



## ENSIM 4A Statique des poutres ( résistance des matériaux )

Jean-Michel Génevaux, Hugo Dujourdy, Charlene Lemasson, Antoine Sternberger

### ► To cite this version:

Jean-Michel Génevaux, Hugo Dujourdy, Charlene Lemasson, Antoine Sternberger. ENSIM 4A Statique des poutres ( résistance des matériaux ). École d'ingénieur. France. 2013. cel-00611692v14

**HAL Id: cel-00611692**

**<https://cel.hal.science/cel-00611692v14>**

Submitted on 26 Jan 2022 (v14), last revised 11 Jan 2024 (v16)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Open licence - etalab

ENSIM 4A

Mécanique :  
Statique des poutres (résistance des matériaux)

Serveur Discord : <https://discord.gg/nngt3Zcyqu>

Jean-Michel Génevaux et les contributions de  
Hugo Dujourdy, Charlène Lemasson, Antoine Sternberger,  
avec les complicités des étudiant-e-s qui m'ont détecté  
les trop nombreuses autant qu'originales fautes d'orthographe et de grammaire.



*Chaque fois que je me plante, je pousse.*[1]

January 24, 2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Évaluation de ce module par les étudiant-e-s de l'année dernière</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Capacités, note.</b>	<b>9</b>
2.1	Capacités . . . . .	9
2.2	Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences . . .	10
<b>3</b>	<b>Méthode de travail</b>	<b>11</b>
3.1	Modalités de formation . . . . .	12
3.1.1	Formation par CRAIES . . . . .	12
3.1.2	Formation par Exercices . . . . .	15
3.1.3	Formation par problèmes . . . . .	15
3.1.4	Formation par projet . . . . .	16
3.2	Conseils aux référents . . . . .	16
3.3	Modalités d'évaluation des capacités. . . . .	17
3.3.1	Évaluation par examen individuel . . . . .	17
3.3.2	Évaluation par ceinture individuelle . . . . .	17
3.3.3	Évaluation par rapport de projet en groupe, présentation de projet en groupe et vidéo d'anti-dopage . . . . .	17
3.4	Absence . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Rappels de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs</b>	<b>23</b>
4.1	Objectifs . . . . .	23
4.2	Homogénéité, adimensionalisation . . . . .	23
4.3	Adimensionalisation . . . . .	24
4.4	Unités logarithmiques relatives ou absolues . . . . .	24
4.5	Ordres de grandeurs . . . . .	25
4.6	Brevets d'acquisition de connaissance . . . . .	25
4.7	Brevets de vérification de connaissance (facultatifs) . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Rappel de mécanique du solide : liaisons - chargement - isostaticité - hyperstaticité</b>	<b>27</b>
5.1	Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles . . . . .	27
5.2	Torseurs de chargement . . . . .	29
5.3	isostaticité - hyperstaticité . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Cours de théorie des poutres</b>	<b>35</b>
6.1	Les Outils . . . . .	38
6.1.1	De l'élasticité à la théorie des poutres . . . . .	38
6.1.2	Notion de poutre . . . . .	43
6.1.3	Efforts intérieurs . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Rappels de mécanique des solides déformables : Résoudre un problème de MSD en termes d'éq</b>	<b>60</b>
7.0.1	Description de la section droite . . . . .	54
7.0.2	Annexe 1 . . . . .	60
7.1	Lois de comportement de la poutre . . . . .	60
7.1.1	Objectif . . . . .	60
7.1.2	1ère cinématique . . . . .	60

7.1.3	2nd cinématique . . . . .	65
7.1.4	3ième cinématique . . . . .	70
7.1.5	Exemple d'utilisation : sollicitation de traction . . . . .	71
7.1.6	flexion simple autour de l'axe $H\vec{z}$ . . . . .	74
7.2	Dimensionnement . . . . .	74
7.2.1	Cercle de Mohr des contraintes . . . . .	74
7.2.2	Critères de limite d'élasticité . . . . .	74
7.2.3	Méthode de calcul : détermination des limites d'élasticité . . . . .	76
7.2.4	Exemple de calcul . . . . .	77
7.2.5	Formules de Bresse . . . . .	80
7.3	Résolutions de problèmes . . . . .	82
7.3.1	Résolution par superposition . . . . .	83
7.3.2	Méthodes énergétiques . . . . .	86
7.3.3	Résolution de systèmes hyperstatiques . . . . .	88
7.3.4	Systèmes articulé . . . . .	97
7.4	Non linéarités géométriques (grands déplacements) . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Problèmes</b>	<b>98</b>
8.1	Août 2020, Février 2021, Août 2021 . . . . .	98
8.2	Mai 2011 . . . . .	99
8.2.1	jaune : Modèle a : tige-bras, sans barre, subissant uniquement une force verticale de la passerelle	
8.2.2	jaune b : tige-bras, sans barre, subissant une force verticale de la passerelle et le poids propre du	
8.2.3	jaune c : tige-bras, sans barre, subissant une force de la passerelle et le poids propre du poteau.10	
8.2.4	Modèle d : bras . . . . .	101
8.3	Janvier 2009 : Que la montagne est belle ! . . . . .	102
8.3.1	Structure sans tirant . . . . .	102
8.3.2	Structure avec tirant . . . . .	103
<b>9</b>	<b>Projet</b>	<b>105</b>
9.1	Cahier des charges . . . . .	105
9.2	Accompagnement du projet . . . . .	105
9.3	Évaluation . . . . .	106
<b>10</b>	<b>Grilles de recueil de votre progression et ressenti</b>	<b>107</b>

Si vous êtes l'une des 208 personnes qui téléchargent annuellement ce polycopié sur <http://www.archives-ouvertes.fr>, et que vous passez par Le Mans, venez m'offrir un café (sans sucre)... et on en profitera pour parler du contenu afin de l'améliorer.

Jean-Michel

# Chapter 1

## Évaluation de ce module par les étudiant-e-s de l'année dernière

L'évaluation de cet enseignement est fait chaque année en fin de session. Trois questions ouvertes sont posées, l'une sur la méthode CRAIES, l'autre sur les ceintures, la suivante sur les TP et la dernière sur le graphe des compétences et des objectifs pédagogiques.

Vous trouverez dans les figures 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4, les nuages de mots associés à chaque thème. Nous rapellons que dans un nuage de mots, plus le mot est gros, plus il a été cité.

Les évaluations faites par les étudiants de 2020-2021 confirment les résultats des années précédentes, entre autre l'utilité du discord même lorsque les enseignements se font en présentiel.

- Pour l'enseignement de type CRAIES, 2 modifications avaient été apportées par rapport à l'année précédente : les questions étaient posées à la maison et non oralement en début de séance ; les réponses étaient enregistrées par l'enseignant chez lui, diffusées par courriel au lieu d'être faites oralement en début de séance. On constate que le nombre de questions est moindre et que les réponses faites par l'enseignant sont peu consultées.

Pour cette année 2021-2022, nous revenons donc aux phases de lecture silencieuses et questions/réponses en début de séance. Le nombre de vidéos a diminué grâce à vos évaluations de celles-ci. Quatre parcours de formations vous sont proposés en 2021-2022 avec comme entrées : soit l'enchaînement du polycopié, soit l'enchaînement des brevets, soit l'enchaînement de problèmes, soit par un projet. Chacun et chacune choisira son parcours.

- Pour l'utilisation de Discord, vos avis sont partagés sur l'utilité de celui-ci.

Pour cette année 2021-2022, nous continuerons donc à vous le proposer sous un format accessible depuis le site de l'université : ceux que cela intéresse pourront ainsi l'utiliser.

- Pour l'évaluation par ceintures, aucune modification n'avait été faite entre ces deux années, sauf bien sûr des changements de sujets.

Pour cette année 2021-2022, les évaluations par ceintures et par examen vous sont encore proposées. Nous complétons aussi par une évaluation de projet pour celles et ceux qui choisissent une formation par projet.

- Pour le graphe des capacités, aucune modification n'avait été faite entre ces deux années. Vos avis sont plutôt positifs.

Pour cette année 2021-2022, nous continuerons à le mettre à jour et à solliciter les collègues de l'Ensim pour qu'ils et elles y participent. Nous attendons avec impatience la mise en place de la liaison entre les capacités évaluées dans chaque matière et les savoir-faire : nous sommes prêt-e-s, il reste "juste" à construire l'outil informatique qui le fait.



Figure 1.1: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants de la méthode CRAIES.



Figure 1.2: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants de discord.





Figure 1.3: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants de l'évaluation par ceintures.



Figure 1.4: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants du graphe des capacités.

## Chapter 2

# Capacités, note.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *084 Dans quel cas, une validation de compétence est surveillée ou en autonomie ?*, *088 A quoi correspondent les couleurs blanche, jaune, etc. Cela correspond-t-il à quelque chose ?*.

### 2.1 Capacités

L'enchaînement des capacités est visible sur la figure 2.1. Vous pouvez suivre votre progression personnelle (ainsi que celle de tous les étudiants sur

<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/comp>.

1. blanche de physique pour l'ingénieur, 0 pts, anti-dopage "6" : déterminer si une équation est homogène ou la dimension d'une variable à partir de l'homogénéité.
2. jaune de mécanique, 0 pts, anti-dopage "6" : déterminer si un système est isostatique, hypostatique ou hyperstatique de degré  $n$  et exprimer les réactions aux liaisons en fonction du chargement et des éventuelle inconnues hyperstatiques.
3. violette de mécanique des solides déformables, 0 pts, anti-dopage "6" : résoudre un problème de MSD en termes d'équations d'équilibre et de conditions aux limites.

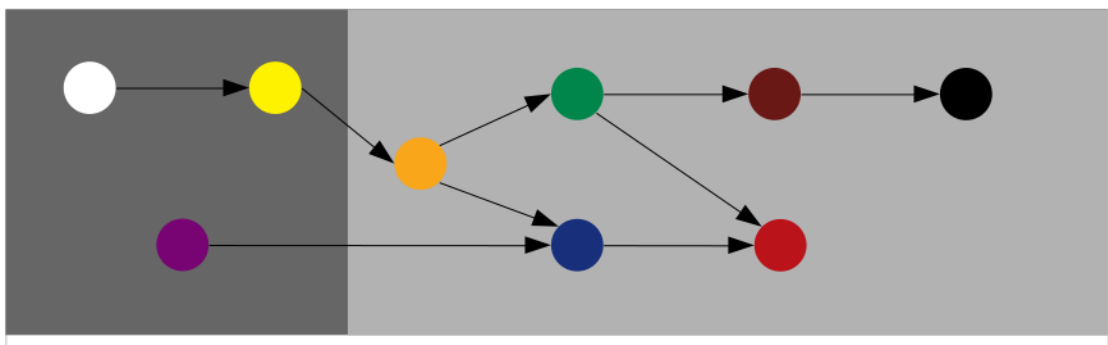


Figure 2.1: Parcours d'évaluation : chaque couleur correspond à une capacité.

4. orange, 4 pts, anti-dopage "6" : déterminer les composantes d'un torseur d'efforts intérieurs et les exprimer en fonction du chargement et des éventuelles inconnues hyperstatiques.
5. bleue, 4 pts, anti-dopage "5 et 6" : déterminer le chargement maximal admissible d'une structure isostatique.
6. verte 4 pts, anti-dopage "4, 5 et 6" : déterminer un élément du torseur de déplacement d'un point d'une structure isostatique et les exprimer en fonction du chargement.
7. marron, 4 pts, anti-dopage "3, 4, 5 et 6" : résoudre un problème hyperstatique extérieurement.
8. noire, 4 pts, anti-dopage "2, 3, 4, 5 et 6" : résoudre un problème hyperstatique intérieurement.
9. rouge, 20 pts, anti-dopage "vidéo/son de 5 minutes" : En équipe de 4 étudiants concevoir, dimensionner, fabriquer, tester une structure et rendre un rapport de projet qui respecte un cahier des charges.

Les capacités blanches, jaunes et violette qui sont des prérequis de ce cours et que vous auriez dû valider les semestres précédents, ne rapportent pas de points. Par contre, il est obligatoire de détenir blanche et jaune pour accéder à la capacité orange et violette pour accéder à la capacité bleue de ce cours comme le montre la figure 2.1.

## 2.2 Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences

L'interfaçage avec les modalités de contrôle des connaissances nécessite, hélas, une note... (Relire l'invariant pédagogique 19 de Célestin Freinet [13]). Les points associés à chaque capacité sont choisis pas l'enseignant. Une capacité est attribuée en "tout ou rien" pour la modalité ceintures, mais de 0% à 100% par examen ou projet.

Pour la modalité ceinture ou examen, le cumul de vos points vous fourni la note. Nous transmettrons les capacités que chacun d'entre vous a validées, aux collègues des enseignements à venir qui ont comme prérequis des capacités de ce module.

Pour la modalité projet, c'est... heuuu... juste un peu plus compliqué. Le taux de réussite  $t(i)$  de chaque capacité est évalué sur le rapport collectif. Les sections autres du rapport collectif sont évaluées par un taux de conformité  $c$ . La soutenance collective est évaluée par un taux de conformité  $s$ . La réponse vidéo individuelle est évaluée par un taux de conformité  $v$ . La note (puisqu'il en faut une) est donnée par :

$$n = 20 \frac{1}{3} \left( \frac{2}{7} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 t(i) \right) + c \right] + s \right) \left( 1 + 0.2 \frac{v - 0.5}{0.5} \right). \quad (2.1)$$

Les capacités de cette matière sont concaténées avec les capacités des autres matières de cette UE afin de d'abonder les savoir-faire, puis les compétences, puis les blocs de compétences... mais c'est une autre histoire.

## Chapter 3

# Méthode de travail

Le choix de votre méthode de formation et de méthode d'évaluation se fait entre la fin de la première séance et le début de la seconde, par un questionnaire à remplir informatiquement. Cela reviendra à cocher l'une des cases non grisée de 3.1.

Quatre modalités de formations sont proposées au choix de chaque étudiant ou étudiante :

- formation par CRAIES (brique bleue) : Travail sur polycopié de cours, visionnage de vidéos, questionnements, analyse des réponses de l'enseignant, travail sur exercices ciblés (brevets) en présence d'autres étudiants travaillant sur le même exercice, positionnement de sa progression personnelle en terme de brevet par rapport à l'ensemble de la promotion.
- formation par exercices (brique rouge) : Travail sur les exercices ciblés (brevets) en présence d'autres étudiants travaillant sur le même exercice, positionnement de sa progression personnelle en terme de brevet par rapport à l'ensemble de la promotion, visionnage de vidéos, lecture du polycopié, questionnements, analyse des réponses de l'enseignant.
- formation par problèmes : sujets d'examens des années précédentes, si nécessaire sur des exercices ciblés (brevet), visionnage de vidéos, lecture du polycopié, questionnements, analyse des réponses de l'enseignant.
- formation par projet : projet de conception, dimensionnement, construction et vérification expérimentale d'un objet, recherche des exercices ciblés (brevet), des vidéos et des parties du polycopié, nécessaires à la réalisation du projet. Un accompagnement spécifique à l'innovation vous sera proposé par Charlène Lemasson.

Pour les AJAC, à partir de septembre 2022, la formation se fait obligatoirement par problèmes.

Trois modalités d'évaluations des capacités sont proposées au choix de chaque étudiant :

- évaluation par examen,
- évaluation par ceintures : demande de sujet de ceintures, rédaction individuelle de réponse en travail à la maison, rendu de copie et contrôle anti-dopage, si réussite à une ceinture accès aux ceintures chaînées suivantes,

		formation par ...			
		CRAIES	exercices	problèmes	projet
évaluation par...	examen				
	ceinture				
	projet				

Figure 3.1: Les choix de type de formation et de type d'évaluation est équivalent à cocher une des cases blanche par chaque étudiant et étudiante.

- évaluation par projet : rendu de rapport et présentation orale, vidéo individuelle d'antidopage.

Pour les AJAC, à partir de septembre 2022, l'évaluation se fait obligatoirement par examen ou ceintures.

Nous vous souhaitons une bonne découverte, une intéressante confrontation des modèles que nous développerons lors de cette formation à la réalité des essais effectués en travaux pratiques, et bien sûr... une bonne coopération entre vous, sauf lors de la validation de capacités.

## 3.1 Modalités de formation

Quelle que soit la modalité de formation que vous choisissiez, vous trouverez sur le serveur discord

- le lien vers le polycopié de cours,
- le lien vers le polycopié de brevets,
- un salon textuel pour chaque brevet
- pour chaque capacité, 3 salons vocaux pour vous retrouver si vous travaillez un brevet en dehors des séances d'enseignement, (attention, ces salons vocaux ne fonctionnent que si vous ne passez pas par les serveurs de l'université),
- pour chaque capacité, la liste des vidéos associées à chaque capacité. Merci lorsque vous visualisez une vidéo, de la "taguer" avec
  - un "pouce vers le haut", si la vidéo vous semble très utile,
  - un "???", si la vidéo vous semble informative sans plus,
  - un "pouce vers le bas", si la vidéo vous semble inutile.

En effet, faire cela permet à l'enseignant de faire le tri pour l'année prochaine en supprimant les liens vers les vidéos qui vous semblent inutiles en moyenne.

- Ayant

### 3.1.1 Formation par CRAIES

L'entrée en formation se fait à l'aide du polycopié de cours.

Les séances de CRAIES ("Coopérons à notre Rythme d'Apprentissage Individualisé Efficace et Sympathique") s'appuient sur :

- un polycopié de cours dans lequel chaque partie débute par des vidéos à visionner, suivi du contenu de l'enseignement et fini par des suggestions d'exercices à faire, appelé brevets,
- d'un graphe des étapes de formation (brevets) (Fig. 3.2).



