



**HAL**  
open science

# Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles

Sylvie Benzoni-Gavage

► **To cite this version:**

Sylvie Benzoni-Gavage. Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles. 3rd cycle. Lyon, 2005, pp.114. cel-00582339

**HAL Id: cel-00582339**

**<https://cel.hal.science/cel-00582339v1>**

Submitted on 1 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles

Sylvie Benzoni-Gavage <sup>1</sup>

6 octobre 2007



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Modélisation et outils de base</b>	<b>7</b>
1	Thermodynamique . . . . .	7
1.1	Premier principe . . . . .	7
1.2	Vitesse du son . . . . .	7
1.3	Paramètres fondamentaux . . . . .	9
1.4	Fluides de Bethe-Weyl . . . . .	11
1.5	Gaz parfaits . . . . .	12
1.6	Fluides de van der Waals . . . . .	16
1.7	Équations d'état incomplètes . . . . .	21
2	Équations du mouvement . . . . .	21
2.1	Lois de conservation . . . . .	21
2.2	Formulation Lagrangienne . . . . .	22
2.3	Équations non conservatives . . . . .	26
2.4	Signification de la vitesse du son . . . . .	28
2.5	Modèles isentropiques ou isothermes . . . . .	28
3	Analyse de base . . . . .	29
3.1	Symétrisation . . . . .	29
3.2	Vitesses caractéristiques . . . . .	31
3.3	Introduction aux ondes de choc . . . . .	33
<b>II</b>	<b>Écoulements mono-dimensionnels</b>	<b>41</b>
1	Problème de Riemann . . . . .	42
1.1	Ensemble de Hugoniot . . . . .	42
1.2	Admissibilité des chocs . . . . .	53
1.3	Ondes de détente . . . . .	57
1.4	Résolution du problème de Riemann . . . . .	60
2	Approximation numérique . . . . .	63
2.1	Schémas "centrés" . . . . .	63
2.2	Schémas "décentrés" . . . . .	69
<b>III</b>	<b>Écoulements multi-dimensionnels</b>	<b>75</b>
1	Conditions aux limites . . . . .	75
1.1	Conditions aux limites dissipatives . . . . .	76
1.2	Nombre de conditions aux limites . . . . .	79
1.3	Nature des conditions aux limites . . . . .	81
2	Stabilité des chocs . . . . .	87
2.1	Description du problème . . . . .	87

2.2	Méthode générale . . . . .	89
2.3	Calcul effectif du déterminant de Lopatinskii . . . . .	90
2.4	Conditions de stabilité des chocs . . . . .	93
<b>Appendice</b>		<b>99</b>
<b>A Aide-mémoire</b>		<b>99</b>
<b>B Compléments mathématiques</b>		<b>101</b>
<b>Index</b>		<b>108</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>112</b>

# Introduction

L'étude de la mécanique des fluides a commencé au XVIIIème siècle avec les travaux d'Euler [1707-1783] et de d'Alembert [1717-1783], où l'on voit en particulier émerger une théorie de la propagation du son. Concernant la propagation des ondes de choc, les premiers travaux importants sont dûs à Riemann [1826-1866]. La théorie a connu son essor au cours du XXème siècle et notamment lors de la seconde guerre mondiale, pour des raisons éminemment non pacifiques... De nos jours, la dynamique des fluides compressibles a aussi de nombreux domaines d'application civils, comme l'aéronautique (écoulements autour d'obstacles), les turbo-machines (écoulements dans des géométries compliquées), la thermohydraulique (écoulements liquide - vapeur). Or de nombreuses questions restent ouvertes, si l'on considère des fluides complexes (n'obéissant pas à la loi des gaz parfaits) en plusieurs dimensions d'espace. L'objectif du cours est de faire un tour d'horizon de l'état des connaissances, essentiellement à propos des fluides compressibles, non visqueux et non conducteurs de chaleur. (Concernant les fluides compressibles visqueux, on pourra consulter le livre de Lions [8] ou l'excellent article de revue [3].) Les fluides compressibles non visqueux et non conducteurs de chaleur, typiquement des gaz, relèvent de la théorie des systèmes de lois de conservation du 1er ordre, laquelle théorie a d'ailleurs trouvé l'essentiel de son inspiration (et de son vocabulaire) dans la dynamique des gaz. Toutefois aucun prérequis n'est nécessaire concernant cette théorie. En revanche, une bonne maîtrise du calcul différentiel est recommandée. En particulier, si elle n'est pas indispensable à la compréhension du cours, la notion de *forme différentielle* est assez importante. Il faut au minimum connaître la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \partial_i f dx_i$$

avec la *convention de sommation des indices répétés* (courante et bien commode) et la notation simplifiée

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

La forme différentielle  $df$  définit en chaque point de  $\mathbb{R}^n$  une forme linéaire, qui s'identifie naturellement à la matrice ligne de coefficients  $\partial_i f$ . Le champ de vecteurs correspondant est noté  $\nabla f$ . Il vaut précisément

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où  $\partial/\partial x_i$  désigne le  $i$ -ème vecteur de base de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui est une notation étonnante à première vue mais tout à fait standard<sup>1</sup>. Maintenant si  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $d\mathbf{f}$  définit en chaque point de  $\mathbb{R}^n$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , qui s'identifie naturellement avec une matrice carrée dont les lignes correspondent aux formes différentielles  $df_i$ , si  $f_i$  sont les composantes de  $\mathbf{f}$ . Ainsi les coefficients de cette matrice sont

$$(d\mathbf{f})_{i,j} = \partial_j f_i.$$

Par analogie avec le cas scalaire, on définit aussi

$$\nabla \mathbf{f} = (d\mathbf{f})^*, \quad \text{i.e.} \quad (\nabla \mathbf{f})_{i,j} = \partial_i f_j.$$

La notion de *divergence* nous sera également fort utile. Par définition,

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{tr} d\mathbf{f} = \partial_i f_i.$$

On a en particulier la formule suivante, si  $\varphi$  est une fonction à valeurs scalaires,

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{f}) = d\varphi \cdot \mathbf{f} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

On peut remarquer que le premier terme s'écrit aussi

$$d\varphi \cdot \mathbf{f} = \partial_j \varphi f_j = \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi,$$

ce qui est la notation courante en physique, où il faut simplement comprendre  $(\mathbf{f} \cdot \nabla)$  comme l'opérateur différentiel  $f_j \partial_j$ .

**Exercice :** Vérifier composante par composante la formule

$$d\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g}$$

pour  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Pour compléter le tableau des notations, on introduit la divergence de fonctions à valeurs matricielles. La convention que nous adoptons est la suivante. Si  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , on identifie la valeur de  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  à la *matrice ligne* de composantes

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_j = \partial_i A_{i,j}.$$

Autrement dit,  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  est la forme différentielle

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \left( A \frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

En particulier, si  $f$  est scalaire, on a

$$\operatorname{div}(f \mathbf{I}) = df,$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité. Une autre formule utile est

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \mathbf{f}) = (\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{f} + \mathbf{A} : \nabla \mathbf{f},$$

où

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = a_{i,j} b_{i,j}.$$

---

<sup>1</sup>Les formes différentielles élémentaires  $dx_i$  sont ainsi caractérisées par  $\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_j^i$ .

# Chapitre I

## Modélisation et outils de base

Il est utile de comprendre d'où viennent les équations aux dérivées partielles (ÉDP) que nous allons étudier, et la signification des différents paramètres physiques mis en jeu. Nous allons donc donner quelques notions de base concernant la modélisation. Le but n'est pas de justifier ces notions. On se reportera pour cela à des ouvrages spécialisés, par exemple [2, 11]. D'autre part, l'analyse mathématique de ces ÉDP nécessite quelques outils que nous introduirons en fin de chapitre.

### 1 Thermodynamique

#### 1.1 Premier principe

Une *équation d'état complète* est une relation qui exprime l'énergie interne spécifique<sup>1</sup>  $e$  d'un matériau en fonction de son *volume spécifique*  $v$  et de son *entropie* spécifique  $s$ . En disant cela, on présuppose la notion d'entropie, c'est-à-dire en fait le premier principe de la thermodynamique.

La relation fondamentale de la thermodynamique

$$de = -p dv + T ds$$

permet de définir la pression  $p$  et la température  $T$  par

$$p = - \left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_s, \quad T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v.$$

(Comme il est d'usage, on rappellera en indice d'un trait vertical la variable maintenue constante dans les dérivées partielles. Une notation plus simple pour les dérivées partielles sera cependant aussi utilisée, en l'absence de risque de confusion.)

#### 1.2 Vitesse du son

Dans un fluide compressible, les états "observables" sont tels que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0,$$

---

<sup>1</sup>L'adjectif *spécifique* est un synonyme ancien de *massique*, c'est-à-dire par unité de masse.



où  $\rho = 1/v$  est la densité. (Une fonction de  $v$  sera regardée indifféremment comme fonction de  $\rho$ .) Et on définit la *vitesse du son* (adiabatique) par

$$c := \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}.$$

**Exercice :** Vérifier que cette quantité est bien homogène à une vitesse. On verra plus loin pourquoi cette vitesse est celle du son, au sens commun du terme.

On peut également considérer la *vitesse du son* isotherme

$$a := \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T}.$$

Pour donner du sens à cette quantité, il faut que  $(v, s) \mapsto (v, T)$  soit un changement de variables. C'est vrai au moins localement si

$$\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \neq 0,$$

ce que l'on supposera. Cette hypothèse permet également de définir la *capacité calorifique à volume constant* par

$$c_v := \frac{T}{\left. \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \right|_v} = \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_v.$$

Si de plus, on suppose la Hessienne de  $e$  inversible,  $(v, s) \mapsto (p, T)$  est un changement variable (local), et on peut définir le *coefficient de dilatation à pression constante*

$$\alpha = \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p.$$

On montre alors la relation suivante entre la vitesse du son adiabatique et la vitesse du son isotherme

$$c^2 = a^2 \left( 1 + \alpha^2 \frac{a^2}{v^2} \frac{T}{c_v} \right).$$

**Dém.** C'est un simple exercice de dérivation de fonctions composées. Pour alléger l'écriture, on utilise des tildas pour distinguer les fonctions de variables différentes, et les variables par rapport auxquelles on dérive sont notées en indice. En dérivant

$$e(v, s) = \tilde{e}(v, T(v, s)) \quad \text{et} \quad p(v, s) = \tilde{p}(v, T(v, s))$$

par rapport à  $s$  on obtient

$$T = c_v T'_s \quad \text{et} \quad p'_s = \tilde{p}'_T T'_s,$$

d'où

$$p'_s c_v = T \tilde{p}'_T.$$

D'autre part, en dérivant

$$p = \tilde{p}(\tilde{v}(p, T), T)$$

par rapport à  $T$ , on trouve

$$0 = \tilde{p}'_v \alpha + \tilde{p}'_T.$$

Enfin, en dérivant  $p(v, s) = \tilde{p}(v, T(v, s))$  et en utilisant  $p'_s = -T'_v$ , on a

$$p'_v = \tilde{p}'_v + \tilde{p}'_T T'_v = \tilde{p}'_v (1 + \alpha p'_s) = \tilde{p}'_v \left(1 - \alpha^2 \tilde{p}'_v \frac{T}{c_v}\right)$$

d'après la première relation obtenue. Ceci donne la relation énoncée entre  $c^2 = -v^2 p'_v$  et  $a^2 = -v^2 \tilde{p}'_v$ .  $\square$

On voit donc que la vitesse du son isotherme est toujours plus faible que la vitesse du son adiabatique, en supposant évidemment  $c_v > 0$ .

**Exercice :** Calculer la valeur numérique de  $a$  pour un gaz parfait à  $0^\circ \text{C}$  : on rappelle la loi des gaz parfaits  $pv = RT$ , où  $v$  est le volume *molaire* et  $R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ , et on considère un gaz de masse molaire  $28,5 \text{ g}$ . Attention à la cohérence des unités! Un aide-mémoire est donné en appendice A.

Le tableau I.1 donne quelques vitesses du son réellement observées.

### 1.3 Paramètres fondamentaux

Nous aurons besoin de certains paramètres adimensionnels pour caractériser le fluide. Le premier est une sorte de vitesse du son adimensionnelle, que nous appelons *coefficient adiabatique* :

$$\gamma := - \frac{v}{p} \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s.$$

On voit donc que la vitesse du son est reliée à  $\gamma$  par

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}.$$

Ceci une formule très utile à connaître.

$\triangle$  Attention, dans beaucoup d'ouvrages, l'exposant adiabatique  $\gamma$  est défini différemment, comme le rapport des capacités calorifiques  $c_p/c_v$ . Les deux définitions coïncident seulement dans le cas des gaz polytropiques, comme on le verra plus loin.

On définit également une sorte de capacité calorifique adimensionnelle :

$$\delta := \frac{pv}{T c_v}.$$

Cette quantité est parfois notée  $g$ , mais nous réservons la lettre  $g$  pour le *potentiel chimique*.

On pourra remarquer que  $\gamma$  et  $\delta$  sont tous deux reliés aux dérivées partielles secondes de  $e$  :

$$\gamma = \frac{v}{p} \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}, \quad \delta = \frac{pv}{T^2} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2}.$$

Fluide	Vitesse du son [m/s]
Hélium (0° C)	965
Néon (0° C)	435
Hydrogène (0° C)	1284
Azote (0° C)	334
Air sec (0° C)	331
Vapeur d'eau (134° C)	494
Eau distillée (25° C)	1497
Eau de mer (25° C)	1531

Tableau I.1: Vitesses du son expérimentales, d'après [16], p. E-47.

Nous définissons ensuite un paramètre lié à la dérivée croisée de  $e$ , appelé *coefficient de Grüneisen* :

$$\Gamma := -\frac{v}{T} \frac{\partial^2 e}{\partial s \partial v}.$$

Noter que par définition de  $p$  et  $T$  on a aussi

$$\Gamma = -\frac{v}{T} \frac{\partial T}{\partial v} \Big|_s = \frac{v}{T} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_v.$$

Enfin, nous définissons

$$\mathcal{G} := -\frac{1}{2} v \frac{\frac{\partial^3 e}{\partial v^3} \Big|_s}{\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \Big|_s},$$

dont nous verrons qu'il joue un grand rôle dans les phénomènes non-linéaires.

**Exercice :** Vérifier la formule équivalente

$$\mathcal{G} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho} \Big|_s.$$

⚠ Attention, ce paramètre est noté  $\Gamma$  dans certains articles !

## 1.4 Fluides de Bethe-Weyl

En premier lieu, on supposera toujours  $p$  et  $T$  positives. Certains comportements asymptotiques pourront être nécessaires :

- l'absence de borne supérieure pour la pression lorsque la densité tend vers sa valeur maximale  $\rho_{\max}$  (qui est souvent supposée elle-même infinie),
- la coïncidence de l'isotherme 0 avec l'isentrope 0 (parfois appelée troisième principe de la thermodynamique). Cependant, cette condition n'étant pas satisfaite par les gaz parfaits (!), on ne la prendra pas en compte en général.

De plus, comme on l'a déjà signalé,  $\gamma$  doit être positif pour les états physiquement observables.

D'autre part, la thermodynamique classique demande que  $e$  soit une fonction convexe de  $(v, s)$ . Ceci revient à demander

$$\gamma \delta \geq \Gamma^2.$$

**Digression :** Cette hypothèse de convexité permet en particulier de définir la *fonction convexe conjuguée*

$$e^*(-p, T) = \sup_{v, s > 0} \{ -pv + Ts - e(v, s) \}$$

de  $e$  (voir [1]). Dans ce cas, la fonction  $g = -e^*$  est une fonction *concave* des variables duales  $(-p, T)$ , et elle définit le *potentiel chimique*. Par construction,

$$dg = v dp - s dT.$$

Lorsque  $e$  est strictement convexe,  $(v, s) \mapsto (p, T)$  est un changement de variables local, et on a simplement

$$g = e - T s + p v.$$

□

Une autre hypothèse assez utile pour éviter les comportements pathologiques est de demander que  $\Gamma$  soit positif. Bien qu'il existe des contre-exemples, cette condition sera satisfaite dans la plupart des cas que nous considérerons. Son intérêt essentiel est d'exclure les intersections de courbes isentropes dans le plan  $(v, p)$ .

**Exercice :** Si  $\Gamma > 0$ , montrer que  $\delta > 0$  équivaut à

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v > 0.$$

(C'est ce qui fait l'intérêt de la Cocotte-Minute !)

Enfin, la convexité des courbes isentropes dans le plan  $(v, p)$ , assurée par la positivité de  $\mathcal{G}$ , joue également un rôle important.

Tout ceci nous conduit à la définition suivante.

**Définition I.1** Nous appellerons fluide de Bethe-Weyl un matériau avec une équation d'état complète, définissant des pressions et températures positives, avec  $p(0, s) = 0$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_{max}} p(\rho, s) = +\infty$$

et tel que

$$\gamma > 0, \quad \gamma \delta \geq \Gamma^2, \quad \Gamma > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G} > 0.$$

Cette définition ne dit pas dans quel domaine en  $(v, s)$  les différentes conditions doivent être satisfaites. Si elles le sont partout (c'est-à-dire pour  $v, s \in ]0, +\infty[$ ), comme pour les gaz parfaits, c'est parfait !! Ce n'est pas le cas pour des fluides plus complexes, ne serait-ce que pour les fluides de van der Waals. Nous préciserons sur cet exemple les états délimitant les différentes régions.

Donnons pour terminer cette partie abstraite une définition de plus, dont nous verrons l'intérêt plus loin.

**Définition I.2** Nous appellerons fluide de Smith un fluide de Bethe-Weyl satisfaisant de plus

$$\Gamma < 2\gamma.$$

## 1.5 Gaz parfaits

La célèbre loi des gaz parfaits exprime que le produit du volume molaire et de la pression est proportionnel à la température, la constante multiplicative étant traditionnellement notée  $R$  et appelée constante des gaz parfaits. Si, par un léger abus de notation (qui ne devrait pas perturber ceux qui sont attentifs aux unités),  $v$  désigne le *volume molaire* (c'est-à-dire le volume spécifique multiplié par la *masse molaire*  $M$ , autrement dit la densité est  $\rho = M/v$ ) d'un gaz parfait, alors

$$p v = R T, \quad R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

Ceci ne fournit pas directement une équation d'état complète. En fait, la loi des gaz parfaits est compatible avec le premier principe pourvu que

$$e = \varepsilon(v^{-R} \exp s),$$

$\varepsilon$  étant une fonction strictement croissante (au sens où  $\varepsilon' > 0$ , ce qui assure  $e'_v = -p < 0$  et  $e'_s = T > 0$ ). On trouve cette expression de  $e$  en calculant d'abord l'énergie libre (volumique)

$$f = e - T s,$$

qui doit être telle que

$$df = -s dT - p dv.$$

En intégrant

$$-p = -\frac{RT}{v}$$

par rapport à  $v$ , on voit que  $f$  est de la forme

$$f = -RT \ln v + \varphi(T).$$

On en déduit

$$s = -\left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_v = R \ln v - \varphi'(T),$$

d'où

$$v^{-R} \exp s = \exp(-\varphi'(T)).$$

Si  $\psi := \exp(-\varphi')$  est inversible, ce qui est vrai au moins localement si  $\varphi''$  ne s'annule pas,

$$T = \psi^{-1}(v^{-R} \exp s)$$

et

$$e = f + T s = \varphi(T) - T \varphi'(T) = (\varphi - \varphi' \text{id}) \circ \psi^{-1}(v^{-R} \exp s).$$

On remarque que  $\varphi$  est liée à la capacité calorifique  $c_v$  par

$$c_v = -T \varphi''(T).$$

Donc la condition  $\varphi'' \neq 0$  équivaut, pour  $T \neq 0$ , à  $c_v \neq 0$ . Dans ce cas, on a

$$\varepsilon = (\varphi - \varphi' \text{id}) \circ \psi^{-1}.$$

**Exercice :** Montrer que pour un gaz parfait

$$\gamma = \Gamma + 1, \quad \delta = \Gamma = \frac{R}{c_v}.$$

Par suite,  $e$  est convexe, et a fortiori  $\gamma > 0$ , dès que  $c_v > 0$ .

**Gaz polytropiques.** On distinguera parmi les gaz parfaits ceux pour lesquels  $c_v$  est constant (parfois le terme “gaz parfaits” suppose déjà cette propriété) et on les appellera *gaz polytropiques*. Par définition de  $c_v$ , cela signifie que

$$e = c_v T$$

à une constante près, que l’on peut supposer nulle. Cette relation se traduit par

$$\varepsilon(w) = c_v w \varepsilon'(w)$$

quel que soit  $w > 0$ . Autrement dit,  $\varepsilon$  n’est autre, à une constante multiplicative près, que la fonction puissance

$$\varepsilon(w) = w^{1/c_v}.$$

Par ailleurs, les relations  $p = RT\rho$ ,  $e = c_v T$  et  $\gamma = 1 + R/c_v$  impliquent de façon évidente

$$p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Cette relation entre  $p$ ,  $\rho$  et  $e$  est ce qu’on appelle une *équation d’état incomplète* (on reviendra plus loin sur cette notion). Elle est très largement utilisée dans la communauté mathématique étudiant la dynamique des fluides compressibles, et couramment appelée  *$\gamma$ -law* dans la littérature anglophone. Un cas encore simplifié est obtenu lorsqu’on suppose l’écoulement *isentropique*. Dans ce cas,

$$e = \rho^{R/c_v} \exp(s/c_v)$$

et donc

$$p = \rho^\gamma$$

à une constante multiplicative près. Cette relation est encore plus couramment utilisée que sa version non isentropique.

Comme nous l’avons annoncé plus haut, notre coefficient  $\gamma$  coïncide, pour les gaz polytropiques, avec le rapport des capacités calorifiques défini par

$$\gamma_0 := \frac{c_p}{c_v}.$$

En effet, rappelons que par définition

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p,$$

où  $h$  est l’*enthalpie* spécifique :

$$h = e + p v.$$

Ainsi,

$$c_p = c_v + p \alpha, \quad \alpha = \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p = \frac{R}{p}.$$

On retrouve la relation bien connue  $c_p - c_v = R$  (dite de Mayer), qui implique

$$\gamma = \frac{R + c_v}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma_0.$$

Pour terminer sur les gaz polytropiques, on peut calculer

$$\mathcal{G} = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

C’est en fait une conséquence immédiate de l’expression de  $\mathcal{G}$  que l’on verra pour les équations d’état incomplètes générales, en utilisant le fait que  $\gamma$  est ici constant.

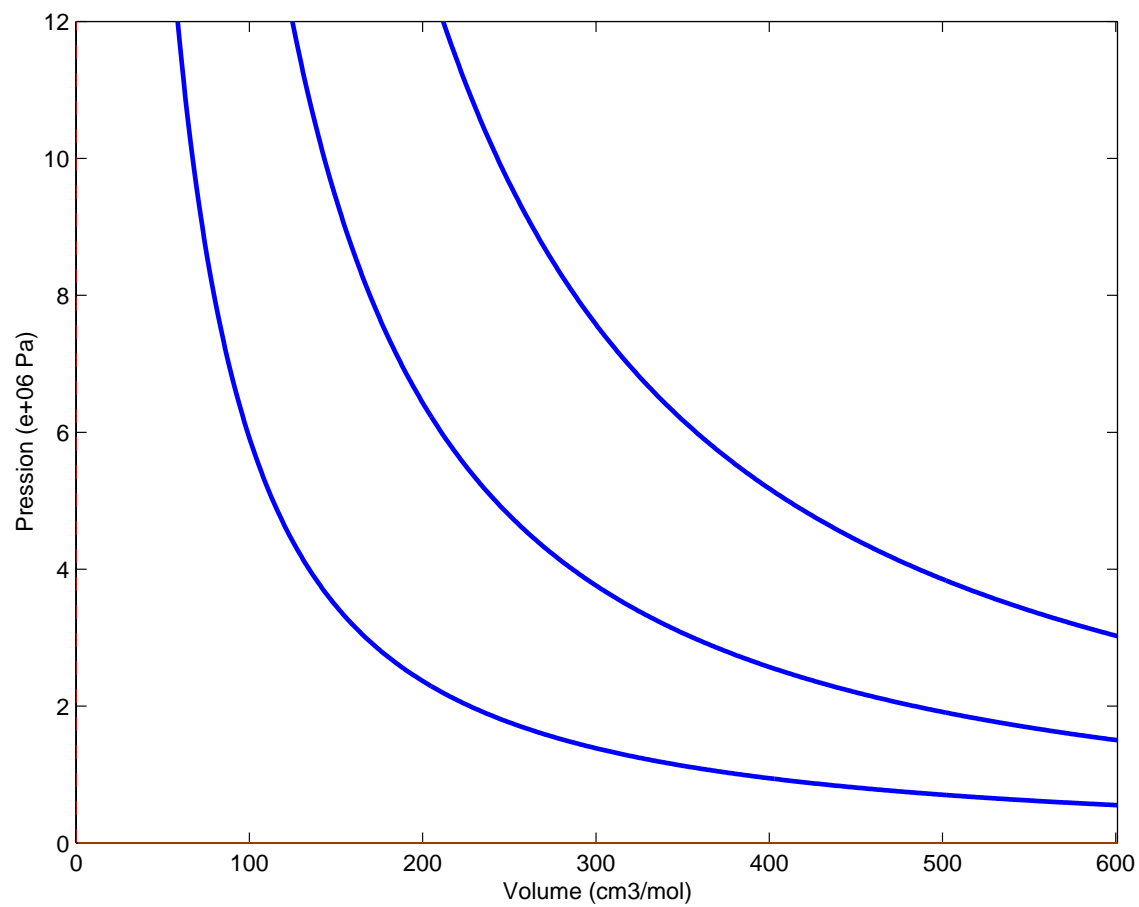


Figure I.1: Isentropes pour la loi des gaz parfaits (avec  $c_v/R = 3.1$ ). Elles sont décroissantes, convexes et ordonnées.



## 1.6 Fluides de van der Waals

La loi de van der Waals [1837-1923] peut être vue comme une modification de la loi des gaz parfaits, qui prend en compte la taille (non nulle) des molécules, à travers un volume molaire minimum appelé *covolume*,  $b$ , ainsi que certaines forces intermoléculaires dépendant d'un coefficient  $a > 0$  (voir [12] pour plus de détails). Elle s'écrit :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

Il existe des tables donnant  $b$  et  $a$  pour des fluides divers, et l'eau en particulier, même s'ils ne suivent pas parfaitement cette loi. On peut d'ailleurs mesurer l'adéquation à la loi de van der Waals, en comparant certaines valeurs mesurées au *point critique* avec celles du point critique théorique. La notion de point critique est en effet très importante. Théoriquement, la température critique  $T_c$  est la limite inférieure des températures pour lesquelles  $p$  est une fonction décroissante de  $v$ . À cette température, la graphe de  $p$  en fonction de  $v$  admet un unique point d'inflexion, horizontal. Les coordonnées de ce point,  $v_c$  et  $p_c$  sont respectivement le volume (molaire) critique et la pression critique. Physiquement, la température critique est la limite supérieure des températures pour lesquelles il peut y avoir coexistence d'une phase liquide et d'une phase vapeur (à chaque niveau de pression on trouve les volumes liquide et vapeur correspondants sur la courbe de saturation, voir figure I.2). Au delà, le fluide n'est ni vraiment un gaz ni vraiment un liquide. Le point critique peut être mesuré, et comparé à sa valeur théorique.

**Exercice :** Montrer qu'avec la loi de van der Waals, le point critique théorique est donné par

$$T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad v_c = 3b \quad \text{et} \quad p_c = \frac{a}{27b^2}.$$

Pour quantifier l'adéquation d'un fluide réel à la loi de van der Waals, on peut définir un nombre sans dimension appelé *facteur de compression critique*

$$\frac{p_c v_c}{RT_c},$$

valant  $3/8 = 0,375$  en théorie, à comparer avec sa valeur physique. Le rapport des deux donne un pourcentage d'adéquation. Le tableau I.2 montre quelques exemples.

Pour un fluide de van der Waals, l'*énergie libre*  $f$ , définie par

$$df = -s dT - p dv$$

est donc de la forme

$$f = -RT \ln(v-b) - \frac{a}{v} + \varphi(T).$$

On en déduit

$$s = R \ln(v-b) - \varphi'(T),$$

et

$$e = f + Ts = \varphi(T) - T\varphi'(T) - \frac{a}{v}.$$

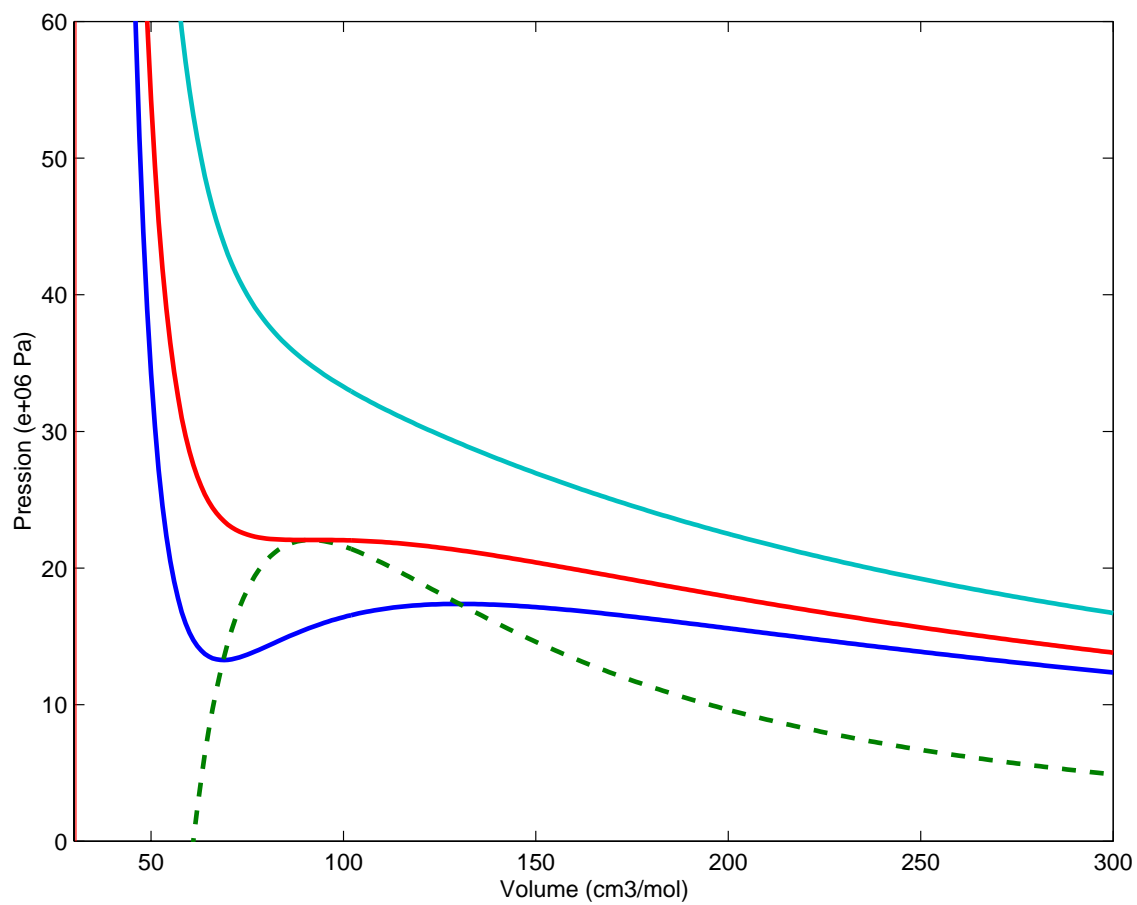


Figure I.2: Isothermes et courbe de saturation pour l'eau, calculées avec les valeurs de  $a$  et  $b$  du tableau I.2 ci-après et  $c_v/R = 3.1$ .

Fluide	Hélium ( <i>He</i> )	Néon ( <i>Ne</i> )	Hydrogène ( <i>H</i> <sub>2</sub> )	Azote ( <i>N</i> <sub>2</sub> )	Eau ( <i>H</i> <sub>2</sub> <i>O</i> )
$b$ [cm <sup>3</sup> /mole]	23,7	17,09	26,61	39,13	30,49
$a$ $\left[ \frac{\text{litres}^2 \times \text{atm}}{\text{mole}^2} \right]$	0,03412	0,2107	0,2444	1,39	5,464
$T_c$ [K] physique théorique	5,2 5,2	44,4 44,5	33,1 33,2	126,1 128,3	647 647,1
$v_c$ [cm <sup>3</sup> /mole] physique théorique	57,8 71,1	41,7 51,3	65 79,8	90,1 117,4	56,3 91,5
$p_c$ [atm] physique théorique	2,26 2,25	26,9 26,7	12,8 12,8	33,5 33,6	218,3 217,7
facteur de compression	0,30	0,31	0,31	0,29	0,23
adéquation	80 %	83 %	83 %	77 %	61 %

Tableau I.2: Valeurs des paramètres et adéquation à la loi de van der Waals pour divers fluides, d'après [6] (p. 506) et [16] (p. D-194).

En supposant  $c_v$  constant (bien que ce soit totalement faux près du point critique ! cf [12], p. 263), on a simplement

$$e = c_v T - \frac{a}{v},$$

ou encore

$$e = ((v - b)^{-R} \exp(s))^{1/c_v} - \frac{a}{v}.$$

Dans ce cas ( $c_v$  constant), on montre que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{R}{c_v} \frac{v}{v - b}, \quad \delta = \Gamma \frac{p}{p + a/v^2}, \\ \gamma &= \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \frac{v}{v - b} + \left( \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \frac{v}{v - b} - 2 \right) \frac{a/v^2}{p}, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{2\gamma} \left\{ \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \left( \frac{R}{c_v} + 2 \right) \frac{v^2}{(v - b)^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \left( \frac{R}{c_v} + 2 \right) \frac{v^2}{(v - b)^2} - 6 \right) \frac{a/v^2}{p} \right\}. \end{aligned}$$

**Exercice :** Faire les calculs donnant les paramètres ci-dessus.

Ainsi, dès que  $c_v > 0$ , on a  $\Gamma > 0$  pour tout volume  $v$  supérieur au covolume  $b$ .

