



**HAL**  
open science

## Introduction aux systèmes dynamiques et chaos

Eric Goncalvès da Silva

► **To cite this version:**

Eric Goncalvès da Silva. Introduction aux systèmes dynamiques et chaos. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2004, pp.23. cel-00556972

**HAL Id: cel-00556972**

**<https://cel.hal.science/cel-00556972v1>**

Submitted on 18 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

INTRODUCTION AUX SYSTEMES  
DYNAMIQUES ET CHAOS

Eric Goncalvès - avril 2004

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques discrets - itérés d'une fonction</b>	<b>4</b>
2.1	Un exemple simple . . . . .	4
2.1.1	Premier cas . . . . .	4
2.1.2	Deuxième cas . . . . .	5
2.1.3	Dédoublment de période - les constantes de Feigenbaum . . . . .	6
2.1.4	Régime chaotique - attracteur étrange . . . . .	8
2.2	Le lemme de l'ombre . . . . .	8
2.3	Les attracteurs étranges . . . . .	9
2.4	Les exposants de Lyapounov . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Systèmes dynamiques continus - équation différentielle</b>	<b>11</b>
3.1	Bifurcation noeud-col . . . . .	12
3.2	Bifurcation fourche . . . . .	13
3.3	Bifurcation de Hopf . . . . .	14
3.4	Généralisation en dimension supérieure . . . . .	15
3.5	Un autre outil d'identification : les sections de Poincaré . . . . .	17
3.6	Exemple : l'attracteur de Lorenz . . . . .	17
3.6.1	Les équations du modèle . . . . .	17
3.6.2	Equilibres du modèle . . . . .	18
3.6.3	Stabilité de l'équilibre nul . . . . .	18
3.6.4	Stabilité des équilibres pour $r > 1$ . . . . .	18
	<b>Références</b>	<b>22</b>

# 1 Généralités

C'est le mathématicien Henri Poincaré qui, dès la fin du 19ème siècle, a mis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction. Maintenant la théorie du chaos est utilisée dans de très nombreux domaines : géophysique, météorologie, astronomie, turbulence, économie, sociologie, biologie...

Le chaos n'est pas aussi 'chaotique' que sa dénomination le laisse entendre ; son désordre n'est qu'apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit **déterministe** lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial, permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Le lien entre ces deux notions paradoxales, déterminisme et imprévisibilité, se manifeste par la sensibilité aux conditions initiales : deux conditions initiales quasiment semblables peuvent conduire à des états très différents du système. Cette impossibilité pratique à calculer l'évolution de systèmes déterministes est la principale caractéristique des systèmes chaotiques.

L'analyse de toutes sortes d'évolutions temporelles, appelées systèmes dynamiques, permet l'étude du chaos. L'état d'un système dynamique est décrit par un certain nombre de quantités dépendantes du temps :  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Au lieu d'étudier séparément ces  $n$  variables, il est préférable de représenter le système par un point unique dans un espace à  $n$  dimensions : **l'espace des phases**. Cette représentation permet de distinguer un comportement chaotique d'un comportement purement aléatoire.

Si le système dynamique est périodique, les points vont former une courbe fermée, on parle de cycle ou d'orbite périodique. Un mouvement régulier correspond à un diagramme simple, un attracteur.

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît.

Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière, qui présente une structure feuilletée (fractale). A cause de cette géométrie particulière, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges. Ils sont la signature du chaos.

Dans le cas où le système est décrit par une unique variable  $u(t)$ , on introduit un décalage temporel  $s$  en posant :  $x_1(t) = u(t), x_2(t) = u(t + s), \dots, x_n(t) = u[t + (n - 1)s]$ . C'est la méthode du délai temporel. Le délai  $s$  est un temps caractéristique du système : pour un délai plus court, le système n'a pas évolué ; pour un délai plus long, il a perdu la

mémoire de son état précédent.

Il est possible de quantifier l'ordre du chaos en déterminant la dimension de l'attracteur étrange, c'est-à-dire sa capacité à remplir une région donnée de l'espace des phases. Une méthode consiste à construire un espace des phases avec un petit nombre  $p$  de variables : si la dimension  $p$  de l'espace de construction est inférieure à celle de l'attracteur, on obtient une projection de la trajectoire. On augmente alors la dimension de l'espace de construction en ajoutant des variables. Si la dimension calculée du diagramme finit par saturer, c'est la signature d'un chaos et la valeur de saturation est la dimension fractale de l'attracteur. Si au contraire cette dimension croît avec la dimension de l'espace de construction, c'est que le système est aléatoire.

On peut aussi identifier le chaos à sa manière d'entrer en scène. On connaît trois grands scénarii de transition vers le chaos :

- le doublement de période

Ce phénomène se manifeste sur un oscillateur forcé. A mesure que la contrainte augmente, la période de l'oscillateur est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système est chaotique.

- l'intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de bruit, des spots. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées deviennent de plus en plus fréquentes et finalement le chaos apparaît.

- la quasi-périodicité

Ce phénomène intervient quand un deuxième oscillateur perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux oscillateurs en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. L'influence des deux oscillateurs l'un sur l'autre conduit à un dérèglement de leur mouvement.

Les propriétés du chaos ne dépendent pas du système où il apparaît : les attracteurs étranges, fragiles structures entre l'ordre et le désordre, et les nombres de Feigenbaum sont toujours présents. On parle de **structure universelle**.

## 2 Systèmes dynamiques discrets - itérés d'une fonction

La notion d'attracteur peut être mise en évidence à partir des itérations d'une fonction mathématique, c'est-à-dire le comportement de la suite  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  où  $f$  est une fonction particulière. La valeur initiale de  $x$  est appelée **germe**. Ce processus itératif permet de voir si une structure se dégage.

C'est à partir de systèmes discrets simples, étudiés notamment par le physicien Feigenbaum en 1975 (avec une simple calculatrice!), qu'une certaine "universalité" dans le comportement de systèmes dynamiques a été mise à jour.

### 2.1 Un exemple simple

Considérons la fonction  $f(x) = 4\lambda x(1-x)$  avec  $\lambda < 1$ . Et l'on considère la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec un germe  $u_0$  élément de l'intervalle  $[0,1]$ . Cette suite est un modèle simplifié de population. Pour un  $u_0$  petit, c'est-à-dire une faible population, la croissance au cours des années  $n$  est exponentielle. Pour un  $u_0$  grand, la population est plus importante pour un même espace et une même nourriture, elle aura donc tendance à décroître.