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés *311 Présentation de l'école mutuelle couplée avec l'apprentissage à son rythme ; 069 Comment va-t-on utiliser les triaides ? ; 062 Est-ce que vous allez faire cours ? ; 073 Je n'ai pas fini de lire le polycopié. Est-ce grave ? ; 060 Doit-on connaître toutes les formules du poly ? ; 087 Comment fonctionnent les triaides ? ; 223 A quelle vitesse doit-*

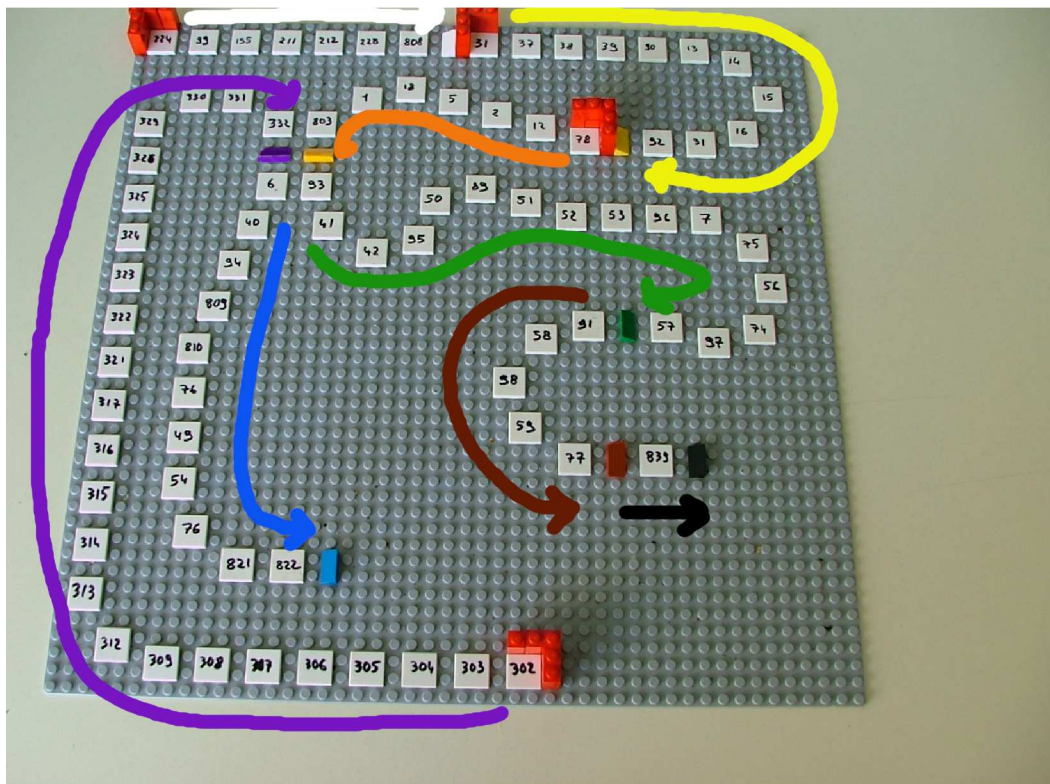


Figure 3.2: Parcours de formation : les numéros représentent les brevets, les tuiles inclinées les ceintures/capacités, les briques rouges les positions de départ des étudiants dans l'apprentissage : pour la capacité blanche, vous commencez au brevet 224 (en haut à gauche), la jaune au brevet 31 (en haut milieu), la violette au brevet 302 (en bas au centre), la orange au brevet 78 (en haut à droite).

*on avancer dans le polycopié, dans les exercices... ?*, 273 *Existe-t-il un polycopié pour les brevets ?* 317 *Il y a plusieurs vidéos qui ne nous concernent pas du tout et des pages auxquelles vous vous référez qui ne sont pas les mêmes que dans notre poly....*

## Les phases de travail

Les séquences d'enseignement théoriques en présentiel (CRAIEM) sont divisées en six parties :

1. Avant la séance, lit quelques pages du polycopié et visionne les vidéos indiquées dans ces quelques pages.
2. L'enseignant, aidé par des étudiants arrivés 5 mn avant la séance, prépare la salle pour le travail sur brevets : création de groupes de 4 chaises et tables spécifiques chacun à un brevet.
3. En entrant dans la salle, les étudiant indiquent avec une brique LEGO sur un plateau, à quelle page ils se sont arrêtés de lire, puis vont s'asseoir pour lire silencieusement le polycopié pendant 10 minutes.
4. Une phase de questions/réponses est alors faite : l'enseignant demande à chacun-e si elle ou il a une ou plusieurs questions et s'assure que ses réponses sont suffisamment explicites. Pendant cette phase, un-e étudiant-e prend le rôle de cameraman, un-e autre de secrétaire pour noter la question, un-e autre de producteur-trice en vérifiant que cette question n'a pas déjà été enregistrée et si c'est le cas, fait signe au cameraman et au secrétaire de couper, alors que l'enseignant continue de répondre.
5. Pendant cette phase de question-réponse, un étudiant fait circuler une feuille d'émargement : le nombre de signature doit correspondre au nombre de présent-e-s.
6. Parfois, un troisième temps peut être consacré au débat d'une durée maximale de 15 minutes. L'image du jour est affichée. Il vous est posé une question à laquelle vous répondrez en 3 temps : 2 minutes de réflexion personnelle, 4 minutes de confrontation d'idées par groupe de 4, mise en commun collective sous le format : "Nous pensons que ... et nos raisons sont les suivantes ...".
7. Une phase d'exercices (brevets) est alors faite, à votre rythme. La banque de brevets regroupe l'ensemble des exercices. Ils ont été écrits suite aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevets concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM et certaines formations à l'UFR. Avant de vous asseoir à la table correspondant au brevet que vous tentez de faire, récupérez une brique LEGO de la couleur de votre groupe. Afin que chacun puisse se concentrer sur son travail, si vous échangez avec vos voisins, merci de le faire en chuchotant. Pour cette phase vous pouvez avoir deux rôles : apprenant ou référent.
  - Si vous êtes référent d'un brevet, en entrant dans la salle, vous mettez autour du cou votre badge 3.3. Vous les aidez en respectant les règles d'aide notées au dos de votre badge. Attendez qu'ils appellent à l'aide pour intervenir : pendant ce temps continuez de travailler (seul) sur votre brevet. Si vous avez une difficulté pour expliquer, venez en parler à l'enseignant qui vous donnera un "coup de pouce". Vous rendez le badge à l'enseignant qui le remettra à votre disposition à la séance suivante.
  - Si vous êtes apprenant, vous serez aidé soit par un référent, soit par l'enseignant s'il n'y a pas encore de référent. Pour un brevet que vous avez bien compris, vous pouvez en devenir le référent : votre rôle est alors d'aider les autres à l'obtenir. Un système de badge, que vous mettez autour du cou lors des séances suivantes, permet aux étudiants de vous identifier et de venir chercher de l'aide. Vous notez votre mél sur le badge.
8. Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour poser votre brique LEGO sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau permet à l'enseignant, aidé d'étudiants, de préparer la salle pour la séance suivante et de vous accompagner plus particulièrement si vous êtes



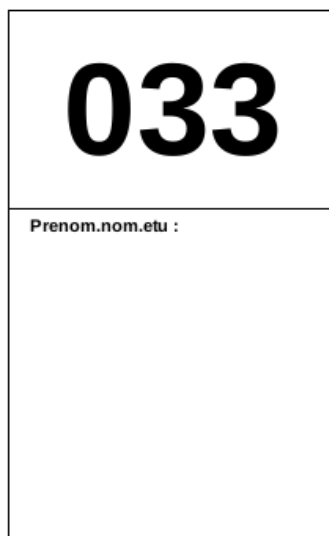


Figure 3.3: Exemple de badge de référent.

derrière le peloton ou à galoper devant. Avant de sortir, vous donnez votre avis sur votre estimation de l'efficacité de cette séance grâce à une urne. Cela permet de mesurer si le fonctionnement de la séance est adéquat.

### 3.1.2 Formation par Exercices

L'entrée en formation se fait à l'aide du polycopié de brevets. Il vous est nécessaire de disposer d'un smartphone et d'un casque audio.

Le graphe de l'enchaînement des brevets (Fig. 3.2), vous indique dans quel ordre il vous est demandé de les faire. Ce graphe est matérialisé par une plaque LEGO dans la salle.

- En entrant dans la salle, vous allez directement vous asseoir à la table relative au brevet que vous êtes en train de faire, pendant que les étudiant-e-s en formation CRAIES, lisent le polycopié silencieusement.
- Lors de la phase des questions-réponses, vous êtes invité-e à vous joindre au groupe.
- Vous continuez ensuite votre travail sur les brevets. En cas de difficulté, vous êtes invité à lire la partie du cours relative à ce brevet et à visionner les vidéos. Vous pouvez appeler de l'aide grâce au tetra'aide et aux référents de chaque brevet.
- Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour poser votre brique LEGO sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau permet à l'enseignant, aidé d'étudiants, de préparer la salle pour la séance suivante et de vous accompagner plus particulièrement si vous êtes derrière le peloton ou à galoper devant. Avant de sortir, vous donnez votre avis sur votre estimation de l'efficacité de cette séance grâce à une urne. Cela permet de mesurer si le fonctionnement de la séance est adéquat.

### 3.1.3 Formation par problèmes

L'entrée en formation se fait à l'aide de sujets d'examen des années précédentes. Il vous est nécessaire de disposer d'un smartphone et d'un casque audio.

- En entrant dans la salle, vous allez directement vous asseoir à la table relative au sujet d'examen que vous êtes en train de faire, pendant que les étudiant-e-s en formation CRAIES, lisent le polycopié silencieusement.
- Lors de la phase des questions-réponses, vous êtes invité-e à vous joindre au groupe.
- Vous continuez ensuite votre travail sur le sujet d'examen. En cas de difficulté, vous êtes invité à lire la partie du cours relative à cette question d'examen, à faire éventuellement quelques brevets concernant cette question et à visionner les vidéos afférentes. Vous pouvez appeler de l'aide grâce au tetra'aide et aux référents de chaque brevet.
- Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour poser votre brique LEGO sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau permet à l'enseignant, aidé d'étudiants, de préparer la salle pour la séance suivante et de vous accompagner plus particulièrement si vous êtes derrière le peloton ou à galoper devant. Avant de sortir, vous donnez votre avis sur votre estimation de l'efficacité de cette séance grâce à une urne. Cela permet de mesurer si le fonctionnement de la séance est adéquat.

### 3.1.4 Formation par projet

L'entrée en formation se fait à l'aide du sujet de projet de cette année. Ce travail se fait par groupe de 4 qui est fixe tout au long du projet. Il vous est nécessaire de disposer d'un smartphone et d'un casque audio.

- En entrant dans la salle, vous allez directement vous asseoir à la table relative à votre groupe projet, pendant que les étudiant-e-s en formation CRAIES, lisent le polycopié silencieusement. Pendant ces 10 minutes, vous faites le bilan de la dernière séance de votre groupe projet, choisissez les objectifs de cette séance, puis vous vous les répartissez.
- Lors de la phase des questions-réponses, vous êtes invité-e à vous joindre au groupe.
- Vous commencez alors votre travail sur le projet. Vous pouvez sortir de la salle si vous avez des travaux expérimentaux à faire (construction de la structure, tests mécaniques...). En cas de difficulté théorique, vous êtes invité à lire la partie du cours relative à cette difficulté, à faire éventuellement quelques brevets concernant cette difficulté et à visionner les vidéos afférentes. Vous pouvez appeler de l'aide grâce au tetra'aide et aux référents de chaque brevet.
- Avant de sortir, pour celui ou celle qui a fait un travail théorique cette séance-là, vous donnez votre avis sur votre estimation de l'efficacité de cette séance grâce à une urne. Cela permet de mesurer si le fonctionnement de la séance est adéquat.

## 3.2 Conseils aux référents

Si vous êtes "réfèrent", merci de veillez à respecter ces conseils. Si vous êtes "apprenant", merci de signaler au réfèrent qu'il ne respecte pas ces conseils : vous l'aidez à prendre la bonne posture afin que vous appreniez le plus efficacement possible.

Quelques conseils au réfèrent :

- Commence par demander "Tu en es où ? Qu'est ce que tu as déjà fait ? A quoi ça te fait penser ? Raconte ce que tu as compris du problème". Essaye de parler moins de 10% du temps. Cela permet de l'aider juste là où il en a besoin.
- Fais écrire l'étudiant plutôt que de le faire à sa place.

- Si tu dois faire l'exercice car l'étudiant n'écrit pas, essaye de le faire travailler sur un exercice jumeau : changer les fonctions, les conditions aux limites, les valeurs numériques... Par exemple en math, si l'étudiant doit dériver  $f(x) = 2x \cos(x)$ , lui faire dériver  $g(x) = 5x \sin(x)$ .
- Quand tu as expliqué quelque chose, demande à l'étudiant de réexpliquer ce que tu viens de faire.
- Se taire quand ils ont redémarré pour les laisser faire.

### 3.3 Modalités d'évaluation des capacités.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 602 Peut-on choisir entre examen et validation de compétences comme en 2015-2016 ?, 603 Recevrons-nous en une fois les 4 sujets de ca-

pacités si l'on souhaite les faire de façon anticipée ?, 607 Les modalités de contrôle ne peuvent pas être unique car dans chaque cours elles diffèrent. Comment le CA a-t-il pu voter cela ? ; 078 Comment concrètement passer une compétence anticipée ? ; 085 Qu'est-ce qu'un étudiant référent d'un brevet ?, 086 Le jet de dé est un système super-hasardeux... ; 272 Quelle est la cause de la mention "bof", pour la capacité "homogénéité des équations" ?, 290 Pour la formation à l'Ensim, si on échoue 3 fois à la compétence orange, et que l'on valide la compétence rouge, cela valide-t-il la compétence orange et donc on récupère les points de celle-ci ?, 288 Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?.

L'évaluation est faite par la validation de capacités. Le chaînage des capacités testées est indiqué figure 2.1. Un taux de réussite  $t(i)$  est associé à chaque capacité  $i$ .

La validation des capacités peut-être faite sous trois modalités :

- un examen individuel,
- des ceintures individuelles,
- une capacité en groupe.

Le choix de votre méthode d'évaluation se fait entre la fin de la première séance et le début de la seconde, par un questionnaire à remplir informatiquement. Cela reviendra à cocher l'une des cases non grisée de 3.1.

#### 3.3.1 Évaluation par examen individuel

Si vous optez pour une évaluation par un examen classique de 1h30, pour vous entraîner à manipuler les concepts, à prendre un peu de hauteur et vous approprier la démarche globale, des sujets de travaux dirigés, des sujets d'examens et leur corrigés sont disponibles sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>. L'examen comportera 4 questions, chacune testant une capacité (orange, bleue, verte, marron). En 4A Ensime, faire une erreur d'homogénéité (ou plusieurs) dans votre copie implique un malus de 4 points pour l'ensemble de l'examen, une erreur d'écriture incomplète (ou plusieurs), manque d'une base, d'un point, d'une unité, implique un malus de 2 points pour l'ensemble de l'examen.

#### 3.3.2 Évaluation par ceinture individuelle



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 318 : *Est ce que si notre jet de dé lors du passage d'une ceinture nous indique que l'on va devoir refaire immédiatement le sujet, on a accès à notre ordinateur pour utiliser wxmaxima notamment ?*, 319 : *Le jet de dé ne s'applique pas à distance où on vous rend les ceintures par mail dans tous les cas ?*.

Si vous optez pour une évaluation par ceintures, une capacité n'est pas acquise si l'une des conditions suivantes est fausse :

- vous avez détaillé la démarche,
- vous avez détaillé quelques résultats intermédiaires chiffrés (avec les unités précisées),
- vous trouvez le(s) résultat(s) (avec les unités précisées),
- toutes vos équations sont homogènes,
- les scalaires sont égaux à des scalaires,
- les vecteurs sont égaux à des vecteurs,
- les torseurs sont égaux à des torseurs,
- les tenseurs sont égaux à des tenseurs,
- votre copie de réponse à cette capacité utilise des écritures complètes, bases, points d'expression d'un torseur,
- vos résultats chiffrés sont suivis par des unités,
- si vos deux copies (rendu à la maison et surveillée) sont différentes.

Insistons : une capacité n'est pas acquise par la méthode ceintures, si la démarche est juste, mais le résultat faux (erreur de calcul lors de cette capacité, ou lors des capacités parentes). Le taux de réussite  $t(i)$  est donc soit 0% soit 100%. Vous pouvez tenter d'obtenir une ceinture lorsque vous vous sentez prêt-e à le faire. Vous ne pouvez tenter qu'une ceinture à la fois. Vous pouvez tenter une ceinture au maximum 3 fois. Si au bout de 3 tentatives, vous ne la détenez pas, vous pouvez tenter la ceinture  $n + 1$  suivante (3 fois). L'obtention de la ceinture de niveau  $n + 1$  vous attribue alors les ceintures de niveaux  $n + 1$  et  $n$ .

Le passage d'une ceinture se fait en deux phases :

- **phase continue** : Vous passez des ceintures en autonomie, à votre rythme, jusqu'au jour de l'examen. Pour ce faire,
  - vous envoyez un mél à [jmgenev@univ-lemans.fr](mailto:jmgenev@univ-lemans.fr) avec comme titre : "ensim, sdp, couleur-de-la-capacité",
  - l'enseignant vous envoie par mél le sujet,
  - Sur votre copie (fournie), à côté de la déclaration suivante : *"Je m'engage sur l'honneur à n'évoquer avec personne le contenu du sujet de passage de cette ceinture. Cependant, dans le cas où je ne réussirais pas à l'obtenir, j'ai compris pouvoir discuter de mon travail avec les étudiants ayant acquis cette ceinture. Si l'enseignant à la preuve que je n'ai pas respecté mon engagement (j'ai admis le non-respect, je suis incapable de refaire la ceinture en mode surveillé...), un rapport de fraude est fait par l'enseignant et transmis au directeur de l'école qui transmet à la commission de discipline de l'université.*

*L'enseignant y demandera que je ne puisse plus passer de ceintures en autonomie dans la matière concernée pour l'année universitaire en cours.*”, vous écrivez ”lu et approuvé” et vous signez. Cela permet à vos camarades de faire une mesure ”libre et non faussée” de leurs savoirs scientifiques et non de leur ”capacité de mémorisation”... ou de (risquée) recopie.

- vous composez de façon individuelle en dehors des séances d'enseignement,
- vous photographiez votre copie, sujet et brouillon, construisez un document pdf comportant les images dans cet ordre et le déposez sur la page umtice de rendu de ceintures.
- Lors de la séance suivante d'enseignement, l'enseignant jette un dé,
  - \* si vous ne possédez pas de jeton ”non dopé”, si le jet de dé correspond à un nombre anti-dopage qui dépend du niveau de la ceinture,
  - \* si vous possédez un jeton ”non dopé”, si le jet de dé est ”6”,alors vous recomposez immédiatement en mode surveillé en n'ayant à votre disposition que un photocopié vierge. Vous rendez votre nouvelle copie à l'enseignant.

- Si l'enseignant estime que votre erreur est minime, il peut vous proposer d'utiliser un ”joker”. Si vous l'utilisez, la ceinture est validée. Vous ne disposez que d'un joker par an.

- **phase terminale** : le jour de l'examen, vous êtes convoqué pour passer les ceintures restantes surveillées pendant une durée de 1h15, en même temps que les étudiants qui ont choisi une évaluation par examen. Les sujets vous sont fournis à l'entrée dans la salle. La validation se fait alors avec un taux de réussite de 0% à 100%. En cas d'absence, les procédures sont les mêmes que pour un examen. Si vous êtes détenteur de toutes les ceintures en autonomie, venez juste émarger.

- La date et l'heure de l'examen closent les rendus de ceintures.

Vos validations/échecs aux capacités vous seront transmises via

<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/comp>.

Au premier échec, la bulle deviendra rouge, au second orange, au troisième rouge. Si elle est réussie, elle deviendra verte.

En cas d'échec ou de réussite, le sujet suivant vous sera envoyé par mél.

