{\mu(S) : S \in \mathcal{P}_X\}. \quad (5.5)$$

PROPOSITION 5.7. Pour un compact  $X$ , on a les équivalence des trois assertions suivantes :

- (1)  $X$  est négligeable ;
- (2)  $X$  est de mesure nulle ;
- (3)  $X$  est d'intérieur vide.

Dans le cas où  $n \in \{2, 3\}$ , on a donc défini la surface d'une partie de  $\mathbb{R}^2$  et le volume d'une partie de  $\mathbb{R}^3$  :

DÉFINITION 5.8 (compacts mesurables de  $\mathbb{R}^2$ ). Un compact mesurable de  $\mathbb{R}^2$  est dit quarrable. La mesure d'une partie quarrable  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  est appelée aire de  $X$  et notée  $\mathcal{A}(X)$ .

DÉFINITION 5.9 (compacts mesurables de  $\mathbb{R}^3$ ). Un compact mesurable de  $\mathbb{R}^3$  est dit cubable. La mesure d'une partie cubable  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  est appelée volume de  $X$  et notée  $\mathcal{V}(X)$ .

### 5.3. Intégrale d'une fonction sur un compact mesurable de $\mathbb{R}^n$

Dans cette section encore, nous donnons les définitions minimales et les propositions sans preuve afin de définir l'intégrale d'une fonction sur un compact mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . Pour toute cette section,  $n$  est un entier naturel non nul.

DÉFINITION 5.10. Soit  $\Delta$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle partage de  $\Delta$  toute famille finie  $\sigma = (\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$  de compacts mesurables telle que

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^p \Delta_j \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad i \neq j \implies \mu(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0. \quad (5.6)$$

On note  $\mathcal{P}_\Delta$  l'ensemble des partages de  $\Delta$ .

DÉFINITION 5.11 (Sommes de Darboux). Soit  $f$  une fonction bornée de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$ . À un partage  $\sigma = (\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$ , on associe les réels

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad m_i = \inf_{\Delta_i} f, \quad M_i = \sup_{\Delta_i} f, \quad (5.7)$$

et les réels

$$d(\sigma) = \sum_{j=1}^p m_j \mu(\Delta_j), \quad D(\sigma) = \sum_{j=1}^p M_j \mu(\Delta_j), \quad (5.8)$$

sont respectivement appelés sommes de Darboux inférieures et sommes de Darboux supérieures.

PROPOSITION 5.12. *Dans le cadre de la définition 5.11, les parties*

$$\{d(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}_\Delta\} \text{ et } \{D(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}_\Delta\},$$

*sont des parties bornées de  $\mathbb{R}$  et on considère leurs bornes inférieures et supérieures respectives :*

$$s(f) = \sup \{d(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}_\Delta\}, \quad S(f) = \inf \{D(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}_\Delta\}. \quad (5.9)$$

*Une application bornée  $f$  de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}^n$  est dite intégrable si et seulement si  $s(f) = S(f)$ . Dans ce cas, le réel  $s(f) = S(f)$  est appelé intégrale de  $f$  sur  $\Delta$  et est noté  $\int_\Delta f$  ou  $\int_\Delta f(X)dX$  ( $X$  désigne une variable muette).*

REMARQUE 5.13. Dans le cas où  $n = 1$ , l'intégrale simple peut aussi être définie grâce aux sommes de Darboux définies par (5.8). Voir le chapitre sur l'intégrale de Riemann de [Lan05].

REMARQUE 5.14. Dans le cas où  $n = 2$ , on peut donner un sens géométrique aux sommes définies par (5.8). Voir chapitre 6

REMARQUE 5.15. Cette théorie de l'intégration ne permet que d'intégrer des fonctions bornées sur des compacts. Grâce à la théorie de l'intégration de Lebesgue (voir par exemple [AF89]), on peut intégrer des fonctions non bornées et/ou sur des parties non bornées. Mais cette théorie est beaucoup plus difficile !

PROPOSITION 5.16 (mesure d'un compact mesurable (bis)). *Soit  $C$  un compact mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . La mesure de  $C$  est égale à*

$$\mu(C) = \int_C dX. \quad (5.10)$$

## 5.4. Propriétés sur les intégrales multiples

Donnons quelques propriétés générales sur les intégrales multiples.

Dans toute cette section,  $\Delta$  désigne un compact mesurable de  $\mathbb{R}^n$ .

PROPOSITION 5.17. *Toute application continue de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$  est intégrable.*

PROPOSITION 5.18. *Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, alors  $|f|$ ,  $\inf(f, g)$ ,  $\sup(f, g)$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont intégrables.*

PROPOSITION 5.19.



Soient  $f$  et  $g$  intégrables de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f \geq 0 &\implies \int_{\Delta} f \geq 0, \\ f \leq g &\implies \int_{\Delta} f \leq \int_{\Delta} g, \\ \left| \int_{\Delta} f \right| &\leq \int_{\Delta} |f| \leq \mu(\Delta) \sup_{x \in \Delta} |f(x)|, \\ \mu(\Delta) = 0 &\implies \int_{\Delta} f = 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.20. Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux compacts mesurables de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  de  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrable. Alors  $f$  est intégrable sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  et

$$\int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f - \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f.$$

PROPOSITION 5.21 (Valeur moyenne et théorème de la moyenne).

(1) Soit  $f$  de  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}$ , intégrable. Alors

$$\mu(\Delta) \inf_{\Delta} f \leq \int_{\Delta} f \leq \mu(\Delta) \sup_{\Delta} f.$$

(2) Si  $\Delta$  est connexe<sup>1</sup>, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  est continue et  $g$  est positive, alors

$$\begin{aligned} \text{il existe } a \in \Delta \text{ tel que : } \int_{\Delta} f &= f(a) \mu(\Delta), \\ \text{il existe } b \in \Delta \text{ tel que : } \int_{\Delta} fg &= f(b) \int_{\Delta} g. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.22 (Inégalités de Schwarz et de Minkowski).

Soient  $f$  et  $g$  de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrables.

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Delta} fg \right)^2 &\leq \left( \int_{\Delta} f^2 \right) \left( \int_{\Delta} g^2 \right), \\ \left( \int_{\Delta} (f+g)^2 \right)^{1/2} &\leq \left( \int_{\Delta} f^2 \right)^{1/2} + \left( \int_{\Delta} g^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

REMARQUE 5.23. Si  $f$  est à valeur dans un espace vectorielle de dimension finie, ou dans  $\mathbb{C}$ , on peut encore donner un sens à l'intégrale de  $f$ , en intégrant «composante par composante». Voir la page 247 de [GAJ93].

## 5.5. Changement de variables

THÉORÈME 5.24 (formule de changement de variable). Soient  $\Delta$  et  $D$  deux compacts mesurables de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi$  une application de  $D$  dans  $\Delta$ , de classe  $C^1$ , bijective et dont la réciproque est de classe  $C^1$ . On

---

<sup>1</sup>dont la seule partie ouverte et fermée par rapport à lui même est  $\Delta$  ou  $\emptyset$ , ou ce qui revient au même, «d'un seul tenant».

suppose que  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . Soit le jacobien de cette application défini par (voir définition 4.16 page 62 du chapitre 4) :

$$\forall X \in D, \quad \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(X) = \det \left( \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(X) \right]_{1 \leq i, j \leq n} \right) \quad (5.11)$$

L'application  $\phi$  de  $D$  dans  $\Delta$ , qui à  $X \in D$  associe  $U = \phi(X) \in \Delta$  définit un changement de variable ; la fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $X$  associe  $(f(\phi(X)) \cdot |D(\phi_1, \dots, \phi_n)/D(x_1, \dots, x_n)(X)|)$  est intégrable et on a

$$\int_{\Delta} f(U) dU = \int_D (f(\phi(X)) \left| \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(X) \right|) dX. \quad (5.12)$$

On retiendra de façon pratique que  $U = \phi(X) \in \Delta$  est «l'ancienne» variable et que  $X \in D$  est la «nouvelle variable» (ou le contraire). Dans la formule (5.12), on remplace successivement

- $\Delta$  par  $D$ ,
- $U$  par  $\phi(X)$ ,
- $dU$  par  $|D(\phi_1, \dots, \phi_n)/D(x_1, \dots, x_n)(X)| dX$ . De façon mnémotechnique, on peut utiliser la notation différentielle :

$$U = \phi(X) \implies dU = \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(X) dX,$$

sans oublier les valeurs absolues, c'est-à-dire

$$dU = \left| \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(X) \right| dX.$$

Rappelons :

**THÉORÈME 5.25** (formule de changement de variable à une dimension). *Soit une fonction  $\phi$  de classe  $C^1$  et strictement monotone d'un intervalle  $D$  dans un intervalle  $\Delta = [a, b]$ . On a  $D = [\alpha, \beta] = [\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)]$ . Soit  $f$  intégrable sur  $\Delta$ . On a alors*

$$\int_a^b f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) dx. \quad (5.13)$$

Le théorème 5.24 est l'analogue du théorème 5.25 on a en effet  $\Delta = [a, b]$  et  $D = [\alpha, \beta] = [\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)] = \phi^{-1}([a, b])$  et  $\phi'(x)$  est le jacobien de  $\phi$  (ou son opposé selon que  $\phi$  est strictement croissante ou décroissante).



## Calcul pratique d'intégrales multiples (simples, doubles et triples)

On pourra consulter les références suivantes (données dans un ordre croissant de difficulté) : le chapitre 4 de [Bas04a] et [GAJ93, BD02b, BD02a, LFA77, AF89].

On pourra aussi consulter, en annexe K, un exemple de calcul de volume (donné en examen de MT25, en juin 2005).

### 6.1. Introduction

Dans cette section, nous reprenons les résultats du chapitre 5 dans le cas particulier où  $n$  appartient à  $\{1, 2, 3\}$ . Naturellement, tous les résultats du chapitre 5 sont valables ici. Nous donnerons, de plus, des techniques de calculs et des exemples.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta$ , une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$ , une fonction intégrable sur  $\Delta$ . L'intégrale  $\int_{\Delta} f(X) dX$  est notée respectivement :

$$\int_{\Delta} f(x) dx, \text{ si } n = 1 \text{ (on parle d'intégrale simple, voir section 6.2)}; \quad (6.1)$$

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy, \text{ si } n = 2 \text{ (on parle d'intégrale double, voir section 6.3)}; \quad (6.2)$$

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz, \text{ si } n = 3 \text{ (on parle d'intégrale triple, voir section 6.4)}. \quad (6.3)$$

REMARQUE 6.1. Dans la notation  $dx dy$  ou  $dx dy dz$ , l'ordre des variables ne compte pas.

### 6.2. Intégrales simple

On consultera par exemple [Lan05]. Donnons seulement un exemple d'application de la proposition 5.25 page 81.

EXEMPLE 6.2. Calculons, pour  $R \in \mathbb{R}_+$ , l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose  $u = R \cos x$ , c'est-à-dire, on choisit  $\phi(x) = R \cos x$ . On remplace l'ancienne variable  $u$  par la nouvelle variable  $R \cos x$  et donc  $\sqrt{R^2 - u^2}$  par

$$\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} = R \sqrt{\sin^2 x} = R |\sin x|.$$

On remplace  $du$  par  $d(R \cos x) = -R \sin x dx$ . Quand  $u = 0$ , on a  $x = \pi/2$  et quand  $u = R$ , on a  $x = 0$ ; on remplace<sup>1</sup> donc 0 et  $R$  par  $\pi/2$  et 0. On a donc

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du = \int_{\pi/2}^0 R |\sin x| (-R \sin x) dx = R^2 \int_0^{\pi/2} |\sin x| \sin x dx = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Après calculs, il vient

$$I_R = \frac{\pi}{4} R^2.$$

### 6.3. Intégrale double

Pour toute cette section,  $\Delta$  désigne un compact quarrable de  $\mathbb{R}^2$  (voir définition 5.8 page 78) et  $f$  une application intégrable de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$ .

Conformément à la proposition 5.16 page 79, on a

PROPOSITION 6.3 (calcul d'une surface). *L'aire de la partie quarrable  $\Delta$  est égale à*

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} dx dy. \quad (6.4)$$

D'après la remarque 5.14 page 79, on peut donner un sens à la somme de Darboux définie par (5.8).

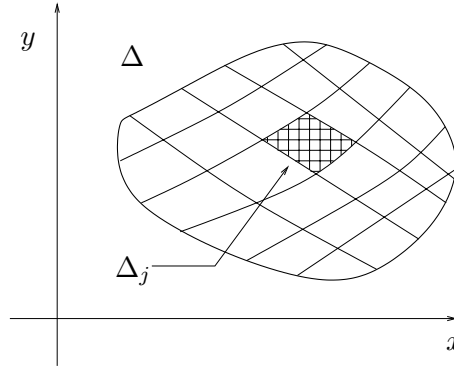


FIG. 6.1. partage de  $\Delta$ .

Le partage  $\sigma = (\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$  représente un découpage de  $\Delta$ , dont les intersection deux à deux sont négligeables (voir figure 6.1). Pour  $j \in \{1, \dots, p\}$  fixé, la quantité  $m_i \mu(\Delta_i) = \inf_{\Delta_i} \mu(\Delta_i) f$  représente le volume de la partie de  $\mathbb{R}^3$  de base  $\Delta_i$  de hauteur  $m_i$  et la quantité  $M_i \mu(\Delta_i) = \sup_{\Delta_i} \mu(\Delta_i) f$  représente le volume de la partie de  $\mathbb{R}^3$  de base  $\Delta_i$  de hauteur  $M_i$ . Quand la «surface maximale» des compacts tend vers zéro, les deux sommes définies par (5.8) tendent vers  $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$ . Ainsi, cette intégrale représente le volume de la partie de  $\mathbb{R}^3$  située sous la surface d'équation  $z = f(x, y)$  pour

<sup>1</sup>attention au sens.

$(x, y)$  décrivant  $\Delta$ . Dans le cas où  $f$  est égal à un, ce volume est égal à l'aire de  $\Delta$ , conformément à (6.4).

Grâce au théorème suivant, il est possible, dans certains cas de transformer le calcul d'une intégrale double en deux calculs successifs d'intégrale simple :

On suppose que  $f$  est continue. On suppose que la partie  $\Delta$  est telle qu'il existe des réels  $a, b, c, d$  et deux applications  $E$  et  $F$  tels que

$$\Delta \subset [a, b] \times [c, d], \quad (6.5)$$

avec, pour tout  $(x, y)$ ,

$$(x, y) \in \Delta \iff x \in [a, b] \text{ et } y \in [E(x), F(x)]. \quad (6.6)$$

Voir figure 6.2.

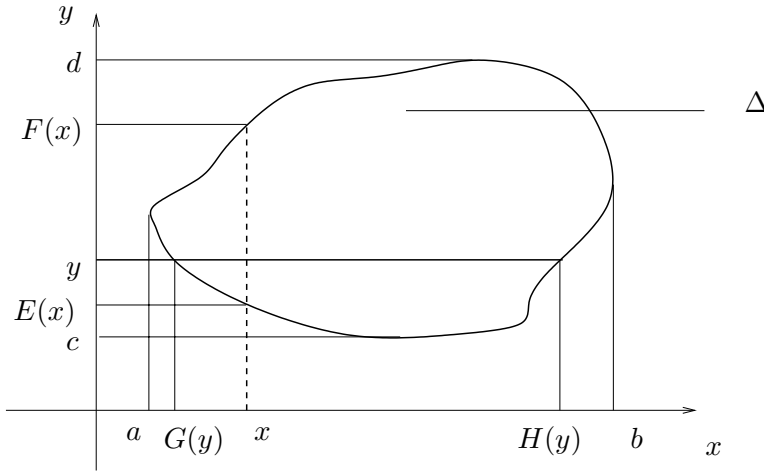


FIG. 6.2. Décomposition de la partie  $\Delta$

De même, on suppose qu'il existe deux applications  $G$  et  $H$  telles que, pour tout  $(x, y)$ ,

$$(x, y) \in \Delta \iff y \in [c, d] \text{ et } x \in [G(y), H(y)]. \quad (6.7)$$

Pour tout  $x \in [a, b]$  fixé, l'application de  $[E(x), F(x)]$  dans  $\mathbb{R} : y \mapsto f(x, y)$  est continue (donc intégrable) et pour tout  $y \in [c, d]$  fixé, l'application de  $[G(y), H(y)]$  dans  $\mathbb{R} : x \mapsto f(x, y)$  est continue (donc intégrable).

On a alors le théorème :

THÉOREME 6.4 (Théorème de Fubini). *Sous les notations (6.5), (6.6) et (6.7), on a*

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{E(x)}^{F(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{G(y)}^{H(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (6.8)$$

Nous avons en fait intégré par «tranche élémentaire» d'épaisseur  $dx$  dans la première intégrale et d'épaisseur  $dy$  dans la seconde. En effet, le terme

$$\left( \int_{E(x)}^{F(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

est égal au volume de la tranche élémentaire d'épaisseur  $dx$  et de surface

$$\int_{E(x)}^{F(x)} f(x, y) dy.$$

On a immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.5. *Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  et de  $[c, d]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors, en posant  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  et*

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \quad f(x, y) = u(x)v(y) \quad (6.9)$$

on a

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b u(x) dx \int_c^d v(y) dy. \quad (6.10)$$

DÉMONSTRATION. Avec les notations du théorème 6.4, on a pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $E(x) = c$  et  $F(x) = d$ . Ainsi, on a successivement (en sortant de l'intégrale ce qui ne dépend pas de la variable d'intégration) :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy &= \iint_{\Delta} u(x)v(y) dx dy, \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d u(x)v(y) dy \right) dx, \\ &= \int_a^b u(x) \left( \int_c^d v(y) dy \right) dx, \\ &= \int_a^b u(x) dx \int_c^d v(y) dy. \end{aligned}$$

□

On a aussi immédiatement

COROLLAIRE 6.6. *Soit  $f$  une application continue de  $[a, b] \times [c, d]$  dans  $\mathbb{R}$ . On a*

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (6.11)$$

EXEMPLE 6.7. Calculons

$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy,$$

où

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

et

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad f(x, y) = 1 + xy + x^2 + y^2.$$

Nous utilisons le théorème de Fubini en intégrant par tranche verticale : voir figure 6.3.

On a donc  $a = 0$ ,  $b = 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $E(x) = 0$  et  $F(x) = x$  et :

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x f(x, y) dy \right) dx.$$

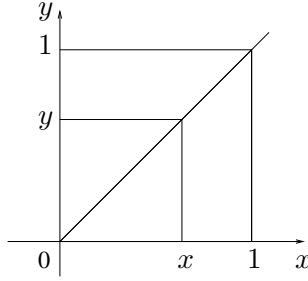


FIG. 6.3. Intégration par tranche verticale

À  $x$  fixé, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f(x, y) dy &= \int_0^x 1 + xy + x^2 + y^2 dy, \\
 &= \int_0^x dy + x \int_0^x y dy + x^2 \int_0^x dy + \int_0^x y^2 dy, \\
 &= x + \frac{x^3}{2} + x^3 + \frac{x^3}{3}, \\
 &= \frac{11}{6}x^3 + x.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \frac{11}{6}x^3 + x dx = \frac{23}{24}.$$

Nous aurions pu aussi utiliser le théorème de Fubini en intégrant par tranche horizontale.

Le théorème 5.24 page 80 devient pour  $n = 2$  :

**THÉORÈME 6.8** (formule de changement de variable (plans)). *Soient  $\Delta$  et  $D$  deux compacts mesurables de  $\mathbb{R}^2$  et  $\phi$  une application de  $D$  dans  $\Delta$ , de classe  $C^1$ , bijective et dont la réciproque est de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . Soit le jacobien de cette application défini par*

$$\forall (x, y) \in D, \quad \frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(x, y)}(x, y) = \det \left( \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(X) \right]_{1 \leq i, j \leq 2} \right). \quad (6.12)$$

*L'application  $\phi$  de  $D$  dans  $\Delta$ , qui à  $(x, y) \in D$  associe  $(u, v) = \phi(x, y) \in \Delta$  définit un changement de variable ; la fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y)$  associe  $(f(\phi(x, y)) \cdot |D(\phi_1, \phi_2)/D(x, y)(x, y)|$  est intégrable et on a*

$$\iint_{\Delta} f(u, v) du dv = \iint_D f(\phi(x, y)) \left| \frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(x, y)}(x, y) \right| dx dy. \quad (6.13)$$

Le principe de ce changement de variable est de ramener un domaine de forme quelconque à un domaine de forme rectangulaire, au quel cas, le corollaire 6.6 page précédente peut être appliqué. Un cas particulier peut être mentionné, celui des coordonnées polaires (voir (2.1), chapitre 2).



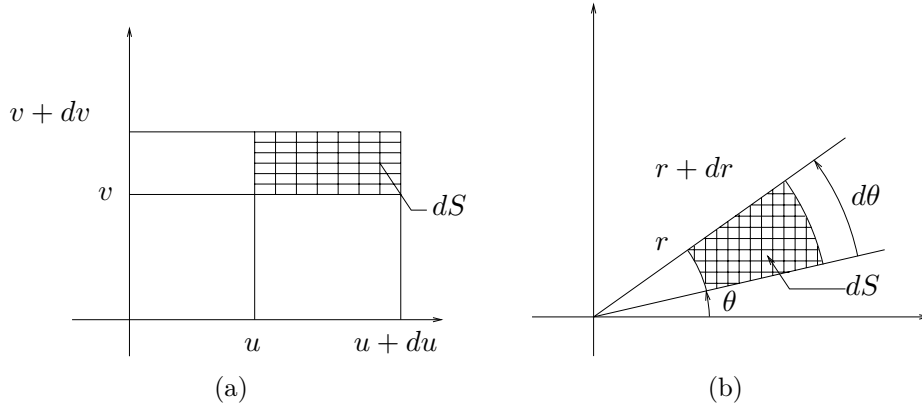


FIG. 6.4. La surface élémentaire  $dS$  en coordonnées cartésiennes (a) et en coordonnées polaires (b).

THÉOREME 6.9 (formule de changement de variable en polaires). Soient  $\Delta$  un compact mesurable de  $\mathbb{R}^2$  décrit en coordonnées polaires par

$$(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta) \in \Delta \iff (r, \theta) \in D, \quad (6.14)$$

où  $D$  est un compact mesurable de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . On a alors

$$\iint_{\Delta} f(u, v) du dv = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (6.15)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer  $\phi$  de  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

La matrice jacobienne de  $\phi$  (voir exemple 4.34 page 68 du chapitre 4) vaut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut donc

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(r, \theta)}(r, \theta) = r.$$

L'équation (6.13) se simplifie donc sous la forme (6.15).  $\square$

On pourra se rappeler que  $dS = du dv$  représente une aire infinitésimale en coordonnées cartésiennes et  $dS = r dr d\theta$  représente une aire infinitésimale en coordonnées polaires (voir figure 6.4).

EXEMPLE 6.10. Calculons la surface d'un disque  $\Delta$  de centre l'origine et de rayon  $R$ , égale à

$$S = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Le disque  $\Delta$  est décrit en coordonnées polaire par la partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$r \in [0, R] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

On a donc, d'après (6.15), en posant  $D = [0, R] \times [0, 2\pi]$

$$\iint_{\Delta} dx dy = \iint_D r dr d\theta.$$

D'après le corollaire 6.5 du théorème de Fubini, on a

$$\iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} r dr d\theta = \int_{r=0}^{r=R} r dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \pi R^2,$$

ce qui est la formule bien connue. Remarquons que l'on a

$$S = \int_0^R 2\pi r dr,$$

ce qui est la surface élémentaire de la partie du disque formée d'une portion de disque délimitée par deux cercles de rayons  $r$  et  $r + dr$  (cf. figure 6.5).