On peut de plus observer sur la figure I.3 les régions du plan  $(v, p)$  où  $\gamma$  est positif (au dessus du lieu des points critiques) et où  $\mathcal{G}$  est positif (au dessus du lieu des points d'inflexion). Quant à la condition  $\gamma \delta \geq \Gamma^2$ , on montre facilement qu'elle est équivalente à

$$\frac{a/v^2}{p} \left( 2 \frac{v - b}{v} - 1 \right) \leq 1, \quad \text{i.e.} \quad p \geq \frac{a}{v^2} (1 - 2b/v).$$

C'est une condition beaucoup plus forte que  $\gamma > 0$  et  $\mathcal{G} > 0$ , au sens où la courbe  $\{\gamma \delta = \Gamma^2\}$  est bien au dessus des courbes  $\{\gamma = 0\}$  et  $\{\mathcal{G} = 0\}$ .

Le cas limite  $a = 0$  revient à ne pas tenir compte des forces intermoléculaires et exclut la co-existence de phases différentes. On appelle *gaz de van der Waals* un gaz suivant simplement la loi de pression<sup>2</sup> :

$$p = \frac{RT}{v - b}.$$

D'après l'expression des coefficients trouvée ci-dessus, on a pour un tel gaz :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{R}{c_v} \frac{v}{v - b}, \quad \delta = \Gamma, \quad \gamma = \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \frac{v}{v - b}, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{R}{c_v} + 1 \right) \left( \frac{R}{c_v} + 2 \right) \frac{v^2}{(v - b)^2}. \end{aligned}$$

C'est donc un fluide de Bethe-Weyl au sens de la définition I.1 dans le domaine  $\{v > b\}$ .

<sup>2</sup>On retrouve une loi analogue pour les gaz chargés de poussière [13].

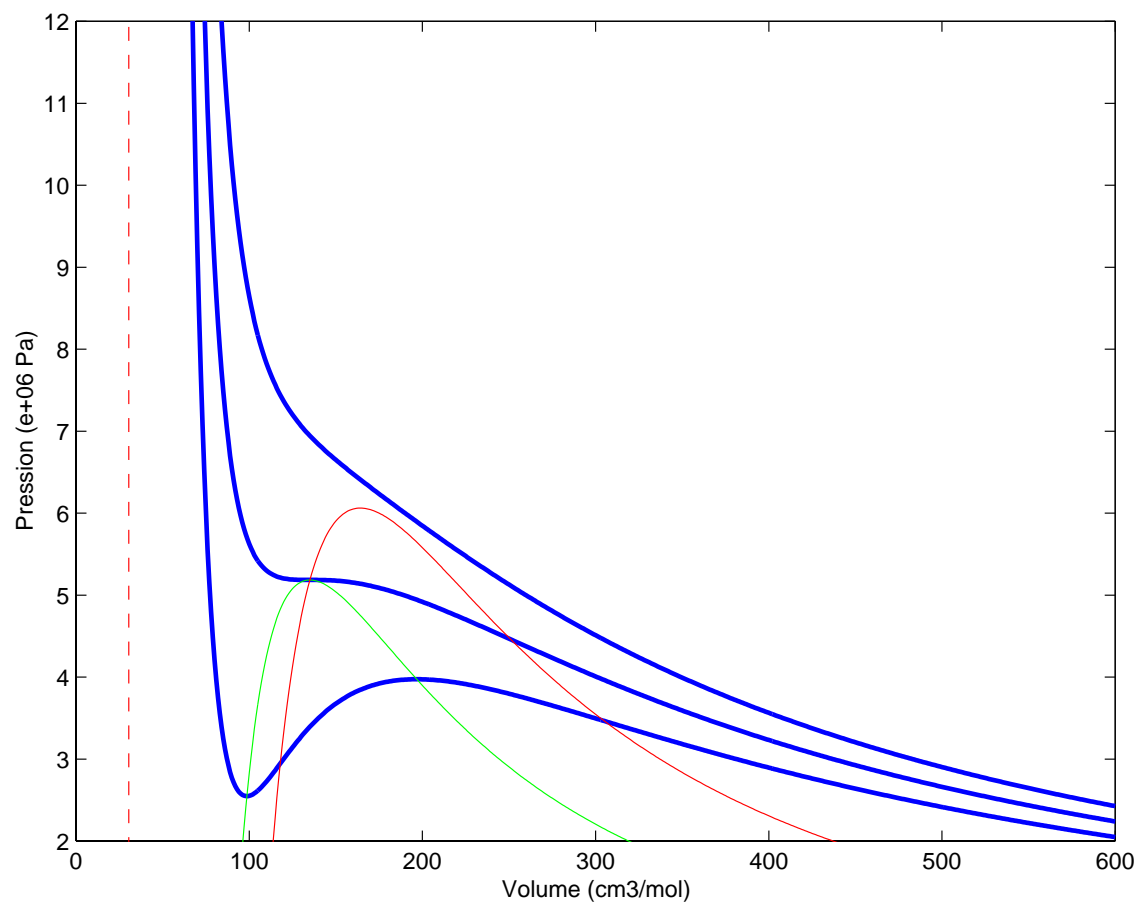


Figure I.3: Isentropes et courbes  $\{\gamma = 0\}$  (lieu des points critiques des isentropes) et  $\{\mathcal{G} = 0\}$  (lieu des points d'inflexion des isentropes) pour l'eau (mêmes valeurs des coefficients qu'à la figure I.2).

## 1.7 Équations d'état incomplètes

Les lois de conservation régissant le mouvement du fluide ne faisant intervenir que les variables thermodynamiques  $\rho$ ,  $p$  et  $e$  (cf §2), on pourrait se contenter pour l'analyse d'une *équation d'état incomplète*, reliant simplement ces variables. On en a déjà vu un exemple avec les gaz polytropiques. Il est intéressant de noter que les paramètres adimensionnels  $\gamma$ ,  $\Gamma$  et  $\mathcal{G}$  définis plus hauts peuvent aussi bien être définis à partir d'une équation d'état incomplète

$$p = p(v, e),$$

tout en coïncidant avec leur définition première lorsqu'une équation d'état complète est disponible, bien sûr. En effet,  $(v, s) \mapsto (v, e)$  est un difféomorphisme local (pour  $T \neq 0$  !) et l'on a les formules de dérivation

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_s = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_e - p \left. \frac{\partial}{\partial e} \right|_v, \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_v = T \left. \frac{\partial}{\partial e} \right|_v.$$

**Exercice :** En déduire les formules

$$\gamma = -\frac{v}{p} \left( \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_e - p \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_v \right), \quad \Gamma = v \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_v,$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \left\{ \gamma + 1 - \frac{v}{\gamma} \left( \left. \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right|_e - p \left. \frac{\partial \gamma}{\partial e} \right|_v \right) \right\}.$$

(Pour  $\mathcal{G}$  on partira de préférence de la formule

$$\mathcal{G} = -\frac{v^2}{2\gamma p} \left. \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\gamma p}{v} \right) \right|_s. \quad )$$

## 2 Équations du mouvement

### 2.1 Lois de conservation

Nous commençons par donner les lois de conservation régissant le mouvement d'un fluide en formulation dite *Eulérienne*. On considère le champ de vitesses  $\mathbf{u}$  comme une inconnue supplémentaire, en plus de la densité  $\rho$  et de l'énergie interne spécifique  $e$ . La première loi de conservation est celle de la masse :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0.$$

On peut ensuite écrire la loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Celles-ci font intervenir le *tenseur des contraintes* (de Cauchy, représenté par une matrice carrée  $d \times d$ ), que nous notons  $\mathbf{T}$  pour le moment, et éventuellement le flux de chaleur  $\mathbf{Q}$  :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}^*) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^*) &= \operatorname{div} \mathbf{T}, \\ \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \right) + \operatorname{div} \left( \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \right) \mathbf{u} \right) &= \operatorname{div}(\mathbf{T} \mathbf{u} - \mathbf{Q}). \end{aligned}$$

**Exercice :** Vérifier la cohérence des notations (c'est-à-dire la taille des matrices ajoutées les unes aux autres).

Il faut bien sûr préciser ce que sont  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{Q}$ . Pour un fluide dit Newtonien (cas le plus standard),  $\mathbf{T}$  est de la forme

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu (\operatorname{du} + \nabla \mathbf{u}),$$

où  $p$  est la pression,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des coefficients de viscosité. Dans l'essentiel du cours, on supposera  $\lambda = \mu = 0$ . Quant au flux de chaleur, il s'exprime au moyen de la température  $T$  par la loi de Fourier

$$\mathbf{Q} = -\nu \nabla T,$$

où  $\nu$  est la conductivité thermique. On le supposera nul également, sauf mention contraire.

On arrive ainsi aux *équations d'Euler compressibles*<sup>3</sup>

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}^*) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^* + p\mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e) + \operatorname{div}((\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e + p)\mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

## 2.2 Formulation Lagrangienne

Nous allons voir une autre façon d'écrire les équations du mouvement, en cherchant à suivre la *trajectoire des particules*. Les équations qui en résultent semblent *a priori* plus compliquées que les équations d'Euler. Cependant, des travaux récents ont renouvelé leur intérêt. De plus, en dimension 1, elles s'avèrent finalement plus simples que les équations d'Euler.

### En dimension quelconque

L'idée de base, semble-t-il dûe à Euler, est simple. On considère la position  $\chi(\boldsymbol{\xi}, t) \in \mathbb{R}^d$  à l'instant  $t$  de "la" particule qui était en  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$  à l'instant 0. On a bien sûr

$$\partial_t \chi(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{u}(\chi(\boldsymbol{\xi}, t), t).$$

Si le *gradient de déformation*  $\nabla \chi$  est inversible (attention, le gradient ne porte que sur les variables spatiales  $\boldsymbol{\xi}$ , de sorte que  $\nabla \chi$  est bien une matrice carrée),  $(\boldsymbol{\xi}, t) \mapsto (\chi(\boldsymbol{\xi}, t), t)$  est un changement de variables (au moins localement). À toute fonction  $\varphi$  de  $(\mathbf{x}, t)$  on associe  $\tilde{\varphi}$  par le changement de variables inverse, de sorte que

$$\varphi(\chi(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, t).$$

Très souvent, dans les ouvrages de physique notamment, le tilda est omis. On le conservera au moins au début pour éviter les confusions. De plus, la dérivée partielle par rapport à  $t$ , à  $\boldsymbol{\xi}$  constant, sera notée  $d_t$  (on va voir que c'est la *dérivée convective*) et la différentiation

<sup>3</sup>Bien que ce soit le fluide, et non les équations qui sont compressibles, c'est un raccourci couramment utilisé!

par rapport à  $\boldsymbol{\xi}$  sera signalée par une lettre majuscule. En particulier, la relation entre la position  $\boldsymbol{\chi}$  et la vitesse  $\mathbf{u}$  se réécrit

$$d_t \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}, t) = \tilde{\mathbf{u}},$$

et on note

$$\mathbf{F} := D\boldsymbol{\chi},$$

supposé inversible en tout point. Par la règle de dérivation des fonctions composées (*chain rule* en anglais),

$$D\tilde{\varphi} = \widetilde{d\varphi} \cdot \mathbf{F} \quad \text{et} \quad d_t \tilde{\varphi} = \widetilde{\partial_t \varphi} + \widetilde{d\varphi} \cdot \mathbf{u}.$$

On voit que l'usage des tildas devient vite assez lourd. Il est en fait redondant avec la précaution prise en distinguant les notations pour les dérivations en variables  $(\boldsymbol{\xi}, t)$  de celles en variables  $(\mathbf{x}, t)$ . On abandonne les tildas désormais. Les équations du mouvement se réécrivent facilement en variables  $(\boldsymbol{\xi}, t)$  grâce à l'équation satisfaite par  $J := \det \mathbf{F}$ . Par dérivation de fonctions composées (la dérivation du déterminant est rappelée en Appendice B, lemme B.2), on voit que

$$d_t J = J \operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} d_t \mathbf{F}) = J \operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} D d_t \boldsymbol{\chi})$$

par le lemme de Schwarz, d'où

$$d_t J = J \operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} D\mathbf{u}) = J \operatorname{tr}(D\mathbf{u}) = J \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

(On a utilisé ici la nature intrinsèque de la trace, assurant son invariance par similitude, d'où  $\operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) = \operatorname{tr}(D\mathbf{u})$ .) Par suite, en considérant  $\rho_0 := \rho J$  (observer que  $\int \rho_0 d\boldsymbol{\xi} = \int \rho d\mathbf{x}$ , si cette masse est finie), on trouve

$$d_t \rho_0 = d_t \rho J + \rho d_t J = J (\partial_t \rho + d\rho \cdot \mathbf{u} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0$$

d'après la loi de conservation de la masse. Ainsi, en dérivant  $\rho_0 v = J$  et en réutilisant l'équation satisfaite par  $J$ , on obtient

$$\rho_0 d_t v - J \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

On peut maintenant réécrire cette équation “presque” sous forme d'une loi de conservation (au facteur  $\rho_0$  près), grâce au lemme de changement de variable suivant.

**Lemme I.1** *Soit  $\mathbf{a}$  à valeurs vectorielles ou matricielles (carrées). On a*

$$J \operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a}).$$

**Dém.** Contrairement aux apparences, la preuve de cette formule ne nécessite aucun calcul compliqué. Elle repose sur la formule d'intégration par parties suivante, valable quelle que soit la fonction  $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$ , régulière à support compact :

$$\int (\phi \operatorname{div} \mathbf{a} + d\phi \cdot \mathbf{a}) d\mathbf{x} = 0.$$

On a bien sûr la même formule pour des fonctions  $\mathbf{b}$  et  $\psi$  de  $\boldsymbol{\xi}$

$$\int (\psi \operatorname{Div} \mathbf{b} + D\psi \cdot \mathbf{b}) d\boldsymbol{\xi} = 0.$$



De plus, ceci caractérise la divergence, car on a le résultat réciproque : si

$$\int (\psi f + \mathbf{D}\psi \cdot \mathbf{b}) d\xi = 0$$

quelle que soit  $\psi$  régulière à support compact, alors  $f = \text{Div } \mathbf{b}$ . Ainsi, en transformant la formule de départ par changement de variables, on obtient

$$\int (\phi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{D}\phi \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{a}) J d\xi = 0,$$

et on identifie  $\text{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a})$  avec  $J \text{div } \mathbf{a}$  grâce à la réciproque mentionnée ci-dessus.  $\square$

En appliquant la formule du lemme I.1 à  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ , il vient donc

$$\rho_0 d_t v - \text{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) = 0.$$

C'est la première des équations du mouvement en formulation Lagrangienne. On va obtenir d'autres équations à partir des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, d'une façon analogue. On fait le calcul pour une fonction  $W$  quelconque, et on l'appliquera ensuite à  $W = \rho u_j$  et  $W = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e$ .

On a

$$d_t(JW) = J d_t W + W d_t J = J (\partial_t W + dW \cdot \mathbf{u} + W \text{div } \mathbf{u}) = J (\partial_t W + \text{div}(W \mathbf{u})).$$

Par suite, si

$$\partial_t W + \text{div}(W \mathbf{u}) = -\text{div } \mathbf{w},$$

il reste

$$d_t(JW) = -J \text{div } \mathbf{w} = -\text{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{w})$$

d'après le lemme. Pour finir, en écrivant  $W = \rho w$ , on a  $JW = \rho_0 w$  et donc

$$\rho_0 d_t w + \text{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{w}) = 0.$$

En appliquant à  $W = \rho u_j$  et  $\mathbf{w} = p \partial / \partial x_j$ , on obtient

$$\rho_0 d_t \mathbf{u}^* + \text{Div}(p J \mathbf{F}^{-1}) = 0.$$

**Exercice :** Vérifier composante par composante.

Puis en appliquant la même formule à  $W$  l'énergie totale, cela donne

$$\rho_0 d_t \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e \right) + \text{Div}(p J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) = 0.$$

Pour récapituler, les équations du mouvement en coordonnées Lagrangiennes sont

$$\begin{cases} \rho_0 d_t v - \text{Div}(J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) = 0, \\ \rho_0 d_t \mathbf{u}^* + \text{Div}(p J \mathbf{F}^{-1}) = 0, \\ \rho_0 d_t \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e \right) + \text{Div}(p J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Il faut se rappeler que les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  doivent aussi satisfaire des relations de compatibilité

$$d_t \mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{and} \quad \partial_i \mathbf{F}_{j,k} = \partial_k \mathbf{F}_{j,i}.$$

Le système global est gros et compliqué. Il se simplifie considérablement lorsqu'on se limite à la dimension 1 d'espace.

**En dimension un**

Lorsque  $d = 1$ ,  $\mathbf{F} = F$  est scalaire et  $J F^{-1} = 1$ . De plus, on peut éliminer la densité initiale  $\rho_0$  en introduisant une *coordonnée Lagrangienne de masse*  $y$  définie par

$$\frac{dy}{d\xi} = \rho_0.$$

(En tant que primitive de  $\rho_0$ ,  $y$  est définie à une constante près.) Le nouveau système, en coordonnée Lagrangienne de masse, s'écrit ainsi simplement

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 + e \right) + \frac{\partial}{\partial y} (p u) = 0. \end{cases}$$

Il existe un moyen très rapide de retrouver ce système à partir des équations d'Euler monodimensionnelles

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \partial_x \left( \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + p \right) u \right) = 0. \end{cases}$$

Pour cela, on utilise le lemme de Poincaré : dans un domaine simplement connexe, toute forme différentielle *fermée* (c'est-à-dire d'intégrale nulle sur tout contour fermé) est *exacte* (c'est-à-dire la différentielle d'une fonction), la réciproque étant triviale. Or, la loi de conservation de la masse  $\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0$  exprime précisément, grâce à la formule de Green-Riemann<sup>4</sup>

$$\iint_{\Omega} (\partial_t \rho + \partial_x (\rho u)) dx dt = \int_{\partial\Omega} (\rho u) dt - \rho dx,$$

que la forme différentielle  $(\rho u) dt - \rho dx$  est fermée. Donc il existe une fonction  $y$  telle que

$$dy = \rho dx - (\rho u) dt.$$

Avec cette formule, ou plutôt sa jumelle

$$dx = v dy + u dt,$$

il est très facile de transformer une loi de conservation en variables  $(x, t)$ , disons

$$\partial_t W + \partial_x Z = 0,$$

<sup>4</sup>Pour ceux qui sont familiers avec les formes différentielles, la formule de Green-Riemann n'est qu'un cas particulier de la formule de Stokes  $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ , pour  $\omega$  une  $(d-1)$ -forme et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

en une loi de conservation en variables  $(y, t)$ . En effet, la forme différentielle

$$Z dt - W dx = (Z - W u) dt - v W dy$$

est fermée si et seulement si

$$\partial_t(v W) + \partial_y(Z - W u) = 0.$$

Il suffit alors d'appliquer cette formule aux couples

$$(W, Z) = (1, 0), \quad (W, Z) = (\rho u, W u + p), \quad (W, Z) = \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e, (W + p) u\right)$$

pour retrouver le système en coordonnée Lagrangienne de masse écrit plus haut. Lorsqu'on retient seulement les deux premières équations (en supposant l'écoulement adiabatique ou isotherme), on obtient le système très simple

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p = 0, \end{cases}$$

communément appelé  $p$ -système pour une raison évidente. Il a fait l'objet d'une quantité de travaux. On le retrouve également dans la modélisation des matériaux hyperélastiques.

### 2.3 Équations non conservatives

Les quantités satisfaisant une loi de conservation en variables Euleriennes sont  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{u}$ ,  $\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e$ . Elles sont aussi appelées *variables conservatives*. Ce sont elles qui jouent un rôle essentiel dans la propagation des ondes de choc. On y reviendra. Lorsqu'on s'intéresse à des écoulements réguliers, on peut réécrire les équations sous une forme plus simple, dite *non conservative* car elle n'est plus sous forme d'une divergence = 0. Il existe en fait plusieurs formes non conservatives, selon les inconnues que l'on souhaite mettre en avant. Elles font en tout cas toutes apparaître des *dérivées convectives*, de la forme

$$\partial_t \varphi + d\varphi \cdot \mathbf{u},$$

c'est-à-dire des dérivées le long des trajectoires des particules (ce qui n'est pas sans rappeler la formulation Lagrangienne...). En cédant à l'usage courant, on notera ces dérivées convectives

$$\partial_t \varphi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi.$$

On va effectuer la transformation pour le système complet, avec viscosité et conductivité thermique, ce qui ne coûte pas beaucoup plus et nous servira dans l'étude de la structure interne des chocs. En notant

$$\bar{\mathbf{T}} = (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{d}\mathbf{u} + \nabla \mathbf{u})$$

le *tenseur de diffusion* (noter qu'il est symétrique, par définition), la loi de conservation de la quantité de mouvement se réécrit, pour des solutions régulières,

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = (\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}})^*.$$

Par suite, en utilisant la loi de conservation de la masse, il reste

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v \nabla p = v (\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}})^*.$$

On peut éventuellement transformer  $v \nabla p$  en utilisant le *potentiel chimique*  $g$  qui, par définition, est tel que :

$$\nabla g = v \nabla p - s \nabla T.$$

D'autre part, en utilisant à la fois la loi de conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement, on peut transformer l'équation de l'énergie

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \right) + \operatorname{div} \left( \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e + p \right) \mathbf{u} \right) = \operatorname{div} (\bar{\mathbf{T}} \mathbf{u} - \mathbf{Q})$$

en

$$\partial_t e + \mathbf{u} \cdot \nabla e + v p \operatorname{div} \mathbf{u} = v (\bar{\mathbf{T}} : \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{Q}).$$

**Exercice :** Faire le calcul en détail.

En combinant l'équation de  $e$  à celle de  $v$  :

$$\partial_t v + \mathbf{u} \cdot \nabla v - v \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

on en déduit immédiatement l'équation satisfaite par  $s$  :

$$\partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = \frac{v}{T} (\bar{\mathbf{T}} : \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{Q}).$$

En utilisant encore une fois la loi de conservation de la masse, on en déduit l'équation satisfaite par l'entropie volumique  $S = \rho s$  :

$$\partial_t S + \operatorname{div}(S \mathbf{u}) = \frac{1}{T} (\bar{\mathbf{T}} : \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{Q}).$$

En particulier, si  $\bar{\mathbf{T}}$  et  $\mathbf{Q}$  sont négligés,  $S$  satisfait la loi de conservation

$$\partial_t S + \operatorname{div}(S \mathbf{u}) = 0.$$

**⚠** Attention, ce n'est vrai que pour les solutions régulières. En termes physiques, cela revient à supposer les phénomènes *réversibles*. On verra que les chocs ne sont pas des phénomènes réversibles.

Pour finir, on peut aisément écrire une équation pour la pression  $p$ . En combinant  $\partial_t v + \mathbf{u} \cdot \nabla v - v \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et  $\partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0$ , on obtient :

$$\partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p - v p'_v \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Notez que par définition de la vitesse du son  $c$ ,  $v p'_v = -c^2/v$ .

Nous retiendrons pour l'analyse des solutions régulières (lorsque  $\bar{\mathbf{T}}$  et  $\mathbf{Q}$  sont nuls) les "variables" qui donnent le système le plus simple et/ou se prêtent le mieux à une *symétrisation* (voir §3.1 ci-après). Ce sont essentiellement les variables  $(v, \mathbf{u}, s)$  ou  $(p, \mathbf{u}, s)$ . Dans ces dernières en particulier, les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v \nabla p = 0, \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

## 2.4 Signification de la vitesse du son

On a jusqu'ici manipulé la vitesse du son sans trop comprendre ce qu'elle signifie. Le système obtenu précédemment en variables  $(p, \mathbf{u}, s)$  va nous renseigner. Intuitivement, le son est la manifestation de la propagation d'une variation de pression. Voyons donc quelle est l'équation satisfaite par  $p$  dans l'approximation *acoustique*, qui suppose de faibles variations de l'état du fluide autour d'un état homogène et au repos. Ceci revient à linéariser le système autour d'un état donné  $(p_0, \mathbf{u}_0 = 0, s_0)$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + v_0 \nabla p = 0, \\ \partial_t s = 0. \end{cases}$$

En prenant la divergence de la seconde équation et en éliminant  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  grâce à la première, on obtient simplement l'équation des ondes

$$\partial_t^2 p - c_0^2 \Delta p = 0.$$

Les “ondes de pression” se propagent donc bien à la vitesse  $c$ .

## 2.5 Modèles isentropiques ou isothermes

On confond souvent dans la littérature mathématique les modèles isentropiques et les modèles isothermes (ces derniers étant parfois vu comme un cas particulier des premiers, en faisant par exemple  $\gamma = 1$  dans le cas des gaz polytropiques). Formellement, ces modèles sont en effet semblables : ils sont constitués de la loi de conservation de la masse et de la loi de conservation de la quantité de mouvement, assorties d'une loi d'état exprimant  $p$  en fonction de  $\rho$ . Mais il convient d'avoir en tête une petite nuance, concernant l'*énergie totale* (qui s'avèrera une *entropie* mathématique). Supposons pour cela qu'une loi d'état complète soit disponible. En ce qui concerne les écoulements isentropiques (ou adiabatiques), il est clair que l'énergie totale est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e.$$

Elle est *conservée*, au sens où son intégrale en espace (si elle est finie) est indépendante du temps. Ceci est dû à la loi de conservation (!) satisfaite par  $\mathcal{E}$ , telle qu'on l'a vue plus haut. En revanche, lorsqu'on impose à l'écoulement d'être *isotherme*, la loi de conservation de  $\mathcal{E}$  n'a pas de raison d'être satisfaite, précisément à cause de l'isolation thermique. L'énergie totale conservée est en fait

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho f,$$

où  $f$  est l'*énergie libre* spécifique, définie par

$$f = e - T s.$$

Mathématiquement, la pression  $p$  est une dérivée de  $f$  (et non de  $e$ ) à  $T$  constant :

$$p = - \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_T.$$

Grâce à cela, on vérifie sans peine que les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement impliquent une loi de conservation pour  $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho f$  dans le cas d'un écoulement isotherme (réversible).

### 3 Analyse de base

#### 3.1 Symétrisation

Les variables  $(p, \mathbf{u}, s)$  se prêtent assez bien à la recherche de solutions régulières (loin du vide) comme on a le voir. En effet, le système

$$\begin{cases} \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v \nabla p = 0, \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

est “presque symétrique” au sens suivant. Il s'écrit sous forme vectorielle abstraite

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{P}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = 0,$$

où l'opérateur différentiel

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla & \rho c^2 \operatorname{div} & 0 \\ \rho^{-1} \nabla & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \nabla \end{pmatrix} = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \partial_i$$

a son *symbole*, formellement défini par

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \xi_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} & \rho c^2 \boldsymbol{\xi}^* & 0 \\ \rho^{-1} \boldsymbol{\xi} & (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}$$

pour  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ , “symétrisable” : en définissant

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho^{-1} c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice  $\mathbf{S}(\mathbf{U}) \mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi})$  est évidemment symétrique pour tout  $\mathbf{U}$  et pour tout  $\boldsymbol{\xi}$ . De façon équivalente, les matrices  $\mathbf{S}(\mathbf{U}) \mathbf{A}_i(\mathbf{U})$  sont toutes symétriques. Notez que la matrice  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  est symétrique définie positive (pour  $\rho \neq 0$ ), ce qui est essentiel dans la suite.

Cette symétrisation a en effet pour conséquence très importante de permettre des *estimations d'énergie*, au sens mathématique du terme, cruciales pour étudier le problème Cauchy. Voyons pour clarifier les idées comment on obtient de telles estimations pour l'opérateur linéarisé autour d'un état constant  $\underline{\mathbf{U}}$  (avec  $\underline{\rho} > 0$ ),

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} := \partial_t \mathbf{U} + \mathbf{P}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{U}.$$

Grâce à la symétrie de la matrice  $\underline{\mathbf{S}} := \mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}})$ , on a pour tout  $\mathbf{U} \in \mathcal{C}([0, T]; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{U} = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \partial_t \mathbf{U} = -2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U} + 2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}.$$

Or d'après la symétrie des matrices  $\underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_i$ ,

$$2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U} = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i (\mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_i \mathbf{U}) = 0.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{U} = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient ainsi une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|\mathbf{U}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^t \|(\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U})(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathbf{U}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\tau.$$

D'après le lemme de Gronwall (voir lemme B.4 en appendice B, on en déduit

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|\mathbf{U}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^t \|\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

où la notation  $\lesssim$  est un raccourci de “inférieur ou égal à une constante fois...”. Ici, la constante dépend de  $T$  et de bornes  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que

$$\alpha \mathbf{I}_{d+2} \leq \underline{\mathbf{S}} \leq \beta \mathbf{I}_{d+2}$$

au sens des matrices symétriques.

**⚠** Attention, la notation  $\lesssim$  est pratique mais dangereuse car  $a \lesssim b + c$  n'entraîne pas  $a - b \lesssim c$ .

En sortant du cadre de ce cours, on peut montrer que le problème de Cauchy (non linéaire) est alors localement bien posé dans  $H^s$  si  $s > d/2 + 1$ . Plus précisément, si  $\mathbf{U}_0 \in \underline{\mathbf{U}} + H^s(\mathbb{R}^d)$  (avec  $\rho_0 > 0$ ,  $\underline{\mathbf{U}}$  étant un état fixé), il existe  $T > 0$  (qui en pratique peut être très petit!) et une unique solution  $\mathbf{U} \in \underline{\mathbf{U}} + \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$  du problème

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \mathbf{P}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0. \end{cases}$$

L'injection de Sobolev  $H^s \subset \mathcal{C}^1$  pour  $s > d/2 + 1$  fait que les solutions ainsi obtenues sont des solutions classiques. En général, ces solutions “explosent”, c'est-à-dire en fait deviennent discontinues, en temps fini. (Pour plus de détails, on pourra se reporter à un ouvrage traitant des lois de conservation hyperboliques [5, 14, 18].) C'est pourquoi on s'intéressera de près aux solutions discontinues de référence que sont les ondes de choc.

### 3.2 Vitesses caractéristiques

Une autre propriété très importante des équations d'Euler est qu'elles "propagent l'information à vitesse finie". On en a eu un avant-goût au paragraphe 2.4 avec la vitesse du son. On retrouve en fait cette vitesse du son dans les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi})$  définie plus haut. Cette matrice étant linéaire en  $\boldsymbol{\xi}$ , ses valeurs propres sont des fonctions homogènes de degré 1 en  $\boldsymbol{\xi}$ . On peut de plus les calculer explicitement, par des manipulations algébriques élémentaires. On trouve, d'une part  $\lambda = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}$ , avec comme sous-espace propre associé

$$\left\{ \dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{s} \end{pmatrix} ; \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \right\},$$

et d'autre part  $\lambda = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} \pm c |\boldsymbol{\xi}|$ , chacune de ces valeurs propres étant associée au vecteur propre

$$\begin{pmatrix} \pm \rho c \\ \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $c \neq 0$ , la famille complète des vecteurs propres forme de façon évidente une base de  $\mathbb{R}^{d+2}$  lorsque  $\boldsymbol{\xi}$  est non nul (noter que  $\mathbf{A}(\mathbf{U}; 0) = 0$  est directement diagonale!). Ainsi  $\mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi})$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la matrice de passage correspondante ainsi que son inverse (homogènes de degré 0 en  $\boldsymbol{\xi}$ ) sont uniformément bornées pour  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Ces propriétés réunies constituent l'*hyperbolicité* des équations d'Euler. On aurait pu la déduire directement de la symétrisation effectuée au paragraphe précédent.

Les valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi})$  sont traditionnellement rangées par ordre croissant

$$\lambda_1 := \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - c |\boldsymbol{\xi}|, \quad \lambda_2 := \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad \lambda_3 := \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} + c |\boldsymbol{\xi}|,$$

et sont aussi appelées *vitesses caractéristiques* (la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{U}; \boldsymbol{\xi})$  étant elle-même appelée matrice caractéristique). On verra plus loin quelles sont les informations précisément propagées à ces vitesses. Les vitesses caractéristiques sont indépendantes des variables choisies, contrairement aux vecteurs propres correspondants. Pour s'en convaincre, on peut faire le calcul en variables  $(\rho, \mathbf{u}, e)$ . Dans ces variables, les équations d'Euler s'écrivent en effet

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla p = 0, \\ \partial_t e + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \rho^{-1} p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

comme on l'a vu plus haut. C'est une forme un peu plus compliquée, mais elle a le mérite d'avoir un sens même lorsqu'on dispose seulement d'une équation d'état incomplète, ce qu'on va supposer dans le calcul. En notant

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ e \end{pmatrix}$$



pour éviter les confusions avec le calcul précédent, la nouvelle matrice caractéristique est

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}; \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} & \rho \boldsymbol{\xi}^* & 0 \\ \rho^{-1} p'_\rho \boldsymbol{\xi} & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} & \rho^{-1} p'_e \boldsymbol{\xi} \\ 0 & \rho^{-1} p \boldsymbol{\xi}^* & \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix},$$

où

$$p'_\rho = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_e, \quad p'_e = \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_\rho.$$

**Exercice :** Trouver une matrice  $\tilde{\mathbf{S}}$  pour symétriser  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Supposons que

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}; \boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{e} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - \lambda) \dot{\rho} + \rho \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, \\ \rho^{-1} p'_\rho \dot{\rho} \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - \lambda) \dot{\mathbf{u}} + \rho^{-1} p'_e \dot{e} \boldsymbol{\xi} = 0, \\ \rho^{-1} p \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - \lambda) \dot{e} = 0. \end{cases}$$

Alors ou bien  $\lambda = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}$  et

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad p'_\rho \dot{\rho} + p'_e \dot{e} = 0,$$

ou bien

$$\begin{cases} p \dot{\rho} = \rho^2 \dot{e}, \\ (p'_\rho |\boldsymbol{\xi}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - \lambda)^2) \dot{\rho} + p'_e |\boldsymbol{\xi}|^2 \dot{e} = 0. \end{cases}$$

On en déduit la *relation de dispersion*

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} - \lambda)^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 (p'_\rho + p p'_e / \rho^2).$$

Dans le cas où l'on a une équation d'état complète, en reprenant la définition de la vitesse du son  $c$  et les formules de changement de variable du paragraphe 1.7, on voit facilement que

$$p'_\rho + p p'_e / \rho^2 = c^2.$$

Si on a seulement une équation d'état incomplète, cette dernière relation *définit* la vitesse du son, à condition bien sûr que  $p'_\rho + p p'_e / \rho^2 \geq 0$ . Et on retrouve bien les mêmes vitesses caractéristiques,  $\lambda_2 = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}$  et  $\lambda_{1,3} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} \pm c |\boldsymbol{\xi}|$ .

