HAL
open science

Méthodes numériques avancées pour la résolution des équations aux dérivées partielles

Pierre Saramito

To cite this version:

Pierre Saramito. Méthodes numériques avancées pour la résolution des équations aux dérivées partielles. DEA. Grenoble, France, 2006, pp.46. cel-00573974

HAL Id: cel-00573974

https://cel.hal.science/cel-00573974

Submitted on 6 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

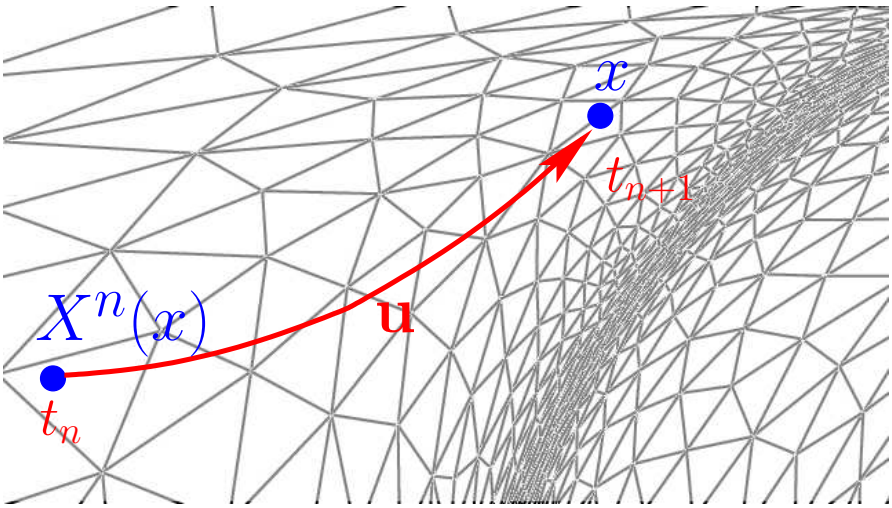
Méthodes numériques avancés

pour la résolution

des équations aux dérivées partielles

Pierre.Saramito@imag.fr

15 décembre 2006



Copyright (c) 2006 Pierre Saramito

Copyleft : cette œuvre est libre, vous pouvez la redistribuer et/ou la modifier selon les termes de la Licence Art Libre. Vous trouverez un exemplaire de cette Licence sur le site d'Art Libre `http://www.artlibre.org` ainsi que sur d'autres sites.

Chapitre 1

Discrétisation et algorithmes

1.1 Introduction

Nous allons introduire ici quelques équations aux dérivées partielles très classiques qui seront par la suite étudiées en détail. Ces équations sont séléctionnées parce qu'elles introduisent des difficultés spécifiques, par ordre croissant. Ces équations sont généralement issues de problèmes de physique, et le contexte est brièvement rapellé. Dans la suite Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d = 1, 2, 3$. En général $d = 3$: c'est notre espace physique. Pour des raisons de symétries, il est parfois possible de réduire la dimension des calculs à $d = 1$ ou 2. D'autre part, $T > 0$ représente le temps final pour lequel nous souhaitons réaliser les calculs.

1.1.1 L'équation de la chaleur

Le problème s'énonce :
trouver ϕ défini de $]0, T[\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\phi \right) - k\Delta\phi &= f \quad \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ \phi(t{=}0, x) &= \phi_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \phi(t, x) &= \phi_\Gamma(t, x) \quad \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega \end{aligned}$$

Dans ce système, nous avons introduit un certain nombre de notations :

$\phi(t, x)$: la température, inconnue du problème.

$\phi_0(x)$: la température initiale, fonction connue.

$\phi_\Gamma(t, x)$: la température aux bords, fonction connue.

$\mathbf{u}(t, x)$: la vitesse du milieu, fonction connue. On peut avoir $\mathbf{u} = 0$ pour un solide.

$f(t, x)$: la source de chaleur, fonction connue.

ρ, C_p, k : des constantes strictement positives, connues.

On peut sans perte de généralité, supposer que ρ, C_p et $k = 1$ sont égales à 1. Dans le cas où la vitesse du milieu $\mathbf{u} = 0$, on obtient le problème :
(C) : trouver ϕ défini de $]0, T[\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi &= f \quad \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ \phi(t{=}0, x) &= \phi_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \phi(t, x) &= \phi_\Gamma(t, x) \quad \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega \end{aligned}$$

Le même problème (C) se présente dans des situations diverses :
- problème de concentration des poluants en faible quantité dans des écoulements (ex. dans les nappes phréatiques) : ϕ représente la concentration du poluant.
- problème de Navier-Stokes, où $\phi = \mathbf{u}$ représente la vitesse elle-même. Le problème est alors non-linéaire.

Dans le cas où la vitesse du milieu $\mathbf{u} = 0$ (milieu solide) et où on recherche l'état stationnaire $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, obtenu à l'équilibre, au bout d'un temps infini, le problème se réduit à :
(C_0) *: trouver ϕ défini de Ω dans $\mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{array}{rcl} -\Delta\phi & = & f \quad \text{dans } \Omega \\ \phi & = & \phi_\Gamma \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

C'est le problème *modèle* pour la présentation des méthodes numériques.

Dans le cas où la vitesse du milieu $\mathbf{u} \neq 0$ (milieu fluide) et que cette vitesse devient grande, il faut faire face à des difficultés :
- couche limite, où la solution varie très brutalement
- les méthodes numériques les plus simples sont instables : la solution approchée oscille fortement alors que la solution exacte ne présente pas ces oscillations.

On sait aujourd'hui remédier à cela.

1.1.2 L'équation de l'élasticité

Le problème s'énonce :
trouver $\mathbf{u}$ défini de $]0,T[\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \rho\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{div}\,(\lambda \operatorname{div}\mathbf{u}.I + \mu\varepsilon(\mathbf{u})) & = & \mathbf{f} \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ \mathbf{u}(t=0,x) & = & \mathbf{u}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t=0,x) & = & \mathbf{g}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma(t,x) \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \end{array}$$

avec les notations :
$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$:le champs de vecteur de déplacement
$\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$:le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\lambda \geq 0$, $\mu > 0$: constantes positives, connues.

1.1.3 Les équations de Navier-Stokes

Le problème s'énonce :
trouver $\mathbf{u}$ et p définis dans $]0,T[\times\Omega$ tels que

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}(\nu D(\mathbf{u})) + \nabla p & = & \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(t=0,x) & = & \mathbf{u}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(t,x) & = & \mathbf{u}_\Gamma(t,x) \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \end{array}$$

avec les notations :

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$:le champs de vecteur vitesse
p :le champs de pression
$D(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$:le tenseur des taux de déformation :
ν : viscosité, constante stritement positive, connue.
$\mathbf{f}$: champs de force exterieures, connue.

1.2 Problèmes elliptiques

On considère le problème modèle :
(P) : trouver u défini de Ω dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ dans } \Omega \\ u & = & g \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, et f et g sont des fonctions données.

1.2.1 Approximation par différences finies

Lorsque Ω est un segment ($d = 1$), une région rectangulaire ($d = 2$) ou cubique ($d = 3$), la méthode la plus simple pour approcher la solution de (P) est la méthode des différences finies.

La dimension un

Quitte à changer de système de coordonnée, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\Omega =]0, 1[$. L'intervalle $[0, 1]$ est décomposé en une subdivision régulière de pas $h = 1/(N+1)$, avec $N \geq 0$ le nombre de points internes de la subdivision. L'idée de la méthode est de remplacer les dérivées par des différences, en s'appuyant sur un développement limité de u :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(xi_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dots$$

En changeant h en $-h$ dans le développement précédent, il vient :

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(xi_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dots$$

En faisant la différence des deux relations précédentes, nous obtenons :

$$-h^2u''(x_i + h/2) = -u(x_i + h) + 2u(x_i) - u(x_i - h) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \dots$$

Posons $x_i = ih$ et introduisons $u_i \approx u(x_i)$ l'approximation de u aux sommets de la subdivision, définie par :
$(P)_h$: trouver $(u_i)_{1\leq i\leq N}$ défini de Ω dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} & = & h^2 f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N \\ u_0 & = & g(x_0) \\ u_{N+1} & = & g(x_{N+1} \end{array} \right.$$

Pour passer du problème (P) au problème approché $(P)_h$, nous avons remplacé la dérivée seconde $-\Delta u(x_i) = (-u(x_i+h)+2u(x_i)-u(x_i-h))/h^2+\mathcal{O}(h^2)$ par la différence $(-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1})/h^2$.

Le problème approché s'écrit encore comme un système linéaire de N équations à N inconnues :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + g(x_0) \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) + g(x_{N+1}) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système linéaire tridiagonal : il se résout par une méthode directe (par exemple par pivotage de Gauss) en $\mathcal{O}(N)$ opérations [Sar04], ce qui est optimal.

La dimension deux ou supérieure

Nous supposons ici que le domaine Ω est rectangulaire. Sans perte de généralité, nous pouvons alors supposer que $\Omega =]0,1[^2$. Le domaine $[0,1]^2$ est décomposé en une partition régulière de pas $h = 1/(N+1)$, avec $N \geq 0$ le nombre de points internes de la subdivision. Posons $x_{i,j} = (ih, jh)$ et introduisons $u_{i,j} \approx u(x_{i,j})$ l'approximation de u aux sommets de la subdivision, définie par :

$$\begin{cases} -u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(x_{i,j}), & 1 \leq i,j \leq N \\ u_{i,j} = g(x_{i,j}), & i \in \{0, N+1\} \text{ et } 0 \leq j \leq N+1 \\ & \text{ou } 1 \leq i \leq N \text{ et } j \in \{0, N+1\} \end{cases}$$

Le problème se met sous la forme d'un système linéaire dont la matrice présente des éléments non nuls sur la diagonale ainsi que sur quatre parallèles, cinq diagonales en tout. Ce type de système linéaire se résout par une méthode directe en un temps de calcul en $\mathcal{O}(N^2 \log N)$. L'idée est un mélange de la méthode précédente et d'analyse de Fourier : voir [Sar04] pour un code `c++` ou bien la librairie `fishpack` pour un code fortran. Cette approche s'étend sans difficulté à la dimension trois ou plus.

1.2.2 Approximation par éléments finis

Triangulation

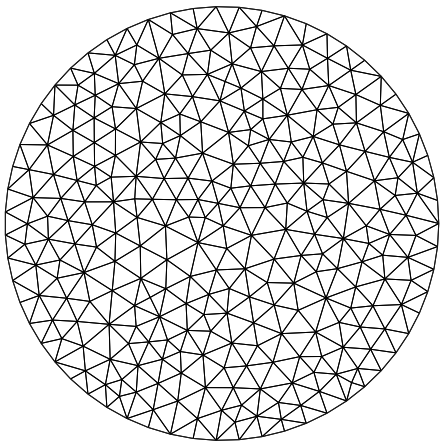


Fig. 1.1 – Triangulation d'un cercle.

Cette méthode permet d'étendre la méthode des différences finies au cas où le domaine Ω n'est pas rectangulaire (cf Fig. 1.1). Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ est décomposé en une triangulation,

notée $\mathcal{T}_h$, et composée de simplexes fermés :

$$\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h}$$

Cela suppose en particulier que Ω soit polygonal, bien que le principe de la méthode puisse s'étendre aux domaines non polygonaux. Les simplexes sont des segments pour $d = 1$, des triangles pour $d = 2$ et des tétraèdres pour $d = 3$. On note $\mathrm{diam}(K)$ la plus longue arrête d'un simplexe K. Par analogie avec le cas des différences finies. on introduit h, appelé le *pas de la triangulation*, et défini par :

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(K)$$

Formulation variationnelle

Afin d'introduire le problème approché nous avons besoin d'utiliser la formulation variationnelle du problème (P). Pour cela, multiplions la première équation par une fonction quelconque v et intégrons sur Ω. Nous obtenons :

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x$$

Utilisons la formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} . \nabla u \, v \, \mathrm{d}s$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à Ω sur la frontière $\partial\Omega$ et $\mathrm{d}s$ est une mesure sur $\partial\Omega$. Considérons à présent la régularité requise pour que cette écriture ait un sens. Afin de garantir que le terme $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, \mathrm{d}x$ ait toujours un sens, nous supposerons que $v \in H_0^1(\Omega)$ et que $u \in V(g)$ avec

$$V(g) = \{w \in H^1(\Omega);\ w_{|\partial\Omega} = g\}$$

De plus, pour que g puisse être la restriction au bord $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$ il est nécessaire que g soit suffisamment régulière : $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour être précis. Remarquons que $V(0) = H_0^1(\Omega)$. Enfin, pour garantir que le terme $\int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x$ ait toujours un sens, nous supposerons que $f \in H^{-1}(\Omega)$ qui est le dual de $H_0^1(\Omega)$, l'espace décrit par les fonctions v. La formulation variationnelle du problème s'écrit :
(FV) *: trouver* $u \in V(g)$ *tel que*

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Formulation variationnelle approchée

Soit k un entier strictement positif et X_h l'espace des fonctions continues dont la restriction à un élément $K \in \mathcal{T}_h$ est un polynôme de degré au plus égal à k :

$$X_h = \{w \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega});\ w_{|K} \in \mathbb{P}_k\}$$

Notons g_h l'interpolée de Lagrange de g sur la frontière et

$$V_h(g) = \{w_h \in X_h;\ w_{h|\partial\Omega} = g_h\}$$

ainsi que $V_{0,h} = V_h(0) = H_0^1(\Omega) \cap X_h$. La formulation approchée s'obtient en remplaçant $V(g)$ par $V_h(g)$ et $H_0^1(\Omega)$ par $V_{0,h}$:
$(FV)_h$ *: trouver* $u_h \in V_h(g)$ *tel que*

$$\int_\Omega \nabla u_h . \nabla v_h \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \, v_h \, \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in V_{0,h}$$

Il s'agit d'un système linéaire de dimension finie : $N = \dim(V_h(g))$ inconnues et autant d'équations. Ce système a donc au moins une solution. Le système étant linéaire, pour montrer l'unicité, il suffit de supposer que $f = g = 0$ entraîne $u_h = 0$. Choisissons $v_h = u_h$: nous obtenons $\int_\Omega |\nabla u_h|^2 \, \mathrm{d}x = 0$. Par l'inégalité de Poincaré, nous obtenons $\|u_h\|_{1,\Omega} = 0$ et donc $u_h = 0$. D'où l'existence et l'unicité de la solution approchée.

Base des espaces approchés

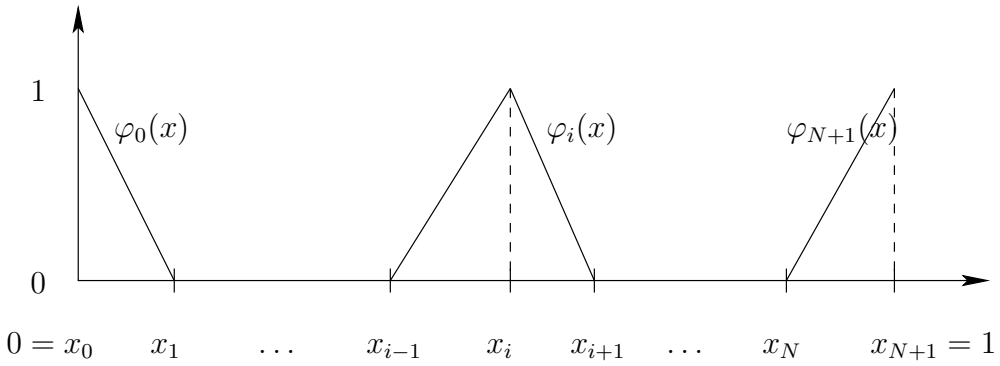


FIG. 1.2 – Fonction de base φ_i en dimension $d = 1$.