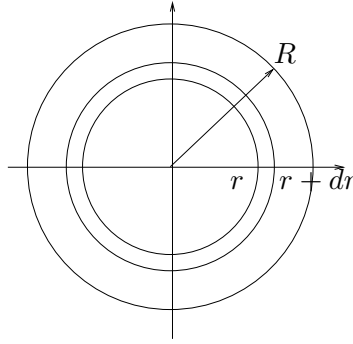


FIG. 6.5. Une portion de disque élémentaire

## 6.4. Intégrale triple

Les notions sont identiques à celle de la section précédente.

Conformément à la proposition 5.16 page 79, on a

PROPOSITION 6.11 (calcul d'un volume). *Le volume de la partie cubable  $\Delta$  est égal à*

$$\mathcal{V}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz. \quad (6.16)$$

Donnons l'analogie du théorème 6.4 page 85, qui se décline sous plusieurs variantes :

THÉORÈME 6.12 (Théorème de Fubini (calcul par tranches)). *Soient  $\Delta$  un compact cubable de  $\mathbb{R}^3$  tel (voir figure 6(a)) qu'il existe  $a, b$  et  $D$  une application de  $[a, b]$  dans l'ensemble des parties quarrables de  $\mathbb{R}^2$  avec*

$$(x, y, z) \in \Delta \iff z \in [a, b] \text{ et } (x, y) \in D(z). \quad (6.17)$$

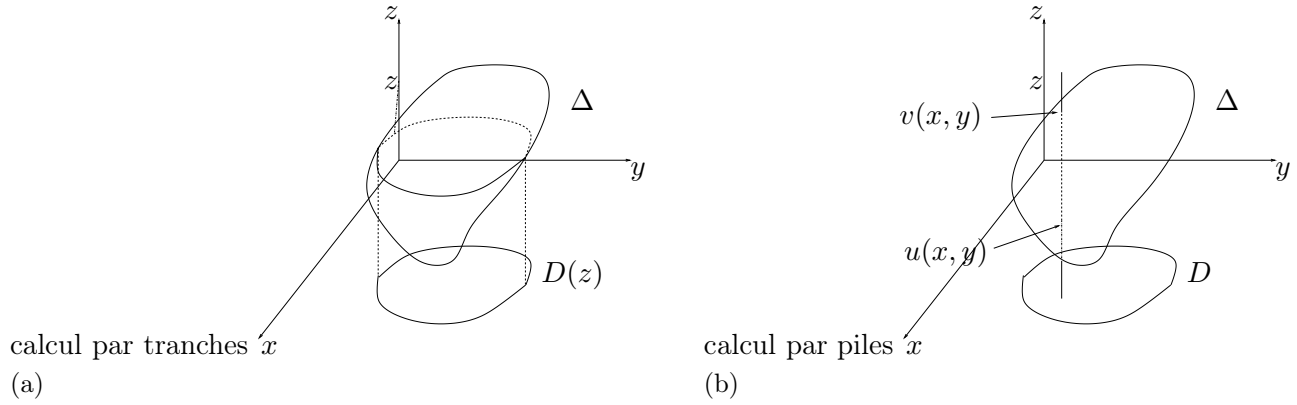


FIG. 6.6. Deux variantes du théorème de Fubini dans l'espace.

Soit  $f$  continue sur  $\Delta$ . On a alors

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz. \quad (6.18)$$

On peut, bien entendu, utiliser ce théorème, en intégrant d'abord par rapport à  $x$  ou à  $y$ .

**THÉORÈME 6.13** (Théorème de Fubini (calcul par piles)). Soient  $\Delta$  un compact cubable de  $\mathbb{R}^3$  tel (voir figure 6(b)) qu'il existe  $D$ , une partie quarrable de  $\mathbb{R}^2$  et  $u$  et  $v$  deux applications continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  avec

$$(x, y, z) \in \Delta \iff (x, y) \in D \text{ et } u(x, y) \leq z \leq v(x, y). \quad (6.19)$$

Soit  $f$  continue sur  $\Delta$ . On a alors

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (6.20)$$

On peut, bien entendu, utiliser ce théorème, en intégrant d'abord par rapport à  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  ou  $(y, z)$ .

On a aussi les deux corollaires suivants identiques aux corollaires 6.5 page 86 et 6.6 page 86 :

**COROLLAIRE 6.14.** Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont trois fonctions continues respectivement de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , de  $[c, d]$  dans  $\mathbb{R}$ , de  $[e, f]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors, en posant  $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  et

$$\forall (x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times [e, f], \quad f(x, y, z) = u(x)v(y)w(z) \quad (6.21)$$

on a

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b u(x) dx \int_c^d v(y) dy \int_e^f w(z) dz. \quad (6.22)$$

**COROLLAIRE 6.15.** Soit  $f$  une application continue de  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  dans  $\mathbb{R}$ . On a

$$\iiint_{[a, b] \times [c, d] \times [e, f]} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (6.23)$$

EXEMPLE 6.16. Calculons le volume de la portion de  $\mathbb{R}^3$  délimitée par l'hyperboloïde de révolution (cf. figure 6.7) d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (6.24)$$

et les plans d'équations  $z = \alpha$  et  $z = \beta$  (avec  $\alpha < \beta$ ).

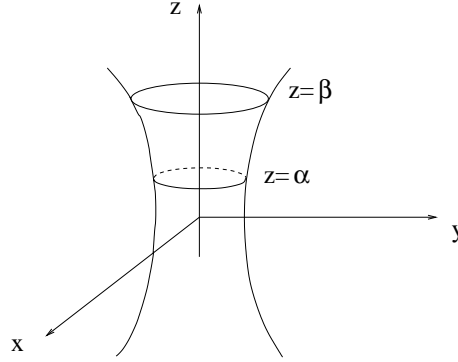


FIG. 6.7. Un hyperboloïde de révolution

On intègre par tranches définies par les plans d'équation  $z = \text{constante}$  : dans ce cas,  $(x, y)$  vérifie  $x^2 + y^2 \leq 1 + z^2$ , ce qui est l'équation d'un disque de rayon  $R = \sqrt{1 + z^2}$  et de surface  $\pi(1 + z^2)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz, \\ &= \int_{z=\alpha}^{z=\beta} \left( \iint_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 + z^2}} dx dy \right) dz, \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \pi(1 + z^2) dz. \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient

$$V = \pi(\beta - \alpha) \left( 1 + \frac{1}{3} (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \right).$$

Remarquons que le volume élémentaire de la tranche d'épaisseur  $dz$  est égal à

$$dV = S dz,$$

où  $S = \pi(1 + z^2)$  est la surface de la tranche de cote  $z$ .

EXEMPLE 6.17. Calculons l'intégrale suivante :

$$I = \iiint_{[0,1]^3} x^2 y e^{xyz} dx dy dz. \quad (6.25)$$

On intègre par pile (attention, l'ordre des variables n'est pas indifférent) :

$$\begin{aligned}
 \iiint_{[0,1]^3} x^2 y e^{xyz} dx dy dz &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 x^2 y e^{xyz} dz \right) dy \right) dx, \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( [x e^{xyz}]_{z=0}^{z=1} \right) dy \right) dx, \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (x e^{xy} - x) dy \right) dx, \\
 &= \int_0^1 e^x - 1 - x dx = e - \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Le théorème 5.24 page 80 devient pour  $n = 3$  :

THÉORÈME 6.18 (formule de changement de variable (espaces)). Soient  $\Delta$  et  $D$  deux compacts mesurables de  $\mathbb{R}^3$  et  $\phi$  une application de  $D$  dans  $\Delta$ , de classe  $C^1$ , bijective et dont la réciproque est de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . Soit le jacobien de cette application défini par

$$\forall (x, y, z) \in D, \quad \frac{D(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{D(x, y, z)}(x, y, z) = \det \left( \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(X) \right]_{1 \leq i, j \leq 3} \right) \quad (6.26)$$

L'application  $\phi$  de  $D$  dans  $\Delta$ , qui à  $(x, y, z) \in D$  associe  $(u, v, w) = \phi(x, y, z) \in \Delta$  définit un changement de variable ; la fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y, z)$  associe  $(f(\phi(x, y, z))) \cdot |D(\phi_1, \phi_2, \phi_3)/D(x, y, z)(x, y, z)|$  est intégrable et on a

$$\iiint_{\Delta} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_D f(\phi(x, y, z)) \left| \frac{D(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{D(x, y, z)}(x, y, z) \right| dx dy dz. \quad (6.27)$$

Comme pour les intégrales doubles, on donne le cas particulier des coordonnées cylindriques et sphériques (voir rappels en annexe J) :

THÉORÈME 6.19 (formule de changement de variable en cylindriques). Soient  $\Delta$  un compact mesurable de  $\mathbb{R}^3$  décrit en coordonnées cylindriques par

$$(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, w = z) \in \Delta \iff (r, \theta, z) \in D, \quad (6.28)$$

où  $D$  est un compact mesurable de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . On a alors

$$\iiint_{\Delta} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (6.29)$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du théorème 6.9 page 87 : il suffit de vérifier que le jacobien vaut  $r$ .  $\square$

THÉORÈME 6.20 (formule de changement de variable en sphériques). Soient  $\Delta$  un compact mesurable de  $\mathbb{R}^3$  décrit en coordonnées sphériques par

$$(u = r \cos \phi \cos \theta, v = r \cos \phi \sin \theta, w = r \sin \phi) \in \Delta \iff (r, \theta, \phi) \in D, \quad (6.30)$$

où  $D$  est un compact mesurable de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ . On a alors

$$\iiint_{\Delta} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_D f(r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi) r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi. \quad (6.31)$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du théorème 6.9 : il suffit de vérifier que le jacobien vaut  $r^2 \cos \phi$ .  $\square$

Donnons deux exemples d'applications :

EXEMPLE 6.21 (Calcul du volume d'un cylindre). Déterminons le volume du cylindre de base un cercle de centre l'origine et de rayon  $R$ , délimité par les cotes  $z = 0$  et  $z = a$ . En coordonnées cylindriques, ce volume est décrit par

$$(r, \theta, z) \in D = [0, R] \times [0, 2\pi[ \times [0, a].$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Delta} dx dy dz, \\ &= \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi[ \times [0, a]} r dr d\theta dz, \\ &= \int_{r=0}^{r=R} r dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=a} dz, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule classique

$$V = \pi R^2 a.$$

EXEMPLE 6.22 (Calcul du volume d'une sphère). Déterminons le volume d'une sphère de centre l'origine et de rayon  $R$ . En coordonnées sphériques, ce volume est décrit par

$$(r, \theta, \phi) \in D = [0, R] \times [0, 2\pi[ \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Delta} dx dy dz, \\ &= \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi[ \times [-\pi/2, \pi/2]} r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi, \\ &= \int_{r=0}^{r=R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2} \cos \phi d\phi, \\ &= \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times 2, \end{aligned}$$

et on retrouve la formule classique

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

EXEMPLE 6.23. Voir annexe K page 163.

## 6.5. Applications à la résistance des matériaux

Cette section est traitée avec peu de rigueur ! Seules sont données les idées formelles.

On pourra consulter pour plus de rigueur la section VIII page 264 de [GAJ93] ou le chapitre VII de [LFA77].

### 6.5.1. Dans le plan

#### 6.5.1.1. Calculs de centre de gravité.

On rappelle que si l'on a un système de  $n$  points affecté de masse  $(M_i, m_i)_{1 \leq i \leq n}$ , le centre de gravité  $G$  de ces points est l'unique point tel que :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}. \quad (6.32)$$

Pour tout point  $O$ , on a donc

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0},$$

et donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}. \quad (6.33)$$

Si  $O$  désigne l'origine du plan et  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$  les coordonnées des points  $M_i$ , alors (6.33) fournit les coordonnées  $(x_G, y_G)$  du point  $G$  :

$$x_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (6.34)$$

$$y_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i y_i. \quad (6.35)$$

Supposons que le système de point soit continu (par exemple une plaque) et désigne un ensemble de points du plan défini par une partie quarrable  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$ . On note, en tout point de cette plaque, la densité surfacique de masse (appelée aussi masse surfacique) :

$$\rho(x, y) = \frac{dm}{dS}. \quad (6.36)$$

Cela signifie que la surface élémentaire  $dS$  a une masse égale à  $dm = \rho(x, y)dS$ . On écrit (6.34) et (6.35) en remplaçant les sommes  $\sum_{i=1}^n$  par des intégrales doubles sur  $\Delta$ , chaque masse  $m_i$  par  $dm = \rho(x, y)dS = \rho(x, y)dxdy$  (en coordonnées cartésiennes) et  $x_i$  et  $y_i$  par  $x$  et  $y$  (en fait, on passe à la limite quand  $n$  tend vers l'infini). On a donc les coordonnées du centre de gravité :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} \rho(x, y) x \, dxdy, \quad (6.37)$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} \rho(x, y) y \, dxdy, \quad (6.38)$$

où la masse totale du système est

$$M = \iint_{\Delta} dm = \iint_{\Delta} \rho(x, y) dxdy. \quad (6.39)$$

Si le système est homogène, on a

$$\rho(x, y) = \frac{dm}{dS} = \rho_0, \quad (6.40)$$

qui est constante. Ainsi on a

$$M = \iint_{\Delta} \rho(x, y) dx dy = \rho_0 \iint_{\Delta} dx dy = \rho_0 S,$$

où  $S$  est la surface du système et (6.37) et (6.38) se simplifient :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} \rho(x, y) x dx dy = \frac{1}{S} \iint_{\Delta} x dx dy,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} \rho(x, y) y dx dy = \frac{1}{S} \iint_{\Delta} y dx dy.$$

Bref, on a

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_{\Delta} x dx dy, \quad (6.41)$$

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_{\Delta} y dx dy, \quad (6.42)$$

où la surface totale du système est

$$S = \iint_{\Delta} dx dy. \quad (6.43)$$

On pourra remplacer  $\Delta$  par une réunion finie de sous-systèmes plus simples et utiliser l'associativité du centre de gravité.

#### 6.5.1.2. Calculs de moments quadratiques.

Dans toute cette section, on se donne une partie quarrable  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$ .

DÉFINITION 6.24. Si  $\mathcal{D}$  est une droite du plan, on appelle  $I_{\mathcal{D}}$  le moment quadratique de  $\Delta$  par rapport à l'axe  $\mathcal{D}$  la quantité :

$$I_{\mathcal{D}} = \iint_{\Delta} r^2(x, y) dx dy, \quad (6.44)$$

où pour tout point  $(x, y)$  de  $\Delta$ ,  $r(x, y)$  est la distance du point  $M(x, y)$  à la droite  $\mathcal{D}$  (cf. figure 6.8).

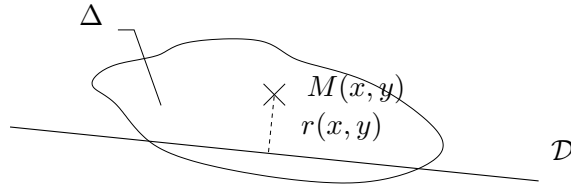


FIG. 6.8. Moment quadratique d'une surface



On donne le théorème suivant :

THÉORÈME 6.25 (Théorème de Huygens). Soient deux axes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  parallèles, l'axe  $\mathcal{D}'$  passant par  $G$  le centre de gravité de  $\Delta$  (système homogène). On a alors

$$I_{\mathcal{D}} = I_{\mathcal{D}'} + Sd^2,$$

où  $S$  est la surface de  $\Delta$  et  $d$  la distance entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  (cf. figure 6.9).

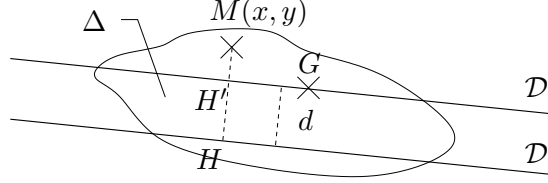


FIG. 6.9. Théorème de Huygens

DÉMONSTRATION. On appelle  $H$  et  $H'$  les projetés orthogonaux de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  (cf. figure 6.9). On peut donc écrire (algébriquement, par rapport à un axe orienté perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ )

$$r(x, y) = \overline{HM}.$$

Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$r^2(x, y) = (\overline{HH'} + \overline{H'M})^2 = HH'^2 + 2\overline{HH'}\overline{H'M} + H'M^2 = d^2 + 2\overline{HH'}\overline{H'M} + r'^2(x, y),$$

où  $r'(x, y)$  est la distance de  $M$  à  $\mathcal{D}'$ . Par intégration, il vient donc, en sortant les termes uniformes des intégrales,

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{D}} &= \iint_{\Delta} r^2(x, y) \, dxdy, \\ &= \iint_{\Delta} d^2 + 2\overline{HH'}\overline{H'M} + r'^2(x, y) \, dxdy \\ &= d^2 \iint_{\Delta} dxdy + 2\overline{HH'} \iint_{\Delta} \overline{H'M} dxdy + \iint_{\Delta} r'^2(x, y) \, dxdy \\ &= Sd^2 + 2\overline{HH'} \iint_{\Delta} \overline{H'M} dxdy + I_{\mathcal{D}'}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\iint_{\Delta} \overline{H'M} dxdy = 0. \quad (6.45)$$

En effet, selon (6.32) écrit de façon continue<sup>2</sup> pour un système homogène, on a

$$\iint_{\Delta} \overrightarrow{GM}(x, y) dxdy = \vec{0},$$

<sup>2</sup>et en écrivant que l'intégrale multiple d'une fonction vectorielle est le vecteur dont chacune des composantes est l'intégrale multiple de chacune des composante de la fonction. Voir remarque 5.23 page 80 du chapitre 5.

ce qui donne, en considérant  $u$  un vecteur unitaire, perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  (et orienté de façon conforme au choix des mesures algébriques dans le calcul précédent) :

$$0 = u \cdot 0 = u \cdot \iint_{\Delta} \overrightarrow{GM}(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} u \cdot \overrightarrow{GM}(x, y) dx dy.$$

Par définition, on a

$$u \cdot \overrightarrow{GM}(x, y) = u \cdot (\overrightarrow{GH'} + \overrightarrow{H'M}) = \overrightarrow{H'M},$$

ce qui prouve (6.45). □

Puisque  $d^2$  est toujours positif et s'annule si  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ , on en déduit le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 6.26.** *Sous les notations du théorème 6.25, quand  $\mathcal{D}$  varie (avec une direction fixée),  $I_{\mathcal{D}}$  est minimale si  $\mathcal{D}$  passe par le centre de gravité  $G$ .*

**REMARQUE 6.27.** Si aucune des droites ne passe par le centre de gravité, on a aussi la version suivante du théorème de Huygens :

Soient deux axes  $\mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  parallèles et quelconques. Soit  $\mathcal{D}$  la droite parallèle à  $\mathcal{D}'$  passant par  $G$ , centre de gravité de  $\Delta$ . On a alors

$$I_{\mathcal{D}'} - I_{\mathcal{D}''} = S (d'^2 - d''^2), \quad (6.46)$$

où  $S$  est la surface de  $\Delta$ ,  $d'$  est la distance entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et  $d''$  est la distance entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}''$  (cf. figure 6.10). Il suffit d'écrire le théorème de Huygens entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , puis entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}''$  :

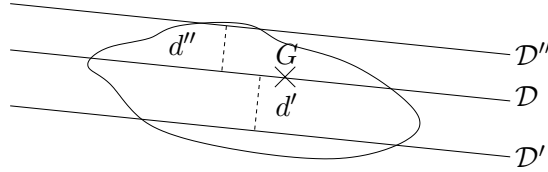


FIG. 6.10. Autre version du théorème de Huygens

$$I_{\mathcal{D}'} = I_{\mathcal{D}} + S d'^2,$$

$$I_{\mathcal{D}''} = I_{\mathcal{D}} + S d''^2.$$

Par différence, on en déduit (6.46).

**DÉFINITION 6.28.** Si la surface  $\Delta$  est rapportée à un système d'axes  $(x, y)$  orthogonaux (cf. figure 6.11), on appelle respectivement  $I_x$  et  $I_y$  les moments par rapports aux axes  $x$  et  $y$  :

$$I_x = \iint_{\Delta} y^2 dx dy, \quad (6.47)$$

$$I_y = \iint_{\Delta} x^2 dx dy, \quad (6.48)$$

et on note

$$I_{xy} = \iint_{\Delta} xy \, dx dy, \quad (6.49)$$

$$(6.50)$$

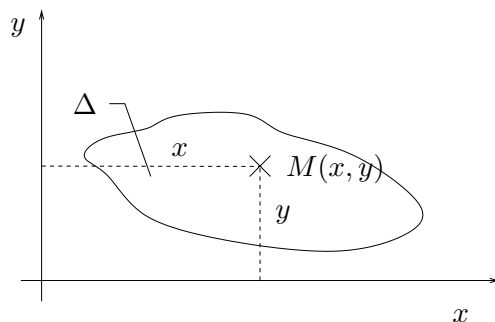


FIG. 6.11. Moments quadratiques d'une surface rapportés à un système d'axes.

On peut montrer la propriété suivante :

**PROPOSITION 6.29.** *Sous les notations de la proposition (6.28), parmi tous les axes orthogonaux  $(x, y)$  passant par  $G$ , il existe deux directions  $X$  et  $Y$  dites principales telles que  $I_{XY} = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Cela résulte de l'aspect symétrique d'une matrice de taille 2 et sa diagonalisation (cf. chapitre 8). On peut voir le plan de la preuve en annexe H de [Bas04a].  $\square$

### 6.5.2. Dans l'espace

Les calculs sont identiques à ceux de la section 6.5.1 à conditions de remplacer les intégrales doubles par des intégrales triples, les surfaces par des volumes et de rajouter une troisième composante.

## Produit scalaire, espace préhilbertien réel et espace euclidien

Ce chapitre s'inspire beaucoup des chapitre 1 et 2 de [RDO87]. On pourra aussi consulter le chapitre II de [AF90].

### 7.1. Produit scalaire et espace préhilbertien réel

#### 7.1.1. Définitions

Dans toute ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

DÉFINITION 7.1 (Définition d'un produit scalaire). Soit  $l$  une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $l$  est bilinéaire si et seulement si elle est linéaire par rapport à ses deux arguments, c'est à dire si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R} : y \mapsto l(x, y)$  est linéaire et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , l'application  $E \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto l(x, y)$  est linéaire.
- On dit que  $l$  est symétrique si et seulement si, pour tout  $x, y \in E$ ,  $l(x, y) = l(y, x)$ .
- On dit que  $l$  est définie positive si et seulement si, pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $l(x, x) > 0$ .

Un produit scalaire est une application  $l$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.

On notera systématiquement  $l(x, y)$ , le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  sous la forme  $\langle x, y \rangle$ . Pour toute la suite,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignera un produit scalaire sur  $E$ .

DÉFINITION 7.2 (Définition d'un espace préhilbertien réel). On appelle espace préhilbertien réel tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire.

Un espace préhilbertien réel qui est de plus complet (toute suite de Cauchy converge) est appelé espace hilbertien réel ou espace de Hilbert.  $\diamond$

Pour toute la suite,  $E$  désigne un espace préhilbertien réel.

Il est immédiat que

$$\forall u \in E, \quad \langle u, 0 \rangle = 0. \quad (7.1)$$

On vérifiera, pour les exemples suivants, que l'application donnée constitue bien un produit scalaire. Pour chacun d'eux, on donne  $E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

EXEMPLE 7.3.

$$E = \mathbb{R}^n, \quad (7.2a)$$

$$\langle u, v \rangle = \langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (7.2b)$$

EXEMPLE 7.4. Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$ .

$$E = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue} \right\}, \quad (7.3a)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b fg. \quad (7.3b)$$

### 7.1.2. Norme associée à un produit scalaire

La définition d'une norme a été donnée (voir section L.1 de l'annexe L page 169).