Être détenteur d'une capacité, implique qu'en tant qu'expert de celle-ci, tout comme l'enseignant, vous aidiez vos camarades à l'obtenir. Votre dialogue doit porter sur un exemple similaire proposé par le demandeur d'aide. Il ne doit pas porter sur l'exemple qu'il a à résoudre. Vous l'orientez sur les brevets afférents, en répondant à leur questions sur ces brevets, en insistant sur des points qui vous ont éventuellement fait rater cette capacité dans des tentatives précédentes. Vous ne dévoilez pas le contenu du sujet de la capacité ni les réponses.


”C'est arrivé près de chez vous” : L'exemple d'étudiants qui ”travaillent à 3 pour résoudre un sujet de capacité, recopie chacun sur une feuille la réponse qu'ils ont élaborée collectivement, rendent le même jour à la même heure leur feuilles en espérant ne pas faire 6”, ne respectent pas les règles. En cas de détection par l'enseignant, le passage par ceintures est arrêté pour eux et dans le reste de leur scolarité, ils feront des examens dans les modules à venir.

### 3.3.3 Évaluation par rapport de projet en groupe, présentation de projet en groupe et vidéo d'anti-dopage individuel.

Cette méthode d'évaluation n'est accessible que pour les étudiantes et étudiants ayant choisi une formation par projet.

Les travaux effectués dans le cadre de l'apprentissage par projet sont évalués suivant 3 modalités :

- un rapport de projet collectif, dont le plan est : cahier des charges, démarche d'invention de la structure, capacité orange, capacité bleue, capacité verte, capacité marron, capacité noire, conclusion et perspectives,


**ENSIM**  
 École d'ingénieurs  
 Le Mans Université

À rédiger exclusivement en euros.

**Vingt-trois euros** -----  
 Payer contre ce chèque, non endossable, sauf au profit d'une banque ou de tout établissement admis à être endossable par la loi

à **Trésor Public** (pour remboursement des frais engagés)

Payable en France.  
**Ensim-banque**  
 Rue Aristote  
 72000 Le Mans  
 TEL. 0243833000

**1234567890**    À .....    Le .....  
 Nom : .....  
 Prénom : .....  
 Année : .....  
 Enseignement : .....

**23 euros**  
 signature

Figure 3.4: Chèque d'absence.

- une soutenance collective de projet avec présentation de la structure et chargement pour vérifier le correct dimensionnement et le respect du cahier des charges en terme de déplacement,
- un enregistrement vidéo de 5 minutes individuel synchrone où chaque étudiant répond à une question reçue par courriel.

### 3.4 Absence



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés *256 Je m'étonne que vous osiez demander de l'argent à un étudiant, par un chèque de 23 euros !*.

Le conseil d'administration a voté l'obligation d'être présent en cours. Il nous semble plus pertinent que l'obtention des capacités de base soit obligatoire pour justifier les 14 000 euros par an que la nation verse pour vous former grâce aux impôts. Ne pas venir à une séance de 1h1/4, représente donc un gaspillage de 23 euros... sauf si vous travaillez à la maison et que vous atteignez les capacités de base.

Pour concrétiser ceci auprès des étudiants non alternants, la méthode suivante est utilisée :

- en début de séance, une feuille d'émargement circule : le nombre de signatures doit correspondre au nombre de présents,
- l'enseignant détecte les étudiants qui réapparaissent après une ou des absences et leur demande de compléter un chèque de 23 euros de ensim-banque par absence (Fig. 3.4),
- le jour du jury, les capacités acquises par chaque étudiant sont figées,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il a les capacités de base, l'enseignant déchire les chèques,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il n'a pas les capacités de base, l'enseignant lui rend les chèques et l'invite à faire un vrai chèque de remboursement du montant total au Trésor Public (ou à une association de son choix : ingénieur sans frontière par exemple...).

# Bibliography

- [1] Batoz,JL Dhatt,G *Modélisation des structures par éléments finis : volume 3: coques* Hermès, Paris, 1992
- [2] Chevalier,L *Mécanique des milieux continus déformables*, Ellipse, 2004
- [3] Dumontet *Exercices de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1994
- [4] JM Gènevaux, fichiers disponible sur le réseau sous *distrib doc etu / 2a modelisation / model jmg*
- [5] JM Gènevaux, fichiers disponible sur le réseau sous *distrib doc etu / 1a tdp / cinématiques*
- [6] Lemaitre,J Chaboche,JL *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, (cote 620.1 LEM à la BU)
- [7] Germain,P Muller,P *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1980
- [8] AFNOR, *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, AFNOR, Paris, 1996
- [9] Gènevaux,JM *A propos des tenseurs*, cours Ensim 1A, 2005
- [10] Zucchini,A Lourenco,PB *A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry*, International Journal of Solids and Structures, **39**, Issue 12, June 2002, Pages 3233-3255.
- [11] Albigès Résistance des matériaux
- [12] Courbon
- [13] Feodosiev
- [14] Laroze Résistance des matériaux et structures (tome 2) éd. : Masson-Eyrolle
- [15] Timoshenko
- [16] Techniques de l'ingénieur, B5 I, 600,601, 5020, 5040 (concentrations de contraintes)
- [17] Chevalier Mécanique des systèmes et des milieux déformables, ellipse, paris, 2004.
- [18] Dumontet, Duvaut, Léné, Muller, Turbé, Exercices de mécanique des milieux continus, Masson, Paris 1994
- [19] Salencon,
- [20] Salencon, Mécanique des milieux continus, tome 2, Thermoélasticité, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001
- [21] Salencon, Mécanique des milieux continus, tome 3, Milieux curvilignes, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001
- [22] Axisa,F *Modélisation des systèmes mécaniques : systèmes continus* Hermès, Paris, 2001
- [23] Batoz,JL Dhatt,G *Modélisation des structures par éléments finis : volume 2 : poutres et plaques* Hermès, Paris, 1990
- [24] Chevalier,L *Mécanique des systèmes et des milieux déformables* Ellipses, Paris, 1996

Formation à la compétence blanche de physique pour l'ingénieur.



## Chapter 4

# Rappels de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs

Le polycopié d'enseignement de *Physique pour l'ingénieur* de Samuel Gougeon est disponible via le lien :

[http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique\\_TC/1\\_Dimensions\\_unites\\_nombres.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique_TC/1_Dimensions_unites_nombres.pdf)

Vous pouvez aussi vous former à l'aide des sections suivantes rédigées par JM Génévaux.

### 4.1 Objectifs

- Homogénéité d'une relation
- Équation aux dimensions
- Unités adimensionnelles.  
Unités angulaires : radian = unité physique. minutes et secondes d'arc.
- Unités logarithmiques relatives ou absolues, dimensionnées ou adimensionnées : dB, dBm, dBm - dBm = dB, dB/km, pH, octave, magnitude et niveau (visuelle, sismique), etc ...
- Ordres de grandeurs, échelles : de taille ; de masse ; de temps ; de puissance acoustique ; de puissance lumineuse ; débit d'informations...
- Conversions des principales unités entre système métrique et système impérial

### 4.2 Homogénéité, adimensionalisation



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés *270 Pourquoi 1340 a trois chiffres significatifs alors que 13,40 en a quatre ?*.

Les grandeurs de part et d'autre d'une équation sont généralement de natures différentes. Par exemple, le principe fondamental de la dynamique en terme de résultante

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}_{G,S/R_0}, \quad (4.1)$$

exprime une relation entre un effort  $F$ , une masse  $m$  et l'accélération du centre de gravité d'un solide  $\Gamma$  (voir cours de "Mécanique Générale"). Cette écriture est intrinsèque : elle ne dépend pas du repère dans lequel les grandeurs sont exprimées (repère cartésien, cylindrique, sphérique, curviligne...). Vous devez vérifier pour chaque loi, que l'équation est homogène : que les dimensions sont les mêmes de part et d'autre d'un signe égalité. Dans l'exemple précédent, l'équation est homogène à une masse fois une longueur divisée par un temps au carré :

$$MLT^{-2}. \quad (4.2)$$

Les équations sont donc indépendantes de l'unité prise pour chaque grandeur (pour la longueur  $L$  : le mètre, le centimètre, le pouce...). Il suffit de choisir les mêmes unités de part et d'autre de l'équation. Lorsque vous sumez deux termes, ils doivent aussi être homogènes. Ajouter une carotte et un chou ne fera pas deux quelque chose, mais juste un début de pot-au-feu. Essayez d'additionner des km/h et des kg pour vous en convaincre. La norme internationale ISO 1000 (ICS 01 060) décrit les unités du Système International et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités. Le Système International compte sept unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela, censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes.

Lorsqu'une grandeur est définie par une dérivée, une dérivée partielle ou une intégrale, l'équation aux dimensions est construite comme si les dérivées correspondaient à une division et l'intégrale à une multiplication. Par exemple,

- si  $f(s) = \frac{dg(s)}{ds}$  avec  $g(s)$  en m et  $s$  en kg, alors  $f(s)$  s'exprime en m/kg,
- si  $k(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt$  avec  $g(t)$  en V et  $t$  en s, alors  $k(t_1)$  s'exprime en V.s.

### 4.3 Adimensionalisation

Des grandeurs sont sans dimension. Vous n'ignorez pas que le périmètre d'un cercle de rayon  $r$  est  $p = 2\pi r$ . Si on ne décrit qu'une partie du cercle une relation similaire lie la longueur de l'arc de cercle  $c$  au rayon :  $c = \alpha r$ . L'angle est donc  $\alpha = c/r$  un rapport de deux longueurs : l'angle, exprimé en radian est sans dimension. De même, l'écoulement d'un fluide visqueux dépend du rapport entre les effets dynamiques et les effets visqueux. Lorsque l'on souhaite faire une maquette à échelle réduite, il faut conserver ce rapport entre les différentes forces : on conservera le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}$ , avec  $d$  une dimension caractéristique de l'écoulement,  $v$  une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\rho$  la masse volumique et  $\eta$  la viscosité dynamique. L'adimensionalisation des équations est très utilisée en mécanique des fluides, hélas beaucoup moins en mécanique des solides. Ceci n'est en fait dû qu'à des habitudes différentes au sein des deux communautés. Adimensionaliser les équations a l'avantage de faire apparaître les groupements adimensionnels de paramètres qui régissent le comportement, mais présente l'inconvénient, en cas d'erreur de calcul par une omission d'un terme adimensionnel, de laisser l'équation homogène (ce ne sont que des multiplications/additions/divisions de nombres sans dimension), et donc enlève un moyen de vérifier le résultat final.

### 4.4 Unités logarithmiques relatives ou absolues

Des capteurs, comme nos oreilles par exemple, ne sont pas sensibles de façon linéaire au signal reçu, pour nos oreilles, au bruit. Il est donc intéressant de ne pas mesurer le niveau acoustique sur une échelle linéaire, mais logarithmique. De plus, prendre en compte le seuil d'audibilité pour définir l'échelle logarithmique amène à considérer un niveau de référence de pression de  $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

On construit alors  $L_p = 10 \log \left( \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log \left( \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right)$  dont l'unité est alors le décibel noté dB,

avec  $p_{eff}$  la pression efficace en Pa. Le choix d'une échelle logarithmique dans la représentation graphique d'une relation entre deux grandeurs  $a$  et  $b$  peut être justifiée par :

- des répartitions des valeurs de  $a$  ou  $b$  de façon géométrique
- pour déterminer des coefficients lorsque la fonction liant  $a$  et  $b$  est non linéaire.

Prenons par exemple une relation théorique du type  $b = a^{0.34}$ . Si l'on cherche à vérifier expérimentalement l'exposant de cette relation, il est plus judicieux de tracer  $\log b$  en fonction de  $\log a$  : la fonction théorique ( $\log b = 0.34 \log a$ ) est une droite passant par l'origine, les points expérimentaux permettent de leur côté de déterminer la pente expérimentale (avec son incertitude) qui donne la valeur expérimentale du coefficient (avec son incertitude).

## 4.5 Ordres de grandeurs

Il ne suffit pas que votre mesure soit donnée dans des unités cohérentes, par exemple si votre capteur mesure la vitesse du cycliste en descente par la rupture de deux faisceaux lasers distants de 1 cm dans un intervalle de temps de  $12.3 \cdot 10^{-2}$  s, encore faut-il que la valeur soit réaliste. Dans le cas de votre cycliste, il roule à 0.29 km/h ! On compte sur votre expérience.

## 4.6 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 224, 99, 155, 211, 212, 228, 808, 234 et 235.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>.

## 4.7 Brevets de vérification de connaissance (facultatifs)

Pour vérifier que vous savez réinvestir cette connaissance sur un autre cas, je vous invite à obtenir les brevets 211, 213, 224 et 099. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>.

Formation à la compétence jaune de mécanique du solide.

## Chapter 5

# Rappel de mécanique du solide : liaisons - chargement - isostaticité - hyperstaticité

Ce chapitre concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 5.1.

### 5.1 Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *091 Que signifie le fait que la puissance développée est nulle pour une liaison parfaite ?*.

Dans ce cours, la résultante du torseur des efforts transmissibles sera notée  $\vec{R}$ , le moment sera noté  $\vec{M}$ . La liaison étant considérée parfaite, la puissance développée dans cette liaison doit être nulle quels que soient les déplacements et rotations éventuels possibles. Ceci implique que le travail d'une liaison soit nul. Il est calculé par le *comoment* des deux vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = 0, \quad (5.1)$$

qui se développe en

$$\check{\omega} \cdot \vec{M}_A + \vec{u}_A \cdot \vec{R} = 0. \quad (5.2)$$

Ci-dessous, sont donnés les torseurs d'efforts transmissibles. On peut les retrouver à partir des formules ci-dessus, en écrivant pour la liaison choisie le torseur cinématique associé (mouvements de translation et de rotation autorisés par la liaison), puis choisir un torseur d'inter-effort qui a a priori toutes les composantes en résultante et en moment, et écrire que le comoment est nul quelle que soit l'amplitude des mouvements possibles.

Les liaisons associées à un problème tridimensionnel sont normalisées. La symbolique est donc la même que celle que vous utilisez pendant la formation de Technologie-Mécanique. Utilisez les dessins associés !

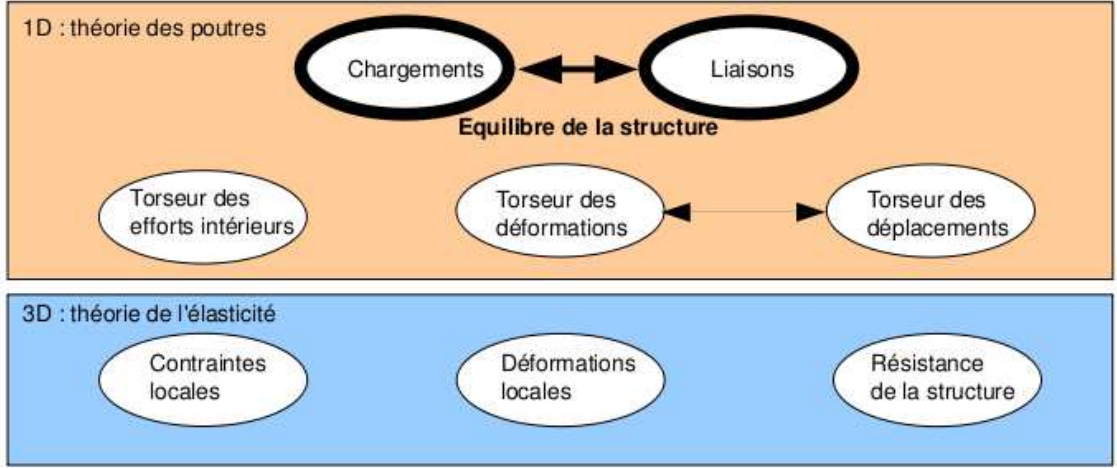


Figure 5.1: Les concepts utiles à la détermination du degré d'hyperstatisme et des réactions aux liaisons.

- liaison tridimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle hélicoïdale d'axe  $A\vec{i}$  de pas  $p$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} -\frac{2\pi C_i}{p} \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot glissant d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique à doigt d'axe  $A\vec{i}$  et  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique en A :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle appui plan de normale  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} \\ C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire rectiligne de normale  $A\vec{j}$  de direction  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j \vec{j} \\ C_k \check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire annulaire d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle ponctuelle d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i \vec{i} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$ .

Les liaisons associées à un problème bidimensionnel ne sont pas normalisées. Faites attention à la signification de chaque symbole en fonction de l'ouvrage. Pour notre part, la symbolique présentée dans la figure 5.2 sera utilisée. Pour un problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  :



Figure 5.2: La symbolique des liaisons 2d utilisée dans ce cours (non normalisée) de gauche à droite : encastrement 2d, appui simple 2d, appui sur rouleau 2d, glissière 2d

- liaison bidimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} \\ C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui simple :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui sur rouleaux de normale  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j \vec{j} \\ C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ .

• **Erreur classique** : Il ne faut pas, lorsque le problème est bidimensionnel, utiliser les liaisons tridimensionnelles (et inversement).

• **Erreur classique** : Lorsque 2 poutres (ou plus) de directions différentes se raccordent en un point B, il ne faut pas rajouter une liaison encastrement entre ce point B et le référentiel Galiléen : le point B peut se déplacer, tourner... et toutes les poutres aboutissant à ce point B se déplacent et tournent au point B de la même valeur.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 031, 037 et 038. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

## 5.2 Torseurs de chargement



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 003 *Qu'est-ce qu'un tenseur ?*, 316 *Peut-on avoir un cours sur les tenseurs ?*, 237 *Quelle conséquence a*

*le choix d'une inconnue hyperstatique ?*, 238 *Qu'est-ce que le principe des travaux virtuels ?*, 218 *Lorsque l'on choisit une inconnue hyperstatique, on la considère connue... mais alors, comment peut-on la déterminer ?*, 220 *Comment identifie-t-on une force dans une certaine direction, lorsque l'on choisit une inconnue hyperstatique ?*, 221 *Les torseurs sont écrits en certains points. A quel moment doit-on effectuer le changement de point et comment le choisir ?*, 267 *le calcul du "nombre d'inconnus - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme" est faux, pourquoi? Un exemple?*, 271 *Comment déterminer les inconnues hyperstatiques ?*.

Dans ce cours, la résultante sera notée  $\vec{F}$ , le moment sera noté  $\check{C}$ . Les différents torseurs de chargements sont :

- force concentrée au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \check{0} \end{array} \right\}_A, \quad (5.3)$$

- couple concentré au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \check{C} \end{array} \right\}_A, \quad (5.4)$$

- densité linéique de force  $p\vec{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point P

$$\{d\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} p\vec{ds} \\ \check{0} \end{array} \right\}_P, \quad (5.5)$$

- densité linéique de couple  $c\check{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point P

$$\{d\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ c\check{ds} \end{array} \right\}_P, \quad (5.6)$$

- torseur équivalent exprimé au point C, d'un chargement linéique sur un segment AB :

$$\{\tau_5\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds + \vec{p}ds \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B \vec{p}ds \\ \int_A^B (\check{c} + \vec{p} \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C. \quad (5.7)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *222 Comment trouve-t-on les termes non nuls des liaisons d'inter-effort ?*, *250 Un torseur a une résultante et un moment... comment les utiliser ?*, *251 C'est quoi un pseudo-vecteur ?*, *252 Comment calculer la somme de charges réparties ?*.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 039 et 090. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 5.3 isostaticité - hyperstaticité

Avant de rechercher les efforts intérieurs à une poutre, il est parfois nécessaire de calculer les réactions qui transitent par les liaisons qui maintiennent cette poutre en contact avec les autres solides voisins.