$\triangleleft$  Attention, les vecteurs propres quant à eux sont différents. Dans les variables  $(\rho, \mathbf{u}, e)$ , on a comme famille de vecteurs propres

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \\ p/\rho \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} p'_e \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\alpha} p'_\rho \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \\ p/\rho \end{pmatrix}.$$

**Définition I.3** On appelle champ caractéristique un couple  $(\lambda, \mathcal{E})$ , où  $\lambda$  est une vitesse caractéristique et  $\mathcal{E}$  le sous-espace propre associé.

La notion de champ caractéristique dépend donc a priori des variables thermodynamiques choisies (on a vu l'exemple de  $(p, s)$  et de  $(\rho, e)$ , mais cela pourrait encore en être d'autres). En revanche, on va voir deux notions importantes concernant ces champs, qui sont indépendantes des variables thermodynamiques choisies. C'est pourquoi on fait souvent référence aux champs caractéristiques selon la numérotation des vitesses caractéristiques: on parle du premier et du troisième champ, qui sont simples, et du deuxième champ, de multiplicité  $d$ .

**Nature des champs caractéristiques.** On constate tout d'abord que la vitesse caractéristique  $\lambda_2$ , qui ne dépend que de la vitesse du fluide, et pas des variables thermodynamiques, est *constante* le long de toute courbe tangente au vecteur propre  $r_2$ . On dit que ce champ est *linéairement dégénéré*.

D'autre part, on peut chercher comment les autres vitesses caractéristiques,  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , varient le long des *courbes intégrales* de  $r_1$  et  $r_3$  respectivement. Si elles sont strictement monotones, c'est-à-dire si les quantités (scalaires)

$$d\lambda_{1,3} \cdot r_{1,3}$$

ne s'annulent pas, on dit que ces champs sont *vraiment non-linéaires*.

⚠ Attention, dans ces expressions,  $d\lambda_{1,3}$  désigne la différentielle de  $\lambda_{1,3}$  dans les variables où les vecteurs propres  $r_{1,3}$  sont calculés.

En fait, l'annulation ou non de ces quantités ne dépend pas des variables thermodynamiques choisies (à condition que  $c$  ne s'annule pas, ce que l'on suppose toujours implicitement). Par exemple, en variables  $(\rho, \mathbf{u}, e)$ , on trouve (en supposant  $|\boldsymbol{\xi}| = 1$  pour simplifier)

$$d\lambda_{1,3} \cdot r_{1,3} = \rho c'_\rho + c + \frac{p}{\rho} c'_e = c \mathcal{G},$$

tandis qu'en variables  $(p, \mathbf{u}, s)$ , on a

$$\tilde{d}\lambda_{1,3} \cdot \tilde{r}_{1,3} = 1 + \rho c \left. \frac{\partial c}{\partial p} \right|_s = \mathcal{G}$$

puisque

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \rho} \right|_s = \left. \frac{\partial c}{\partial p} \right|_s c^2.$$

Ainsi, le premier et le troisième champ sont vraiment non-linéaires si et seulement si coefficient  $\mathcal{G}$  ne s'annule pas.

### 3.3 Introduction aux ondes de choc

#### Condition de Rankine-Hugoniot

Les équations d'Euler ont la particularité d'admettre des solutions discontinues. Mathématiquement, ce sont des *solutions faibles*, c'est-à-dire des solutions au sens des distributions, des équations en *variables conservatives*, que l'on peut écrire sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{W}^* + \operatorname{div} \mathbf{Z} = 0,$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{u} \mathbf{W}^* + p \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times (d+2)}.$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  étant rectangulaire, on a noté par extension :

$$(\operatorname{div} \mathbf{Z})_j = \sum_{i=1}^d \partial_i Z_{i,j}, \quad j \in \{1, \dots, d+2\}.$$

Par définition, une solution faible doit être telle que pour tout  $\Phi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}^d \times ]0, +\infty[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+2}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{W}^* \cdot \partial_t \Phi + \mathbf{Z} : \nabla \Phi = 0.$$

Les solutions faibles les plus simples sont régulières de part et d'autre d'une hypersurface mobile  $\Sigma$  et satisfont des *conditions de saut* à travers  $\Sigma$ , ces conditions de saut dépendant de la normale ( $\mathbf{n}$ ) à  $\Sigma$  et de la vitesse de propagation de  $\Sigma$ . Comme  $\Sigma$  n'est pas une surface matérielle, seule sa vitesse normale de propagation a un sens. Il est d'usage de noter cette vitesse  $\sigma$  (qui est un scalaire). D'un point de vue pratique, si  $\Sigma$  admet une équation cartésienne de la forme

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0,$$

alors

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \quad \text{et} \quad \sigma = - \frac{\partial_t \varphi}{|\nabla \varphi|}.$$

Les conditions de saut, appelées *conditions de Rankine-Hugoniot*, s'obtiennent simplement par intégration par parties (ou plus savamment la formule de Green). En effet, regardons  $\Sigma$  comme une hypersurface (fixe) de  $\mathbb{R}^d \times ]0, +\infty[$ , et choisissons un vecteur  $\mathbf{N}$  normal à  $\Sigma$ , unitaire et pointant vers les  $t < 0$ , de composantes  $(N_1, \dots, N_d)$  dans les directions spatiales et  $N_{d+1}$  dans la direction de  $t$ . Si  $\mathbf{W}$  est une solution régulière de part et d'autre de  $\Sigma$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} W_j \partial_t \Phi_j + Z_{i,j} \partial_i \Phi_j = \int_{\Sigma} N_{d+1} [W_j] \Phi_j + N_i [Z_{i,j}] \Phi_j,$$

où les crochets  $[\ ]$  désignent des sauts à travers  $\Sigma$ , c'est-à-dire

$$[Q] = \lim_{\theta \gtrsim 0} (Q(\mathbf{x}, t) + \theta \mathbf{N}) - Q(\mathbf{x}, t) - \theta \mathbf{N})$$

$$= \lim_{\theta \gtrsim 0} (Q(x_1 + \theta N_1, \dots, x_d + \theta N_d, t + \theta N_{d+1}) - Q(x_1 - \theta N_1, \dots, x_d - \theta N_d, t - \theta N_{d+1}))$$

pour n'importe quelle quantité  $Q$ . Donc, pour que  $\mathbf{W}$  soit une solution faible, il faut et il suffit que

$$N_{d+1} [W_j] + N_i [Z_{i,j}] = 0$$

quel que soit  $j$ . Or

$$\mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ -\sigma \end{pmatrix}.$$

Donc on peut réécrire ces conditions de saut sous la forme plus compacte :

$$-\sigma [\mathbf{W}^*] + \mathbf{n}^* [\mathbf{Z}] = 0,$$

ou encore

$$-\sigma [\mathbf{W}] + [\mathbf{Z}^*] \mathbf{n} = 0.$$

En substituant  $\mathbf{Z}$ , il vient

$$[(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \sigma) \mathbf{W}] + \begin{bmatrix} 0 \\ p \mathbf{n} \\ p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} = 0,$$

ce qui se réécrit,

$$\begin{cases} [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)] = 0, \\ [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma) \mathbf{u} + p \mathbf{n}] = 0, \\ [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma) (\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e) + p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0. \end{cases}$$

### Discontinuités de contact / discontinuités dynamiques

Pour toute quantité  $Q$  servant à décrire l'état du fluide de part et d'autre de  $\Sigma$ , on note pour fixer les idées :

$$Q_+ = \lim_{\theta \geq 0} Q(\mathbf{x} + \theta \mathbf{n}, t - \theta \sigma) \quad \text{et} \quad Q_- = \lim_{\theta \geq 0} Q(\mathbf{x} + \theta \mathbf{n}, t - \theta \sigma).$$

La première des conditions de Rankine-Hugoniot permet de définir le flux de masse à travers  $\Sigma$  :

$$j := \rho_- (\mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} - \sigma) = \rho_+ (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} - \sigma).$$

À l'aide de cette quantité, on peut distinguer deux types très différents de discontinuités.

On appelle *discontinuités de contact* les discontinuités pour lesquelles  $j$  est nul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de transfert de masse à l'interface. Autrement dit, la vitesse normale du fluide est continue à travers l'interface, et coïncide avec la vitesse de ladite interface. En revanche, la vitesse tangentielle du fluide peut très bien être discontinue, c'est-à-dire que le fluide peut glisser de part et d'autre de l'interface. Cette situation de cisaillement implique une singularité du *vecteur tourbillon*,  $\text{rot} \mathbf{u}$ , c'est pourquoi on parle de *feuille de tourbillon* (en dimension 2, il s'agit en fait d'une *ligne*, et en dimension 1, cette notion n'a pas de sens). Par ailleurs, la condition de Rankine-Hugoniot demande que la pression  $p$  soit continue à travers une telle interface.

Les *discontinuités dynamiques* sont celles pour lesquelles le fluide traverse effectivement l'interface, c'est-à-dire  $j \neq 0$ . Dans ce cas, la condition de Rankine-Hugoniot demande que la vitesse tangentielle soit continue à travers l'interface. Et d'autre part, la vitesse normale

$$u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

doit être telle que

$$[u] = j [v]$$

(par définition de  $j$ ) et

$$j [u] + [p] = 0,$$

	$j > 0$	$j < 0$
choc compressif	$[v] < 0, [\rho] > 0,$ $[p] > 0, [e] > 0.$	$[v] > 0, [\rho] < 0,$ $[p] < 0, [e] < 0.$
choc expansif	$[v] > 0, [\rho] < 0,$ $[p] < 0, [e] < 0.$	$[v] < 0, [\rho] > 0,$ $[p] > 0, [e] > 0.$

Tableau I.3: Différentes inégalités pour les chocs.

$$j \left[ \frac{1}{2} u^2 \right] + j [e] + [p u] = 0.$$

Pour découpler plus facilement ces équations, on va utiliser la notation

$$\langle q \rangle := \frac{1}{2} (q_+ + q_-).$$

On a ainsi

$$j \left[ \frac{1}{2} u^2 \right] + [p u] = j \langle u \rangle [u] + [p u] = -[p] \langle u \rangle + [p u] = \langle p \rangle [u].$$

Par conséquent, on trouve la relation purement thermodynamique

$$[e] + \langle p \rangle [v] = 0.$$

De plus, on doit aussi avoir

$$[p] = -j^2 [v],$$

ce qui impose en particulier  $[p] [v] < 0$ . On utilisera abondamment ces différentes relations lorsqu'il s'agira de résoudre le problème de Riemann (cf Chapitre II §1).

### Chocs compressifs / chocs expansifs

Si l'on s'intéresse de plus près aux discontinuités dynamiques, aussi appelées *chocs*, on peut se demander si elles détendent ou compriment le fluide, ces notions faisant à la fois référence à la pression et au volume. D'après la relation  $[p] = -j^2 [v]$ , on voit que le signe de  $[p]$  est opposé à celui de  $[v]$ . Il est donc équivalent de faire baisser la pression et d'augmenter le volume (ou l'inverse, évidemment). Pour déterminer si une discontinuité est expansive ou compressive, il faut donc regarder le signe de  $[p]$  ou de  $[\rho]$  indifféremment. Mais cela dépend du signe de  $j$  : pour  $j > 0$ , le fluide traverse l'interface de  $\ominus$  vers  $\oplus$ , et inversement pour  $j < 0$ . De plus, la relation  $[e] + \langle p \rangle [v] = 0$  montre que  $[e]$  est également du signe de  $[\rho]$ . La distinction entre chocs compressifs et chocs expansifs est résumée dans le tableau I.3.

À propos du signe de  $j$ , signalons qu'il permet également de distinguer l'état du fluide *derrière* le choc de celui *devant* le choc. En effet,  $j > 0$  signifie que la vitesse du fluide dans la direction  $\mathbf{n}$  est supérieure à la vitesse de  $\Sigma$  dans cette même direction. Autrement

Figure I.4: Représentation d'un exemple de choc avec  $j > 0$ .

dit, dans un référentiel lié au fluide, se déplaçant à la vitesse  $(\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$  ou bien  $(\mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$  indifféremment,  $\Sigma$  se propage dans le sens de  $-\mathbf{n}$ , c'est-à-dire de  $\oplus$  vers  $\ominus$ . De ce point de vue, l'état indexé par  $\oplus$  se trouve derrière le choc et l'état indexé par  $\ominus$  devant. Cette situation est évidemment inversée si  $j$  est négatif. Fort heureusement, la distinction entre l'état devant et l'état derrière le choc ne dépend pas du choix de l'indexation : si on échange les notations,  $\mathbf{W}_-$  devient  $\mathbf{W}_+$  et *vice versa*,  $\mathbf{n}$  devient  $-\mathbf{n}$ ,  $j$  devient  $-j$ , et l'état devant le choc reste le même état physique!

### Structure interne des chocs

Physiquement, une onde de choc est en principe une approximation d'une onde très raide, mais continue, solution des lois de conservation du second ordre tenant compte des phénomènes dissipatifs dûs à la viscosité et à la conductivité thermique,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^* + p \mathbf{I}) \\ \partial_t(\rho(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + e)) + \operatorname{div}((\rho(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + e) + p)\mathbf{u}) \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0, \\ = \operatorname{div}((\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu(\operatorname{du} + \nabla \mathbf{u})), \\ = \operatorname{div}(\nu \operatorname{div} T) + \\ \operatorname{div}((\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu(\operatorname{du} + \nabla \mathbf{u})) \mathbf{u}). \end{array}$$

Or une *onde plane progressive* de vitesse  $\sigma$  dans la direction  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{W}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t)$  est solution de ces équations si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho(u - \sigma))' = 0, \\ (\rho(u - \sigma) \check{\mathbf{u}})' = (\mu \check{\mathbf{u}})', \\ (\rho(u - \sigma) u)' + p' = ((\lambda + 2\mu) u')', \\ (\rho(u - \sigma)(e + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2))' + (p u)' = (\nu T' + (\lambda + 2\mu) u u')', \end{array} \right.$$

où le prime ' désigne la dérivation par rapport à la variable (scalaire)  $\xi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t$ , et  $u$  et  $\check{\mathbf{u}}$  désignent respectivement les composantes normales et tangentielles de la vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \check{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

Si de plus  $\mathbf{W}(\pm\infty) = \mathbf{W}_{\pm}$  (avec une convergence suffisamment rapide), on peut intégrer une première fois à vue ces équations différentielles. On retrouve les conditions de Rankine-Hugoniot comme conditions nécessaires d'existence de telles ondes progressives, reliant  $\mathbf{W}_-$  à  $\mathbf{W}_+$ , dont le profil, appelé *profil thermovisqueux*, doit satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(u - \sigma) \equiv \rho_{\pm}(u_{\pm} - \sigma) =: j, \\ \mu \check{\mathbf{u}}' = j(\check{\mathbf{u}} - \check{\mathbf{u}}_{\pm}), \\ (\lambda + 2\mu) u' = j(u - u_{\pm}) + p - p_{\pm}, \\ \nu T' + (\lambda + 2\mu) u u' = j(e - e_{\pm} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{u}_{\pm}|^2) + p u - p_{\pm} u_{\pm}. \end{array} \right.$$

Pour aller plus loin, il faut faire des hypothèses sur les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  (pas forcément constants). Nous utiliserons seulement

$$\mu \neq 0, \quad \lambda + 2\mu > 0 \quad \text{et} \quad \nu > 0.$$

On voit immédiatement que les discontinuités de contact *n'admettent pas* de profil thermovisqueux. En effet, pour  $j = 0$ , on trouve (en supposant bien sûr  $\rho_{\pm} \neq 0$ )

$$p \equiv p_{\pm}, \quad T' \equiv 0,$$

ce qui impose  $\rho_- = \rho_+$  dès que la vitesse du son isotherme est non nulle, et

$$u \equiv u_{\pm} = \sigma, \quad \check{\mathbf{u}} \equiv \check{\mathbf{u}}_{\pm}.$$

Donc les états  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$  sont exactement les mêmes!

L'existence de profils thermovisqueux pour les discontinuités dynamiques, c'est-à-dire les chocs, demande d'étudier le système d'équations différentielles ci-dessus. Une première remarque porte sur l'équation (complètement découplée)

$$\mu \check{\mathbf{u}}' = j (\check{\mathbf{u}} - \check{\mathbf{u}}_{\pm}).$$

La seule *orbite homocline* est le point fixe lui-même, c'est-à-dire que

$$\check{\mathbf{u}} \equiv \check{\mathbf{u}}_{\pm}.$$

Il reste donc un système de deux équations, que l'on peut ramener en éliminant  $u$  (et en utilisant l'équation d'état) à un système dynamique dans le plan  $(v, T)$ . En effet, pour simplifier on peut faire un changement de référentiel Galiléen et supposer  $\check{\mathbf{u}} \equiv 0, \sigma = 0$ . On a alors  $u = jv, |\mathbf{u}|^2 = u^2$ , et

$$j(\lambda + 2\mu)v' = j^2(v - v_{\pm}) + p - p_{\pm},$$

$$\begin{aligned} \nu T' &= j(e - e_{\pm} + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u_{\pm}^2) + pu - p_{\pm}u_{\pm} - uj(u - u_{\pm}) - u(p - p_{\pm}) \\ &= j(e - e_{\pm} - \frac{1}{2}(u - u_{\pm})^2) + p_{\pm}(u - u_{\pm}) \\ &= j(e - e_{\pm} - \frac{1}{2}j^2(v - v_{\pm})^2 + p_{\pm}(v - v_{\pm})). \end{aligned}$$

Et on peut démontrer le

**Théorème I.1 (Gilbarg)** *Pour les fluides de Bethe-Weyl, en supposant  $\lambda + 2\mu > 0$  et  $\nu > 0$ , tous les chocs compressifs admettent un profil thermovisqueux.*

**Dém.** cf [4]. On verra plus loin, dans des fluides plus généraux, une condition plus faible que la compressivité assurant malgré tout l'existence de profils thermovisqueux (théorème de Liu-Pego).

**Profils thermovisqueux et second principe.** En reprenant l'équation de l'entropie

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{u}) = \frac{1}{T} ((\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{d}\mathbf{u} + \nabla \mathbf{u})) : \nabla \mathbf{u} + \operatorname{div}(\nu \operatorname{div} T),$$

on obtient facilement une équation pour  $s'$  le long d'un profil thermovisqueux :

$$j T s' = (\nu T')' + (\lambda + 2\mu) (u')^2.$$

En intégrant par parties, on voit que

$$j [s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu \left( \frac{T'}{T} \right)^2 + \frac{1}{T} (\lambda + 2\mu) (u')^2 d\xi$$

est nécessairement positif. Ceci exprime que l'entropie  $s$  s'accroît à travers tout choc admettant un profil thermovisqueux.





# Chapitre II

## Écoulements mono-dimensionnels

L'intérêt de l'étude des écoulements monodimensionnels est double. D'une part, on peut considérer un écoulement monodimensionnel comme le cas limite d'un écoulement dans un tube infiniment fin. D'autre part, ce qui paraîtra sans doute moins académique, les ondes planes solutions des équations d'Euler multidimensionnelles correspondent naturellement à des solutions des équations d'Euler monodimensionnelles.

Soit en effet  $\mathbf{W}$  une *onde plane* se propageant dans la direction  $\mathbf{n}$ , i. e. ne dépendant que de  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$  et de  $t$ . Si

$$\partial_t \mathbf{W}^* + \operatorname{div} \mathbf{Z} = 0,$$

alors

$$\partial_t \mathbf{W}^* + \mathbf{n}^* \partial_x \mathbf{Z} = 0,$$

où  $x := \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ . En prenant pour  $\mathbf{n}$  un vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , par exemple le dernier, on en déduit simplement

$$\partial_t \mathbf{W}^* + \partial_x \mathbf{Z}_d = 0,$$

où  $\mathbf{Z}_d$  est la dernière ligne de  $\mathbf{Z}$ .

Pour les équations d'Euler,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{u} \mathbf{W}^* + p \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d & \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times (d+2)}.$$

Ainsi, en explicitant  $\mathbf{Z}_d$ , et en décomposant la vitesse selon ses composantes normales et tangentielles

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{u}} \\ u \end{pmatrix},$$

on obtient les ÉDP d'évolution monodimensionnelles

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \check{\mathbf{u}}) + \partial_x(\rho u \check{\mathbf{u}}) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e) + \partial_x((\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e + p)u) = 0. \end{cases}$$

En particulier pour  $\tilde{\mathbf{u}} \equiv 0$ , ces équations se réduisent précisément aux équations d'Euler monodimensionnelles

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e) + \partial_x((\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + p)u) = 0. \end{cases}$$

Désormais, dans ce chapitre, on note

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = u\mathbf{W} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

les équations d'Euler monodimensionnelles s'écrivant ainsi

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = 0.$$

Le premier objectif de ce chapitre est la résolution du *problème de Riemann*, qui est un problème de Cauchy type, avec une condition initiale de la forme

$$\underline{\mathbf{W}}(x) = \begin{cases} \mathbf{W}_-, & x < 0, \\ \mathbf{W}_+, & x > 0. \end{cases}$$

Outre son intérêt théorique, le problème de Riemann est la base de divers schémas numériques, dont le précurseur *schéma de Godunov*, que nous verrons dans la partie concernant l'approximation numérique des équations d'Euler. La présentation des méthodes numériques de base est en effet le second objectif de ce chapitre.

## 1 Problème de Riemann

### 1.1 Ensemble de Hugoniot

La condition de Rankine-Hugoniot monodimensionnelle se réduit à

$$[\mathbf{Z}] = \sigma[\mathbf{W}].$$

L'analyse des ondes de choc et au-delà la résolution du problème de Riemann, nécessitent une étude approfondie de cette condition.

**Définition II.1** *On appelle ensemble de Hugoniot l'ensemble des couples  $(\mathbf{W}_-, \mathbf{W}_+)$  pour lesquels il existe une vitesse  $\sigma$  telle que que la condition de Rankine-Hugoniot*

$$\mathbf{Z}_+ - \mathbf{Z}_- = \sigma(\mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-)$$

*soit satisfaite. Étant donné un état  $\mathbf{W}_0$ , l'ensemble de Hugoniot passant par  $\mathbf{W}_0$  est*

$$\mathcal{H}(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; \exists \sigma, \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + \sigma(\mathbf{W} - \mathbf{W}_0) \}.$$

En reprenant les calculs du Chapitre I §3.3, on voit que  $\mathbf{W} \in \mathcal{H}(\mathbf{W}_0)$  si et seulement si

$$\rho(u - \sigma) = \rho_0(u_0 - \sigma) =: j$$

et

$$\begin{cases} p = p_0 - j^2(v - v_0), \\ u = u_0 + j(v - v_0), \\ j(e - e_0 + \frac{p + p_0}{2}(v - v_0)) = 0. \end{cases}$$

Le cas  $j = 0$  équivaut donc à  $u = u_0$  et  $p = p_0$ . Le cas  $j \neq 0$  équivaut à

$$e - e_0 + \frac{p + p_0}{2}(v - v_0) = 0$$

et

$$u = u_0 \pm (v - v_0) \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)}.$$

On peut ainsi énoncer la

**Proposition II.1** *En supposant  $\gamma > 0$ , l'ensemble  $\mathcal{H}(\mathbf{W}_0)$  est constitué de trois courbes<sup>1</sup>, notées  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0)$ ,  $\mathcal{H}_2(\mathbf{W}_0)$  et  $\mathcal{H}_3(\mathbf{W}_0)$  et définies par*

$$\mathcal{H}_2(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; u = u_0, p = p_0 \},$$

$$\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; \bar{h}(\mathbf{W}; \mathbf{W}_0) = 0, (v - v_0)(p - p_0) < 0 \text{ et } \\ u = u_0 + (v - v_0) \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} \},$$

$$\mathcal{H}_3(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; \bar{h}(\mathbf{W}; \mathbf{W}_0) = 0, (v - v_0)(p - p_0) < 0 \text{ et } \\ u = u_0 - (v - v_0) \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} \},$$

où

$$\bar{h}(\mathbf{W}; \mathbf{W}_0) := e - e_0 + \frac{p + p_0}{2}(v - v_0).$$

En fait, la précaution prise en demandant  $(v - v_0)(p - p_0) < 0$  dans la définition de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est superflue, comme on va le voir ci-après (cf Lemme II.1). Remarquons de plus que d'après la relation

$$u = u_0 + j(v - v_0),$$

par définition de  $\mathcal{H}_{1,3}$ , on a

$$j = \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} > 0 \text{ sur } \mathcal{H}_1,$$

$$j = -\sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} < 0 \text{ sur } \mathcal{H}_3.$$

On a choisi la lettre  $\bar{h}$  car cette fonction ressemble à une enthalpie (en fait,  $\bar{h} = h - h_0 + (pv - p_0v)/2$ ). Évidemment, elle ne dépend que des variables thermodynamiques

<sup>1</sup>On verra plus loin que la numérotation des courbes  $\mathcal{H}_k(\mathbf{W}_0)$  fait référence à la numérotation des vitesses caractéristiques.

(et pas de la vitesse  $u$ ). Le choix de ces variables dépend du contexte : si l'on dispose d'une équation d'état complète,  $\bar{h}$  est naturellement une fonction de  $(v, s; v_0, s_0)$ . Si l'on a seulement une équation d'état incomplète,  $\bar{h}$  est une fonction de  $(v, e; v_0, e_0)$ .

Les "courbes"  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$  sont définies implicitement. Ce sont des courbes régulières au moins localement, comme on le précise ci-dessous.

Dans ce qui suit, on suppose une équation d'état complète, de sorte que l'ensemble

$$\{(v, s); \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = 0\}$$

est une courbe régulière paramétrée par  $v$  au voisinage de  $(v_0, s_0)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} d\bar{h} &= de + \frac{v - v_0}{2} dp + \frac{p + p_0}{2} dv \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \Gamma \frac{v - v_0}{v}\right) T ds - \frac{1}{2} \left(\frac{p - p_0}{p} + \gamma \frac{v - v_0}{v}\right) p dv \end{aligned}$$

et en particulier

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial s}(v_0, s_0; v_0, s_0) = T \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc au point  $(v_0, s_0)$ . Et la courbe locale ainsi obtenue se prolonge tant que  $d\bar{h}$  ne s'annule pas.

Introduisons pour la suite un peu de vocabulaire, largement utilisé dans certains ouvrages.

**Définition II.2** À  $(v_0, p_0, j)$  fixé, on appelle droite de Rayleigh, la droite du plan  $(v, p)$  définie par

$$p = p_0 - j^2 (v - v_0).$$

À  $(v_0, p_0 = p(v_0, s_0))$  fixé, on appelle adiabatique de Hugoniot

$$\mathcal{A}(v_0, p_0) = \{(v, p) = (v, p(v, s)); \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = 0\}.$$

À  $\mathbf{W}_0$  fixé, les projections des courbes  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0)$  et  $\mathcal{H}_3(\mathbf{W}_0)$  dans le plan  $(u, p)$  sont appelées polaires de choc.

La géométrie des polaires de choc et des adiabatiques de Hugoniot, et en particulier leur monotonie, est très importante pour la résolution du *problème de Riemann*, cf §1.4. Le cas des gaz parfaits polytropiques est de ce point de vue "idéal", au sens où

- les adiabatiques de Hugoniot

$$\mathcal{A}(v_0, p_0) = \{(v, p); pv - p_0 v_0 + \frac{1}{2} \Gamma (v - v_0) (p + p_0) = 0\}$$

sont monotones en  $v$  et en  $p$ , et coupent exactement une fois chaque isentrope (voir la figure II.1),

- les polaires de choc

$$\{(u, p); u = u_0 \mp (p_0 - p) \sqrt{v_0 / (p + \frac{1}{2} \Gamma (p + p_0))}\}$$

sont monotones en  $u$  et en  $p$ .

Dans ce qui suit, on s'attache à trouver des conditions assurant ces différentes propriétés pour des lois d'état plus complexes.

Figure II.1: Adiabatique (portion d'hyperbole en pointillé; la droite en pointillé étant son asymptote) et isentropes pour un gaz parfait polytropique.

**Étude de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$ .** Pour cette étude, on considèrera  $\bar{h}$  indifféremment comme fonction de  $(v, s)$  ou de  $(p, s)$ , ce qui est justifié si  $v \mapsto p(v, s)$  est un difféomorphisme global quel que soit  $s$  (ce qui est le cas pour les fluides de Bethe-Weyl). Si besoin est, afin d'éviter les confusions, on notera

$$\tilde{h}(p(v, s), s; p_0, s_0) = \bar{h}(v, s; v_0, s_0).$$

Commençons par démontrer le résultat préliminaire suivant.

**Lemme II.1** *Pour un fluide de Bethe-Weyl,*

- si  $s \leq s_0$  alors  $\bar{h} < 0$  pour  $v < v_0$  et  $\tilde{h} < 0$  pour  $p > p_0$ ,
- si  $s \geq s_0$  alors  $\bar{h} > 0$  pour  $v > v_0$  et  $\tilde{h} < 0$  pour  $p < p_0$ .

**Dém.** On prouve ces inégalités de manière tout à fait élémentaire, et identique pour  $\bar{h}$  et  $\tilde{h}$ .

Tout d'abord, on étudie ces fonctions à  $s$  fixé. On a

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} \right|_s = \frac{1}{2} \left( p_0 - p + (v - v_0) \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s \right), \quad \left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial v} \right|_s = \frac{1}{2} \left( v - v_0 + (p_0 - p) \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_s \right),$$

et donc

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial v^2} \right|_s = \frac{1}{2} (v - v_0) \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_s, \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial p^2} \right|_s = \frac{1}{2} (p_0 - p) \left. \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right|_s.$$

D'après les hypothèses  $\gamma > 0$  et  $\mathcal{G} > 0$ ,  $p$  est fonction convexe de  $v$  à  $s$  constant, et inversement,  $v$  est fonction convexe de  $p$  à  $s$  constant. Donc, pour  $v > v_0$ ,  $\bar{h}$  est fonction

convexe de  $v$  à  $s$  constant, tandis que pour  $v < v_0$ , c'est une fonction concave. De même, pour  $p < p_0$ ,  $\bar{h}$  est fonction convexe de  $p$  à  $s$  constant, tandis que pour  $p > p_0$ , c'est une fonction concave. En particulier,

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} \right|_s \geq \frac{\partial \bar{h}}{\partial v}(v_0, s) = \frac{1}{2} (p(v_0, s_0) - p(v_0, s)) \geq 0$$

pour  $s \leq s_0$  (avec égalité seulement en  $(v_0, s_0)$ ), car  $p$  est fonction strictement croissante de  $s$  à  $v$  constant (d'après l'hypothèse  $\Gamma > 0$ ). De même,

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial p} \right|_s \leq \frac{\partial \tilde{h}}{\partial p}(p_0, s) = \frac{1}{2} (v(p_0, s) - v(p_0, s_0)) \leq 0$$

pour  $s \leq s_0$  (avec égalité seulement en  $(p_0, s_0)$ ). (Vérifier que  $v$  est fonction strictement croissante de  $s$  à  $p$  constant dès que  $\Gamma > 0$  et  $\gamma > 0$ .)

On conclut ensuite facilement. Voyons le cas de  $\bar{h}$  (celui de  $\tilde{h}$  étant laissé en exercice). D'après ce qui précède,  $v \mapsto \bar{h}(v, s_0; v_0, s_0)$  est strictement croissante. Comme

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right|_v = \left( 1 + \frac{1}{2} \Gamma \frac{v - v_0}{v} \right) T > 0$$

pour  $v \geq v_0$ , on en déduit d'une part

$$\bar{h}(v, s; v_0, s_0) = \underbrace{(\bar{h}(v, s; v_0, s_0) - \bar{h}(v, s_0; v_0, s_0))}_{\geq 0} + \underbrace{(\bar{h}(v, s_0; v_0, s_0) - \bar{h}(v_0, s_0; v_0, s_0))}_{> 0} > 0$$

pour  $s \geq s_0$  et  $v > v_0$ , et d'autre part

$$\bar{h}(v, s; v_0, s_0) = \underbrace{(\bar{h}(v, s; v_0, s_0) - \bar{h}(v_0, s; v_0, s_0))}_{< 0} + \underbrace{(\bar{h}(v_0, s; v_0, s_0) - \bar{h}(v_0, s_0; v_0, s_0))}_{\leq 0} < 0$$

pour  $s \leq s_0$  et  $v < v_0$ . □

**Corollaire II.1** *L'ensemble  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  est inclus dans*

$$\{v \geq v_0, p \leq p_0\} \cup \{v \leq v_0, p \geq p_0\}$$

**Dém.** C'est immédiat. Pour un point  $(v, p(v, s)) \in \mathcal{A}(v_0, p_0)$ , ou bien  $s \leq s_0$  et dans ce cas  $v \geq v_0$  (sinon  $\bar{h} < 0$ ) et  $p \leq p_0$  (sinon  $\tilde{h} < 0$ ), ou alors  $s \geq s_0$  et  $v \leq v_0$  (sinon  $\bar{h} > 0$ ),  $p \geq p_0$  (sinon  $\tilde{h} > 0$ ). □

On peut maintenant préciser l'allure de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  pour les fluides de Bethe-Weyl.