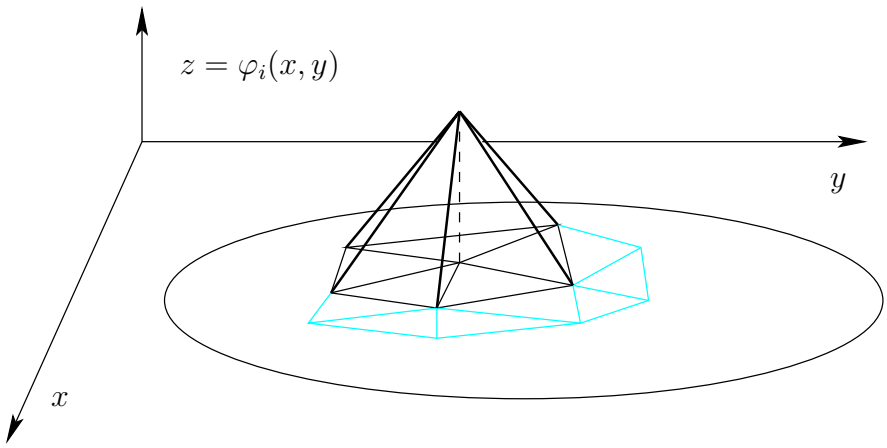


FIG. 1.3 – Fonction de base φ_i : représentation en élévation en dimension $d = 2$.

Nous allons préciser la base pour $k = 1$ bien que ce raisonnement s'étende ensuite à une valeur quelconque de k. Dans ce cas, introduisons $N_{\text{tot}} = \dim(X_h)$ qui est égal au nombre de sommets de la triangulation. Nous choisissons pour base de X_h les fonctions $(\varphi_i)_{1 \le i \le N_{\text{tot}}}$ où φ_i vaut 1 au i-ème sommet de la triangulation et zéro aux autres sommets. Voir les Fig. 1.2 dans le cas $d = 1$ et Fig. 1.3 dans le cas $d = 2$. Nous pouvons décomposer $u_h \in X_h$ sur cette base :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_{\text{tot}}} u_j \, \varphi_j(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Pour les sommets i situés sur la frontière, les valeurs u_i de u_h sont imposées : $u_i = g(x_i)$. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des numéros des sommets situés sur la frontière et $\mathcal{I}$ les sommets situées à l'intérieur, et posons $N = \text{card}(\mathcal{I}$. Il vient $N_f = \mathcal{F} = N_{\text{tot}} - N$. Quitte à renuméroter les sommets, nous supposerons que les sommets internes sont numérotés en premiers et que ensuite suivent les sommets de la frontière.

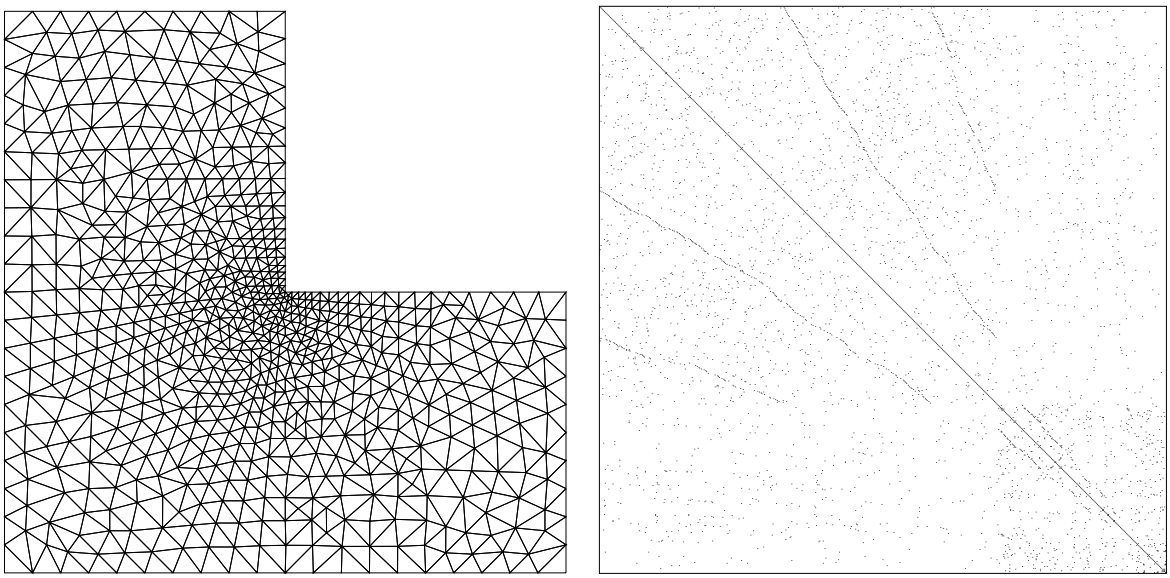


FIG. 1.4 – Triangulation et matrice creuse A associée pour $k = 1$.

Formulation matricielle

Introduisons les matrices $A = (A_{i,j})$ et $M = (M_{i,j})$ de taille $N_{\text{tot}} \times N_{\text{tot}}$:

$$A_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i . \nabla\varphi_j \, \mathrm{d}x$$

ainsi que les vecteurs $F = (f_i)$ avec :

$$F_i = \int_\Omega f(x)\, \varphi_i(x) \, \mathrm{d}x$$

En décomposant le système $AU = F$ sur les ensembles d'indices $\mathcal{I}$ et $\mathcal{F}$.

$$\begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,F} \\ A_{F,I} & A_{F,F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_I \\ F_F \end{pmatrix}$$

En tenant compte des valeurs imposées $U_F = G_F$ il vient :

$$A_{I,I} U_I = F_I A_{I,F} G_F$$

Il s'agit d'un système linéaire de N équations à N inconnues. Une méthode directe de résolution, de type pivotage de Gauss, prendrait a priori $\mathcal{O}(N^3)$ opérations. En fait, la matrice est très creuse (cf Fig. 1.4) et la résolution par la méthode multifrontale (cf la librairie `umfpack`) présente un coût de $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations, donc aussi efficace que dans le cas des différences finies.

Logiciels

Extension aux degrés élevés

L'intérêt des degrés élevés est de réduire l'erreur bien plus rapidement : pour une erreur souhaitée, et lorsque la solution est régulière, il est bien plus rapide d'élever le degré que de réduire le maillage.

```
# include "rheolef.h"

int main (int argc, char** argv) {

    geo omega (argv[1]);

    space Xh (omega, argv[2]);

    Xh.block ("boundary");

    form m (Xh, Xh, "mass");

    form a (Xh, Xh, "grad_grad");

    field fh (Xh, 1);

    field uh (Xh);

    uh ["boundary"] = 0;

    ssk<Float> fact = ldlt(a.uu);

    uh.u = fact.solve ((m*fh).u);

    cout << uh;

}
```

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$

$X_h = \{v \in H^1(\Omega);\ v_{|K} \in P_k,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$

$V_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$

$m(u, v) = \int_\Omega u.v\, dx$

$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx$

$f_h = 1$

(P) : trouver $u_h \in X_h$ tel que

$$\begin{cases} u_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ a(u_h, v_h) = m(f_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

FIG. 1.5 – Le logiciel d'éléments finis `rheolef`.

L'interpolation de Lagrange n'est efficace que pour des degrés relativement modestes : $k \leq 5$ ou 10 suivant les cas. Pour des degrés plus élevés de polynômes, on utilise alors la méthode des éléments spectraux.

Extension aux coefficients non-constants

On considère le problème suivant :
(Q) : trouver u défini de Ω dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k\,\nabla u) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, et k, f et g sont des fonctions données. Lorsque $k = 1$ nous retrouvons le problème (P) précédent car $\mathrm{div}\,\nabla u = \Delta u$.

La formulation variationnelle du problème s'écrit :
(FVQ) : trouver $u \in V(g)$ tel que

$$\int_\Omega k\,\nabla u.\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Le problème est donc similaire au précédent : la matrice A sera sensiblement différente.

1.3 Phénomène de diffusion-convection

Il existe plusieurs grandes classes de méthodes numériques pour aborder ce type de problèmes :
- la méthode des caractéristiques (Lagrange-Galerkin)
- la méthode de diffusion suivnt les lignes de courant (SUPG, streamline upwind Petrov-Galerkin)
- décentrage par discontinuité (Lesaint-Raviart, Tabata, Galerkin discontinu)

1.3.1 Où est la difficulté ?

Pour comprendre où est la diffiulté, considérons un cas problème simple, pour $d = 1$: *trouver* $\phi :]0,1[$ *dans* $\mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{aligned} -\varepsilon\phi'' + \phi' &= 0 \text{ dans }]0,1[\\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(1) &= 1 \end{aligned}$$

Ce problème est commode à étudier car la solution est explicitement donnée par (cf Fig. 1.6) :

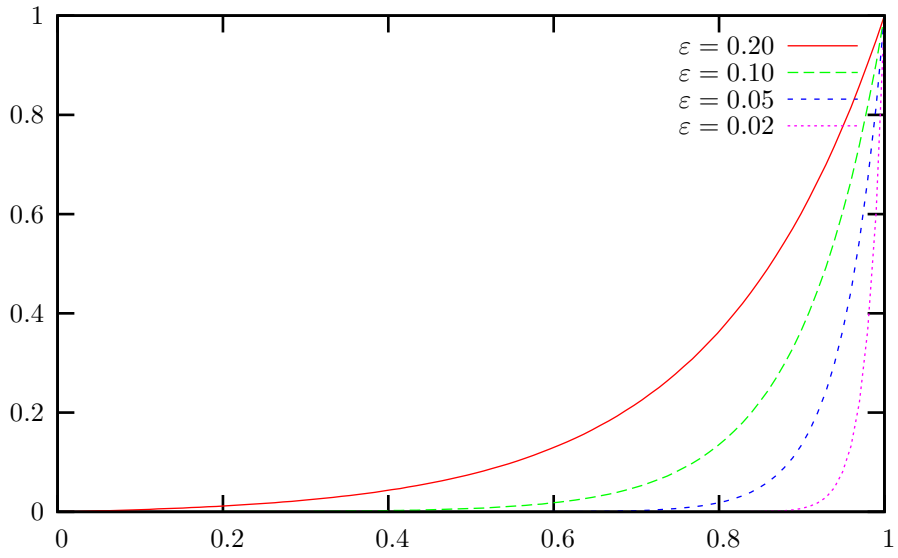


FIG. 1.6 – La solution exacte présente une couche limite.

$$\phi(x) = \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}$$

Lorsque ε tends vers zéro, la solution est presque constante et égale à 1, sauf dans une couche mince au voisinage de $x = 0$ où elle décroit très rapidement pour satisfaire $u(0) = 0$.

La discrétisation par différences finies s'écrit :

$$\begin{aligned} -\varepsilon\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq N \\ \phi_0 &= 0 \\ \phi_{N+1} &= 1 \end{aligned}$$

avec $h = 1/(N+1)$ et $\phi_i \approx \phi(ih)$. Ce système linéaire se met sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 4a & 1-2a & 0 & & \\ -1-2a & 4a & 1-2a & & \\ 0 & -1-2a & 4a & 1-2a & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1-2a & 4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec $a = \varepsilon/h$. La matrice n'est à diagonale dominante que si $4a > 1$ soit encore $h < 4\varepsilon$. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, on dit quee le schéma n'est pas monotone et la solution présente des oscillations dans la couche limite. Pour remédier aux oscillations le remède est bien connu :

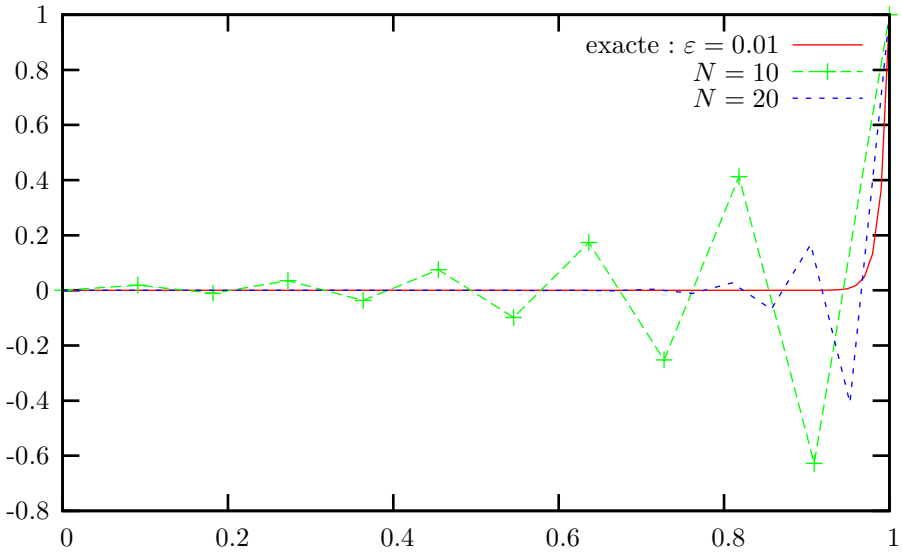


FIG. 1.7 – La solution approchée présente des oscillations dans la couche limite.

soit on prend un maillage plus fin $h < 4\varepsilon$, soit on décentre les schémas à gauche :

$$\begin{aligned} -\varepsilon\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq N \\ \phi_0 &= 0 \\ \phi_{N+1} &= 1 \end{aligned}$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2a & -a & 0 & & \\ -1-a & 2a & -a & & \\ 0 & -1-a & 2a & -a & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1-a & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$$

Cette fois la solution ne présente plus d'oscillations.

1.3.2 La méthode des caractéristiques

Dans l'équation de la chaleur, on remplace la dérivée en temps par une différence finie.

On discrétise en temps l'équation de la chaleur avec $\Delta t > 0$ et $\phi^n(x) \approx \phi(n\Delta t, x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ suivant

- $n = 0$: On pose $\phi^0 := \phi_0$.
- $n \geq 0$: On suppose ϕ^n connu, et on cherche ϕ^{n+1} défini de Ω dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\phi^{n+1} - \phi^n \circ X^n}{\Delta t} - \nu\Delta\phi^{n+1} = f(t_{n+1}) & \text{dans } \Omega \\ \phi^{n+1} = \phi_\Gamma(t_{n+1}) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

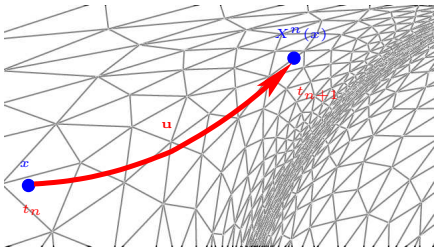


FIG. 1.8 – La méthode des caractéristiques.

Soit $t_n = n\Delta t$. Le terme $X^n(x)$ est la position à t_n de la particule qui est en x à l'instant t_{n+1} (cf. Fig. 1.8). Ainsi $X^n(x) = X(t_n, x)$ où $X(x, .)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(x,t) & = & \mathbf{u}(X(x,t),t) \quad \text{p.p.} t \in]t_n, t_{n+1}[\\ X(x, t_{n+1}) & = & x \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système de Cauchy rétrograde (avec condition finale), qui admet une solution unique lorsque le champs de vitesse $\mathbf{u}$ est continu. On approche cette équation différentielle par le schéma d'Euler :

$$\frac{X(x, t_{n+1}) - X(x, t_n)}{\Delta t} = \mathbf{u}(X(x, t_{n+1}), t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

En utilisant $X(x, t_{n+1}) = x$ et $X(x, t_n) = X^n(x)$ il vient :

$$X^n(x) = x - \Delta t\, \mathbf{u}(t_{n+1}, x) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Cette méthode a été utilisée avec succès par O. Pironneau (voir par exemple [Pir88]). Elle est disponible notamment dans la librairie d'éléments finis `rheolef` [SRE03]. Chaque itération de la méthode se rammène à résoudre un problème de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \left(\dfrac{1}{\Delta t} I - \nu\Delta\right) \phi^{n+1} & = & f(t_{n+1}) + \dfrac{1}{\Delta t}\phi^n \circ X^n & \text{dans } \Omega \\ \phi^{n+1} & = & \phi_\Gamma(t_{n+1}) & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Ces problèmes ont la même structure que le problème modèle : l'opérateur de Poisson $-\Delta$ est remplacé par un opérateur de Helmholtz de la forme $\alpha.I - \beta\Delta$. La résolution de ces sous-problèmes est donc complètement standard.