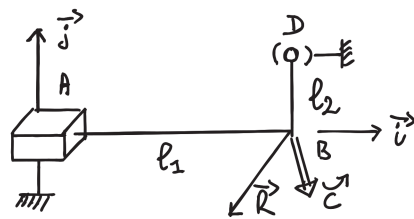


**démarche** La procédure suivante est à suivre

1. Isolement du solide. Pour ce faire :
  - vous définissez le solide ou l'ensemble de solides que vous souhaitez isoler (pour nous ce sera la poutre considérée),
  - par la pensée, vous entourez ce domaine isolé par une fine peau,
  - à chaque endroit où cette fine peau intersecte une liaison, ou un chargement, un torseur doit être écrit
2. Bilan des actions. En chaque point où doit être écrit un torseur, vous écrivez : le point, le type de liaison (éventuellement précisez de quel axe), le torseur (d'effort transmissible ou de chargement). Vous rajoutez à cette liste les torseurs de chargement à distance (pesanteur, forces électromagnétiques, ...)
3. Principe fondamental de la statique. Si le domaine isolé est en équilibre, la somme de ces torseurs est nulle. En présence d'un chargement linéique ou surfacique, l'écriture de l'équilibre doit faire apparaître l'intégration de ce torseur sur le domaine d'intégration (intégrale simple ou double).
4. Écriture du système d'équations. Dans le cas d'un problème tridimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 6 équations (trois de résultante, trois de moment). Dans le cas d'un problème bidimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 3 équations (deux de résultante, une de moment autour d'un axe perpendiculaire au plan du problème).
5. Détermination du nombre d'inconnues hyperstatiques. Attention, **le calcul (nombre d'inconnues - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme) est faux !** En effet, tout dépend comment les inconnues sont positionnées dans les équations. La méthode est la suivante :
  - Vous entourez en rouge les chargements. Ce sont les données du problème.
  - Parmi les réactions aux liaisons (les inconnues), vous entourez en bleu celles qui peuvent être déterminée en fonction des chargements.
  - Si toutes les inconnues sont déterminées : le système est dit isostatique.
  - Si toutes les inconnues ne peuvent pas être déterminées (deux inconnues sur une même équation, et qui n'apparaissent pas ailleurs par exemple), le système est hyperstatique vis-à-vis de ce degré de liberté. Vous choisissez l'une de ces inconnues que nous appellerons *inconnue hyperstatique*, vous l'encadrez en vert, et vous la supposez connue (au même titre que les chargements en rouge) pour recherchez toutes les inconnues qui peuvent de ce fait être maintenant déterminées (vous les entourez en bleu). Vous pouvez être amené à choisir plusieurs inconnues hyperstatiques.
  - **Le degré d'hyperstatisme est le nombre minimal d'inconnues (entourées en vert) qui ont dues être choisies comme hyperstatiques.**
6. Vous écrivez l'expression de chaque inconnue déterminée (en bleu), en fonction du chargement (en rouge) et des inconnues hyperstatiques (en vert). Dans la suite du problème, chaque fois qu'une inconnue bleu apparaît, elle sera remplacée par son expression rouge et verte.

**Exemples** L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système tridimensionnel est présenté figure 5.3.

L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système bidimensionnel est présenté figure 5.4. On remarquera que l'équilibre est écrit au point  $D$ , mais qu'il aurait pu être écrit en un autre point, les équations qui auraient alors été obtenues seraient une combinaison linéaire des équations présentées dans l'exemple. L'inconnue hyperstatique choisie est l'inconnue  $R_2$ . Il aurait été possible de choisir  $R_3$  ou  $C_2$ . Quelque soit ce choix, le nombre d'inconnues hyperstatique reste de 1.



- Données
- déterminable
- ( ) déterminée
- inconnue hyperstatique

### Bilan des actions

+ liaison glissière 3D d'axe  $A\vec{i}$   $\left\{ \mathcal{L}_1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_1 \vec{j} + R_2 \vec{k} \\ C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k} \end{matrix} \right\}_A$

+ chargement en B  
(données du pb)  $\left\{ \mathcal{L}_2 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{C} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \\ C_4 \vec{i} + C_5 \vec{j} + C_6 \vec{k} \end{matrix} \right\}_B$

+ liaison sphérique en D  $\left\{ \mathcal{L}_3 \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} + R_5 \vec{k} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_D$

### Equilibre

La somme des torseurs doit être nulle

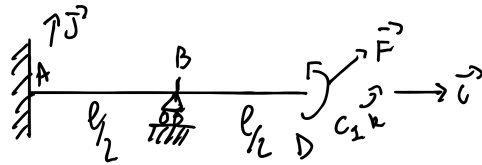
$$\sum \left\{ \mathcal{L} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 \vec{j} + R_2 \vec{k} \\ C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k} \end{matrix} + (R_1 \vec{j} + R_2 \vec{k}) \wedge \vec{AB} \right\}_B + \left\{ \begin{matrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \\ C_4 \vec{i} + C_5 \vec{j} + C_6 \vec{k} \end{matrix} \right\}_B + \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} + R_5 \vec{k} \\ (R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} + R_5 \vec{k}) \wedge \vec{DB} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ 0 \right\} \quad \text{avec } \vec{AB} = l_1 \vec{i}, \vec{DB} = -l_2 \vec{j}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \boxed{R_3} = -F_1 \\ \boxed{R_1} + \boxed{R_4} = -F_2 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_5} = -F_3 \end{matrix} \right. \quad \left\{ \begin{matrix} \boxed{C_1} + l_2 \boxed{R_5} = -C_4 \\ \boxed{C_2} + \boxed{R_3} l_1 = -C_5 \\ \boxed{C_3} - l_1 \boxed{R_1} - l_2 \boxed{R_3} = -C_6 \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} \text{hyperstatique} \\ \Rightarrow \text{de degré} \\ 2 \end{matrix}$$

hyperstatique en translation dans la direction  $\vec{j}$  et dans la direction  $\vec{k}$

Figure 5.3: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 3D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)



problème plan

Bilan des actions

+ chargement (donné)  $\{ \mathcal{C}_1 \} = \begin{Bmatrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_D$

+ liaison encastrement 2D  $\{ \mathcal{C}_2 \} = \begin{Bmatrix} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} \end{Bmatrix}_A$

+ liaison appui sur rouleur  $\{ \mathcal{C}_3 \} = \begin{Bmatrix} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{Bmatrix}_B$

Equilibre

$$\sum \{ \mathcal{C} \} = \{ 0 \}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} + (R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j}) \wedge \overrightarrow{AD} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} + R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{BD} \end{Bmatrix}_D = \{ 0 \}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ (c_2 - R_2 l) \vec{k} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_3 \vec{j} \\ -R_3 \frac{l}{2} \vec{k} \end{Bmatrix}_D = \{ 0 \}$$

D'où les équations :

$$\begin{cases} \boxed{R_1} = -F_1 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_3} = -F_2 \\ \boxed{c_2} - \boxed{R_2} l - \boxed{R_3} \frac{l}{2} = -c_1 \end{cases}$$

- données

○ déterminable

⋮ déterminée

□ inconnue hyperstatique

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

en translation dans la direction  $\vec{j}$

Figure 5.4: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 2D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)

**Système isostatique associé** On appelle système isostatique associé, le système identique géométriquement, mais dont les liaisons aux points où des inconnues hyperstatiques ont été choisies, doivent être modifiées :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la translation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison glissière d'axe  $\vec{i}$ . Si le problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , une liaison appuis simple sera remplacée par une liaison appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la rotation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison pivot d'axe  $\vec{i}$ .

Ce système isostatique associé est considéré comme chargé par

1. le même chargement extérieur que le système initial,
2. auquel on ajoute les inconnues hyperstatiques, qui sont alors considérées comme un chargement connu.

**Équation associée à une inconnue hyperstatique** Le problème isostatique associé peut donc être résolu complètement en fonction des données de chargement et des inconnues hyperstatiques. Appelons cette solution *solution 1*.

Pour retrouver le problème initial, l'inconnue hyperstatique assurait que le déplacement associé à celle-ci était nul. Il faut donc rajouter une équation cinématique par inconnue hyperstatique :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force  $R\vec{i}$  au point  $B$ , le déplacement dans cette direction en ce point doit être nul :  $\vec{u}_B \cdot \vec{i} = 0$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple  $C\vec{i}$  au point  $B$ , la rotation dans cette direction en ce point doit être nulle :  $\vec{\omega}_B \cdot \vec{i} = 0$ .

Ces équations supplémentaires, fournissent des relations entre les inconnues hyperstatiques et les chargements. Elle permettent donc de déterminer les inconnues hyperstatiques en fonction du chargement.

La solution complète du problème qui vérifie les conditions aux limites du problème de départ, exprimée en fonction uniquement du chargement du problème de départ, est alors connue en remplaçant les inconnues hyperstatiques par leur expressions en fonction du chargement dans la solution 1.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 013, 014, 015, 016, 091 et 092. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

## Chapter 6

# Cours de théorie des poutres

# Bibliography

- [1] M. Guez, *La communication non violente*, stage 1
- [2] J.M. Gènevaux, *Introduction aux tenseurs*, cours de l'Ensim niveau L3, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [3] Albigès Résistance des matériaux
- [4] Courbon
- [5] Feodossiev
- [6] Laroze Résistance des matériaux et structures (tome 2) éd. : Masson-Eyrolle
- [7] Germain Introduction à la mécanique des milieux continus éd. : Masson
- [8] Timoshenko
- [9] Techniques de l'ingénieur, B5 I, 600,601, 5020, 5040 (concentrations de contraintes)
- [10] JM Gènevaux, *Base de l'acoustique*, cours de Licence Professionnelle Vibration Acoustique, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [11] JM Gènevaux, *Modélisation*, cours de 4ième année de L'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [12] S Durand, *Mécanique des solides déformables*, cours de 4ième année de L'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans
- [13] J.M. Gènevaux A. Pelat, *Une pédagogie participative en école d'ingénieur (alias Freinet 5CH)*, formation pédagogique de l'Université du Maine, mars 2014, <https://cel.archives-ouvertes.fr/???>

Formation à la compétence orange de statique des poutres.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser une présentation de cette compétence. Le fichier est nommé *208 Compétence orange de statique des poutres : détermination du torseur des efforts intérieurs..*

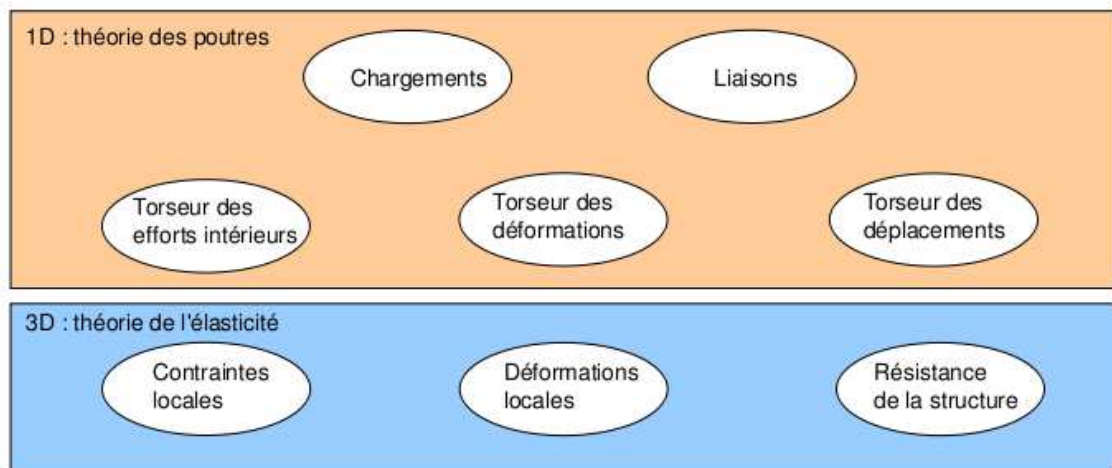


Figure 6.1: Les différents concepts nécessaires à la théorie des poutres.

## 6.1 Les Outils

### 6.1.1 De l'élasticité à la théorie des poutres



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 002 Pourquoi parle-t-on de pseudo-vecteur, pour l'un des termes du torseur ?, 241 Qu'est-ce que le moment d'une force ?, 242 Dans les premières pages, comment trouve-t-on les références bib-

liographiques ?, 015 Que représentent dans la table 3.1, les équations de compatibilité ?, 017 Que représentent dans la table 3.2, les formules de Bresse ne sont pas détaillées. Est-ce normal ?, 018 Que représente le module de Coulomb noté "G" ?, 019 Les couples sont représentés par des pseudo-vecteurs car ils n'obéissent pas aux mêmes règles en cas de plan de symétrie. La figure est peu claire pour le comprendre., 054 Qu'est-ce que la fibre moyenne d'une poutre ?, 253 Que signifient les 2 barres au dessus du terme epsilon ?, 254 Pour la déformation d'un solide, vous avez parlé de cisaillement, mais pas de torsion et de rotation. Pourquoi ?, 258 Comment différenciez-vous un tenseur et une matrice ?, 259 A quoi sert le tableau 4.1 p.28 ? Comment s'en sert-on ?.

Le synopsis de la démarche associée à la théorie des poutres est présenté figure 6.1.

Nous travaillons ici dans un repère local à un point. Nous noterons les vecteurs de ce repère local  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Elle peut être envisagée lorsque le corps solide déformable possède une dimension bien plus grande que les deux autres. Un solide de ce type sera appelé *poutre*. Si l'on fait une section dans le plan des petites dimensions, le barycentre de cette section sera noté  $H$ . Si vous lisez d'autres livres de théorie des poutres, ce point est généralement appelé  $G$ . Pour éviter que vous ne le confondiez avec le centre de gravité de la poutre complète (erreur devenue classique ces dernières années, mais extrêmement énervante pour l'enseignant), nous choisirons de l'appeler par la lettre  $H$ . L'ensemble des barycentres de la poutre définit la *ligne moyenne*. Si la section est perpendiculaire à la ligne moyenne, elle sera appelée *section droite*. La position sur cette ligne moyenne est repérée par une abscisse  $s$ . Cette ligne moyenne peut être continue, discontinue, être continuellement dérivable par rapport à la variable  $s$  ou non.



La théorie des poutres fournit des solutions en déplacement et contraintes qui ne sont pas nécessairement valables en tout point. Mais loin des points d'application des chargements, des liaisons (blocages cinématiques) et des variations brusques de section, elle est tout à fait suffisante. Ces conditions sont présentes en de nombreux points de ce type de structures.

Nous rappelons les grandeurs et relations utiles en élasticité tridimensionnelle : (voir tableau 6.1)

Le même jeu de relations est présent dans le cas de la théorie des poutres, seules les grandeurs utilisées sont décrites à l'aide d'objets que l'on appelle tenseur. Ce sont les mêmes êtres mathématiques que ceux que vous avez utilisés en mécanique des solides indéformables pour décrire leur mouvement. Ils seront ici simplement associés aux déplacement et rotation d'une section droite, aux déformations d'une section droite et aux efforts généralisés (résultante et moment) sur cette section.

### Analyse à l'échelle locale 3D

Nous ne rappellerons que quelques définitions de l'élasticité linéaire isotrope.

- Les différentes possibilités de déformations d'un volume élémentaire ( $dx dy dz$ ). On définit les 3 déformations d'allongement (ou de contraction)  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ , ainsi que les 6 déformations de cisaillement  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yz}$ ,  $\epsilon_{zx}$ ,  $\epsilon_{yx}$ ,  $\epsilon_{zy}$ ,  $\epsilon_{xz}$ .
- Tenseur des déformations. Ces 9 composantes peuvent être ordonnées dans une matrice associée au tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$ . Ce tenseur est symétrique de part sa construction. Il y a donc 6 composantes indépendantes.
- Tenseur des contraintes. Il est associé aux contraintes agissant sur chaque facette d'un parallélépipède. La facette de normale  $\vec{x}$  subit les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{zx}$ . Nous appellerons  $E$  le module de Young du matériau (en Pa). Nous appellerons  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (sans unité). Nous appellerons  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de Coulomb du matériau (en Pa). La loi de comportement permettant de passer du tenseur des déformations au tenseur des contraintes est,

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d, \quad (6.1)$$

ou

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\epsilon} + \lambda\text{trace}(\bar{\epsilon})\bar{I}_d, \quad (6.2)$$

avec les deux coefficients de Lamé donnés par,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (6.3)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (6.4)$$

On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des termes sur la diagonale de celle-ci.