Le comportement de cette suite est pilotée par le paramètre  $\lambda$  et seulement par ce paramètre, la nature de la fonction importe peu. C'est ce qu'on appelle "une structure universelle". Introduisons quelques définitions :

- on appelle **orbite** de  $f$  l'ensemble des itérés de  $f$  pour un germe donné :  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ .
- on dit que  $f$  possède un **cycle d'ordre  $p$**  ou **p-cycle** si il existe un germe  $x_0$  tel que les itérés de  $f$  reviennent à cette valeur de départ au bout de  $p$  itérations.
- on dit que la suite  $(u_n)$  tend vers un cycle d'ordre  $p$  ou qu'un cycle est **attractif** quand  $f$  admet un  $p$ -cycle et que, pour tout  $i < p$ ,  $(u_{n.p+i})$  converge.

#### 2.1.1 Premier cas

Prenons la valeur  $\lambda = 0,7$ . On obtient la parabole :  $f(x) = 2,8x(1-x)$ .

On sait que, selon la valeur du germe  $u_0$ , la suite converge vers l'un des deux points fixes de  $f$ , à savoir  $x = 0$  ou  $x = x^* = 9/14 \simeq 0,643$ . Si  $u_0 = 0$ , la suite reste nulle et si  $u_0$  est non nul, l'orbite tend vers  $x^*$ . Ce dernier "attire" les valeurs itérées de la fonction  $f$ , c'est un **point fixe attracteur** ou point fixe stable. A l'opposé, 0 est un point fixe répulsif ou instable.

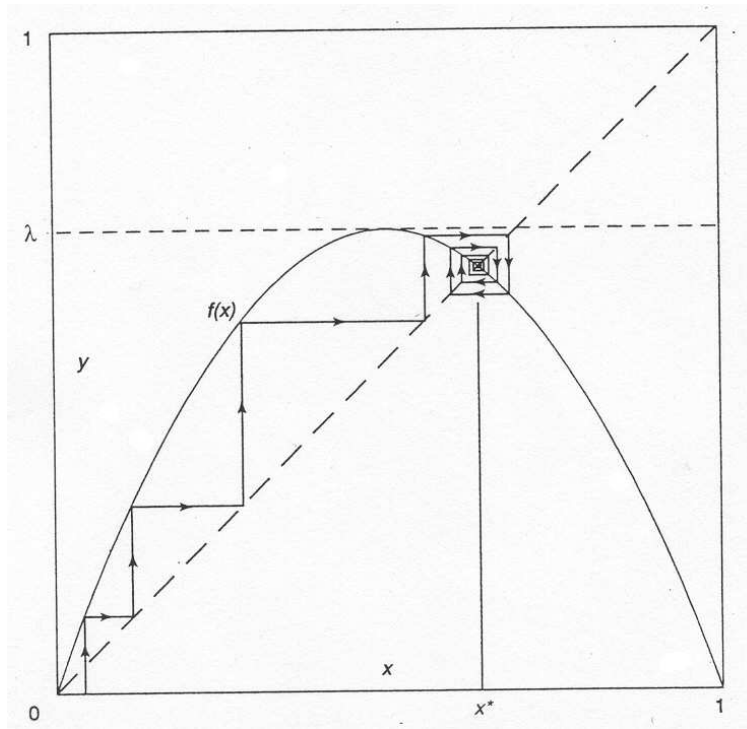


FIG. 1 – Convergence vers un attracteur ponctuel

Le critère de stabilité d'un point fixe est simple :  $|f'(x)| < 1$ . On vérifie facilement que  $|f'(x^*)| < 1$ . Lorsque l'on augmente la valeur du paramètre  $\lambda$ , la position du point fixe  $x^*$  change ainsi que la dérivée  $f'(x^*)$ . Il existe un  $\lambda$  critique, noté  $\Lambda_1$ , pour lequel le critère de stabilité n'est plus vérifié. Cette valeur critique est égale à  $3/4$ .

### 2.1.2 Deuxième cas

Prenons maintenant  $\lambda = 0,785 > \Lambda_1 = 0,75$ .

Avec un germe non nul, on observe que l'orbite se déplace dans le voisinage du point fixe  $x^*$  de  $f$  en oscillant entre deux valeurs  $x_1^*$  et  $x_2^*$ . On a ainsi un cycle d'ordre 2 et la paire de valeurs  $(x_1^*, x_2^*)$  est encore appelé un attracteur (on parlera d'attracteur de période 2). Ce cycle d'ordre 2 est attractif ou stable : il attire les valeurs de  $f$  au fur et à mesure que  $f$  est itéré. L'orbite pour n'importe quelle valeur positive du germe différente de  $x^*$  va s'approcher asymptotiquement du cycle d'ordre 2 composé des points  $x_1^*$  et  $x_2^*$ , mais ne les atteindra jamais.

Les points  $x_1^*$  et  $x_2^*$  sont les points fixes de la fonction  $g(x) = f(f(x))$ . Le critère de stabilité d'un cycle d'ordre 2 est que le nombre dérivée en ces deux points soit inférieur à 1 en valeur absolue :  $|f'(x_1^*)| < 1$  et  $|f'(x_2^*)| < 1$