Par définition de  $\Gamma$ ,

$$\Gamma de = v \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v ds - \Gamma p dv = v dp - v \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s dv - \Gamma p dv = v dp + (\gamma - \Gamma) p dv.$$

Par suite, on peut réécrire

$$\Gamma d\bar{h} = \left( 1 + \frac{1}{2} \Gamma \frac{v - v_0}{v} \right) v dp + \left( \gamma - \frac{1}{2} \Gamma \frac{p - p_0}{p} \right) p dv,$$

et par conséquent, puisque  $\Gamma > 0$ , la “branche expansive”  $\{v > v_0, p < p_0\}$  de l’ensemble  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  est une courbe régulière paramétrée par  $p$  ou  $v$  indifféremment. Elle est en particulier monotone : le long de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$ ,  $p$  est une fonction décroissante de  $v$ . En fait, c’est plutôt la branche compressive  $\{v < v_0, p > p_0\}$  de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  qui va nous intéresser. Au moins au voisinage de  $(v_0, p_0)$ ,  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  est une courbe paramétrée par  $v$ , de surcroît tangente à l’isentrope

$$\{(v, p = p(v, s_0))\},$$

puisque de pente  $-\gamma p_0/v_0 = p'_v(v_0, s_0)$ . De plus, sous ce qu’on appellera plus loin la *condition forte*

$$\Gamma \leq \frac{pv}{e},$$

on voit assez facilement que  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  peut être partout paramétrée par  $v$ . En effet, pour  $v < v_0$  } et  $(v, p) \in \mathcal{A}(v_0, p_0)$ ,

$$1 + \frac{1}{2}\Gamma \frac{v - v_0}{v} = 1 - \frac{1}{v}\Gamma \frac{e - e_0}{p + p_0} \geq 1 - \frac{p}{p + p_0} \frac{e - e_0}{e}$$

sous la condition forte, ce qui est positif puisque  $e > e_0 > 0$ . Par ailleurs, pour les fluides de Smith,

$$\Gamma < 2\gamma$$

et on a donc toujours

$$\gamma - \frac{1}{2}\Gamma \frac{p - p_0}{p} \neq 0,$$

ce qui montre que  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  peut être partout paramétrée par  $p$ . On se convainc facilement que la terminologie adoptée est bien cohérente, au sens où la condition forte est plus exigeante que l’inégalité définissant les fluides de Smith. C’est l’objet du petit lemme suivant.

**Lemme II.2 (Smith)** *Pour un fluide de Bethe-Weyl tel que  $e > 0$ , on a*

$$\gamma > \frac{1}{2} \frac{pv}{e}.$$

**Dém.** On a

$$e(v, s) \geq \int_v^{+\infty} p(w, s) dw.$$

Et comme  $p$  est une fonction convexe positive de  $v$ ,

$$\int_v^{+\infty} p(w, s) dw > \frac{1}{2} \frac{p^2}{\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s},$$

(on pourra se reporter à l’interprétation graphique de cette inégalité sur la figure II.2) d’où le résultat en revenant à la définition de

$$\gamma = -\left(v/p\right) \frac{\partial p}{\partial v}\Big|_s.$$

□

Une propriété importante dans la résolution du problème de Riemann est la transversalité de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  par rapport aux isentropes. C’est l’objet du



Figure II.2: Illustration de l'inégalité de convexité utilisée dans la démonstration du lemme II.2.

**Théorème II.1 (Bethe-Weyl)** *Pour un fluide muni d'une loi d'état complète avec  $e > 0$ , et  $p$  décroissante par rapport à  $v$  à  $s$  fixé, chaque courbe  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$  intersecte au moins une fois chaque isentrope, dès que la condition asymptotique de la définition I.1 est remplie. De plus, pour les fluides de Smith, cette intersection est unique.*

**Dém.** La première affirmation découle simplement du théorème des valeurs intermédiaires. En effet,

$$\lim_{v \rightarrow b} \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = +\infty$$

quel que soit  $s$ . La seconde limite s'obtient grâce à la minoration évidente :

$$\bar{h}(v, s; v_0, s_0) \geq -e_0 + \frac{1}{2} p_0 (v - v_0) \quad \forall v \geq v_0.$$

La première limite utilise le fait que  $e/p$  tend vers 0 lorsque  $v$  tend vers  $b$  par valeurs supérieures, ce qui demande une petite démonstration, voir le lemme II.3 ci-après.

Donc, quel que soit  $s$ , il existe  $v \in (0, +\infty)$  tel que  $\bar{h}(v, s; v_0, s_0) = 0$ . L'unicité de l'intersection est une conséquence du lemme II.1 lorsque  $s < s_0$  (puisque alors  $\bar{h}$  est une fonction strictement croissante de  $v$ , à  $s$  constant). Le cas  $s > s_0$  demande plus de travail, et découle du lemme II.4 ci-après.  $\square$

**Lemme II.3** *Pour un fluide muni d'une loi d'état complète avec  $e(v, s) > 0$ ,  $p(v, s) > 0$  pour tout  $v \in ]b, +\infty[$ , et  $p$  décroissante par rapport à  $v$ , on a*

$$\lim_{v \rightarrow b} p(v, s) = +\infty \quad \implies \quad \lim_{v \rightarrow b} \frac{e(v, s)}{p(v, s)} = 0.$$

**Dém.** Quels que soient  $v$  et  $v_0$  avec  $b < v < v_0$ , on a

$$0 < e(v, s) = e(v_0, s) + \int_v^{v_0} p(w, s) dw \leq e(v_0, s) + p(v, s) (v_0 - v),$$

d'où

$$0 \leq \limsup_{v \rightarrow b} \frac{e(v, s)}{p(v, s)} \leq (v_0 - b).$$

Ceci est vrai quel que soit  $v_0$ . La conclusion s'obtient en faisant tendre  $v_0$  vers  $b$  à son tour.  $\square$

**Lemme II.4** *Pour un fluide de Bethe-Weyl, on a*

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} \right|_s > 0$$

le long de toute adiabatique  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$ .

**Dém.** On reprend ici les éléments de la démonstration originale de Weyl [17], qui est assez astucieuse. Une première remarque utilise la symétrie de  $\bar{h}$ . On veut en effet montrer

$$p_0 - p + (v - v_0) \frac{\partial p}{\partial v}(v, s) > 0 \quad \text{quel que soit } (v, s; v_0, s_0) \quad \text{tel que } \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = 0.$$

En échangeant  $(v, s)$  et  $(v_0, s_0)$ , il est donc équivalent de montrer

$$p - p_0 + (v_0 - v) \frac{\partial p}{\partial v}(v_0, s_0) > 0 \quad \text{quel que soit } (v, s; v_0, s_0) \quad \text{tel que } \bar{h}(v, s; v_0, s_0) = 0.$$

On fixe maintenant  $(v_1, s_1)$  tel que  $\bar{h}(v_1, s_1; v_0, s_0) = 0$ , et on considère la droite de Rayleigh de pente

$$-j^2 = \frac{p_1 - p_0}{v_1 - v_0}.$$

(Cette quantité est bien négative d'après le corollaire II.1.) Cette droite admet évidemment comme équation paramétrique

$$v = v_0 + (v_1 - v_0)\theta, \quad p = p_0 + (p_1 - p_0)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

et le long de cette droite, on a

$$(v - v_0) dp + (p_0 - p) dv = (v_1 - v_0)\theta(p_1 - p_0) d\theta + (p_0 - p_1)\theta(v_1 - v_0) d\theta = 0.$$

Comme

$$d\bar{h} = T ds + \frac{v - v_0}{2} dp + \frac{p_0 - p}{2} dv$$

on en déduit

$$d\bar{h} = T ds$$

le long de notre droite de Rayleigh. Voyons donc comment varie  $s$  le long de cette droite. Avant tout, rappelons la relation

$$\frac{\Gamma}{v} T ds = dp - \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s dv,$$

qui montre que  $s$  croît avec  $p$  à  $v$  fixé et aussi avec  $v$  à  $p$  fixé. Soit

$$s' = \frac{d}{d\theta} s(v_0 + (v_1 - v_0)\theta, p_0 + (p_1 - p_0)\theta)$$

la dérivée de  $s$  le long de la droite de Rayleigh. Alors

$$s'' = \frac{ds'}{d\theta} = (v_1 - v_0)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} + 2(v_1 - v_0)(p_1 - p_0) \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial p} + (p_1 - p_0)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial p^2}.$$

Or, d'après l'hypothèse de convexité des isentropes (voir le lemme B.1 dans l'appendice B) on a

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} - 2 \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial p} + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} < 0.$$

On en déduit facilement l'implication :

$$s' = 0 \quad \Rightarrow \quad s'' < 0.$$

Comme conséquence élémentaire, nous avons

$$s'(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s'(\theta) < 0 \quad \forall \theta > 0.$$

Or, comme

$$\bar{h}(v_1, s_1; v_0, s_0) = \bar{h}(v_0, s_0; v_0, s_0) = 0,$$

la fonction  $\bar{h}$ , et donc aussi  $s$  (puisque  $d\bar{h} = T ds$ ), n'est pas monotone le long de la droite de Rayleigh (du côté  $\theta > 0$ ). Par suite, on a nécessairement

$$s'(0) > 0,$$

ce qui est exactement l'inégalité que l'on cherchait puisque

$$s'(0) = (v_1 - v_0) \frac{\partial s}{\partial v} + (p_1 - p_0) \frac{\partial s}{\partial p} = \left( p_1 - p_0 - (v_1 - v_0) \frac{\partial p}{\partial v} \right) \frac{\partial s}{\partial p},$$

où toutes les dérivées sont évaluées en  $v_0, p_0, s_0$ .

□

**Remarque II.1** *L'inégalité*

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} \right|_s = \frac{1}{2} \left( p_0 - p + (v - v_0) \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s \right) > 0$$

signifie que le nombre de Mach

$$M := \sqrt{\frac{p - p_0}{(v - v_0) p'_v}} = \frac{|j|}{\sqrt{-p'_v}} = \frac{|u - \sigma|}{c}$$

est inférieur à 1 si  $v < v_0$ , et supérieur à 1 si  $v > v_0$ . La position du nombre de Mach par rapport à 1 jouera un rôle important dans la suite.

**Étude des polaires de choc** D'après ce qui précède, les polaires de choc sont des courbes paramétrées par  $p$  pour les fluides de Smith. On peut préciser la monotonie de  $u$  le long de ces courbes, sous la *condition intermédiaire*

$$\Gamma \leq \gamma + \frac{1}{2} \frac{pv}{e}.$$

En effet, faisons le calcul pour  $\mathcal{H}_1$ . On a par définition,

$$u = u_0 + (v - v_0)j, \quad j = \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)}.$$

Donc le long de cette polaire de choc,

$$du = \frac{1}{2} (j dv - \frac{1}{j} dp).$$

D'autre part, on a déjà vu que

$$\left( 1 + \frac{1}{2} \Gamma \frac{v - v_0}{v} \right) v dp + \left( \gamma - \frac{1}{2} \Gamma \frac{p - p_0}{p} \right) p dv = 0$$

le long de  $\mathcal{A}(v_0, p_0)$ . Si  $\Gamma < 2\gamma$ , on peut donc éliminer  $dv$  et on obtient :

$$du = \frac{1}{2j} \left( \gamma - \frac{1}{2} \Gamma \frac{p - p_0}{p} \right)^{-1} \left( \frac{v(p - p_0)}{p(v - v_0)} - \gamma + \Gamma \frac{p - p_0}{p} \right) dp.$$

Pour  $p < p_0$ , le dernier facteur est toujours strictement négatif. Si au contraire  $p > p_0$ , et

$$\Gamma \leq \gamma + \frac{1}{2} \frac{pv}{e},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{v(p-p_0)}{p(v-v_0)} - \gamma + \Gamma \frac{p-p_0}{p} &\leq \frac{v(p-p_0)}{p(v-v_0)} - \gamma p_0 + \frac{1}{2} \frac{pv}{e} \frac{p-p_0}{p} \\ &= -\gamma p_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{e} - \frac{p+p_0}{e-e_0} \right) \frac{v(p-p_0)}{p} \\ &= -\gamma p_0 - \frac{1}{2} \frac{v(p-p_0)}{p} \frac{pe_0 + p_0e}{e(e-e_0)} < 0. \end{aligned}$$

Donc  $u$  est fonction décroissante de  $p$  le long de la polaire de choc associée à  $\mathcal{H}_1$ . Le calcul est analogue le long de  $\mathcal{H}_3$ , avec un simple changement de signe.

**Exercice :** Dédurre de ces calculs que les courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ , considérées en variables  $(p, u, s)$ , sont tangentes respectivement à

$$r_1(\mathbf{U}_0) = \begin{pmatrix} -\rho_0 c_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_3(\mathbf{U}_0) = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en  $\mathbf{U}_0$ .

Enfin, on remarque que les polaires de choc ont une branche non bornée, au moins sous la condition forte. En effet, on sait que  $v$  est alors fonction décroissante de  $p$  le long de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{H}_3$ . Donc, d'après l'hypothèse

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_{\max}} p(\rho, s) = +\infty,$$

$v \rightarrow b = 1/\rho_{\max}$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ . Par suite

$$\sqrt{(p-p_0)/(v_0-v)} \rightarrow +\infty,$$

et donc  $u \rightarrow -\infty$  le long de  $\mathcal{H}_1$  tandis que  $u \rightarrow +\infty$  le long de  $\mathcal{H}_3$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ .

## Résumé

**Définition II.3** *Un fluide de Smith (avec  $e > 0$ ) satisfait la condition intermédiaire si*

$$\Gamma \leq \gamma + \frac{1}{2} \frac{pv}{e},$$

*et la condition forte si*

$$\Gamma \leq \frac{pv}{e}.$$

**Exercice :** Quelle(s) condition(s) est(sont) satisfaite(s) par les gaz parfaits, par les gaz de van der Waals?

**Proposition II.2** *Pour un fluide de Smith ( $0 < \Gamma < 2\gamma$ ),  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$  peuvent être paramétrées par  $p$ . Sous la condition intermédiaire,  $u$  est fonction décroissante de  $p$  le long de  $\mathcal{H}_1$  et fonction croissante de  $p$  le long de  $\mathcal{H}_3$ . De plus, sous la condition forte,  $v$  est fonction décroissante de  $p$  le long de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{H}_3$ , et  $u \rightarrow -\infty$  pour  $p \rightarrow +\infty$  le long de  $\mathcal{H}_1$  (respectivement  $u \rightarrow +\infty$  pour  $p \rightarrow +\infty$  le long de  $\mathcal{H}_3$ ). Les propriétés de monotonie sont en fait vraies sans condition sur les branches  $\{p < p_0\}$  de  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0)$  et  $\mathcal{H}_3(\mathbf{W}_0)$ .*

## 1.2 Admissibilité des chocs

D'après le second principe de la thermodynamique, il est naturel d'imposer à une onde de choc le critère (minimum) d'*admissibilité* suivant :

$$j[s] \geq 0,$$

signifiant que l'entropie du fluide s'accroît au travers du choc.

On a déjà observé au chapitre I que ce critère, appelé *critère d'entropie*, était satisfait par tous les chocs admettant un profil thermovisqueux. Par ailleurs, il est trivialement satisfait (avec égalité) par les discontinuités de contact. Concernant les discontinuités dynamiques, il permet de sélectionner les parties admissibles des courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_3$ . Puisque  $j > 0$  sur  $\mathcal{H}_1$  et  $j < 0$  sur  $\mathcal{H}_3$ , le critère d'admissibilité demande  $s > s_0$  sur la partie admissible de  $\mathcal{H}_1$  et  $s < s_0$  sur la partie admissible de  $\mathcal{H}_3$ .

Pour un fluide de Bethe-Weyl, on voit d'après le corollaire II.1 que ces parties admissibles correspondent nécessairement à des *chocs compressifs*. En effet, la partie admissible de  $\mathcal{H}_1$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^a(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; \bar{h}(\mathbf{W}; \mathbf{W}_0) = 0, v < v_0, p > p_0 \text{ et} \\ u = u_0 + (v - v_0) \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} \}, \end{aligned}$$

et la partie admissible de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3^a(\mathbf{W}_0) = \{ \mathbf{W}; \bar{h}(\mathbf{W}; \mathbf{W}_0) = 0, v > v_0, p < p_0 \text{ et} \\ u = u_0 - (v - v_0) \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)} \}. \end{aligned}$$

De plus, on observe que dans les deux cas

$$u < u_0.$$

Cependant, pour des fluides plus généraux, et notamment en l'absence de convexité des isentropes (c'est-à-dire si  $\mathcal{G}$  n'est pas positif partout), il peut exister des chocs admissibles *expansifs*. En effet, sous une condition moins restrictive que la compressivité, il est possible de montrer l'existence de profils (thermo)visqueux, et donc l'admissibilité au sens du critère d'entropie. C'est le

**Théorème II.2 (Liu-Pego)** *En supposant que le fluide est doté d'une équation d'état complète, avec  $p > 0$ ,  $T > 0$  et*

$$\gamma > 0, \quad \delta > 0, \quad \Gamma > 0,$$

*toutes les discontinuités satisfaisant le critère de Liu admettent un profil purement visqueux (c'est-à-dire avec  $\lambda + 2\mu > 0$  et  $\nu = 0$ ). Si de plus*

$$\Gamma \geq \delta,$$

*toutes les discontinuités satisfaisant le critère de Liu admettent un profil thermovisqueux (c'est-à-dire avec  $\lambda + 2\mu > 0$  et  $\nu \geq 0$ ).*

On admettra ce résultat. En revanche, on va expliquer ce qu'est le critère de Liu, et voir qu'il n'est pas incompatible avec des chocs expansifs. Pour cela, on a besoin d'une notation pour la vitesse des discontinuités le long de  $\mathcal{H}_{1,3}$ . Étant donnés  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$  compatibles avec la condition de Rankine-Hugoniot, avec  $j \neq 0$ , on a

$$\text{ou bien } \mathbf{W}_+ \in \mathcal{H}_1(\mathbf{W}_-) \text{ et } \mathbf{W}_- \in \mathcal{H}_1(\mathbf{W}_+),$$

$$\text{ou bien } \mathbf{W}_+ \in \mathcal{H}_3(\mathbf{W}_-) \text{ et } \mathbf{W}_- \in \mathcal{H}_3(\mathbf{W}_+).$$

Plaçons nous dans le premier cas pour fixer les idées. Et notons, pour tout  $\mathbf{W} \in \mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0)$ ,  $\sigma(\mathbf{W}_0; \mathbf{W})$  la vitesse de la discontinuité entre  $\mathbf{W}_0$  et  $\mathbf{W}$ . On a simplement

$$\sigma(\mathbf{W}_0; \mathbf{W}) = u_0 - j v_0 = u_0 - v_0 \sqrt{(p - p_0)/(v_0 - v)}.$$

**Définition II.4 (Liu)** *On dit que la discontinuité entre  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$ , de vitesse*

$$\sigma = \sigma(\mathbf{W}_-; \mathbf{W}_+) = \sigma(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}_-),$$

*satisfait le critère de Liu si et seulement si*

- *pour tout  $\mathbf{W} \in \mathcal{H}_1(\mathbf{W}_-)$  entre  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$ ,*

$$\sigma(\mathbf{W}_-; \mathbf{W}_+) \leq \sigma(\mathbf{W}_-; \mathbf{W}),$$

- *pour tout  $\mathbf{W} \in \mathcal{H}_1(\mathbf{W}_+)$  entre  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$ ,*

$$\sigma(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}) \leq \sigma(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}_-).$$

$\triangle$  Les courbes  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_-)$  et  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_+)$  sont différentes.

**Exemple.** Lorsque les isentropes sont non convexes, choisissons sur l'une d'entre elles  $v_- < v_+$  tels que le graphe de  $p$  soit au dessus de sa corde entre les deux points (voir figure II.3). Soit

$$j = \sqrt{(p_+ - p_-)/(v_- - v_+)}$$

et  $u_{\pm}$  tels que

$$u_+ - u_- = j(v_+ - v_-).$$

Figure II.3: Choc expansif sur une isentrope non convexe.



On obtient une discontinuité expansive satisfaisant les conditions de Rankine-Hugoniot, de vitesse

$$\sigma = u_{\pm} - v_{\pm} \sqrt{(p_+ - p_-)/(v_- - v_+)}.$$

Et on constate que pour les états intermédiaires  $\mathbf{W}$ ,

$$\sigma(\mathbf{W}_-; \mathbf{W}) = u_- - v_- \sqrt{(p - p_-)/(v_- - v)} \geq \sigma,$$

$$\sigma(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}) = u_+ - v_+ \sqrt{(p - p_+)/(v_+ - v)} \leq \sigma.$$

Donc cette discontinuité satisfait bien le critère de Liu.

**Remarque II.2** *On constate que*

$$\lim_{\mathbf{W} \xrightarrow{\mathcal{H}_1} \mathbf{W}_0} \sigma(\mathbf{W}_0; \mathbf{W}) = u_0 - c_0.$$

*Par suite, le critère de Liu implique en particulier*

$$u_+ - c_+ = \lambda_1(\mathbf{W}_+) \leq \sigma \leq \lambda_1(\mathbf{W}_-) = u_- - c_-,$$

*inégalités connues sous le nom d'inégalités de choc de Lax . On parle alors de 1-choc. Bien sûr, dans le cas où  $\mathbf{W}_+ \in \mathcal{H}_3(\mathbf{W}_-)$ , on trouve à la place les inégalités*

$$u_+ + c_+ = \lambda_3(\mathbf{W}_+) \leq \sigma \leq \lambda_3(\mathbf{W}_-) = u_- + c_-,$$

*ce qui correspond à un 3-choc. Ces inégalités jouent un rôle important dans la résolution du problème de Riemann. Elles seront également cruciales dans l'étude de la stabilité des chocs (voir Chapitre III). D'après le lemme II.4 et la remarque II.1, on voit en particulier que pour les fluides de Bethe-Weyl, les inégalités de choc de Lax sont satisfaites par tous les chocs compressifs.*

La résolution du problème de Riemann dans le cas particulier où la donnée initiale est une discontinuité admissible ne pose aucun problème. La solution est simplement l'onde de choc correspondante

$$\underline{\mathbf{W}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_-, & x < \sigma t, \\ \mathbf{W}_+, & x > \sigma t. \end{cases}$$

En revanche, si cette discontinuité n'est *pas admissible* (sauf dans le cas particulier  $s_- = s_+$ , il suffit pour perdre l'admissibilité d'échanger  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$ ), quelle est la solution du problème de Riemann ? On va voir qu'elle n'est plus aussi simple, et fait intervenir ce qu'on appelle une *onde de détente*. Cette appellation est conforme à l'intuition dans les fluides "standards", de Bethe-Weyl en particulier, où on va voir que les ondes de détente sont *expansives*.

### 1.3 Ondes de détente

Une onde de détente est une solution particulière de problème de Riemann, de type *autosimilaire*, c'est-à-dire qui ne dépend que de  $x/t$ . En fait, un problème de Riemann étant invariant par dilatation

$$(x, t) \mapsto (ax, at),$$

la solution, si elle est unique, est nécessairement autosimilaire.

Notez que les ondes de choc sont bien sûr autosimilaires. Mais comme on l'a déjà remarqué, si la donnée initiale n'est pas un choc admissible, il faut trouver une autre solution (les "fausses" solutions que constituent les ondes de choc non admissibles sont parfois appelées *rarefaction shocks* dans la littérature anglophone, *rarefaction* signifiant détente!).

Voyons donc l'équation que doit satisfaire une solution autosimilaire, supposée suffisamment régulière pour pouvoir faire la dérivation de fonctions composées. On notera ici  $\xi = x/t$ , et  $'$  la dérivation par rapport à  $\xi$ . On rappelle que les solutions régulières des équations d'Euler (monodimensionnelles) satisfont un système dit *quasilinéaire*

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = 0.$$

On peut par exemple choisir les variables  $p, u, s$ , c'est-à-dire que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u & \rho c^2 & 0 \\ \rho^{-1} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Si  $\mathbf{U}$  ne dépend que de  $\xi = x/t$ , on en déduit

$$(\mathbf{A}(\mathbf{U}(\xi)) - \xi \mathbf{I}) \mathbf{U}'(\xi) = 0.$$

Par suite, si  $\mathbf{U}'(\xi) \neq 0$ ,  $\xi$  est nécessairement une valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{U}(\xi))$  de  $\mathbf{A}(\mathbf{U}(\xi))$ , de vecteur propre associé  $\mathbf{U}'(\xi)$ .

Une *k-onde de détente* est par définition une solution du problème

$$\lambda_k(\mathbf{U}(\xi)) = \xi, \quad \mathbf{U}'(\xi) \parallel r_k(\mathbf{U}(\xi)),$$

satisfaisant les conditions aux limites en  $\xi_-$  et  $\xi_+$  ( $\xi_- < \xi_+$ ) :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_{\pm}} \mathbf{U}(\xi) = \mathbf{U}_{\pm}.$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une onde de détente est la monotonie de  $\lambda_k$  le long des courbes intégrales de  $r_k$ . En effet, en dérivant l'égalité  $\lambda_k(\mathbf{U}(\xi)) = \xi$  on obtient

$$d\lambda_k(\mathbf{U}(\xi)) \cdot \mathbf{U}'(\xi) = 1$$

et donc

$$d\lambda_k(\mathbf{U}(\xi)) \cdot r_k(\mathbf{U}(\xi)) \neq 0.$$

Par suite, on voit qu'il n'existe pas de 2-onde de détente.

Pour  $k = 1$  ou  $3$ , s'il existe une *k-onde de détente* alors nécessairement

$$\xi_- = \lambda_k(\mathbf{U}_-) < \lambda_k(\mathbf{U}_+) = \xi_+.$$

Et dans ce cas, la solution du problème de Riemann associé aux états  $\mathbf{U}_\pm$  est simplement

$$\underline{\mathbf{U}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_-, & x \leq t\xi_-, \\ \mathbf{U}(\xi), & x/t \in [\xi_-, \xi_+], \\ \mathbf{U}_+, & x \geq t\xi_+. \end{cases}$$

Réciproquement, si les 1er et 3ème champs sont vraiment non-linéaires, c'est-à-dire si  $\mathcal{G}$  ne s'annule pas (voir Chapitre I §3.2), il existe bien des 1-ondes de détente et des 3-ondes de détente. On a même une caractérisation des états  $\mathbf{U}_-$  et  $\mathbf{U}_+$  reliés par une onde de détente.

**Proposition II.3** *On suppose que le coefficient  $\mathcal{G}$  ne s'annule pas. Étant donnés deux états du fluide  $\mathbf{U}_-$  et  $\mathbf{U}_+$ , il existe une  $k$ -onde de détente ( $k = 1$  ou  $3$ ) reliant  $\mathbf{U}_-$  à  $\mathbf{U}_+$  si et seulement si  $\lambda_k(\mathbf{U}_-) < \lambda_k(\mathbf{U}_+)$  et  $\mathbf{U}_+$  appartient à la courbe intégrale de  $r_k$  passant par  $\mathbf{U}_-$ .*

**Dém.** Puisque  $d\lambda_k \cdot r_k$  ne s'annule pas, on peut supposer sans perte de généralité le vecteur propre  $r_k$  normalisé de sorte que

$$d\lambda_k \cdot r_k \equiv 1.$$

Par suite

$$d\lambda_k(\mathbf{U}(\xi)) \cdot \mathbf{U}'(\xi) = 1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}'(\xi) \parallel r_k(\mathbf{U}(\xi))$$

implique nécessairement

$$\mathbf{U}'(\xi) = r_k(\mathbf{U}(\xi)).$$

Comme

$$\mathbf{U}(\xi_\pm) = \mathbf{U}_\pm,$$

l'état  $\mathbf{U}_+$  appartient bien à la courbe intégrale de  $r_k$  passant par  $\mathbf{U}_-$  (de même que  $\mathbf{U}_-$  appartient à la courbe intégrale de  $r_k$  passant par  $\mathbf{U}_+$ , ces deux courbes étant confondues d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz<sup>2</sup>). Réciproquement, supposons  $\lambda_k(\mathbf{U}_-) < \lambda_k(\mathbf{U}_+)$  et que  $\mathbf{U}_+$  appartient à la courbe intégrale de  $r_k$  passant par  $\mathbf{U}_-$ . Il existe donc une application  $\theta \in [\theta_-, \theta_+] \mapsto \mathbf{V}(\theta)$  telle que

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\theta} = r_k(\mathbf{V}(\theta)), \quad \mathbf{V}(\theta_\pm) = \mathbf{U}_\pm,$$

et la fonction  $\lambda_k \circ \mathbf{V}$  est strictement croissante sur  $[\theta_-, \theta_+]$ . Donc pour tout  $\xi \in [\lambda_k(\mathbf{U}_-), \lambda_k(\mathbf{U}_+)]$ , il existe un unique  $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$  tel que

$$\lambda_k(\theta) = \xi.$$

Alors on vérifie immédiatement que  $\mathbf{U}(\xi) := \mathbf{V}(\theta)$  définit bien une onde de détente.  $\square$

**Définition II.5** *En supposant  $\mathcal{G} \neq 0$  (partout pour simplifier), on appelle "courbe" de  $k$ -détente ( $k = 1$  ou  $3$ ) et on note  $\mathcal{R}_k(\mathbf{U})$  la portion de courbe intégrale de  $r_k$  passant par  $\mathbf{U}$  où  $\lambda > \lambda_k(\mathbf{U})$ .*

<sup>2</sup>Contrairement aux courbes de choc  $\mathcal{H}_k(\mathbf{W}_-)$  et  $\mathcal{H}_k(\mathbf{W}_+)$ , qui elles sont différentes

Le portrait de phase du champ de vecteurs  $r_k$  donne l'allure des courbes  $\mathcal{R}_k(\mathbf{U})$ . C'est un autre problème de calculer effectivement les ondes de détente, ce qui revient à résoudre l'équation différentielle *non linéaire*

$$\mathbf{U}'(\xi) = r_k(\mathbf{U}(\xi)).$$

On introduit pour cela la notion d'*invariant de Riemann*.

**Définition II.6** On appelle  $k$ -invariant de Riemann une fonction  $z_k : \mathbf{U} \mapsto z(\mathbf{U})$  telle que

$$dz_k(\mathbf{U}) \cdot r_k(\mathbf{U}) = 0.$$

$\Delta$  Attention encore une fois, dans cette définition,  $dz_k$  désigne la différentielle de  $z_k$  dans les variables où le vecteur propre  $r_k$  est calculé.

Pour un champ de vecteurs  $r_k$  "pris au hasard" il n'y aucune raison d'avoir des invariants de Riemann explicites. Mais on rappelle que les vecteurs  $r_{1,3}$  ont une forme assez simple, surtout en variables  $(p, u, s) = \mathbf{U}^*$ ,

$$r_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\rho c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, les deux champs  $r_1$  et  $r_3$  admettent l'invariant de Riemann évident  $s$ . À peine moins évidents sont

$$z_1 = u + \varphi \quad \text{et} \quad z_3 = u - \varphi$$

où  $\varphi$  est définie par

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_s = \frac{1}{\rho c}.$$

Ces invariants de Riemann sont bien sûr indépendants, et permettent de réduire le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(\xi) = r_k(\mathbf{U}(\xi)), \\ \mathbf{U}(\xi_0) = \mathbf{U}_0, \end{cases}$$

à

$$\begin{cases} p'(\xi) = \pm (\rho c)(\xi), & p(\xi_0) = p_0, \\ u(\xi) = u_0 \pm (\varphi(p(\xi), s_0) - \varphi(p_0, s_0)), \\ s(\xi) = s_0, \end{cases}$$

la première ligne se résolvant par simple quadrature. Si  $c > 0$  et  $\mathcal{G} > 0$  on a  $d\lambda_{1,3} \cdot r_{1,3} > 0$  avec les vecteurs propres choisis. Donc l'inégalité  $\lambda_k(\mathbf{U}_-) < \lambda_k(\mathbf{U}_+)$  demande  $p_+ < p_-$  pour  $k = 1$  (la première composante de  $r_1$  étant négative), et  $p_+ > p_-$  pour  $k = 3$  (la première composante de  $r_3$  étant négative). (Noter que l'inégalité  $\lambda_k(\mathbf{U}_-) < \lambda_k(\mathbf{U}_+)$  est l'inverse de celle présente dans les inégalités de choc de Lax, et qu'on obtient des "détentes expansives", à l'inverse des chocs, qui sont compressifs.) On peut donc préciser la proposition II.3 en la

**Proposition II.4** *En supposant  $c > 0$ ,  $\mathcal{G} > 0$ , quel que soit  $\mathbf{U}_0$  on a*

$$\mathcal{R}_k(\mathbf{U}_0) = \{ \mathbf{U}; s = s_0 \text{ et } (u, p) \in \mathcal{D}_k(u_0, p_0, s_0) \},$$

où

$$\mathcal{D}_1(u_0, p_0, s_0) := \{ (u, p); u = u_0 - \varphi(p, s_0) + \varphi(p_0, s_0), p < p_0 \},$$

$$\mathcal{D}_3(u_0, p_0, s_0) := \{ (u, p); u = u_0 + \varphi(p, s_0) - \varphi(p_0, s_0), p > p_0 \}.$$

Notez que les courbes  $\mathcal{D}_k$  sont les projections dans le plan  $(u, p)$  des courbes de détente au même titre que les polaires de choc sont les projections des courbes de Hugoniot.