Si  $n$  est un entier non nul, sur  $\mathbb{R}^n$ , espace vectoriel de dimension finie, on définit trois normes très souvent employées : voir la définition L.7 de l'annexe L.

Faisons maintenant le lien avec le produit scalaire : de tout produit scalaire, on peut déduire une norme :

PROPOSITION 7.5 (Norme induite par un produit scalaire). *Soit  $\langle ., . \rangle$  un produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$ . On définit l'application  $\|.\|$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  par*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (7.4)$$

*Alors, l'application  $\|.\|$  est une norme ; elle est appelée norme induite par le produit scalaire  $\langle ., . \rangle$ .*

DÉMONSTRATION. Aisée, non rédigée. La seule difficulté consiste à démontrer l'inégalité triangulaire, admise pour l'instant ; elle sera démontrée en proposition 7.10 page 102.  $\square$

Si une norme est induite par un produit scalaire on dit aussi parfois qu'elle est euclidienne.

On peut vérifier que seule la norme  $\|.\|_2$  définie dans la définition L.7 provient d'un produit scalaire (c'est le produit scalaire (7.2b)) ; cela sera justifié dans la remarque 7.8.

La norme induite par le produit scalaire (7.3b) est définie par

$$\forall f, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}. \quad (7.5)$$

On a le résultat suivant

LEMME 7.6. *Si  $\|.\|$  désigne la norme induite par le produit scalaire  $\langle ., . \rangle$ , alors, pour tout couple de vecteur  $(u, v)$  de  $E$ , on a*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle, \quad (7.6a)$$

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4 \langle u, v \rangle, \quad (7.6b)$$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \left( \|u\|^2 + \|v\|^2 \right). \quad (7.6c)$$

*Les égalités (7.6a) et (7.6b) sont appelées identités de polarisation et l'égalité (7.6c) est appelée formule du parallélogramme (ou des médianes).*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire la définition de la norme induite et d'utiliser la bilinéarité (voir définition 7.1 page précédente) :

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle,$$

ce qui donne (7.6a). Pour démontrer (7.6b), on applique deux fois (7.6a) :

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle - \left( \|u\|^2 + \|-v\|^2 + 2\langle u, -v \rangle \right), \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle - \left( \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle \right).\end{aligned}$$

Le démonstration de (7.6c) est du même type.  $\square$

REMARQUE 7.7. Les identités de polarisation (7.6a) et (7.6b) permettent d'exprimer le produit scalaire induit à partir de la norme.

REMARQUE 7.8. Par contraposition, si la formule du parallélogramme (7.6c) n'est pas vraie, alors  $\|\cdot\|$  n'est induite par aucun produit scalaire. Ainsi, on peut justifier que seule la norme  $\|\cdot\|_2$  définie dans la définition L.7 provient d'un produit scalaire. Si  $n \geq 2$ , en effet, les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définies par (L.9) et (L.11) ne vérifient pas formule du parallélogramme (7.6c). On définit

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|u + v\|_1^2 + \|u - v\|_1^2 - 2\left(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2\right) &= 4 + 4 - 2 \times (4 + 4) \neq 0, \\ \|u + v\|_\infty^2 + \|u - v\|_\infty^2 - 2\left(\|u\|_\infty^2 + \|v\|_\infty^2\right) &= 4 + 4 - 2 \times (1 + 1) \neq 0.\end{aligned}$$

Réciproquement, on se demande si pour une norme donnée, il existe un produit scalaire qui induise cette norme. On consultera l'annexe M.

Pour toute la suite, on notera désormais  $\|\cdot\|$  la norme induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de l'espace préhilbertien réel  $E$ .

### 7.1.3. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Nous avons déjà vu les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski au cours du chapitre 5 (voir proposition 5.22 page 80), pour la norme associée au produit scalaire défini par (7.3b). Elles se généralisent pour toute norme, issue d'un produit scalaire :

PROPOSITION 7.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *On a, pour tout  $(u, v) \in E^2$ ,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad (7.7)$$

*avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION. Fixons  $u$  et  $v$  dans  $E$  et considérons l'application  $T$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2.$$

D'après (7.6a), il vient

$$T(\lambda) = \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Si  $u = 0$ , (7.7) est vraie, il y a égalité et  $u$  et  $v$  sont colinéaires. Si  $u$  est non nul,  $T$  est un polynôme du second degré en  $\lambda$ , à coefficient dominant strictement positif. Puisqu'il est positif sur  $\mathbb{R}$ , nécessairement son discriminant est négatif. Ainsi,  $\Delta = 4 \left( \langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \right) \leq 0$  dont on déduit (7.7).

Étudions les cas d'égalité. Si  $u$  et  $v$  sont colinéaires, on vérifie que (7.7) devient une égalité.

Réciproquement, supposons que

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \quad (7.8)$$

et montrons que  $u$  et  $v$  sont colinéaires. Si  $u$  est nul, c'est évident. Sinon, d'après les calculs précédents,  $\Delta$  est nul et donc il existe  $\lambda$ , racine double de  $T$ . Par définition  $\|\lambda u + v\| = 0$  et donc  $u$  et  $v$  sont colinéaires.  $\square$

PROPOSITION 7.10 (Inégalité de Minkowski (ou inégalité triangulaire)). *On a, pour tout  $(u, v) \in E^2$ ,*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad (7.9)$$

*avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que (7.9) a lieu. D'après (7.6a), il vient

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle|,$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (7.7)

$$\|u + v\| \leq \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\|}$$

ce qui permet de conclure.

Étudions les cas d'égalité. On a

$$2|\langle u, v \rangle| = \left| \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right|,$$

et donc, d'après (7.6a), l'égalité

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

est équivalente à

$$2|\langle u, v \rangle| = 2\|u\| \|v\|,$$

ce qui, d'après la proposition 7.9 est équivalent à la colinéarité de  $u$  et de  $v$ .  $\square$

## 7.2. Orthogonalité

On rappelle que  $E$  est un espace préhilbertien réel muni de sa norme  $\|\cdot\|$  et de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### 7.2.1. Définitions

DÉFINITION 7.11 (Vecteurs orthogonaux). On dit que deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement  $\langle u, v \rangle = 0$ . On écrit  $u \perp v$ .

De même, on a

DÉFINITION 7.12 (famille orthogonale). On dit que la famille finie  $(u_1, \dots, u_p)$  est orthogonale si et seulement si

$$\forall (k, l) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad k \neq l \implies \langle u_k, u_l \rangle = 0. \quad (7.10)$$

On aussi la définition suivante

DÉFINITION 7.13 (famille orthonormale). On dit que la famille finie  $(u_1, \dots, u_p)$  est orthonormale si et seulement si

$$\forall (k, l) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \langle u_k, u_l \rangle = \delta_{k,l}, \quad (7.11)$$

où  $\delta_{k,l}$  désigne l'indice de Kronecker.

On rappelle que l'indice de Kronecker  $\delta_{k,l}$  est défini en définition 4.21 page 63 du chapitre 4.

Une famille orthonormale est donc une famille orthogonale particulière. De plus, on a

LEMME 7.14. *Toute famille orthogonale dont aucun vecteur n'est nul est libre.*

DÉMONSTRATION. Soient une famille orthogonale  $(u_1, \dots, u_p)$  et  $p$  réel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  tels que

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i = 0.$$

Soit  $j \in \{1, \dots, p\}$ . On a donc, par linéarité,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_j, \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \langle u_j, u_i \rangle, \\ &= \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle + \sum_{i \neq j} \alpha_i \langle u_j, u_i \rangle, \\ &= \alpha_j \|u_j\|^2. \end{aligned}$$

Puisque  $u_j$  est non nul,  $\alpha_j$  est nul. Tous les réels  $\alpha_j$  sont donc nuls. □

### 7.2.2. Théorème de Pythagore

On a alors le fameux théorème de Pythagore et sa réciproque

THÉORÈME 7.15 (Théorème de Pythagore et sa réciproque). *On a, pour tout  $(u, v) \in E^2$ ,*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux.} \quad (7.12)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le lemme 7.6 page 100 et la définition 7.11 page précédente. □

On peut aussi généraliser (mais pas la réciproque) :

THÉORÈME 7.16 (Généralisation du théorème). *On a, pour toute famille orthogonale  $(u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$ ,*

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2. \quad (7.13)$$



DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire et d'utiliser la définition d'une famille orthogonale :

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p u_i, \sum_{i=1}^p u_i \right\rangle, \\
 &= \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2} \langle u_i, u_j \rangle, \\
 &= \sum_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2 \\ i=j}} \langle u_i, u_j \rangle + \sum_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2 \\ i \neq j}} \langle u_i, u_j \rangle, \\
 &= \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.
 \end{aligned}$$

□

### 7.2.3. Orthogonalité et sous-espace vectoriel

On a la définition suivante :

DÉFINITION 7.17 (Orthogonal d'une partie). Soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle orthogonal de  $A$  et on note  $A^\perp$  l'ensemble de vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $A$ , c'est-à-dire :

$$A^\perp = \left\{ u \in E : \forall v \in A, \langle u, v \rangle = 0 \right\}. \quad (7.14)$$

On peut montrer alors que

PROPOSITION 7.18. *Pour toute partie  $A$  de  $E$ , l'orthogonal de  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $A^\perp$ . Alors,  $\alpha x + \beta y$  appartient à  $A^\perp$  car, par définition, pour tout  $z$  dans  $A$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle = 0.$$

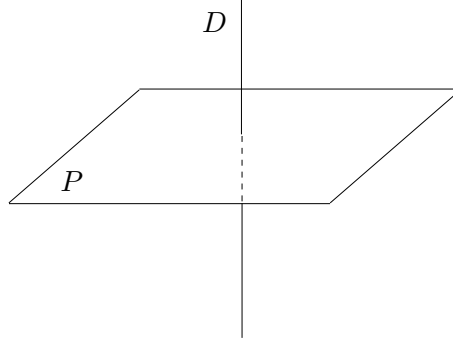
□

EXEMPLE 7.19. On se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire (7.2). Si  $u = (a, b) \neq 0$ , alors  $(x, y)$  appartient à l'orthogonal de  $u$  si et seulement si  $ax + by = 0$ . Ainsi, l'orthogonal d'une droite vectorielle est une droite vectorielle.

EXEMPLE 7.20. On se place dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire (7.2). Si  $u = (a, b, c) \neq 0$ , alors  $(x, y, z)$  appartient à l'orthogonal de  $u$  si et seulement si  $ax + by + cz = 0$ . Ainsi, l'orthogonal d'une droite vectorielle  $D$  est un plan vectoriel  $P$ . De même, l'orthogonal d'un plan vectoriel  $P$  est une droite vectorielle  $D$ . Voir figure 7.1.

PROPOSITION 7.21. *Pour tout couple  $(A, B)$  de parties de  $E$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $A \subset B^\perp$ ,
- ii)  $B \subset A^\perp$ .

FIG. 7.1. Dans l'espace, un plan  $P$  et son orthogonal  $D$ .

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que les parties  $A$  et  $B$  sont orthogonales et on écrit  $A \perp B$ . Dans ce cas, on a

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad \langle x, y \rangle = 0. \quad (7.15)$$

DÉMONSTRATION. La première assertion est équivalente à

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \langle x, y \rangle = 0,$$

ce qui est bien équivalent à la deuxième assertion et à (7.15).  $\square$

On rappelle que, pour deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,

$$A + B = \left\{ z \in E : \exists (x, y) \in A \times B : z = x + y \right\}.$$

Donnons divers résultats relatifs aux orthogonaux, qui résultent simplement de l'écriture des définitions :

PROPOSITION 7.22.

– Pour tout couple  $(A, B)$  de parties de  $E$ , on a

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp, \quad (7.16a)$$

$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp, \quad (7.16b)$$

$$A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp, \quad (7.16c)$$

$$A^\perp \cap B^\perp \subset (A + B)^\perp. \quad (7.16d)$$

– Pour toute partie  $A$  de  $E$  :

$$A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp, \quad (7.17a)$$

$$A \subset (A^\perp)^\perp \text{ (que l'on note } A^{\perp\perp}). \quad (7.17b)$$

– On a

$$0^\perp = E, \quad (7.18a)$$

$$E^\perp = 0. \quad (7.18b)$$

DÉMONSTRATION.

- Soient  $x$  dans  $B^\perp$  et  $y$  dans  $A \subset B$ . On a donc  $\langle x, y \rangle = 0$ ; ainsi  $x$  appartient à  $A^\perp$  et donc (7.16a) est vraie.
- – On a  $A \subset A \cup B$  et d'après (7.16a), on a  $(A \cup B)^\perp \subset A^\perp$ ; de même  $(A \cup B)^\perp \subset B^\perp$  et donc, on a

$$(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$$

- Réciproquement, soient  $x \in A^\perp \cap B^\perp$  et  $y \in A \cup B$ . Ainsi, soit  $y$  appartient à  $A$  soit  $y$  appartient à  $B$ . Dans le premier cas, puisque  $x \in A^\perp$ , on a  $\langle x, y \rangle = 0$  et donc  $x$  appartient à  $(A \cup B)^\perp$ . Le second cas est identique et donc

$$A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp.$$

Ainsi, (7.16b) est vraie.

- Soit  $x \in A^\perp + B^\perp$ . Ainsi, il existe  $y \in A^\perp$  et  $z \in B^\perp$  tels que  $x = y + z$ ; si  $w \in A \cap B$ , on a  $\langle w, x \rangle = \langle w, y \rangle + \langle w, z \rangle = 0$  et donc (7.16c) est vraie.
- Soient  $x \in A^\perp \cap B^\perp$  et  $y \in A + B$ . Ainsi, il existe  $u \in A$  et  $v \in B$  tels que  $y = u + v$  et  $\langle y, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = 0$  et donc (7.16d) est vraie.
- – L'égalité (7.17a) provient de la linéarité du produit scalaire.
- Soit  $x \in A$ . Montrons que  $x$  appartient à  $(A^\perp)^\perp$ , c'est-à-dire, pour tout  $y \in A^\perp$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ , ce qui est vrai. Donc (7.17b) est vraie.
- – L'égalité (7.18a) est immédiate.
- Soit  $y \in E^\perp$ . En particulier  $y$  est orthogonal à lui-même et donc  $0 = \langle y, y \rangle = \|y\|^2$  et donc  $y = 0$ . Donc (7.18b) est vraie.

□

Il faut prendre garde au fait que  $A^{\perp\perp}$  n'est pas toujours égal à  $A$ .

Nous admettrons que cela est vrai dans le cas suivant :

THÉORÈME 7.23. *Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ . Alors,*

$$F^{\perp\perp} = F. \quad (7.19)$$

THÉORÈME 7.24. *Soient  $H_1$  et  $H_2$ , deux sous espaces de  $E$  de dimension finie de  $E$ . Alors, on a*

$$H_1^\perp + H_2^\perp = (H_1 \cap H_2)^\perp \quad (7.20)$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion  $H_1^\perp + H_2^\perp \subset (H_1 \cap H_2)^\perp$  provient de (7.16c).

Nous démontrerons que  $(H_1 \cap H_2)^\perp \subset H_1^\perp + H_2^\perp$  uniquement dans le cas simple où  $E$  est lui-même de dimension finie. On l'admettra dans le cas général. Remarquons que puisque  $0 \in H_2^\perp$ , on a  $H_1^\perp \subset H_1^\perp + H_2^\perp$ . D'où, d'après (7.16a), il vient  $(H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp \subset H_1^{\perp\perp}$ . Comme  $H_1$  est de dimension finie, selon le théorème 7.23, il vient  $(H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp \subset H_1$ . De même, on a  $(H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp \subset H_2$ . On déduit  $(H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp \subset H_1 \cap H_2$ , ce qui implique  $(H_1 \cap H_2)^\perp \subset (H_1^\perp + H_2^\perp)^{\perp\perp}$ . Puisque  $H_1^\perp + H_2^\perp$  est encore de dimension finie, on en déduit donc  $(H_1 \cap H_2)^\perp \subset H_1^\perp + H_2^\perp$ . □

THÉORÈME 7.25. *Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ . Alors,  $F$  admet un supplémentaire orthogonal, c'est-à-dire :*

$$F \oplus F^\perp = E. \quad (7.21)$$

DÉMONSTRATION. Il est facile de constater que cette somme est directe. En effet  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , puisque tout vecteur de  $F$  orthogonal à lui-même est nul. On admettra que  $F + F^\perp = E$ . □

Donnons un résultat admis qui généralise le théorème 7.25

THÉORÈME 7.26. *Soit  $F$  un sous-espace complet de  $E$ . Alors,  $F$  admet un supplémentaire orthogonal, c'est-à-dire :*

$$F \oplus F^\perp = E. \quad (7.22)$$

◇

Grâce au théorème 7.25, on donne la proposition-définition suivante :

PROPOSITION 7.27 (Projection orthogonale). *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Pour tout élément  $x$  de  $E$ , il existe un unique couple  $(y, z)$  de  $F \times F^\perp$  tel que*

$$x = y + z. \quad (7.23)$$

*L'application qui à  $x$  associe  $y$  est linéaire. On l'appelle la projection orthogonale sur  $F$  et on la note  $p_F$ . L'application qui à  $x$  associe  $z$  est linéaire. On l'appelle la projection orthogonale sur  $F^\perp$  et on la note  $p_{F^\perp}$ . On a de plus,*

$$p_F \circ p_F = p_F, \quad p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp}, \quad p_F + p_{F^\perp} = I_d, \quad (7.24)$$

et

$$p_F|_F = I_d, \quad p_F|_{F^\perp} = 0, \quad p_{F^\perp}|_F = 0, \quad p_{F^\perp}|_{F^\perp} = I_d. \quad (7.25)$$

DÉMONSTRATION. L'unicité et l'existence de la décomposition (7.23) proviennent de (7.21).

Montrons que  $p_F$  et  $p_{F^\perp}$  sont linéaires. Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux réels et  $x$  et  $x'$  deux vecteurs. Par définition, il existe  $(y, z)$  et  $(x', y')$  de  $F \times F^\perp$  tels que  $x = y + z$  et  $x' = y' + z'$  avec  $y = p_F(x)$  et  $y' = p_F(x')$ . Ainsi, on a

$$\alpha x + \alpha' x' = (\alpha y + \alpha' y') + (\alpha z + \alpha' z').$$

Puisque  $F$  et  $F^\perp$  sont des sous-espace vectoriel, on a  $(\alpha y + \alpha' y') \in F$  et  $(\alpha z + \alpha' z') \in F^\perp$ . Ainsi, par unicité de la décomposition, on a

$$p_F(\alpha x + \alpha' x') = \alpha y + \alpha' y', \quad p_{F^\perp}(\alpha x + \alpha' x') = \alpha z + \alpha' z',$$

ce qui signifie

$$p_F(\alpha x + \alpha' x') = \alpha p_F(x) + \alpha' p_F(x'), \quad p_{F^\perp}(\alpha x + \alpha' x') = \alpha p_{F^\perp}(x) + \alpha' p_{F^\perp}(x').$$

Ainsi, les deux applications sont linéaires.

Le fait que  $p_F + p_{F^\perp} = I_d$  provient de la définition.

Démontrons (7.25). Soit  $x \in F$ . On a  $x = x + 0$  où  $(x, 0) \in F \times F^\perp$ . Ainsi, par unicité de la décomposition, on a  $p_F(x) = x$  et  $p_{F^\perp}(x) = 0$ . On a donc montré que  $p_F|_F = I_d$  et  $p_{F^\perp}|_F = 0$ . De même, soit  $x \in F^\perp$ . On a  $x = 0 + x$  où  $(0, x) \in F \times F^\perp$ . On a donc  $p_F(x) = 0$  et  $p_{F^\perp}(x) = x$ . On a donc montré que  $p_F|_{F^\perp} = 0$  et  $p_{F^\perp}|_{F^\perp} = I_d$ .

Montrons que  $p_F \circ p_F = p_F$ . Puisque  $F \oplus F^\perp = E$  Il suffit de remarquer que les restrictions de  $p_F \circ p_F$  et de  $p_F$  à  $F$  et  $F^\perp$  sont égales. D'après (7.25), on a pour tout  $x \in F$ ,  $p_F \circ p_F(x) = p_F(x)$ . De même, si  $x \in F^\perp$ , on a  $p_F \circ p_F(x) = p_F(0) = 0$ . □

Grâce au théorème 7.26, on pourrait étendre la notion de projecteur orthogonaux sur tout sous-espace complet.

◇

Grâce à la preuve de la proposition 7.27, on montre aisément que

PROPOSITION 7.28 (Caractérisation de la Projection orthogonale). *Pour tout  $x \in E$ ,  $y = p_F(x)$  si et seulement si*

$$\begin{cases} y \in F, \\ x - y \in F^\perp. \end{cases} \quad (7.26)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in E$  et  $y = p_F(x)$ . On a alors  $x = y + z$  où  $z \in F^\perp$  et  $y \in F$ ; ainsi

$$\begin{cases} y \in F, \\ x - y \in F^\perp. \end{cases}$$

Réciproquement, soient  $x$  et  $y$  vérifiant (7.26). On pose  $z = x - y$ , appartenant à  $F^\perp$ . On alors  $x = y + z$  où  $y$  appartient à  $F$  et  $z$  appartient à  $F^\perp$ , et par unicité de la décomposition  $y = p_F(x)$ .  $\square$

Supposons que l'on connaisse une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  et que cette famille soit orthogonale (voir définition 7.12, ainsi que la remarque 7.38 page 110); on peut expliciter la projection orthogonale sur  $F$ .

PROPOSITION 7.29 (Expression explicite de la projection orthogonale). *Si  $F$  est de dimension finie, munie d'une base orthogonale  $(e_1, \dots, e_p)$ , on a, pour tout  $x \in F$ ,*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\|e_i\|^2} \langle e_i, x \rangle e_i. \quad (7.27)$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $p_F(x)$  appartient à  $F$ , il existe  $p$  réels  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  tel que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i.$$

D'autre part, d'après la proposition 7.27,  $x - p_F(x)$  appartient à  $F^\perp$ . Il est orthogonal à tout vecteur de  $F$ , en particulier à chacun des vecteurs de la base  $e_j$ . On a donc, pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$0 = \langle e_j, x - p_F(x) \rangle = \langle e_j, x - \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \rangle = \langle e_j, x \rangle - \sum_{i=1}^p \alpha_i \langle e_j, e_i \rangle = \langle e_j, x \rangle - \alpha_j \|e_j\|^2,$$

puisque la base  $(e_1, \dots, e_p)$  est orthogonale. L'égalité (7.27) en découle.  $\square$

EXEMPLE 7.30. De la proposition 7.29, on déduit que si  $u$  est un vecteur non nul, alors on peut expliciter la projection orthogonale sur la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$  :

$$p_{\mathbb{R}u}(x) = \frac{1}{\|u\|^2} \langle u, x \rangle u. \quad (7.28)$$

REMARQUE 7.31. Pour déterminer la projection sur  $F$ , on déterminera la projection sur l'espace de dimension la plus petite entre  $F$  et son orthogonal et on utilisera (7.24) qui permet de calculer  $p_F$  en fonction de  $p_{F^\perp}$ , ou réciproquement. Par exemple, la projection orthogonale sur l'hyperplan  $H$  d'orthogonal  $\mathbb{R}u$  est donné selon (7.28) par :

$$p_H(x) = (I - p_{\mathbb{R}u})(x) = x - p_{\mathbb{R}u}(x) = x - \frac{1}{\|u\|^2} \langle u, x \rangle u.$$

EXEMPLE 7.32. En anticipant sur la section 7.3 page suivante, on peut donner l'exemple suivant : soient  $E$  est un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie) et  $F$  un sous espace de  $E$  ; on munit  $F$  d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_p)$ , l'orthogonal de  $F$  d'une base orthonormée  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Alors,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  constitue une base orthonormée de  $E$  et la matrice de la projection orthogonale sur  $F$  dans la base  $e$  est égale à (par bloc) à

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### 7.2.4. Distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien réel

DÉFINITION 7.33 (Distance d'un vecteur à un sous-espace). Soit  $F$  un sous espace quelconque de  $E$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , l'ensemble  $\{\|x - y\| : y \in F\}$  est une partie non vide et minorée (par zéro) de  $\mathbb{R}$  ; elle admet donc une borne inférieure, appelée la distance de  $x$  au sous-espace  $F$  et notée  $d(x, F)$ . On a donc

$$\forall x \in E, \quad d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|. \quad (7.29)$$

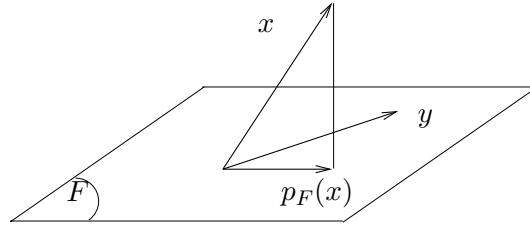


FIG. 7.2. Distance du vecteur  $x$  au sous-espace  $F$ .