L'évaluation du second membre nécessite de calculer $\phi^n \circ X^n$ aux noeuds de discrétisation, par exemple les sommets du maillage pour $k = 1$. Or si x est un noeud de discrétisation, il n'en va pas de même de $X^n(x) \approx x - \Delta t\, \mathbf{u}(t_{n+1}, x)$ qui peut être situé à un endroit quelconque du domaine Ω. Pour réaliser cette évaluation il s'agit d'identifier dans quel élément $K \in \mathcal{T}_h$ est situé $y = X^n(x)$: c'est un problème de géometrie algorithmique (voir l'annexe du cours sur les interfaces).

1.4 L'équation de l'élasticité

On s'intéresse au problème stationnaire, qui s'écrit :
(P) *: trouver* $\mathbf{u}$ *défini de* Ω *dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que*

$$\begin{array}{rcll} -\mathbf{div}\,\sigma & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \sigma & = & \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}.I + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

1.4.1 Formulation variationnelle

Nous multiplions la deuxième équation par $\mathbf{v}$ et intégrons sur le domaine Ω :

$$-\int_\Omega \mathbf{div}(\sigma).\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x$$

Nous utilisons la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega \mathbf{div}(\sigma).\mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma : \varepsilon(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (\sigma.\mathbf{n}).\mathbf{v}\,\mathrm{d}s$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à Ω sur $\partial\Omega$. On choisis alors $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, de sorte que le terme de bord est nul. La solution $\mathbf{u}$ sera cherchée dans l'espace :

$$V(\mathbf{g} = \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d;\ \mathbf{w}_{|\partial\Omega} = \mathbf{g}\}$$

En utilisant l'expression de σ nous obtenons la formulation variationnelle suivante :
(FV) *: trouver* $\mathbf{u} \in V(\mathbf{g})$ *tel que*

$$\int_\Omega \lambda\,\mathrm{div}(\mathbf{u})\,\mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_\Omega 2\mu\,\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$$

1.4.2 Formulation variationnelle approchée

Soit k un entier strictement positif et X_h l'espace des fonctions continues dont la restriction à un élément $K \in \mathcal{T}_h$ est un polynôme de degré au plus égal à k :

$$X_h = \{\mathbf{w} \in (H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))^d;\ \mathbf{w}_{|K} \in (\mathbb{P}_k)^d\}$$

Notons $\mathbf{g}_h$ l'interpolée de Lagrange de $\mathbf{g}$ sur la frontière et

$$V_h(\mathbf{g}) = \{\mathbf{w}_h \in X_h;\ \mathbf{w}_{h|\partial\Omega} = \mathbf{g}_h\}$$

ainsi que $V_{0,h} = V_h(0) = H_0^1(\Omega)^d \cap X_h$. La formulation approchée s'obtient en remplaçant $V(\mathbf{g})$ par $V_h(\mathbf{g})$ et $H_0^1(\Omega)$ par $V_{0,h}$:
$(FV)_h$ *: trouver* $\mathbf{u}_h \in V_h(\mathbf{g})$ *tel que*

$$\lambda \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{u}_h)\,\mathrm{div}(\mathbf{v}_h)\,\mathrm{d}x + 2\mu \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}_h) : \varepsilon(\mathbf{v}_h)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}_h\,\mathrm{d}x, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{0,h}$$

Il s'agit d'un système linéaire de dimension finie : $N = \dim(V_h(\mathbf{g}))$ inconnues et autant d'équations. Ce système a donc au moins une solution. Le système étant linéaire, pour montrer l'unicité il suffit de supposer que si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont nuls alors $\mathbf{u}_h = 0$. Choisissons $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$: nous obtenons :

$$\lambda \int_\Omega |\mathrm{div}(\mathbf{u}_h)|^2\,\mathrm{d}x + 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u}_h)|^2\,\mathrm{d}x = 0$$

Or l'inégalité de Korn stipule que

$$\|\mathbf{w}\|_e = \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{w})|^2\,\mathrm{d}x$$

est une norme sur $V(0)$ équivalente à la norme $\|.\|_{1,\Omega}$ induite par $H^1(\Omega)$. La démonstration de l'inégalité de Korn a été un défi dans les années 50 et 60 et sa démonstration est relativement difficile : on la trouvera par exemple dans [DL72]. Ainsi $\lambda\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h\|^2 + 2\mu\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 = 0$ et donc $\mathbf{u}_h = 0$.

1.4.3 Estimation d'erreur

Notons indifférement $(.,.)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^d$, et $L^2(\Omega)^{d\times d}$, ainsi que $\|.\|$ la norme associée.

Introduisons la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie pour tout $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)$ par :

$$a(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \lambda(\operatorname{div}\mathbf{v},\, \operatorname{div}\mathbf{w}) + 2\mu(\varepsilon(\mathbf{v}),\, \varepsilon(\mathbf{w}))$$

On note $\|\mathbf{v}\|_a = \sqrt{a(\mathbf{v},\mathbf{v})}$ qui constitue une norme dans $H_0^1(\Omega)^d$ équivalente à la norme $\|.\|_{1,\Omega}$ induite par $H^1(\Omega)^d$.

Posons $\mathbf{e}_h = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h$ où $\tilde{\mathbf{u}}$ est l'interpolée de Lagrange de $\mathbf{u}$. Ainsi $\mathbf{e}_h \in V_{0,h}$ et nous pouvons choisir $\mathbf{v} = \mathbf{e}_h$ dans (FV) et $\mathbf{v}_h = \mathbf{e}_h$ dans $(FV)_h$. Il vient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{e}_h) &= (\mathbf{f},\mathbf{e}_h) && (1.1)\\ a(\mathbf{u}_h,\mathbf{e}_h) &= (\mathbf{f},\mathbf{e}_h) && (1.2) \end{aligned}$$

En utilisant les relations précédentes et après développement, il vient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h\|_a^2 &= a(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h)\\ &= a(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - a(\mathbf{u}_h,\mathbf{e}_h)\\ &= a(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - (\mathbf{f}_h,\mathbf{e}_h) \text{ d'après (1.2)}\\ &= a(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - a(\mathbf{u},\mathbf{e}_h) \text{ d'après (1.1)}\\ &= a(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u},\mathbf{e}_h) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité $(a,b) \leq (a^2+b^2)/2$ il vient :

$$a(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u},\mathbf{e}_h) \leq \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_a^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_h\|_a^2$$

et ainsi :

$$\|\mathbf{e}_h\|_a^2 \leq \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_a^2$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_a &\leq \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_a + \|\mathbf{e}_h\|_a\\ &\leq 2\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_a \end{aligned}$$

Des résultats standards d'interpolation il vient une majoration concrète de l'erreur :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_a \leq c(k,\Omega)\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega}\, h^k$$

1.4.4 Le problème modal

On s'intéresse au problème complet, avec le terme en temps :
(P) *: trouver* $\mathbf{u}$ *défini de* $]0,T[\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{div}\,\sigma &= \mathbf{f} \quad \text{dans }]0,T[\Omega\\ \sigma &= \lambda \operatorname{div}\mathbf{u}.I + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{dans }]0,T[\Omega\\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega\\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \text{ et } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{d}_0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Une question d'intérêt pratique, et qui motive de nombreuses études, est de connaitre la stabilité des structures sous solicitations périodiques entretenues : pont sous l'effet des vibrations des voitures qui passent, digues sous l'effet de la houle, immeubles lors de tremblements de terre, etc. le système étant linéaire, on va se rammener à une analyse des valeurs propres. Pour cela on cherche la solution sous la forme :

$$\mathbf{u}(t,x) = e^{\lambda t}\overline{\mathbf{u}}(x)$$

où $\lambda = a + i\omega$ est un mode du système, $a = Re(\lambda)$ est le coefficient d'amplification et $\omega = Im(\lambda)$ la pulsation.

Il s'agit donc de trouver les valeurs et vecteurs propres du système linéaire.

Le problème modal est à valeur complexe :
(P) *: trouver* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $\overline{\mathbf{u}}$ *défini de* Ω *dans* $\mathbb{C}^d$ *tels que*

$$\begin{array}{rcl} -\lambda^2\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{div}\,\overline{\sigma} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \overline{\sigma} & = & \lambda \operatorname{div}\overline{\mathbf{u}}.I + 2\mu\varepsilon(\overline{\mathbf{u}}) \quad \text{dans } \Omega \\ \overline{\mathbf{u}} & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

La formulation variationelle s'écrit : (FV) *: trouver* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $\overline{\mathbf{u}} \in V$ *tels que*

$$-\lambda^2 m(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) + a(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \overline{\mathbf{v}} \in V$$

Après discrétisation en espace, le problème se réduit à

$$AU = \beta MU$$

où β est une approximation de λ^2.

Remarque : A et M étant symétriques, les valeurs propres μ sont réeles. A étant positive, $\mu > 0$ donc $\lambda = \pm\sqrt{\mu}$ est réel. La partie immaginaire n'apparaît pas... Ca n'est pas au point ici !

1.4.5 Elasticité quasi-incompressible

On s'intéresse au cas $\lambda \to +\infty$. On introduit une nouvelle inconnue $p = -\lambda \operatorname{div}\mathbf{u}$.

Le problème s'écrit de façon équivalente : (P) *: trouver* $\mathbf{u}$ *défini de* Ω *dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que*

$$\begin{array}{rcl} -\mathbf{div}(2\varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p & = & \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} - \dfrac{1}{\lambda}p & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

On introduit les formes bilinéaires :

$$\begin{array}{rcl} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) & = & 2\displaystyle\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \\ b(\mathbf{v},p) & = & -\displaystyle\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \\ c(p,q) & = & \displaystyle\int_\Omega p\,q\,\mathrm{d}x \end{array}$$

si bien que la formulation variationnelle s'écrit :
(FVE) *: trouver* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ *et* $p \in L^2(\Omega)$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcll} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) & + & b(\mathbf{v},p) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ b(\mathbf{u},q) & - & \dfrac{1}{\lambda}c(p,q) & = & 0, & \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Soient k et l deux entiers positifs. On introduit les espaces de dimension finie :

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h \in (H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))^d;\ \mathbf{v}_{h|K} \in \mathbb{P}_k^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega});\ q_{h|K} \in \mathbb{P}_l,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

et on définit le problème approché :
$(FVE)_h$ *: trouver* $\mathbf{u}_h \in V_h$ *et* $p_h \in Q_h$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcll} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) & + & b(\mathbf{v}_h, p_h) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) & - & \dfrac{1}{\lambda} c(p_h, q_h) & = & 0, & \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Lorsque $\lambda \to +\infty$, le terme en bas à droite, dit de stabilisation disparait : le problème obtenu s'appelle le problème de Stokes. On étudiera dans le cadre des équations de Navier-Stokes comment approcher ce problème : les degré k et l des polynomes espaces approchés ne peuvent pas être choisis n'importe comment. En particulier, si on choisis $k = l$ alors p_h ne tends pas vers p dans L^2 lorsque h tends vers zero.

Dans le cas où $1/\lambda \neq 0$, ce problème s'appelle par extension le problème de Stokes généralisé. Dans ce cas $k = l$ convient.

1.5 Les équations de Navier-Stokes

trouver $\mathbf{u}$ *et* p *définis dans* $]0, T[\times\Omega$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}(2D(\mathbf{u})) + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ \mathbf{u}(t{=}0, x) & = & \mathbf{u}_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(t, x) & = & 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega \end{array} \right.$$

On pose $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = T/N$. On approche la dérivée particulaire par la méthode des caractéristiques :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} \right)(t_n, x) \approx \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}, x) - \mathbf{u}(t_n, X^n(x))}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

où $X^n(x) = x - \Delta t\, \mathbf{u}(t_n, x) + \mathcal{O}(\Delta^2)$. Avec la méthode des caractéristiques et un schéma d'Euler implicite, le problème se réduit à :
- $n = 0$: $\mathbf{u}^0 := \mathbf{u}_0$.
- $n \geq 0$: $\mathbf{u}^n$ étant connu, trouver $\mathbf{u}^{n+1}$ et p^{n+1} tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\rho}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{div}(2D(\mathbf{u}^{n+1})) + \nabla p^{n+1} & = & \mathbf{f}(t_{n+1}) + \dfrac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^n \circ X^n & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{n+1} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Le schéma semi-discrétisé en temps conduit à résoudre une succession de problèmes continus en espace de la forme :

(S) *: trouver* $\mathbf{u}$ *et* p *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \alpha \mathbf{u} - \mathbf{div}(2D(\mathbf{u})) + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Ce problème est appelé problème de Stokes généralisé. Le problème de Stokes correspond à $\alpha = 0$. On introduit les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \alpha \int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \\ b(\mathbf{v},q) &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

si bien que la formulation variationnelle s'écrit :
(FVS) *: trouver* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ *et* $p \in L^2(\Omega)$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lcllll} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) & + & b(\mathbf{v},p) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ b(\mathbf{u},q) & & & = & 0, & \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Soient k et l deux entiers positifs. On introduit les espaces de dimension finie :

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h \in (H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))^d;\ \mathbf{v}_{h|K} \in \mathbb{P}_k^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega});\ q_{h|K} \in \mathbb{P}_l,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

et on définit le problème approché :
$(FVS)_h$ *: trouver* $\mathbf{u}_h \in V_h$ *et* $p_h \in Q_h$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lcllll} a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) & + & b(\mathbf{v}_h,p_h) & = & (\mathbf{f},\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h,q_h) & & & = & 0, & \forall q \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Les degré k et l des polynomes espaces approchés ne peuvent pas être choisis n'importe comment. En particulier, si on choisis $k = l$ alors p_h ne tends pas vers p dans L^2 lorsque h tends vers zero.

Un bon choix est $k = 2$ et $l = 1$, ou plus généralement $k = l + 1$ pour $l \geq 1$: c'est l'élémént de Hood et Taylor [HT74] proposé en 1974. L'estimation d'erreur en a été établie en 1977 par M. Fortin.