## 1.4 Résolution du problème de Riemann

### Courbes de Lax

On va se limiter au cas des fluides de Smith, pour lesquels on a vu que les polaires de choc étaient des courbes paramétrées par  $p$ . On remarque de plus que la vitesse  $u$  le long de d'une quelconque courbe de Hugoniot  $\mathcal{H}_3(\mathbf{W}_0)$  est définie comme le long de  $\mathcal{H}_1(\mathbf{W}_0)$ , à un changement de signe près. Ainsi, il existe une fonction  $\psi$  telle que la polaire de choc associée au premier champ soit

$$\{ (u, p); u = u_0 - \psi(p; p_0, s_0) \}$$

et celle associée au dernier champ soit

$$\{ (u, p); u = u_0 + \psi(p; p_0, s_0) \}.$$

En fait, il peut être plus commode d'écrire la fonction  $\psi$  en fonction d'une autre variable thermodynamique que  $s_0$ , par exemple  $\rho_0$ .

**Exercice :** Pour les gaz parfaits polytropiques, montrer que cette fonction est donnée par :

$$\psi(p; p_0, s_0) = \tilde{\psi}(p; p_0, \rho_0) = \frac{p - p_0}{\sqrt{\rho_0 \left( \frac{\gamma+1}{2} p + \frac{\gamma-1}{2} p_0 \right)}}.$$

On définit les “*courbes*” de choc comme les parties admissibles des polaires de choc, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_1(u_0, p_0, s_0) := \{ (u, p); u = u_0 - \psi(p; p_0, s_0), p > p_0 \}$$

et

$$\mathcal{C}_3(u_0, p_0, s_0) := \{ (u, p); u = u_0 + \psi(p; p_0, s_0), p < p_0 \}.$$

On va compléter ces “demi-courbes” par les courbes de détente  $\mathcal{D}_1(u_0, p_0, s_0)$  et  $\mathcal{D}_3(u_0, p_0, s_0)$  définies plus haut.

**Définition II.7** *On appelle courbes de Lax la réunion des courbes de détente et des courbes de choc*

$$\mathcal{L}_k(u_0, p_0, s_0) := \mathcal{D}_k(u_0, p_0, s_0) \cup \mathcal{C}_k(u_0, p_0, s_0).$$

### Résolution par ondes simples

Voyons pour commencer le cas très simple de l'acoustique. On rappelle que le système de l'acoustique est *linéaire* par hypothèse

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho_0 c_0^2 \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + v_0 \partial_x p = 0, \\ \partial_t s = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut à trois équations de transport découplées

$$\begin{cases} \partial_t (-p + \rho_0 c_0 u) - c_0 \partial_x (-p + \rho_0 c_0 u) = 0, \\ \partial_t s = 0, \\ \partial_t (p + \rho_0 c_0 u) + c_0 \partial_x (p + \rho_0 c_0 u) = 0. \end{cases}$$

En notant

$$\alpha_1 = -p + \rho_0 c_0 u, \quad \alpha_3 = p + \rho_0 c_0 u,$$

la solution du problème de Riemann est explicitement donnée par

$$\alpha_1(x, t) = \alpha_1(x + c_0 t, 0), \quad s(x, t) = s(x, 0), \quad \alpha_3(x, t) = \alpha_3(x - c_0 t, 0),$$

c'est-à-dire plus précisément

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) &= -p_- + \rho_0 c_0 u_-, & s(x, t) &= s_-, & \alpha_3(x, t) &= p_- + \rho_0 c_0 u_-, & \text{si } x < -c_0 t, \\ \alpha_1(x, t) &= -p_+ + \rho_0 c_0 u_+, & s(x, t) &= s_-, & \alpha_3(x, t) &= p_- + \rho_0 c_0 u_-, & \text{si } -c_0 t < x < 0, \\ \alpha_1(x, t) &= -p_+ + \rho_0 c_0 u_+, & s(x, t) &= s_+, & \alpha_3(x, t) &= p_- + \rho_0 c_0 u_-, & \text{si } 0 < x < c_0 t, \\ \alpha_1(x, t) &= -p_+ + \rho_0 c_0 u_+, & s(x, t) &= s_+, & \alpha_3(x, t) &= p_+ + \rho_0 c_0 u_+, & \text{si } x > c_0 t, \end{aligned}$$

$\triangle$  Ce découplage n'a pas lieu pour le problème non linéaire.

Cependant, par analogie avec le cas linéaire, on cherche la solution du problème de Riemann non linéaire composée de trois ondes dites élémentaires, une 1-onde (choc ou détente) reliant  $\mathbf{U}_-$  à un état intermédiaire  $\mathbf{U}_1$ , lui-même relié à un autre état intermédiaire  $\mathbf{U}_3$  par une discontinuité de contact,  $\mathbf{U}_3$  étant relié à  $\mathbf{U}_+$  par une 3-onde. Les discontinuités de contact étant caractérisées par un saut de pression et un saut de vitesse nuls, cela se traduit par

$$(u_3, p_3) = (u_1, p_1) \in \mathcal{L}_1(u_-, p_-, s_-), \quad (u_+, p_+) \in \mathcal{L}_3(u_3, p_3, s_3).$$

Une façon équivalente, et plus symétrique, de voir ce problème est

$$(u_3, p_3) = (u_1, p_1) \in \mathcal{L}_1(u_-, p_-, s_-) \cap \mathcal{L}_3^r(u_+, p_+, s_+),$$

où  $\mathcal{L}_3^r(u_+, p_+, s_+)$  désigne la *courbe de Lax rétrograde*, définie par

$$\mathcal{L}_3(u_+, p_+, s_+) := \mathcal{D}_3^r(u_+, p_+, s_+) \cup \mathcal{C}_3^r(u_+, p_+, s_+),$$

$$\mathcal{D}_3^r(u_+, p_+) = \{ (u, p); u = u_+ + \varphi(p, s_+) - \varphi(p_+, s_+), p < p_+ \},$$

$$\mathcal{C}_3^r(u_+, p_+, s_+) := \{ (u, p); u = u_+ + \psi(p; p_+, s_+), p > p_+ \}.$$

Finalement, en définissant la fonction “composite”

$$\Phi(p; p_0, s_0) := \begin{cases} \psi(p; p_0, s_0), & p \geq p_0, \\ \varphi(p, s_0) - \varphi(p_0, s_0), & p < p_0, \end{cases}$$

la résolution du problème de Riemann se ramène à la résolution de l'équation algébrique non-linéaire

$$u_- - u_+ = \Phi(p; p_+, s_+) + \Phi(p; p_-, s_-).$$

Or, d'après la proposition II.2 et puisque  $\varphi'_p = 1/(\rho c) > 0$ , la fonction  $p \mapsto \Phi(p; p_0, s_0)$  est strictement croissante sous la condition intermédiaire de la définition II.3, et tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  sous la condition forte. Par ailleurs,

$$0 > \Phi(0; p_0, s_0) = - \int_0^{p_0} \left( \frac{1}{\rho c} \right) \Big|_{s=s_0} dp > -\infty.$$

Donc, si

$$u_- - u_+ > \Phi(0; p_+, s_+) + \Phi(0; p_-, s_-),$$

on trouve un unique  $p \in ]0, +\infty[$  tel que

$$u_- - u_+ = \Phi(p; p_+, s_+) + \Phi(p; p_-, s_-).$$

Si  $p < \min(p_-, p_+)$ , la solution du problème de Riemann correspondante contient une 1-détente et une 3-détente. Si  $p > \max(p_-, p_+)$ , elle contient un 1-choc et un 3-choc. Si  $p_- < p < p_+$  on a un 1-choc et une 3-détente. Si  $p_- > p > p_+$  on a un 3-choc et une 1-détente.

Si  $u_+$  est trop grand devant  $u_-$ , c'est-à-dire si

$$u_- - u_+ < \Phi(0; p_+, s_+) + \Phi(0; p_-, s_-),$$

il semble ne pas y avoir de solution. En fait, cela signifie simplement que les courbes de Lax  $\mathcal{L}_1(u_-, p_-, s_-)$  et  $\mathcal{L}_3^r(u_+, p_+, s_+)$  atteignent l'axe  $p = 0$  sans s'intersecter. Notez que ce sont les portions correspondant à des détentes qui atteignent  $p = 0$ , et qu'elles sont tangentes à cet axe aux points de rencontre : les vecteurs propres  $r_1$  et  $r_3$ , en variables  $(p, u, s)$ , s'alignent en effet tous deux avec  $(0, 1, 0)^t$  lorsque  $p = 0$ ,  $\rho = 0$ . La seule solution “naturelle” est constituée de ces deux détentes, séparées par une zone de vide. (Ceci un peu académique car la validité des équations d'Euler près du vide est discutable.)

Pour résumer, on a le

**Théorème II.3** *Pour un fluide de Smith satisfaisant la condition forte de la définition II.3, tout problème de Riemann admet une solution unique constituée d'une 1-onde et une 3-onde (chocs ou détentes) séparées par une discontinuité de contact, ou bien 1-détente et une 3-détente séparées par une zone de vide.*

## 2 Approximation numérique

Le but de cette partie est de présenter quelques méthodes numériques de base, de type *différences finies*. (Pour des méthodes plus sophistiquées, de type *volumes finis* sur des maillages non structurés, on renvoie à des ouvrages spécialisés [5, 7].) On discrétise l'espace  $\{x \in \mathbb{R}\}$  par un maillage régulier, constitué de nœuds  $x_j$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) séparés par une distance  $\Delta x$ . Les “maillages” sont alors simplement les intervalles

$$I_j := \left[ x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2} \right].$$

La discrétisation en temps est faite avec un intervalle  $\Delta t$ . On verra qu'en pratique ce pas de temps doit parfois être diminué au cours de la simulation. Pour ce qui concerne la présentation des méthodes, on le supposera fixé une fois pour toutes.

Pour approcher numériquement la solution  $(x, t) \mapsto \mathbf{W}(x, t)$  de

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = 0, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = u \mathbf{W} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix},$$

(système bien sûr assorti d'une loi d'état, par exemple une loi d'état dite incomplète, donnant  $p$  en fonction de  $(\rho, e)$ ) on va chercher à calculer des valeurs  $\mathbf{W}_j^n$ , supposées approcher  $\mathbf{W}(x_j, n \Delta t)$ , les valeurs correspondantes  $\mathbf{Z}_j^n$ , supposées approcher  $\mathbf{Z}(x_j, n \Delta t)$ , s'en déduisant par la loi d'état. L'idée très simple des méthodes aux différences finies, est de remplacer les dérivées  $\partial_t \mathbf{W}$  et  $\partial_x \mathbf{Z}$  par des “dérivées discrètes”, via la formule de Taylor. De nombreux schémas peuvent être considérés. Nous en donnons ci-après les exemples les plus classiques, en les rangeant en deux familles, celle des schémas dits centrés, qui peuvent être vus comme des modifications du schéma centré de base (lui-même étant violemment instable!), et la famille des schémas dits décentrés, qui généralisent le schéma décentré de base (stable seulement lorsque les vitesses caractéristiques sont toutes de même signe).

### 2.1 Schémas “centrés”

Le schéma centré le plus naturel s'écrit :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_{j-1}^n).$$

$\triangleleft$  Cependant, ce schéma est à rejeter, car il est *inconditionnellement instable*. Pour s'en convaincre, on peut déjà essayer de l'appliquer au système linéaire de l'acoustique

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho_0 c_0^2 \partial_x \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + v_0 \partial_x p = 0, \\ \partial_t s = 0, \end{cases}$$

dont on a déjà vu qu'il se ramenait à trois équations de transport, c'est-à-dire des équations du type

$$\partial_t w + a \partial_x w = 0.$$



Or pour une telle équation le schéma précédent s'écrit

$$w_j^{n+1} = w_j^n - a \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n).$$

Avec une donnée initiale de la forme  $w_j^0 = e^{j\theta}$ , on obtient la solution explicite

$$w_j^n = h(\theta)^n w_j^0, \quad h(\theta) = 1 - i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta.$$

La fonction  $\theta \mapsto h(\theta)$  est appelée *facteur d'amplification*. Son module est supérieur à 1. Par conséquent, le schéma donne une solution dont la norme  $\ell^\infty$  tend vers l'infini, pour une donnée initiale bornée. Au moyen de la transformée de Fourier discrète (qui à une suite  $w = \{w_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de carré sommable associe la fonction  $2\pi$ -périodique

$$\theta \mapsto \widehat{w}(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j e^{j\theta} \quad ),$$

on voit que le problème est identique avec la norme  $\ell^2$ . Il faut trouver un autre schéma.

### Schéma de Lax-Friedrichs

En fait, on peut facilement modifier le schéma centré pour le rendre stable. Il suffit de remplacer  $\mathbf{W}_j^n$  par une valeur moyenne utilisant les valeurs  $\mathbf{W}_{j-1}^n$  et  $\mathbf{W}_{j+1}^n$ . On obtient ainsi un schéma de type *Lax-Friedrichs* :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \frac{\alpha \mathbf{W}_{j-1}^n + \beta \mathbf{W}_j^n + \alpha \mathbf{W}_{j+1}^n}{2\alpha + \beta} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_{j-1}^n).$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être choisis arbitrairement, pourvu que  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$ . (Le cas  $\alpha = 1, \beta = 0$ , donne le schéma de Lax-Friedrichs usuel.) En appliquant ce nouveau schéma à l'équation de transport de vitesse  $a$ , on obtient comme facteur d'amplification

$$h(\theta) = \frac{2\alpha \cos \theta + \beta}{2\alpha + \beta} - i a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta,$$

dont le module est toujours inférieur ou égal à 1 pourvu que

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta}.$$

Ce type de condition, limitant le pas de temps  $\Delta t$  en fonction du pas d'espace  $\Delta x$  (et de la vitesse caractéristique  $a$ ), est appelée de *condition de Courant-Friedrichs-Lewy*, ou *CFL* en raccourci. Et le nombre sans dimension  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x}$  est souvent appelé CFL.

$\triangleleft$  On rappelle que pour les équations d'Euler, les vitesses caractéristiques sont  $u$  et  $u \pm c$ . En valeur absolue,  $u$  est toujours comprise entre les deux autres. Par conséquent le nombre CFL est

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max\{|u \pm c|\}.$$

Outre sa stabilité, le schéma de Lax-Friedrichs est doté d'une propriété essentielle pour la simulation d'un système de lois de conservation, c'est précisément sa *conservativité* : si la suite initiale  $\mathbf{W}^0$  est sommable, alors  $\mathbf{W}^n$  reste sommable et

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{W}_j^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{W}_j^0$$

quel que soit  $n$ . Cette propriété est l'analogie discret de la conservation de  $\int \mathbf{W}(x, t) dx$ . Elle est importante à plusieurs égards. Du point de vue physique, il est préférable que la masse soit conservée au cours du calcul. Du point de vue numérique, les schémas *non conservatifs* sont connus pour propager les discontinuités à des vitesses erronées, ce qui induit instantanément une erreur très grande entre solution exacte et solution numérique.

**Définition II.8** *Un schéma de la forme*

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1/2}^n - \mathbf{Z}_{j-1/2}^n),$$

où, quel que soit  $j$ ,  $\mathbf{Z}_{j+1/2}^n$  s'exprime (via la loi d'état) en fonction d'un nombre fini de valeurs  $\mathbf{W}_{j-p+1}^n, \dots, \mathbf{W}_{j+q}^n$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), est dit conservatif. Il est consistant avec les équations d'Euler écrites sous la forme

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = 0$$

si  $\mathbf{Z}_{j+1/2}^n$  coïncide avec  $\mathbf{Z}$  lorsque

$$\mathbf{W}_{j-p+1}^n = \dots = \mathbf{W}_{j+q}^n = \mathbf{W}.$$

Un tel schéma est dit à  $(p + q + 1)$  points, puisque le calcul de  $\mathbf{W}_j^{n+1}$  utilise les valeurs de  $\mathbf{W}^n$  en  $(p + q + 1)$  points. Par exemple, le schéma de Lax-Friedrichs est à 3 points.

La quantité  $\mathbf{Z}_{j+1/2}^n$  est appelée *flux numérique* entre la maille  $I_j$  et la maille  $I_{j+1}$ . C'est une notion fondamentale dans les schémas volumes finis. Il n'est pas immédiatement évident que le schéma de Lax-Friedrichs entre dans le cadre de cette définition. Pour le voir, on réécrit ce schéma sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left( \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_{j+1}^n + \mathbf{Z}_j^n) - \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_j^n + \mathbf{Z}_{j-1}^n) \right) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} \left( (\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n) - (\mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

pour constater qu'il admet pour flux numérique

$$\mathbf{Z}_{j+1/2}^n = \frac{\mathbf{Z}_{j+1}^n + \mathbf{Z}_j^n}{2} - \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta} \frac{\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n}{2\lambda}, \quad \lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Cette expression du flux suggère une modification possible, consistant à changer le rapport

$$\frac{2\alpha}{\lambda(2\alpha + \beta)}$$

(homogène à une vitesse) en une vitesse  $a(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n)$  supérieure à

$$\max\{|u_j^n \pm c_j^n|, |u_{j+1}^n \pm c_{j+1}^n|\},$$

(ce qui préserve la CFL). On obtient un nouveau flux *indépendant de  $\lambda$*  :

$$\mathbf{Z}_{j+1/2}^n = \frac{\mathbf{Z}_{j+1}^n + \mathbf{Z}_j^n}{2} - a(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \frac{\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n}{2}.$$

Le schéma de Lax-Friedrichs modifié ainsi obtenu est aussi appelé *schéma de Rusanov*.

### Schéma de Lax-Wendroff

Une autre façon de stabiliser le schéma centré est de pousser un cran plus loin le développement de Taylor des dérivées  $\partial_t \mathbf{W}$  et  $\partial_x \mathbf{Z}$ . On obtient alors le schéma de Lax-Wendroff, dont il existe en fait plusieurs variantes.

Pour le définir correctement, il faut avant tout revenir aux équations d'Euler en variables conservatives, et surtout à leur forme quasilinéaire,

$$\partial_t \mathbf{W} + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = 0,$$

que l'on n'a encore pas rencontrée dans ce cours (car elle est un peu compliquée). On peut calculer la matrice  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})$  par changement de variables, connaissant la forme quasilinéaire des équations en variables  $\tilde{\mathbf{U}} = (\rho, u, e)^t$  (voir Chapitre I §3.2),

$$\partial_t \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}) \partial_x \tilde{\mathbf{U}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ v p'_\rho & u & v p'_e \\ 0 & v p & u \end{pmatrix}.$$

En effet, la différentielle de  $\mathbf{W}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{U}}$  est

$$d\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{1}{2} u^2 + e & \rho u & \rho \end{pmatrix},$$

dont on trouve facilement l'inverse

$$(d\mathbf{W})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v u & v & 0 \\ v(\frac{1}{2} u^2 - e) & -v u & v \end{pmatrix}.$$

Par suite, on obtient

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) = (d\mathbf{W}) \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{U}}) (d\mathbf{W})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K - u^2 & (2 - \kappa) u & \kappa \\ (K - \frac{1}{2} u^2 - h) u & \frac{1}{2} u^2 + h - \kappa u^2 & (1 + \kappa) u \end{pmatrix},$$

où l'on a repris les mêmes notations que dans [5] (pp. 209) :

$$\kappa = v p'_e, \quad K := p'_\rho + \kappa \left( \frac{1}{2} u^2 - e \right),$$

et  $h = e + p v$  est toujours l'enthalpie spécifique. Il sera également utile de connaître une famille de vecteurs propres de  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})$ . La vitesse du son étant donnée par

$$c^2 = p'_\rho + v^2 p p'_e = K - \kappa \left( \frac{1}{2} u^2 - h \right),$$

on retrouve bien ainsi les vitesses caractéristiques  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$  et  $\lambda_3 = u + c$ , avec comme vecteurs propres associés

$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ \frac{1}{2} u^2 + h - u c \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2} u^2 + h - c^2/\kappa \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ \frac{1}{2} u^2 + h + u c \end{pmatrix}.$$

Connaissant  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})$ , on peut se donner une application à valeurs matricielles

$$(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1) \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1),$$

régulière et telle que

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})$$

quel que soit  $\mathbf{W}$ . Il suffit par exemple de prendre

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \bar{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1}{2}\right),$$

mais pas nécessairement (c'est ce choix qui fournit les variantes du schéma de Lax-Wendroff). Une matrice de Roe (voir Définition II.9 ci-après) convient également. Alors, pour toute solution régulière de

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{W}(x, t) + \Delta t \partial_t \mathbf{W}(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_{tt}^2 \mathbf{W}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \\ &= \mathbf{W}(x, t) - \Delta t \partial_x \mathbf{Z}(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_x (\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{Z}(x, t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \\ &= \mathbf{W}(x, t) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{Z}(x + \Delta x, t) - \mathbf{Z}(x - \Delta x, t)) + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [ \mathcal{A}(\mathbf{W}(x + \Delta x, t), \mathbf{W}(x, t)) (\mathbf{Z}(x + \Delta x, t) - \mathbf{Z}(x, t)) \\ &\quad - \mathcal{A}(\mathbf{W}(x, t), \mathbf{W}(x - \Delta x, t)) (\mathbf{Z}(x, t) - \mathbf{Z}(x - \Delta x, t)) ] \\ &\quad + \Delta t \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x + \Delta x^2). \end{aligned}$$

Par suite, on obtient un schéma (d'ordre 2 par construction), s'écrivant

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1} &= \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [ \mathcal{A}_{j+1/2}^n (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_j^n) \\ &\quad - \mathcal{A}_{j-1/2}^n (\mathbf{Z}_j^n - \mathbf{Z}_{j-1}^n) ], \end{aligned}$$

où quels que soit  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}_{j+1/2}^n = \mathcal{A}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n).$$

**Exercice :** Montrer que ce schéma est linéairement stable sous la même condition CFL que le schéma de Lax-Friedrichs.

Le schéma de Lax-Wendroff est bien sûr conservatif, son flux numérique étant donné par

$$\mathbf{Z}_{j+1/2}^n = \frac{\mathbf{Z}_{j+1}^n + \mathbf{Z}_j^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathcal{A}_{j+1/2}^n (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_j^n).$$

Son implémentation a l'inconvénient de nécessiter la matrice  $\mathcal{A}$ , et des produits par cette matrice. Il existe des schémas d'ordre 2 n'ayant pas recours à du calcul matriciel. Ce sont les schémas de type *prédicteur-correcteur* que nous décrivons brièvement ci-après.

**Schémas de Lerat**

Étant donnés deux paramètres  $\alpha > 0$  et  $\beta \in [0, 1]$ , le schéma  $S_\alpha^\beta$  est défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{j+1/2}^{n+1/2} &= (1 - \beta) \mathbf{W}_j^n + \beta \mathbf{W}_{j+1}^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_j^n), \\ \mathbf{W}_j^{n+1} &= \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{2\alpha\Delta x} \left[ (\alpha - \beta) \mathbf{Z}_{j+1}^n + (2\beta - 1) \mathbf{Z}_j^n + (1 - \alpha - \beta) \mathbf{Z}_{j-1}^n \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{Z}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{Z}_{j-1/2}^{n+1/2} \right].\end{aligned}$$

**Exercice :** Montrer que ce schéma est conservatif et consistant.

Le schéma  $S_{1/2}^{1/2}$  est attribué à Richtmyer, et les schémas  $S_1^0, S_1^1$  à MacCormack. Appliqués à une équation de transport de vitesse  $a$ , tous ces schémas coïncident en fait avec le schéma de Lax-Wendroff

$$w_j^{n+1} = w_j^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + a^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n].$$

Ils sont donc linéairement stables sous la même condition CFL. Pour vérifier rapidement qu'ils sont d'ordre 2, on peut utiliser le résultat abstrait suivant, que l'on donne pour un schéma à 3 points mais dont il existe une version avec un nombre arbitraire de points.

**Théorème II.4** *Un schéma à trois points de flux numérique*

$$\mathbf{Z}_{j+1/2} = \mathcal{Z}(\mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j+1})$$

tel que

$$\mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \mathbf{Z}(\mathbf{W}),$$

approche à l'ordre 2 le système de lois de conservation du second ordre

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = \frac{\Delta x}{2} \partial_x (\mathbf{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W}),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{W}) := \partial_0 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) - \partial_1 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A}(\mathbf{W})^2, \quad \bar{A}(\mathbf{W}) = d\mathbf{Z}(\mathbf{W}).$$

**Dém.** Il s'agit simplement de faire un développement de Taylor, en utilisant la relation de consistance

$$\partial_0 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) + \partial_1 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = d\mathbf{Z}(\mathbf{W}) = \bar{A}(\mathbf{W}).$$

Pour toute fonction régulière  $\mathbf{W}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\mathbf{W}(x + \Delta x, t), \mathbf{W}(x, t)) - \mathcal{Z}(\mathbf{W}(x, t), \mathbf{W}(x - \Delta x, t)) &= \\ (\partial_0 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) + \partial_1 \mathcal{Z}(\mathbf{W}, \mathbf{W})) \Delta x \partial_x \mathbf{W} &+ \\ \frac{1}{2} \Delta x^2 (\partial_1 \mathcal{Z} - \partial_0 \mathcal{Z}) \cdot \partial_{xx}^2 \mathbf{W} + \frac{1}{2} \Delta x^2 (\partial_{11}^2 \mathcal{Z} - \partial_{00}^2 \mathcal{Z}) \cdot (\partial_x \mathbf{W}, \partial_x \mathbf{W}) &+ \mathcal{O}(\Delta x^3) = \\ \Delta x \bar{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \partial_x ((\partial_1 \mathcal{Z} - \partial_0 \mathcal{Z}) \cdot \partial_x \mathbf{W}) &+ \mathcal{O}(\Delta x^3),\end{aligned}$$

où toutes les fonctions sont évaluées en  $(x, t)$  lorsque l'argument n'est pas précisé. Si de plus

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = \mathcal{O}(\Delta x),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x, t + \Delta t) - \mathbf{W}(x, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{Z}(\mathbf{W}(x + \Delta x, t), \mathbf{W}(x, t)) - \mathcal{Z}(\mathbf{W}(x, t), \mathbf{W}(x - \Delta x, t))) = \\ \Delta t \left[ \partial_t \mathbf{W} + \frac{1}{2} \Delta t \partial_{tt}^2 \mathbf{W} + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} - \frac{1}{2} \Delta x \partial_x ((\partial_1 \mathcal{Z} - \partial_0 \mathcal{Z}) \cdot \partial_x \mathbf{W}) \right] + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) = \\ \Delta t \left[ \partial_t \mathbf{W} + \frac{1}{2} \Delta t \partial_x (\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})^2 \partial_x \mathbf{W}) + \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} - \frac{1}{2} \Delta x \partial_x ((\partial_1 \mathcal{Z} - \partial_0 \mathcal{Z}) \cdot \partial_x \mathbf{W}) \right] \\ + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x). \end{aligned}$$

Et on reconnaît précisément

$$\Delta t \left[ \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} - \frac{\Delta x}{2} \partial_x (\mathbf{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W}) \right]$$

dans les termes dominants. □

Par conséquent, un schéma est du second ordre si et seulement si  $\mathbf{B} \equiv 0$ . Dans le cas du schéma de Richtmyer par exemple, on a

$$\mathcal{Z}(\mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j+1}) = \mathbf{Z} \left( \frac{\mathbf{W}_j + \mathbf{W}_{j+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{Z}(\mathbf{W}_{j+1}) - \mathbf{Z}(\mathbf{W}_j)) \right),$$

d'où en dérivant

$$(\partial_0 \mathcal{Z} - \partial_1 \mathcal{Z})(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \left( \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}) \right)$$

et donc  $\mathbf{B} = 0$ .

## 2.2 Schémas “décentrés”

Pour l'équation de transport

$$\partial_t w + a \partial_x w = 0,$$

avec  $a > 0$  par exemple, on peut très bien utiliser le schéma décentré suivant

$$w_j^{n+1} = w_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_j^n - w_{j-1}^n).$$

**Exercice :** Montrer qu'il est stable sous la condition

$$0 < \lambda a \leq 1.$$

Ce schéma très simple est même applicable aux équations d'Euler, mais seulement dans une configuration d'écoulement où toutes les vitesses caractéristiques sont positives; évidemment, si elles sont négatives, le schéma décentré dans l'autre sens s'applique. Ainsi, lorsque toutes les vitesses caractéristiques sont de même signe, c'est-à-dire pour un écoulement complètement supersonique, on peut utiliser un schéma décentré. On va maintenant définir un schéma qui fonctionne dans tous les cas, et coïncide avec un schéma décentré en écoulement supersonique.

### Schéma de Godunov

La définition de ce schéma n'est pas très simple, car elle utilise la résolution (et la superposition) de problèmes de Riemann. Étant donnée une suite  $\mathbf{W}^n = (\mathbf{W}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ , on considère la solution *exacte* du problème

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{Z} = 0, \\ \mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{W}_j^n, \quad x \in I_j, \end{cases}$$

et on définit

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} \mathbf{W}(x, \Delta t) dx.$$

Le calcul de  $\mathbf{W}^{n+1}$  demande donc a priori de résoudre une collection de problèmes de Riemann. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a un problème de Riemann situé en  $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$ , avec  $\mathbf{W}_j^n$  comme état à gauche et  $\mathbf{W}_{j+1}^n$  comme état à droite. Ces problèmes de Riemann n'interagissent pas entre eux sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{j \in \mathbb{Z}} \{|u_j \pm c_j|\} \leq \frac{1}{2},$$

qui tient à distance les ondes simples intervenant dans la résolution de deux problèmes de Riemann voisins (à cause des inégalités de Lax, la vitesse des ondes de choc est aussi majorée en valeur absolue par  $\max_{j \in \mathbb{Z}} \{|u_j \pm c_j|\}$ ). En fait, on peut exprimer  $\mathbf{W}_j^{n+1}$  sous forme d'un schéma conservatif et consistant, en utilisant seulement  $\mathbf{W}_{j+1/2}^n = \mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j+1})$  (et  $\mathbf{W}_{j-1/2}^n = \mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{W}_j)$ ), solution en  $x = 0$  (indépendante de  $t$ ) du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W}_R + \partial_x \mathbf{Z}_R = 0, \\ \mathbf{W}_R(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_j^n, & x < 0, \\ \mathbf{W}_{j+1}^n, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

En effet, en considérant le rectangle  $R_j = I_j \times [0, \Delta t[$ , la solution du problème global précédent vérifie

$$\int_{\partial R_j} \mathbf{W} dx - \mathbf{Z} dt = 0,$$

et coïncide avec  $\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n)$  sur le bord droit, avec  $\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n)$  sur le bord gauche. De plus, elle est par définition constante sur le bord inférieur de  $R_j$ , égale à  $\mathbf{W}_j^n$ , et sa valeur moyenne sur le bord supérieur vaut  $\mathbf{W}_j^{n+1}$ . On en déduit l'identité

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{Z}(\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n)) - \mathbf{Z}(\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n)) \right).$$

Ainsi, on trouve comme flux numérique

$$\mathbf{Z}_{j+1/2}^n = \mathbf{Z}(\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j+1})),$$

qui est bien consistant puisque

$$\mathbf{W}_R(\cdot; \mathbf{W}, \mathbf{W}) \equiv \mathbf{W}.$$

En écoulement supersonique, de gauche à droite par exemple, toutes les ondes sont de vitesse positive, donc

$$\mathbf{W}_R(0; \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j+1}) = \mathbf{W}_j,$$

et par conséquent le schéma de Godunov se réduit dans ce cas au schéma décentré. Dans le cas général, le schéma de Godunov hérite de plusieurs propriétés du schéma décentré, à commencer par son ordre (1). D'autre part, il est bien meilleur que le schéma de Lax-Friedrichs vis à vis de la dissipation : on peut montrer que sa matrice de viscosité artificielle  $\mathbf{B}$  est donnée par

$$\mathbf{B} = |\bar{\mathbf{A}}| (\mathbf{I} - \lambda |\bar{\mathbf{A}}|),$$

où

$$|\bar{\mathbf{A}}| := \bar{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & |\lambda_2| & \\ & & |\lambda_3| \end{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{R}} := (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3).$$

L'inconvénient majeur du schéma de Godunov est de nécessiter un solveur de Riemann, pas toujours disponible pour des fluides complexes.

### Schéma de Roe

Le schéma de Roe est fondé sur la même idée que le schéma de Godunov, mais il utilise un solveur de Riemann approché. Cela rend possible et/ou simplifie l'implémentation pour des fluides complexes. En contre-partie, ce schéma donne parfois des solutions "non physiques" (comme des chocs non admissibles). Divers raffinements ont été proposés pour pallier cet inconvénient. On se limite ici à la méthode de base.

La méthode de Roe est fondée sur la résolution de problèmes de Riemann *linéaires* (à la place des problèmes de Riemann non-linéaires du schéma de Godunov), du type

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W}_{\text{Roe}} + \mathcal{A}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \partial_x \mathbf{W}_{\text{Roe}} = 0, \\ \mathbf{W}_{\text{Roe}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_j^n, & x < 0, \\ \mathbf{W}_{j+1}^n, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n)$  est une *matrice de Roe*.