Voir figure 7.2.

On peut calculer cette distance :

PROPOSITION 7.34. Si  $F$  est de dimension finie, alors

$$\forall x \in E, \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|. \quad (7.30)$$

DÉMONSTRATION. Voir figure 7.2.

Soit  $y \in F$ . On sait que  $x - p_F(x)$  appartient à  $F^\perp$  et que  $p_F(x) - y$  appartient à  $F$ . Ainsi  $x - p_F(x)$  et  $p_F(x) - y$  sont orthogonaux et, d'après le théorème de Pythagore, il vient

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2, \quad (7.31)$$

et donc

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|.$$

En passant à la borne inférieure sur  $y$ , on obtient

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|.$$

Selon (7.31), la fonction  $y \mapsto \|x - y\|$  atteint son minimum en  $y = p_F(x)$  et il y a égalité.  $\square$

En vertu du théorème 7.26, on peut aussi écrire (7.29) si  $F$  est un sous-espace complet  $\diamond$

### 7.3. Cas de la dimension finie : espace euclidien

Pour toute cette section, on se donne  $E$ , un espace préhilbertien réel, muni de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**DÉFINITION 7.35** (Espace euclidien). On appelle espace euclidien, tout espace préhilbertien réel de dimension finie, non nulle.

Dans toute cette section,  $E$  désigne désormais un espace euclidien.

#### 7.3.1. Matrice du produit scalaire

**DÉFINITION 7.36** (Matrice d'un produit scalaire dans une base). Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . On appelle matrice d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $e$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \text{avec, pour tout } (i,j), \quad a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle. \quad (7.32)$$

Parfois, on parle de la matrice de Gram du produit scalaire.

**REMARQUE 7.37.** On renvoie aux définitions 7.12 page 102 et 7.13 page 103. La famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthogonale si et seulement si la matrice  $A$  est diagonale. La famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormale si et seulement si la matrice  $A$  est égale à l'identité.

**REMARQUE 7.38.** On peut construire une base orthogonale ou orthonormale à partir d'une base quelconque de  $E$ . Voir le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, présenté en annexe N.

**PROPOSITION 7.39.** La matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $E$  est inversible.

**DÉMONSTRATION.** Raisonnons par l'absurde et supposons que la matrice  $A$ , matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $e$  est non inversible. Cela signifie donc qu'une de ses colonnes est une combinaison linéaire des autres. Il existe donc  $j \in \{1, \dots, n\}$  et  $n-1$  réels  $(\lambda_k)_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}}$  tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{i,j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k a_{i,k}$$

et donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle e_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k e_k, e_i \rangle = 0$$

Ainsi, le vecteur  $u = e_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k e_k$  appartient à  $E^\perp$  et, grâce à (7.18b), il est nul. Ainsi, le vecteur  $e_j$  est combinaison linéaire des autres vecteurs  $e_k$ , ce qui contredit que  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ .  $\square$

#### 7.3.2. Expressions matricielles des produits scalaires et changement de bases

**PROPOSITION 7.40.** Soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $e$ . Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$  dont les composantes respectives dans la base  $e$  sont

les vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t XAY. \quad (7.33)$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j,$$

et donc, par linéarité,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n y_j \langle e_i, e_j \rangle \right), \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{i,j} \right), \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j a_{i,j}, \end{aligned}$$

expression dont on vérifie qu'elle est égale à  ${}^t XAY$ . □

REMARQUE 7.41. Notons au passage, dans cette preuve, l'égalité

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j a_{i,j}.$$

Parfois, on écrira aussi cette égalité sous la forme

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i a_{i,i} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i y_j a_{i,j}.$$

PROPOSITION 7.42. Soient  $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux bases de  $E$  et  $P$ , la matrice de passage de la base  $e$  à la base  $f$ . On note  $A$  la matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $e$  et  $B$  la matrice du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la base  $f$ . On a alors

$$B = {}^t P A P. \quad (7.34)$$



DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer correctement la proposition 7.40. Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$  dont les composantes respectives dans la base  $e$  sont les vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

et dont les composantes respectives dans la base  $f$  sont les vecteurs colonnes

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 7.40, on a

$$\langle x, y \rangle = {}^t X A Y = {}^t X' B Y'. \quad (7.35)$$

D'autre part, la formule de changement de base fournit

$$X = P X', \quad Y = P Y'. \quad (7.36)$$

On a donc, selon (7.35) et (7.36),

$${}^t X' B Y' = {}^t X A Y = {}^t (P X') A (P Y') = {}^t X {}^t P A P Y'.$$

Puisque cette égalité a lieu pour tout  $X'$  et  $Y'$ , alors  $B = {}^t P A P$ .  $\square$

On en déduit la conséquence suivante :

LEMME 7.43. Soient  $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ ,  $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $P$ , la matrice de passage de la base  $e$  à la base  $f$ . La base  $f$  est orthonormale si et seulement si on a

$${}^t P P = I. \quad (7.37)$$

DÉMONSTRATION. On a, en effet, selon la proposition 7.42,

$$B = {}^t P A P.$$

Puisque  $e$  est orthonormale, on a  $A = I$  et donc

$$B = {}^t P P.$$

Ainsi  $f$  est orthonormale si et seulement si  $B = I$ , c'est-à-dire si et seulement si  ${}^t P P = I$ .  $\square$

## 7.4. Applications

Les produits scalaires sont utilisés en Résistance des Matériaux ou Mécanique des Milieux Continus. En effet, l'énergie de déformation d'un solide (celle qui est emmagasinée si le solide est par exemple comprimé et qui peut être restituée quand celui-ci se détend) est exprimée à l'aide d'un produit scalaire. Par exemple un ressort linéaire de raideur  $k$  et de longueur déformée  $x$  possède une énergie égale à

$$E(x) = \frac{1}{2} k x^2,$$

ce qui peut être écrit sous la forme :

$$E(x) = \frac{1}{2} {}^t x k x.$$

Ainsi,  $E(x)$  apparaît comme le carré de la norme associée au produit scalaire défini par

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} {}^t u k v.$$

ce qui définit bien un produit scalaire si  $k > 0$  (dans  $\mathbb{R}$ )! (voir section 7.3). Plus généralement, un système mécanique à  $p \in \mathbb{N}^*$  degrés de liberté en comportement élastique linéaire (par exemple un réseau de ressort ou une structure mécanique déformable dans le cas de la Résistance des Matériaux) possède une énergie de déformation égale à

$$E(X) = \frac{1}{2} {}^t X K X,$$

où  $K$  est une matrice symétrique définie positive et  $X$  un vecteur représentant les différents déplacements du système mécanique étudié. Ainsi,  $E(X)$  apparaît comme le carré de la norme associée au produit scalaire défini par

$$\langle U, V \rangle = \frac{1}{2} {}^t U K V.$$

ce qui définit bien un produit scalaire dans  $\mathbb{R}^p$ . On pourra consulter l'annexe J de [Bas04b].

En Mécanique des Milieux Continus, un solide élastique possède aussi une énergie qui s'exprime comme un produit scalaire de type (7.3b). Grâce à des théories mathématiques d'analyse fonctionnelle, on peut montrer que le système mécanique est défini par une équation «bien posée» : celle-ci possède une unique solution. De plus, cette solution est rarement connue sur le plan analytique mais celle-ci peut être approchée numériquement en remplaçant le solide élastique à nombre infini de degrés de liberté par un système mécanique élastique à nombre fini de degrés de liberté. C'est la base de la méthode des éléments finis utilisée par exemple dans les UV MN41, 51 et 52. Cette méthode d'approximation utilise la proposition 7.34 On pourra consulter, en guise d'introduction, la section 3.2.2. du chapitre 3 de [Bas04b].



## CHAPITRE 8

# Endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace Euclidien

Chapitre non rédigé.



## CHAPITRE 9

# Coniques et quadriques

Chapitre non rédigé.  
Voir l'annexe O.



## Bibliographie

- [AF88] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*. Dunod Université, Paris, 1988.
- [AF89] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques, tome 3 : Compléments d'analyse*. Dunod, 1989. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 300 ARN.
- [AF90] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques, tome 4 : Algèbre bilinéaire et géométrie*. Dunod, 1990. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 243 ARN.
- [Bas04a] Jérôme Bastien. Mathématiques : Applications. Notes de cours de MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31, 2004.
- [Bas04b] Jérôme Bastien. Résistance des matériaux, Introduction aux calculs des structures. Notes de cours de MQ41 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MQ41, 2004.
- [BD02a] G. Blanchard et M.-C. Duban. Mathématiques : chapitre 9, intégrales triples. Cours pour le cycle préparatoire du diplôme d'ingénieur par la formation continue, dispensé à l'UTC, l'UTBM et l'UTT, 2001-2002.
- [BD02b] G. Blanchard et M.-C. Duban. Révisions d'algèbre et d'analyse : chapitre 7, intégrales doubles. Cours à l'UTC, 2002.
- [Bel88] Didier Bellet. *Cours de mécanique générale*. Cepadues éditions, Toulouse, 1988. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA805 Bel.
- [Bon92] M. Bonvalet. *Les principes de la mécanique*. Masson, 1992. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA805 BON.
- [GAJ93] Daniel Guinin, François Aubonnet et Bernard Joppin. *Précis de mathématiques, Tome 4 : Analyse 2*. Bréal, troisième édition, 1993. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA300 GUI.
- [GAJ94] Daniel Guinin, François Aubonnet et Bernard Joppin. *Précis de mathématiques, Tome 5 : Géométrie*. Bréal, troisième édition, 1994. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA445 GUI.
- [GS86] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Mécanique, volume 1*. Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1986.
- [GS95] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Électromagnétisme, volume 1*. Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1995. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QC 670 ELM.
- [GS96] H. Gié et J.-P. Sarmant. *Électromagnétisme, volume 2*. Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1996. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QC 670 ELM.
- [Lan05] Arthur Lannuzel. Mathématiques. Notes de cours de MT11 et MT12, disponible sur le web : <http://utbma1.chez-alice.fr>, 2005.
- [LFA77] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques, tome 4 : équations différentielles, intégrales multiples*. Dunod-Bordas, 1977. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 371 LEL.
- [LFA01] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques, tome 3 : géométrie et cinématique*. Dunod, 2001. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 445 LEL.
- [Mon91] Jean-Marie Monier. *Algèbre, Tome 2 (Algèbre linéaire), 700 exercices résolus et 16 sujets d'étude*. Dunod, Paris, 1991.
- [RDO74] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 1 : Algèbre*. Masson, Paris, 1974. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 37.2 RAM.
- [RDO76] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 3 : topologie et éléments d'analyse*. Masson, Paris, 1976. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 320 RAM.
- [RDO87] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de Mathématiques Spéciales, Tome 2 : algèbre et applications à la géométrie*. Masson, Paris, 1987.





## ANNEXE A

### La règle de l'Hospital

PROPOSITION A.1 (Formules des accroissements finis généralisés). *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques continues sur un intervalle  $[a, b]$ , dérivables sur  $]a, b[$ , telles que  $g'$  ne s'annule en aucun point de  $]a, b[$ . Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (\text{A.1})$$

DÉMONSTRATION. On introduit la fonction définie sur  $[a, b]$  par

$$h(x) = (g(a) - g(b))f(x) - (f(a) - f(b))g(x) + (f(a)g(b) - f(b)g(a))$$

On vérifie que  $h(a) = h(b)$ . On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction  $h$  : il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ , ce qui fournit le résultat attendu, en utilisant l'expression de  $h'$ .  $\square$

On en tire la :

PROPOSITION A.2 (Règle de l'Hospital). *Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques continues sur un voisinage  $V$  d'un réel  $x_0$ , dérivables sur  $V$  (sauf peut-être en  $x_0$ ), nulles en  $x_0$  et telles que  $g'$  ne s'annule pas sur  $V$  (sauf peut-être en  $x_0$ ). Alors, si la limite*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*existe dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ , alors la limite suivante existe et lui est égale*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que  $g$  ne s'annule qu'en  $x_0$ . Sinon, puisqu'elle est aussi nulle en  $x_0$ , le théorème des accroissements finis donnerait l'existence d'un réel  $d$  où  $g'$  serait nulle, ce qui contredit les hypothèses.

Pour  $x \neq x_0$ , on applique la formule des accroissements finis généralisés à  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[x_0, x]$  ou  $[x, x_0]$  : ainsi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

où  $c$  est dans  $[x_0, x]$  ou  $[x, x_0]$ . Il suffit de passer à la limite  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$



## ANNEXE B

### Étude d'une cycloïde (sous forme d'exercice corrigé)

Cet exercice a déjà été donné en examen de MT25 (médian avril 2006).

#### Énoncé

Soient  $a$  et  $\lambda$  deux réels strictement positifs.

On considère un cercle de centre  $\Omega$ , de rayon  $a$  se déplaçant «sans glisser». Soit un point  $M$  fixe de ce cercle et un point  $N$  défini par

$$\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}. \quad (\text{B.1})$$

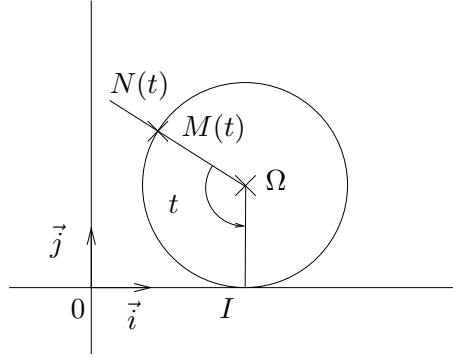


FIG. B.1. Le cercle définissant la cycloïde et les points  $M$  et  $N$ .

Initialement, à  $t = 0$ , le point  $\Omega$  a pour coordonnées  $(0, a)$  et  $M$  est l'origine. Puis, pour tout  $t \geq 0$ , le cercle s'est déplacé vers la droite de telle sorte que

$$t = \left( \widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}} \right), \quad (\text{B.2})$$

où  $I$  est le point de contact entre le cercle et l'axe des  $x$ . Voir figure B.1.

- (1) Montrer en écrivant l'égalité de la longueur de l'arc de cercle  $IM$  et la distance  $OI$ , que les coordonnées  $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$  de  $N$  vérifient

$$x_\lambda(t) = a(t - \lambda \sin t), \quad (\text{B.3a})$$

$$y_\lambda(t) = a(1 - \lambda \cos t). \quad (\text{B.3b})$$

- (2) On s'intéresse à la courbe décrite par  $N(t)$  quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

- (a) Montrer que l'on peut se réduire à l'intervalle  $[0, \pi]$ .

- (b) Calculer les dérivées de  $x_\lambda$  et de  $y_\lambda$ .

- (c) (i) On suppose tout d'abord que  $\lambda \in ]0, 1[$ . Dresser le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$ .  
(ii) On suppose maintenant que  $\lambda \in ]1, +\infty[$ . On introduit l'unique réel  $\theta_0 \in ]0, 1[$  tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{B.4})$$

Montrer que l'on a

$$x'_\lambda(t) = 2a\lambda \sin\left(\frac{t - \theta_0}{2}\right) \sin\left(\frac{t + \theta_0}{2}\right), \quad (\text{B.5})$$

et en déduire le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$ .

- (iii) On suppose enfin que  $\lambda = 1$ . Dresser sommairement le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$ .  
(d) (i) Tracer soigneusement les trois courbes  $F_\lambda$  pour  $t \in [-\pi, 3\pi]$  pour les valeurs suivantes

$$a = 1, \quad \lambda \in \left\{1, \frac{13}{10}, \frac{7}{10}\right\}. \quad (\text{B.6})$$

- (ii) Que remarquez-vous dans le cas où  $\lambda = \frac{13}{10}$  ?

(3) On se replace dans le cas  $a$  quelconque et  $\lambda > 1$ .

(a) Montrer que

$$\forall t \in ]0, \theta_0[, \quad x'_\lambda(t) < 0 \text{ et } y_\lambda(t) < 0, \quad (\text{B.7a})$$

$$\forall t \in ]\theta_0, \pi/2], \quad x'_\lambda(t) > 0 \text{ et } y_\lambda(t) > 0. \quad (\text{B.7b})$$

(b) Quelle est la valeur maximale de  $|x'_\lambda|$  sur  $[0, \theta_0]$  ?

- (4) En imaginant un système mécanique (existant !) qui se trouve dans la configuration de la figure B.1 page précédente, quelle conséquences (étranges !) peut-on tirer des résultats de la question 3 ?

Dans ce même système mécanique, existe-t-il d'autres points qui possèdent cette étrange propriété ?

## Corrigé

Les script matlab cités dans ce corrigé sont disponibles sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>

On renvoie à l'exercice 3.1 du TD 3 et à sa correction qui traite partiellement cet exercice (dans le cas où  $\lambda = 1$ ).

- (1) Comme dans l'exercice 3.1 du TD 3, on montre que l'on a

$$\overrightarrow{\Omega M} = -a \left( \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \right). \quad (\text{B.8})$$

D'autre part, on a aussi

$$MI = at = OI = x_\Omega.$$

Ainsi, il vient, puisque  $\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ ,

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega N} = at\vec{i} + a\vec{j} + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = at\vec{i} + a\vec{j} - a\lambda \left( \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \right),$$

et donc, on obtient les coordonnées de  $N$  :

$$\boxed{x_\lambda(t) = a(t - \lambda \sin t)}, \quad (\text{B.9a})$$

$$\boxed{y_\lambda(t) = a(1 - \lambda \cos t)}. \quad (\text{B.9b})$$

(2) Pour toute la suite, on pose

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(t) = (a(t - \lambda \sin t), a(1 - \lambda \cos t)). \quad (\text{B.10})$$

(a) Remarquons que, pour tout  $t$ , on a

$$F_\lambda(t + 2\pi) = (a(t - \lambda \sin t), a(1 - \lambda \cos t)) + 2\pi a \vec{i} = F_\lambda(t) + 2\pi a \vec{i}.$$

On peut donc étudier la courbe sur  $[0, 2\pi]$  ; on aura la totalité de la courbe en faisant des translations de vecteur  $2\pi a k \vec{i}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

D'autre part, si  $t \in [0, \pi]$ , alors  $2\pi - t \in [\pi, 2\pi]$  et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x_\lambda(2\pi - t) + x_\lambda(t)) &= \pi a, \\ y_\lambda(2\pi - t) &= y_\lambda(t), \end{aligned}$$

et on peut donc se restreindre à l'intervalle  $[0, \pi]$  en faisant une symétrie par rapport à la droite d'équation  $x = \pi a$ .

(b) Il est clair que

$$\boxed{x'_\lambda(t) = a(1 - \lambda \cos t)}, \quad (\text{B.11a})$$

$$\boxed{y'_\lambda(t) = a\lambda \sin t}. \quad (\text{B.11b})$$

(c) (i) On suppose tout d'abord que  $\lambda \in ]0, 1[$ . Ainsi,  $x'_\lambda(t) = a\lambda(1/\lambda - \cos t) > 0$ . On constate que sur  $[0, \pi]$ ,  $\sin$  est positif. On en déduit le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$  :

$t$	0		$\pi$
$x'_\lambda$	$> 0$	+	$> 0$
$y'_\lambda$	0	+	0
$x_\lambda$	0	$\nearrow$	$a\pi$
$y_\lambda$	$a(1 - \lambda)$	$\nearrow$	$a(1 + \lambda)$

(ii) On suppose maintenant que  $\lambda \in ]1, +\infty[$ . On introduit l'unique réel  $\theta_0 \in ]0, 1[$  tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{B.12})$$

D'après (B.11a), il vient, en factorisant

$$\begin{aligned} x'_\lambda(t) &= a(1 - \lambda \cos t), \\ &= a\lambda (\cos \theta_0 - \cos t), \\ &= -2a\lambda \sin \left( \frac{\theta_0 - t}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_0 + t}{2} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{x'_\lambda(t) = 2a\lambda \sin\left(\frac{t-\theta_0}{2}\right) \sin\left(\frac{t+\theta_0}{2}\right)} \quad (\text{B.13})$$

On en déduit le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$  :

$t$	0		$\theta_0$	$\pi$	
$x'_\lambda$	$< 0$	$-$	0	$+$	$> 0$
$y'_\lambda$	0	$+$	$> 0$	$+$	0
$x_\lambda$	0	$\searrow$	$a(\theta_0 - \tan(\theta_0))$	$\nearrow$	$a\pi$
$y_\lambda$	$a(1-\lambda)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a(1+\lambda)$

On vérifie que  $x(\theta_0) = a(\theta_0 - \tan(\theta_0)) < 0$  et que  $y(\theta_0) = 0$ .

(iii) On suppose enfin que  $\lambda = 1$ .

Le tableau de variation de  $x_\lambda$  et  $y_\lambda$  peut s'obtenir grâce aux résultats des questions 2(c)i ou 2(c)ii en faisant tendre  $\lambda$  vers 1. On peut aussi utiliser les résultats de l'exercice l'exercice 3.1 du TD 3.

On obtient

$t$	0	$\pi$
$x'_\lambda$	0 $+$ $> 0$	
$y'_\lambda$	0 $+$ 0	
$x_\lambda$	0 $\nearrow$ $a\pi$	
$y_\lambda$	0 $\nearrow$ $2a$	

- (d) (i) – Pour  $a = 1$  et  $\lambda = 1$ , on utilise l'étude de la question 2(c)iii. On pourra aussi consulter la correction de l'exercice 3.1 du TD 3.
- Pour  $a = 1$  et  $\lambda = 13/10$ , on utilise l'étude de la question 2(c)ii.
- Pour  $a = 1$  et  $\lambda = 7/10$ , on utilise l'étude de la question 2(c)i.

Dans tous les cas, on exploite aussi les symétries et périodicités montrées en question 2a.

Voir les figures B.2 obtenues par matlab (script `cormedianP06_exo1.m`).

REMARQUE B.1. On pourra consulter l'encyclopédie wiki à l'adresse <http://fr.wikipedia.org/wiki/Cyclo%C3%AFde> pour les cycloïdes.

- (ii) Dans le cas où  $\lambda = \frac{13}{10}$ , on remarque sur la courbe obtenue des petites boucles et des grandes boucles. Dans les autres cas, seules les grandes boucles sont présentes. Dans le cas limite  $\lambda = 1$ , la petite boucle disparaît et une tangente verticale apparaît (seul point stationnaire), qui n'apparaît pas dans le cas où  $\lambda \neq 1$ .

(3) On se replace dans le cas  $a$  quelconque et  $\lambda > 1$ .