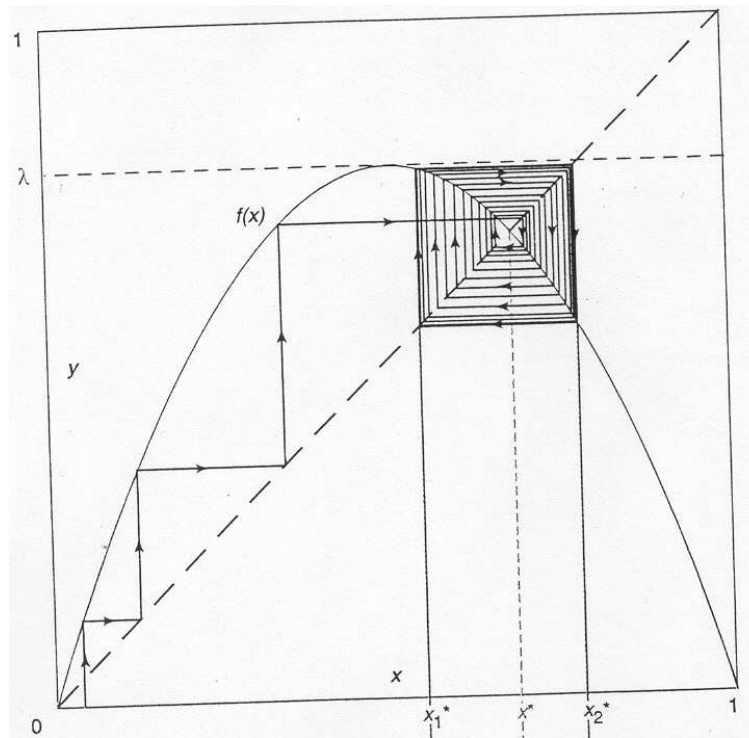


FIG. 2 – Convergence vers un cycle d'ordre 2

### 2.1.3 Dédoublément de période - les constantes de Feigenbaum

Nous avons vu un attracteur de période 1 se transformer en un attracteur de période 2 pour une valeur déterminée du paramètre  $\lambda$ . Le point fixe unique  $x^*$  se dédouble en deux valeurs  $x_1^*$  et  $x_2^*$ .

Cet accroissement de  $\lambda$  entraîne une croissance de la pente de la fonction  $g$  en ces deux points fixes stables, jusqu'à ce que, pour une certaine valeur de  $\lambda$  (lorsque les nombres dérivés dépassent 1 en valeur absolue), la fonction  $g$ , comme son géniteur  $f$  atteigne son point de rupture. Alors chacun de ces deux points attractifs explose en engendrant son propre cycle d'ordre 2 pour la fonction  $g$ . Pour la fonction  $f$ , c'est un cycle attractif d'ordre 4 et le cycle d'ordre 2 devient répulsif. Cette valeur du paramètre  $\lambda$ , notée  $\Lambda_2$ , est égale à 0,86237...

Pour une nouvelle valeur  $\Lambda_3$ , les quatre points de l'attracteur de  $f$  se dédoubleront pour engendrer un attracteur à 8 points. Et, par la suite, cette structure va évoluer en se dédoublant à chaque fois qu'une valeur déterminée du paramètre  $\lambda$  sera atteinte puis dépassée. On passe ainsi d'un cycle d'ordre  $p$  à un cycle d'ordre  $2p$ , on dit qu'il se produit une **bifurcation**.



On a indiqué sur la figure (3) les positions des points fixes stables de  $f$  de  $\Lambda_1$  jusqu'à  $\Lambda_6$  (les paramètres de bifurcation de  $f$ ). On observe une structure ordonnée de la distribution des points attracteurs. Chaque ligne se déduit de la précédente par une construction récurrente qui consiste à remplacer chaque point par deux points "jumeaux" en dessous. La structure de chaque amas local de points est similaire à celle de l'amas global, mais à une échelle plus petite (mais avec une inversion de la droite et la gauche). Par exemple, dans la ligne du bas, un groupe local de huit points a été encadré : ce groupe de points est une version miniature de la structure globale, deux lignes au-dessus. On parle de **fractal**, baptisé par Benoît Mandelbrot, dont l'une des caractéristiques est l'auto-similarité.

Cette régularité mise en évidence par Feigenbaum stipule que pour construire la ligne  $n + 1$  à partir de la ligne  $n$ , il suffit que chaque point sur la ligne  $n$  donne naissance à des jumeaux. La nouvelle génération de points est comprimée environ 2,5 fois plus que l'ancienne génération. Plus exactement la distance entre les nouveaux jumeaux est  $\alpha$  fois plus petite que la distance entre leur géniteur et son jumeau. Cette constante  $\alpha$ , l'une des constantes de Feigenbaum, est égale à 2,50290787509... Cette règle s'applique d'autant mieux que  $n$  est grand.

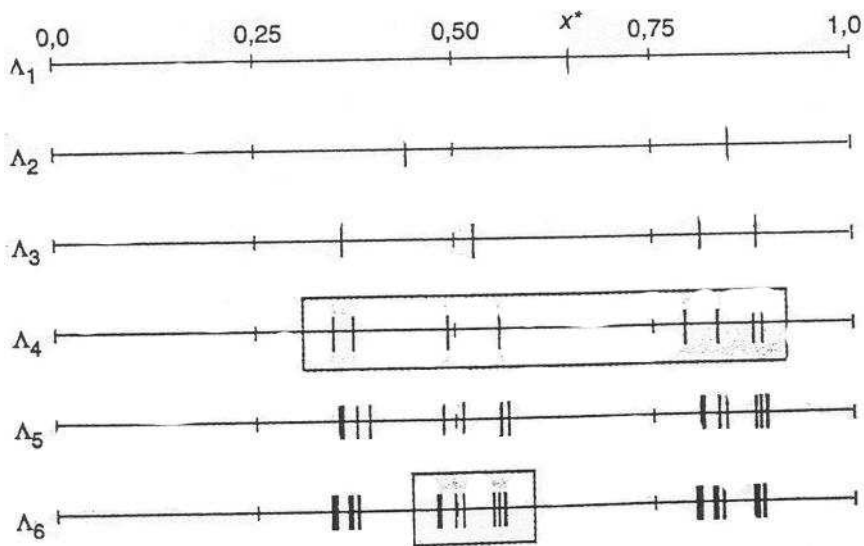


FIG. 3 – Les paramètres de bifurcation

D'autre part, les valeurs  $\Lambda$  convergent vers une valeur critique  $\lambda_c$  qui vaut 0,892486418... Cette convergence est remarquablement régulière au sens où l'écart entre les valeurs successives de  $\Lambda$  diminue de façon géométrique : le rapport  $\frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}$  tend vers une valeur  $\delta$  constante. C'est la deuxième constante de Feigenbaum qui vaut 4,66920166091...

En résumé, à mesure que  $\lambda$  s'approche de  $\lambda_c$ , à des valeurs déterminées par la constante  $\delta$ , les attracteurs de  $f$  se dédoublent et le nombre croissant de ces attracteurs s'arrange géométriquement sur un axe selon une règle récurrente dont le paramètre est  $\alpha$ .