1.5.1 Résolution du problème de Stokes discret

Soit $(\boldsymbol{\varphi}_i)_{1\leq i\leq N}$ une base de V_h et $(\psi_i)_{1\leq i\leq M}$ une base de Q_h. Décomposons $\mathbf{u}_h$ et p_h sur ces bases respectives :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{j=1}^N u_j \boldsymbol{\varphi}_j \\ p_h &= \sum_{j=1}^M q_j \psi_j \end{aligned}$$

et posons :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \boldsymbol{\varphi}_i),\ 1 \leq i,j \leq N \\ B_{ij} &= b(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \xi_i),\ \ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M \\ f_i &= (\mathbf{f},\, \boldsymbol{\varphi}_i),\ \ 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

Le problème de Stokes discret se ramène à résoudre le système linéaire suivant :

$(S)_h$: *trouver* $u = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $p = (p_i)_{1\leq i\leq m}$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice A est symétrique définie positive $N \times N$ et B est rectangulaire $N \times M$. Étendons le problème précédent en introduisant $g \in Im(B) \subset \mathbb{R}^M$:

$$\begin{array}{rcrcl} Au & + & B^T p & = & f \\ Bu & & & = & g \end{array}$$

De la première équation, il vient

$$u = A^{-1}(f - B^T p)$$

et alors de la seconde :

$$(BA^{-1}B^T)p = BA^{-1}f - g$$

En posant $\mathcal{A} = BA^{-1}B^T$ et $\beta = BA^{-1}f - g$, ceci s'écrit encore :

$$\mathcal{A}p = \beta$$

La solution $p \in \mathbb{R}^m$ est caractérisée comme étant l'unique minimum de la fonctionnelle convexe

$$\mathcal{J}(q) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}q,\, q) - (\beta,\, q)$$

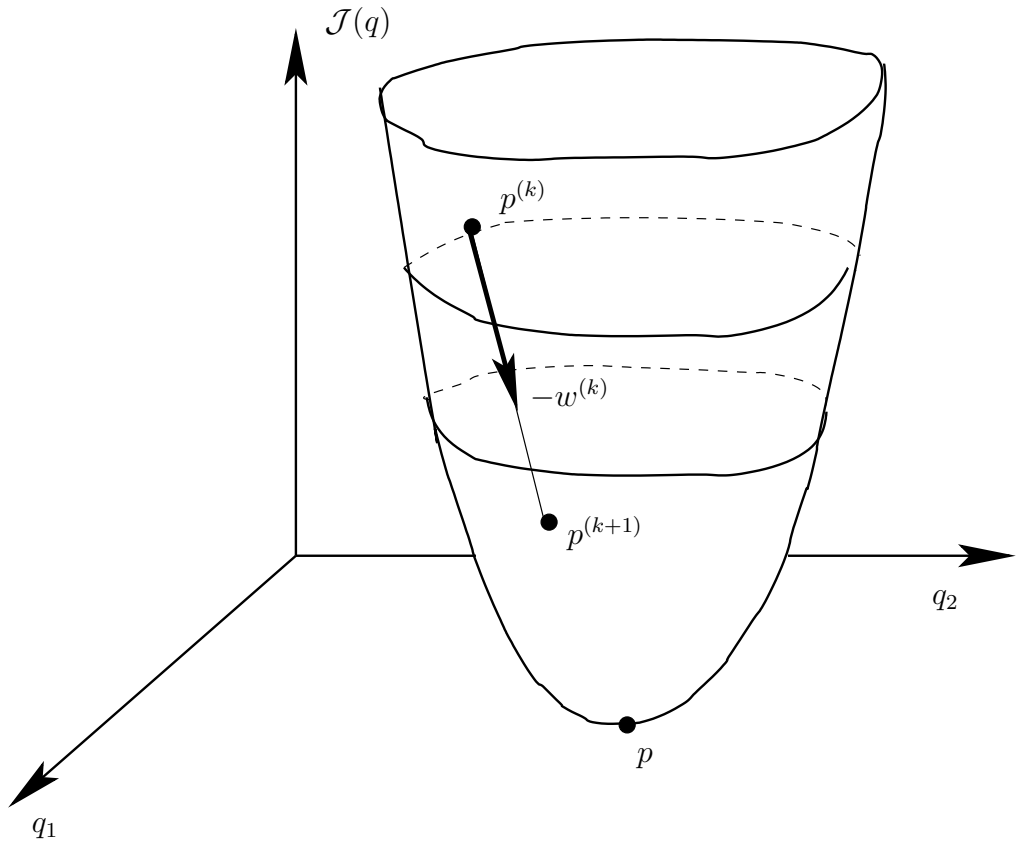


FIG. 1.9 – Algorithme de descente.

Le minimum de $\mathcal{J}$ peut être obtenu par un algorithme de type descente et est représenté sur la figure 1.9 :

ALGORITHME **1.1** *(*descente – version abstraite*)*

- $k = 0$ *:* $p^{(0)} \in \mathbb{R}^M$ *donné, quelconque.*
- $k \geq 0$ *:* $p^{(k)}$ *connu, calculer*

$$p^{(k+1)} := p^{(k)} - \rho_k w^{(k)}$$

où

ρ_k	*est le* **pas** *de descente*
$w^{(k)}$	*est la* **direction** *de descente*

L'algorithme de plus profonde descente à pas fixe, appelé aussi algorithme d'Uzawa, consiste à choisir pour le pas de descente une valeur constante $\rho_k = \lambda > 0$ et pour la direction de descente $w^{(k)}$, l'opposée du gradient,

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= \mathcal{A}p^{(k)} - \beta \\ &= BA^{-1}B^T p^{(k)} - BA^{-1}f + g \\ &= BA^{-1}(B^T p^{(k)} - f) + g \\ &= -Bu^{(k)} + g \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$u^{(k)} = A^{-1}(f - B^T p^{(k)})$$

Ainsi, $w^{(k)}$ représente le résidu de la deuxième équation du système linéaire.

ALGORITHME **1.2** *(*Uzawa*)*

- $k = 0$ *:* $p^{(0)} \in \mathbb{R}^M$ *étant donné, trouver* $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$Au^{(0)} = f - B^T p^{(0)}$$

- $k \geq 0$ *:* $(u^{(k)}, p^{(k)})$ *étant connu, calculer successivement :*

$$\begin{aligned} w^{(k)} &:= g - B^T u^{(k)} \\ p^{(k+1)} &:= p^{(k)} - \lambda w^{(k)} \end{aligned}$$

puis trouver $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$Au^{(k+1)} = f - B^T p^{(k+1)}$$

Le pas de descente $\lambda > 0$ est un paramètre de cet algorithme. Le test d'arrêt peut être effectué sur le résidu : $\|w^{(k)}\| < \varepsilon$, où ε est une tolérance.

Lorsque le problème est de grande taille, l'algorithme converge très lentement. Pour accélérer la convergence, remplaçons le système linéaire par le problème équivalent suivant :

$$\begin{array}{lcl} (A + rB^T B)u + B^T p & = & f + rB^T g \\ Bu & = & g \end{array}$$

où $r > 0$ est appelé paramètre d'augmentation. Appliquons alors l'algorithme d'Uzawa avec un pas $\lambda = r$. L'algorithme converge alors d'autant plus vite que r est grand [FG83]. Dans la pratique, afin d'éviter les erreurs dûes aux propagations d'arrondis, nous choisirons $r = 1/\sqrt{\varepsilon_{mach}}$ où ε_{mach} est la précision de la machine pour les calculs en virgule flottante. La matrice A pourra être factorisée une fois pour toute sous la forme LDL^T lors de l'initialisation de l'algorithme d'Uzawa.

De plus, remarquons que lors de des itérations de l'algorithme d'Euler implicite, seuls les second membres des problèmes de Stokes changent. Ainsi, cette factorisation de la matrice A pourra être

effectuée une seule fois lors de l'initialisation de la version discrète de l'algorithme d'Euler implicite pour résolution du problème de Navier-Stokes.

Voir le code RHEOLEF [SR01a, SR01b] pour la programmation de ces algorithmes dans un contexte d'éléments finis en dimension 1, 2 et 3.

Chapitre 2

Estimations d'erreur

2.1 Estimation d'erreur a priori

2.1.1 Problème elliptique (chaleur, elasticité, etc)

Soit w un élément arbitraire de $H^1(\Omega)$. Posons $\tilde{w}$ l'interpolé de Lagrange de w dans X_h. Par exemple, pour $k = 1$, il est simplement défini par :

$$\tilde{w}(x) = \sum_{j=1}^{N_{\text{tot}}} w(x_j)\,\varphi_j(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

En particulier, $w - \tilde{w}$ est appellé l'erreur d'interpolation. Si $w \in H^{k+1}(\Omega)$ alors cette erreur vérifie :

$$\|\nabla(w - \tilde{w})\| \leq c\|w\|_{k+1,\Omega} h^k \tag{2.1}$$

où $c = c(k, \Omega)$ est une constante indépendante de h et u, qui ne dépend que de k et Ω. Posons $e_h = \tilde{u} - u_h \in V_{0,h}$. Notons $(.,.)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$et celui de $L^2(\Omega)^d$ ainsi que $\|.\|$ la norme associée.

Nous pouvons choisir $v = e_h$ dans (FV) et $v_h = e_h$ dans $(FV)_h$:

$$(\nabla u,\, \nabla e_h) = (f,\, e_h) \tag{2.2}$$

$$(\nabla u_h,\, \nabla e_h) = (f,\, e_h) \tag{2.3}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\nabla e_h\|^2 &= (\nabla \tilde{u},\, \nabla e_h) - (\nabla u_h,\, \nabla e_h) \\
&= (\nabla \tilde{u},\, \nabla e_h) - (f,\, e_h) \text{ avec (2.3)} \\
&= (\nabla \tilde{u},\, \nabla e_h) - (\nabla u,\, \nabla e_h) \text{ avec (2.2)} \\
&= (\nabla(\tilde{u} - u),\, \nabla e_h) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

D'autre part, l'identité $(a, b) \leq (a^2 + b^2)/2$ donne :

$$(\nabla(\tilde{u} - u),\, \nabla e_h) \leq \frac{1}{2}\|\nabla(\tilde{u} - u)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla e_h\|^2$$

et ainsi (2.4) devient :

$$\|\nabla e_h\|^2 \leq \|\nabla(\tilde{u} - u)\|^2$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-u_h)\| &= \|\nabla(u-\tilde{u})\| + \|\nabla e_h\| \\ &\leq 2\|\nabla(u-\tilde{u})\| \text{ avec l'inégalité précédente}\end{aligned}$$

Il reste à utiliser (2.1) avec $w = u$ pour obtenir :

$$\|\nabla(u-u_h)\| \leq 2c(k,\Omega)\|u\|_{k+1,\Omega}h^k$$

L'inégalité de Poincaré donne :

$$c_0\|u\|_{1,\Omega} \leq \|\nabla u\|$$

où c_0 ne dépend que de Ω. Ceci permet d'experimer l'estimation d'erreur en norme H^1 :

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{2c(k,\Omega)}{c_0(\Omega)}\|u\|_{k+1,\Omega}h^k$$

2.1.2 Problème mixte (Stokes, etc)

Toute la difficulté tourne autour de la forme bilinéaire $b(.,.)$ en tant que fonction de de $V_h \times Q_h$ dans $\mathbb{R}$. On introduit le noyau Z de l'opérateur div et son analogue discret Z_h, definis par :

$$\begin{aligned}Z &= \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3;\ b(\mathbf{v},q) = 0, \forall q \in L^2(\Omega)\} \\ Z_h &= \{\mathbf{v}_h \in V_h;\ b(\mathbf{v}_h,q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\}\end{aligned}$$

On suppose que $Z_h \neq \{0\}$: cela est nécéssaire pour que le problème discret admette au moins une solution. Regardons ce qui se passe au niveau matriciel, si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ et $(\psi_i)_{1\leq i\leq M}$ sont respectivement des bases de V_h et Q_h, on introduit

$$\begin{aligned}A_{i,j} &= a(\varphi_j,\varphi_i),\ 1 \leq i,j \leq N \\ B_{i,j} &= b(\varphi_j,\psi_i),\ 1 \leq i \leq M \ \text{ et } \ 1 \leq j \leq N\end{aligned}$$

Supposer que $Z_h \neq \{0\}$: cela suppose que le système linéaire $BV = 0$ admette une infinité de solution. En particulier, cela est vérifié lorsque $M \leq N$, bien que cette condition ne soit pas nécéssaire. Dans le cas $k = l = 1$, le maillage de la Fig. 2.1 conduit à $M = 5$ equations pour $N = 2$ inconnues. On peut vérifier que dans ce cas, $Z_h = \{0\}$. Ainsi, dès que $\mathbf{f} \neq 0$, le problème $(P)_h$ n'admet aucune solution. Une solution pour palier à cette difgiculté est d'augmenter N en augmentant la dimension de V_h : on augmente par exemple le degré des polynômes k. Avec $k = 2$ on obtient $N = 10 \geq M = 5$. On peut vérifier que dans ce cas, Z_h ne se réduit pas à $\{0\}$. Ainsi la condition $Z_h \neq \{0\}$ s'expime comme une condition liant les espaces V_h et Q_h.

Soit $\hat{\mathbf{u}}$ la projection orthogonale pour la norme H^1 de $\mathbf{u}$ sur Z_h. Posons $\mathbf{e}_h = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h \in Z_h$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h\|_a^2 &= a(\mathbf{e}_h,\mathbf{e}_h) \\ &= a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - a(\mathbf{u}_h,\mathbf{e}_h) \\ &= a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - b(\mathbf{e}_h,p_h) + (\mathbf{f},\mathbf{e}_h) \text{ du problème approché} \\ &= a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h) - b(\mathbf{e}_h,p_h) + b(\mathbf{e}_h,p) - a(\mathbf{u}\mathbf{e}_h) \text{ du problème continu} \\ &= a(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u},\mathbf{e}_h) + b(\mathbf{e}_h,p-p_h)\end{aligned}$$

Or $b(\mathbf{e}_h,p_h) = 0$ car $\mathbf{e}_h \in Z_h$. De même, pour tout $q_h \in Q_h$ on a $b(\mathbf{e}_h,q_h) = 0$. En particulier, on peut choisir $q_h = \tilde{p}$ l'interpolée de Largrange de p. Si bien que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h\|_a^2 &= a(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u},\mathbf{e}_h) + b(\mathbf{e}_h,p-\tilde{p}) \\ &\leq \|\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega} + \|p-\tilde{p}\|\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

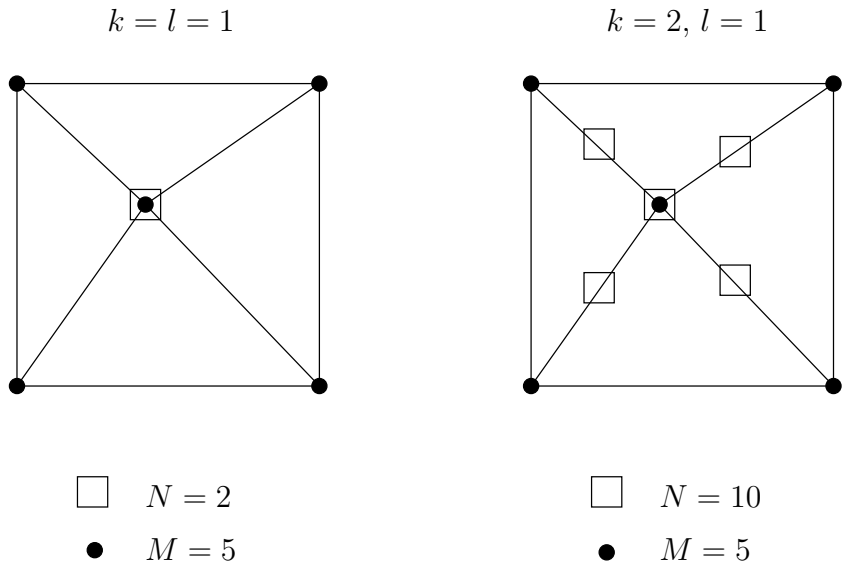


FIG. 2.1 – Dimension des espaces approchés.

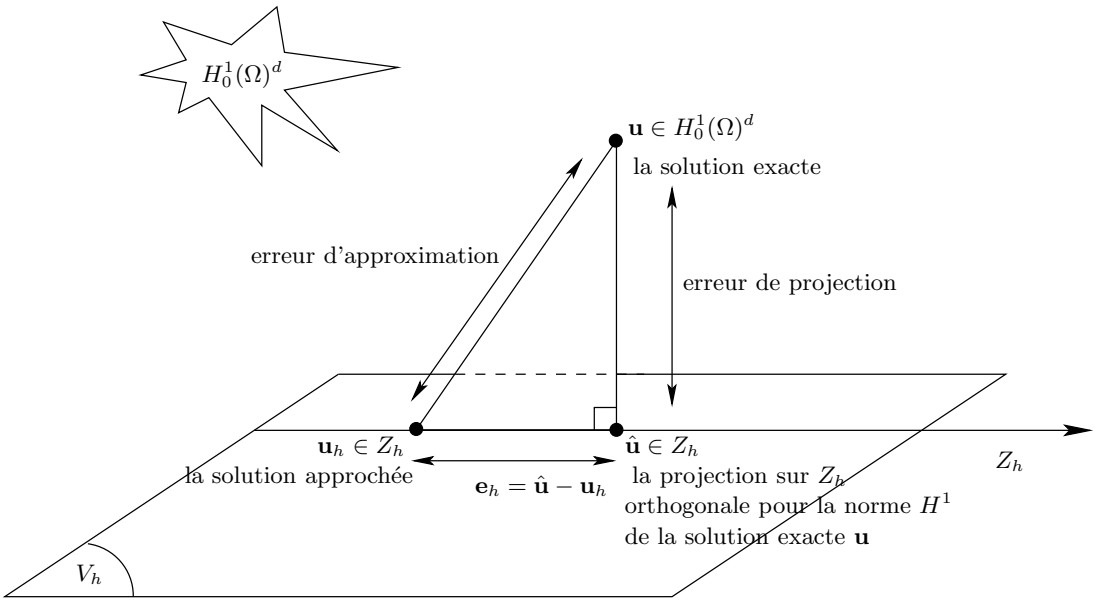


FIG. 2.2 – Représentation géométrique de l'erreur.