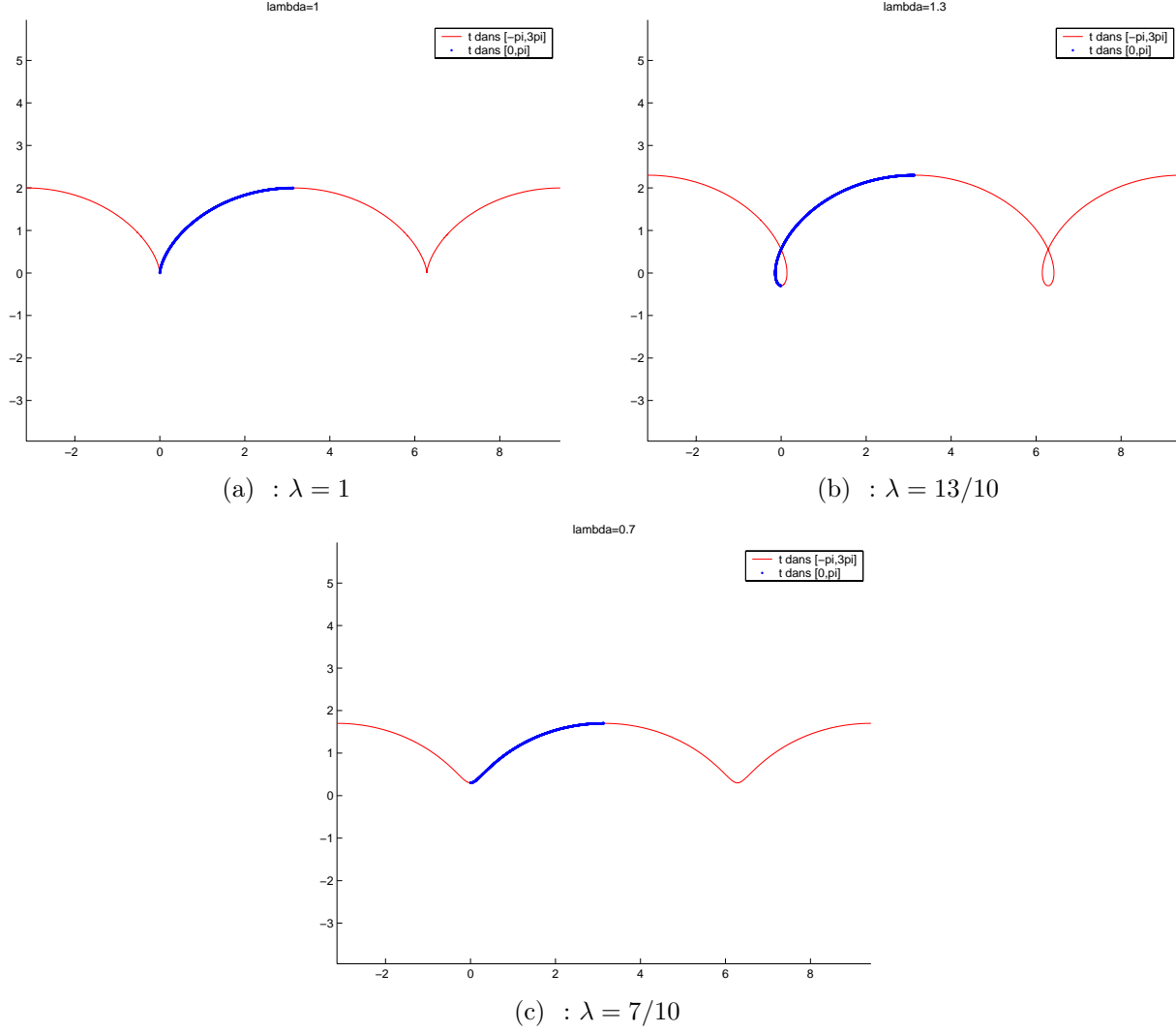


FIG. B.2. La courbe  $F_\lambda$  pour  $a = 1$  pour  $t \in [-\pi, 3\pi]$ .

(a) D'après le tableau de variation de la question 2(c)ii, il est immédiat que

$$\forall t \in ]0, \theta_0[, \quad x'_\lambda(t) < 0 \text{ et } y_\lambda(t) < 0, \quad (\text{B.14a})$$

$$\forall t \in ]\theta_0, \pi/2], \quad x'_\lambda(t) > 0 \text{ et } y_\lambda(t) > 0. \quad (\text{B.14b})$$

(b) D'après les calculs de la question 2(c)ii, il vient

$$x''_\lambda(t) = a\lambda \sin t,$$

de signe positif sur  $[0, \theta_0]$ . Ainsi, puisque  $x'_\lambda(\theta_0) = 0$  et que

$$x'_\lambda(0) = -2a\lambda \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right),$$



on en déduit que  $x'_\lambda$  est croissante que  $[0, \theta_0]$  et que

$$\boxed{\text{La valeur maximale de } |x'_\lambda| \text{ sur } [0, \theta_0] \text{ est égale à } 2a\lambda \sin^2(\theta_0/2).} \quad (\text{B.15})$$

- (4) On considère une roue qui roule sur un sol sans glisser (ce qui n'a rien d'exceptionnel!). Pour obtenir un point  $N$  qui vérifie

$$\overrightarrow{\Omega N} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}, \quad (\text{B.16})$$

avec  $\lambda > 1$  avec  $M$  un point fixe de ce cercle, il est nécessaire que le point  $N$  soit à l'extérieur de ce cercle, ce qui semble empêcher la rotation du système, sauf ... si le point  $N$  peut passer sous le sol! Cela est le cas pour la roue d'un wagon : le cercle de la roue roule sans glisser et il existe un grand cercle, dont le rayon est strictement plus grand, qui empêche le train de dérailler. Un point  $N$  de ce grand cercle correspond donc à la configuration (B.16).

Les résultats (B.14) traduisent le fait qu'il existe des intervalles de temps du type  $] -\theta_0, \theta_0[ + 2k\pi$  où  $k$  est un entier relatif quelconque (d'après la symétrie et la périodicité) où la composante horizontale  $x'_\lambda(t)$  de la vitesse du point  $N$  est négative par rapport au sol tandis que l'ordonnée  $y_\lambda(t)$  est négative. Au contraire, pour les autres valeurs de temps, la composante horizontale  $x'_\lambda(t)$  de la vitesse du point  $N$  est positive par rapport au sol tandis que l'ordonnée  $y_\lambda(t)$  est positive. Cela signifie donc que

$$\boxed{\text{Périodiquement, des points d'un train reculent !.}} \quad (\text{B.17})$$

De façon plus précise

$$\boxed{\text{Ces points d'un train reculent quand ils sont sous le niveau du rail.}} \quad (\text{B.18})$$

Pour les autres points de la roue (correspondant à  $\lambda \leq 1$ ), cette singularité n'apparaît pas.

On peut imaginer d'autres points qui reculent par rapport au sol, par exemple, un système en rotation très rapide (par exemple dans le moteur) ou alors des gens qui courent très rapidement dans le train en marche arrière!

REMARQUE B.2. On peut comprendre cette notion en introduisant le vecteur de rotation instantanée.

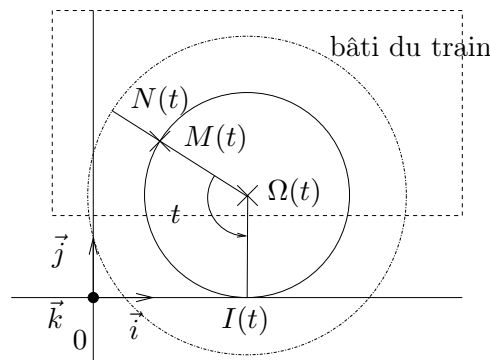


FIG. B.3. Un train.

On considère un train roulant à la vitesse  $\vec{v}_\Omega = v_\Omega \vec{i}$  (constante ou non) et une de ses roues, de centre  $\Omega$  (voir figure B.3 page ci-contre). Le point  $N(t)$  désigne un des points de la roue extérieure du wagon, de rayon strictement supérieur à  $a$ . Le bâti du train a un mouvement de translation par rapport au sol, tandis que la roue a un mouvement de rotation par rapport au bâti du train autour du point  $\Omega(t)$ .

Notons  $\vec{\omega}$  (qui peut dépendre du temps) le vecteur de rotation instantané de la roue (par rapport au référentiel lié au train). On rappelle que le champs des vitesses de la roue par rapport au référentiel lié au train est donné par

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P}, \quad (\text{B.19})$$

où  $P$  est le point considéré. La loi des compositions des vitesses donne pour un point quelconque  $P$  de la roue, immobile dans le référentiel lié à la roue, sa vitesse par rapport au sol :

$$\vec{v}_s = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P} + \vec{v}_\Omega. \quad (\text{B.20})$$

Si  $P$  est choisi égal au point coïncidant avec  $I$  (c'est à dire que  $P$  est lié au référentiel de la roue et est égal à l'instant  $t$  au point  $I$ ) de vitesse nulle par rapport au référentiel lié au sol (car il n'y a pas de glissement), alors on a, selon (B.20) en projetant dans le repère  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$v_\Omega = \omega a. \quad (\text{B.21})$$

Si on utilise ensuite (B.20) et (B.21), on obtient

$$\boxed{\vec{v}_s = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP}}, \quad (\text{B.22})$$

et donc, après projection, puisque  $y_I$  est nul, les deux composantes de la vitesses valent

$$\boxed{v_{s,x} = -\omega y_P, \text{ et } v_{s,x} = \omega x_P.} \quad (\text{B.23})$$

En particulier, si  $y_I$  est négatif, la vitesse horizontale est négative! On retrouve donc le résultat (B.18) établi plus haut. Pour plus de détails, voir [GS86, Bel88, GAJ94, Bon92].



## ANNEXE C

### Un exemple de courbe dense dans une partie de $\mathbb{R}^2$

Annexe non rédigée actuellement.



## ANNEXE D

### Démonstration de l'inégalité (3.14)

Cette preuve est directement issue de [GAJ94].

On adopte les notations du théorème 3.4 page 34. L'inégalité (3.14) est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad L(\Gamma) \geq \int_a^b \|F'(t)\| dt - \varepsilon, \quad (\text{D.1})$$

soit encore,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}, \quad L_\sigma(\Gamma) \geq \int_a^b \|F'(t)\| dt - \varepsilon. \quad (\text{D.2})$$

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ .

On sait que  $F'$  est continue sur le compact  $[a, b]$ , donc uniformément continue ; donc, il existe  $h > 0$  tel que

$$\forall u, v \in [a, b], \quad |u - v| \leq h \implies \|F'(u) - F'(v)\| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (\text{D.3})$$

Notons, pour  $i \in \{0, \dots, N - 1\}$  et pour toute subdivision  $\sigma$  de  $\mathcal{S}$

$$\Delta_i(\sigma) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F'(t)\| dt - M_i M_{i+1}.$$

D'après (3.12) page 34, on a

$$\Delta_i(\sigma) \geq 0. \quad (\text{D.4})$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\Delta_i(\sigma) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F'(t)\| dt - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(t) dt \right\|. \quad (\text{D.5})$$

D'après le théorème de la moyenne, puisque  $t \mapsto \|F'(t)\|$  est continue, il existe  $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ , tel que

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F'(t)\| dt = (t_{i+1} - t_i) \|F'(\xi_i)\| = \|(t_{i+1} - t_i) F'(\xi_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(\xi_i) dt \right\|.$$

Ainsi, d'après (D.5),

$$\Delta_i(\sigma) = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(\xi_i) dt \right\| - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(t) dt \right\|$$

et d'après l'inégalité triangulaire (voir inégalité (L.3), page 169, de l'annexe L) et (D.4), il vient

$$\begin{aligned} \Delta_i(\sigma) = |\Delta_i(\sigma)| &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(\xi_i) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(t) dt \right\| \\ &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(\xi_i) dt - F'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F'(\xi_i) - F'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Choisissons une subdivision de pas inférieur à  $h$  ; Ainsi,  $|t - \xi_i| < h$  et selon (D.3), il vient

$$\Delta_i(\sigma) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{b-a},$$

et par sommation sur  $i$

$$\int_a^b \|F'(t)\| dt - L_\sigma(\Gamma) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, (D.2) est vrai.

## ANNEXE E

### Indépendance de la longueur de l'arc $L(\Gamma)$ par rapport à $F$ et $I$

On reprend les notations des chapitres 1, 2 et 3.

#### E.1. Étude d'un exemple

On pose  $I = [-2, 2]$ , on considère la partie  $\Gamma = [AB]$  de  $\mathbb{R}^2$ , où  $A = (-6, -6)$  et  $B = (6, 6)$ .

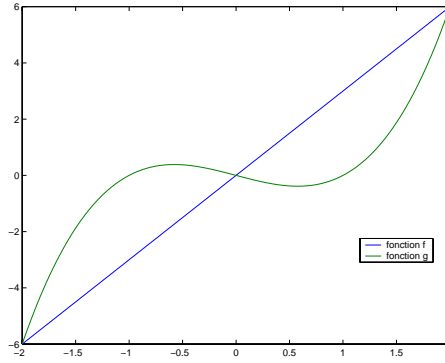


FIG. E.1. Les fonctions  $f$  et  $g$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$   $I$  de dans  $\mathcal{E}$ , définie par (voir figure E.1)

$$\forall t \in I, \quad f(t) = 3t, \tag{E.1a}$$

$$g(t) = t^3 - t, \tag{E.1b}$$

et on pose

$$\forall t \in I, \quad F(t) = (f(t), f(t)), \tag{E.2a}$$

$$G(t) = (g(t), g(t)). \tag{E.2b}$$

On vérifie que  $F$  et  $G$  sont  $C^1$  et que ces deux paramétrages correspondent au même arc  $\Gamma$ . On a donc deux courbes  $\mathcal{C}_1 = (\Gamma, I, F)$  et  $\mathcal{C}_2 = (\Gamma, I, G)$ .

La fonction  $f$  est strictement croissante; ainsi,  $F$  définit une bijection de  $I$  sur  $\Gamma$ . Ainsi,  $\Gamma$  est donc parcouru une seule fois quand  $t$  décrit  $I$ . En revanche,  $g$  n'est pas strictement croissante (sa dérivée s'annule en  $\pm\sqrt{3}/3$  et  $g$  y vaut  $\mp 2/3\sqrt{3}$ ). On peut vérifier que, quand  $t$  décrit  $I$  en croissant, deux parties de  $\Gamma$  sont parcourues une seule fois et que la partie centrale de  $\Gamma$  est parcourue trois fois.

La distance  $AB$  vaut  $\sqrt{2^2(6^2 + 6^2)}$ , soit

$$AB = 12\sqrt{2}. \tag{E.3}$$



Par ailleurs, si on utilise la formule (3.7), on a, pour les deux courbes  $\mathcal{C}_1 = (\Gamma, I, F)$  et  $\mathcal{C}_2 = (\Gamma, I, G)$ ,

$$L_1(\Gamma) = \int_{-2}^2 \|F'(t)\| dt, \quad L_2(\Gamma) = \int_{-2}^2 \|G'(t)\| dt.$$

On a successivement

$$\|F'(t)\| = \|(3, 3)\| = 3\|(1, 1)\| = 3\sqrt{2},$$

et donc

$$L_1(\Gamma) = 12\sqrt{2}, \tag{E.4}$$

ce qui est conforme à (E.3). De même, on a

$$\|G'(t)\| = \|(|3t^2 - 1|, |3t^2 - 1|)\| = |3t^2 - 1| \sqrt{2},$$

et donc

$$\begin{aligned} L_2(\Gamma) &= \int_{-2}^2 \|G'(t)\| dt, \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^2 |3t^2 - 1| dt, \\ &= 2\sqrt{2} \left( \int_0^{\sqrt{3}/3} 1 - 3t^2 dt + \int_{\sqrt{3}/3}^2 3t^2 - 1 dt \right), \end{aligned}$$

et donc, après calculs,

$$L_2(\Gamma) = 4\sqrt{2} \left( \frac{2\sqrt{3}}{9} + 3 \right) > 12\sqrt{2}, \tag{E.5}$$

soit

$$AB = L_1(\Gamma) < L_2(\Gamma). \tag{E.6}$$

ce qui provient du fait que dans le deuxième cas, la partie centrale de  $\Gamma$  est comptée trois fois. Nous allons regarder cela de plus près.

## E.2. Arc et courbe simple

Soit une courbe paramétrée  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ , où  $F$  est supposée de classe  $C^1$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que  $F$  est une surjection de  $I$  sur  $\Gamma$ . Si ce n'est pas le cas, des parties de  $\Gamma$  ne sont pas atteintes par  $F$  et peuvent être donc omises.

**DÉFINITION E.1.** Une courbe  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$  est dite simple si et seulement si il n'existe aucun point double.

**LEMME E.2.** *Pour toute courbe simple  $\mathcal{C} = (\Gamma, I, F)$ ,  $F$  est une bijection de  $\Gamma$  dans  $I$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par définition des points doubles (voir section 1.4.2 page 15), on a

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad F(t_1) = F(t_2) \implies t_1 = t_2,$$

ce qui signifie que  $F$  est injective; puisque  $F$  est surjective,  $F$  est bijective. □

Donnons alors le résultat principal :

PROPOSITION E.3. *Soit une partie  $\Gamma$  du plan  $\mathcal{E}$  telle qu'il existe un intervalle  $I = [a, b]$ , avec  $a < b$  et une bijection  $F$  de classe  $C^1$ , de  $I$  dans  $\Gamma$ . Alors, pour tout intervalle  $J = [c, d]$ , avec  $c < d$  et pour tout bijection  $G$  de  $J$  dans  $\Gamma$ , on a*

$$\int_a^b \|F'(t)\| dt = \int_c^d \|G'(t)\| dt. \quad (\text{E.7})$$

Ainsi, la longueur  $L(\Gamma)$  est indépendante de  $F$  et de  $I$ , ce qui justifie la notation. On parle donc de la longueur de l'arc  $\Gamma$ .

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction  $\phi = G^{-1} \circ F$ , qui est donc une bijection de  $I$  dans  $J$ . On a ainsi  $F = G \circ \phi$ ; donc, si

$$\forall (u, t) \in I \times J, \quad F(u) = (x(u), y(u)), \quad G(t) = (X(t), Y(t)),$$

alors

$$\forall u \in I, \quad F(u) = (X \circ \phi(u), Y \circ \phi(u)).$$

On a donc

$$\forall u \in I, \quad F'(u) = ((X \circ \phi)'(u), (Y \circ \phi)'(u)) = (X'(\phi(u))\phi'(u), Y'(\phi(u))\phi'(u)).$$

Soit encore

$$\forall u \in I, \quad F'(u) = \phi'(u)G' \circ \phi(u), \quad (\text{E.8})$$

ce qui implique

$$\forall u \in I, \quad \|F'(u)\| = |\phi'(u)| \|G' \circ \phi(u)\|.$$

Or,  $\phi$ , est donc une bijection de  $I = [a, b]$  dans  $J = [c, d]$ , où  $a < b$  et  $c < d$ . Ainsi,  $\phi$  est strictement croissante et  $\phi'(u) \geq 0$ . On a donc

$$\forall u \in I, \quad \|F'(u)\| = \phi'(u) \|G' \circ \phi(u)\|. \quad (\text{E.9})$$

Par ailleurs, calculons transformons l'intégrale  $\int_c^d \|G'(t)\| dt$ , en faisant un changement de variable : on pose  $t = \phi(u)$  où,  $t$  est l'ancienne variable et  $u$  est la nouvelle ; on a alors

$$dt = \phi'(u)du$$

et, puisque  $\phi$  est une bijection de  $I = [a, b]$  vers  $J = [c, d]$ ,

$$\int_c^d \|G'(t)\| dt = \int_a^b \|G'(\phi(u))\| \phi'(u)du,$$

soit, d'après (E.9),

$$\int_c^d \|G'(t)\| dt = \int_a^b \|F'(u)\| du.$$

□

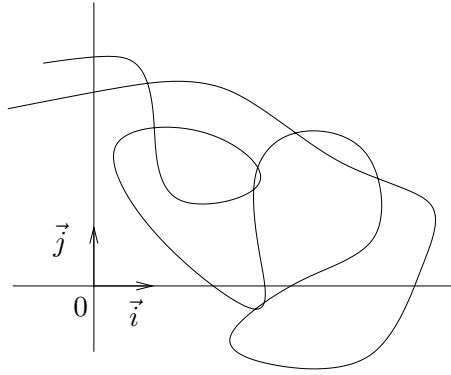


FIG. E.2. Un nombre fini de points doubles.

### E.3. Arc et courbes non simples

Il peut exister des points doubles, alors qu'aucune partie de  $\Gamma$  n'est parcourue plusieurs fois (sur une partie non réduite à un point de  $I$ ), comme le montre la figure E.2.

En raisonnant sur chacune des parties de  $\Gamma$  où il n'y a pas de point double, on peut montrer de même la proposition suivante :

**PROPOSITION E.4.** *Soit une partie  $\Gamma$  du plan  $\mathcal{E}$  telle qu'il existe un paramétrage  $([a, b], F)$  de  $\Gamma$ , où  $F$  est de classe  $C^1$  et possède un nombre fini de points doubles. Pour tout paramétrage  $([c, d], G)$  de  $\Gamma$ , où  $G$  est de classe  $C^1$  et possède un nombre fini de points doubles, on a*

$$\int_a^b \|F'(t)\| dt = \int_c^d \|G'(t)\| dt. \quad (\text{E.10})$$

Si des parties de  $\Gamma$  non réduites à un point sont parcourues plusieurs fois, on pourra, en modifiant le paramétrage faire en sorte de n'avoir qu'un nombre fini de points doubles.

Grâce à ces deux propositions, l'exemple de la section E.1 devrait être plus clair : le paramétrage  $F$  vérifie les hypothèses de la proposition E.3, contrairement à  $G$ .

### E.4. Longueurs discrètes

Dans le cas de la longueur discrète  $L_\sigma(\Gamma)$  définie par (3.4) (définition 3.2 page 33). On peut montrer de même que, si  $F$  vérifie les hypothèses de la proposition E.4, alors  $L_\sigma(\Gamma)$  ne dépend pas  $F$ , des valeurs de  $t_i$ , mais seulement des points  $M_i$ , s'ils sont pris dans l'ordre sur la courbe. On pourrait donc écrire (3.4) sous la forme

$$L_{(M_i)_{0 \leq i \leq N}}(\Gamma) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i M_{i+1}.$$

### E.5. Coordonnées polaires

Naturellement tous ces résultats s'appliquent aux courbes en polaires, qui constituent un cas particuliers.

## ANNEXE F

### Définition du vecteur normé tangent $\vec{T}$ aux points stationnaires

Annexe non rédigée actuellement.



## ANNEXE G

### Pourquoi le cercle de courbure s'appelle-t-il ainsi ?

On justifie dans cette annexe la remarque 3.20 page 40.

Supposons que la courbure  $c$  au point étudié soit non nulle.

Si on suppose  $F$  de classe  $C^2$ , il en est de même du paramétrage normal  $\psi$ . La formule de Taylor-Young donne donc au voisinage de  $M_0$  d'abscisse curviligne  $s_0$  :

$$\psi(s) = \psi(s_0) + (s - s_0)\psi'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\psi''(s_0) + o\left((s - s_0)^2\right). \quad (\text{G.1})$$

Compte tenu de (3.32), on a donc

$$\overrightarrow{OM}(s) = \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0)\vec{T} + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 c(s_0)\vec{N} + o\left((s - s_0)^2\right), \quad (\text{G.2})$$

où  $(\vec{T}, \vec{N})$  désigne le repère de Frenet en  $M_0$ .

À l'ordre 1, (G.2) donne

$$\overrightarrow{OM}(s) = \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0)\vec{T} + o(s - s_0), \quad (\text{G.3})$$

ce qui traduit que la droite paramétrée par  $s \mapsto \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0)\vec{T}$  est une approximation à l'ordre 1 de la courbe ; c'est la tangente !