Tableau 1 : Caractéristiques de plusieurs matériaux.

matériau	Mod. de Young 10 <sup>9</sup> Pa	Coeff. de Poisson	lim. élas. trac. 10 <sup>6</sup> Pa	<u>lim. élast. compr.</u> lim. élas. traction	masse vol. kg/m <sup>3</sup>
acier	210	0.285	200 à 600	1	7800
aluminium AU4G	75	0.33	300	1	2800
béton	14 à 21	0.3	300	11	1900
bronze	100	0.31	24	30	8400
cuivre	100	0.33	18	13	8900
fonte	100	0.29	18 à 25	33	7100
laiton	92	0.33	20	14	7300
marbre	25	0.3	50	150	2800
plexiglas	2.9	0.4	8	12	1800
titane	100	0.34	20 à 47d	10	4510
verre	60	0.2 à 0.3	3 à 8	100	2530

	déplacements	déformations	contraintes
	$\vec{u}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\sigma}$
condition aux limites en déplacement	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur $\Gamma_u$		
passage déplacements  déformations	+ éq. compatibilité $\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{kj,il} =$ $\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{lj,ik}$ pour $i \neq j$ et $l \neq k$	$\bar{\epsilon} = 1/2 \left( \text{grad } \vec{u} + {}^T \text{grad } \vec{u} \right)$	+ éq. compatibilité (Beltrami) $(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2(\text{trace}\bar{\sigma})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $\text{grad} f = 0$
loi de comportement		$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{trace}(\bar{\sigma})\bar{I}_d$	$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\epsilon} + \lambda\text{trace}(\bar{\epsilon})\bar{I}_d$
équations d'équilibre (statique)	éq. de Navier: $(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div}\vec{u})$ $+ \mu\text{div}(\text{grad}\vec{u}) + \rho\vec{u} = 0$		$\text{div}\bar{\sigma} + \rho\vec{f} = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$
condition aux limites en contraintes			$\vec{T}(P, \vec{n}) = \bar{\sigma}\vec{n} = \vec{F}_d$ sur $\Gamma_f$
passage contrainte torseur			$N = \int_S \sigma_{xx} dS$ $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$ $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ $M_x = \int_S \sigma_{\theta x} r dS$ $M_{fy} = \int_S \sigma_{xx} z dS$ $M_{fz} = - \int_S \sigma_{xx} y dS$

Table 6.1: Équations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle

	torseur des déplacements	torseur des déformations	torseur des efforts intérieurs
	$\{U\} = \left\{ \begin{matrix} \check{\omega} \\ \check{u} \end{matrix} \right\}_H$	$\{Def\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \epsilon_x \check{x} + \gamma_y \check{y} + \gamma_z \check{z} \end{matrix} \right\}_H$	$\{\tau_{int}\} = \left\{ \begin{matrix} N\check{x} + T_y\check{y} + T_z\check{z} \\ M_x\check{x} + M_{fy}\check{y} + M_{fz}\check{z} \end{matrix} \right\}_H$
condition aux limites en déplacement	$\{U\} = \{U\}_d$ au point $P_d$		
passage déplacements déformations	formules de Bresse (fonction de $\epsilon_x, \gamma_y, \dots$ )		
loi de comportement	formules de Bresse (fonction de $N, T_y, \dots$ )	$\alpha_x = M_x/GI_0^c$ $\alpha_y = M_{fy}/EI_{Hy}$ $\alpha_z = M_{fz}/EI_{Hz}$ $\epsilon_x = N/ES$ $\gamma_y = T_y/GS_y$ $\gamma_z = T_z/GS_z$	$M_x = \alpha_x GI_0^c$ $M_{fy} = \alpha_y EI_{Hy}$ $M_{fz} = \alpha_z EI_{Hz}$ $N = \epsilon_x ES$ $T_y = \gamma_y GS_y$ $T_z = \gamma_z GS_z$
équations d'équilibre (poutre droite)			$p_x + \frac{dN}{ds} = 0$ $p_y + \frac{dT_y}{ds} = 0$ $p_z + \frac{dT_z}{ds} = 0$ $c_x + \frac{dM_x}{ds} = 0$ $c_y + \frac{dM_{fy}}{ds} - T_z = 0$ $c_z + \frac{dM_{fz}}{ds} + T_y = 0$
condition aux limites en chargement			$-\{\tau_{s+}\} + \{\tau_{s-}\} = \{\tau_d\}$ au point $P_f$
passage  torseur contrainte			$\sigma_{xx} = N/S + \frac{M_{fy}\check{z}}{I_{Hy}} - \frac{M_{fz}\check{y}}{I_{Hz}}$ $\sigma_{yx} = \frac{T_y g_y(\check{y}, \check{z})}{S}$ $\sigma_{zx} = \frac{T_z g_z(\check{y}, \check{z})}{S}$ $\sigma_{yy} = 0$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = 0$ $\sigma_{\theta x} = \frac{M_x \check{r} g_\theta(\check{y}, \check{z})}{I_0}$

Table 6.2: Équations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle en cinématique 3.

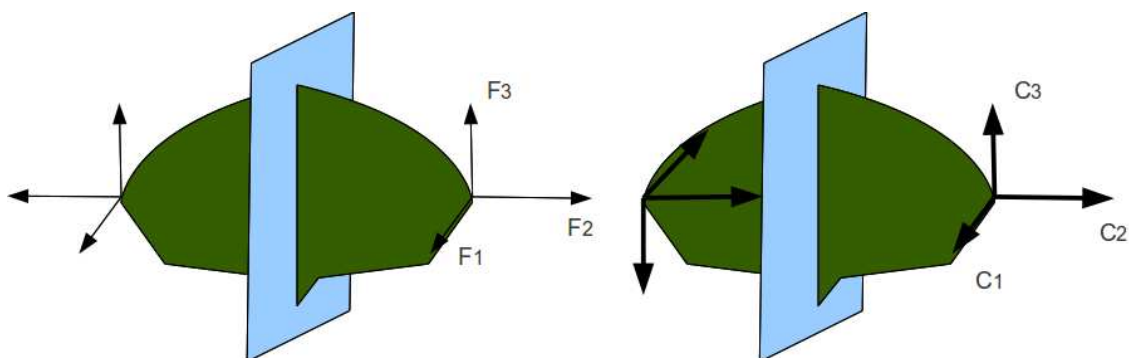


Figure 6.2: Un vecteur et un pseudo-vecteur ne sont pas transformés de la même façon par un plan de symétrie.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 058 Qu'est-ce qu'un tenseur ?, 074 Pourquoi parle-t-on de tenseur ?.

### Analyse à l'échelle 1D

On doit définir des grandeurs "équivalentes" à celles utilisées en 3D, au point de la section droite appartenant à la fibre moyenne. Cette fibre moyenne est la ligne qui relie l'ensemble des barycentres des sections droites de la poutre. Une section droite est une coupure de la poutre dans le plan qui contient les deux plus petites dimension. Nous utiliserons des torseurs : torseur de chargement, de mouvement possible à une liaison, de déplacement, d'inter-effort, de déformation, d'effort intérieur. Un torseur est toujours composé d'un vecteur appelé *résultante*  $\vec{R}$  et d'un pseudo-vecteur appelé *moment*  $\vec{M}$ , et il est exprimé nécessairement en un point A. Pour ceux qui ne se souviennent plus de ce qu'est un pseudo-vecteur, consultez le cours sur les tenseurs de 3A [2]. Dans le cas d'un torseur de chargement, la figure 6.2 illustre que les forces  $F_i$  et les couples  $C_i$  en un point A ne subissent pas les mêmes transformations par un plan de symétrie : la force est un vecteur, le couple, un pseudo-vecteur.

Pour changer d'un point A à un point B, la formule de changement de point d'un torseur est à connaître.

Pour un torseur de chargement, d'inter-effort ou d'effort intérieurs :

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B. \quad (6.5)$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule de changement de point, est de vous souvenir de votre héros de jeunesse "BABAR" :  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$ .

Pour un torseur de déplacement :

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B. \quad (6.6)$$

• **Erreur classique** : Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, en quel point il est exprimé.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 078. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 6.1.2 Notion de poutre



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 001 *Qu'est-ce qu'une poutre ?*, 244 *Qu'est ce qu'un matériau orthotrope ?*.

Nous travaillons ici,

- soit dans un repère global associé à l'ensemble de la poutre. Nous noterons les vecteurs de ce repère global  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ,
- soit dans un repère local à un point  $H$ . Nous noterons les vecteurs de ce repère local  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ . Le vecteur  $\vec{x}$  sera toujours choisi parallèle à la fibre moyenne. Les vecteurs  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  orthogonaux à  $\vec{x}$ , seront dans les directions principales de la section droite (voir paragraphe 7.0.1).

• **Erreur classique** : Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, dans quel repère il est exprimé.

### Principes et lois

Nous développerons une théorie linéaire, donc nous vérifierons le principe de superposition : si un chargement 1 implique un champ de torseurs de déplacement 1, un chargement 2 implique un champ de torseurs de déplacement 2, alors appliquer la somme des deux chargements implique un champ de déplacement somme des deux champs précédents.

Le principe de St Venant, exprime que la solution de la théorie des poutres fournie est admissible loin des points de chargement, de liaison, des discontinuités de fibre moyenne et de sa dérivée et des variations brusques de section.

Le mouvement d'un point  $M$  de la poutre sera associé au mouvement du point  $H$  de la section droite à laquelle il appartient. Il est donc nécessaire de définir le type de lien cinématique entre le point  $M$  et le point  $H$ . Différentes hypothèses de cinématique de section droite sont possibles :

- de Bernoulli : une section plane reste plane et normale à la fibre moyenne. Nous la nommerons plus tard, *cinématique numéro 2*,
- de Timoshenko : une section plane reste plane,
- de Bernoulli généralisée : une section plane peut se voiler. Nous la nommerons plus tard, *cinématique numéro 3*.

La rigidité équivalente de la section droite sera dépendante de la cinématique choisie.

### Cinématique d'un point de la fibre moyenne

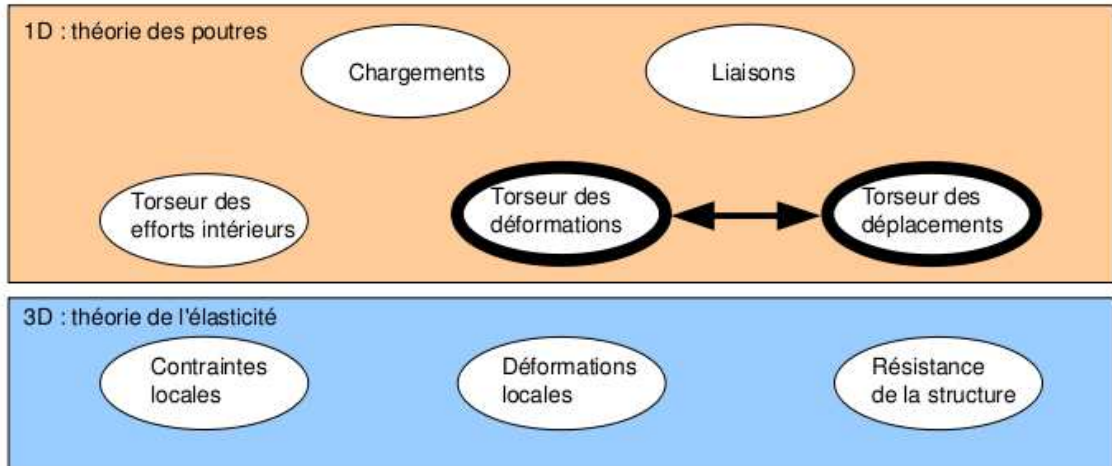


Figure 6.3: Les concepts à la description du mouvement de la fibre moyenne.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *056 Qu'est-ce qu'un torseur des déplacements ?*.

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.3.

- Le torseur des déplacements du barycentre d'une section peut être écrit

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_H, \quad (6.7)$$

avec  $\tilde{\omega}$  l'angle dont a tourné la section droite,  $\vec{u}$  le déplacement du point  $H$ . Les unités S.I. de  $\omega$  est le radian qui est sans dimension, celles de  $u$  est le m.

- Le torseur des déformations entre deux points  $H(s)$  et  $H(s+ds)$  éloignés l'un de l'autre de  $ds$  qui peut être pris infiniment petit, est défini par :

$$\{Def\}_H = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \{U\}_{H(s+ds)} - \{U\}_{H(s)} \right). \quad (6.8)$$

Tout calculs faits (voir figure 6.4), on obtient,

$$\{Def\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\tilde{\omega}}{ds} - \tilde{\omega} \wedge \vec{x} \\ \frac{d\vec{u}}{ds} \end{array} \right\}_H. \quad (6.9)$$

Pour cette démonstration, vous noterez qu'est effectué un développement de Taylor des variables et que seuls les termes d'ordre 2 sont conservés. Si entre deux points  $H$  et  $H'$ , le mouvement est celui d'un solide rigide, les deux torseurs sont reliés par la formule de changement de point, alors le torseur des déformations est nul.

Attention ! Dans ce cours,

- $\tilde{\omega}$  désigne un angle de rotation (en radian), et non une vitesse de rotation (dans le torseur cinématique d'un solide, elle était notée  $\vec{\Omega}_{S2/S1}$ ).

$$\begin{aligned}
 \{u_s\} & \quad \{u_{s+ds}\} \\
 H(s) & \quad H'(s+ds)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{Def\} &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \{u_{s+ds}\} - \{u_s\} \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s+ds) \\ \vec{v}(s+ds) \end{Bmatrix}_{H'} - \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s) \\ \vec{v}(s) \end{Bmatrix}_H \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s+ds) \\ \vec{v}(s+ds) + \vec{\omega}(s+ds) \wedge \vec{H}'H \end{Bmatrix}_H - \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s) \\ \vec{v}(s) \end{Bmatrix}_H \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left\{ \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s) + \frac{d\vec{\omega}}{ds}(s) ds + o(ds^2) \\ \vec{v}(s) + \frac{d\vec{v}}{ds}(s) ds + \left( \vec{\omega}(s) + \frac{d\vec{\omega}}{ds}(s) ds \right) \wedge (-ds \vec{n}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s) \\ \vec{v}(s) \end{Bmatrix}_H \right\} \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\omega}}{ds} ds \\ \frac{d\vec{v}}{ds} ds + \vec{\omega} \wedge (-\vec{n}) ds \end{Bmatrix}_H \right\} \\
 &= \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\omega}}{ds} \\ \frac{d\vec{v}}{ds} + \vec{\omega} \wedge \vec{n} \end{Bmatrix}_H \right\}
 \end{aligned}$$

Figure 6.4: Démonstration de l'expression du torseur des déformations.

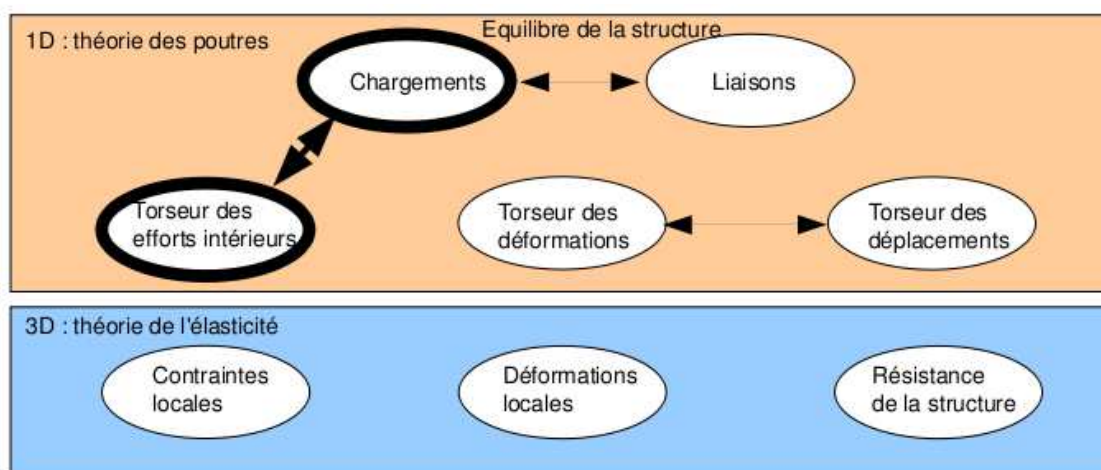


Figure 6.5: Les concepts utiles à la détermination du degré d'hyperstatisme et des réactions aux liaisons.

- $\vec{u}$  désigne un déplacement (en mètre)
- Ils sont donnés par rapport au repère global  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



Pour vérifier votre assimilation de ce paragraphe, je vous invite à faire le brevet 012. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 6.1.3 Efforts intérieurs

#### Calcul du torseur des efforts intérieurs

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.5.

Dans ce cours, pour le torseur des efforts intérieurs, la résultante sera notée  $\vec{R}_{int}$ , le moment sera noté  $\vec{M}_{int}$ .

On oriente la poutre. Soit le point H d'abscisse  $s$ . On notera  $seg+$  la demi poutre dont les abscisses sont supérieures à  $s$ . On notera  $seg-$  la demi poutre dont les abscisses sont inférieures à  $s$ .

Si le paramétrage est donné, on veillera pour la simplicité des calculs, à orienter la poutre dans le même sens que les paramètres sont croissants ( $s$  croissants ou  $\theta$  croissant).

Prenons comme définition que le torseur des efforts intérieur représente les actions de la partie  $seg+$  sur la partie  $seg-$  (voir figure 6.6).

Si l'on isole le segment  $seg-$ , celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs (de chargement ou de liaison) sur le segment  $seg-$  et par le torseur des efforts intérieurs. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nulle, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\}. \quad (6.10)$$

Nous aurions aussi pu isoler le segment  $seg+$ . Celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs (de chargement ou de liaison) sur le segment  $seg+$  et par un torseur qui est l'opposé du torseur des efforts intérieurs par le principe d'action et de réaction. Nous faisons ici l'hypothèse qu'au point de coupure  $H$  il n'y a pas de force concentrée. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nulle, donc on obtient l'égalité,



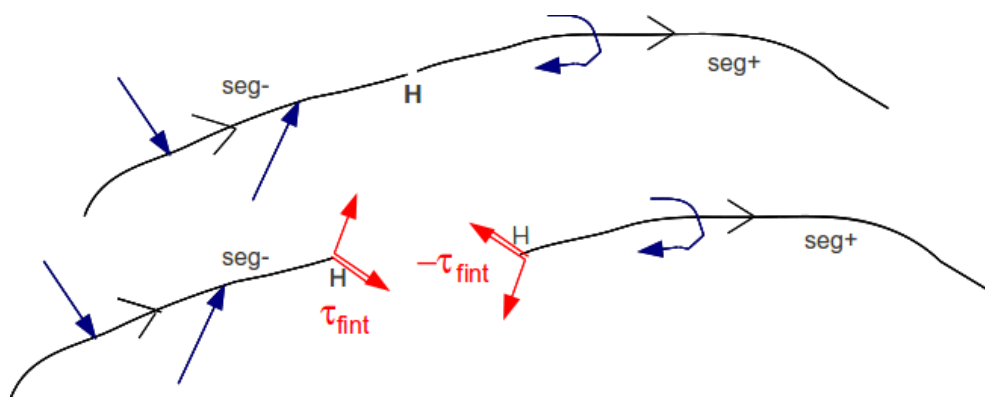


Figure 6.6: Définition du torseur des efforts intérieurs.

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}. \quad (6.11)$$

On note donc que nous disposons à chaque fois de deux manières de calculer le torseur des efforts intérieurs, en utilisant soit la partie seg+ soit la partie seg-. Les deux méthodes donnent le même résultat, car la poutre, dans sa globalité seg+ U seg- est en équilibre. C'est à vous de choisir le segment qui implique le moins de calcul. Par exemple, si sur l'un des segments il y a des liaisons et des chargements, et sur l'autre que des chargements (par définition connus), c'est ce dernier segment qu'il faut utiliser car cela vous évite d'avoir à calculer les inconnues aux liaisons, et donc de faire l'équilibre global de la structure, déterminer son degré d'hyperstatisme, and so on....

En général, la connaissance du torseur des efforts intérieurs est nécessaire sur l'ensemble de la poutre. Plusieurs cas doivent être étudiés en faisant varier le point  $H$ , car lorsque  $s$  croît, à chaque passage d'un chargement, le torseur de chargement passe du segment seg+ au segment seg-.

• **Erreur classique** : Si vous oubliez de définir l'orientation de la poutre par une phrase ("La poutre est orientée de A vers D") ou par une flèche sur le dessin du système, alors, le correcteur ne pourra être sûr que votre démarche est correcte : cela peut entraîner un échec à la tentative de ceinture.