#### 2.1.4 Régime chaotique - attracteur étrange

Pour des valeurs de  $\lambda$  supérieur à la valeur critique  $\lambda_c$ , on pénètre dans le régime chaotique : le résultat de l'itération de  $f$  pour certaines valeurs du germe conduit à une orbite qui ne converge vers aucun attracteur usuel. L'attracteur obtenu est dense dans une réunion de sous-intervalles de  $]0,1[$  (dans tout sous-intervalle, il existe au moins un point périodique, c'est-à-dire dont l'orbite est un ensemble fini), c'est un **attracteur étrange**. Pour la plupart des germes, l'orbite reste périodique, mais la périodicité est difficile à détecter. De plus, des germes très voisins peuvent conduire, après un petit nombre d'itérations, à des orbites complètement différentes, c'est la sensibilité aux conditions initiales.

La figure (4) tracée dans le plan  $(x, \lambda)$  est appelée **diagramme de bifurcation**. Elle montre la cascade de dédoublement et l'apparition du chaos quand le paramètre  $\lambda$  augmente. Le régime chaotique est caractérisé par des bandes.

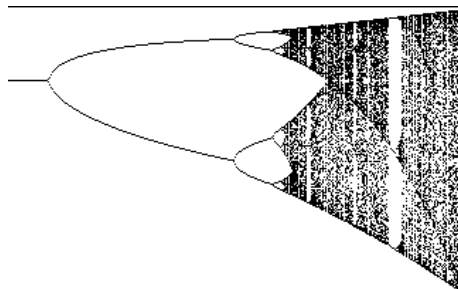


FIG. 4 – Le diagramme bifurcation

On constate aussi qu'il existe des valeurs de  $\lambda > \lambda_c$  pour lesquelles le comportement chaotique cesse brusquement, l'attracteur prenant de nouveau la forme d'un cycle périodique.

## 2.2 Le lemme de l'ombre

Un aspect important concerne la pertinence d'effectuer des calculs d'orbites d'un système dynamique chaotique au moyen de l'outil informatique. En effet, la question se pose lorsque l'on sait que, d'une part les machines de calcul ont une précision limitée, et que

d'autre part la moindre erreur sur une valeur fait dévier complètement l'orbite, et ce de façon imprévisible!

La réponse est surprenante : il est vrai que toute orbite calculée est fondamentalement fautive (et ce très rapidement), mais cependant quelque soit cette orbite fautive, il existe une orbite réelle aussi proche que l'on veut de cette orbite fautive! Ce résultat paradoxal s'appelle **le lemme de l'ombre**. Ainsi, pour l'étude d'un système chaotique, le lemme de l'ombre justifie les calculs informatiques que l'on peut faire. Il faut toutefois garder à l'esprit que pour un germe  $u_0$  donné, le nombre que la machine donne pour  $u_{100}$  peut être n'importe quoi, et en tout cas il est certainement sans rapport avec  $f^{[100]}(u_0)$ .

### 2.3 Les attracteurs étranges

Une "définition" d'un attracteur étrange peut être formulée ainsi : un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace est un attracteur étrange pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $R$  de  $A$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Attraction  
 $R$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $R$  est entièrement contenue dans  $R$ . De plus, toute orbite devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
- Sensibilité  
Les orbites dont le point initial est dans  $R$  sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.
- Fractal  
 $A$  est un objet fractal.
- Mélange  
Pour tout point de  $A$ , il existe des orbites démarrées dans  $R$  qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

### 2.4 Les exposants de Lyapounov

Les exposants de Lyapunov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange. Autrement dit, nous allons exposer comment calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

## Exposant pour une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique discret faisant intervenir une application  $f$  et deux conditions initiales très proches,  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon_0$ .

La première itération conduit à :  $x_1 + \varepsilon_1 = f(x_0) + \left(\frac{df(x_0)}{dx}\right) \varepsilon_0$

d'où l'on déduit :  $\varepsilon_1 = \frac{df(x_0)}{dx} \varepsilon_0$ .

Après  $n$  itérations, il vient :

$$\varepsilon_n = \left(\frac{df^n(x_0)}{dx}\right) \varepsilon_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx}\right) \varepsilon_0$$

Les termes  $\left(\frac{df^n(x_0)}{dx}\right)^{1/n}$  caractérisent la divergence. On définit alors **l'exposant de Lyapounov** par :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

Un exposant positif indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange.

Il est possible d'étendre cette définition à une dimension plus élevée d'espace des phases. Pour un espace de dimension  $p$ , il y a  $p$  exposants de Lyapounov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Ils sont définis à partir de la matrice jacobienne de l'application  $f$  au point  $x_0$  et de ses valeurs propres.

### 3 Systèmes dynamiques continus - équation différentielle

Un système dynamique discret est défini par itération successive d'une fonction  $f$ . Un système dynamique continu est quant à lui défini par une équation différentielle du premier ordre (EDP parabolique ou équation différentielle ordinaire) où le temps est la variable décrivant l'évolution du système :  $x'(t) = f(x(t), t)$  avec une condition initiale  $x(t_0) = x_0$

La donnée d'une condition initiale définit une unique solution qui est une courbe de l'espace. Une orbite devient une courbe continue et un attracteur étrange est un "objet" de l'espace que la courbe solution approche de plus en plus près (au même titre qu'une orbite composée d'un nombre dénombrables de points pour un système discret). Les points fixes seront des courbes périodiques.

L'étude des systèmes dont on ne connaît pas de solutions analytiques passent par la résolution numérique des équations différentielles avec des méthodes de type Euler ou Runge-Kutta.

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de **bifurcation**. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation.

Une première approche pour l'étude de ces systèmes consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre.

L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système. On regarde alors ce que deviennent les points d'équilibres, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent.

La démarche pour étudier des systèmes dynamiques continus est la suivante :

- Recherche des points d'équilibre, c'est-à-dire les points où  $x'(t) = 0$ .
- Etude de la stabilité des points d'équilibre  
Une fois les points d'équilibre déterminés, il faut étudier leur stabilité, c'est-à-dire comment une faible perturbation en ces points influence-t-elle l'évolution du système.
- Diagramme de bifurcation  
Ce diagramme résume toute l'information sur la bifurcation et permet comprendre de ce fait comment évolue le système.