De l'inégalité de Korn, il vient :

$$\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega} = \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{p} - p\|$$

et de l'inégalitré triangulaire (cf Fig. 2.2) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} &\leq \|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega} + \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} && (2.5) \\ &\leq 2\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{p} - p\| && (2.6) \end{aligned}$$

Si la majoration de $\|p - \tilde{p}\|$ est classique par les résultats d'interpolation polynomiales standard, il n'en va pas de même de $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega}$ qu'il convient d'étudier finement. En effet, on projette la solution exacte dans un espace Z_h beaucoup plujs plus réduit que l'espace polynômial V_h habituel, et il convient de vérifier que Z_h soit suffisament grand pour approcher convenablement $\mathbf{u}$.

On pose :

$$\beta_h := \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \|q_h\|} \tag{2.7}$$

où β_h est appellée la constante inf-sup discrète.

Lemme **2.1** *Soit $\tilde{\mathbf{u}}$ l'interpolée de Lagrange de $\mathbf{u}$. Alors*

$$\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq (1 + 1/\beta_h)\, \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \tag{2.8}$$

Démonstration : On trouvera cette démonbstration classique dans dans [GR86, p. 115], théorème 1.1 ainsi que dans [BF91, p. 55], proposition .5.

Puisque $\hat{\mathbf{u}}$ est la projection pour la norme H^1 de $\mathbf{u}$ sur Z_h, on a, par définition :

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} &:= \inf_{\mathbf{z}_h \in Z_h} \|\mathbf{z}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{z}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega},\ \forall \mathbf{z}_h \in Z_h && (2.9) \end{aligned}$$

Introduisons l'opérateur $B : H_0^1(\Omega)^d \to L^2(\Omega)$ définit pour tout $q \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ par $\langle B\mathbf{v}, q\rangle = b(\mathbf{v}, q)$. Introduisons son analogue discret, l'opérateur $B_h : V_h \to Q_h$ définit pour tout $q_h \in Q_h$ et $\mathbf{v}_h \in V_h$ par $\langle B_h\mathbf{v}_h, q_h\rangle = b(\mathbf{v}_h, q_h)$. Puisque $b(\mathbf{u}, q) = 0$ pour tout $q \in L^2(\Omega)$ et que $Q_h \subset L^2(\Omega)$, nous avons

$$b(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, q_h) = b(\tilde{\mathbf{u}}, q_h),\ \forall q_h \in Q_h$$

ce qui s'écrit encore

$$B(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = B_h\tilde{\mathbf{u}} \in Im(B_h)$$

L'espace vectoriel V_h se décompose en somme directe suivant $V_h = Z_h \otimes Z_h^\perp$. D'une part $Z_h = Ker(B_h)$ et d'autre part $Z_h^\perp = Ker(B_h)^\perp$ est isomorphe à $Im(B_h)$. L'application linéaire B_h est un isomorphisme en tant qu'application de $Ker(B_h)^\perp \subset V_h$ dans $Im(B_h) \subset Q_h$. Il existe donc un unique $\mathbf{y}_h \in Ker(B_h)^\perp$ tel que :

$$B_h\mathbf{y}_h = B_h\tilde{\mathbf{u}}$$

L'inverse, noté B_h^{-1}, est une application continue de $(Im(B_h), \|.\|)$ dans $(Ker(B_h)^\perp, \|.\|)$. On a : Voir [GR86, p. 58], lemme 4.1

$$\|B_h^{-1}q_h\|_{1,\Omega} \leq (1/\beta_h)\|q_h\|, \forall q_h \in Im(B_h)$$

En particulier, pour $q_h = B_h\mathbf{y}_h \in Im(B_h)$ il vient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_h\|_{1,\Omega} &\leq (1/\beta_h)\|B_h\mathbf{y}_h\| \\ &= \frac{1}{\beta_h}\|B(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\| \\ &= \frac{1}{\beta_h}\|\mathrm{div}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\| \\ &= \frac{1}{\beta_h}\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

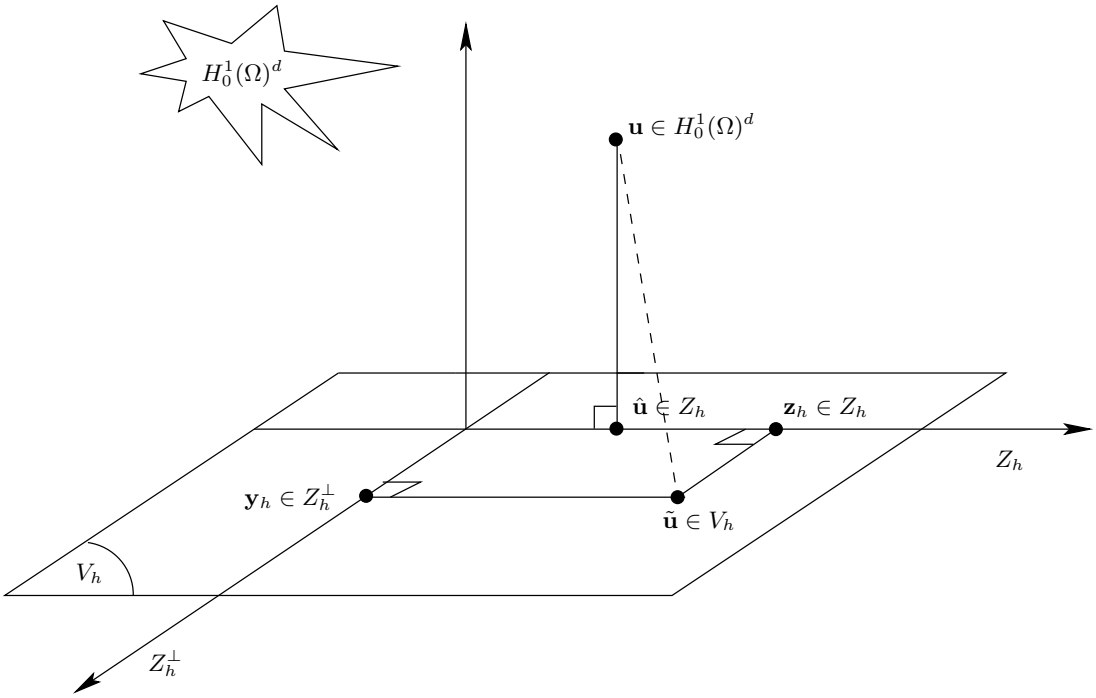


FIG. 2.3 – L'erreur décomposée à partir du noyau.

Posons $\mathbf{z}_h = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{y}_h$. Nous avons $\mathbf{z}_h \in Z_h$ car, pour tout $q_h \in Q_h$:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{z}_h, q_h) &= b(\tilde{\mathbf{u}}, q_h) - b(\mathbf{y}_h, q_h) \\ &= b(\tilde{\mathbf{u}}, q_h) - b(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, q_h) \quad \text{par definition de } \mathbf{y}_h \\ &= b(\mathbf{u}, q_h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi décomposé $\tilde{\mathbf{u}} \in V_h$ en $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{y}_h + \mathbf{z}_h$ avec $\mathbf{y}_h \in Z_h^\perp$ et $\mathbf{z}_h \in Z_h$ (voir Fig. 2.3). Ainsi (2.9) devient

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} &\leq \|\mathbf{z}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ &= \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{y}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{y}_h\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ &\leq (1 + 1/\beta_h)\, \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

De (2.6) et (2.8) nous obtenons

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq 2\,(1 + 1/\beta_h)\, \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{p} - p\| \tag{2.10}$$

Il reste ensuite à estimer l'erreur $\|p - p_h\|$ sur la pression. Posons $\xi_h = \tilde{p} - p_h$. De (2.7) :

$$\|\xi_h\| \leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, \xi_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}}$$

Or

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{v}_h, \xi_h) &= b(\mathbf{v}_h, \tilde{p}) - b(\mathbf{v}_h, p_h) \\
&= b(\mathbf{v}_h, \tilde{p}) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \text{d'après le problème discret} \\
&= b(\mathbf{v}_h, \tilde{p}) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), -a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h), -b(\mathbf{v}_h, p) \quad \text{d'après le problème continu} \\
&= a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h), +b(\mathbf{v}_h, \tilde{p} - p)
\end{aligned}$$

Si bien que l'inéquation précédente devient :

$$\begin{aligned}
\|\xi_h\| &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h), +b(\mathbf{v}_h, \tilde{p} - p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \\
&\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{p} - p\|}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \\
&= \frac{1}{\beta_h} \left(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{p} - p\| \right) \\
&= \frac{2}{\beta_h} \left((1 + 1/\beta_h) \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{p} - p\| \right)
\end{aligned}$$

De l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|p_h - p\| &\leq \|\tilde{p}_h - p\| + \|\xi_h\| \\
&\leq \frac{2}{\beta_h} (1 + 1/\beta_h) \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \left(1 + \frac{2}{\beta_h} (1 + 1/\beta_h) \right) \|\tilde{p} - p\|
\end{aligned}$$

Pour que les majorations (2.11) et (2.11) soient utilisables, il faut que β_h ne tende pas vers zéro lorsque $h \to 0$. Plus précisément, supposons qu'il existe une constante β telle que

$$\beta_h \geq \beta^* > 0$$

Cette condition n'est pas vérifiée par tous les espaces V_h et Q_h. Elle est vraie pour $k = 2$ et $l = 1$ et plus généralement pour $k = l + 1$ et $l \geq 1$. La démonstration en est relativement difficile.

2.2 Adaptation de la triangulation

2.2.1 Algorithme d'adaptation isotrope

On suppose qu'on est capable d'estimer l'erreur locale $e_h(x) = |u(x) - u_h(x)|$ en chaque point $x \in \overline{\Omega}$. On note $\overline{e}_h = \|e_h\|_{0,\Omega}/\text{mes}(\Omega)$ la valeur moyenne de l'erreur sur Ω. Il s'agit de faire le lien entre l'erreur et la taille locale des arêtes afin d'adapter la triangulation à l'erreur.

On définit la carte de taille des arêtes de la triangulation $h(x)$, définie dans chaque élément et interprétée comme un champs continu. Les générateurs de triangulation sont capables de générer des triangulations 2D qui respectent une carte de taille $h(x)$ donnée.

On se donne une erreur ε à ne pas dépasser et $\theta \in]0, 1[$ un coefficient de progresion géométrique des tailles des arêtes de la triangulation.

L'algorithme d'adaptation est le suivant :
- $n = 0$: soit $\mathcal{T}_h^{(0)}$ une triangulation initiale, par exemple associée à une carte locale $h^{(0)} =$ *constante*.
- $n \geq 0$: on suppose la triangulation $\mathcal{T}_h^{(n)}$ connue.

– **Étape 1** : résoudre le problème pour la triangulation $\mathcal{T}_h^{(n)}$: on note $u_h^{(n)}$ la solution associée.
– **Étape 2** : estimer l'erreur $e_h^{(n)}(x)$ dans Ω et sa valeur moyenne $\overline{e}_h^{(n)}$.
si $\overline{e}_h^{(n)} < \varepsilon \|\nabla u_h\|_{0,2,\Omega}$ **alors stop**.
– **Étape 3** : calculer la nouvelle carte de taille suivant :

$$h^{(n+1)}(x) := \theta \frac{e_h^{(n)}(x)}{\overline{e}_h^{(n)}} h^{(n)}(x) \quad \text{pp } x \in \Omega$$

– **Étape 4** : générer la nouvelle triangulation $\mathcal{T}_h^{(n+1)}$ associée à la carte de taille $h^{(n+1)}$.
On observe que la séquence converge vers une triangulation qui équidistribue l'erreur :

$$\frac{e_h^{(n)}}{\overline{e}_h^{(n)}} \to 1 \text{ pp } x \in \Omega$$

Lorsque ce régime asymptotique est atteint, la taille des éléments diminue alors d'un facteur $\theta \in]0,1[$ uniformément sur Ω. La triangulation étant de plus en plus fine, d'après l'estimation d'erreur *a priori*, l'erreur diminue et l'algorithme s'arête lorsqu'elle est inférieure à ε. Pour que cet algorithme marche bien, il reste à estimer l'erreur $e_h(x)$.

2.2.2 Estimation de l'erreur locale

Babuska et Miller en 1987 montrent que :

$$\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \, \mathrm{d}x \;\leq\; \eta^2 \;:=\; C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K^2 \int_K (f + \Delta u_h)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{h_K}{2} \int_{\partial K} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]^2 \mathrm{d}s \right)$$

où $h_K = \mathrm{diam}(K)$ et $[.]$ désigne le saut d'une quantité discontinue à la traversée de la frontière ∂K de l'élément. Cette estimation globale est très fine : la constante C ne dépend que du facteur d'aspect σ de la triangulation : plus les triangles sont voisins du triangle (ou tétraède) isocèle, plus C est proche de 1. On a $\sigma = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma_K$, avec σ_K le facteur d'aspect de K, définit par :

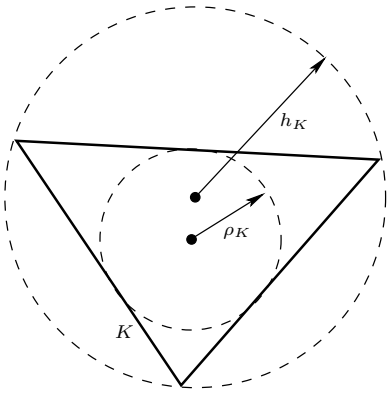


FIG. 2.4 – Cercle inscrit et cercle circonscrit dans un triangle.

$$\sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K}$$

où ρ_K est le diamètre du cercle (de la sphère) inscrit dans K, appelé aussi rondeur de K. En clair, il ne faut pas que les triangles soient trop aplatis sinon la constante C devient grande. La qualité

de l'élement K est mesurée en le comparant au triangle isocèle K_{iso} :

$$q_K := \frac{\sigma_K}{\sigma_{K_{\text{iso}}}}$$

On remplace dans l'algorithme précédent l'erreur $e_h(x)$ par l'estimateur $\eta_h(x) = \eta_K$ si $x \in K$ avec

$$\eta_K^2 := h_K^2 \int_K (f + \Delta u_h)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{h_K}{2} \int_{\partial K} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]^2 \mathrm{d}s$$

et on obtient un estimateur d'erreur local. Par exemple, pour $k = 1$, on a $\Delta u_h = 0$ et le gradient de u_h est constant : il est donc facile de calculer sont saut au travers des trois arêtes d'un triangle (ou des quatres faces d'un tétraèdre).

En guise de test, considère un problème pour lequel on connait la solution exacte, et qui varie très brutalement en x mais lentement en y. Suivant [Pic03, FP00, FP01], on chosis f de sorte que :

$$u(x_1, x_2) = 4 \left(1 - e^{-\alpha x_1} - \left(1 - e^{-\alpha}\right) x_1\right) x_2 (1 - x_2)$$

avec $\alpha = 100$. Les lignes isoqleur de la solution sont représentées sur la Fig. 2.2.2.a. On se donne aussi deux familles de triangulations : l'une isotrope et l'autre avec des triangles très étirés dans une direction. Ainsi la Fig. 2.2.2.b représente un maillage isotrope pour $h_1 = h_2 = 0.1$ et la Fig. 2.2.2.c un maillage anisotrope pour $h_1 = 0.025$ et $h_2 = 0.2$.

On mesure ensuite l'erreur ainsi que ce que prévoit l'estimateur d'erreur. Pour tester l'efficité de l'estimateur, on mesure la quantité :

$$\kappa := \frac{\eta}{\|u - u_h\|_{a,\Omega}}$$

Lorsque $Eff > 1$ c'est qu'on sur-estime la solution. Pour la famille isotrope :

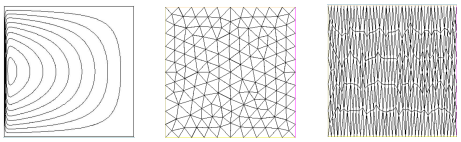


FIG. 2.5 – Solution anisotrope et maillage associé.

i	h_1	h_2	$error$	κ
1	1/100	1/100	1.36	4.71
2	1/200	1/200	0.69	4.64
3	1/400	1/400	0.35	4.74

et pour la famille anisotrope :

i	h_1	h_2	$error$	κ
1	1/200	4/100	1.36	4.71
2	1/400	2/100	0.69	4.64
3	1/800	1/100	0.35	4.74

Pour la famille anisotrope, le maillage de même indexe est deux fois plus fin dans la direction x_1 et quatre fois plus grossier dans la direction x_2, soit un facteur d'étirement $h_2/h_1 = 8$ constant.