**Exemple** Dans le premier exemple (figure 6.7, le calcul du torseur des efforts intérieurs ne nécessite pas la détermination des inconnues aux liaisons. On remarquera dans cet exemple que deux cas sont à étudier en fonction de la position du point  $H$ .

**Composantes du torseur des efforts**

Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 303 Pourquoi est-il indispensable de calculer le torseur des efforts intérieurs dans une base locale ?.



intérieurs

La détermination du torseur des efforts intérieurs en un point  $H$  est généralement faite dans le repère global  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Son expression peut même être donnée en un point différent de  $H$ . Néanmoins, si le type de sollicitation vous est demandé, et c'est toujours le cas, il est nécessaire

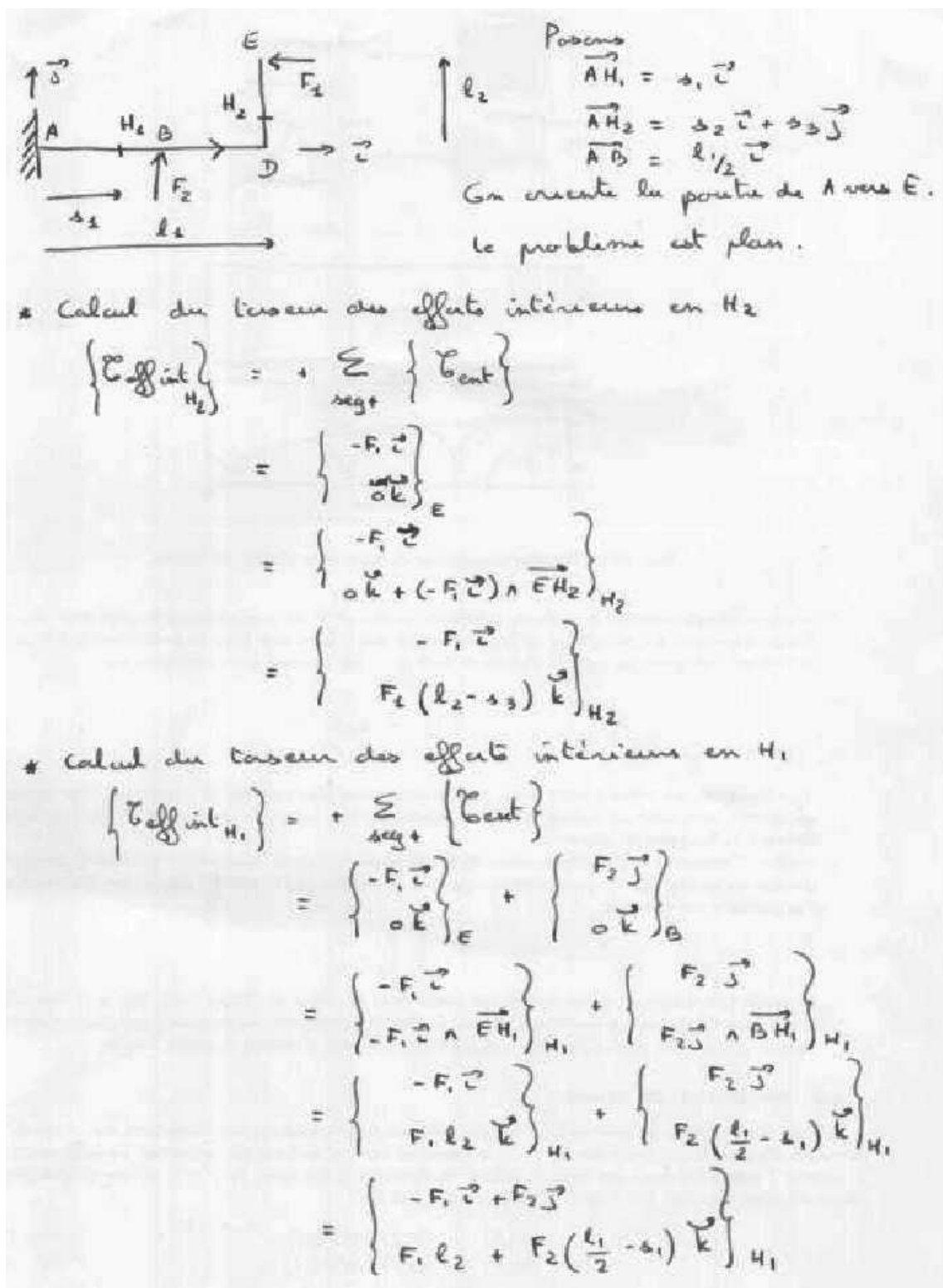


Figure 6.7: Exemple de détermination du tenseur des efforts intérieurs pour un système 2D.

1. d'exprimer ce torseur au point  $H$
2. de l'exprimer dans le repère local au point  $H$  qui prenne en compte l'orientation locale de la poutre et de la forme de sa section droite.

En effet, si par exemple le torseur des efforts intérieur comporte une force  $F\vec{j}$  la réponse en déformation de la poutre sera différente si la direction  $\vec{j}$  est parallèle à la fibre moyenne ou perpendiculaire.

Soit  $(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère local tel que,

- $H\vec{x}$  tangent à la fibre moyenne,
- $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  axes principaux de la section droite,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_x\vec{x} + M_f\vec{y} + M_z\vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (6.12)$$

avec,

- $N$  : effort normal,
- $T_y$  : effort tranchant suivant la direction  $\vec{y}$ ,
- $T_z$  : effort tranchant suivant la direction  $\vec{z}$ ,
- $M_x$  : moment de torsion,
- $M_f$  : moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{y}$ ,
- $M_z$  : moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$ .

On écrira donc le torseur des efforts intérieurs, au point  $H$  et dans ce repère local, afin de pouvoir identifier les types de sollicitation que la poutre subit.

**Exemple** Si l'on reprend le cas tridimensionnel précédemment traité, la détermination des composantes

- au point  $H_1$  donne un effort normal  $N_1 = -F_1$ , un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y1} = F_2$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz1} = F_1(l_2) + F_2(l_1/2 - s_1)$ . En effet, repère local et global sont confondus :  $\vec{x} = \vec{i}, \vec{y} = \vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ .
- au point  $H_2$  compris entre B et D, donne un effort normal  $N_2 = -F_1$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz2} = F_1 l_2$ . En effet, repère local et global sont confondus.
- au point  $H_2$  compris entre D et E, donne un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y2} = F_1$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz2} = F_1(l_2 - s_3)$ . En effet, repère local et global ne sont plus confondus :  $\vec{x} = \vec{j}, \vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ .

• **Erreur classique** : Pour déterminer les composantes d'un torseur des efforts intérieurs, il ne faut pas oublier avant identification, d'exprimer ce torseur dans le repère local au point  $H$ .

• **Erreur classique** : Il ne faut pas confondre le moment  $M$  à une liaison, et un moment fléchissant  $M_f$  ou de torsion  $M_x$  : l'un traduit les efforts et moments transmissibles (qui peuvent être exprimés dans n'importe quel repère), l'autre des efforts et moments à l'intérieur de la poutre (qui ne peuvent être exprimés que dans le repère local au point  $H$  de cette poutre.)

• **Erreur classique** : Les composantes du torseur des efforts intérieurs doivent être exprimées en fonction des chargements et des inconnues hyperstatiques. Si vous les laissez en fonction des

inconnues aux liaisons, vous ne trouverez pas les contraintes, déplacements et rotations en fonction du chargement.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 002, 005, 018, 001 et 803. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### **Équations d'équilibre**

Elles ne sont pas vues dans ce cours bien que figurant dans le second tableau du paragraphe 6.1.1. Elles ne sont pas indispensables à la résolution de problème. Référez-vous à la bibliographie.

Formation à la compétence violette de mécanique des solides déformables.

## Chapter 7

# Rappels de mécanique des solides déformables : Résoudre un problème de MSD en termes d'équations d'équilibre et de conditions aux limites.

Le polycopié d'enseignement de *mécanique des solides déformables* de Stéphane Durand est disponible via le lien :

<http://perso.univ-lemans.fr/~sdurand/monjolipoly.pdf>

Le polycopié de *mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire* (version 1.6) E. Ringot, augmenté par des brevets concoctés par Jean-Michel Gènevaux est disponible via

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf)



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 329, 330, 331 et 332.

Formation à la compétence bleue de statique des poutres.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser une présentation de cette compétence. Le fichier est nommé *210 Compétence bleue de statique des poutres : détermination du chargement maximal*.

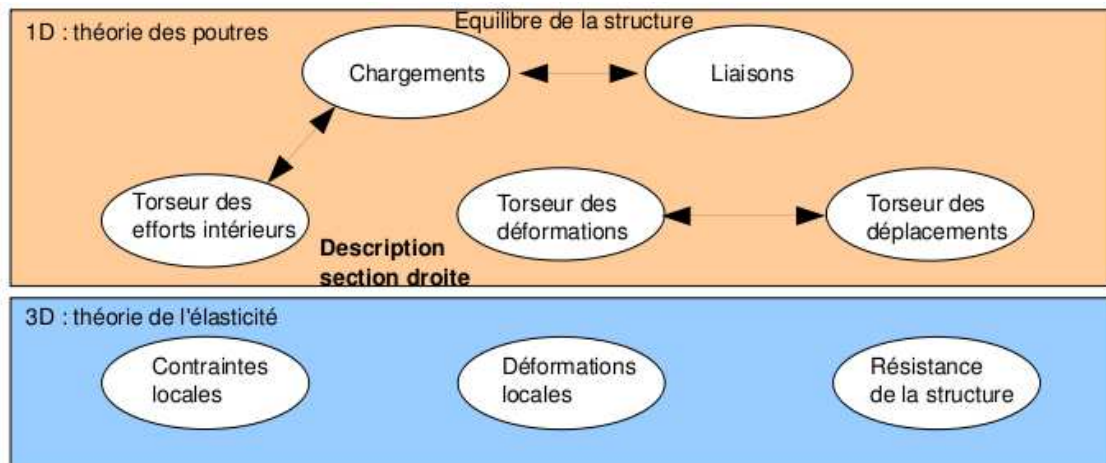


Figure 7.1: Les concepts utiles à la détermination à venir de la loi de comportement de la fibre moyenne.

### 7.0.1 Description de la section droite



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 005 *Qu'est ce physiquement qu'un moment quadratique ?*.

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 7.1.

La théorie des poutres n'utilisant que la fibre moyenne, il est nécessaire d'associer à cette fibre moyenne des grandeurs décrivant la section droite.

- **Erreur classique :** Attention aux unités ! Les intégrales sont effectuées sur des surfaces et non des volumes (comme dans le cas du cours de mécanique générale), et la masse volumique n'apparaît pas (comme dans le cas du cours de mécanique générale).

#### Moment statique d'une aire plane

Si la section droite est notée  $S$ , et  $\delta$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite,

$$m_{\Delta} = \int \int_S \delta dS. \quad (7.1)$$

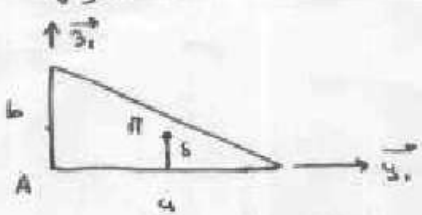
est le moment statique de cette section par rapport à la droite  $\Delta$ . Elle est homogène à une longueur<sup>3</sup>.

Un exemple de calcul de moment statique est fait figure 7.2.

#### Barycentre

Si  $d_H$  est la distance entre le barycentre de la section droite et la droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite, et  $S$  l'aire de la section droite, alors :





$$\vec{AP} = \tilde{y} \vec{y}_1 + \tilde{z} \vec{z}_1$$

$$m_{Ay_1} = \int \int \delta \, d\tilde{y}_1 \, d\tilde{z}_1$$

$$= \int_{\tilde{y}_1=0}^a \left[ \int_{\tilde{z}_1=0}^{b - \frac{b}{a}\tilde{y}_1} \tilde{z}_1 \, d\tilde{z}_1 \right] d\tilde{y}_1$$

$$= \int_{\tilde{y}_1=0}^a \left[ \frac{1}{2} \tilde{z}_1^2 \right]_0^{b - \frac{b}{a}\tilde{y}_1} d\tilde{y}_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tilde{y}_1=0}^a \left[ b^2 - \frac{2b^2}{a}\tilde{y}_1 + \frac{b^2}{a^2}\tilde{y}_1^2 \right] d\tilde{y}_1$$

$$= \frac{1}{2} \left[ b^2 a - \frac{b^2}{a} a^2 + \frac{b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} b^3 \left[ \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{3b} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a b^3}{3}$$

Figure 7.2: Exemple de détermination du moment statique d'une section droite triangulaire.

$$S = \frac{ab}{2}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{g_1} = \frac{m_{Ag_1}}{S}$$

$$= \frac{\frac{ab^2}{2}}{\frac{ab}{2}}$$

$$= \frac{b}{3}$$

Figure 7.3: Exemple de détermination du barycentre d'une section droite triangulaire.

$$d_H = \frac{m_{\Delta}}{S}. \quad (7.2)$$

Le distance est homogène à une longueur (Si! Si! N'est-ce pas formidable?).

Un exemple de calcul du barycentre est fait figure 7.3.

• **Erreur classique :** Ne pas confondre le barycentre  $H$  d'une section avec le centre de gravité  $G$  de la poutre complète. Ils ne sont pas confondus pour une poutre faite en deux matériaux de masse volumique différentes dans l'épaisseur (par exemple un bilame).

#### Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *007 Quelles différences entre moment quadratique et moment polaire ?*.

La figure 7.4 présente un exemple des différents axes autour desquels peuvent être calculés les moments quadratiques et polaire passant par le barycentre  $H$  d'une section droite.

Le moment quadratique par rapport à une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite

$$I_{\Delta} = \int \int_S \delta^2 dS, \quad (7.3)$$

est homogène à une longueur<sup>4</sup>. Ce terme apparaîtra dans la loi de comportement en flexion : plus le point est éloigné de la fibre moyenne, plus il sera sollicité (proportionnalité à  $\delta$ ) et plus sa sollicitation créera un moment (à nouveau proportionnalité à  $\delta$ ): d'où le terme en  $\delta^2$ . A aire de section droite  $S$  constante, plus la matière est loin de la fibre moyenne, plus le moment quadratique est grand.

Si la section droite est notée  $S$ ,  $\delta$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite, et  $\delta'$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et une droite  $\Delta'$  appartenant au plan de la section droite, le produit quadratique de cette section par rapport aux deux axes  $\delta$  et  $\delta'$  est donné par

$$I_{\Delta\Delta'} = - \int \int_S \delta \delta' dS, \quad (7.4)$$

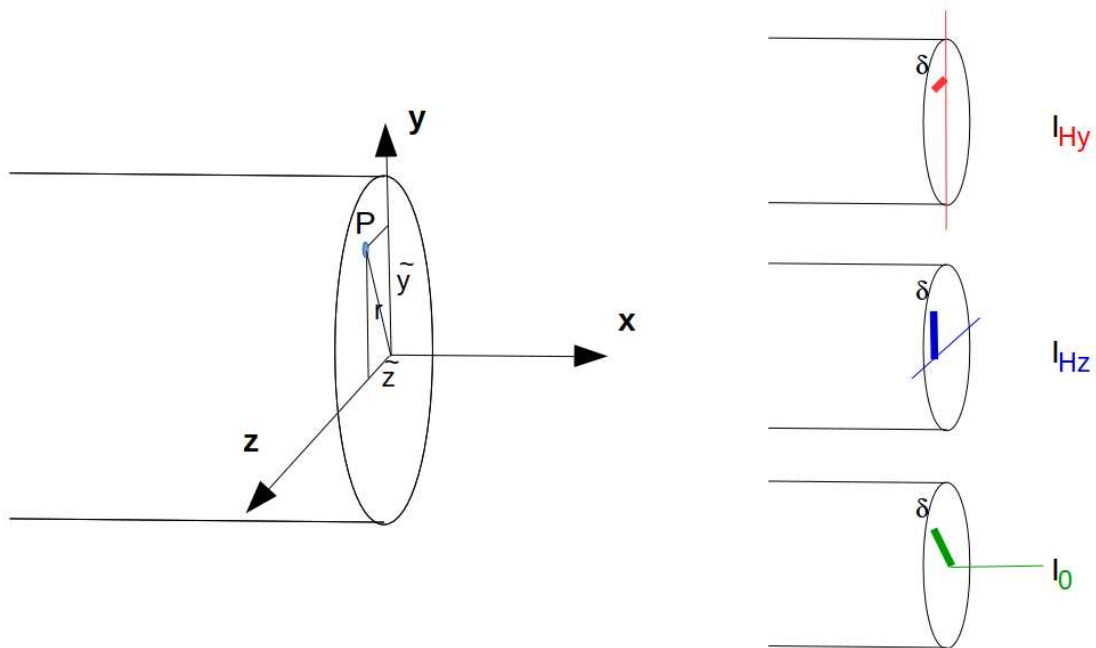


Figure 7.4: Exemples de définition de la distance  $\delta$  pour chaque calcul de moment quadratique ou polaire.

qui est homogène à une longueur<sup>4</sup>.

A l'aide de ces grandeurs, on peut construire le tenseur quadratique de la section droite. Par exemple, par rapport aux deux droites  $H\vec{y}_1$  et  $H\vec{z}_1$  avec  $\vec{y}_1$  et  $\vec{z}_1$  deux directions orthogonales entre elles, on obtient,

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} I_{Hy_1} & I_{Hy_1 z_1} \\ I_{Hy_1 z_1} & I_{Hz_1} \end{bmatrix}_{(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)}. \quad (7.5)$$

Les axes principaux d'une section droite, sont les deux axes  $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  tels que les termes hors diagonale de ce tenseur sont nuls :

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} I_{Hy} & 0 \\ 0 & I_{Hz} \end{bmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})}. \quad (7.6)$$

Pour la diagonalisation d'une matrice, veuillez consulter vos cours de math ou [10].

**Exemple** Les calculs d'un moment quadratique et d'un produit quadratique d'une section triangulaire par rapport à deux droites passant par son barycentre sont détaillés figures 7.5 et 7.6. Le calcul des directions principales et de l'expression du tenseur d'inertie dans cette base est donnée ci-dessous.