À l'ordre 2, la courbe paramétrée par  $s \mapsto \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0)\vec{T} + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 c(s)\vec{N}$  est une approximation à l'ordre 2 de la courbe. C'est une parabole, puisque dans le repère  $(M(s_0), \vec{T}, \vec{N})$ , elle est paramétrée par

$$X(s) = s - s_0, \quad (\text{G.4})$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}(s - s_0)^2 c(s_0), \quad (\text{G.5})$$

ce qui est équivalent à

$$Y = \frac{c(s_0)}{2} X^2. \quad (\text{G.6})$$

On dit que c'est la parabole osculatrice <sup>1</sup>.

Montrons que le cercle de courbure introduit en définition 3.19 page 39 épouse au mieux la courbe, c'est-à-dire, qu'à l'ordre deux, l'équation du cercle au voisinage du point  $M_0$  coïncide avec celle de la courbe et celle de la parabole osculatrice, c'est-à-dire encore :

$$\psi(s) = \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0)\vec{T} + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 c(s_0)\vec{N} + o\left((s - s_0)^2\right), \quad (\text{G.7})$$

Supposons, pour toute la suite, que  $R$  est strictement positif.

Le cercle de courbure, de centre  $I$  et de rayon  $R$  peut être paramétré par (voir figure G.1) :

$$\overrightarrow{IQ}(\theta) = -R \cos \theta \vec{N} + R \sin \theta \vec{T}. \quad (\text{G.8})$$

---

<sup>1</sup>du latin osculare : baiser, au sens premier du terme, c'est-à-dire embrasser.

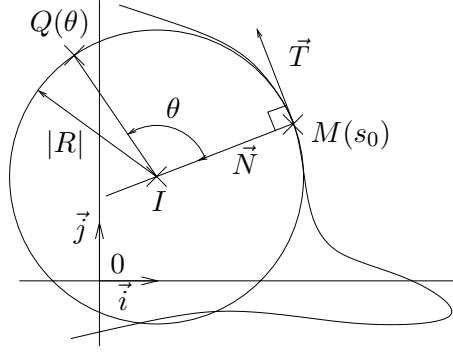


FIG. G.1. Le repère de Frenet  $(M(s_0), \vec{T}, \vec{N})$  au point  $M(s_0)$ , le centre et le cercle de courbure, de point courant  $Q(\theta)$ .

Cependant, ce paramétrage n'est pas normal ; conformément à (3.38), on adopte le paramétrage normal suivant :

$$\vec{IQ}(s) = -R \cos\left(\frac{s-s_0}{R}\right) \vec{N} + R \sin\left(\frac{s-s_0}{R}\right) \vec{T}. \quad (\text{G.9})$$

Au second ordre en  $s - s_0$ ,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{s-s_0}{R}\right) &= 1 - \frac{1}{2R^2}(s-s_0)^2 + o\left((s-s_0)^2\right), \\ \sin\left(\frac{s-s_0}{R}\right) &= \frac{s-s_0}{R} + o\left((s-s_0)^2\right). \end{aligned}$$

De (G.9), il découle donc

$$\begin{aligned} \vec{OQ}(s) &= \vec{OM}(s_0) + \vec{M(s_0)I} + \vec{IQ}(s), \\ &= \vec{OM}(s_0) + R\vec{N} - R\vec{N} + \frac{R}{2R^2}(s-s_0)^2\vec{N} + (s-s_0)\vec{T} + o\left((s-s_0)^2\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\vec{OQ}(s) = \vec{OM}(s_0) + (s-s_0)\vec{T} + \frac{c}{2}(s-s_0)^2\vec{N} + o\left((s-s_0)^2\right),$$

ce qui est bien de la forme (G.7). On appelle donc aussi le cercle de courbure, cercle osculateur.

On a donné sur la figure G.2 la courbe, le cercle et la parabole osculateurs.

On pourra aussi consulter les figures 3.5 page 46.

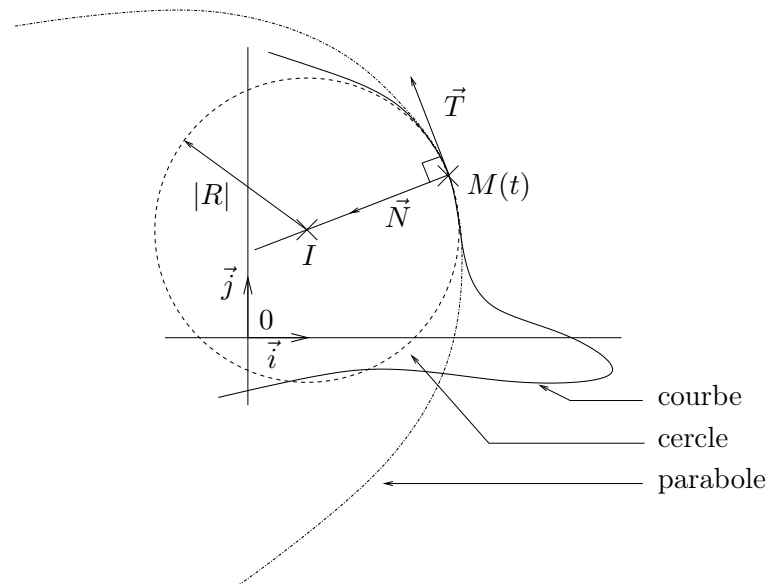


FIG. G.2. Le repère de Frenet  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  au point  $M(t)$ , le centre, le cercle de courbure (ou osculateur) et la parabole osculatrice .





## ANNEXE H

### Calcul informatique du rayon et du centre de courbure en un point birrégulier

On donne ici les deux résultats de la section 3.5.4 page 45 du chapitre 3.

PROPOSITION H.1. *En posant*

$$\delta = x'y'' - x''y', \quad (\text{H.1a})$$

$$Q = x'^2 + y'^2, \quad (\text{H.1b})$$

alors, si  $\delta$  est non nul, le rayon de courbure  $R$ , les coordonnées de  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$  et du centre du rayon de courbure sont donnés dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  par

$$R = \frac{Q^{3/2}}{\delta}, \quad (\text{H.2a})$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{Q}} (x', y'), \quad (\text{H.2b})$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{Q}} (-y', x'), \quad (\text{H.2c})$$

$$I = (x - \tilde{R}y', y + \tilde{R}x'), \quad (\text{H.2d})$$

où

$$\tilde{R} = \frac{Q}{\delta}. \quad (\text{H.2e})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les différents résultats du chapitre 3. □

PROPOSITION H.2. *Pour une courbe définie en coordonnées polaires, on a, en posant,*

$$\delta = r^2 + 2r'^2 - rr'', \quad (\text{H.3a})$$

$$Q = r^2 + r'^2, \quad (\text{H.3b})$$

alors, si  $\delta$  est non nul, le rayon de courbure  $R$ , les coordonnées de  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$  et du centre du rayon de courbure sont donnés dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  par

$$R = \frac{Q^{3/2}}{\delta}, \quad (\text{H.4a})$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{Q}} (r' \cos \theta - r \sin \theta, r' \sin \theta + r \cos \theta), \quad (\text{H.4b})$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{Q}} (-r \cos \theta - r' \sin \theta, -r \sin \theta + r' \cos \theta), \quad (\text{H.4c})$$

$$I = \left( r \cos \theta + \tilde{R} (-r \cos \theta - r' \sin \theta), r \sin \theta + \tilde{R} (-r \sin \theta + r' \cos \theta) \right), \quad (\text{H.4d})$$

où

$$\tilde{R} = \frac{Q}{\delta}. \quad (\text{H.4e})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les différents résultats du chapitre 3 et de revenir à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  $\square$

## ANNEXE I

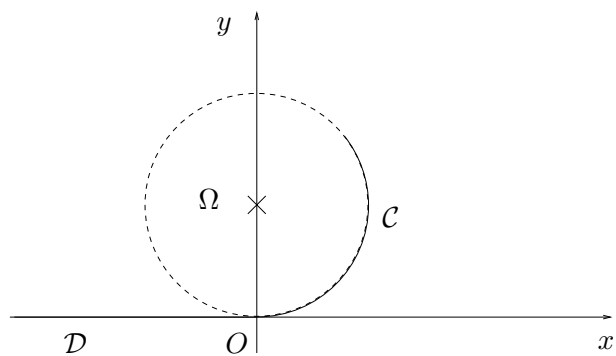
### Étude d'une clothoïde (sous forme d'exercice corrigé)

Cet exercice a déjà été donné en examen de MT25 (médian avril 2006).

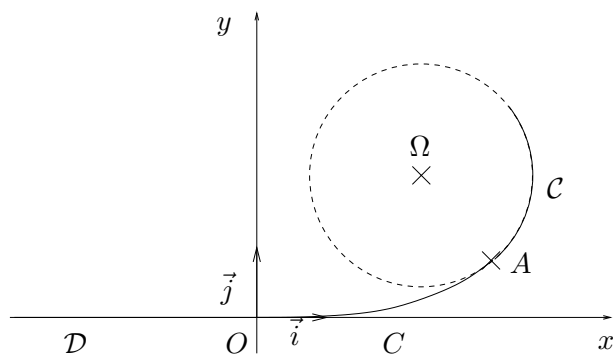
#### Énoncé

On considère un point matériel  $M(t)$  évoluant dans le plan, paramétré par le temps

$$F(t) = (x(t), y(t)). \quad (\text{I.1})$$



(a) : Une trajectoire formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ .



(b) : Une trajectoire formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$ , d'un arc de courbe  $C$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ .

FIG. I.1. Deux types de trajectoires.

- (1) Justifier sommairement les formules suivantes :

$$\vec{v} = v\vec{T}, \quad (\text{I.2a})$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (\text{I.2b})$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}, \quad (\text{I.2c})$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne,  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  désignent la vitesse et l'accélération et  $(M(t), \vec{T}, \vec{N})$  est le repère de Frenet au point  $M(t)$ .

- (2) On suppose pour toute la suite que la vitesse scalaire  $v$  est constante. On suppose que la trajectoire étudiée est celle du centre de gravité d'une véhicule (voiture ou un train, par exemple) en mouvement et l'on s'intéresse à un point matériel immobile dans cette voiture.

- (a) Supposons que le véhicule étudié, roulant à vitesse constante, décrive la trajectoire de la figure 1(a) page précédente, formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ , de centre  $\Omega$ .

Que peut-on dire de l'accélération subie par le point  $M(t)$  au passage en  $O$  ?

- (b) On admet de plus que :

- si le véhicule est une voiture, l'angle de braquage des roues avant (et donc du volant) est proportionnel à la courbure  $c = 1/R$  de la courbe ;
- un passager, proche du centre de gravité de la voiture et immobile dans cette voiture, subira une accélération proportionnelle à  $\vec{\gamma}$ .

Dans ce cas, quels sont les inconvénients de la trajectoire de la figure 1(a) page précédente ?

- (3) Pour palier cet inconvénient, on intercale maintenant une courbe  $C$  entre le segment de droite  $\mathcal{D}$  et l'arc de cercle  $\mathcal{C}$ , comme l'indique la figure 1(b) page précédente.

L'origine  $O$  coïncide avec la fin de la partie linéaire, le point  $A$  coïncide avec le début de la partie circulaire.

On cherche une courbe  $C$  continue en  $O$  et  $A$ , dont le vecteur  $\vec{T}$  soit continu en  $O$  et  $A$  et dont la courbure  $c$  soit continue en  $O$  et  $A$ .

- (a) Que valent les courbures en  $O$  et en  $A$  ?

- (b) On paramètre la courbe inconnue  $C$  par son abscisse curviligne  $s$ , prise nulle en  $O$ . On cherche alors une courbe  $C$  dont la courbure  $c$  soit proportionnelle à l'abscisse curviligne  $s$ , c'est-à-dire, il existe une constante, notée  $2/k^2$  où  $k > 0$  telle qu'en tout de point  $C$ , on ait

$$c(s) = \frac{2}{k^2}s. \quad (\text{I.3})$$

Montrer alors que les inconvénients constatés en question 2b disparaissent !

- (c) Comme dans le cours, on introduit l'angle entre le vecteur  $\vec{i}$  et le vecteur unitaire tangent  $\vec{T}$  :

$$\phi = \left( \vec{i}, \vec{T} \right) [2\pi]. \quad (\text{I.4})$$

Soit  $s_A$  l'abscisse curviligne du point  $A$ . Montrer que pour la courbe  $C$  :

$$\phi(0) = 0, \quad (\text{I.5a})$$

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \phi(s) = \frac{s^2}{k^2}. \quad (\text{I.5b})$$

(d) Montrer alors que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \cos(w^2) dw, \quad (\text{I.6a})$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \sin(w^2) dw. \quad (\text{I.6b})$$

et calculer le vecteur  $\vec{T}$  en fonction de  $s$  et de  $k$ .

(e) Vérifier que le paramétrage est normal.

(f) **question facultative**

Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont définis par (I.6), montrer que (I.3) a bien lieu, que la tangente à la courbe en l'origine est horizontale et que la courbure est nulle en l'origine.

- (4) (a) Si l'on veut que la courbe  $C$  «raccorde» le cercle  $\mathcal{C}$ , que doit-on imposer en  $A$  ?  
 (b) Conclure sur la courbe  $C$ , appelée clothoïde.  
 (c) Montrer que l'ensemble de la trajectoire (formée du segment de droite  $\mathcal{D}$ , de l'arc de courbe  $C$  et de l'arc de cercle  $\mathcal{C}$ ) est de classe  $C^2$ . Est-elle de classe  $C^3$  ?
- (5) On donne quelques valeurs numériques des fonctions définies par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_x(s) = \int_0^s \cos(w^2) dw, \quad (\text{I.7a})$$

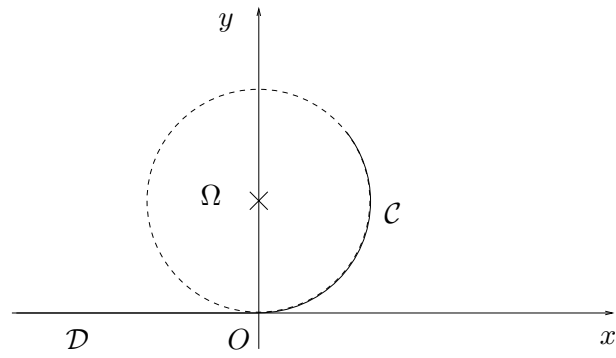
$$f_y(s) = \int_0^s \sin(w^2) dw, \quad (\text{I.7b})$$

dans le tableau I.1.

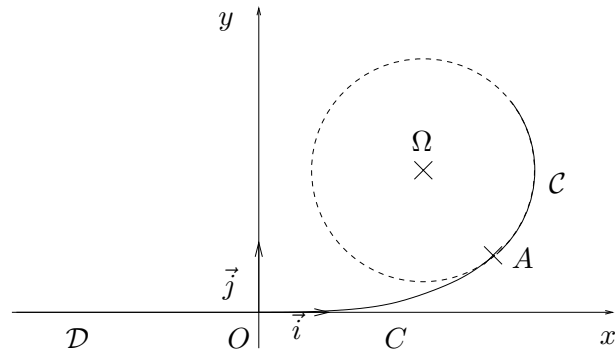
$s$	$f_x(s)$	$f_y(s)$
0	0	0
0.11111	$1.11109 \times 10^{-1}$	$4.57242 \times 10^{-4}$
0.22222	$2.22168 \times 10^{-1}$	$3.65734 \times 10^{-3}$
0.33333	$3.32922 \times 10^{-1}$	$1.23347 \times 10^{-2}$
0.44444	$4.42713 \times 10^{-1}$	$2.91823 \times 10^{-2}$
0.55555	$5.50286 \times 10^{-1}$	$5.67681 \times 10^{-2}$
0.66666	$6.53617 \times 10^{-1}$	$9.73806 \times 10^{-2}$
0.77777	$7.49793 \times 10^{-1}$	$1.52783 \times 10^{-1}$
0.88888	$8.34976 \times 10^{-1}$	$2.23876 \times 10^{-1}$
1	$9.04524 \times 10^{-1}$	$3.10268 \times 10^{-1}$

TAB. I.1. Quelques valeurs de  $f_x$  et de  $f_y$ .

Tracer la courbe pour  $k = 1$ . On tracera pour plusieurs valeurs de  $s$ , sur la même figure :



(a) : Une trajectoire formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ .



(b) : Une trajectoire formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$ , d'un arc de courbe  $C$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ .

FIG. I.2. Deux types de trajectoires.

- le point  $M(s) = (x(s), y(s))$  ;
- le vecteur  $\vec{T}$  ;
- le cercle osculateur ;

On tracera aussi le cercle  $\mathcal{C}$ .

### Corrigé

Les script matlab cités dans ce corrigé sont disponibles sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/UTBM/index.html>  
On considère un point matériel  $M(t)$  évoluant dans le plan, paramétré par le temps

$$F(t) = (x(t), y(t)). \quad (\text{I.8})$$

- (1) D'après le chapitre 3 du cours (voir la proposition 3.40 page 49 de la section 3.6), on a les formules suivantes :

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{T}}, \quad (\text{I.9a})$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}, \quad (\text{I.9b})$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}}, \quad (\text{I.9c})$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne,  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  désignent la vitesse et l'accélération et  $(M(t), \vec{T}, \vec{N})$  est le repère de Frenet au pont  $M(t)$ .

- (2) On suppose pour toute la suite que la vitesse scalaire  $v$  est constante. Ainsi les formules (I.9) impliquent

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{T}}, \quad (\text{I.10a})$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} \text{ est constante}}, \quad (\text{I.10b})$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{v^2}{R}\vec{N}}, \quad (\text{I.10c})$$

- (a) Supposons que le véhicule étudié, roulant à vitesse constante, décrive la trajectoire de la figure 2(a) page précédente, formée d'un segment de droite  $\mathcal{D}$  et d'un arc de cercle  $\mathcal{C}$ , de centre  $\Omega$ .

Au point 0, sur la partie rectiligne, le rayon de courbure  $R$  est infini et sur la partie circulaire, il est constant.

La norme de l'accélération en 0 passe donc de la valeur nulle à la valeur non nulle  $\frac{v^2}{R}$  ; elle est donc discontinue.

- (b) Dans le cas de la trajectoire de la figure 2(a) page ci-contre, l'angle de braquage passera brusquement de 0 à une valeur non nulle de même que l'accélération subie par le passager. Le conducteur aura donc à tourner subitement son volant tout en subissant une discontinuité d'accélération, ce qui n'est guère confortable ! De même, le châssis et la structure de la voiture seront soulagés de ne plus subir une force discontinue !

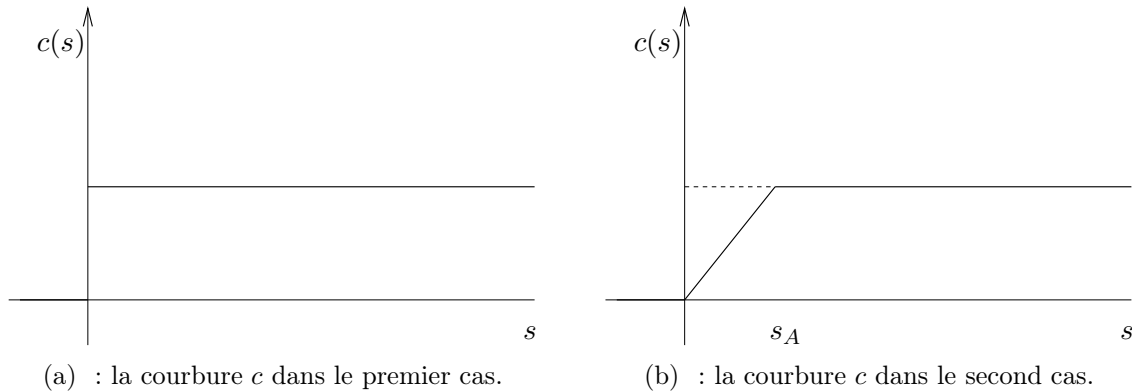
- (3) Pour palier cet inconvénient, on intercale maintenant une courbe  $C$  entre le segment de droite  $\mathcal{D}$  et l'arc de cercle  $\mathcal{C}$ , comme l'indique la figure 2(b) page précédente.

- (a) Par continuité, la courbure en  $O$  est nulle et en  $A$  elle est égale à l'inverse du rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .

- (b) On paramètre la courbe inconnue  $C$  par son abscisse curviligne  $s$ , prise nulle en  $O$ . On cherche alors une courbe  $C$  dont la courbure  $c$  soit proportionnelle à l'abscisse curviligne  $s$ , c'est-à-dire, il existe une constante, notée  $2/k^2$  où  $k > 0$  telle qu'en tout de point  $C$ , on ait

$$c(s) = \frac{2}{k^2}s. \quad (\text{I.11})$$



FIG. I.3. la courbure  $c$  en fonction de  $s$ .

Ainsi, dans le cas de la trajectoire de la figure 2(b) page 150, l'angle de braquage passera continûment, le long de la courbe  $C$  de 0 à une valeur non nulle, de même de même que l'accélération subie par le passager. Le conducteur aura donc à tourner progressivement son volant tout en subissant une accélération augmentant continûment, ce qui est beaucoup plus confortable !

REMARQUE I.1. Soit  $s_A$  l'abscisse curviligne du point  $A$ . La courbure  $c$  le long de la trajectoire 2(a) page 150 est représentée par le graphe de la figure 3(a) tandis que la courbure  $c$  le long de la trajectoire 2(b) page 150 est représentée par le graphe de la figure 3(b).

- (c) Comme dans le cours, on introduit l'angle entre le vecteur  $\vec{i}$  et le vecteur unitaire tangent  $\vec{T}$  (voir la définition 3.26 page 42)

$$\phi = \left( \vec{i}, \vec{T} \right) \quad [2\pi]. \quad (\text{I.12})$$

On rappelle que (voir proposition 3.28 page 42)

$$\frac{d\phi}{ds} = c, \quad (\text{I.13a})$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad (\text{I.13b})$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \phi. \quad (\text{I.13c})$$

La tangente en 0 est portée par  $\vec{i}$ ; ainsi

$$\boxed{\phi(0) = 0.} \quad (\text{I.14})$$

D'après (I.11) et (I.13a), il vient

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{2s}{k^2}. \quad (\text{I.15})$$

En intégrant, d'après (I.14), il vient donc

$$\boxed{\forall s \in [0, s_A], \quad \phi(s) = \frac{s^2}{k^2}.} \quad (\text{I.16})$$

REMARQUE I.2. Il est fondamental de saisir ici que la courbe est paramétrée directement par l'abscisse curviligne  $s$ .

(d) D'après (I.13b) et (I.16), on a

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \frac{dx}{ds}(u) du + x(0), \\ &= \int_0^s \cos(\phi(u)) du, \\ &= \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du. \end{aligned}$$

On fait de même pour  $y$  et en faisant le changement de variable  $w = u/k$ , on obtient finalement

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \cos(w^2) dw, \quad (\text{I.17a})$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{k^2}\right) du = k \int_0^{s/k} \sin(w^2) dw. \quad (\text{I.17b})$$

Naturellement, on obtient aussi le résultat suivant

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x'(s) = \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \quad (\text{I.18a})$$

$$y'(s) = \sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right). \quad (\text{I.18b})$$

On vérifie alors qu'on a

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} = 1. \quad (\text{I.19})$$

Puisque  $\vec{T} = (x'(t), y'(t))/1$ , on a

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{T} = \left( \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right) \right). \quad (\text{I.20})$$

(e) Le paramétrage est normal selon (I.19).