On constate que pour les deux familles l'erreur est divisée par deux à chaque rafinement, ce qui confirme le comportement en $O(h)$ de l'erreur. La famille anisotrope fournit une erreur d'environ moitié pour un maillage de même indice.

Le facteur d'efficacité pour la première famille est voisin de 4.7 alors que celui de la seconde famille est environ 13.5 alors qu'on pourrait s'attendre à ce que la seconde famille soit plus efficace que la première. C'est simplement parce que l'estimateur de l'erreur ne prend pas en compte l'anisotropie.

2.2.3 Anisotropie

Zienkiewicz et Zhu on proposé un autre estimateur d'erreur directement à partir du gradients de u_h. Le gradient ∇u_h est $\mathbb{P}_{k-1}$ et discontinu aux interfaces des éléments. On note $\pi_h(\nabla u_h)$ sa projection dans l'espace des fonctions continues et $\mathbb{P}_k$ par éléments.

L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{0,2,\Omega} \leq \|\nabla u - \pi_h(\nabla u_h)\|_{0,2,\Omega} + \|\pi_h(\nabla u_h) - \nabla u\|_{0,2,\Omega}$$

On sait que $\|\nabla(u-u_h)\|_{0,2,\Omega}$ se comporte en $\mathcal{O}(h^k)$. Or on constate que $\|\nabla u - \pi_h(\nabla u_h)\|_{0,2,\Omega}$ converge plus vite, en $\mathcal{O}(h^{k+1})$ sur des grilles parallèles aux axes, et, plus généralement en $\mathcal{O}(h^{k+\beta})$ sur des gilles non structurées, avec $\beta > 0$ (superconvergence). Si bien que le terme dominant lorsque h tends vers zéro est $\|\pi_h(\nabla u_h) - \nabla u\|_{0,2,\Omega}$.

Zienkiewicz et Zhu ont proposé :

$$\eta_K := \|\pi_h(\nabla u_h) - \nabla u\|_{0,2,K}$$

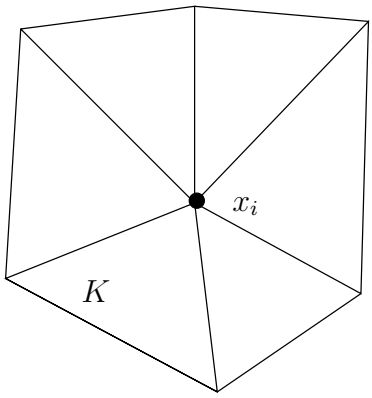


FIG. 2.6 – Ensemble des éléments contenant un sommet x_i du maillage.

Par exemple pour $k = 1$, il est facile (voir Fig. 2.2.3) de calculer $\pi_h(\nabla u_h)$ en un sommet x_i du maillage à partir de ∇u_h, qui est constant par éléments, en faisant une moyenne pondérée :

$$\pi_h(\nabla u_h)(x_i) = \frac{\sum_{K;x\in K} \text{mes(K)}\ \nabla u_{h|K}}{\sum_{K;x\in K} \text{mes(K)}}$$

Pour la famille isotrope on obtient avec cet estimateur :

i	h_1	h_2	*error*	κ
1	1/100	1/100	1.36	**0.81**
2	1/200	1/200	0.69	**0.92**
3	1/400	1/400	0.35	**0.97**

et pour la famille anisotrope :

i	h_1	h_2	$error$	κ
1	1/200	4/100	1.36	**0.94**
2	1/400	2/100	0.69	**0.98**
3	1/800	1/100	0.35	**0.99**

On observe que dans les deux cas κ tends vers 1 par valeurs inférieures. Ainsi cet estimateur est asymptotiquement exact, que ce soit sur familles de maillages isotropes ou anisotropes. Lorsque les familles de maillages sont à côté parallèles aux axes, il est possible de prouver la propriété de superconvergence. Mais lorsque les maillages sont non-structurés, cette propriété n'est pas prouvée, bien qu'elle soit observée experimentalement.

On va essayer de construire un estimateur qui marche dans les deux cas et qui soit mathématiquement fondé.

2.3 Anisotropie et résidu

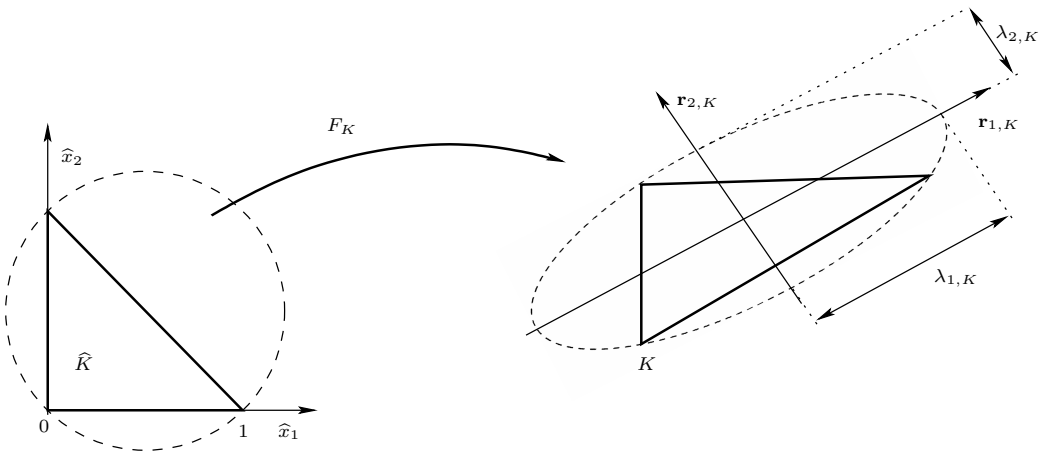


FIG. 2.7 – Transformation de l'élement de référence.

En 2000, Kunert (Numer. Math. 2000) étend l'estimateur à partir des résidus du cas isotrope au cas anisotrope et montrenet que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u-u_h)|^2 \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\|f+\Delta u_h\|_{0,2,K} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{mes}(\partial K)}{\lambda_{1,K}\dots\lambda_{d,K}}\right)^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,K} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{i,K} \ \left(\mathbf{r}_{i,K}^T G_K(u-u_h)\mathbf{r}_{i,K}\right) \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec les notations

$$G_K(v) = \left(\int_K \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x \right)_{1\leq i,j\leq d} = \int_K \nabla v \otimes \nabla v \,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

tandisque $(\lambda_{i,K})_{1\leq i\leq d}$ et $(\mathrm{r}_{i,K})_{1\leq i\leq d}$ désignent respectivement les valeurs et les vecteurs propres de la transformation F_K de l'élément de référence $\widehat{K}$ vers l'élément K (voir Fig. 2.3). La transformation étant linéaire, elle peut s'écrire $F(\widehat{x}) = B_K x + b_K$, où B_K est une matrice $d \times d$ et b_K un

vecteur de $\mathbb{R}^d$. On décompose B_K selon $B_K = R_K^T \Lambda_K P_K$, où Λ_K est diagonale et R_K et P_K sont unitaires. Le cercle unité $\widehat{x}^T \widehat{x} = 1$ associé au triangle de référence $\widehat{K}$ est transformé en l'ellipse d'équation $(x - b_K)^T R_K^T \Lambda_K^{-2} R_K (x - b_K) = 1$.

Pour que le membre de droite de (2.11) puisse conduire à un estimateur d'erreur, il reste à approcher $G_K(u - u_h)$ par une quantité qui ne dépend que de u_h. Pour cela on utilise la propriété de superconvergence qui permet d'estimer $\nabla(u - u_h)$ à l'aide de $\nabla u - \pi_h(\nabla u_h)$:

$$G_K(u - u_h) \approx \int_K (\nabla u - \pi_h(\nabla u_h)) \otimes (\nabla u - \pi_h(\nabla u_h))\, \mathrm{d}x,$$

Pour la famille isotrope on obtient avec cet estimateur :

i	h_1	h_2	$error$	κ
1	1/100	1/100	1.36	**2.22**
2	1/200	1/200	0.69	**2.42**
3	1/400	1/400	0.35	**2.54**

et pour la famille anisotrope :

i	h_1	h_2	$error$	κ
1	1/200	4/100	1.36	**2.43**
2	1/400	2/100	0.69	**2.62**
3	1/800	1/100	0.35	**2.68**

Cet estimateur suggère d'utiliser des maillages tels que les facteurs d'étirement soient corrélés à l'erreur :

$$\lambda_{i,K} \ \left(\mathbf{r}_{i,K}^T G_K(u - u_h) \mathbf{r}_{i,K}\right) = \lambda_{1,K} \ \left(\mathbf{r}_{1,K}^T G_K(u - u_h) \mathbf{r}_{1,K}\right), \ \forall i = 2 \ldots d, \ forall K \in \mathcal{T}_h$$

c'est-à-dire d'utiliser des maillages anisotropes. Il s'agit d'équidistribuer l'erreur dans toutes les directions. Pour cela on va essayer d'aligner les directions du triangle (de sont ellipse associée) avec les vecteurs propres de $G_K(u - u_h)$.

2.4 Triangulations anisotropes et métriques

On va fournir au générateur de maillage non plus seulement une carte de taille $h(x)$ en chaque point x du domaine mais une taille dans chaque direction propre, autrement dit une métrique. On se fixe une tolérance ε et on itère jusqu'à ce qu'elle soit atteinte :

i	ε	N	$error$	κ	$etirement$
1	1/8	854	0.25	2.70	262
2	1/16	2793	0.13	2.75	288
3	1/32	10812	0.062	2.79	425
3	1/64	42562	0.031	2.79	1199

L'erreur est divisée par deux à chaque nouveau maillage tandisque le nombre de sommets du maillage N augmente. Le facteur d'efficacité de l'estimateur anisotrope est assez constant tandisque les éléments deviennent de plus en plus étirés. La Fig. 2.4 compare les trois familles de triangulation utilisées pour résoudre le problème : la famille de maillage adaptés anisotrope donne à nombre d'éléments égal une erreur plus de dix fois plus faible. Autrement dit, à erreur égale, elle utilise 100 fois moins d'éléments. Cette méthode est de plus complètement automatisable lorsque les directions privilégiées de la solution exacte non sont pas connues a priori, et que la deuxième famille à facteur d'étirement constant n'est plus utilisable.

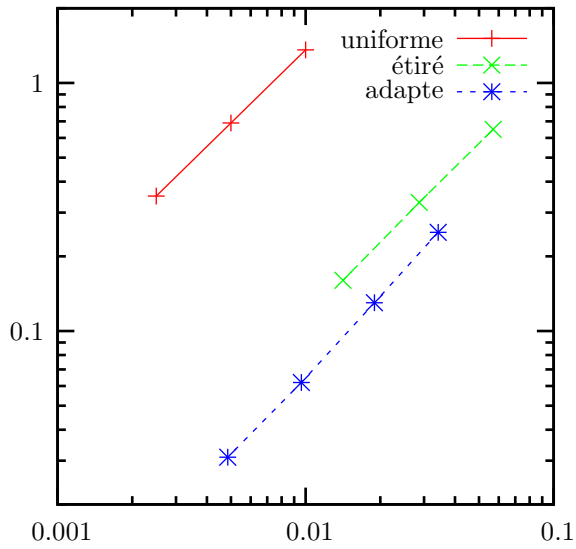


FIG. 2.8 – Erreur $\|\nabla(u-u_h)\|$ en fonction de $N^{-1/2}$ où N est le nombre de sommets du maillage.

2.5 Estimation d'erreur a posteriori

On se restreint au cas de la dimension $d=2$ pour simplifier la présentation, bien que les méthodes s'étendent sans problème aux dimensions supérieures. On suppose donc que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné polygonal. On part d'un problème modèle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u) & = & f \quad \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.12}$$

où $f(x) \in L^2(\Omega)$. On pose

$$\begin{array}{rcl} a(u,v) & = & \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v \,\mathrm{d}x \\ l(v) & = & \displaystyle\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\ V & = & H_0^1(\Omega) \\ V_h & = & \{v_h \in V;\ v_{h|K} \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{array}$$

où $\mathcal{T}_h$ est une triangulation de Ω et $k \geq 1$ un entier strictement positif. On utilisera la norme de l'énergie :

$$\begin{array}{rcl} \|v\|_{a,\Omega} & := & \sqrt{a(v,v)},\ \forall v \in V \\ \|v\|_{a,\omega} & := & \left(\displaystyle\int_\omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\ \forall v \in H^1(\omega),\ \forall \omega \subset \Omega \end{array}$$

qui est équivalente dans V à la norme induite par $\|.\|_{1,\Omega}$ (inégalité de Poincaré). La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V$$

et sont analogue approché : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h,v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V_h$$

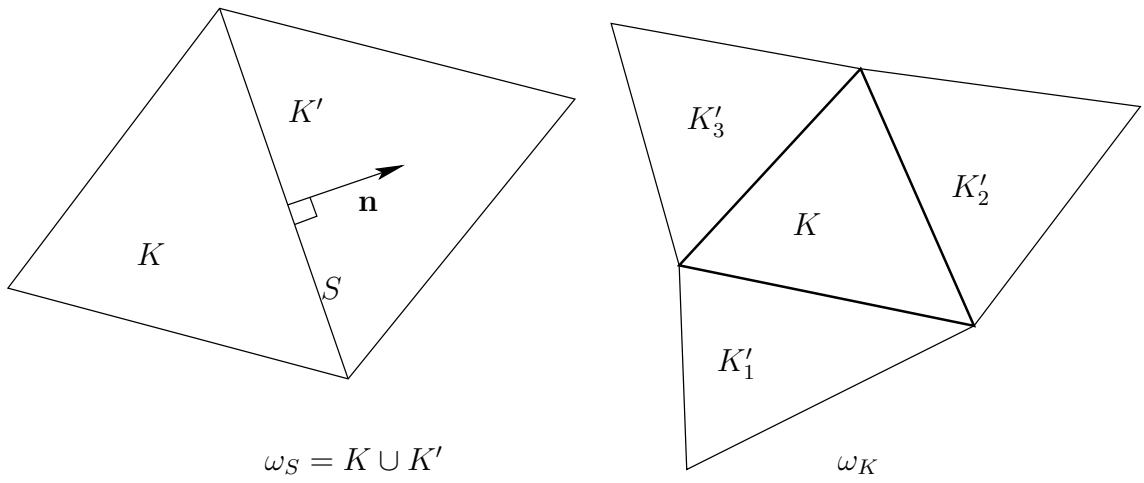


FIG. 2.9 – À gauche : élement K et son voisin K' à travers une arête S du maillage ; à droite : voisinage ω_K.

On introduit à présent l'estimateur d'erreur suivant :

$$\eta_K := \left(h_K^2 \, \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}^2 + \sum_{S \in \partial K \setminus \partial\Omega} \frac{h_S}{2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,2,S}^2 \right)^{1/2} \tag{2.13}$$

Cet estimateur utilise le résidu sur l'élément $K \in \mathcal{T}_h$ ainsi que les sauts de la dérivée normale au travers des $(d+1)$ faces de K. Nous avons introduit les notations (voir Fig. 2.5) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h &= \cap_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\cap_{S \subset \partial K \setminus \partial\Omega} S \right) \text{ : l'ensemble des arêtes du maillage et internes à } \Omega \\
h_K &= \operatorname{diam}(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \\
h_S &= \operatorname{diam}(S), \ \forall S \in \mathcal{E}_h \\
\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] &= \frac{\partial u_{h|K}}{\partial n} - \frac{\partial u_{h|K'}}{\partial n} \text{ sur } S = \partial K \cap \partial K', \text{ lorsque la normale } \mathbf{n} \text{ est orientée de } K \text{ vers } K'. \\
\omega_S &= K \cup K' \text{ pour tout } S = \partial K \cap \partial K' \in \mathcal{E}_h \\
\omega_K &= \cup_{S \subset \partial K \setminus \partial\Omega} \, \omega_S
\end{aligned}$$

Pour chaque élément K, on a également noté f_K la projection $L^2(K)$ de f sur $\mathbb{P}_{k-2}$:

$$\int_K f_K \, p \, \mathrm{d}x = \int_K f \, p \, \mathrm{d}x, \ \forall p \in \mathbb{P}_{k-2}$$

Remarquons que pour $k = 1$, on a $f_K = 0$ tandisque pour $k = 2$, f_K est constant par élément.