**Définition II.9** On appelle matrice de Roe  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$  une matrice carrée dépendant régulièrement des deux états  $\mathbf{W}_0$  et  $\mathbf{W}_1$ , partout diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , et satisfaisant les deux identités :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) &= \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}), \\ \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_0 &= \mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1) (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0). \end{aligned}$$

En théorie, on peut toujours définir une matrice satisfaisant les deux identités précédentes. Grâce à la formule de Taylor :

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_0 = \int_0^1 \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}_0 + \theta(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0)) \cdot (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0) d\theta$$

il suffit de poser

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1) = \int_0^1 \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}_0 + \theta(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0)) d\theta.$$



Seulement rien ne dit que cette matrice soit toujours diagonalisable (bien que ce soit le cas pour  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{W}_0$  assez proches l'un de l'autre, par un argument de continuité). D'autre part, on aura aussi besoin des vecteurs propres de  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$  en pratique. On cherche donc plutôt la matrice  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$  comme la valeur de  $\bar{\mathbf{A}}$  en un état intermédiaire  $\mathbf{W}_\theta$ ,  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}_\theta)$ , ce qui assurera sa diagonalisabilité et un accès direct aux vecteurs propres. Évidemment, si  $\mathbf{W} \mapsto \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W})$  était une fonction *affine*, il suffirait de prendre

$$\mathbf{W}_\theta = \frac{\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1}{2}.$$

Ce n'est pas le cas en général. Cependant il y a une façon assez astucieuse de trouver quand même une matrice de Roe en s'inspirant de cette remarque. Supposons qu'il existe un changement de variables  $\mathbf{W} \mapsto \mathbf{V}$ , tel qu'à la fois  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{Z}$  soient *quadratiques* en  $\mathbf{V}$ , alors on peut prendre

$$\mathbf{W}_\theta = \mathbf{W} \left( \frac{\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1}{2} \right).$$

**Exercice :** Vérifier cette affirmation. Or le vecteur

$$\mathbf{V} := \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2} u^2 + h \end{pmatrix}$$

n'est pas loin de remplir les conditions. En effet, concernant les composantes de  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire les variables conservatives  $W_1 = \rho$ ,  $W_2 = \rho u$ ,  $W_3 = \rho (\frac{1}{2} u^2 + e)$ , on a

$$W_1 = V_1^2, \quad W_2 = V_1 V_2,$$

et concernant les flux  $Z_1 = \rho u$ ,  $Z_2 = \rho u^2 + p$ ,  $Z_3 = (W_3 + p) u$ , on a

$$Z_1 = V_1 V_2, \quad Z_3 = V_2 V_3.$$

Restent  $W_3$  et  $Z_2$ . Il se trouve que ces quantités sont également quadratiques dans le cas d'un gaz parfait polytropique, où

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \text{et} \quad h = \gamma e.$$

On a alors en effet

$$W_3 = \gamma V_1 V_3 - \frac{\gamma - 1}{2} V_2^2 \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_1 V_3 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} V_2^2.$$

La construction de matrices de Roe est donc très facile pour les gaz parfaits polytropiques. Pour les fluides réels, il existe aussi un moyen de construire des matrices de Roe de la forme  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{W}_\theta)$ , où l'état intermédiaire  $\mathbf{W}_\theta$  est défini à partir des valeurs moyennes

$$\frac{\sqrt{\rho_0} q_0 + \sqrt{\rho_1} q_0}{\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_1}}$$

pour  $q = u$  et  $q = \frac{1}{2} u^2 + h$ , et de valeurs intermédiaires  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\chi}$ , de  $\kappa = v p'_e$  et  $\chi := p'_\rho$  respectivement, satisfaisant la relation de compatibilité

$$p_1 - p_0 = \bar{\chi}(\rho_1 - \rho_0) + \bar{\kappa}(\rho_1 e_1 - \rho_0 e_0).$$

Pour plus de détails, voir [5], p. 216-217.

Si l'on dispose de matrices de Roe, on définit le schéma de Roe exactement comme le schéma de Godunov, en remplaçant les problèmes de Riemann exacts par les problèmes de Riemann approchés, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left( \mathcal{A}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \mathbf{W}_{\text{Roe}}(0; \mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \right. \\ & \left. - \mathcal{A}(\mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n) \mathbf{W}_{\text{Roe}}(0; \mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n) \right). \end{aligned}$$

L'énorme avantage de ce schéma est que l'on peut en fait calculer  $\mathbf{W}_{\text{Roe}}$  *explicitement*, "à la main". En effet, reprenons le problème de Riemann linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W}_{\text{Roe}} + \mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1) \partial_x \mathbf{W}_{\text{Roe}} = 0, \\ \mathbf{W}_{\text{Roe}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_0, & x < 0, \\ \mathbf{W}_1, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

On peut le résoudre comme on l'a déjà fait pour le système de l'acoustique. La méthode générale consiste à décomposer  $\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0$  sur la base des vecteurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$ ,  $r_1(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$ ,  $r_2(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$ ,  $r_3(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$ . En omettant la dépendance de  $\mathcal{A}$  et ses vecteurs propres en  $(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$  pour simplifier l'écriture, on a

$$\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0 = \sum_{i=1}^3 \underline{\alpha}_i r_i,$$

et on cherche la solution sous la forme

$$\mathbf{W}_{\text{Roe}}(x, t) = \mathbf{W}_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, t) r_i.$$

Les coefficients  $\alpha_i$  doivent être solution de

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_i + \mu_i \partial_x \alpha_i = 0, \\ \alpha_i(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \underline{\alpha}_i, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

où les vitesses  $\mu_i$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{A}$ . Ainsi

$$\alpha_i(x, t) = \begin{cases} 0, & x < \mu_i t, \\ \underline{\alpha}_i, & x > \mu_i t, \end{cases}$$

et donc

$$\mathbf{W}_{\text{Roe}}(0, t) = \mathbf{W}_0 + \sum_{\mu_i < 0} \underline{\alpha}_i r_i = \mathbf{W}_1 - \sum_{\mu_i > 0} \underline{\alpha}_i r_i.$$

On en déduit

$$\mathcal{A} \mathbf{W}_{\text{Roe}}(0, t) = \mathcal{A} \mathbf{W}_0 + \mathcal{A}^- (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0) = \mathcal{A} \mathbf{W}_1 - \mathcal{A}^+ (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_0),$$

où les matrices  $\mathcal{A}^\pm$  sont définies par

$$\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^- = |\mathcal{A}|, \quad |\mathcal{A}| := \mathcal{R} \begin{pmatrix} |\mu_1| & & \\ & |\mu_2| & \\ & & |\mu_3| \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1},$$

la matrice  $\mathcal{R}$  étant naturellement la matrice des vecteurs propres de  $\mathcal{A}$ . Finalement, le schéma de Roe se réécrit simplement à l'aide de  $\mathcal{A}^\pm$  :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{A}_{j+1/2}^-(\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n) + \mathcal{A}_{j-1/2}^+(\mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n) \right).$$

En utilisant les relations entre  $\mathcal{A}^\pm$ ,  $\mathcal{A}$  et  $|\mathcal{A}|$ , ainsi que l'identité

$$\mathbf{Z}_{j+1} - \mathbf{Z}_j = \mathcal{A}_{j+1/2} (\mathbf{W}_{j+1} - \mathbf{W}_j),$$

on peut réécrire le schéma de Roe sous la forme conservative

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{Z}_{j+1}^n - \mathbf{Z}_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [ & |\mathcal{A}_{j+1/2}^n| (\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n) \\ & - |\mathcal{A}_{j-1/2}^n| (\mathbf{W}_j^n - \mathbf{W}_{j-1}^n) ]. \end{aligned}$$

Autrement dit, le flux numérique du schéma de Roe est donné par

$$\mathbf{Z}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_{j+1}^n + \mathbf{Z}_j^n) - \frac{1}{2} |\mathcal{A}_{j+1/2}^n| (\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_j^n).$$

On en déduit facilement sa viscosité artificielle

$$\mathbf{B} = |\bar{\mathbf{A}}| (\mathbf{I} - \lambda |\bar{\mathbf{A}}|).$$

# Chapitre III

## Écoulements multi-dimensionnels

On revient maintenant aux équations d'Euler multidimensionnelles. On a déjà donné quelques éléments concernant l'analyse de ces équations (voir le Chapitre I, §3). On va s'intéresser ici à la question des conditions aux limites, lorsque les équations sont posées dans un domaine physique admettant des bords, puis au problème de la stabilité des chocs, qui se ramène à un problème aux limites (non standard).

### 1 Conditions aux limites

Considérons un écoulement dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , ayant des bords suffisamment réguliers pour pouvoir définir (presque partout) un vecteur normal (unitaire)  $\mathbf{n}$ . On conviendra que  $\mathbf{n}$  pointe à l'*extérieur* de  $\Omega$ . La nature hyperbolique des équations d'Euler empêche a priori de prescrire toutes les variables physiques au bord  $\partial\Omega$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le système linéaire de l'acoustique

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + v_0 \nabla p = 0, \\ \partial_t s = 0. \end{cases}$$

En particulier les solutions ondes planes se propageant dans la direction  $\mathbf{n}$  sont données par les solutions de trois équations de transport découplées

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 - c_0 \partial_x \alpha_1 = 0, & \alpha_1 = -p + \rho_0 c_0 u, \\ \partial_t \alpha_2 = 0, & \alpha_2 = s, \\ \partial_t \alpha_3 + c_0 \partial_x \alpha_3 = 0, & \alpha_3 = p + \rho_0 c_0 u, \end{cases}$$

où  $x := \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ ,  $u := \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . On a donc

$$\alpha_1(x, t) = \alpha_1(x + c_0 t, 0), \quad \alpha_2(x, t) = \alpha_2(x, 0), \quad \alpha_3(x, t) = \alpha_3(x - c_0 t, 0),$$

tant que  $x \pm c_0 t$  restent dans  $\Omega$ . Supposons que  $\Omega$  soit simplement l'hyperplan  $\{\mathbf{x}; x < 0\}$  (on rappelle que  $\mathbf{n}$  pointe à l'extérieur de  $\Omega$ ). On voit que  $\alpha_3$  est entièrement déterminé par la condition initiale. Imposer  $\alpha_3(0, t)$  conduirait à un problème surdéterminé.

## 1.1 Conditions aux limites dissipatives

### Estimations d'énergie

La forme générale d'un jeu de conditions aux limites est, par exemple en fonction des variables  $\mathbf{U} = (p, \mathbf{u}, s)$ ,

$$\mathbf{b}(\mathbf{U}) = \underline{\mathbf{b}},$$

où la matrice jacobienne de  $\mathbf{b}$  est en général *non inversible*. On la supposera en revanche toujours de rang maximal (c'est-à-dire égal au nombre de composantes de  $\underline{\mathbf{b}}$ ). Le choix des variables  $\mathbf{U}$  n'est pas innocent, puisque les équations d'Euler sont facilement symétrisables dans ces variables. On rappelle (voir Chapitre I, §3.1) qu'elles s'écrivent

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{P}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{P}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \partial_i,$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}; \mathbf{n}) = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) n_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \rho c^2 \mathbf{n}^* & 0 \\ \rho^{-1} \mathbf{n} & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

pour tout  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ . Et si

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho^{-1} c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) \mathbf{A}(\mathbf{U}; \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\rho c^2} & {}^t \mathbf{n} & 0 \\ \mathbf{n} & \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

est symétrique. Comme pour le problème de Cauchy, on peut essayer d'en déduire une estimation d'énergie. On reprend le calcul du Chapitre I, pour l'opérateur linéarisé

$$\mathbf{L} = \partial_t + \mathbf{P}(\underline{\mathbf{U}}),$$

dans  $\Omega$  au lieu de  $\mathbb{R}^d$  tout entier. On a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{U} = 2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \partial_t \mathbf{U} = -2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U} + 2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}.$$

Mais cette fois

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{U} = \int_{\Omega} \partial_i (\mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_i \mathbf{U}) = \int_{\partial\Omega} n_i \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}_i \mathbf{U} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n}) \mathbf{U}.$$

Pour obtenir une estimation *a priori*, on a donc besoin de connaître le signe de cette intégrale de bord. C'est ce qui motive la définition suivante, valable pour des équations et conditions aux limites non linéaires.

**Définition III.1** Un jeu de conditions aux limites  $\mathbf{b}(\mathbf{U}) = \underline{\mathbf{b}}$  est dit dissipatif (au point  $\underline{\mathbf{U}}$ ) si et seulement si on a l'inégalité

$$\dot{\mathbf{U}}^* \mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}}) \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n}) \dot{\mathbf{U}} \geq 0$$

pour tout  $\dot{\mathbf{U}}$  tel que

$$d\mathbf{b}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \dot{\mathbf{U}} = 0,$$

c'est-à-dire  $\dot{\mathbf{U}}$  tangent en  $\underline{\mathbf{U}}$  à la variété

$$\mathcal{B} := \{ \mathbf{U}; \mathbf{b}(\mathbf{U}) = \underline{\mathbf{b}} \}.$$

Il est dit maximal dissipatif si l'espace

$$T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B} = \{ \dot{\mathbf{U}}; d\mathbf{b}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \dot{\mathbf{U}} = 0 \}$$

est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire n'est pas strictement inclus dans un espace où  $\mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}}) \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n})$  est positive ou nulle (on dit aussi monotone). Lorsque l'on a l'inégalité stricte

$$\dot{\mathbf{U}}^* \mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}}) \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n}) \dot{\mathbf{U}} > 0$$

dans  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , on parle de conditions aux limites strictement dissipatives.

Pour un jeu de conditions aux limites dissipatives, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{U} \leq 2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

pour tout  $\mathbf{U}$  tel que  $\mathbf{U}|_{\partial\Omega} \in T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , d'où

$$\| \mathbf{U}(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \| \mathbf{U}(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \| (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Ceci est une estimation *a priori* pour le problème linéarisé avec condition au bord homogène :

$$\begin{cases} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où l'on a noté  $\mathbf{B} = d\mathbf{b}(\underline{\mathbf{U}})$  pour simplifier. Avec des conditions aux limites strictement dissipatives, on obtient une estimation plus précise. En effet, on a dans ce cas (voir le lemme B.3 en appendice B) des constantes  $\alpha, C > 0$  telles que :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n}) \mathbf{U} \geq \alpha \int_{\partial\Omega} \| \mathbf{U} \|^2 - C \int_{\partial\Omega} \| \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \|^2,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{U} + \alpha \int_{\partial\Omega} \| \mathbf{U} \|^2 \leq 2 \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \underline{\mathbf{S}} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} + C \int_{\partial\Omega} \| \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \|^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme de Gronwall, on en déduit

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{U}(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \| \mathbf{U}(\tau) \|_{L^2(\partial\Omega)}^2 d\tau \\ & \lesssim \| \mathbf{U}(0) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \| (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \| (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})(\tau) \|_{L^2(\partial\Omega)}^2 d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

**Cas d'un bord caractéristique** Si la matrice  $\mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n})$  n'est pas inversible, on dit que le bord de  $\Omega$  est *caractéristique* (au point  $\underline{\mathbf{U}}$ ). Dans ce cas, on obtient facilement une condition nécessaire pour qu'un jeu de conditions aux limites soit maximal dissipatif.

**Lemme III.1** *Si la variété  $\mathcal{B}$  correspond à des conditions aux limites maximales dissipatives sur  $\partial\Omega$ , alors nécessairement*

$$\text{Ker}(\mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}}) \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n})) \subset T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$$

pour tout  $\underline{\mathbf{U}} \in \mathcal{B}$  et  $\mathbf{n} \in \partial\Omega$ .

**Dém.** Pour simplifier l'écriture, on note simplement  $\mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{U}}) \mathbf{A}(\underline{\mathbf{U}}; \mathbf{n})$ . Quel que soit  $\underline{\mathbf{U}}' \in \text{Ker}(\mathbf{S} \mathbf{A})$ , on a pour tout  $\dot{\underline{\mathbf{U}}}$ ,

$$(\dot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{U}}')^* \mathbf{S} \mathbf{A} (\dot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{U}}') = \dot{\underline{\mathbf{U}}}^* \mathbf{S} \mathbf{A} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$$

en utilisant la symétrie de  $\mathbf{S} \mathbf{A}$ . Si de plus  $\dot{\underline{\mathbf{U}}}$  appartient à  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , cette quantité est positive ou nulle. Si  $\underline{\mathbf{U}}'$  n'était pas dans  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , on obtiendrait alors un espace plus gros, en l'occurrence  $\mathbb{R} \underline{\mathbf{U}}' + T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , où  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  serait monotone.  $\square$

### Calcul pratique.

Pour décider si un jeu de conditions aux limites est dissipatif, il faut trouver la signature de la forme quadratique

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}} \mapsto \dot{\underline{\mathbf{U}}}^* \mathbf{S} \mathbf{A} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$$

restreinte à  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ . Or on calcule aisément

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}}^* \mathbf{S} \mathbf{A} \dot{\underline{\mathbf{U}}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\rho c^2} \dot{p}^2 + 2\dot{p}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \|\dot{\mathbf{u}}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) s^2.$$

Si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , ce qui arrive par exemple dans le cas d'une paroi solide, on a simplement

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}}^* \mathbf{S} \mathbf{A} \dot{\underline{\mathbf{U}}} = 2\dot{p}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}).$$

Et le lemme III.1 réclame que pour  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{n}^\perp$ ,  $\dot{\underline{\mathbf{U}}}$  appartienne à  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ . Pour une paroi solide,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  est la condition au bord naturelle, qui se traduit par  $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$  dans  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ , auquel cas  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  est identiquement nulle sur  $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{B}$ . C'est un cas dégénéré, dit *faiblement dissipatif*.

Sinon, lorsque  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , on peut réécrire à l'aide du nombre de Mach  $M := |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|/c$  et de

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}} - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n},$$

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}}^* \mathbf{S} \mathbf{A} \dot{\underline{\mathbf{U}}} = \frac{\rho}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \left( (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + v \dot{p}^2 + v^2 (M^2 - 1) \dot{p}^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 (\|\dot{\mathbf{u}}_t\|^2 + v s^2) \right).$$

On voit que la dissipativité des conditions dépend du signe de  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ , qui détermine si le fluide est entrant ou sortant au point  $\underline{\mathbf{U}}$  du bord de  $\Omega$ , et de la position de  $M$  par rapport à 1. On peut ainsi distinguer quatre cas :

**Sortie supersonique :**  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0$  et  $M > 1$ . C'est le cas le plus facile, la matrice  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  étant définie positive sur tout l'espace. Dans le cas limite sonique ( $M = 1$ ), la matrice  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  est positive ou nulle, et a des vecteurs isotropes. C'est un cas faiblement dissipatif.

**Sortie subsonique :**  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0$  et  $M < 1$ . Des choix évidents de conditions aux limites strictement dissipatives sont la pression  $p$  (puisque  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  est définie positive sur  $\{\dot{p} = 0\}$ ) ou la vitesse normale  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  (puisque  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  est définie positive sur  $\{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ ).

**Entrée subsonique :**  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0$  et  $M < 1$ . C'est le cas le plus compliqué. Prescrire la pression est évidemment une mauvaise idée. En revanche, on peut prescrire la vitesse tangentielle  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}$  et l'entropie  $s$ , ce qui supprime déjà deux "mauvais termes", puis une autre condition telle que  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + v \dot{p} = 0$  sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{U}} \mathcal{B}$ . En se souvenant de la relation

$$dh = T ds + v dp$$

pour l'enthalpie, on en déduit par exemple que

$$\left( \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + h, \mathbf{u}_t, s \right)$$

est un jeu de conditions aux limites maximales dissipatives, strictement dissipatives. Dans le cas limite sonique ( $M = 1$ ), ce jeu est encore valable, et reste maximal dissipatif, puisque les vecteurs  $\dot{\mathbf{U}}$  du noyau de  $\mathbf{S} \mathbf{A}$ , colinéaires à

$$\mathbf{r}_3(\mathbf{U}; \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix},$$

si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -c$ , sont tels que  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + v \dot{p} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_t = 0$  et  $\dot{s} = 0$ .

**Entrée supersonique :**  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0$  et  $M > 1$ . La matrice  $\mathbf{S} \mathbf{A}$  est définie négative. La seule possibilité pour définir des conditions aux limites dissipatives est de prescrire, dans ce cas, toutes les variables  $\mathbf{U}$ , ce qui rend l'espace tangent  $T_{\mathbf{U}} \mathcal{B}$  réduit à  $\{0\}$ .

## 1.2 Nombre de conditions aux limites

On vient de voir divers exemples de conditions aux limites, dont le nombre dépend de la configuration de l'écoulement. En fait, on peut déterminer ce nombre indépendamment de la notion de dissipation d'énergie. On se convainc assez facilement en examinant le problème linéarisé (reprenre par exemple le système de l'acoustique) que ce nombre, c'est-à-dire la codimension de la variété  $\mathcal{B}$ , doit être égal au nombre  $p$  de *caractéristiques rentrantes* dans  $\Omega$ , comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire

$$\begin{cases} p = 0 & \text{si } \lambda_j(\mathbf{U}; \mathbf{n}) > 0, \forall j, \\ p = 1 & \text{si } \lambda_1(\mathbf{U}; \mathbf{n}) < 0 < \lambda_2(\mathbf{U}; \mathbf{n}), \\ p = d + 1 & \text{si } \lambda_2(\mathbf{U}; \mathbf{n}) < 0 < \lambda_3(\mathbf{U}; \mathbf{n}), \\ p = d + 2 & \text{si } \lambda_j(\mathbf{U}; \mathbf{n}) < 0, \forall j. \end{cases}$$

Bien sûr, ces différents cas correspondent aux cas (non soniques) décrits au paragraphe précédent, dans le même ordre. Ils sont représentés sur la figure III.1.



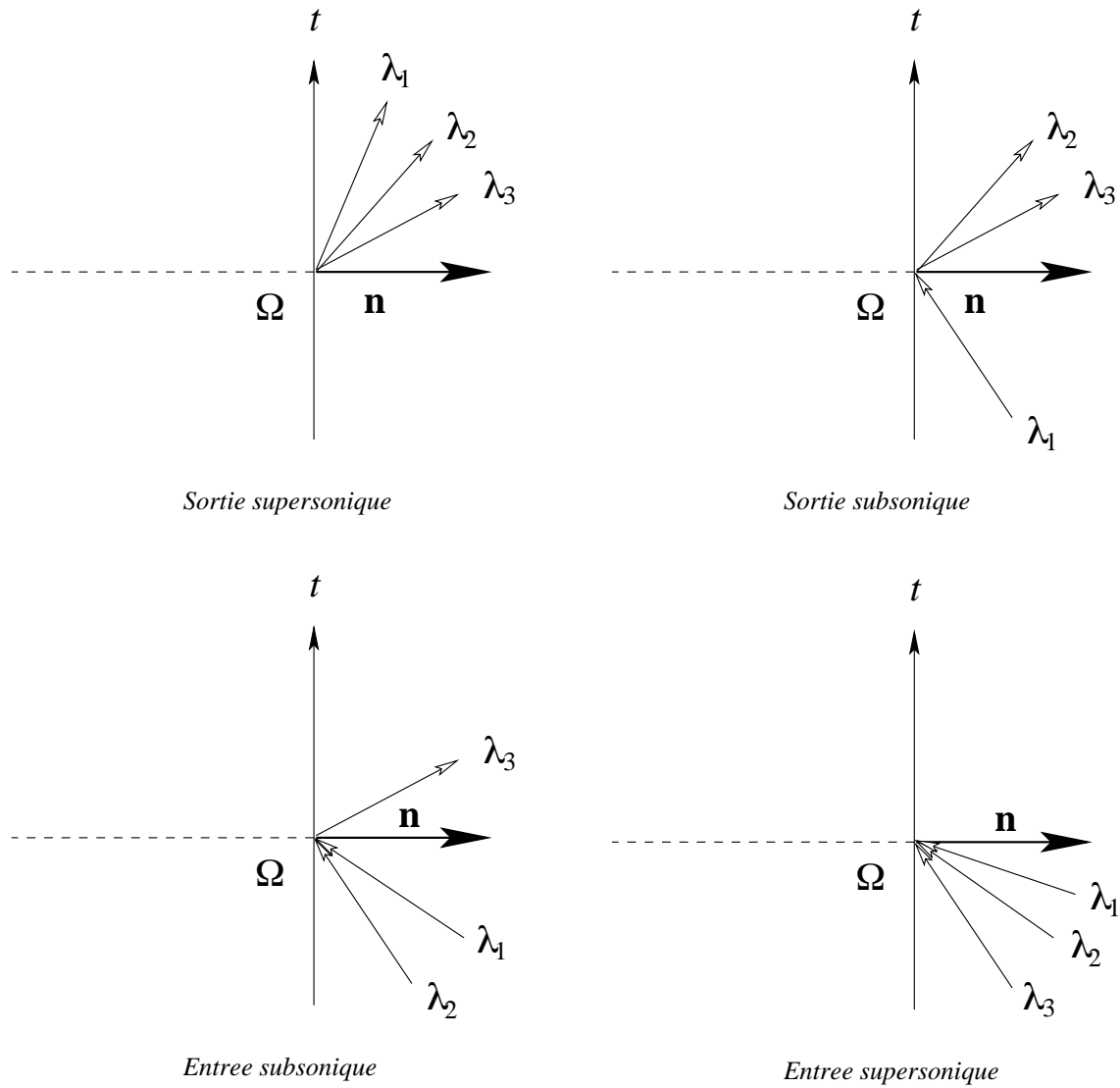


Figure III.1: Les quatre problèmes aux limites non soniques.

### 1.3 Nature des conditions aux limites

On peut aller plus loin et chercher un moyen systématique, indépendant de la notion de dissipation d'énergie, de déterminer si un jeu de conditions aux limites est "acceptable", c'est-à-dire qu'il conduit à un problème aux limites bien posé<sup>1</sup>. Ce moyen est fourni par une "analyse en modes normaux" du problème linéarisé (autour d'un état constant), dans le demi-espace  $\{\mathbf{x}; \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} < 0\}$ . Les modes normaux sont en fait des solutions particulières, dont la dépendance en  $t$  est de la forme  $\exp(\tau t)$ , avec  $\tau \in \mathbb{C}$ , et la dépendance en les variables tangentielles  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$  est en  $\exp(i \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\eta})$ . Les équations satisfaites par ces modes normaux s'obtiennent aussi, de façon plus théorique, en effectuant sur le système d'ÉDP linéarisé une transformation de Fourier en  $\mathbf{y}$  et une transformation de Laplace en  $t$  (en supposant la condition initiale nulle).

Par souci de commodité, on effectue les calculs en variables  $(v, \mathbf{u}, s)$ . Rappelons que les équations d'Euler dans ces variables s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathbf{u} \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + v p'_v \nabla v + v p'_s \nabla s = 0, \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0, \end{cases}$$

où

$$p'_v = \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_s = -\frac{c^2}{v^2}, \quad p'_s = \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v.$$

On a vu que les configurations supersoniques ne posaient aucun problème (pas de conditions aux limites, ou au contraire toutes les variables imposées au bord). On se limite donc ici au cas d'un écoulement subsonique, c'est-à-dire qu'on suppose

$$0 < |u| < c.$$

Pour fixer les idées, on considère le problème dans le demi-espace  $\{x_d > 0\}$  (ce qui revient à  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_d$ ). On décomposera les positions en  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z)$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , et les vitesses en  $\mathbf{u} = (\check{\mathbf{u}}, u)$ ,  $\check{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Par analogie,  $\check{\nabla}$  désigne l'opérateur de différentiation par rapport à  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ , c'est-à-dire dans la direction du bord. Les équations linéarisées autour de l'état constant  $(v, \check{\mathbf{u}}, u, s)$  s'écrivent

$$\begin{cases} (\partial_t + \check{\mathbf{u}} \cdot \check{\nabla} + u \partial_z) \dot{v} - v \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, \\ (\partial_t + \check{\mathbf{u}} \cdot \check{\nabla} + u \partial_z) \dot{\mathbf{u}} + v p'_v \nabla \dot{v} + v p'_s \nabla \dot{s} = 0, \\ (\partial_t + \check{\mathbf{u}} \cdot \check{\nabla} + u \partial_z) \dot{s} = 0. \end{cases}$$

Recherchons les solutions sous forme de modes normaux

$$(\dot{v}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{s}) \exp(\tau t) \exp(i \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{y}).$$

<sup>1</sup>On parle d'un problème bien posé lorsqu'il admet une et une seule solution, dépendant continûment des données.

On obtient le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}})\dot{v} + u\partial_z\dot{v} - v(i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}}) - v\partial_z\dot{u} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}})\dot{\mathbf{u}} + u\partial_z\dot{\mathbf{u}} + vp'_v i\dot{v}\boldsymbol{\eta} + vp'_s i\dot{s}\boldsymbol{\eta} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}})\dot{u} + u\partial_z\dot{u} + vp'_v\partial_z\dot{v} + vp'_s\partial_z\dot{s} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}})\dot{s} + u\partial_z\dot{s} = 0. \end{array} \right.$$

Pour  $(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0)$ , ce système s'écrit sous forme abstraite

$$\frac{d\dot{\mathbf{U}}}{dz} = \mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \dot{\mathbf{U}}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{u} \\ \dot{s} \end{pmatrix}.$$

Nous n'aurons pas besoin d'écrire explicitement la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , mais il faut garder en mémoire le fait qu'elle dépend aussi de l'état de référence. Ce dernier étant fixé une fois pour toutes, on ne le mentionne pas. Les conditions limites linéarisées s'écrivant sous la forme

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} = 0, \quad z = 0,$$

une condition nécessaire pour que le problème aux limites linéarisé soit bien posé est qu'il n'existe pas de solution en mode normal, bornée en  $\mathbf{y}$ ,  $z$  et non bornée en  $t$ , c'est-à-dire pas de solution bornée en  $z$  du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\dot{\mathbf{U}}}{dz} = \mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \dot{\mathbf{U}}, \quad z > 0, \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} = 0, \quad z = 0, \end{array} \right.$$

avec  $\text{Re } \tau > 0$ .

On va commencer par montrer que la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est *hyperbolique*, au sens des systèmes dynamiques, c'est-à-dire qu'elle n'admet pas de valeur propre imaginaire pure, lorsque  $\text{Re } \tau > 0$ . Cette propriété est en fait une conséquence de l'hyperbolicité des équations d'Euler (en tant qu'EDP!), voir [15] et la remarque III.1 ci-après.

Les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  sont précisément les nombres  $\omega$  pour lesquels il existe une solution non triviale du système d'équation différentielles

$$\frac{d\dot{\mathbf{U}}}{dz} = \mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \dot{\mathbf{U}},$$

de la forme  $\dot{\mathbf{U}} \exp(\omega z)$ . Pour calculer ces valeurs propres, il suffit de revenir au système non résolu, et remplacer l'opérateur  $\partial_z$  par la multiplication par  $\omega$ . En fait, pour une raison de convention pure, on notera  $-\omega$  les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ . Avec cette convention,

on est conduit à chercher  $\omega$  et  $\dot{\mathbf{U}} \neq 0$  tels que

$$\begin{cases} (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}} - u\omega)\dot{v} - v(i\boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\check{\mathbf{u}}}) + v\omega\dot{u} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}} - u\omega)\dot{\check{\mathbf{u}}} + vp'_v i\dot{v}\boldsymbol{\eta} + vp'_s i\dot{s}\boldsymbol{\eta} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}} - u\omega)\dot{u} - vp'_v\omega\dot{v} - vp'_s\omega\dot{s} = 0, \\ (\tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}} - u\omega)\dot{s} = 0, \end{cases}$$

Pour raccourcir les expressions, on introduit

$$\tilde{\tau} := \tau + i\boldsymbol{\eta} \cdot \check{\mathbf{u}}$$

(qui a évidemment la même partie réelle que  $\tau$ ). Une solution “évidente” du système précédent est  $\omega = \tilde{\tau}/u$  et

$$u(i\boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\check{\mathbf{u}}}) - \tilde{\tau}\dot{u} = 0, \quad p'_v\dot{v} + p'_s\dot{s} = 0.$$

On voit que cette valeur  $\omega$  n'est pas purement imaginaire lorsque  $\tau$  ne l'est pas. Les autres solutions sont fournies par les racines de la relation de dispersion

$$(\tilde{\tau} - u\omega)^2 + v^2 p'_v (\omega^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|^2) = 0.$$

**Remarque III.1** *Lorsqu'on effectue les substitutions suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \tau & \rightsquigarrow -i\lambda \\ (\eta_1, \dots, \eta_{d-1}) & \rightsquigarrow (\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \\ \omega & \rightsquigarrow -i\xi_d \end{array}$$

dans la relation de dispersion ci-dessus, on retrouve formellement l'équation satisfaite par les vitesses caractéristiques  $\lambda_{1,3}(\boldsymbol{\xi})$  :

$$(\lambda - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 - c^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 = 0.$$

Si  $\omega$  est imaginaire pur,  $\lambda$  est réel et donc  $\tau$  est imaginaire pur.

Bien sûr, cette propriété se voit directement sur la relation entre  $\omega$ ,  $\tau$  et  $\boldsymbol{\eta}$  : si  $\omega$  est imaginaire pur,  $(\tilde{\tau} - u\omega)^2$  est un nombre réel négatif, et donc  $\tau$  est imaginaire pur. Par conséquent, la relation de dispersion admet un nombre constant de racines  $\omega$  de partie réelle positive lorsque  $\text{Re } \tau > 0$ . Ce nombre est facile à déterminer en examinant le cas particulier  $\boldsymbol{\eta} = 0$ , où les racines  $\omega$  ont la forme très simple

$$\omega = \frac{\tau}{u \pm c}.$$

D'après l'hypothèse  $|u| < c$ , l'une des deux seulement est de partie réelle positive (selon le signe de  $u$ ) pour  $\text{Re } \tau > 0$ . Désormais,  $\omega$  désigne *exclusivement* cette racine, tandis que

$$\omega_0 := \frac{\tilde{\tau}}{u}$$

correspond à l'autre valeur propre.