De façon générale, toutes les déstabilisations d'un système se ramènent à trois types de bifurcations génériques (cependant il existe des cas particuliers rares) que nous allons présenter sur trois cas simples monodimensionnels :

- **bifurcation noeud-col** (ou saddle node)
- **bifurcation fourche** (ou pitchfork)
- **bifurcation de Hopf**

### 3.1 Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation associée à l'équation :  $x'(t) = f(x(t)) = \mu + \alpha x^2(t)$

avec  $\alpha$  et  $\mu$  les paramètres de contrôle.

Supposons  $\alpha > 0$  (on parle de bifurcation sous-critique). Pour un paramètre  $\mu$  négatif, il y a deux points d'équilibres, racines de  $\mu + \alpha x^2 = 0$ . Si  $\mu > 0$ , il n'y a aucun point fixe.

Etudions la stabilité des points d'équilibres dans le cas où  $\mu > 0$ . Notons  $x^*$  l'un des deux points d'équilibre, on a donc  $f(x^*) = 0$ . On introduit une petite perturbation  $u(t)$  ajouté au point fixe :  $x(t) = x^* + u(t)$ . Puis nous effectuons un développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 1 au voisinage de  $x^*$  :

$$x'(t) = u'(t) = f(x^* + u) = f'(x^*) u(t) + \mathcal{O}(u^2)$$

En posant  $\lambda = f'(x^*)$ , l'équation différentielle obtenue  $u' = \lambda u$  s'intègre en  $u(t) = u(0)e^{\lambda t}$ . L'étude de la stabilité est simple : si  $\lambda > 0$  alors le point d'équilibre est instable et si  $\lambda < 0$  alors le point est stable. Ainsi la stabilité des points d'équilibre dépend de la pente de la fonction  $f$  des points considérés.

Toute l'information peut se résumer sur le diagramme de bifurcation dans le plan  $(x, \mu)$ . En pointillé, le point fixe est instable et en trait plein il est stable.

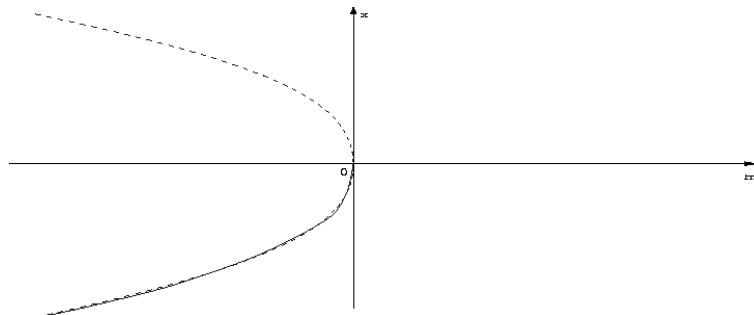


FIG. 5 – Diagramme de la bifurcation noeud-col

Supposons que l'on ait un potentiomètre qui permette de faire varier le paramètre  $\mu$ . Au départ, le système est placé sur une valeur de  $\mu$  négative. L'équation du système dynamique admet alors deux points d'équilibre : l'un est stable (attracteur), l'autre est instable. Faisant tendre  $\mu$  vers 0 sans l'atteindre, on constate que les deux points fixes se rapprochent. Pour  $\mu=0$ , ils fusionnent en un seul point fixe dit semi-stable. Il y a donc perte du point attracteur, le système s'est déstabilisé. Puis lorsque  $\mu$  devient strictement positif, il y a disparition de tout point fixe.

Si  $\alpha < 0$  (on parle de bifurcation super-critique), l'étude est symétrique.

### 3.2 Bifurcation fourche

C'est la bifurcation associée à l'équation :  $x'(t) = f(x(t)) = \mu x + \alpha x^3(t)$  avec  $\alpha$  et  $\mu$  les paramètres de contrôle. On supposera  $\alpha < 0$  (cas super-critique).

En appliquant la méthode utilisée pour la première bifurcation, nous présentons directement le diagramme de bifurcation dans le plan  $(x, \mu)$  :

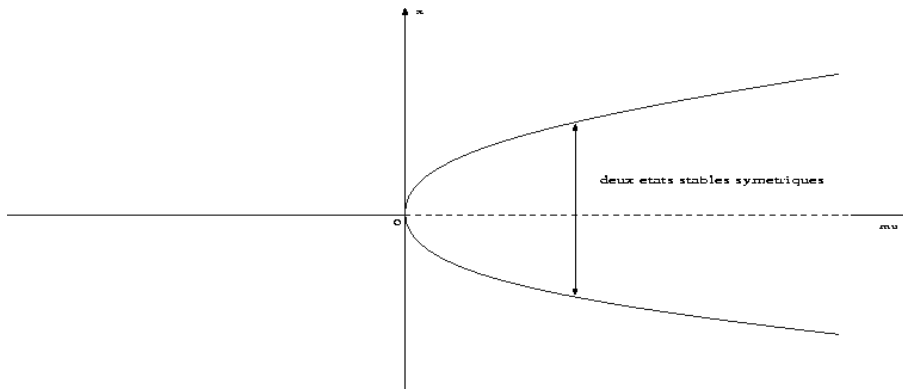


FIG. 6 – Diagramme de la bifurcation fourche

Nous partons d'un système où le paramètre  $\mu$  est négatif. Le système possède alors un point d'équilibre stable ( $x = 0$ ) attracteur. Lorsque nous faisons augmenter progressivement  $\mu$  jusqu'à la valeur 0, le système se déstabilise, le point d'équilibre perd sa stabilité, il y a bifurcation. Augmentant encore  $\mu$ , on voit apparaître alors deux points d'équilibres stables. Il existe une symétrie de centre 0 des solutions, si  $x(t)$  est solution du système alors  $-x(t)$  en est une aussi. Il y a dédoublement du point d'équilibre (cf. le dédoublement de période pour les systèmes dynamiques discrets).