Si l'on prend comme dimensions de la section triangulaire  $a = 3$  mm et  $b = 2$  mm, le programme scilab (demo09.sce) suivant donne  $A$  la matrice associée au tenseur d'inertie dans la base  $(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $A2$  la matrice associée au tenseur d'inertie dans la base  $(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})$  et  $X$  les vecteurs directeurs (en colonne) des deux directions principales.

```
//demo09.sce avec scilab
a=3;b=2;
iyy=a*b^3/36;izz=b*a^3/36;iyz=a^2*b^2/72;izy=iyz;
A=[iyy,izy;izy,izz];
A
[A2,X]=bdiag(A);
A2
```

$$\vec{HP} = \tilde{y} \vec{y}_1 + \tilde{z} \vec{z}_1$$

$$I_{H y_1} = \iint_S \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}$$

$$= \int_{\tilde{y} = -\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left[ \int_{\tilde{z} = -\frac{b}{3}}^{-\frac{b}{a}\tilde{y} + \frac{b}{3}} \tilde{z}^2 d\tilde{z} \right] d\tilde{y}$$

car l'équation de la droite est donnée par

$$z_0 = p \tilde{y} + c \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{2b}{3} = p \left(-\frac{a}{3}\right) + c \\ -\frac{b}{3} = p \left(\frac{2a}{3}\right) + c \end{cases}$$

soit  $\frac{2b}{3} + \frac{b}{3} = p \left(-\frac{a}{3} - \frac{2a}{3}\right)$

d'où  $p = -\frac{b}{a}$

et  $c = \frac{2b}{3} + \frac{a}{3} p$

$$= \frac{2b}{3} - \frac{a}{3} \frac{b}{a}$$

$$= \frac{b}{3}$$

$$I_{y_1} = \frac{ab^3}{36} \quad (\text{merci maxima!})$$

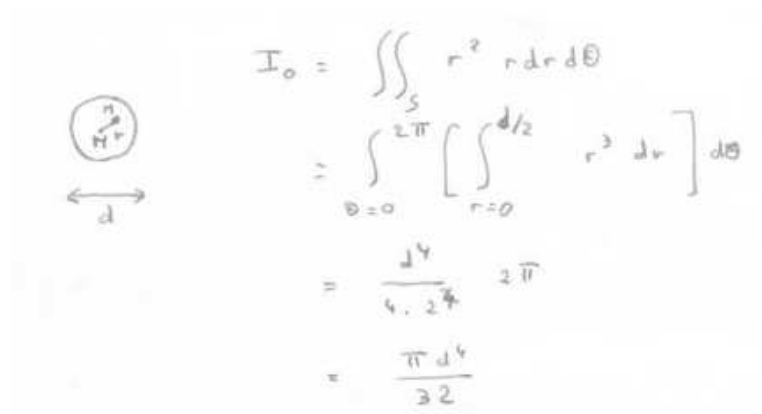
Figure 7.5: Exemple de détermination d'un moment quadratique d'une section droite triangulaire.

$$I_{H y_1 z_1} = - \iint_S \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}$$

$$= - \int_{\tilde{y} = -\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left[ \int_{\tilde{z} = -\frac{b}{3}}^{-\frac{b}{a}\tilde{y} + \frac{b}{3}} \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{z} \right] d\tilde{y}$$

$$= - \frac{a^2 b^2}{72} \quad (\text{merci maxima!})$$

Figure 7.6: Exemple de détermination d'un produit quadratique d'une section droite triangulaire.



The diagram shows a circular cross-section of diameter  $d$  on the left. To its right, the calculation for the polar moment of inertia  $I_0$  is shown in a handwritten style:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \iint_S r^2 \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \int_{r=0}^{d/2} r^3 \, dr \right] d\theta \\
 &= \frac{d^4}{4 \cdot 2^4} \cdot 2\pi \\
 &= \frac{\pi d^4}{32}
 \end{aligned}$$

Figure 7.7: Exemple de détermination d'un moment polaire d'une section droite circulaire.

X

Ceci fournit les résultats :

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}_{(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)} \text{ mm}^4. \quad (7.7)$$

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 \\ 0 & 1.73 \end{bmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})} \text{ mm}^4. \quad (7.8)$$

$$\vec{y} = -0.91\vec{y}_1 + 0.42\vec{z}_1, \quad (7.9)$$

$$\vec{z} = -0.42\vec{y}_1 - 0.91\vec{z}_1. \quad (7.10)$$

Les deux vecteurs sont bien de norme 1. On remarquera dans ce cas que les directions principales ne sont pas parallèles à l'un des bords de la surface considérée. Les valeurs de moments quadratiques autour des deux axes principaux d'inertie sont les deux valeurs extrêmes (minimale et maximale) lorsque la base d'expression du tenseur d'inertie tourne autour de l'axe  $H\vec{x}$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir la partie du brevet 006 associée au moment quadratique.

### moment polaire

Si la section droite est notée  $S$ , la normale à cette section  $\vec{x}$  (tangent à la fibre moyenne), et  $\delta$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et la droite  $H\vec{x}$ , alors le moment polaire par rapport à l'axe  $H\vec{x}$

$$I_0 = \int \int_S \delta^2 \, dS. \quad (7.11)$$

a la dimension d'une longueur<sup>4</sup>.

**exemple** Le calcul du moment polaire d'une section circulaire est détaillé figure 7.7.

• **Erreur classique :** Ne pas confondre moment quadratique et moment d'inertie. Ils ne sont pas homogènes entre eux !

• **Erreur classique** : Ne pas confondre produit quadratique et produit d'inertie. Ils ne sont pas homogènes entre eux !

## 7.0.2 Annexe 1



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir les brevets 040 et 094. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

## 7.1 Lois de comportement de la poutre



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 320 : *Le module de Young  $E$  peut aussi dépendre de  $s$  et quelle est la signification de la lettre  $S$ ?*

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 7.9.

### 7.1.1 Objectif

En l'état actuel, vous savez calculer le torseur des efforts intérieurs en tout point d'une poutre en fonction du chargement et d'éventuelles inconnues hyperstatiques. Deux types de démarche peuvent alors vous être demandées :

1. calculer les déplacements et rotations de sections droite en certains points de la poutre
2. calculer les contraintes maximales dans la poutre pour déterminer si les limites d'élasticité du matériau constitutif de la poutre ne sont pas dépassées.

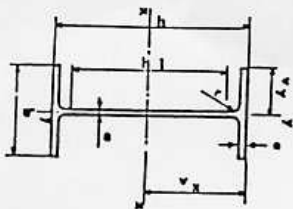
La première démarche nécessite à partir des torseurs d'efforts intérieurs, de calculer les torseurs de déformation, puis le champs de déplacement et de rotation des points de la fibre moyenne. Ces calculs peuvent être fait en restant dans une description 1D si l'on connaît la relation entre les composantes du torseur des déformations et les composantes du torseur des efforts intérieurs. Pour démontrer ces relations il faut passer (voir figure 7.9) par une description locale 3D des déformations et contraintes engendrées en un point  $P$  de la section droite distant du point  $H$  de la fibre moyenne par un vecteur tel que  $\vec{HP} = \tilde{y}\vec{y} + \tilde{z}\vec{z}$ . Ces relations appelées *loi de comportement de la poutre* dépendent des hypothèses de cinématique prises dans la section droite. C'est pourquoi, nous étudierons 3 cas. Ces trois cas sont illustrés sur une poutre en flexion représentée figure 7.10.

### 7.1.2 1ère cinématique

#### description de la cinématique

Le plan normal suit le torseur en  $H'$  sans se déformer dans le plan. On peut alors calculer le déplacement du point  $P'$  par rapport au point  $P$  (voir figure 7.11). On considère le torseur des déformations connu. La section droite passant par  $H'$  subit un mouvement de corps solide, donc les torseurs de déplacement sont les mêmes pour tous les points de la section droite.

Profilés	Dimensions						Masse par mètre M	Surface de peinture	Caractéristiques reportées à l'axe neutre						Moment d'inertie de torsion J	Module de résist d	Profilés					
	h mm	b mm	a mm	e mm	f mm	Partie droite de l'âme h <sub>1</sub>			I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>	Moment statique S	Dis- tance des centres	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>				I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>			
80	80	46	3,8	5,2	5	60	6,0	7,54	0,329	54,8	80,1	20,0	3,24	11,6	6,9	3,33	8,49	3,69	1,05	0,70	0,299	80
100	100	55	4,1	5,7	7	75	8,1	10,3	0,401	49,5	171	34,2	4,07	19,7	8,7	4,22	15,9	5,79	1,24	1,10	0,313	100
120	120	64	4,4	6,3	7	93	10,4	13,2	0,474	45,6	318	53,0	4,90	30,4	10,5	5,10	27,7	8,65	1,45	1,71	0,336	120
140	140	73	4,7	6,9	7	112	12,9	16,4	0,550	42,6	541	77,3	5,74	44,2	12,2	5,99	44,9	12,3	1,65	2,54	0,359	140
160	160	82	5,0	7,4	9	127	15,8	20,1	0,622	39,4	859	109	6,58	61,9	14,0	6,90	68,3	16,7	1,84	3,53	0,379	160
180	180	91	5,3	8,0	9	146	18,8	23,9	0,698	37,1	1317	146	7,42	83,2	15,9	7,76	101	22,2	2,05	4,90	0,404	180
200	200	100	5,6	8,5	12	159	22,4	28,5	0,768	34,3	1943	184	8,26	110	17,6	8,66	142	28,5	2,24	6,46	0,425	200
220	220	110	5,9	9,2	12	178	26,2	33,4	0,848	32,4	2772	252	9,11	143	19,4	9,62	205	37,3	2,48	8,86	0,460	220
240	240	120	6,2	9,8	15	190	30,7	39,1	0,921	30,0	3892	324	9,97	183	21,2	10,55	284	47,3	2,69	11,60	0,490	240
270	270	135	6,6	10,2	15	220	36,1	45,9	1,04	28,8	5790	429	11,2	239	24,2	11,88	420	62,2	3,02	14,93	0,510	270
300	300	150	7,1	10,7	15	249	42,2	53,8	1,16	27,5	8358	557	12,5	314	26,6	13,20	604	80,5	3,35	19,47	0,535	300
330	330	160	7,5	11,5	18	271	49,1	62,6	1,25	25,5	11770	713	13,7	402	29,3	14,52	788	98,5	3,55	25,70	0,558	330
360	360	170	8,0	12,7	18	299	57,1	72,7	1,35	23,6	16270	904	15,0	510	31,9	15,83	1043	123	3,79	36,20	0,600	360
400	400	180	8,6	13,5	21	331	66,3	84,5	1,47	22,2	23130	1180	16,5	654	35,4	17,50	1318	146	3,95	46,80	0,607	400
450	450	190	9,4	14,6	21	379	77,6	98,8	1,61	20,7	33740	1500	18,5	849	39,7	19,33	1676	176	4,12	63,80	0,618	450
500	500	200	10,2	16,0	21	426	90,7	116	1,74	19,2	46200	1930	20,4	1100	43,9	21,28	2142	214	4,31	89,00	0,640	500
550	550	210	11,1	17,2	24	468	106	134	1,88	17,7	67120	2440	22,3	1390	48,2	23,02	2668	254	4,45	118,4	0,657	550
600	600	220	12,0	19,0	24	514	122	156	2,02	16,6	92080	3070	24,3	1760	52,4	25,16	3387	308	4,66	166,2	0,697	600



poutrelles IPE

Figure 7.8: Un exemple de caractéristiques d'une section droite.



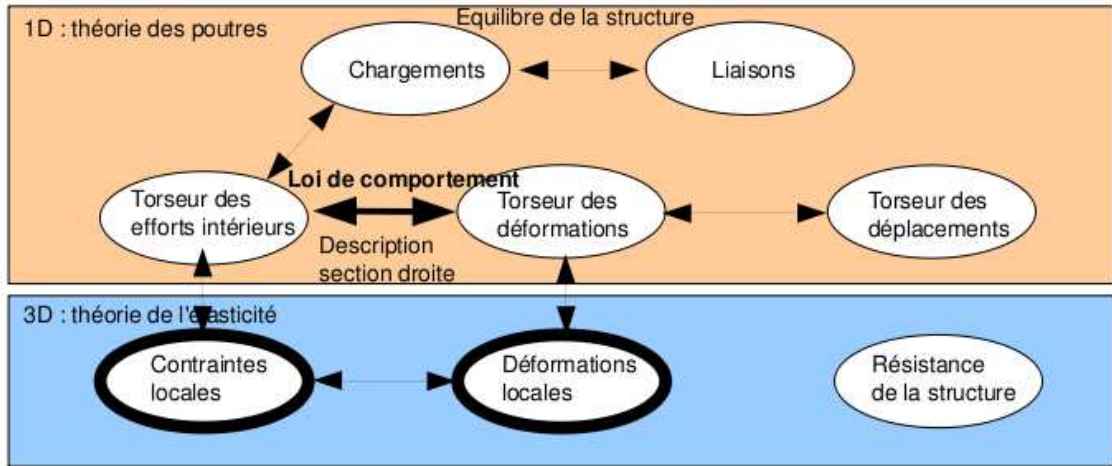


Figure 7.9: Les concepts utiles à la détermination à venir de la loi de comportement de la fibre moyenne.

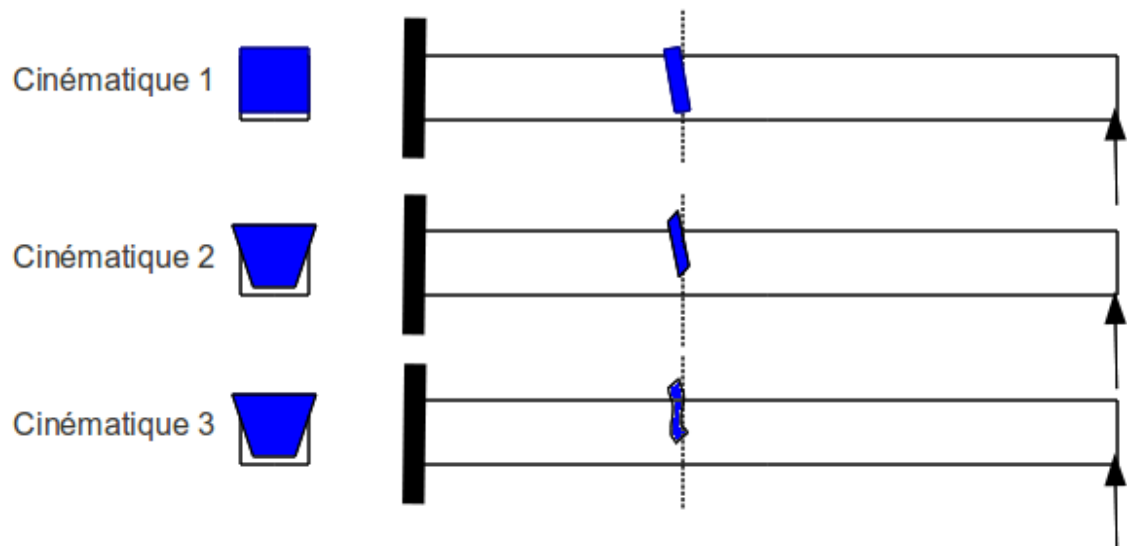
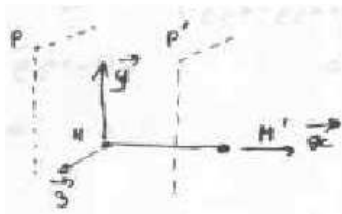


Figure 7.10: Les trois cinématiques des sections droites envisagées, illustrées dans le cas d'une poutre de section droite rectangulaire, sollicitée en flexion et effort tranchant.





$$\begin{aligned} \vec{HH'} &= d\vec{s} \vec{e}_x \\ \vec{PP'} &= d\vec{s} \vec{e}_x \end{aligned} \quad \text{en position initiale}$$

$$\begin{aligned} \vec{HP} &= \tilde{y} \vec{y} + \tilde{z} \vec{z} \\ \vec{H'P'} &= \tilde{y} \vec{y} + \tilde{z} \vec{z} \end{aligned}$$

$$\left\{ \Phi_H \right\} = \left\{ \begin{aligned} &\alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z} \\ &\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{aligned} \right\}_H$$

Requiem de  $P'$

$$\begin{aligned} \left\{ U_{P'} \right\} &= \left\{ U_H \right\} \\ &= \left\{ \Phi_H \right\} ds \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\alpha_x ds \vec{x} + \alpha_y ds \vec{y} + \alpha_z ds \vec{z} \\ &\epsilon_x ds \vec{x} + \gamma_y ds \vec{y} + \gamma_z ds \vec{z} \end{aligned} \right\}_H \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\alpha_x ds \vec{x} + \alpha_y ds \vec{y} + \alpha_z ds \vec{z} \\ &\epsilon_x ds \vec{x} + \gamma_y ds \vec{y} + \gamma_z ds \vec{z} + (\alpha_x ds \vec{x} + \alpha_y ds \vec{y} \\ &\quad + \alpha_z ds \vec{z}) \wedge (\tilde{y} \vec{y} + \tilde{z} \vec{z}) \end{aligned} \right\}_P \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\alpha_x ds \vec{x} + \alpha_y ds \vec{y} + \alpha_z ds \vec{z} \\ &\vec{x} ( \epsilon_x ds + \alpha_y ds \tilde{z} - \alpha_z ds \tilde{y} ) \\ &+ \vec{y} ( \gamma_y ds - \alpha_x ds \tilde{z} \\ &+ \vec{z} ( \gamma_z ds + \alpha_x ds \tilde{y} \end{aligned} \right\}_P \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \vec{U}_{P'} \cdot \vec{x} = \epsilon_x ds + \alpha_y ds \tilde{z} - \alpha_z ds \tilde{y} &= u_x \\ \vec{U}_{P'} \cdot \vec{y} = \gamma_y ds - \alpha_x ds \tilde{z} &= u_y \\ \vec{U}_{P'} \cdot \vec{z} = \gamma_z ds + \alpha_x ds \tilde{y} &= u_z \end{cases}$$

Figure 7.11: Calcul du déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{g}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{bmatrix} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \otimes (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \alpha_y \tilde{y} - \alpha_z \tilde{z} & -\alpha_z d\tilde{x} & \alpha_y d\tilde{x} \\ \delta_y - \alpha_x \tilde{z} & 0 & -\alpha_x \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \\ \delta_z + \alpha_x \tilde{y} & \alpha_x d\tilde{x} & 0 \end{bmatrix} ( ) \otimes ( ) \\
\mathbf{m} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \alpha_y \tilde{y} - \alpha_z \tilde{z} \\ \frac{1}{2}(\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z d\tilde{x}) \\ \frac{1}{2}(\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y d\tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{sym} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} ( ) \otimes ( )
\end{aligned}$$

Figure 7.12: Calcul du tenseur des déformations pour la cinématique 1.

### déformations

On calcule le tenseur des déformations du parallélépipède entre  $P$  et  $P'$  de cotés  $d\tilde{y}$ ,  $d\tilde{z}$ ,  $ds$  (voir figure 7.12). On évalue dans un premier temps le gradient de  $\tilde{\mathbf{u}}$ , en notant que  $dx = ds$ ,  $dy = d\tilde{y}$  et  $dz = d\tilde{z}$ .

### contraintes

On calcule le tenseur des contraintes nécessaire à l'obtention de ce tenseur des déformations (voir figure 7.13). On utilise pour cela la loi de comportement de l'élasticité tridimensionnelle, qui utilise les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$ .