On en conclut que la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est hyperbolique, et qu'elle admet un sous-espace stable (constitué de la somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de partie réelle négative)

- de dimension 1 si  $u < 0$  (ce qui correspond à  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$ , c'est-à-dire à un écoulement sortant), et engendré par

$$\mathbf{e}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} v(\tilde{\tau} - u\omega) \\ i c^2 \boldsymbol{\eta} \\ -c^2 \omega \\ 0 \end{pmatrix},$$

- de dimension  $d + 1$  si  $u > 0$  (ce qui correspond à un écoulement entrant).

Dans ce second cas, on remarque que la racine  $\omega$  coïncide avec  $\omega_0$  lorsque  $\tau = u \|\boldsymbol{\eta}\|$ . Cependant, on peut donner une caractérisation du sous-espace stable valable partout. On trouve en effet que c'est l'orthogonal de

$$\ell(\tau, \boldsymbol{\eta}) := (a, -i v u \boldsymbol{\eta}^*, v \tilde{\tau}, a p'_s / p'_v),$$

$$a := u \tilde{\tau} + \omega (c^2 - u^2).$$

Dans les deux cas, on désigne par  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  pour  $\text{Re } \tau > 0$ . Une condition nécessaire pour que le problème aux limites soit bien posé est la *condition de Lopatinskii* :

**Définition III.2** *On dit que les conditions aux limites définies par la matrice  $\mathbf{B}$  vérifient la condition de Lopatinskii si et seulement si*

$$\text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \{0\}$$

quels que soient  $\tau$ ,  $\text{Re } \tau > 0$  et  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d-1}$ .

**Remarque III.2** *Dans les deux cas décrits plus haut, la dimension du sous-espace  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  coïncide avec le nombre de caractéristiques rentrantes (détaillé au §1.2). On voit donc que la condition de Lopatinskii réclame que le rang de  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire le nombre de conditions aux limites indépendantes, soit égal au nombre de caractéristiques rentrantes.*

Lorsque le rang de  $\mathbf{B}$  est effectivement égal à la dimension de  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , la condition de Lopatinskii prend la forme d'une condition algébrique, que l'on peut exprimer à l'aide d'un déterminant  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$ . Quelle que soit la façon d'obtenir ce déterminant, on l'appelle couramment *déterminant de Lopatinskii*. Concrètement, voici une définition de  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  dans les deux cas possibles.

**Écoulement sortant.** Dans ce cas, la matrice de bord  $\mathbf{B}$  est une matrice ligne. En définissant simplement (le déterminant  $1 \times 1$  !)

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) := \mathbf{B} \mathbf{e}(\tau, \boldsymbol{\eta}),$$

la condition de Lopatinskii est clairement équivalente à

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq 0$$

pour  $\text{Re } \tau > 0$ .

**Écoulement rentrant.** Dans ce cas, la matrice de bord  $\mathbf{B}$  est composée de  $(d + 1)$  lignes,  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{d+1}$ . Par conséquent,

$$\text{Ker } \mathbf{B} \cap \ell(\tau, \boldsymbol{\eta})^\perp = \{0\}$$

équivalent à

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq 0,$$

où  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est le déterminant  $(d + 2) \times (d + 2)$  défini par

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) := \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{d+1} \\ \ell(\tau, \boldsymbol{\eta}) \end{vmatrix}.$$

Pour des raisons assez subtiles hors du cadre de ce cours, il apparaît que la condition de Lopatinskii n'est *pas suffisante* pour que le problème aux limites soit bien posé. La bonne condition est la condition de Kreiss. On dit aussi parfois condition de Lopatinskii uniforme, ou condition de Kreiss uniforme.

**Définition III.3** *On dit que les conditions aux limites définies par la matrice  $\mathbf{B}$  vérifient la condition de Kreiss si et seulement si*

$$\text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \{0\}$$

quel que soit  $(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0)$  avec  $\text{Re } \tau \geq 0$  et  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{d-1}$ , où

$$\mathcal{E}(\tau_0, \boldsymbol{\eta}) = \lim_{\substack{\text{Re } \tau > 0 \\ \tau \rightarrow \tau_0}} \mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$$

lorsque  $\text{Re } \tau_0 = 0$ .

$\Delta$  Lorsque  $\text{Re } \tau = 0$ , la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  n'est *pas hyperbolique*, et  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  n'est pas son sous-espace stable : il contient en effet des modes associés aux valeurs propres imaginaires pures de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , c'est-à-dire *une partie* du sous-espace central de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ .

Par définition de  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , sa dimension est constante dans

$$\{(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0); \text{Re } \tau \geq 0\}.$$

En pratique, déterminer  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  pour  $\text{Re } \tau = 0$  revient à déterminer la limite de la racine  $\omega$  de la relation de dispersion

$$-(\tilde{\tau} - u\omega)^2 + c^2(\omega^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|^2) = 0,$$

lorsqu'elle devient imaginaire pure. Or le discriminant (réduit) de cette équation du second degré en  $\omega$  vaut

$$c^2(\tilde{\tau}^2 + (c^2 - u^2)\|\boldsymbol{\eta}\|^2).$$

Pour  $\tau$  imaginaire pur,  $\omega$  reste de partie réelle strictement positive tant que ce discriminant est positif. Le problème ne se pose que pour

$$\tilde{\tau}^2 \leq -(c^2 - u^2)\|\boldsymbol{\eta}\|^2.$$

On résout l'ambiguïté à l'aide des équations de Cauchy-Riemann. En effet, pour  $\operatorname{Re} \tau > 0$ ,  $\omega$  dépend analytiquement de  $\tilde{\tau}$ , et donc

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} \omega)}{\partial(\operatorname{Re} \tilde{\tau})} = \frac{\partial(\operatorname{Im} \omega)}{\partial(\operatorname{Im} \tilde{\tau})}.$$

Comme  $\operatorname{Re} \omega > 0$  pour  $\operatorname{Re} \tau > 0$ , on doit avoir à la limite lorsque  $\operatorname{Re} \tau \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} \omega)}{\partial(\operatorname{Im} \tilde{\tau})} > 0.$$

Ce critère permet de décider du choix de  $\omega$ . On trouve

$$\omega = \frac{-u\tilde{\tau} + ic \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \tilde{\tau}) \sqrt{-\tilde{\tau}^2 - (c^2 - u^2) \|\boldsymbol{\eta}\|^2}}{c^2 - u^2}.$$

### Discussion des conditions de Lopatinskii et Kreiss

**Écoulement sortant.** En se souvenant que  $\mathbf{B}$  provient de la linéarisation d'une condition non-linéaire  $b(v, \mathbf{u}, s)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{B} = db(v, \mathbf{u}, s)$ , on a

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) = v(\tilde{\tau} - u\omega) \frac{\partial b}{\partial v} + ic^2 d_{\tilde{\mathbf{u}}} b \cdot \boldsymbol{\eta} - c^2 \omega \frac{\partial b}{\partial u}.$$

En particulier, pour  $(v, \mathbf{u}, s) = p(v, s)$ , on a

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) = v(\tilde{\tau} - u\omega) p'_v \neq 0 \quad \operatorname{Re} \tau \geq 0, (\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0).$$

(Rappelons qu'ici  $u < 0$  et donc  $\operatorname{Re}(\tilde{\tau} - u\omega) \geq 0$ , avec égalité seulement pour  $(\tau, \boldsymbol{\eta}) = (0, 0)$ .) La pression, dont on avait vu qu'elle fournissait une condition aux limites strictement dissipative, satisfait donc la condition de Kreiss. C'est un fait général.

**Exercice :** Vérifier que  $b = u$  (qui est aussi strictement dissipative) satisfait la condition de Kreiss.

En revanche, la réciproque est fautive. Prenons par exemple

$$b(v, \mathbf{u}, s) = \frac{\alpha}{2} u^2 + h(p(v, s), s)$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$ . On a alors

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) = -c^2 (\tilde{\tau} - (1 - \alpha)u\omega) \neq 0 \quad \operatorname{Re} \tau \geq 0, (\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0).$$

Pourtant, si

$$\alpha \in \left] \frac{1}{1 + \sqrt{1 - M^2}}, 1 \right[ ,$$

on constate que la condition aux limites correspondante n'est pas dissipative.

**Écoulement rentrant.** À nouveau les matrices lignes  $\mathbf{B}_j$  sont données par  $\mathbf{B}_j = db_j(v, \mathbf{u}, s)$ . Le calcul de  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  peut être assez compliqué. Dans le cas particulier

$$b_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, b_{d-1} = \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}, \quad b_d = s,$$

il se réduit au signe près à

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) = -v\tilde{\tau} \frac{\partial b_{d+1}}{\partial v} + a \frac{\partial b_{d+1}}{\partial u}.$$

**Exercice :** Vérifier qu'avec

$$b_{d+1}(v, u, s) = \frac{\alpha}{2} u^2 + h(p(v, s), s),$$

la condition de Kreiss est satisfaite.

## 2 Stabilité des chocs

L'étude de la stabilité, c'est-à-dire l'observabilité des ondes de choc, est antérieure à l'étude par Kreiss des problèmes aux limites (1970). Concernant les chocs, les premières analyses en modes normaux remontent aux années 1950, avec notamment les travaux d'Erpenbeck aux États-Unis et D'yakov en Russie. Dans les années 1980, la théorie de Kreiss a inspiré à Majda [10] une théorie analogue pour les chocs. Cette théorie lui a permis de classer complètement les chocs, des chocs violemment instables (pour lesquelles la condition de Lopatinskii n'est pas satisfaite), aux chocs uniformément stables (satisfaisant la condition de Kreiss), en passant par les chocs neutralement stables (satisfaisant la condition de Lopatinskii mais pas la condition de Kreiss), voir le théorème III.1 ci-après.

### 2.1 Description du problème

Parmi les solutions faibles des équations d'Euler, on connaît des solutions explicites très simples, constituées d'un seul choc, localisé sur un front plan se propageant à vitesse constante :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_-, & \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} < \sigma t, \\ \mathbf{W}_+, & \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} > \sigma t. \end{cases}$$

Une telle fonction n'est pas systématiquement une solution faible, admissible, des équations d'Euler. Il faut que les conditions de Rankine-Hugoniot, ainsi qu'un critère d'admissibilité, soient satisfaits. En reprenant l'étude de la condition de Rankine-Hugoniot faite au chapitre II, on voit qu'une discontinuité avec transfert de masse, c'est-à-dire avec

$$j := \rho_{\pm} (\mathbf{u}_{\pm} \cdot \mathbf{n} - \sigma) \neq 0,$$

est effectivement une solution faible des équations d'Euler si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{u}}_+ = \check{\mathbf{u}}_-, \\ (v_+ - v_-)(p_+ - p_-) < 0, \\ \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} = \pm (v_+ - v_-) \sqrt{(p_+ - p_-)/(v_- - v_+)}, \\ \bar{h}(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}_-) = 0, \end{array} \right.$$

où la notation

$$\check{\mathbf{u}} := \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

désigne une vitesse tangentielle et

$$\bar{h}(\mathbf{W}_+; \mathbf{W}_-) := e_+ - e_- + \frac{p_+ + p_-}{2} (v_+ - v_-)$$



est la fonction déjà introduite au chapitre II. De plus, on adopte ici comme critère d'admissibilité le *critère de choc de Lax*. Nous avons déjà rencontré au chapitre II (Remarque II.2) les inégalités de choc de Lax et les notions de 1-choc et 3-choc. En fait, en plusieurs dimensions d'espace, la distinction entre 1-chocs et 3-chocs n'a pas de sens car il n'y a pas de choix "naturel" de l'indexation. Imaginons en effet qu'on ait les inégalités de choc de Lax :

$$\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} + c_+ < \sigma < \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} + c_-$$

qui tendraient à qualifier la discontinuité de 3-choc. Échangeons alors les notations  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$ , si bien que  $\mathbf{n}$  devient  $-\mathbf{n}$  (pour rester orienté de  $\mathbf{W}_-$  vers  $\mathbf{W}_+$ ) et  $\sigma$  devient  $-\sigma$ . Avec ces nouvelles notations on obtient les inégalités

$$\mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} - c_- > \sigma > \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} - c_+$$

correspondant plutôt à un 1-choc! Cependant, si l'on définit les nombres de Mach par

$$M_{\pm} := \frac{|\mathbf{u}_{\pm} \cdot \mathbf{n} - \sigma|}{c_{\pm}},$$

on voit que, quel que soit le choix de l'indexation, le nombre de Mach derrière le choc est inférieur à 1 et celui devant le choc est supérieur à 1. En effet, avec le premier choix d'indexation par exemple, les inégalités

$$\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} + c_+ < \sigma < \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} + c_-$$

impliquent que le flux  $j$  est négatif (puisque  $\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} < \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} + c_+ < \sigma$ ), l'état derrière le choc est  $\mathbf{W}_-$  (voir Chapitre I §3.3) et

$$M_- = \frac{\sigma - \mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n}}{c_-} < 1, \quad M_+ = \frac{\sigma - \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n}}{c_+} > 1.$$

Ceci nous conduit à donner la définition suivante.

**Définition III.4** *En plusieurs dimensions d'espace, on appelle choc de Lax une discontinuité dynamique telle que l'état derrière le front soit subsonique et l'état devant le front soit supersonique, au sens où les nombres de Mach du fluide relativement au front soient respectivement inférieur et supérieur à 1.*

On rappelle que pour les fluides de Bethe-Weyl par exemple, les chocs de Lax sont les chocs compressifs.

De façon générale, la question que l'on se pose est de savoir si une solution de même nature persiste lorsqu'on perturbe les données. Plus précisément, si  $\Sigma_0$  est une surface proche de  $\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ , et

$$\mathbf{W}^{\pm}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{W}_{\pm}$$

de part et d'autre de  $\Sigma_0$ , de sorte que  $\mathbf{W}^-$  et  $\mathbf{W}^+$  soient compatibles avec les conditions de Rankine-Hugoniot, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{u}}^+ = \check{\mathbf{u}}^-, \\ (v^+ - v^-)(p^+ - p^-) < 0, \\ \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n} = \pm (v^+ - v^-) \sqrt{(p^+ - p^-)/(v^- - v^+)}, \\ \bar{h}(\mathbf{W}^+; \mathbf{W}^-) = 0 \end{array} \right.$$

(plus le critère d'admissibilité) en tout point de  $\Sigma_0$ , existe-t-il une solution faible (admissible) des équations d'Euler, qui soit régulière de part et d'autre d'un front  $\Sigma(t)$  proche de  $\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \sigma t\}$ , avec  $\Sigma(0) = \Sigma_0$  et

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{W}^\pm(\mathbf{x})$$

de part et d'autre de  $\Sigma_0$  ? C'est un problème difficile, à frontière libre. L'idée est de le ramener à un problème aux limites, en redressant le front inconnu  $\Sigma(t)$  au moyen d'un changement de variables.

## 2.2 Méthode générale

Avant d'aborder techniquement la question de la stabilité des chocs, on peut faire quelques simplifications. Puisque le choc de référence est tel que

$$\check{\mathbf{u}}_+ = \check{\mathbf{u}}_-,$$

on peut faire un changement de référentiel Galiléen, en se déplaçant avec la vitesse tangentielle  $\check{\mathbf{u}}_+ = \check{\mathbf{u}}_-$  et la vitesse normale  $\sigma$ , de sorte que dans ce nouveau référentiel

$$\check{\mathbf{u}}_+ = \check{\mathbf{u}}_- = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 0.$$

D'autre part, en interchangeant les notations  $\mathbf{W}_-$  et  $\mathbf{W}_+$ , et en changeant  $\mathbf{n}$  en  $-\mathbf{n}$ , on change le signe de  $j = \rho_\pm(\mathbf{u}_\pm \cdot \mathbf{n})$ . Grâce à cette propriété de symétrie, on peut supposer sans perte de généralité  $j > 0$ .

Enfin, on peut choisir les axes de coordonnées de l'espace de sorte que  $\mathbf{n}$  soit le dernier vecteur de base  $\mathbf{e}_d$ . Comme au §1, on notera  $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$  les variables orthogonales à  $\mathbf{n}$ .

Ces hypothèses simplificatrices étant faites, décrivons la transformation du problème à frontière libre en problème aux limites. Elle se fait en deux étapes. D'abord on "redresse le front inconnu", supposé d'équation  $x_d = X(\mathbf{y}, t)$ , en effectuant le changement de variables

$$(\mathbf{y}, x_d, t) \mapsto (\mathbf{y}, z := x_d - X(\mathbf{y}, t), t).$$

Dans ces nouvelles variables, le front devient simplement l'hyperplan  $\{z = 0\}$ . Ensuite on "replie" le demi-espace de gauche  $\{z < 0\}$  sur celui de droite, en changeant  $z$  en  $-z$ . Au total, ces deux étapes reviennent à associer à une fonction inconnue  $f(\mathbf{x}, t)$ , définie de part et d'autre de  $\Sigma(t)$ , deux fonctions inconnues  $f^\pm(\mathbf{y}, z, t)$ , toutes deux définies dans le demi-espace  $\{z > 0\}$ .

En appliquant ce procédé à  $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ , on obtient en transformant les équations d'Euler, un système de  $(d+2)$  EDP pour  $\mathbf{W}^-$  et un autre système de  $(d+2)$  EDP pour  $\mathbf{W}^+$ , à satisfaire dans  $\{z > 0\}$ . D'autre part, les  $(d+2)$  conditions de Rankine-Hugoniot deviennent  $(d+2)$  conditions sur le bord  $\{z = 0\}$ .

$\triangleleft$  Les dérivées  $\partial_t X$  et  $\partial_{y_i} X$  du front inconnu apparaissent dans toutes ces équations. En particulier, les conditions au bord sont des EDP en  $X$ .

On veut cependant étudier si ce problème est bien posé. Pour cela, on commence par le linéariser, et on en restera là dans le cadre de ce cours. On linéarise évidemment autour du choc de référence, c'est-à-dire autour de

$$(\mathbf{W}^- \equiv \mathbf{W}_-, \mathbf{W}^+ \equiv \mathbf{W}_+, X \equiv 0).$$

On peut en fait choisir les variables qui nous arrangent à la place des variables conservatives  $\mathbf{W}$ . Comme pour les problèmes aux limites standards, on va utiliser les variables  $(v, \mathbf{u}, s)$ .

De plus, il apparaît que le système d'ÉDP valable à l'intérieur du demi-espace, une fois linéarisé, ne contient plus de dérivées  $\partial_t X$ ,  $\partial_{y_i} X$ .

On effectue ensuite comme pour un problème aux limites standard une transformation de Fourier en  $\mathbf{y}$  et une transformation de Laplace en  $t$ . Sous forme abstraite, on obtient un problème du type

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}^- \\ \dot{\mathbf{U}}^+ \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}^- \\ \dot{\mathbf{U}}^+ \end{pmatrix}, & z > 0, \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}^- \\ \dot{\mathbf{U}}^+ \end{pmatrix} + \dot{X} \mathbf{b}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = 0, & z = 0, \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est une matrice  $2(d+2) \times 2(d+2)$ , de la forme

$$\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{A}_-(\tau, \boldsymbol{\eta}) & 0_{d+2} \\ \hline 0_{d+2} & \mathcal{A}_+(\tau, \boldsymbol{\eta}) \end{array} \right),$$

$\mathbf{M}$  est une matrice  $(d+2) \times 2(d+2)$  et  $\mathbf{b}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est un vecteur à  $(d+2)$  lignes. La condition de Lopatinskii demande que ce problème n'admette pas de solution non triviale qui soit bornée en  $z$  pour  $\text{Re } \tau > 0$ .

Comme pour un problème aux limites standard, on est donc amené à étudier les valeurs propres et plus spécialement le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , qui est évidemment le produit

$$\mathcal{E}_-(\tau, \boldsymbol{\eta}) \times \mathcal{E}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$$

des sous-espaces stables de  $\mathcal{A}_-(\tau, \boldsymbol{\eta})$  et  $\mathcal{A}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$ . En fait,  $\mathcal{A}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$  n'est autre que la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  correspondant à l'état  $(v_+, \mathbf{u}_+, s_+)$  avec la notation du §1, tandis que  $\mathcal{A}_-(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est  $-\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  pour l'état  $(v_-, \mathbf{u}_-, s_-)$ . Ceci est dû au fait que pour  $\mathbf{W}^+$  les dérivées  $\partial_{x_d}$  apparaissant dans les équations d'Euler originales ont été transformées en  $\partial_z$ , tandis que pour  $\mathbf{W}^-$  elles ont été transformées en  $-\partial_z$ . Mais là encore, on n'aura pas besoin dans le cadre de ce cours d'écrire explicitement ces matrices.

Une fois déterminé le sous-espace stable  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  de  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  pour  $\text{Re } \tau > 0$ , on le prolonge par continuité à  $\tau \in i\mathbb{R}$ . Et la condition de Lopatinskii (respectivement Kreiss) équivaut à

$$\forall (\dot{\mathbf{U}}^-, \dot{\mathbf{U}}^+, \dot{X}) \in \mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \times \mathbb{C}, \quad \mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}^- \\ \dot{\mathbf{U}}^+ \end{pmatrix} + \dot{X} \mathbf{b}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = 0 \implies (\dot{\mathbf{U}}^-, \dot{\mathbf{U}}^+, \dot{X}) = (0, 0, 0),$$

quel que soit  $(\tau, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\text{Re } \tau > 0$  (respectivement  $\text{Re } \tau \geq 0$ ,  $(\tau, \boldsymbol{\eta}) \neq (0, 0)$ ).

On va voir que pour un choc de Lax,  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est de dimension  $(d+1)$  et par conséquent la condition de Lopatinskii s'exprime au moyen d'un déterminant de Lopatinskii  $(d+2) \times (d+2)$  que l'on notera à nouveau  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$ .

## 2.3 Calcul effectif du déterminant de Lopatinskii

### Détermination du sous-espace stable

D'après ce qu'on a vu au §1, la dimension du sous-espace stable  $\mathcal{E}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$  de  $\mathcal{A}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est égale au nombre de caractéristiques rentrantes dans le domaine  $\{z > 0\}$ . On se convainc

Figure III.2: Vitesses caractéristiques pour les chocs de Lax.

assez facilement que cela correspond aux caractéristiques *sortant* du choc pour l'état  $(v_+, \mathbf{u}_+, s_+)$ . De façon analogue, la dimension de  $\mathcal{E}_-(\tau, \boldsymbol{\eta})$  est le nombre de caractéristiques *sortant* du choc pour l'état  $(v_-, \mathbf{u}_-, s_-)$ . Or, pour un choc de Lax (voir la définition III.4), on constate que les caractéristiques sortantes sont toutes du côté de l'état subsonique, et elles sont au nombre de  $(d + 1)$  en comptant leur multiplicité. On pourra se reporter à la figure III.2 (analogue à la figure III.1 pour les problèmes aux limites standard) pour visualiser ces caractéristiques.

Donc, la dimension du sous-espace stable de la matrice  $\mathcal{A}(\tau, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{C}^{2(d+2) \times 2(d+2)}$  est  $(d + 1)$ , et ce sous-espace stable est de la forme

$$\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \{0\} \times \mathcal{E}_+(\tau, \boldsymbol{\eta})$$

ou

$$\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{E}_-(\tau, \boldsymbol{\eta}) \times \{0\}$$

selon que l'état  $(v_+, \mathbf{u}_+, s_+)$  est subsonique ou supersonique.

Avec notre hypothèse  $j > 0$ , l'état subsonique est nécessairement  $(v_+, \mathbf{u}_+, s_+)$ . Et d'après le calcul du §1.3 (qui se simplifie un peu car la vitesse tangentielle est nulle,  $\tilde{\tau}$  se réduit à  $\tau$ ),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+(\tau, \boldsymbol{\eta}) &= \ell_+(\tau, \boldsymbol{\eta})^\perp, \\ \ell_+(\tau, \boldsymbol{\eta}) &:= (a_+, -i v_+ u_+ \boldsymbol{\eta}^*, v_+ \tau, a_+ (p'_s/p'_v)_+), \\ a_+ &:= u_+ \tau + \omega_+ (c_+^2 - u_+^2), \end{aligned}$$

où  $\omega_+$  est l'unique racine de partie réelle positive lorsque  $\text{Re } \tau > 0$  de la relation de dispersion :

$$(\tau - u_+ \omega_+)^2 + v_+^2 (p'_v)_+ (\omega_+^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|^2) = 0.$$

$\triangleleft$  Désormais, pour simplifier les écritures, on omettra l'indice  $+$  : pas d'indice sous-entend relatif à l'état subsonique.

### Linéarisation des conditions de saut

On reprend la condition de Rankine-Hugoniot sous la forme obtenue au Chapitre I (§3.3) :

$$\begin{cases} [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)] = 0, \\ [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma) \mathbf{u} + p \mathbf{n}] = 0, \\ [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma) (\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e) + p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0, \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\check{\nabla}X\|^2}} \begin{pmatrix} -\check{\nabla}X \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \frac{-\partial_t X}{\sqrt{1 + \|\check{\nabla}X\|^2}}.$$

Pour simplifier, on remplace la troisième équation par la relation purement thermodynamique :

$$[e] + \langle p \rangle [v] = 0.$$

Ainsi, on considère le jeu de conditions de saut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^+ - \check{\mathbf{u}}^+ \cdot \check{\nabla}X}{v^+} - \frac{u^- - \check{\mathbf{u}}^- \cdot \check{\nabla}X}{v^-} = \left(\frac{1}{v^+} - \frac{1}{v^-}\right) \partial_t X, \\ \frac{u^+ - \check{\mathbf{u}}^+ \cdot \check{\nabla}X}{v^+} \check{\mathbf{u}}^+ - \frac{u^- - \check{\mathbf{u}}^- \cdot \check{\nabla}X}{v^-} \check{\mathbf{u}}^- - (p(v^+, s^+) - p(v^-, s^-)) \check{\nabla}X = \partial_t X \left(\frac{\check{\mathbf{u}}^+}{v^+} - \frac{\check{\mathbf{u}}^-}{v^-}\right), \\ \frac{u^+ - \check{\mathbf{u}}^+ \cdot \check{\nabla}X}{v^+} u^+ - \frac{u^- - \check{\mathbf{u}}^- \cdot \check{\nabla}X}{v^-} u^- + p(v^+, s^+) - p(v^-, s^-) = \left(\frac{u^+}{v^+} - \frac{u^-}{v^-}\right) \partial_t X, \\ e(v^+, s^+) - e(v^-, s^-) + \frac{1}{2} (p(v^+, s^+) + p(v^-, s^-)) (v^+ - v^-) = 0, \end{array} \right.$$

à linéariser autour de

$$v^- = v_-, \check{\mathbf{u}}^- = 0, u^- = u_-, s^- = s_-, v^+ = v, \check{\mathbf{u}}^+ = 0, u^+ = u, s^+ = s, X = 0.$$

Comme on ne s'intéressera *in fine* qu'aux perturbations dans le sous-espace stable  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ , de la forme

$$(\dot{v}^- = 0, \dot{\check{\mathbf{u}}}^- = 0, \dot{u}^- = 0, \dot{s}^- = 0, \dot{v}^+ = \dot{v}, \dot{\check{\mathbf{u}}}^+ = \dot{\check{\mathbf{u}}}, \dot{u}^+ = \dot{u}, \dot{s}^+ = 0),$$

il reste assez peu de termes à écrire. Les conditions de saut linéarisées se réduisent à :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{u}{v^2} \dot{v} + \frac{1}{v} \dot{u} = [\rho] \tau \dot{X}, \\ \frac{u}{v} \dot{\check{\mathbf{u}}} = i [p] \dot{X} \boldsymbol{\eta}, \\ \left(p'_v - \frac{u^2}{v^2}\right) \dot{v} + 2 \frac{u}{v} \dot{u} + p'_s \dot{s} = 0, \\ \frac{1}{2} (p'_v [v] - [p]) \dot{v} + (T + \frac{1}{2} p'_s [v]) \dot{s} = 0, \end{array} \right.$$

où les sauts sont pris sur le choc de référence :  $[v] = v - v_-$ , etc. On rappelle que d'après la condition de Rankine-Hugoniot et les hypothèses que l'on a faites, on a

$$j = \frac{u}{v} > 0, \quad [p] = -\frac{u^2}{v^2} [v].$$

On cherche s'il existe  $(\dot{v}, \dot{\check{\mathbf{u}}}, \dot{u}, \dot{s}, \dot{X})$  solution du système (2.1) tel que

$$\ell(\tau, \boldsymbol{\eta}) \cdot (\dot{v}, \dot{\check{\mathbf{u}}}, \dot{u}, \dot{s}) = 0,$$

ce qui est la caractérisation de  $\mathcal{E}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ .

Avant d'écrire le déterminant de Lopatinskii correspondant, il est commode d'éliminer  $\dot{\mathbf{u}}$ . On peut en effet substituer

$$-i u v \boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\mathbf{u}} = -u^2 [v] \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \dot{X}$$

dans l'équation  $\ell(\tau, \boldsymbol{\eta}) \cdot (\dot{v}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{u}, \dot{s}) = 0$ . En utilisant la définition de  $c$ ,  $c^2 = -v^2 p'_v$ , on arrive au système linéaire

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} u & \frac{1}{v} & 0 & -[\rho] \tau \\ (c^2 + u^2) & 2\frac{u}{v} & p'_s & 0 \\ \frac{1}{2}(c^2 - u^2)[v] & 0 & T + \frac{1}{2}p'_s[v] & 0 \\ -a v^2 & v \tau & -a p'_s \frac{v^2}{c^2} & -u^2 [v] \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{v}/v^2 \\ \dot{u} \\ \dot{s} \\ \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on peut définir  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  comme le déterminant de système.

## 2.4 Conditions de stabilité des chocs

### Stabilité mono-dimensionnelle

Étudier la stabilité des chocs en dimension 1 d'espace revient à considérer le cas  $\boldsymbol{\eta} = 0$  dans la condition de Lopatinskii. En remarquant que  $a = \tau c$  pour  $\boldsymbol{\eta} = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, 0) &= \frac{1}{2} v [v] [\rho] \tau^2 \begin{vmatrix} c^2 + u^2 & 2\frac{u}{v} & p'_s \\ c^2 - u^2 & 0 & p'_s + \frac{2T}{[v]} \\ -c v & 1 & -p'_s v/c \end{vmatrix} \\ &= \tau^2 T \frac{[v]}{v} c (c + u) (1 + M + M^2 \frac{p'_s}{T} [v]). \end{aligned}$$

En réécrivant  $p'_s/T = \Gamma/v$ , la condition de stabilité mono-dimensionnelle est donc

$$(2.3) \quad 1 + M + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v} \neq 0.$$

Cette condition est toujours satisfaite pour les chocs de faible amplitude, pour lesquels  $M$  tend vers 1 et donc

$$1 + M + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v} > 0$$

si  $[v]$  est assez petit. Des chocs de plus grande amplitude peuvent en principe devenir instables. Cependant, sous une hypothèse assez raisonnable concernant la loi d'état, aucune instabilité mono-dimensionnelle ne peut se produire.

**Proposition III.1** *Si  $\gamma \geq \Gamma \geq 0$ , tous les chocs de Lax sont stables en dimension 1.*

**Dém.** On considère un choc de Lax avec  $j > 0$  comme précédemment. Si jamais le choc est expansif, c'est-à-dire  $[v] > 0$ , alors on a évidemment

$$1 + M + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v} > 0.$$

Supposons donc  $[v] < 0$ . On a

$$c^2 = \gamma p v \geq \Gamma p v$$

par hypothèse. Par conséquent,

$$\Gamma M^2 \frac{[v]}{v} = \frac{\Gamma v u^2}{c^2 v^2} [v] \geq \frac{1}{p} j^2 [v] = -\frac{[p]}{p},$$

d'où

$$1 + M + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v} \geq M + \frac{p_l}{p} > 0.$$

□

**Remarque III.3** Les inégalités strictes  $\gamma > \Gamma > 0$  sont équivalentes à

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_e < 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_v > 0.$$

C'est précisément sous ces hypothèses que, d'après un théorème dû à Liu [9], le problème de Riemann admet une solution unique (dans laquelle toutes les discontinuités satisfont le critère de Liu!).

**Exercice :** Les inégalités  $\gamma \geq \Gamma \geq 0$  sont-elles satisfaites par les gaz de van der Waals ?

### Stabilité multi-dimensionnelle

Lorsqu'on s'intéresse à la véritable stabilité multi-dimensionnelle, on cherche les zéros de  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  avec  $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ . Il est alors commode d'utiliser l'homogénéité de  $\Delta$ . On introduit pour cela

$$V := \frac{\tau}{i \|\boldsymbol{\eta}\|} \quad \text{and} \quad W := \frac{a}{i c \|\boldsymbol{\eta}\|},$$

deux quantités homogènes à des vitesses. En revenant à la définition de  $a$ , on vérifie sans problème que  $W$  est défini par

$$(2.4) \quad W^2 = V^2 - (c^2 - u^2), \quad \text{Im } W < 0 \quad \text{pour} \quad \text{Im } V < 0,$$

et s'étend analytiquement à  $\{V \in \mathbb{R}; V^2 < c^2 - u^2\}$ . Et en utilisant comme au §1.3 les équations de Cauchy-Riemann, on peut prolonger  $W$  à  $\{V \in \mathbb{R}; V^2 \geq c^2 - u^2\}$  par

$$W = \text{sign}(V) \sqrt{V^2 - (c^2 - u^2)}.$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) &= -\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \begin{vmatrix} u & \frac{1}{v} & 0 & -[\rho]V \\ (c^2 + u^2) & 2\frac{u}{v} & p'_s & 0 \\ \frac{1}{2}(c^2 - u^2)[v] & 0 & T + \frac{1}{2}p'_s[v] & 0 \\ -cWv^2 & vV & -Wp'_s\frac{v^2}{c} & u^2[v] \end{vmatrix} \\ &= -\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \frac{[v]^2}{2} \begin{vmatrix} u & \frac{1}{v} & 0 & \frac{V}{v_-} \\ c^2 + u^2 & 2\frac{u}{v} & p'_s & 0 \\ c^2 - u^2 & 0 & p'_s + \frac{2T}{[v]} & 0 \\ -cvW & V & -W\frac{v}{c}p'_s & u^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Avec l'aide éventuelle d'un logiciel de calcul formel, on développe  $\Delta(\tau, \boldsymbol{\eta})$  et on obtient, en substituant  $p'_s = T\Gamma/v$  comme précédemment,

$$(2.5) \quad \Delta(\tau, \boldsymbol{\eta}) = -\|\boldsymbol{\eta}\|^2 T \frac{[v]}{v_-} c^2 u^2 \left\{ (2 + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v}) (V/u + W/c) V/u - (1 - M^2) ((V/u)^2 + v_-/v) \right\}.$$

On voit que les conditions de stabilité multidimensionnelle doivent faire intervenir les paramètres

$$r := \frac{v_-}{v} \quad \text{et} \quad k := 2 + \Gamma M^2 \frac{[v]}{v}.$$

Énonçons le résultat démontré par Majda [10].