### 3.3 Bifurcation de Hopf

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plan complexe :

$$z'(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega) z(t) - |z|^2 z(t)$$

Pour étudier cette équation, on écrit la variable  $z$  sous la forme  $z(t) = x(t)e^{i\theta(t)}$ . L'équation s'exprime sous forme d'un système :

$$\begin{aligned}x' &= \mu x - x^3 \\ \theta' &= \omega\end{aligned}$$

La première équation n'est autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle  $\mu$ .

Le diagramme de bifurcation dans l'espace  $(Re(z), Im(z), \mu)$  est le suivant :

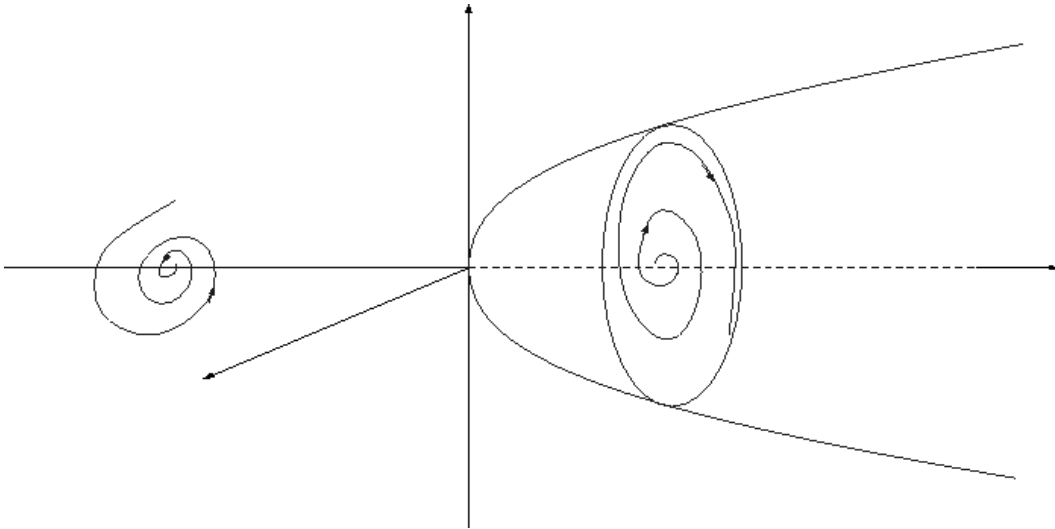


FIG. 7 – Diagramme de la bifurcation de Hopf

Nous partons d'un système où le paramètre  $\mu$  est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque  $\mu = 0$ , ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque  $\mu > 0$ , il se forme alors une trajectoire périodique stable ou **cycle limite**.

La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.



### 3.4 Généralisation en dimension supérieure

Nous présentons l'étude des bifurcations en dimension supérieure ou égale à deux. Il s'agit d'une généralisation de l'étude des trois bifurcations présentées précédemment. Prenons comme exemple une équation dans un espace des phases de dimension 3. Soit  $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  un vecteur vérifiant l'équation  $X' = F(X)$ . La démarche est toujours la même : recherche des points d'équilibre, étude de la stabilité de ces points et diagramme de bifurcation.

On commence par chercher les points  $X^*$  tels que  $F(X^*) = 0$ . L'étude de la stabilité s'effectue en introduisant une perturbation vectorielle  $U = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  au voisinage de  $X^*$ . Puis on utilise un développement de Taylor de  $F$  à l'ordre 1 :

$$X' = U' = F(X^* + U) = A.U + \mathcal{O}(U^2)$$

où  $A$  désigne la matrice jacobienne de  $F$  évaluée en  $X^*$ . Nous supposons dans un premier temps que la matrice  $A$  est diagonalisable : son polynôme caractéristique associé possède alors trois racines non nulles, dont l'une est réelle, et les deux autres sont soit réelles, soit complexes conjuguées. Notons  $\lambda_k = \rho_k + i\omega_k$  les valeurs propres de  $A$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

Ainsi chaque composante  $u_k$  vérifient l'équation  $u_k' = \lambda_k u_k$ , qui admet des solutions du type  $u_k(t) = u_k(0) e^{\lambda_k t}$ .

Comme  $|e^{\lambda_k t}| = |e^{\rho_k t}|$ , on a alors les deux cas suivants :

- si  $\rho_k < 0$ , le point d'équilibre est stable dans la direction du vecteur propre associé à  $\lambda_k$ .
- si  $\rho_k > 0$ , le point est instable dans la direction du vecteur propre associé à  $\lambda_k$ .

On se ramène pour chaque direction propre aux cas précédemment étudiés.

Plaçons nous dans le cas où il y a une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées. La représentation des valeurs propres de la matrice jacobienne  $A$  dans le plan complexe permet d'étudier le comportement du système. Deux cas se présentent alors :

- Soit le système se déstabilise par passage de l'axe des ordonnées de la valeur propre réelle.  
Il y a deux sous-cas :
  - soit il y a eu une brisure de symétrie dans l'évolution du système, c'est une bifurcation fourche.
  - soit il n'y a pas eu brisure de symétrie et c'est une bifurcation noeud-col

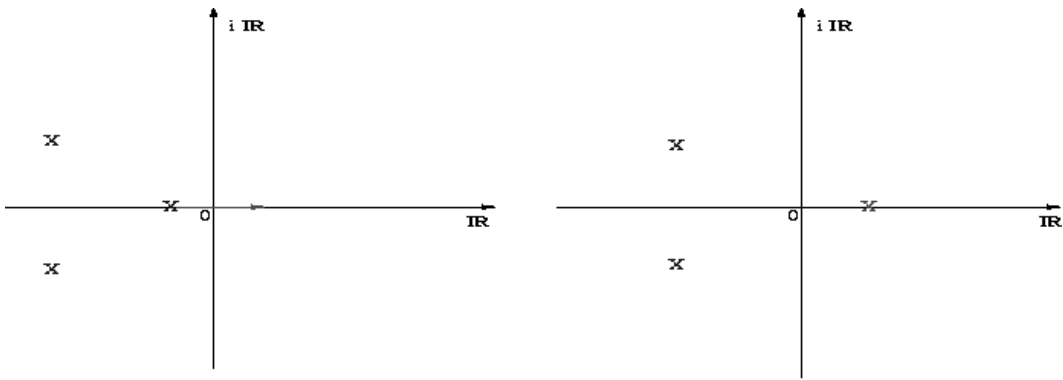


FIG. 8 – Déstabilisation par passage d'une valeur propre réelle

- Soit le système se déstabilise par passage de l'axe des ordonnées des deux valeurs propres complexes conjuguées. Il y a alors eu une bifurcation de Hopf.