(f) Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont définis par (I.17), alors (I.20) a lieu. On en déduit d'une part que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{N} = \left( -\sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right) \right), \quad (\text{I.21})$$

et d'autre part que

$$\forall s \in [0, s_A], \quad \vec{T}'(s) = \frac{2s}{k^2} \left( -\sin\left(\frac{s^2}{k^2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{k^2}\right) \right). \quad (\text{I.22})$$

D'après la première formule de Frenet (voir proposition 3.25 page 42), on en déduit que  $c = 2s/k^2$  et donc que (I.11) a bien lieu.

On vérifie aisément que la tangente à la courbe en l'origine est horizontale et que la courbure est nulle en l'origine.

REMARQUE I.3. En tout point  $M(s)$  de la courbe  $C$ , différent de l'origine, le centre de courbure  $I$  est totalement défini par les formules précédente et sa définition

$$\forall s \in ]0, s_A], \quad \overrightarrow{MI} = R\vec{N}(s) = \frac{k^2}{2s}\vec{N}(s). \quad (\text{I.23})$$

- (4) (a) Si l'on veut que la courbe  $C$  «raccorde» le cercle  $\mathcal{C}$ , par continuité de la tangente et de la courbure, le cercle  $\mathcal{C}$  est défini par son rayon  $R = 1/c = \frac{k^2}{2s_A}$ , son centre  $I$  est le centre de courbure au point  $M(s_A)$  défini par (I.23).

Ce cercle est le «virage de sortie» de la clothoïde.

- (b) La courbe  $C$  permet donc de relier un segment de droite à un cercle de façon à avoir une courbure continue et donc tous les avantages signalés en question 3b.

Ainsi, tous les matins, vous empruntez, entre la nationale N19 et la route qui mène à l'UTBM, une ou plusieurs clothoïdes.

Cette courbe appelée aussi spirale de Cornu est donc constamment utilisée en construction routière, autoroutière ou ferrovière. Dans ce médian, on l'a utilisé pour «raccorder» un segment à un cercle, mais, avec la même courbe, on peut aussi envisager des raccord cercle-cercle, cercle-droite, ....

L'inconvénient de cette courbe est qu'elle n'est pas connue analytiquement ; quand les ordinateurs n'existaient pas, les mathématiciens en déterminaient quelques points par des calculs manuels !

Pour plus de détails, on pourra consulter les URL suivantes :

- <http://perso.wanadoo.fr/math.15873/Clothoide.html>
- <http://fr.wikipedia.org/wiki/Clotho%C3%AFde>
- <http://www.mathcurve.com/courbes2d/cornu/cornu.shtml>
- <http://www.synapse-informatique.com/topographie.htm>

- (c) On a vu dans l'annexe G du cours que la dérivée seconde d'une courbe est liée à sa courbure. Si celle-ci est continue, la dérivée seconde est continue et l'ensemble de la trajectoire (formée du segment de droite  $\mathcal{D}$ , de l'arc de courbe  $C$  et de l'arc de cercle  $\mathcal{C}$ ) est donc de classe  $C^2$ . Elle n'est pas de classe  $C^3$ , car la dérivée de  $c$  n'est pas continue (voir la figure 3(b) page 152).

- (5) On donne quelques valeurs numériques des fonctions définies par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_x(s) = \int_0^s \cos(w^2) dw, \quad (\text{I.24a})$$

$$f_y(s) = \int_0^s \sin(w^2) dw, \quad (\text{I.24b})$$

dans le tableau I.2 page suivante.

D'après (I.17), on a donc

$$\forall s \in [0, s_A], \quad x(s) = k \int_0^{s/k} \cos(w^2) dw = k f_x\left(\frac{s}{k}\right), \quad (\text{I.25a})$$

$$x(s) = k \int_0^{s/k} \sin(w^2) dw = k f_y\left(\frac{s}{k}\right). \quad (\text{I.25b})$$

$s$	$f_x(s)$	$f_y(s)$
0	0	0
0.11111	$1.11109 \times 10^{-1}$	$4.57242 \times 10^{-4}$
0.22222	$2.22168 \times 10^{-1}$	$3.65734 \times 10^{-3}$
0.33333	$3.32922 \times 10^{-1}$	$1.23347 \times 10^{-2}$
0.44444	$4.42713 \times 10^{-1}$	$2.91823 \times 10^{-2}$
0.55555	$5.50286 \times 10^{-1}$	$5.67681 \times 10^{-2}$
0.66666	$6.53617 \times 10^{-1}$	$9.73806 \times 10^{-2}$
0.77777	$7.49793 \times 10^{-1}$	$1.52783 \times 10^{-1}$
0.88888	$8.34976 \times 10^{-1}$	$2.23876 \times 10^{-1}$
1	$9.04524 \times 10^{-1}$	$3.10268 \times 10^{-1}$

TAB. I.2. Quelques valeurs de  $f_x$  et de  $f_y$ .

Si  $k = 1$ , on est donc en mesure

- de déterminer pour les valeurs de  $s$  indiquée dans le tableau I.2, les coordonnées du point  $M(s) = (x(s), y(s))$  grâce à (I.25) ;
- le vecteur  $\vec{T}$  en tout point  $M(s) = (x(s), y(s))$  grâce à (I.20) ;
- le cercle osculateur pour les valeurs de  $s$  indiquée dans le tableau I.2, les coordonnées du point  $M(s) = (x(s), y(s))$  grâce à (I.21) et (I.23).

Voir la figure I.4, la clothoïde correspondant à  $s \in [0, 1]$  et  $k = 1$ , créée grâce à matlab, ou avec une règle, un stylo et un compas !

On pourra consulter les fonctions et script matlab `affiche_valeur_cossind.m`, `calcul_cossind.m`, `trace_clothoide.m` et `cormedianP06_exo2.m`.

REMARQUE I.4. Puisque  $s$  décrit  $\mathbb{R}_+$ , la clothoïde est de longueur infinie ! Cependant, on peut montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos(w^2) dw = \int_0^{+\infty} \sin(w^2) dw = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{I.26})$$

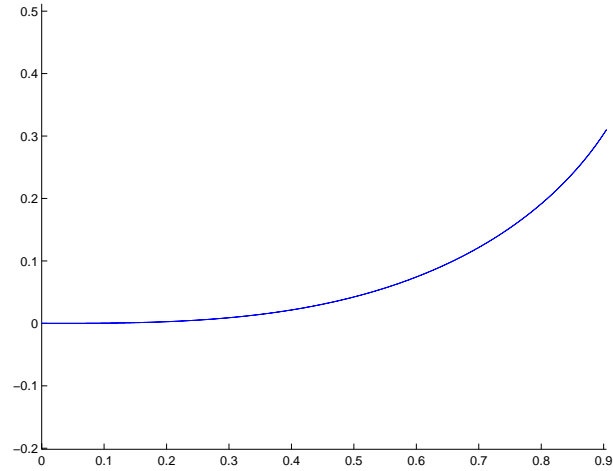
Voir par exemple la wikipédia à [http://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale\\_de\\_Fresnel](http://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Fresnel). Grâce à (I.17), on en déduit que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} x(s) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{I.27a})$$

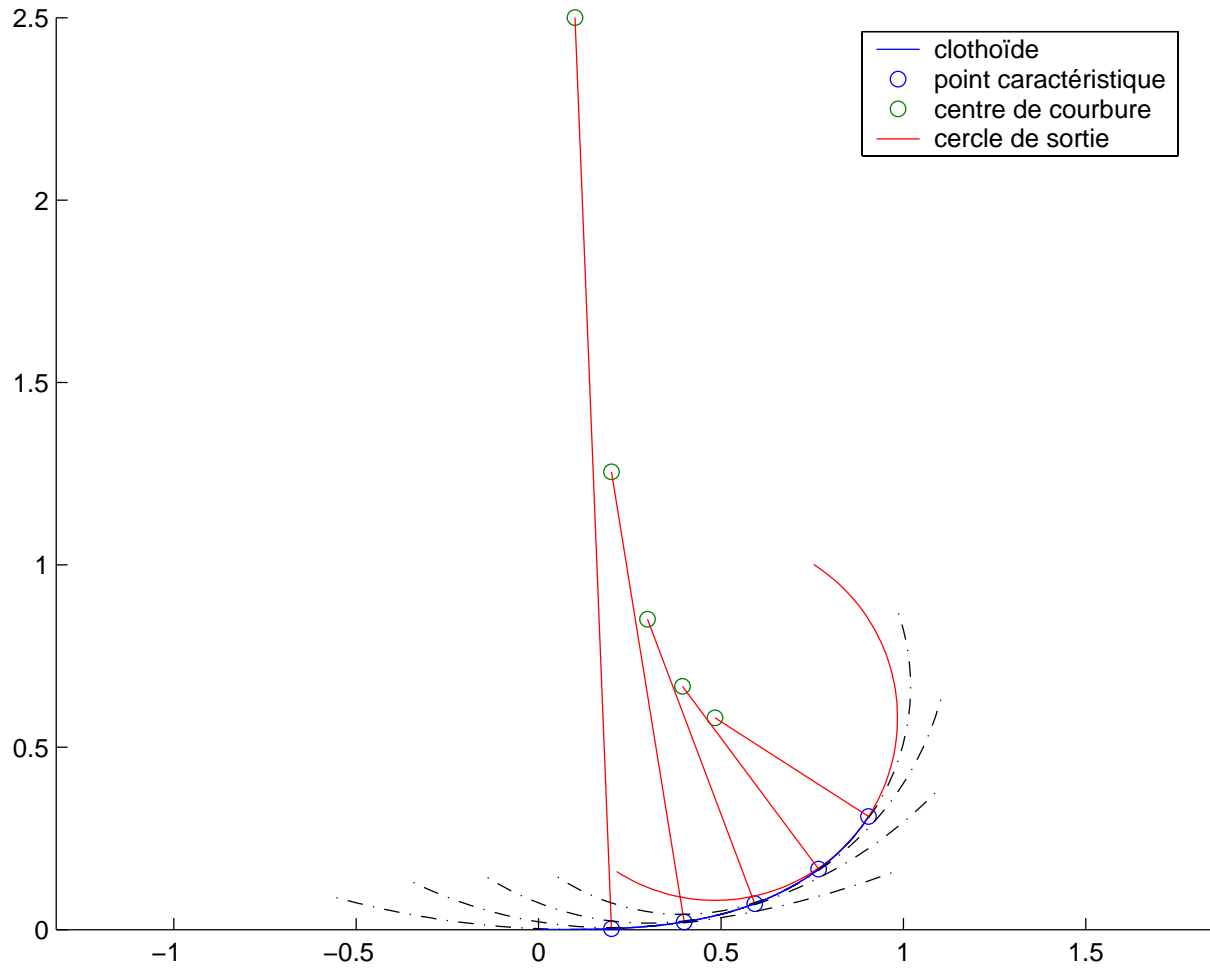
$$\lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{I.27b})$$

La spirale de Cornu est donc de longueur infinie et a un point asymptote. Puisque le rayon de courbure tend vers zéro, cette courbe «s'enroule de plus en plus autour» de ce point asymptote. Voir la figure I.5 page 157 correspondant à  $k = 1$  et  $s \in [0, 10]$ .

REMARQUE I.5. La clothoïde est traditionnellement représentée pour  $s$  décrivant  $\mathbb{R}$ , obtenue en prenant la réunion de la courbe de la figure I.5 et son symétrique par rapport à l'origine.



(a) La clothoïde seule.



(b) La clothoïde avec quelques cercles de courbure.

FIG. I.4. La clothoïde correspondant à  $s \in [0, 1]$  et  $k = 1$ .

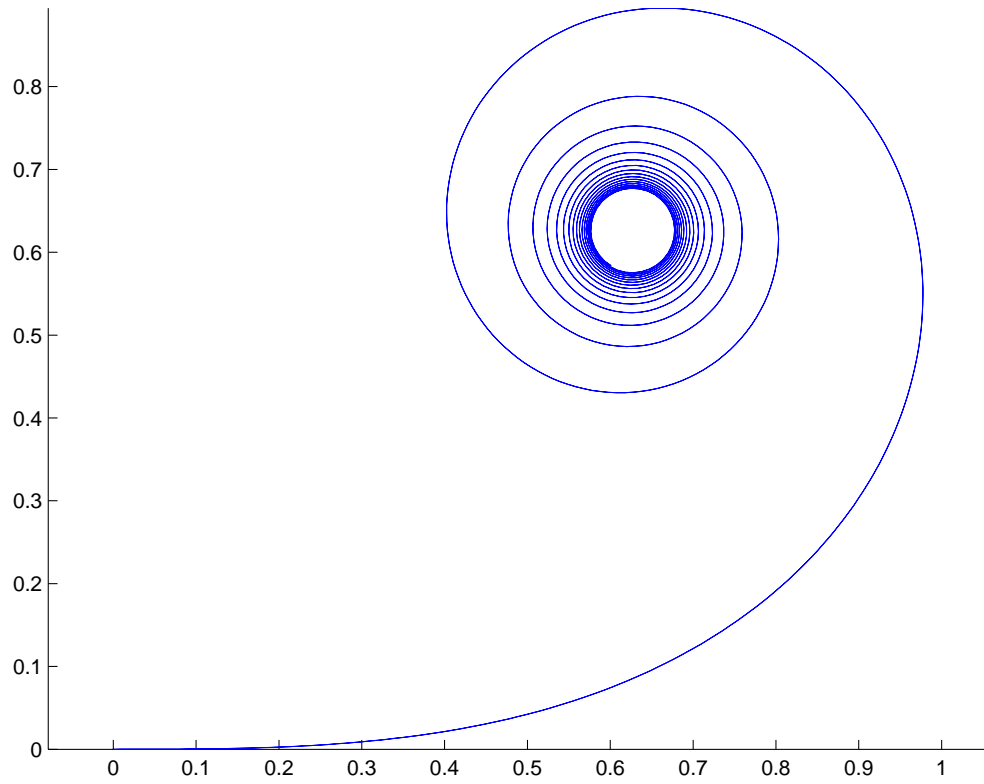


FIG. I.5. La clothoïde correspondant à  $k = 1$  et  $s \in [0, 10]$ .



## Rappels sur les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques dans l'espace

### J.1. Coordonnées polaires

Voir section 2.2 page 21 du chapitre 2.

### J.2. Coordonnées cylindriques

Un point  $M$  de l'espace de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , est repéré en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  avec

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{J.1})$$

où

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (\text{J.2})$$

Voir figure J.1. Par définition,  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(0, x, y)$  a pour coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

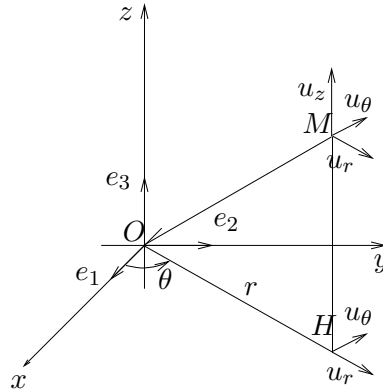


FIG. J.1. Les coordonnées cylindriques

REMARQUE J.1. Si  $r$  est constant et  $\theta$  et  $z$  varient (en décrivant respectivement  $[0, 2\pi[$  et  $\mathbb{R}$ ), le point  $M$  décrit un cylindre.

REMARQUE J.2. En physique, pour éviter la confusion avec le  $r$  des coordonnées sphériques (voir section J.3), on note parfois  $\rho$  la distance  $OH$ .



### J.3. Coordonnées sphériques

Un point  $M$  de l'espace de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , est repéré en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  avec

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \cos \phi \sin \theta, \\ z = r \sin \phi. \end{cases} \quad (\text{J.3})$$

où

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \phi \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (\text{J.4})$$

Voir figure J.2.

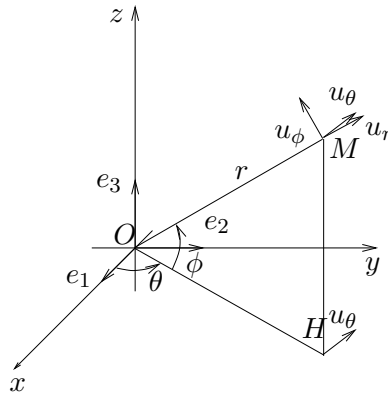


FIG. J.2. Les coordonnées sphériques

On détermine  $(r, \theta, \phi)$  de la façon suivante : puisque  $r$  est la longueur  $OM$ ,  $\theta$  est égal à l'angle  $(\widehat{e_1, OH})$ ,  $\phi$  est égal à l'angle  $(\widehat{OH, OM})$ , on détermine  $\theta$  et  $\rho = OH$  tels que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

Puis, on détermine  $\phi$  et  $r$  tels que

$$\begin{aligned} \rho &= r \cos \phi, \\ z &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que l'on a directement :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$\theta$  est appelé la longitude et  $\phi$  la latitude.

REMARQUE J.3. Si  $r$  est constant et  $\theta$  et  $\phi$  varient (en décrivant respectivement  $[0, 2\pi[$  et  $[-\pi/2, \pi/2]$ ), le point  $M$  décrit une sphère.

REMARQUE J.4. Attention, parfois les notations sont légèrement différentes (pour les coordonnées sphériques). Ainsi, on pourra remplacer la latitude  $\phi$  par la co-latitude  $\psi = \pi/2 - \phi$ . Les formules (J.3) deviennent

$$\begin{cases} x = r \sin \psi \cos \theta \\ y = r \sin \psi \sin \theta, \\ z = r \cos \psi. \end{cases} \quad (\text{J.5})$$

où

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \phi \in [0, \pi]. \quad (\text{J.6})$$

Souvent, en mécanique, les coordonnées sphériques considérées<sup>1</sup> sont  $(r, \theta, \phi)$  où  $r$  demeure  $OM$ ,  $\theta$  est la co-latitude et  $\phi$  la longitude (voir figure J.3).

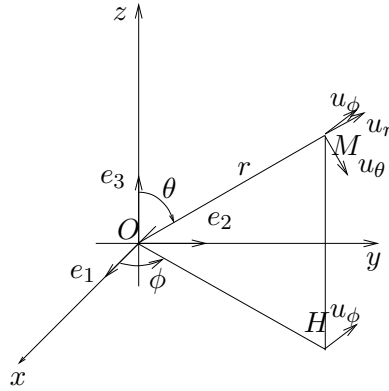


FIG. J.3. Les coordonnées sphériques modifiées

---

<sup>1</sup>On change légèrement de notation, pour que le lecteur retrouve les notations usuelles de la mécanique.



## ANNEXE K

### Un exemple de calcul de volume (sous forme d'exercice corrigé)

Cet exercice a déjà été donné en examen de MT25 (final juin 2005).

#### Énoncé

(1)

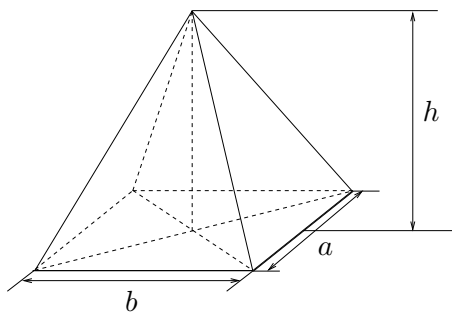


FIG. K.1. Une pyramide régulière de hauteur  $h$  et de dimension de base  $a$  et  $b$ .

Calculer le volume de la pyramide régulière représentée sur la figure K.1.

(2) On cherche maintenant à généraliser le calcul précédent de façon à pouvoir l'appliquer à un cône quelconque.

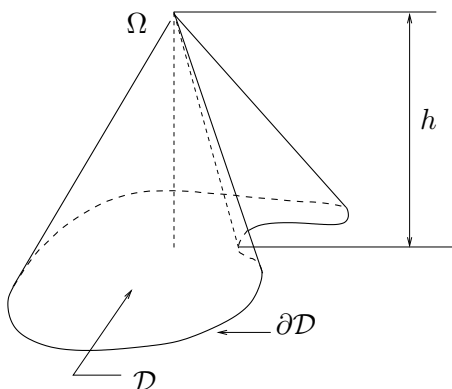


FIG. K.2. Un cône de contour  $\mathcal{D}$  et de hauteur  $h$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une partie fermée, bornée et «régulière» d'un plan  $\mathcal{P}$ , de surface  $S_0$  et  $\Omega$  un point quelconque de l'espace. On définit le cône de sommet  $\Omega$  et de contour  $\mathcal{D}$ , comme le volume

de l'espace limité par  $\mathcal{D}$  et par la surface définie par l'ensemble des segments  $[\Omega M]$  où  $M$  décrit la frontière  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$  (voir figure K.2 page précédente). On note  $h$ , la hauteur du cône, c'est-à-dire, la distance de  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P}$ .

- (a) Justifier sommairement qu'à la hauteur  $z \in [0, h]$ , la surface  $S(z)$  de la portion de plan  $\mathcal{D}(z)$  se trouvant à l'intérieur du cône est donnée par

$$S(z) = S_0 \left( \frac{h-z}{h} \right)^2. \quad (\text{K.1})$$

- (b) En déduire, en utilisant une intégrale triple, que le volume  $V$  du cône est égal à

$$V = \frac{1}{3} S_0 h. \quad (\text{K.2})$$

(3) **Question bonus**

Le but de cette question est de montrer rigoureusement l'égalité (K.1).

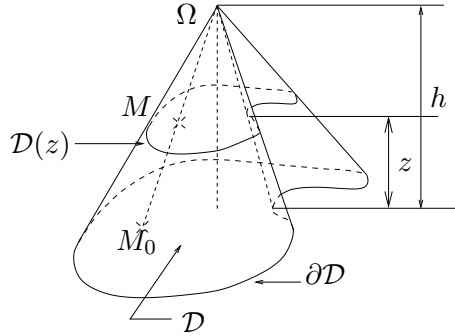


FIG. K.3. Un cône de contour  $\mathcal{D}$  et de hauteur  $h$  et les points  $M_0(x_0, y_0, 0)$  et  $M(x, y, z)$ .

À Chaque point  $M_0(x_0, y_0, 0)$  de la surface  $\mathcal{D}$ , on associe un point  $M(x, y, z)$  de la surface  $\mathcal{D}(z)$  grâce à

$$\overrightarrow{\Omega M_0} = \alpha(z) \overrightarrow{\Omega M}, \quad (\text{K.3})$$

où  $\alpha(z)$  est un réel (voir figure K.3).

- (a) Montrer que

$$\forall z \in [0, h[, \quad \alpha(z) = \frac{h}{h-z}. \quad (\text{K.4})$$

- (b) En déduire que

$$\forall z \in [0, h], \quad \begin{cases} x = \frac{h-z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ y = \frac{h-z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{cases} \quad (\text{K.5})$$

- (c) Justifier l'égalité suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x, y)| dx dy, \quad (\text{K.6})$$

et calculer la valeur du jacobien  $J(x, y)$ .

(d) Conclure.

### Corrigé

- (1) On intègre le volume  $V$  de la pyramide (qui occupe la région  $P$  de l'espace) par des sections planes de hauteur  $z$  constante :

$$V = \iiint_P dx dy dz = \int_{z=0}^{z=h} \left( \iint_{\mathcal{D}(z)} dx dy \right) dz, \quad (\text{K.7})$$

où  $\mathcal{D}(z)$  désigne l'ensemble des points de  $P$  à la côte  $z$ . Notons  $S(z)$  la surface de  $\mathcal{D}(z)$  ; il vient donc

$$V = \int_0^h S(z) dz. \quad (\text{K.8})$$

Un simple raisonnement géométrique nous montre que

$$S(z) = ab \left( \frac{h-z}{h} \right)^2. \quad (\text{K.9})$$

Ainsi, en posant  $u = (h-z)/h$ , il vient (puisque  $du = -dz/h$ )

$$V = \int_0^h S(z) dz = ab \int_0^h \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 dz = hab \int_0^1 u^2 du, \quad (\text{K.10})$$

soit

$$\boxed{V = \frac{1}{3} abh.} \quad (\text{K.11})$$

REMARQUE K.1. Si on pose  $S_0 = ab$  on retrouve la formule bien connue (et qui va être démontrée dans les questions 2 et 3) :

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_0 h.} \quad (\text{K.12})$$

- (2) (a) Comme pour (K.9), on peut observer que la surface  $S(z)$  est une fonction quadratique (en carré) de  $z$ , puisque les longueurs sont linéaires en  $z$ .  $S(z)$  est nulle pour  $z = h$  et égale à  $S_0$  pour  $z = 0$  ; on a donc une formule analogue à l'équation (K.9) :

$$\boxed{\forall z \in [0, h], \quad S(z) = S_0 \left( \frac{h-z}{h} \right)^2.} \quad (\text{K.13})$$

Cette formule sera démontrée rigoureusement à la question 3.