**Théorème III.1 (Majda)** *Soit un choc de Lax avec*

$$M = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma|}{c} < 1$$

*comme nombre de Mach relatif derrière le choc. On note  $v$  le volume spécifique du fluide derrière le choc,  $v_0$  son volume devant le choc, et*

$$(2.6) \quad r := \frac{v_0}{v} \quad \text{and} \quad k := 2 + \Gamma M^2 \frac{v - v_0}{v}.$$

- *Le choc satisfait la condition de Lopatinskii si*

$$(2.7) \quad 1 - M < k \leq 1 + M^2 (r - 1).$$



- *Le choc satisfait la condition de Kreiss si*

$$(2.8) \quad 1 + M^2(r - 1) < k.$$

La démonstration est longue mais essentiellement élémentaire, à condition d'adopter un point de vue algébrique. En effet, vu la forme du déterminant (2.5), en se rappelant la définition de  $W$ , les solutions de  $V$  de  $\Delta = 0$  sont les valeurs  $V = uz$  telles que

$$k(z + g(z))z - (1 - M^2)(z^2 + r) = 0,$$

$$g(z)^2 = M^2 z^2 - (1 - M^2),$$

$$\text{Im } g(z) < 0 \quad \text{pour } \text{Im } z < 0 \text{ ou } z^2 \in [0, (1 - M^2)/M^2],$$

$$z g(z) > 0 \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}; \quad z^2 > (1 - M^2)/M^2.$$

En particulier,  $x = z^2$  doit être racine du polynôme

$$((k - (1 - M^2))x - (1 - M^2)r)^2 - k^2 x (M^2 x - (1 - M^2)).$$

L'étude de la courbe algébrique

$$((k - (1 - M^2))x - (1 - M^2)r)^2 - k^2 x (M^2 x - (1 - M^2)) = 0$$

dans le plan  $(x, k)$  conduit assez facilement aux conditions de stabilité du théorème. Les détails sont donnés en appendice B (extraits d'un livre à paraître, en anglais).

### Cas particuliers

La condition de Kreiss est équivalente à

$$(\Gamma + 1) M^2 \frac{v_0 - v}{v} < 1.$$

ou encore à

$$(\Gamma + 1) v \frac{p - p_0}{c^2} < 1.$$

Elle est trivialement satisfaite si  $v_0 < v$ , c'est-à-dire pour un choc expansif, dès que  $\Gamma \geq -1$ . Elle l'est également pour les chocs suffisamment faibles.

Pour les gaz parfaits, comme

$$\Gamma + 1 = \gamma = \frac{v c^2}{p},$$

on a toujours la condition de Kreiss.

**Théorème III.2** *Tous les chocs de Lax sont uniformément stables dans les gaz parfaits.*

Par ailleurs, le cas de la dynamique des gaz isentropique se déduit du cas général. En effet, il suffit de poser  $\Gamma = 0$ , c'est-à-dire  $k = 2$  dans les conditions de stabilité. Ainsi, la condition de stabilité monodimensionnelle est  $1 + M \neq 0$ , toujours satisfaite. La condition de Kreiss se réduit à

$$(2.9) \quad M^2(r - 1) < 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{p - p_0}{-v p'_v} < 1.$$

**Exercice :** Vérifier que cette condition est satisfaite pour les gaz polytropiques, où  $p = \text{cst } v^{-\gamma}$ ,  $\gamma \geq 1$ .

# Appendice



# Appendice A

## Aide-mémoire

symbole	signification	unité S.I.
$m$	masse	kilogramme ( $kg$ )
$l$	longueur	mètre ( $m$ )
$t$	temps	seconde ( $s$ )
$T$	température	Kelvin ( $K$ )
$v$	vitesse	$m.s^{-1}$
$f$	force	Newton, $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$
$p$	pression	Pascal, $1 Pa = 1 kg.m^{-1}.s^{-2}$
$e$	énergie	Joule, $1 J = 1 kg.m^2.s^{-2}$

Tableau A.1: Unités de base

# Appendice B

## Compléments mathématiques

### Convexité

**Lemme B.1** *Soit  $s$  une fonction de deux variables, croissante dans au moins une direction et dont les courbes de niveau sont strictement convexes dans cette direction. Alors la Hessienne de  $s$  est en tout point négative sur le sous-espace tangent à la courbe de niveau de  $s$ , i.e.*

$$\forall \mathbf{w}, \quad ds(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{t} = 0 \Rightarrow d^2s(\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{t}, \mathbf{t}) < 0.$$

**Dém.** Fixons un point du plan  $\mathbf{w}_0$ . Soit  $\mathcal{S}_0$  la courbe de niveau de  $s$  passant par  $\mathbf{w}_0$ , et soit  $\mathbf{t}_0 \in T_{\mathbf{w}_0}\mathcal{S}_0$  un vecteur tangent. Soit aussi  $\mathbf{n}_0$  le vecteur normal à  $\mathcal{S}_0$  tel que

$$ds(\mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 1.$$

Au voisinage de  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathcal{S}_0$  admet une équation paramétrique de la forme

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \theta \mathbf{t}_0 + \varphi(\theta) \mathbf{n}_0, \quad \text{avec } \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0,$$

et d'après les hypothèses,  $\varphi$  est une fonction convexe. Le long de  $\mathcal{S}_0$ ,  $s(\mathbf{w})$  est constante. Donc, en dérivant deux fois par rapport à  $\theta$ , on en déduit

$$d^2s(\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{t}_0 + \varphi'(\theta) \mathbf{n}_0)^{[2]} + \varphi''(\theta) ds(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0.$$

En particulier, pour  $\theta = 0$ , on trouve

$$d^2s(\mathbf{w}_0) \cdot (\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_0) = -\varphi''(0) < 0.$$

□

### Déterminant

**Lemme B.2** *L'application  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable et*

$$d(\det)(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \text{tr}({}^t \text{com} \mathbf{A} \mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*En particulier,*

$$d(\det)(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \det(\mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

**Dém.** C'est un calcul facile si l'on connaît les définitions intrinsèques de la trace et du déterminant. En effet, pour tout endomorphisme  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^n$ , on définit son déterminant ( $\det \mathbf{u}$ ) et sa trace ( $\operatorname{tr} \mathbf{u}$ ) par

$$f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)) = (\det \mathbf{u}) f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) = (\operatorname{tr} \mathbf{u}) f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

ces égalités ayant lieu quel soit le  $n$ -uplet  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  et quelle que soit la forme  $n$ -linéaire alternée  $f$ . De plus, étant donnée une base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\det_{\mathcal{B}}$  désigne l'unique forme  $n$ -linéaire alternée valant 1 en  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Soit alors  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On a

$$\det \mathbf{A} = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n).$$

Par multilinéarité, on obtient donc en dérivant :

$$d(\det)(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{H}\mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n).$$

Si  $\mathbf{A}$  est inversible on obtient immédiatement la seconde formule en écrivant

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{H}\mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Or on sait par ailleurs que

$$\mathbf{A} \operatorname{com} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}_n.$$

D'où la première formule, qui est vraie même si  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible par densité de  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .  $\square$

**Lemme B.3** *Si  $q$  est une forme quadratique définie positive sur  $\operatorname{Ker} \mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$q(\mathbf{u}) \geq C (\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|^2).$$

**Dém.** Soient  $f$  la forme polaire de  $q$  et  $E$  un supplémentaire orthogonal de  $\operatorname{Ker} \mathbf{B}$ . Comme  $\mathbf{B}$  est un isomorphisme de  $E$  sur son image, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|\mathbf{z}\| \leq c \|\mathbf{B}\mathbf{z}\|$$

pour tout  $\mathbf{z} \in E$ . Par hypothèse, il existe  $\alpha > 0$  et  $c' > 0$  tels que

$$q(\mathbf{w} + \mathbf{z}) = f(\mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{w} + \mathbf{z}) \geq \alpha \|\mathbf{w}\|^2 - c' \|\mathbf{z}\|^2 - 2c' \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|$$

quel que soit  $\mathbf{w} \in \operatorname{Ker} \mathbf{B}$ . Par l'inégalité de Young  $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$ , on en déduit

$$\begin{aligned} q(\mathbf{w} + \mathbf{z}) &\geq \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{w}\|^2 - c' \left(1 + \frac{2c'}{\alpha}\right) \|\mathbf{z}\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{w}\|^2 - c c' \left(1 + \frac{2c'}{\alpha}\right) \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

si  $\mathbf{z} \in E$ . Quel que soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , on le décompose en  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w} \in \text{Ker}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{z} \in E$ . Puisque  $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$ , on déduit de ce qui précède l'inégalité voulue avec

$$C = \min \left( \frac{\alpha}{2}, c c' \left( 1 + \frac{2c'}{\alpha} \right) - \frac{\alpha}{2} \right).$$

□

**Lemme B.4 (Gronwall)** *Soit  $y$  une fonction de  $t$  vérifiant*

$$y(t) \leq a(t) + \alpha \int_0^t y(\tau) \, d\tau \quad \forall t.$$

Alors

$$y(t) \leq a(0) e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} a'(\tau) \, d\tau \quad \forall t.$$

En particulier, il existe  $C_T$  tel que

$$y(t) \leq C_T \max_{t \in [0, T]} a(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Dém.** La seule astuce consiste à estimer le second membre

$$z(t) := a(t) + \alpha \int_0^t y(\tau) \, d\tau \quad \forall t.$$

Comme

$$z'(t) = a'(t) + \alpha y(t) \leq a'(t) + \alpha z(t),$$

on a

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} z(t)) \leq a'(t) e^{-\alpha t},$$

d'où

$$z(t) \leq z(0) e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} a'(\tau) \, d\tau.$$

□

C'est la forme du lemme de Gronwall que nous utilisons couramment dans ce cours. Une version raffinée de ce lemme se démontre de la même façon :

**Lemme B.5 (Gronwall)** *Soit  $y$  une fonction de  $t$  vérifiant*

$$y(t) \leq a(t) + \int_0^t \alpha(\tau) y(\tau) \, d\tau \quad \forall t.$$

Alors

$$y(t) \leq a(t) + \int_0^t a(\tau) \alpha(\tau) e^{\int_0^t \alpha(s) \, ds} \, d\tau \quad \forall t.$$



**Théorème de Majda**

Cette partie en anglais est extraite d'un livre en préparation [Benzoni-Gavage & Serre].

**Theorem B.1** *Take  $M < 1$ ,  $r > 0$ ,  $k > 0$  and*

$$\begin{aligned} f(z) &:= k(z + g(z))z - (1 - M^2)(z^2 + r), \\ g(z)^2 &= M^2 z^2 - (1 - M^2), \\ \operatorname{Im} g(z) &< 0 \quad \text{for } \operatorname{Im} z < 0 \text{ or } z^2 \in [0, (1 - M^2)/M^2], \\ z g(z) &> 0 \quad \text{for } z \in \mathbb{R}; \quad z^2 > (1 - M^2)/M^2. \end{aligned}$$

- *Then  $f$  admits no zero of negative imaginary part if*

$$1 - M < k \leq 1 + M^2(r - 1).$$

- *And  $f$  admits no zero of nonpositive imaginary part if*

$$1 + M^2(r - 1) < k.$$

**Proof.** Introduce

$$(0.1) \quad p(x, k) = ((k - (1 - M^2))x - (1 - M^2)r)^2 - k^2 x(M^2 x - (1 - M^2)).$$

For simplicity, we have stressed here only the dependence of  $p$  upon the parameter  $k$ , even though it is also obviously a polynomial in  $r$  and  $M^2$ . This simplifies the writing and is confusionless since  $r$  and  $M^2$  are kept fixed in the discussion below. Readers gifted for algebra will have checked that  $p$  is the *resultant* with respect to  $y$  of two polynomials  $F(x, y)$  and  $G(x, y)$ ,

$$(0.2) \quad F(x, y) = k(x + y) - (1 - M^2)(x + r),$$

which is obtained replacing  $z^2$  by  $x$  and  $z g(z)$  by  $y$  in  $f(z)$ , and

$$(0.3) \quad G(x, y) = y^2 - x(M^2 x - (1 - M^2)),$$

which vanishes simultaneously with  $y^2 - z^2 g(z)^2$ .

Conversely, if  $x$  is a zero of  $p(\cdot, k)$  and  $z^2 = x$  then, either

$$(k - (1 - M^2))z^2 - (1 - M^2)r = -k z g(z),$$

which means that  $f(z) = 0$ , or

$$(k - (1 - M^2))z^2 - (1 - M^2)r = +k z g(z)$$

and  $z$  is *not* a zero of  $f$  (unless  $z g(z) = 0$ ). In the case of a *real* root  $x$ , the sign of  $z g(z)$  depends on the location of  $x = z^2$  with respect to  $(1 - M^2)/M^2$ . This can be summarized as follows, introducing for convenience

$$x_0 := \frac{(1 - M^2)r}{k - (1 - M^2)}.$$

- If  $x$  is a negative real root of  $p(\cdot, k)$  and  $z^2 = x$ ,  $z \in i\mathbb{R}^-$  is a zero of  $f$  if and only if

$$(k - (1 - M^2))(x - x_0) > 0.$$

- If  $x$  is a positive real root of  $p(\cdot, k)$  and  $z^2 = x > x_* := (1 - M^2)/M^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$  is a zero of  $f$  if and only if

$$(k - (1 - M^2))(x - x_0) < 0.$$

Therefore, the discussion should rely on

$\rightsquigarrow$  the sign of  $k - (1 - M^2)$

and on the position of  $x_0(k)$  with respect to the real roots of  $p(\cdot, k)$ . From the definition (0.1) of  $p(\cdot, k)$ , we see that

$$\begin{aligned} p(x_0(k), k) &= -k^2 x_0(k) (M^2 x_0(k) - (1 - M^2)) \\ &= -k^2 \frac{(1 - M^2)^2 r}{(k - (1 - M^2))^2} (M^2 r - k + 1 - M^2), \end{aligned}$$

and we easily compute that the dominant coefficient of  $p(\cdot, k)$  is

$$a_2 = (1 - M^2)(k - 1 - M)(k - 1 + M).$$

Consequently, the position of  $x_0(k)$  with respect to the real roots of  $p(\cdot, k)$  is determined by

$\rightsquigarrow$  the sign of  $(k - 1 - M)(k - 1 + M)(M^2 r - k + 1 - M^2)$ .

Since we clearly have

$$1 - M < 1 - M^2 < 1 + M,$$

there will be a priori only two cases to consider, depending on the position of  $1 + M$  with respect to  $M^2 r + 1 - M^2$ .

**Case 1:**  $rM < 1 + M$  and

$$1 - M < 1 - M^2 < M^2 r + 1 - M^2 < 1 + M,$$

**Case 2:**  $rM > 1 + M$  and

$$1 - M < 1 - M^2 < 1 + M < M^2 r + 1 - M^2.$$

Regarding the other coefficients of  $p(\cdot, k)$ , at the zeroth order we have

$$a_0 = (1 - M^2)^2 r^2 > 0,$$

and

$$a_1(k) = (1 - M^2)(k^2 - 2r(k - (1 - M^2))).$$

Thus it is only

$$\text{sign } a_2(k) = \text{sign} \{ (k - 1 - M)(k - 1 + M) \}$$

that determines the sign of the product of the roots of  $p(\cdot, k)$ . The sign of  $a_1$  is important at singular points of  $a_2$ , in order to localize the infinite branches of the algebraic curve  $\mathcal{A} := \{ (x, k); p(x, k) = 0 \}$ . In fact, we have

$$a_1(1 - M) = (1 - M^2)(1 - M)(1 - M + 2rM) > 0,$$

but the sign of

$$a_1(1 + M) = (1 - M^2)(1 + M)(1 + M - 2rM)$$

depends on  $r$ . This leads us to split Case 1 into

**Case 1a:**  $rM < (1 + M)/2$  and  $a_1(1 + M) > 0$ ,

**Case 1b:**  $(1 + M)/2 < rM < 1 + M$  and  $a_1(1 + M) < 0$ .

We now have all the ingredients to find the qualitative features of  $\mathcal{A}$  relevant to our analysis. There is always a parabolic branch with vertical asymptotes  $x = -1$  and  $x = 0$ . Another remark is that  $x_0(k)$  is a root of  $p(\cdot, k)$  only at  $k = 0$ , where  $x_0 = -r$ , and at  $k = M^2 r + 1 - M^2$ , where  $x_0 = x_* = (1 - M^2)/M^2$ . It will appear in the sequel that the latter is the transition point from neutral stability to uniform stability.

For clarity, we shall make separate discussions of Cases 1a, 1b, and 2, which all arrive at the same conclusion that (2.7) is necessary and sufficient for having only real roots of  $f$ , and (2.7) is necessary and sufficient for having no roots at all. The reader may refer to the corresponding Figures B.1-B.2-B.3 in order to visualize the tedious but elementary arguments involved.

### Case 1a.

- for  $k < 1 - M$ , we have  $a_2(k) > 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) < 0$ . Therefore,  $p(\cdot, k)$  has two real roots of the same sign and  $x_0(k) < 0$  is in between. Consequently, the smallest root,  $\underline{x}$  of  $p$  satisfies

$$(k - (1 - M^2))(\underline{x} - x_0) > 0$$

and thus yields a root  $z \in i\mathbb{R}^-$  of  $f$ . This root corresponds to a *strongly unstable* mode. When  $k$  goes to  $1 - M$ ,  $\underline{x}$  goes to  $-\text{sign}(a_1 a_2) \infty = -\infty$ .

- for  $1 - M < k < 1 - M^2$ , we have  $a_2(k) < 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) > 0$ . Therefore,  $p(\cdot, k)$  has two real roots of opposite signs (one going to  $+\infty$  when  $k$  goes to  $1 - M$ ) and  $x_0(k)$  is smaller than both of them. The negative root of  $p$ , still denoted  $\underline{x}$  for simplicity, now satisfies

$$(k - (1 - M^2))(\underline{x} - x_0) < 0,$$

which shows it does not give rise to a root of  $f$ . The positive one satisfies the same inequality, and thus its square root (and the opposite) is a real zero of  $f$ . This zero corresponds to a *neutral* mode.

- for  $1 - M^2 < k < M^2 r + 1 - M^2$ , we still have  $a_2(k) < 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) > 0$  and thus two real roots of opposite signs for  $p(\cdot, k)$ . But  $x_0(k)$  is now greater than both of them. Therefore, we are in the same situation as before. The positive root of  $p$  yields a real root of  $f$ .
- for  $M^2 r + 1 - M^2 < k < 1 + M$ , we have  $a_2(k) < 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) < 0$ . Therefore,  $p(\cdot, k)$  has two real roots of opposite signs and  $x_0(k)$  is in between. The negative one is such that

$$(k - (1 - M^2))(x - x_0) < 0,$$

and it is the contrary for the positive one. Thus none of them yields a root of  $f$ . The positive root goes to  $-\text{sign}(a_1 a_2) \infty = +\infty$  when  $k$  goes to  $1 + M$ .

- for  $1 + M < k$ , we have  $a_2(k) > 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) > 0$ . Therefore,  $p(\cdot, k)$  has either two real roots of the same sign or two conjugated complex roots. And  $p(\cdot, k)$  has one real root going to  $-\text{sign}(a_1 a_2) \infty = -\infty$  when  $k$  goes to  $1 + M$ . Therefore, there exists  $\varepsilon > 0$  such that for  $1 + M < k < 1 + M + \varepsilon$ ,  $p(\cdot, k)$  has two negative real roots, and  $x_0(k)$  is greater than both of them. (This is also the case for large enough  $k$  due to the parabolic branch mentioned above.) As before, none of them yields a root of  $f$ . In general,  $p$  has conjugated complex roots on some interval  $[K, L]$  with  $K \geq 1 + M + \varepsilon$ . But these cannot give rise to any complex zero of  $f$ , by Rouché's theorem and a connectedness argument.

### Case 1b.

- for  $k < M^2 r + 1 - M^2$ , the situation exactly as in Case 1a.
- for  $M^2 r + 1 - M^2 < k < 1 + M$ , as in Case 1a,  $p(\cdot, k)$  has two real roots of opposite signs,  $x_0(k)$  is in between, and none of them yields a root of  $f$ . The only difference is that it is the negative root that goes to infinity when goes to  $1 + M$ .
- for  $1 + M < k$ , as in Case 1a,  $p(\cdot, k)$  has either two real roots of the same sign or two conjugated complex roots. This time  $p(\cdot, k)$  has one real root going to  $-\text{sign}(a_1 a_2) \infty = +\infty$  when  $k$  goes to  $1 + M$ . Therefore, there exists  $\varepsilon > 0$  such that for  $1 + M < k < 1 + M + \varepsilon$ ,  $p(\cdot, k)$  has two positive real roots, and  $x_0(k)$  is less than both of them. As before, none of them yields a root of  $f$ . For larger  $k$ , the conclusion that  $f$  keeps having no roots follows in the same way as in Case 1a.

### Case 2.

- for  $k < 1 + M$ , the situation is similar as in Case 1 when  $k < M^2 r + 1 - M^2$ .
- for  $1 + M < k < M^2 r + 1 - M^2$ ,  $a_2(k) > 0$  and  $a_2(k)p(x_0(k), k) < 0$ . Therefore,  $p(\cdot, k)$  has positive real roots and  $x_0(k)$  is in between. Only the smallest one yields a (real) root of  $f$ , because

$$(k - (1 - M^2))(x - x_0) < 0.$$

The greatest one goes to  $-\text{sign}(a_1 a_2) \infty = +\infty$  when  $k$  goes to  $1 + M$ .

- for  $M^2 r + 1 - M^2 < k$ , as in Case 1b,  $p(\cdot, k)$  has two positive real roots, and  $x_0(k)$  is less than both of them, as long as  $k$  is not too large. None of them yields a root of  $f$ . The conclusion is the same as in other cases.

□

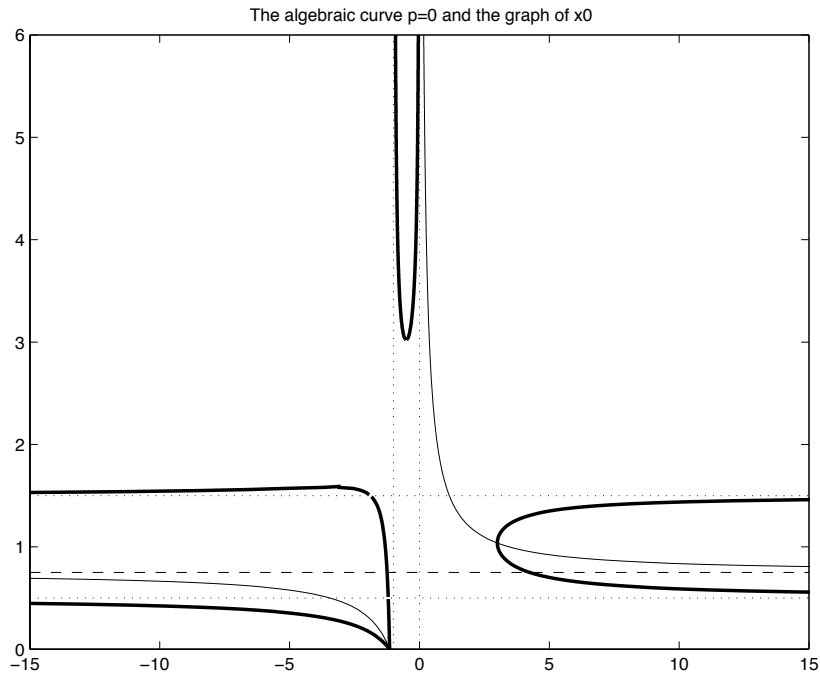


Figure B.1: The curve  $\mathcal{A}$  in an example of Case 1a ( $M = 0.5$ ,  $r = 1.15$ ).

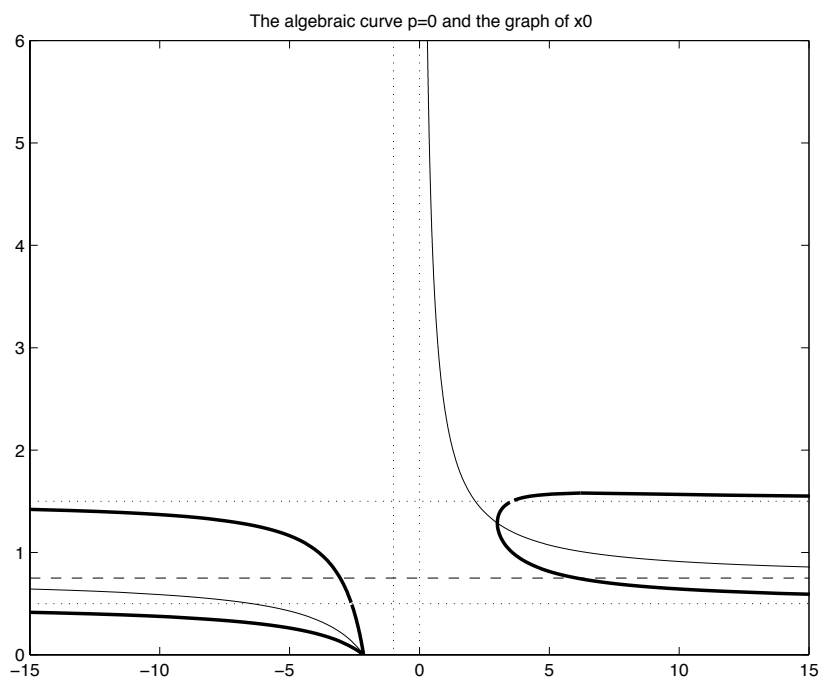


Figure B.2: The curve  $\mathcal{A}$  in an example of Case 1b ( $M = 0.5$ ,  $r = 4$ ); the upper branch is out of range.

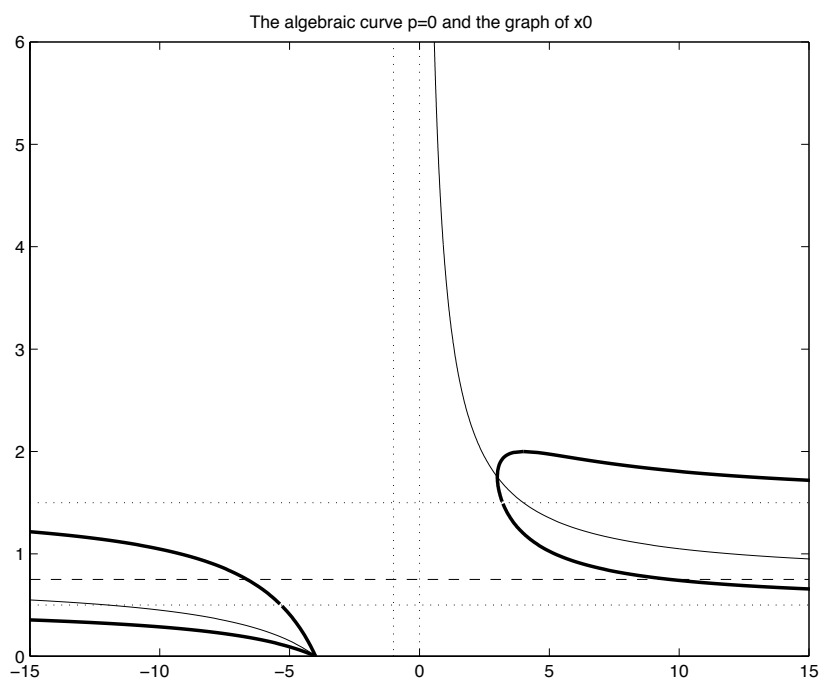


Figure B.3: The curve  $\mathcal{A}$  in an example of Case 2 ( $M = 0.5$ ,  $r = 2.15$ ); the upper branch is out of range.

# Index

- écoulement isotherme, 28
- énergie
  - interne, 7
  - libre, 16, 28
  - totale, 28
- équation d'état, 7, 14, 21
- équations d'Euler, 22
- acoustique, 28, 59, 73
- adiabatique de Hugoniot, 44
- autosimilaire, 55
- capacité calorifique, 8
- caractéristique
  - champ, 33
  - matrice, 31, 32
  - rentrante, 77
  - vitesse, 31, 32
- choc, 36
  - courbe de, 58
  - onde de, 38, 54
  - polaire de, 44
- coefficient adiabatique, 9
- coefficient de dilatation, 8
- coefficient de Grüneisen, 11
- condition de saut, 34
- condition forte, 46
- condition intermédiaire, 50
- conductivité thermique, 22, 38
- conservatif, 62
- coordonnée Lagrangienne de masse, 25
- Courant-Friedrichs-Lewy
  - condition de, 62
- courbe
  - de Lax
    - directe, 58
    - rétrograde, 59
  - de choc, 58
  - de détente, 56
- courbe de saturation, 16
- covolume, 16
- critère d'admissibilité, 51
- critère d'entropie, 51
- critère de choc de Lax, 86
- différences finies, 61
- discontinuité de contact, 35
- discontinuité dynamique, 35
- dissipative
  - condition aux limites, 75
- droite de Rayleigh, 44
- dérivée convective, 22, 26
- détente
  - courbe de, 56
  - onde de, 55
- ensemble de Hugoniot, 42
- enthalpie, 14
- entropie
  - mathématique, 28
  - physique, 7, 27
- estimation d'énergie, 29, 74
- facteur de compression critique, 16
- fluide
  - de Bethe-Weyl, 12
  - de Smith, 12
  - de van der Waals, 16
  - Newtonien, 22
- flux numérique, 63
- fonction convexe conjuguée, 11
- formulation Eulerienne, 21
- gaz
  - de van der Waals, 19
  - parfait, 12
  - polytropique, 14
  - poussiéreux, 19
- gradient de déformation, 22
- hyperbolique

- ÉDP, 31
  - matrice, 80
- invariant de Riemann, 57
- inégalités de choc de Lax, 54
- isentropique, 14
- Kreiss
  - condition de, 83
- Lax-Friedrichs, 62
- Lopatinskii
  - condition de, 82
  - déterminant de, 82
- matrice de Roe, 69
- mode normal, 79
- monotone, 75
- nombre de Mach, 49, 86
- onde
  - de détente, 54
  - de choc, 38, 54
  - plane, 41
  - progressive, 38
- orbite homocline, 39
- point critique, 16
- potentiel chimique, 11, 27
- problème bien posé, 30, 79
- problème de Riemann, 42, 44
- profil thermovisqueux, 38
- quasilinéaire, 55
- Rankine-Hugoniot
  - condition de, 34
- relation de dispersion, 32
- réversible, 27
- schéma de Godunov, 42
- solution faible, 33
- sous-espace central, 83
- sous-espace stable, 81
- tenseur de diffusion, 26
- tenseur des contraintes, 21
- tourbillon
  - feuille de, 35
  - vecteur, 35
- van der Waals
  - fluide de, 16
  - gaz de, 19
  - loi de, 16
- variables conservatives, 26, 33
- viscosité, 22, 38
- vitesse du son, 8, 9, 27, 28
- vraiment non-linéaire, 33





# Bibliographie

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [2] S.R. de Groot and P. Mazur. *Non-equilibrium thermodynamics*. Dover publications, New York, 1984.
- [3] E. Feireisl. Viscous and/or heat conducting compressible fluids. In *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, volume 1, pages 309–371. Elsevier North-Holland, 2002.
- [4] D. Gilbarg. The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer. *Amer. J. Math.*, 73:256–274, 1951.
- [5] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [6] N. Lange. *Lange’s Handbook of Chemistry*. McGraw-Hill, 1967.
- [7] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] Pierre-Louis Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, volume 10 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.
- [9] Tai Ping Liu. The Riemann problem for general systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 18:218–234, 1975.
- [10] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [11] Y. Rocard. *Thermodynamique*. Masson, 1967. 2ème édition.
- [12] J. S. Rowlinson and B. Widom. *Molecular theory of capillarity*. Oxford University Press, 1982.
- [13] S. Menon S. I. Pai and Z. Q. Fan. Similarity solutions of a strong shock wave propagation in a mixture of a gas and dusty particles. *Int. J. Eng. Sci.*, 18(12):1365–1373, 1980.

- [14] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation. I.* Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].
- [15] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation. II.* Diderot Editeur, Paris, 1996. Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes. [Geometric structures, oscillation and mixed problems].
- [16] R.C. Weast and M.J. Astle, editors. *CRC Handbook of Chemistry and Physics.* CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida 33431, 1980.
- [17] H. Weyl. Shock waves in arbitrary fluids [Commun. Pure Appl. Math. **ii** (1949), no. 2-3, 103–122]. In *Classic papers in shock compression science*, pages 497–519. Springer, New York, 1998.
- [18] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.