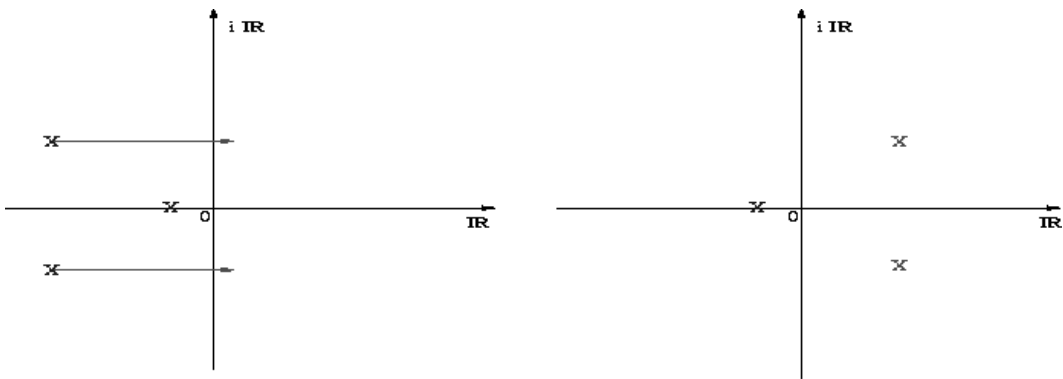


FIG. 9 – Déstabilisation par passage de deux valeurs propres complexes conjuguées

Ainsi, à une bifurcation correspond un changement de stabilité du système s'accompagnant d'un changement du nombre d'attracteurs :

- soit un attracteur disparaît : c'est le cas par exemple de la bifurcation noeud-col, où le système se déstabilise par perte de son point attracteur, lorsque celui-ci fusionne avec le point fixe instable.
- soit au contraire il apparaît un nouveau type d'attracteur : c'est le cas de la bifurcation de Hopf où le point fixe dégénère en un cycle limite.

### 3.5 Un autre outil d'identification : les sections de Poincaré

Elles permettent de caractériser des types de trajectoire dans l'espace des phases de dimension  $n$ . Le principe consiste à se ramener à une étude dans  $\mathcal{R}^2$  par intersection de la trajectoire dans  $\mathcal{R}^n$ . On remplace l'étude du système continu  $X' = F(X)$  dans  $\mathcal{R}^n$  par celle :

- de l'application ponctuelle  $T$  dans  $\mathcal{R}^2$  définie ainsi :  $M_{k+1} = T(M_k)$  où  $M_k$  est le  $k$ -ième point d'intersection de la trajectoire avec le plan de coupe.
- ou de l'application  $g$  dite de **premier retour** définie ainsi :  $x_{k+1} = g(x_k)$  où  $x_k$  est l'abscisse du  $k$ -ième point d'intersection de la trajectoire avec le plan de coupe.

Les cas typiques observés :

- la solution est périodique dans  $\mathcal{R}^n$  (c'est un cycle limite) : la section de Poincaré est un point.
- la solution est quasi-périodique à deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . On distingue deux cas selon que le rapport  $r = f_1/f_2$  est rationnel ou pas :
  - si  $r$  n'est pas rationnel : la section de Poincaré est une courbe fermée.
  - si  $r$  est rationnel : la section de Poincaré se compose de quelques points.
- la solution est aperiodique : la section de Poincaré est un nuage de points.

### 3.6 Exemple : l'attracteur de Lorenz

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère (obtenu à partir des équations de Navier-Stokes). C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres.

#### 3.6.1 Les équations du modèle

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\y' &= rx - y - xz \\z' &= xy - bz\end{aligned}$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de  $\sigma$  et  $b$  sont fixées, respectivement à 10 et 8/3. La paramètre de contrôle est  $r$  qui est positif. Physiquement,  $r$  est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide,  $\sigma$  au nombre de Prandtl et  $b$  à l'élongation de la boîte contenant le fluide.

La solution triviale  $x = y = z = 0$  du système correspond physiquement à un régime où le fluide est au repos et où la chaleur se transmet uniquement par diffusion moléculaire (état conductif). Pour  $r$  grand, cet équilibre est instable et il laisse la place à des régimes où le transfert de chaleur est réalisé par diffusion et par convection.

### 3.6.2 Equilibres du modèle

On cherche les points d'équilibre  $(x, y, z)$  vérifiant  $x' = y' = z' = 0$ . Pour  $r < 1$ , il n'y a qu'un seul point d'équilibre, l'origine  $(0, 0, 0)$ . Et, pour  $r > 1$ , il y a deux autres points :  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  et  $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ .

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne  $A$  obtenue en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre. L'expression de la matrice jacobienne  $A$  du système est :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

### 3.6.3 Stabilité de l'équilibre nul

Au point  $(0, 0, 0)$ , les valeurs propres  $\lambda$  de la jacobienne  $A$

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

sont solutions de l'équation suivante :

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

Pour  $r < 1$ , il y a trois racines réelles négatives, l'équilibre est donc stable.

Pour  $r > 1$ , une des valeurs propres est positive : l'équilibre est donc instable. Il y a une bifurcation quand  $r = 1$  : c'est une bifurcation fourche créant les deux autres points d'équilibre.

En  $r = 1$ , l'équilibre est dit marginal.

### 3.6.4 Stabilité des équilibres pour $r > 1$

Pour les deux autres points d'équilibre, les valeurs propres de la jacobienne sont solutions de l'équation en  $\lambda$  :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Selon les valeurs du paramètre  $r$ , ce polynôme de degré trois peut avoir trois racines réelles négatives (les équilibres sont donc stables) ou bien une racine réelle et deux racines

complexes conjuguées.