- (b) Puisque (K.8) demeure valable, on conclue par un calcul similaire à (K.10) :

$$V = \int_0^h S(z) dz = S_0 \int_0^h \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 dz = S_0 h \int_0^1 u^2 du,$$

et on retrouve donc (K.12).

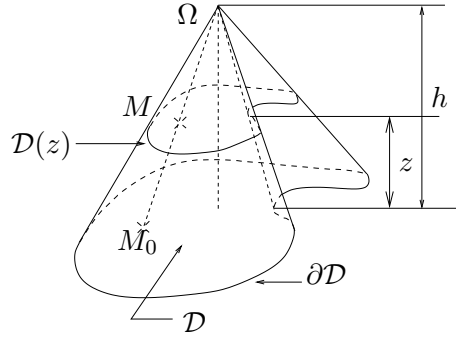


FIG. K.4. Un cône de contour  $\mathcal{D}$  et de hauteur  $h$  et les points  $M_0(x_0, y_0, 0)$  et  $M(x, y, z)$ .

(3)

À Chaque point  $M_0(x_0, y_0, 0)$  de la surface  $\mathcal{D}$ , on associe un point  $M(x, y, z)$  de la surface  $\mathcal{D}(z)$  grâce à

$$\overrightarrow{\Omega M_0} = \alpha(z) \overrightarrow{\Omega M}, \quad (\text{K.14})$$

où  $\alpha(z)$  est un réel (voir figure K.4).

(a) La troisième composante de l'équation (K.14) fournit

$$z_{M_0} - z_\Omega = \alpha(z)(z_M - z_\Omega),$$

et donc

$$-h = \alpha(z)(z - h),$$

soit

$$\boxed{\forall z \in [0, h[, \quad \alpha(z) = \frac{h}{h - z}.} \quad (\text{K.15})$$

(b) La première composante de l'équation (K.14) fournit

$$x_{M_0} - x_\Omega = \alpha(z)(x_M - x_\Omega),$$

soit

$$x_0 - x_\Omega = \alpha(z)(x - x_\Omega),$$

soit, compte tenu de (K.15),

$$x = \frac{h - z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega.$$

On raisonne de même pour  $y$  et on obtient

$$\forall z \in [0, h[, \quad \begin{cases} x = \frac{h - z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ y = \frac{h - z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{cases}$$

Puisque cette dernière équation est valable pour  $z = h$ , on a donc

$$\forall z \in [0, h], \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{h-z}{h}(x_0 - x_\Omega) + x_\Omega, \\ y = \frac{h-z}{h}(y_0 - y_\Omega) + y_\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{K.16})$$

- (c) Soit  $z$  fixé. On dispose donc d'une application  $\Psi$  de  $\mathcal{D}(z)$  dans  $\mathcal{D}$  qui à  $(x, y)$  associe  $(x_0, y_0)$ . On a  $\Psi(\mathcal{D}(z)) = \mathcal{D}$  et la formule de changement de variables nous donne donc

$$\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x, y)| dx dy. \quad (\text{K.17})$$

où  $J$  est le Jacobien de  $\Psi$ .

Il est défini par

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial x_0}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial y_0}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial y_0}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc calculer  $x_0$  et  $y_0$  en fonction de  $x$  et de  $y$  (ce qui n'est guère difficile) ; mais, il est plus rapide de remarquer que le Jacobien  $J$  est l'inverse du Jacobien de la fonction réciproque de  $\Psi$ . On a, selon (K.16),  $(x, y) = \Psi^{-1}(x_0, y_0)$  où  $x$  et  $y$  sont connus en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= \frac{h-z}{h}, \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= \frac{h-z}{h}, \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} &= 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{pmatrix} = \left( \frac{h-z}{h} \right)^2,$$

et en prenant l'inverse, il vient

$$J(x, y) = \left( \frac{h}{h-z} \right)^2. \quad (\text{K.18})$$

- (d) D'après (K.17) et (K.18), on a

$$\iint_{\mathcal{D}} dx_0 dy_0 = \iint_{\mathcal{D}(z)} |J(x, y)| dx dy = \iint_{\mathcal{D}(z)} \left( \frac{h}{h-z} \right)^2 dx dy,$$

c'est à dire

$$S_0 = \left( \frac{h}{h-z} \right)^2 S(z),$$



et donc

$$\boxed{S(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S_0.} \quad (\text{K.19})$$

On a donc démontré l'égalité (K.13).

## ANNEXE L

### Espaces vectoriels normés

Donnons quelques notions utiles pour les chapitres 4 et 7. On pourra aussi consulter [RDO76]. Dans toute cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel.

#### L.1. Définitions

DÉFINITION L.1 (Définition d'une norme). On appelle norme toute application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad N(\alpha x) = |\alpha| N(x) ; \quad (\text{L.1})$$

$$\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0 ; \quad (\text{L.2})$$

$$\forall x, y \in E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y). \quad (\text{L.3})$$

La norme  $N(x)$  sera systématiquement notée  $\|x\|$ . Puisqu'une norme est définie sur un espace vectoriel, on parle parfois de norme vectorielle.

L'espace vectoriel  $E$  muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

La propriété (L.3) est appelée l'inégalité triangulaire. On peut montrer la proposition suivante :

PROPOSITION L.2. Pour toute norme  $\|\cdot\|$ , on a

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\|. \quad (\text{L.4})$$

#### L.2. Continuité et boules

Grâce à la notion de norme, on peut définir la continuité :

DÉFINITION L.3 (Continuité). Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels normés (muni des normes respectives  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ ) et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est continue en  $x_0 \in E$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in E, \quad (\|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon). \quad (\text{L.5})$$

DÉFINITION L.4 (Boules). Pour  $r > 0$  et  $x \in E$ , on appelle la boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$\{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}, \quad (\text{L.6})$$

et si  $r \geq 0$ , on appelle la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$\{x \in E : \|x - x_0\| < r\}. \quad (\text{L.7})$$

### L.3. En dimension finie

PROPOSITION L.5. *Si  $E$  est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, c'est-à-dire, si  $\|\cdot\|_a$  et  $\|\cdot\|_b$  sont deux normes, alors il existe  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs tels que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a. \quad (\text{L.8})$$

PROPOSITION L.6. *Si  $E$  est de dimension finie, toutes les applications linéaires de  $E$  dans  $F$  sont continues.*

Si  $n$  est un entier non nul, sur  $\mathbb{R}^n$ , espace vectoriel de dimension finie, on définit les normes suivantes, très souvent employées :

DÉFINITION L.7. Pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (\text{L.9})$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (\text{L.10})$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (\text{L.11})$$

La norme  $\|\cdot\|_2$  est appelée norme euclidienne.

Dans tout ce cours, la norme  $\|\cdot\|_2$  utilisée en dimension finie sera notée systématiquement  $\|\cdot\|$ .

## Deux caractérisations du produit scalaire

On se place dans le cadre du chapitre 7.  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel et  $\|\cdot\|$  une norme de  $E$  (voir annexe L).

THÉORÈME M.1 (Théorème de caractérisation). *La norme  $\|\cdot\|$  est induite par un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(1) *L'application  $\theta$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par*

$$\forall x, y \in E, \quad \theta(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2, \quad (\text{M.1})$$

*est bilinéaire.*

(2) *L'application  $\theta$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par*

$$\forall x, y \in E, \quad \theta(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad (\text{M.2})$$

*est bilinéaire.*

*De plus, si la norme  $\|\cdot\|$  est induite par un produit scalaire, alors ce produit scalaire est nécessairement donné par l'une ou l'autre des formules suivantes :*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left( \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right), \quad (\text{M.3a})$$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left( \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right). \quad (\text{M.3b})$$

REMARQUE M.2. Les identités (M.3) ne sont autres que les identités de polarisation (7.6a) et (7.6b) du lemme 7.6 page 100 du chapitre 7.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME M.1. Si  $\|\cdot\|$  est induite par un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors d'après le lemme 7.6 page 100 du chapitre 7, l'application bilinéaire  $\theta$  de (M.1) vaut  $2 \langle \cdot, \cdot \rangle$  et est donc bilinéaire. De même bilinéaire  $\theta$  de (M.2) vaut  $4 \langle \cdot, \cdot \rangle$  et est donc bilinéaire. Ainsi, la condition nécessaire est montrée.

Supposons maintenant que le cas 1 est vrai (le cas 2 se traitant de la même façon). On considère  $\tilde{\theta}$  définie par  $\frac{1}{2}\theta$  qui est bilinéaire. Elle est clairement symétrique. Enfin, elle est définie positive car  $\tilde{\theta}(x, x) = \|x\|^2$ . On peut donc considérer le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \tilde{\theta}$  par définition, on a

$$\|x\| = \sqrt{\tilde{\theta}(x, x)} = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

et donc  $\|\cdot\|$  est bien induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

D'après la condition nécessaire, le produit scalaire induisant la norme ne peut être que celui-ci et donc (M.3) en découlent.

□

Donnons maintenant un résultat plus fort puisque la bilinéarité (M.1) ou (M.2) n'est plus à vérifier :

THÉOREME M.3 (Théorème de caractérisation (bis)). *La norme  $\|\cdot\|$  est induite par un produit scalaire si et seulement si elle vérifie la formule du parallélogramme (ou des médianes) (7.6c) page 100, rappelée ici :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (\text{M.4})$$

*De plus, dans ce cas, le produit scalaire est nécessairement donné par (M.3a) ou (M.3b).*

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est déjà prouvée grâce au lemme 7.6 page 100.

Démontrons maintenant la condition suffisante. On peut trouver cette preuve dans l'exercice corrigé 6.5.1 page 109 de [Mon91]. La preuve se fait en plusieurs étapes.

- On considère l'application  $\phi$  définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (\text{M.5})$$

Nous allons montrer que cette application est bilinéaire. D'après le théorème M.1, cela suffira à démontrer que la norme  $\|\cdot\|$  est induite par un produit scalaire et que le produit scalaire est donné par (M.3a) ou (M.3b). Il est clair que  $\phi$  est symétrique. Il suffit donc de démontrer qu'elle est linéaire par rapport à son premier argument, c'est-à-dire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, z \in E, \quad \phi(\lambda x, z) = \lambda \phi(x, z), \quad (\text{M.6a})$$

$$\forall u, v, z \in E, \quad \phi(u + v, z) = \phi(u, z) + \phi(v, z). \quad (\text{M.6b})$$

- D'après (M.4), on a

$$\forall x, y, z \in E, \quad \phi(x + y, z) + \phi(x - y, z) = 2\phi(x, z). \quad (\text{M.7})$$

En effet, on remplace dans (M.4),  $y$  successivement par  $y + z$  et par  $y - z$  ; on obtient

$$\|x - y - z\|^2 + \|x + y + z\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y + z\|^2),$$

$$\|x - y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y - z\|^2),$$

et, par différence, on obtient

$$\frac{1}{4} (\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2) + \frac{1}{4} (\|x - y - z\|^2 - \|x - y + z\|^2) = \frac{1}{2} (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2).$$

L'égalité (M.7) est alors obtenue en échangeant  $x$  et  $y$  dans cette dernière égalité.

- Nous avons aussi

$$\forall x \in E, \quad \phi(0, x) = \phi(x, 0) = 0, \quad (\text{M.8})$$

$$\forall y, z \in E, \quad \phi(-y, z) = -\phi(y, z). \quad (\text{M.9})$$

En effet, (M.8) provient de la définition de  $\phi$  (M.5) et (M.9) provient de (M.7) avec  $x = 0$  et de (M.8).

- En posant  $y = x$  dans (M.7), on obtient

$$\forall x, z \in E, \quad \phi(2x, z) = 2\phi(x, z). \quad (\text{M.10})$$

On réitère : en posant  $y = 2x$  dans (M.7), on obtient

$$\forall x, z \in E, \quad \phi(3x, z) = -\phi(-x, z) + 2\phi(x, z) = \phi(x, z) + 2\phi(x, z) = 3\phi(x, z).$$

Un récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, z \in E, \quad \phi(nx, z) = n\phi(x, z). \quad (\text{M.11})$$

En effet, (M.11) est vraie pour  $n = 0$ , selon (M.7). Supposons (M.11) vraie pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que (M.11) est vraie pour  $n + 1$ . Si on applique (M.7) avec  $y = nx$ , on obtient donc successivement :

$$\begin{aligned}\phi((n+1)x, z) &= -\phi(-(n-1)x, z) + 2\phi(x, z), \\ &= \phi((n-1)x, z) + 2\phi(x, z), \\ &= (n-1)\phi(x, z) + 2\phi(x, z), \\ &= (n+1)\phi(x, z).\end{aligned}$$

- Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  ; en remplaçant  $x$  par  $px/n$  dans (M.11), on obtient

$$\frac{1}{n}\phi(px, z) = \phi\left(\frac{px}{n}, z\right).$$

Et donc, d'après (M.11), on obtient

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \forall x, z \in E, \quad \phi\left(\frac{p}{n}x, z\right) = \frac{p}{n}\phi(x, z). \quad (\text{M.12})$$

D'après (M.9), on donc

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x, z \in E, \quad \phi(rx, z) = r\phi(x, z). \quad (\text{M.13})$$

- On sait que la norme  $\|\cdot\|$  est continue sur  $E$  (car c'est la définition de la topologie induite par la norme  $\|\cdot\|$  : voir annexe L). En particulier, l'application  $\phi$  est continue par rapport à son premier argument. Par ailleurs, tout réel est limite d'une suite de rationnels (autrement dit  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  : voir par exemple [RDO76]). Puisque (M.12) est vraie pour tout rationnel, on en déduit donc par continuité que (M.6a) est vraie.

REMARQUE M.4. Ce raisonnement est très classique : pour démontrer qu'un résultat est vrai pour tout réel  $x$ , on démontre qu'il est vrai pour tout entier, pour tout rationnel, puis pour tout réel si le résultat à démontrer est «continu par rapport à  $x$ ».

- Enfin, de (M.7), on déduit (M.6b) ; en effet,  $x = (u+v)/2$  et  $u = (u-v)/2$  dans (M.7) fournit, grâce à (M.10),

$$\phi(u, z) + \phi(v, z) = 2\phi\left(\frac{u+v}{2}, z\right) = \phi(u+v, z).$$

La linéarité est donc montrée.

□



## Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

THÉORÈME N.1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme induite  $\|\cdot\|$ . Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . Il existe une famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  orthogonale de  $E$  définie par

$$f_1 = e_1, \quad (N.1)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, \quad f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_j \rangle}{\|f_j\|^2} f_j. \quad (N.2)$$

La famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ . De plus, en posant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{f}_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}, \quad (N.3)$$

la famille  $(\tilde{f}_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormale (c'est-à-dire orthogonale et de norme 1)

DÉMONSTRATION. On renvoie par exemple à [AF88]. □

La construction se fait de proche en proche : grâce à (N.1), on connaît  $f_1 = e_1$ . Grâce à (N.2) avec  $i = 2$ , on en déduit  $f_2$  donné par

$$f_2 = e_2 - \sum_{j=1}^1 \frac{\langle e_2, f_j \rangle}{\|f_j\|^2} f_j = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1,$$

et ainsi de suite.

En général, on construit d'abord la famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ , qu'on norme éventuellement grâce à (N.3).

Ce moyen théorique, permet de construire des familles orthogonales «à la main» pour des petites valeurs de  $n$  mais n'est guère utilisé informatiquement pour des valeurs «grandes» de  $n$ , en raison d'instabilité numérique.





## ANNEXE O

### Réduction informatique de coniques et de quadriques

Soient un entier naturel  $n$  non nul et  $\mathbb{R}^n$  muni du repère affine  $(0, e_1, \dots, e_n)$  (où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ ).

Soient  $A$  une matrice symétrique réelle  $A$  de taille  $n$ ,  $b$  un vecteur colonne de taille  $n$  et  $c$  un réel. Soit l'application  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi(X) = {}^tXAX + {}^tbX + c. \quad (\text{O.1})$$

On étudie l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points de  $\mathbb{R}^n$  dont les coordonnées  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  vérifient l'équation

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi(X) = 0. \quad (\text{O.2})$$

Pour  $n = 2$ , (O.2) définit une conique et pour  $n = 3$ , (O.2) définit une quadrique.

On pourra supposer  $A$  non nulle (sinon l'équation (O.2) est celle d'un hyperplan affine).

La méthode de réduction de cette courbe ne dépend pas en fait de la dimension  $n$  de l'espace : nous la présentons donc pour  $n$  quelconque.

Nous étudions les deux cas, selon que  $A$  est inversible ou non.

On consultera le programme matlab `reduction_quadrique.m`, fondé sur ces calculs.

#### O.1. Étude dans le cas où $A$ est inversible

Nous allons procéder à deux changements de repère successifs pour donner simplifier la forme de (O.1).

##### O.1.1. Changement d'origine

On considère le point  $\Omega$  de coordonnées  $X_0$  dans le repère  $(0, e_1, \dots, e_n)$  et, pour tout point  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  de coordonnées  $X$  dans  $(0, e_1, \dots, e_n)$ , on considère  $Y$  les coordonnées de ce même point dans le repère  $(\Omega, e_1, \dots, e_n)$  ; on a la formule de changement de repère

$$X = Y + X_0. \quad (\text{O.3})$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= {}^tXAX + {}^tbX + c, \\ &= {}^t(Y + X_0)A(Y + X_0) + {}^tb(Y + X_0) + c, \\ &= {}^tYAY + (2{}^tX_0A + {}^tb)Y + {}^tX_0AX_0 + {}^tbX_0 + c. \end{aligned}$$

On cherche à annuler les termes en  $Y$  dans l'expression ci-dessus et on cherche donc  $X_0$  tel que

$$2{}^tX_0A + {}^tb = 0$$

ce qui est équivalent à

$$2AX_0 + b = 0,$$

et donc, puisque  $A$  est inversible,

$$X_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}b. \quad (\text{O.4})$$

Ainsi, l'équation de l'ensemble  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(\Omega, e_1, \dots, e_n)$  est

$${}^tYAY + e = 0 \quad (\text{O.5})$$

où  $e = {}^tX_0AX_0 + {}^tbX_0 + c$  Puisque  $AX_0 = -b/2$ , on a donc

$$e = \frac{1}{2}{}^tbX_0 + c. \quad (\text{O.6})$$

### O.1.2. Changement de vecteurs

Puisque la matrice  $A$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres : il existe  $D$  diagonale et  $P$  orthogonale telle que

$$A = PD^tP. \quad (\text{O.7})$$

On pose, pour tout  $Y$

$$Y = PZ. \quad (\text{O.8})$$

Cette formule est la formule de changement de base : si  $(u_1, \dots, u_n)$  désigne la base formée des vecteurs colonnes de la matrice  $P$ , alors si  $Y$  désigne les coordonnées d'un point  $M$  dans le repère  $(\Omega, e_1, \dots, e_n)$ , alors  $Z$  désigne les coordonnées de ce même point dans le repère  $(\Omega, u_1, \dots, u_n)$ . Ainsi, l'équation (O.5) s'écrit

$${}^tY(PD^tP)Y + e = 0,$$

ce qui est équivalent à

$${}^t({}^tPY)D^tPY + e = 0. \quad (\text{O.9})$$

Puisque  $D$  est diagonale, en posant

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (\text{O.10})$$

on a donc l'équation sous sa forme la plus simple :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 + e = 0. \quad (\text{O.11})$$

Puisque  $A$  est inversible, chacun des  $\lambda_i$  est non nul.

## O.2. Étude dans le cas où $A$ n'est pas inversible

Dans ce cas, on ne peut appliquer la formule (O.4) ; on changera d'ordre par rapport au premier cas : on commence tout d'abord par changer de vecteurs, puis on fera un changement (partiel) d'origine.

### O.2.1. Changement de vecteurs

L'égalité (O.7) est toujours valable et on pose, comme dans (O.8), pour tout  $X$

$$X = PY, \quad (\text{O.12})$$

où  $Y$  désigne les coordonnées du point  $M$  dans la base  $(O, u_1, \dots, u_n)$ , où  $(u_1, \dots, u_n)$  désigne la base formée des vecteurs colonnes de la matrice  $P$ . Ainsi, l'équation (O.2) s'écrit

$${}^tYDY + {}^tbPY + c = 0. \quad (\text{O.13})$$

### O.2.2. Changement d'origine

On définit de nouveau les  $\lambda_i$  par (O.10). Puisque  $A$  est non nulle et n'est pas inversible, un au moins des  $\lambda_i$  est nul et il ne sont pas tous nul. On définit donc  $I$  et  $J$  les deux sous-ensembles non vides de  $\{1, \dots, n\}$  par

$$\forall i \in I, \quad \lambda_i = 0, \quad (\text{O.14a})$$

$$\forall i \in J, \quad \lambda_i \neq 0. \quad (\text{O.14b})$$

Soient  $U$  et  $X_0 = {}^t(X_{0,1}, \dots, X_{0,n})$  les vecteurs colonne définis par

$$U = {}^tPb, \quad (\text{O.15})$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad X_{0,i} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in I, \\ -\frac{1}{2} \frac{U_i}{\lambda_i}, & \text{si } i \in J. \end{cases} \quad (\text{O.16})$$

On considère le point  $\Omega$  de coordonnées  $X_0$  dans le repère  $(0, u_1, \dots, u_n)$  et, pour tout point  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  de coordonnées  $Y$  dans  $(0, u_1, \dots, u_n)$ , on considère  $Z$  les coordonnées de ce même point dans le repère  $(\Omega, u_1, \dots, u_n)$ ; on a la formule de changement de repère

$$Y = Z + X_0. \quad (\text{O.17})$$

Comme précédemment, on écrit successivement

$$\begin{aligned} {}^tYDY + {}^tbPY + c &= {}^t(Z + X_0)D(Z + X_0) + {}^tbP(Z + X_0) + c, \\ &= {}^tZDZ + (2{}^tX_0D + {}^tbP)Z + {}^tX_0DX_0 + {}^tbPX_0 + c. \end{aligned}$$

On a

$$W = 2{}^tX_0D + {}^tbP = {}^t(2DX_0 + {}^tPb) = {}^t(2DX_0 + U),$$

et, donc pour tout  $i$ , la composante  $W_i$  de  $W$  est égale à

$$W_i = 2\lambda_i X_{0,i} + U_i.$$

D'après (O.16), on a donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad X_{0,i} = \begin{cases} U_i, & \text{si } i \in I, \\ 2\lambda_i \times \left(-\frac{1}{2} \frac{U_i}{\lambda_i}\right) + U_i = 0, & \text{si } i \in J. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$(2{}^tX_0D + {}^tbP)Z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^n U_i z_i.$$

On pose

$$e = {}^tX_0DX_0 + {}^tbPX_0 + c. \quad (\text{O.18})$$

L'équation de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(\Omega, u_1, \dots, u_n)$  s'écrit donc

$${}^tZDZ + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^n U_i z_i + e = 0.$$

Elle se découple sous la forme suivante

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \in J}}^n \lambda_i z_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^n U_i z_i + e = 0. \quad (\text{O.19})$$