THÉORÈME **2.1** *(estimateur local de l'erreur)*
Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives et indépendantes de h telles que :

$$\|u - u_h\|_{a,\Omega} \leq C_1 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_K\|_{0,2,K}^2 \right)^{1/2} \tag{2.14}$$

$$\eta_K \leq C_2 \left(\|u - u_h\|_{a,\omega_K}^2 + \sum_{K' \in \omega_K} h_{K'}^2 \|f - f_{K'}\|_{0,2,K'}^2 \right)^{1/2}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h \tag{2.15}$$

Remarque **2.1** *(encadrement de l'erreur globale)*
On introduit l'estimateur global de l'erreur :

$$\eta := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}$$

En sommant (2.15) *et en utilisant* (2.14) *il vient :*

$$\frac{1}{(d+1)C_2^2}\eta^2 \;\leq\; \|u-u_h\|_{a,\Omega}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|f-f_K\|_{0,2,K}^2 \;\leq\; C_1^2\eta^2 + (1+C_1^2) \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|f-f_K\|_{0,2,K}^2$$

Dans la pratique le terme en $(f - f_K)$ *est très petit sinon nul, par exemple pour* $k = 1$ *ou bien pour* $f \in \mathbb{P}_{k-2}$*. Dans ce cas, on a l'encadrement de l'erreur :*

$$C\eta \leq \|u-u_h\|_{a,\Omega} \leq \tilde{C}\eta$$

L'estimateur d'erreur est d'autant plus efficace que C *et* $\tilde{C}$ *sont proches de* 1*. Lorsqu'on connait la solution exacte* u*, on peut mesurer le coefficient d'efficacité de l'estimateur* η *:*

$$C_\eta(h) = \frac{\|u-u_h\|_{a,\Omega}}{\eta}$$

Des tests numériques montrent que

$$\lim_{h\to 0} C_\eta(h) = 1$$

ce qui valide la démarche du point de vue pratique.

Démonstration : On montre le théorème 2.1 en trois étapes :

1. une manipulation algébrique du résidu
2. la majoration globale de l'erreur (2.14)
3. la majoration inverse et locale de l'erreur (2.15)

Étape 1 : transformation du résidu

Pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned}
a(u-u_h,v) &= (f,v) - a(u_h,v) \\
&= \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_h.\nabla v\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K f\,v\,\mathrm{d}x - \int_K \nabla u_h.\nabla v\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K f\,v\,\mathrm{d}x + \int_K \Delta u_h\,v\,\mathrm{d}x - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n_K}\,v\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (f+\Delta u_h)\,v\,\mathrm{d}x - \sum_{S\in\mathcal{E}_h} \int_{\partial S} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] v\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Or, pour tout $v_h \in V_h$ on a $a(u-u_h,v_h) = 0$, d'où :

$$a(u-u_h,v) \;=\; \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (f+\Delta u_h)\,(v-v_h)\,\mathrm{d}x - \sum_{S\in\mathcal{E}_h} \int_{\partial S} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] (v-v_h)\,\mathrm{d}s$$

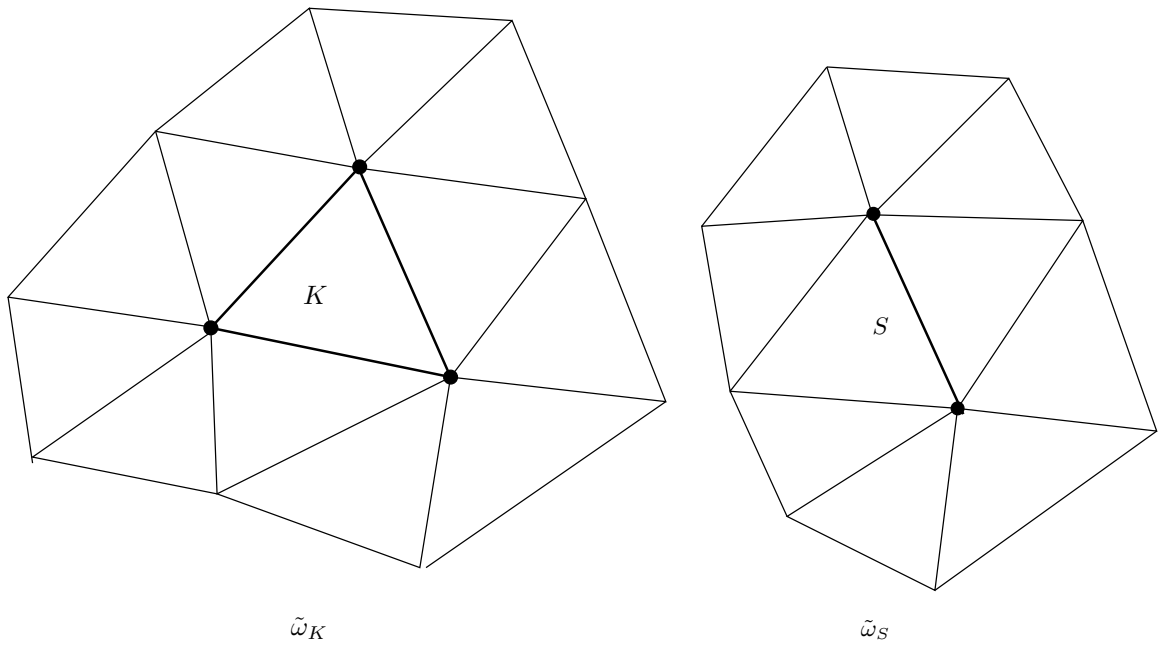


FIG. 2.10 – Voisinages étendus $\tilde{\omega}_K$ de l'élément K et $\tilde{\omega}_S$ de l'arête S.

Les faces interns du maillages étant communes à deux éléments exactement, l'expression précédente s'écrit encore :

$$a(u-u_h,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f+\Delta u_h)\,(v-v_h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} \int_{\partial S} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] (v-v_h)\,\mathrm{d}s \right\} \tag{2.16}$$

Étape 2 : majoration globale

Pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$, on note $\tilde{\omega}_K$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}_h$ ayant au moins un sommet en commun avec K (voir Fig. 2.5). De même, pour toute arête $S \in \mathcal{E}_h$, on note $\tilde{\omega}_S$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}_h$ ayant au moins un sommet en commun avec S.

On utilise le résultat suivant, ont la démonstration de ce lemme est assez technique [BG95] :

LEMME **2.2** *(projection locale)*
On peut construire un opérateur de projection local de $R_h : V \to V_h$ tel que :

$$\begin{aligned} \|v-R_hv\|_{0,2,K} &\leq C_3 h_K \|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_K} \\ \|v-R_hv\|_{0,2,S} &\leq C_4 h_S^{1/2} \|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_K} \end{aligned}$$

On choisis $v_h = R_h v$ dans l'égalité (2.16), puis, avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les inégalités

précédentes, il vient :

$$
\begin{aligned}
a(u-u_h,v) &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{\|f+\Delta u_h\|_{0,2,K}\,\|v-R_hv\|_{0,2,K}+\frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{0,2,S}\|v-R_hv\|_{0,2,S}\right\}\\
&\leq C_5\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left\{h_K\|f+\Delta u_h\|_{0,2,K}\,\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_K}+\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\left(\frac{h_S}{2}\right)^{1/2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{0,2,S}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_S}\right\}\\
&\leq C_5\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2\|f+\Delta u_h\|_{1,2,K}^2+\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\frac{h_S}{2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{0,2,S}^2\right)^{1/2}\\
&\quad\times\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_K}^2+\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_S}^2\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

avec $C_5=\max\left(C_3,\sqrt{2}C_3\right)$. Le premier facteur va faire apparaitre la somme des estimateurs locaux (2.13) :

$$
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2\|f+\Delta u_h\|_{1,2,K}^2+\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\frac{h_S}{2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{0,2,S}^2\leq\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2+h_K^2\|f-f_K\|_{0,2,K}^2
$$

Le second facteur va pouvoir être majoré avec $\|v\|_{a,\Omega}$. Pour cela notons $N(K)$ (resp. $N(S)$) le nombre de fois que K (resp. S) apparait dans un voisinage $\omega_{K'}$:

$$
\begin{aligned}
N(K) &= \mathrm{card}\{K'\in\mathcal{T}_h;\ K\subset\omega_{K'}\}\\
N(S) &= \mathrm{card}\{K'\in\mathcal{T}_h;\ S\subset\omega_{K'}\}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\sum_{K'\in\mathcal{T}_h}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_{K'}}^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}N(K)\|v\|_{1,2,K}^2\leq\left(\max_{K\in\mathcal{T}_h}N(K)\right)\|v\|_{1,2,\Omega}^2\\
\sum_{K'\in\mathcal{T}_h}\sum_{S\subset\partial K'\setminus\partial\Omega}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_S}^2 &= \sum_{S\in\mathcal{E}_h}N(S)\sum_{K/S\subset\partial K}\|v\|_{1,2,K}^2\leq 2\left(\max_{S\in\mathcal{E}_h}N(S)\right)\|v\|_{1,2,\Omega}^2
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_K}^2+\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\|v\|_{1,2,\tilde{\omega}_S}^2\leq C_6\|v\|_{1,2,\Omega}^2\leq C_0^{-1}C_6\|v\|_{a,\Omega}^2
$$

où C_0 est la constante de l'inégalité de Poincarré (A.1) et

$$
C_6=\max_{K\in\mathcal{T}_h}N(K)+2\max_{S\in\mathcal{E}_h}N(S)
$$

On choisis alors $v=u-u_h$:

$$
\|u-u_h\|_{a,\Omega}^2\leq C_0^{-1/2}C_5C_6^{1/2}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2+h_K^2\|f-f_K\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2}\|u-u_h\|_{a,\Omega}
$$

ce qui donne directement (2.14) avec $C_1=C_0^{-1/2}C_5C_6^{1/2}$.

Étape 3 : majoration inverse locale

Cette majoration inverse et locale est plus technique : elle est due à une démonstration de Verfürth en 1994 [Ver94].

Étape 3.a : majoration dans un élément

Pour tout $k \in \mathcal{T}_h$ on introduit b_K la fonction bulle sur K telle que $b_K = 0$ sur ∂K $\max_{x\in K} b_K(x) = 1$.
On choisis pour fonction-test :

$$v_K := (f_K + \Delta u_h)\, b_K$$

bulle : détails, Fig.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\int_K (f_K + \Delta u_h)\, v_K \,\mathrm{d}x &= \int_K f\, v_K \,\mathrm{d}x + \int_K \Delta u_h\, v_K \,\mathrm{d}x + \int_K (f_K - f)\, v_K \,\mathrm{d}x \\
&= \int_K \nabla u.\nabla v_K \,\mathrm{d}x - \int_K \nabla u_h.\nabla v_K \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n}\, v_K \,\mathrm{d}x + \int_K (f_K - f)\, v_K \,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{en utilisant } (P) \text{ avec } v = v_k \text{ et la formule de Green} \\
&= \int_K \nabla(u - u_h).\nabla v_K \,\mathrm{d}x + \int_K (f_K - f)\, v_K \,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{car } b_K = 0 \text{ sur } \partial K \\
&\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K}\, \|\nabla v_K\|_{0,2,K} + \|f - f_K\|_{0,2,K}\, \|v_K\|_{0,2,K} \\
&\quad \text{par l'inégalité de Chauchy-Schwartz} \\
&\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K}\, \|\nabla v_K\|_{0,2,K} + \|f - f_K\|_{0,2,K}\, \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K} \\
&\quad \text{car } \max_K b_K = 1 \\
&\leq \left\{ C_{11}^{1/2} h_K^{-1}\, \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K} + \|f - f_K\|_{0,2,K} \right\}\, \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K} \\
&\quad \text{avec le lemme A.1, page 43, équation (A.3)}
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_K (f_K + \Delta u_h)\, v_K \,\mathrm{d}x &= \int_K (f_K + \Delta u_h)^2\, b_K \,\mathrm{d}x \\
&\geq C_{10}\, \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}^2 \\
&\quad \text{avec le lemme A.1, page 43, équation (A.2)}
\end{aligned}$$

En regroupant les deux inégalités précédentes et en divisant par $\|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}$ il vient :

$$\|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K} \leq C_7 \left\{ h_K^{-1}\, \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K} + \|f - f_K\|_{0,2,K} \right\} \tag{2.17}$$

avec $C_7 = C_{10}^{-1} \max\left(1, C_{11}^{1/2}\right)$.

Étape 3.b : majoration sur une arête

Soit $S \in \mathcal{E}_h$ une arête interne du maillage et soient K et K' les deux éléments de $\mathcal{T}_h$ tels que $S = \partial K \cap \partial K'$. On pose $\omega_S = K \cup K'$. Soit b_S la fonction bulle associée à S telle que $b_S = 0$ sur $\partial\omega_S$ et $\max_{x\in\omega_S} b_S(x) = 1$.

bulle arête : détails, Fig.

On choisis pour fonction-test :

$$v_S := \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] b_S = \left(\frac{\partial u_{h|K}}{\partial n_K} + \frac{\partial u_{h|K'}}{\partial n_{K'}}\right) b_S$$

avec, par convention d'orientation, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_K = -\mathbf{n}_{K'}$ sur S. D'une part :

$$\begin{aligned}
\int_S \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] v_S \,\mathrm{d}s &= \sum_{K\subset\omega_S} \int_K \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v_S \,\mathrm{d}s \\
&\quad \text{car } b_S = 0 \text{ sur } \partial\omega_S \\
&= \sum_{K\subset\omega_S} \int_K \Delta u_h \, v_S \,\mathrm{d}x + \int_K \nabla u_h . \nabla v_S \,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{par la formule de Green} \\
&= \sum_{K\subset\omega_S} \int_K (f + \Delta u_h) \, v_S \,\mathrm{d}x + \int_K \nabla u_h . \nabla v_S \,\mathrm{d}x + \int_K f \, v_S \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{K\subset\omega_S} \int_K (f + \Delta u_h) \, v_S \,\mathrm{d}x + \int_K \nabla (u_h - u) . \nabla v_S \,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{en utilisant } (P) \text{ avec } v = v_S \\
&\leq \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|v_S\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|\nabla v_S\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \\
&\quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz} \\
&\leq C_{13}^{1/2} h_S^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,S} \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \\
&\quad + C_{14}^{1/2} h_S^{-1/2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,S} \left(\sum_{K\subset\omega_S} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \\
&\quad \text{avec le lemme A.2, page 44, équations (A.5)-(A.6)}
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_S \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] v_S \,\mathrm{d}s &= \int_S \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]^2 b_S \,\mathrm{d}s \\
&\geq C_{12} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,S}^2 \\
&\quad \text{avec le lemme A.2, page 44, équation (A.4)}
\end{aligned}$$

En regroupant les deux inégalités précédentes et en divisant par $\left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,S}$ il vient :

$$\left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \right\|_{0,2,S} \leq C_8 \left\{ h_S^{-1/2} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,2,\omega_S} + \left(\sum_{K\subset\omega_S} h_S \|f_K + \Delta u_h\|_{0,2,K}^2\right)^{1/2} \right\} \tag{2.18}$$

avec $C_8 = C_{12} \max\left(C_{13}^{-1/2}, C_{14}^{1/2}\right)$.