On peut chercher s'il existe une valeur critique de  $r$  pour laquelle les équilibres deviennent instables. La déstabilisation de ces équilibres par changement de signe d'un valeur propre réelle est impossible car si  $\lambda = 0$  on a forcément  $r = 1$ . On peut donc rechercher pour quelles valeurs de  $r$  on peut obtenir deux racines  $i\omega$  et  $-i\omega$  de partie réelle nulle. En reportant la valeur  $\lambda = i\omega$  dans l'équation, on obtient les deux conditions :

$$\begin{aligned} -\omega^2(\sigma + b + 1) + 2b(r - 1)\sigma &= 0 \\ -i\omega^3 + i\omega b(\sigma + r) &= 0 \end{aligned}$$

L'élimination de  $\omega^2$  entre les deux équations permet d'obtenir la valeur  $r_c$  critique :

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}$$

Pour les valeurs  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ , la valeur critique est  $r_c = 470/19 \simeq 24,73$ .

La déstabilisation des équilibres correspond à une bifurcation de Hopf. Deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre  $r$  franchit la valeur critique  $r_c$ .

Lorsque  $r > r_c$ , le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour d'un des deux équilibres instables comme si elle y convergeait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement. Toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire chaotique : l'attracteur étrange. On montre que la distance entre deux conditions initiales très proches s'amplifie très rapidement. Cette sensibilité aux conditions initiales, ainsi que le chaos déterministe observé avec ce système dynamique simple, ont servi de base à ce que l'on appelle "l'effet papillon".

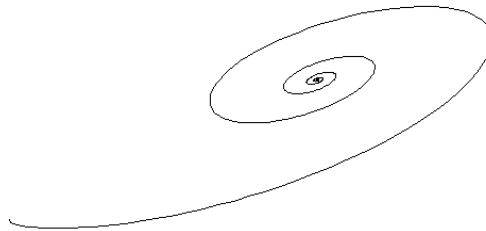


FIG. 10 – Modèle de Lorenz -  $r = 5$

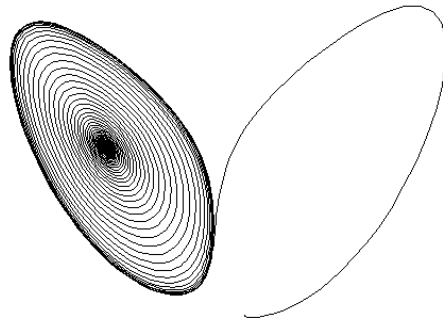


FIG. 11 – Modèle de Lorenz -  $r = 10$

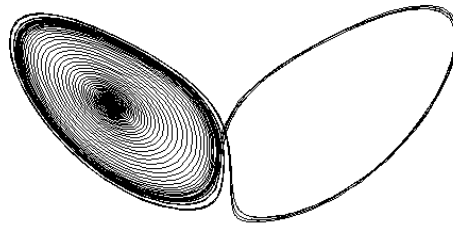


FIG. 12 – Modèle de Lorenz -  $r = 15$

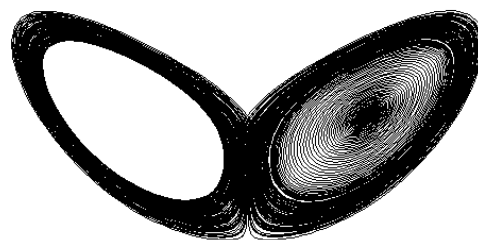


FIG. 13 – Modèle de Lorenz -  $r = 20$

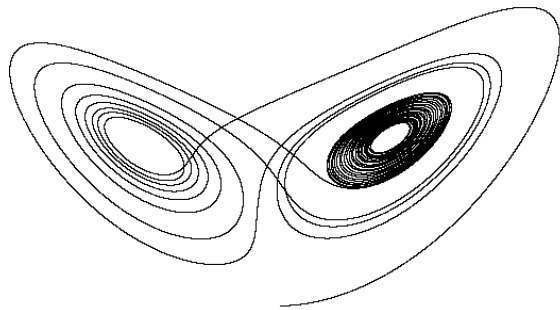


FIG. 14 – Modèle de Lorenz -  $r = 24$

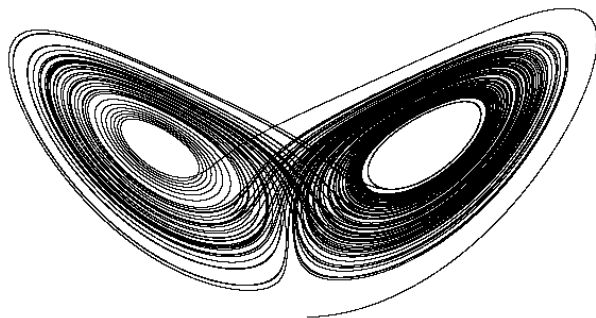


FIG. 15 – Modèle de Lorenz -  $r = 26$

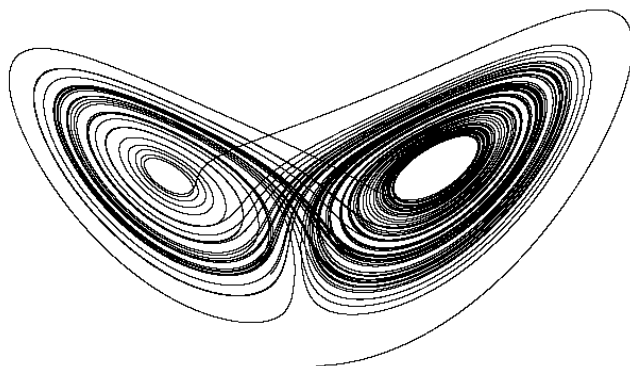


FIG. 16 – Modèle de Lorenz -  $r = 28$

## Références

- [1] Le chaos. Pour la Science, hors-série, janvier 1995.
- [2] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. L'ordre dans le chaos. Hermann, 1988.
- [3] J.P. Delahaye. Information, complexité et hasard. Editions Hermes, Paris, 1994.
- [4] M.J. Feigenbaum. Universal behaviour in nonlinear systems. *Los Alamos Science*, pages 4-27, 1980.
- [5] J. Gleick. La théorie du chaos. Albin Michel, 1989.
- [6] E.N. Lorenz. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 :130, 1963.
- [7] D. Ruelle. Hasard et chaos. Editions Odile Jacob, Sciences, Paris, 1991.
- [8] I. Stewart. Dieu joue-t-il aux dés, les mathématiques du chaos. Flammarion, 1992.