Étape 3.c : majoration de l'estimateur

De la définition (2.13) de l'estimateur, on a :

$$
\begin{aligned}
\eta_K^2 &= h_K^2 \left\| f_K + \Delta u_h \right\|_{0,2,K}^2 + \sum_{S \subset \partial K \setminus \partial\Omega} \frac{h_S}{2} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,2,S}^2 \\
&\leq h_K^2 \left\| f_K + \Delta u_h \right\|_{0,2,K}^2 + \frac{C_8}{2} \sum_{S \subset \partial K \setminus \partial\Omega} \left\{ \left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,\omega_S} + h_S \left(\sum_{K' \subset \omega_S} \left\| f_{K'} + \Delta u_h \right\|_{0,2,K'}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 \\
&\quad \text{en utilisant (2.18)} \\
&\leq h_K^2 \left\| f_K + \Delta u_h \right\|_{0,2,K}^2 + C_8 \sum_{S \subset \partial K \setminus \partial\Omega} \left\{ \left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,\omega_S}^2 + h_S^2 \sum_{K' \subset \omega_S} \left\| f_{K'} + \Delta u_h \right\|_{0,2,K'}^2 \right\} \\
&\quad \text{avec l'identité } (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2),\ \forall a, b \in \mathbb{R} \\
&\leq (d+1) C_8 \left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,\omega_K}^2 + (1 + (d+1)C_8) h_K^2 \sum_{K' \subset \omega_K} \left\| f_{K'} + \Delta u_h \right\|_{0,2,K'}^2 \\
&\quad \text{car } h_S \leq h_K \text{ pour } S \subset \partial K, \text{ et en regroupant les sommes} \\
&\leq (d+1) C_8 \left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,\omega_K}^2 + C_7^2 (1 + (d+1)C_8) \sum_{K' \subset \omega_K} \left\{ \left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,K} + h_K \left\| f - f_K \right\|_{0,2,K} \right\}^2 \\
&\quad \text{en ayant utilisé (2.18)} \\
&\leq C_9 \left(\left\| \nabla(u - u_h) \right\|_{0,2,\omega_K}^2 + h_K^2 \sum_{K' \subset \omega_K} \left\| f - f_K \right\|_{0,2,K'}^2 \right) \\
&\quad \text{avec l'identité } (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2),\ \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ et en regroupant les termes}
\end{aligned}
$$

avec $C_9 = 2C_7^2 + (d+1)(1 + 2C_7^2)C_8$. On a donc montré (2.15) avec $C_2 = C_9^{1/2}$. $\square$

Bibliographie

[BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer Verlag, 1991.

[BG95] C. Bernardi and V. Girault. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements. *Technical Report 95036 de l'université Pierre et Marie Curie, Paris*, 1995.

[DL72] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[FG83] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian methods – application to the numerical solution of boundary-value problems.* Elsevier, 1983.

[FP00] L. Formaggia and L. Perotto. Anisotropic error estimate for elliptic problems. *Technical Repport 18, Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique de Lausanne, Switzerland, 200, to appear in Numer. Math.*, 2000.

[FP01] L. Formaggia and L. Perotto. New anisotropic *a priori* error estimate. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.

[GR86] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations – Theory and algorithms.* Springer Verlag, 1986.

[HT74] P. Hood and G. Taylor. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In Finite element in flow problems*, Oden ed., UAH Press*, 1974.

[Pic03] M. Picasso. Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 19 :13–23, 2003.

[Pir88] O. Pironneau. *Méthode des éléments finis pour les fluides.* Masson, 1988.

[Sar04] P. Saramito. *Language* `C++` *et calcul scientifique (99 pages).* IMAG, 2004. `http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/cours-cxx.pdf`.

[SR01a] P. Saramito and N. Roquet. **rheolef** *: A finite element environment, i.e. some* `C++` *classes and unix commands.* `http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef`, 2001.

[SR01b] P. Saramito and N. Roquet. **rheolef** *: User's manual, (*64 pages*).* `http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/usrman.ps.gz`, 2001.

[SRE03] P. Saramito, N. Roquet, and J. Étienne. RHEOLEF : Reference manual, (*148 pages*). `http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Pierre.Saramito/rheolef/rheolef.ps.gz`, 2003.

[Ver94] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *J. Comput. Appl. Math.*, 50 :67–80, 1994.

Annexe A

Résultats annexes

A.1 Inégalités de Poincaré et de Korn

Les normes $\|.\|_{1,\Omega}$ et $\|.\|_a$ sont équivalentes. Le plus dur est de montrer qu'il existe une constante $C_0 > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$C_0\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{v}\|_a \leq \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \tag{A.1}$$

L'inégalité dans l'autre sens est plus facile et est atteinte avec une constante égale à un.

A.2 Propriétés des fonctions-bulles

Pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$ on définit la fonction bulle b_K par :

$$b_K(x) = \begin{cases} (d+1)^{d+1}\ \pi_{i=1}^{d+1}\lambda_{i,K}(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\lambda_{i,K}(x)$, $1 \leq i \leq d+1$ est la i-ème coordonée barycentrique, définie comme étant la distance de x à la i-èeme face de K. On a en particulier :

$$\begin{aligned} \text{supp}(b_K) &= K \\ b_K(x) &> 0,\ \forall x \in K \\ \max_{x\in K}\ b_K(x) &= 1 \\ b_K(x) &= 0,\ \forall x \in \partial K \end{aligned}$$

Par exemple, pour $d = 1$ on a $b_K(x) = 4x(1-x)$ sur le segment $K = [0,1]$. Pour $d = 2$ (voir Fig. A.1.a) on a $b_K(x) = 27x_1x_2(1-x_1-x_2)$ sur le triangle $K = \{(x_1,x_2) \in [0,1]^2; x_1+x_2 \leq 1\}$. Pour $d = 3$, on a $b_K(x) = 256x_1x_2x_3(1-x_1-x_2-x_3)$ sur le triangle $K = \{(x_1,x_2,x_3) \in [0,1]^3; x_1+x_2+x_3 \leq 1\}$.

De même, pour toute face $S \in \mathcal{E}_h$ on définit la fonction bulle b_S par :

$$b_S(x) = \begin{cases} d^d\ \pi_{i=1}^{d}\lambda_{i,K}(x) & \text{si } x \in K \\ d^d\ \pi_{i=1}^{d}\lambda_{i,K'}(x) & \text{si } x \in K' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $S = \partial K \cap \partial K'$ et où, quitte à renuméroter les faces sur K et K', nous avons supposé que S était la $(d+1)$-ème face de K et de K'. On a en particulier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}(b_S) &= \mathrm{int}(\overline{K} \cup \overline{K}') \\
b_S(x) &> 0, \forall x \in \mathrm{int}(\overline{K} \cup \overline{K}') \\
\max_{x \in \overline{K} \cup \overline{K}'} b_S(x) &= 1 \\
b_S(x) &= 0, \ \forall x \in \partial(\overline{K} \cup \overline{K}')
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $d = 1$ et $K =]0, 1]$, $K' = [-1, 0]$ alors $b_S(x) = 1 - x$ sur K et $1 + x$ sur K'. Pour $d = 2$ (voir Fig. A.1.b) on a $b_S(x) = 4x_1x_2$ sur le triangle $K = \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2; x_1 + x_2 \leq 1\}$ et $b_S(x) = 4(1 - x_1)(1 - x_2)$ sur le triangle $K' = \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2; x_1 + x_2 \geq 1\}$.

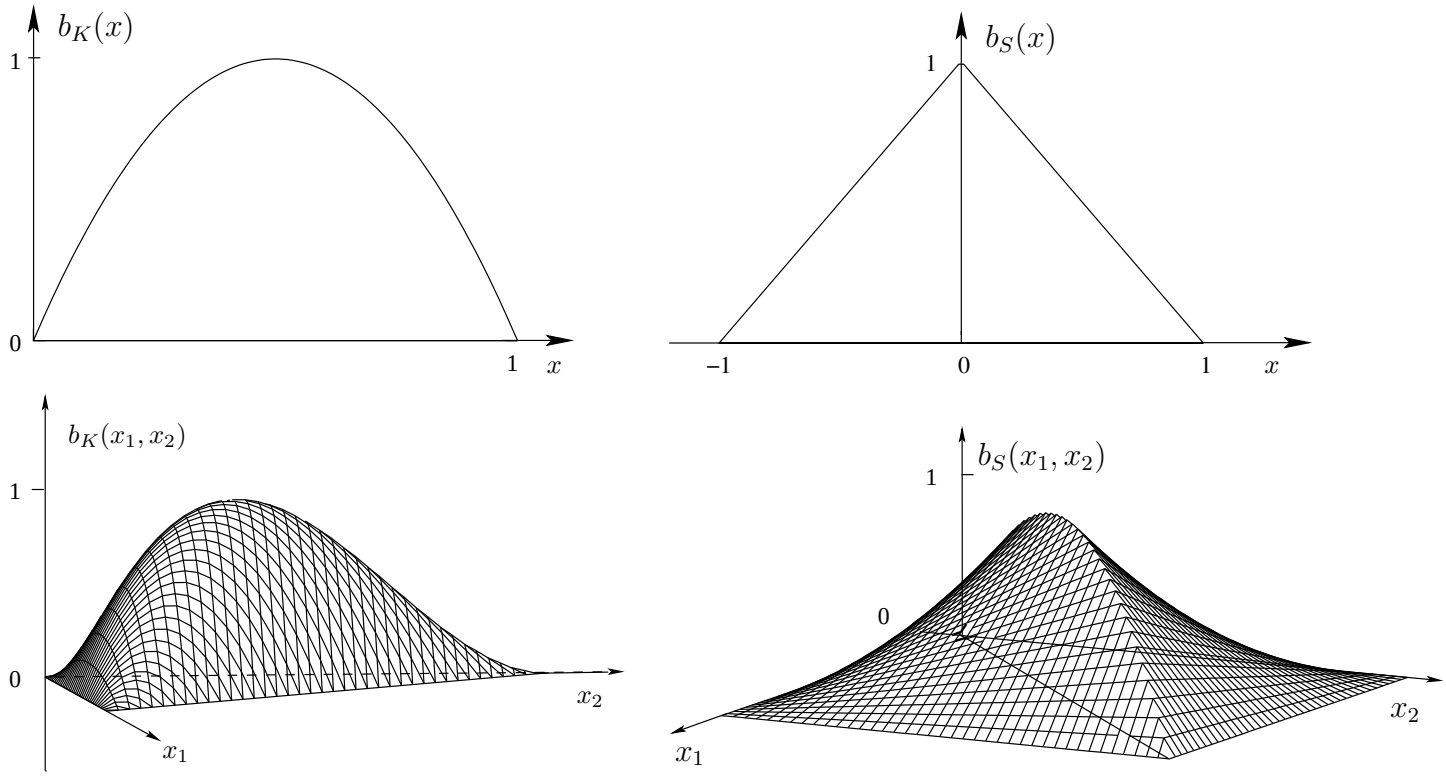


FIG. A.1 – Fonction bulle pour $d = 1$ et 2 : (gauche) b_K sur un élément K ; (droite) b_S sur une face S.

LEMME **A.1** *(bulles éléments)*
Il existe deux constantes C_{10} et C_{11} telles que pour tout $\varphi \in \mathbb{P}_{k-2}$ on ait :

$$C_{10} \, \|\varphi\|_{0,2,K}^2 \leq \int_K b_K \, \varphi^2 \, \mathrm{d}x \tag{A.2}$$

$$\|\nabla(b_K \varphi)\|_{0,2,K}^2 \leq C_{11} h_K^{-2} \, \|\varphi\|_{0,2,K}^2 \tag{A.3}$$

Démonstration : By construction, b_K is strictly positive inside K. Hence

$$\|\varphi\|_{b,K} = \left(\int_K \varphi^2(x) \, b_K(x) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

defines a norm on $\mathcal{P}_{k-2}$. Since $\mathcal{P}_{k-2}$ is a finite dimensional space, all norms are equivalent, and thus $\|\varphi\|_{b,K}$ is equivalent to the L^2 norm : there exists C and $\tilde{C}$ such that for all $\varphi \in \mathcal{P}_{k-2}$:

$$C \int_K \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_K \varphi^2(x)\, b_K(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \tilde{C} \int_K \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où (A.2). Le second résultat nécéssite un changement de variable de l'élément de référence $\widehat{K}$ vers K : $x = F_K(\widehat{x}) = B_K\widehat{x} + b_K$. On note $\sigma_h = \max_{K\in\mathcal{T}_h}$ et

$$\sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K}$$

et où ρ_K est le diamètre de la sphère inscrite dans K. On suppose que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulière, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive σ telle que $\sigma_h \leq \sigma$, $\forall h > 0$. On a :

RAPIDE!! prop de B_K^{-1} ?

$$\begin{aligned}
\int_K |\nabla(\varphi\, b_K)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\widehat{K}} \left|\widehat{\nabla}(\widehat{\varphi}\,\widehat{b}_K).B_K^{-1}\right|^2 |B_K|\,\mathrm{d}\widehat{x} \\
&\leq \sigma h_K^{-2} \int_{\widehat{K}} \left|\widehat{\nabla}(\widehat{\varphi}\,\widehat{b}_K)\right|^2 |B_K|\,\mathrm{d}\widehat{x}
\end{aligned}$$

L'intégrale définit une norme sur $\mathcal{P}_{k-2}(\widehat{K})$ qui est équivalente à celle de $L^2(\widehat{K})$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_K |\nabla(\varphi\, b_K)|^2 \,\mathrm{d}x &\leq C\sigma h_K^{-2} \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}^2\, |B_K|\,\mathrm{d}\widehat{x} \\
&\leq C\sigma h_K^{-2} \int_K \varphi^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ce qui montre (A.3). □

Lemme **A.2** *(bulles faces)*
Il existe trois constantes C_{12}, C_{13} et C_{14} telles que pour tout $\phi \in \mathbb{P}_{k-1}$ on ait :

$$C_{12}\, \|\phi\|_{0,2,S}^2 \;\leq\; \int_S b_S\, \phi^2\,\mathrm{d}s \tag{A.4}$$

$$\sum_{K\subset\omega_S} \|b_S\,\phi\|_{0,2,K}^2 \;\leq\; C_{13} h_S\, \|\phi\|_{0,2,S}^2 \tag{A.5}$$

$$\sum_{K\subset\omega_S} \|\nabla(b_S\,\phi)\|_{0,2,K}^2 \;\leq\; C_{14} h_S^{-1}\, \|\phi\|_{0,2,S}^2 \tag{A.6}$$

Démonstration : La démonstration de (A.4) est similaire à celle du lemme précédent : par équivalence des normes en dimension finie. Les preuve de (A.5) et (A.6) reposent sur un argument de transformation sur l'élement de référence, également similaire à celui du lemme précédent. □

Table des matières

1 Discrétisation et algorithmes **3**

1.1 Introduction 3

1.1.1 L'équation de la chaleur 3

1.1.2 L'équation de l'élasticité 4

1.1.3 Les équations de Navier-Stokes 4

1.2 Problèmes elliptiques 5

1.2.1 Approximation par différences finies 5

1.2.2 Approximation par éléments finis 6

1.3 Phénomène de diffusion-convection 10

1.3.1 Où est la difficulté ? 11

1.3.2 La méthode des caractéristiques 12

1.4 L'équation de l'élasticité 13

1.4.1 Formulation variationnelle 14

1.4.2 Formulation variationnelle approchée 14

1.4.3 Estimation d'erreur 15

1.4.4 Le problème modal 15

1.4.5 Elasticité quasi-incompressible 16

1.5 Les équations de Navier-Stokes 17

1.5.1 Résolution du problème de Stokes discret 18

2 Estimations d'erreur **22**

2.1 Estimation d'erreur a priori 22

2.1.1 Problème elliptique (chaleur, elasticité, etc) 22

2.1.2 Problème mixte (Stokes, etc) 23

2.2 Adaptation de la triangulation 27

2.2.1 Algorithme d'adaptation isotrope 27

2.2.2 Estimation de l'erreur locale 28

2.2.3 Anisotropie 30

2.3 Anisotropie et résidu 31

2.4 Triangulations anisotropes et métriques 32

2.5 Estimation d'erreur a posteriori 33

A Résultats annexes **42**

A.1 Inégalités de Poincaré et de Korn 42

A.2 Propriétés des fonctions-bulles 42