### tenseur des efforts intérieurs

L'ensemble des contraintes sur les facettes de normale  $\vec{x}$  aux points  $P'$  de la section droite passant par  $H'$ , en se cumulant, réalisent les actions du segment  $\text{seg}^+$  sur le segment  $\text{seg}^-$ . Elles doivent

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= 2\mu \tilde{\mathbf{E}} + \lambda \text{trace } \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{I}}_d \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)(\varepsilon_x + \alpha_y \tilde{y} - \alpha_z \tilde{z}) \\ \mu(\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z d\tilde{x}) \\ \mu(\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y d\tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{sym} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} d(\varepsilon_x + \alpha_y \tilde{y} - \alpha_z \tilde{z}) \\ d(\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z d\tilde{x}) \\ d(\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y d\tilde{x}) \end{matrix} ( ) \otimes ( )
\end{aligned}$$

Figure 7.13: Calcul du tenseur des contraintes pour la cinématique 1..

donc être équivalentes au torseur des efforts intérieurs. Il faut donc faire des intégrales sur la section droite (voir figure 7.14). Comme le point  $H'$  est le barycentre de la section droite, les moments statiques sur l'ensemble de la section sont nuls : ceci fait disparaître quelques intégrales. D'autre part,  $ds$  pouvant être pris infiniment petit, d'autres intégrales sont négligeables. Pour les termes de moment, apparaissent les moments quadratiques, le moment polaire et les produit quadratiques de la section droite. Ces derniers sont nuls si les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sont les directions principales de la sections droite : c'est ce qui est choisi.

### écriture matricielle

Les 6 équations précédentes peuvent être écrites sous forme matricielles en faisant apparaître le module de Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$ , grâce aux relations 6.3 les liants aux coefficients de Lamé.

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \dots \quad (7.12)$$

$$\dots \begin{bmatrix} \frac{ES(-1+\nu)}{(1+\nu)(-1+2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Ebh(b^2+h^2)}{2(1+\nu)12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ehb^3(-1+\nu)}{12(1+\nu)(-1+2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ebh^3(-1+\nu)}{12(1+\nu)(-1+2\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

### incompatibilité

Cette cinématique implique que les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  ne sont pas nulles dans la section droite, donc à fortiori sur les surface latérales de la poutre. Or, sur ces surfaces non chargées, les contraintes exercées par l'air sur la poutre sont nulles. Il y a donc contradiction entre la réalité et le modèle associé à la cinématique 1. Prenons l'exemple d'un torseur des déformations ne comportant que le terme  $\epsilon_x$ . Tous les petits parallélépipèdes entre les points  $P$  et  $P'$  s'allongent de la valeur  $\epsilon_x ds$ . De part l'effet Poisson, ils souhaitent se contracter dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Or la cinématique 1 choisie, d'un mouvement en bloc rigide d'une section droite les en empêche. Cette cinématique n'est pas réaliste pour une poutres non bloquée sur toutes ses surfaces latérales.

Il nous faut chercher une cinématique telles que sur les surfaces latérales les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  soient nulles. C'est l'objet de la seconde cinématique.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 809. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.1.3 2nd cinématique

Le plan normal peut se déformer dans le plan tel que  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  restent nuls.

$$\begin{aligned}
N &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \left[ \epsilon_x \iint d\tilde{y} d\tilde{z} + \alpha_y \iint \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_z \iint \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \right] \\
&= (2\mu + \lambda) \epsilon_x S \\
T_y &= \int_{\tilde{z}} \int_{\tilde{y}} \sigma_{yx} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \mu \left[ \gamma_y \iint d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_x \iint \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_z \int d\tilde{y} \iint d\tilde{z} \right] \\
&= \mu \gamma_y S \\
T_z &= \mu \gamma_z S \\
P_x &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} -\sigma_{zz} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} + \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{yz} \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \alpha_y \mu \iint \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} + \alpha_x \mu \iint \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \alpha_x \mu \iint \tilde{r}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} \quad \text{avec } \tilde{r}^2 = \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \\
&= \alpha_x I_0 \\
P_y &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \left[ \alpha_y \iint \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_z \iint \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} \right] \\
&= (2\mu + \lambda) \alpha_y I_{yy} \\
P_z &= - \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \alpha_z I_{yz}
\end{aligned}$$

Figure 7.14: Calcul des composantes du tenseur des efforts intérieurs la cinématique 1..

$$\begin{cases} \vec{u}_{P'} \cdot \vec{x} = \varepsilon_x ds + \alpha_y ds \tilde{z} - \alpha_z ds \tilde{y} + \\ \vec{u}_{P'} \cdot \tilde{y} = \delta_y ds - \alpha_x ds \tilde{z} + \tilde{u}_y(\tilde{y}, \tilde{z}) \\ \vec{u}_{P'} \cdot \tilde{z} = \delta_z ds + \alpha_x ds \tilde{y} + \tilde{u}_z(\tilde{y}, \tilde{z}) \end{cases}$$

Figure 7.15: Calcul du déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$  pour la cinématique 2.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} \\ \frac{1}{2} (\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) \\ \frac{1}{2} (\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y \tilde{z}) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}} \right) \\ \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{sym} \\ \text{---} \\ (\vec{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \otimes (\vec{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{array}$$

Figure 7.16: Calcul du tenseur des déformations pour la cinématique 2.

### description de la cinématique

Le tenseur des déformations est choisi identique à celui de la cinématique 1, mais un mouvement du point  $P'$  dans le plan  $\tilde{u}_y(\tilde{y}, \tilde{z})\tilde{y} + \tilde{u}_z(\tilde{y}, \tilde{z})\tilde{z}$ , mouvement pour l'instant inconnu, est rajouté (voir figure 7.15).

### déformations

Le tenseur des déformations est aussi modifié par la présence de ces deux fonctions (voir figure 7.16).

### contraintes

On peut donc en déduire par la loi de l'élasticité, le tenseur des contraintes (voir figure 7.17). Si la poutre n'est pas chargée sur ses faces de normale  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ , les  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , et  $\sigma_{yz}$  doivent être nulles sur ces faces. Recherchons une solution telles qu'elles soient nulles dans toute la poutre, cela impose une relation sur les fonctions inconnues. Si l'on réécrit ces conditions en terme de déformation, le coefficient de poisson  $\nu$  entre les déformations apparaît (voir figure 7.18). On peut alors en déduire les champs de déplacement complémentaires pour assurer que les contraintes soient nulles sur les faces latérales de la poutre. On remarquera que cela implique en tout point de la section droite, que les contraintes  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , et  $\sigma_{yz}$  sont toutes nulles.

### torseur des efforts intérieurs

Par la même démarche que pour la cinématique 1, il faut donc faire des intégrales sur la section droite (voir figure 7.19) pour obtenir les composantes du torseur des efforts intérieurs. Dans les calculs présentés la nullité des moments statiques par rapport à H est utilisée.

### écriture matricielle

Les 6 équations précédentes peuvent être écrites sous forme matricielles.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= 2\mu \bar{\varepsilon} + d(\text{trace } \bar{\varepsilon}) \bar{\text{Id}} \\ \left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2\mu + d)(\varepsilon_{xx} + a_y \tilde{y} + a_z \tilde{z}) + d\left(\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}}\right) \\ \sigma_{yy} &= (2\mu + d)\left(\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}\right) + d\left(\varepsilon_{xx} + a_y \tilde{y} - a_z \tilde{z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}}\right) \\ \sigma_{zz} &= (2\mu + d)\left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}}\right) + d\left(\varepsilon_{xx} + a_y \tilde{y} - a_z \tilde{z} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}\right) \\ \sigma_{xy} &= \mu(\gamma_y - a_x \tilde{z} - a_z \tilde{y}) \\ \sigma_{xz} &= \mu(\gamma_z + a_x \tilde{y} + a_y \tilde{z}) \\ \sigma_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}}\right) \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + d \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} &= -d(\varepsilon_{xx} + a_y \tilde{y} - a_z \tilde{z}) \\ d \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} &= -d(\varepsilon_{xx} + a_y \tilde{y} - a_z \tilde{z}) \\ \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Figure 7.17: Calcul du tenseur des contraintes pour la cinématique 2 et des conditions de surfaces libres de contrainte.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} (2\mu + d) \varepsilon_{yy} + d \varepsilon_{zz} &= -d \varepsilon_{xx} \\ d \varepsilon_{yy} + (2\mu + d) \varepsilon_{zz} &= -d \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{-d}{2(\mu + d)} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_{zy} &= 0 \quad \text{car } \bar{\varepsilon} \text{ symétrique} \end{aligned} \right. \\ G_n \frac{-d}{2(\mu + d)} = -\nu \\ \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= -\nu \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yz} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \tilde{u}_y &= -\nu \varepsilon_{xx} \tilde{y} + a_0 \\ \tilde{u}_z &= -\nu \varepsilon_{xx} \tilde{z} + b_0 \end{aligned} \right. \\ \text{Pour } (\tilde{y}, \tilde{z}) = (0, 0) \text{ on choisit sans perte de généralité} \\ (\tilde{u}_y, \tilde{u}_z) = (0, 0) \text{ soit } a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 0. \end{aligned}$$

Figure 7.18: Relation entre les déformations pour la cinématique 2 et les champs de déplacement complémentaires.

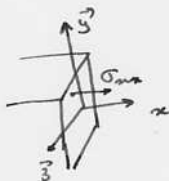
$$\begin{aligned}
N &= \iint \sigma_{xx} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \iint (2\mu + d) \varepsilon_x + d(-2\nu \varepsilon_x) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \varepsilon_x (2\mu + d - 2\nu d) \iint d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= E S \varepsilon_x \\
T_y &= \iint \sigma_{yx} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \iint \mu \gamma_y \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \mu S \gamma_y \\
T_z &= \mu S \gamma_z \\
M_y &= \iint \sigma_{xx} \tilde{z} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= E I_{Hy} \alpha_y \\
M_z &= \iint -\sigma_{xx} \tilde{y} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= E I_{Hz} \alpha_z \\
M_x &= G I_0
\end{aligned}$$


Figure 7.19: Expression des composantes du torseur des efforts intérieurs pour la cinématique 2.



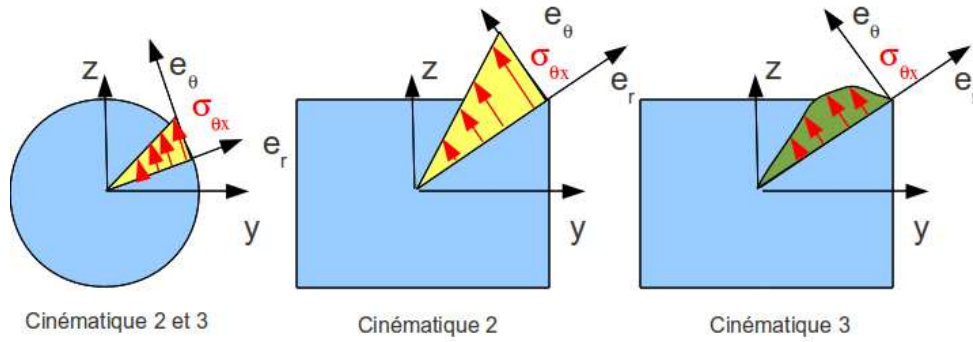


Figure 7.20: Répartition des contraintes de cisaillement dues à une sollicitation de torsion, en fonction de la forme de la section droite et de la cinématique choisie.

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

avec  $G$  le module de Coulomb,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7.15)$$

### incompatibilité

Cette cinématique implique que les contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  sont constantes dans l'épaisseur de la poutre, donc sur les surfaces extérieures latérales. Du fait de la symétrie du tenseur des contraintes, cela implique sur la surface de normale  $\vec{y}$  que la contrainte  $\sigma_{yx}$  soit non nulle. Or elle doit être égale à la contrainte exercée par l'extérieur sur cette surface. Si cette surface est libre, cette contrainte extérieure est nulle. Il y a donc contradiction entre la réalité et le modèle.

Il nous faut chercher une cinématique telles que la répartition des contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  soient des fonctions de  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  et nulles sur les bords de la section droite. C'est l'objet de la troisième cinématique qui implique un voilement de la section en présence d'un effort tranchant.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 810 et 076. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

#### 7.1.4 3ième cinématique

Le plan normal se déforme dans le plan tel que  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  restent nuls, et tel que les contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  soient nulles sur les bords de la section droite. Cette cinématique (Fig. 7.10) sera étudiée plus avant dans le cours de modélisation [11]. Nous y obtiendrons des facteurs correctifs du moment polaire et des sections équivalentes sous effort tranchant. Ces facteurs correctifs sont détaillés dans les tableaux (et non pas les équations) des figures 7.21 et 7.22. Il en est de même pour la sollicitation de torsion pour laquelle la proportionnalité de la contrainte de cisaillement avec la distance au point H n'est vérifiée que dans le cas d'une poutre de section droite circulaire (Fig. 7.20).



$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

On rappelle ci-dessous la loi de comportement pour la cinématique 2, qui ne diffère de la loi de comportement de la cinématique 3 que par trois termes, sur les lignes 2, 3 et 4 :

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

• **Erreur classique :** Ne pas confondre dans la notation ci-dessus,  $G$  le module de Coulomb exprimé en  $Pa$ , le centre de gravité de l'ensemble de la poutre  $G$  (c'est un point, cela n'a pas d'unité), et le barycentre d'une section droite  $H$  (c'est un point, cela n'a pas d'unité).



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 049. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.1.5 Exemple d'utilisation : sollicitation de traction

Pour une poutre sollicitée en traction-compression, seul l'effort normal  $N$  est différent de 0. La loi de comportement de la fibre moyenne 7.16 fournie donc,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N/ES \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Les composantes du tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  en un point  $P$  à la distance  $y_1$  et  $z_1$  de la fibre moyenne, sont alors données par,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= N/ES, \\ \epsilon_{yy} &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{zz} &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{xy} &= 0, \\ \epsilon_{yz} &= 0, \\ \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Les composantes du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  sont alors données par,

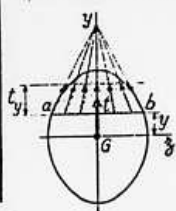
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= N/S, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= 0, \\ \sigma_{xy} &= 0, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

TABLEAU II. — EFFORT TRANCHANT - CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

TABLEAU II, 2. — SECTIONS USUELLES - CONTRAINTES DE CISAILLEMENT ET DÉFORMATION DUES A L'EFFORT TRANCHANT - FORMULES APPROCHÉES

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_1$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau II, 1 et des hypothèses supplémentaires suivantes :

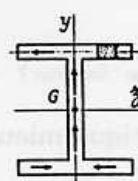
a) Cas des sections pleines.



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie  $Gz$  d'ordonnée  $y$ , coupant le contour de la section aux deux points  $a$  et  $b$  :

1. les contraintes de cisaillement,  $t$ , passent toutes par le point de concours des deux tangentes en  $a$  et  $b$  au contour de la section.
2. la composante  $t_y$  suivant  $Gy$  des contraintes de cisaillement  $t$  est constante.

b) Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTES DE CISAILLEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_1$
Triangle isocèle			$t_y = \frac{6T}{S} \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$ $S = \frac{bh}{2}$	$t_y = 1,5 \frac{T}{S}$ pour $y = -\frac{h}{3}$		
Rectangle			$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ pour $y = 0$		$S_1 = \frac{5}{6} S$
Losange			$t_y = \frac{T}{S} \left[ 1 + \frac{y}{h} - \frac{2y^2}{h^2} \right]$ $t_x = t_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ $S = a \cdot h$	$t_y = \frac{9}{8} \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{4}$		$S_1 = \frac{30}{31} S$
Carré évidé				$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \frac{1 + k + k^2}{1 + k^2}$ pour $mm$		

Figure 7.21: Effet du cisaillement p1

Tableau II, 2. — Sections usuelles - Contraintes de cisaillement et déformation dues à l'effort tranchant - Formules approchées (suite)

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFOR- MATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_1$
Hexagone			$t_y = \frac{T}{2,88 h^4} \frac{(h-y)(2h^2 + 3yh - y^2)}{(2h-y)}$ $S = 3,464 h^2$	$t_y = 1,46 \frac{T}{S}$ point A direction AB		
Cercle			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$ $t \text{ en A} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$S_1 = \frac{9}{10} S$
Ellipse			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ $S = \pi a b$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		
Section en I			$t_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^3 - (b - b') (h - 2e)^2}$ $t_2 = t_1 (b/b')$ $t_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{b'h} \frac{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^2}{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)}$	$t_y = t_2$		
Section circulaire mince			$t_{\varphi} = \frac{2T}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$t_A = t_B = \frac{2T}{S}$		$S_1 = 0,5 S$
Profil mince en I			$t_{2(aille)} = \frac{T}{I} (b - z) h$ $t_{2(dme)} = \frac{T}{I e} \left[ z b e' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$ $I = \frac{h^3}{3} (S + 6S')$	$t_{2(A)} = \frac{T}{I} b h$ $t_{2(B)} = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $t_{2(C)} = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		$S_1 = 2 h e$

Figure 7.22: Effet du cisaillement p2

On note dans ce cas particulier que les tenseurs des contraintes et des déformations ne dépendent pas de la position du point  $P$  par rapport au point  $H$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 054. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.1.6 flexion simple autour de l'axe $H\vec{z}$

Une poutre est sollicitée en flexion simple autour de l'axe  $H\vec{z}$  lorsque  $M_{fz}$  et  $T_y$  sont différents de 0. La loi de comportement de la fibre moyenne 7.16 fournie donc,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_y/GS_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{fz}/EI_{Hz} \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Les composantes du tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  en un point  $P$  à la distance  $y_1$  et  $z_1$  de la fibre moyenne, sont alors données par,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(y_1, z_1) &= -\frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} y_1, \\ \epsilon_{yy}(y_1, z_1) &= -\nu \epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{zz}(y_1, z_1) &= -\nu \epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{xy}(y_1, z_1) &= \frac{T_y}{GS} g(y_1), \\ \epsilon_{yz} &= 0, \\ \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

La répartition des déformations dans l'épaisseur de la poutre n'est pas constante (cinématique 3). La fonction  $g(y_1)$  peut être calculée (voir cours de 2ième année à venir). C'est la raison pour laquelle il faut corriger la section en cisaillement ( $S_y$ ) dans la loi de comportement. Des exemples de ces fonctions sont fournies dans les tableaux joints (figures 7.21 7.22).

Les composantes du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  sont alors données par,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(y_1, z_1) &= -\frac{M_{fz}}{I_{Hz}} y_1, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= 0, \\ \sigma_{xy}(y_1, z_1) &= \frac{T_y}{S} g(y_1), \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{zx} &= 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

avec  $\sigma_{xy}(y_1, z_1) = t_y$  du tableau précédent.

On note dans ce cas particulier que les tenseurs des contraintes et des déformations dépendent de la position du point  $P$  par rapport au point  $H$ .

## 7.2 Dimensionnement

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 7.23.

### 7.2.1 Cercle de Mohr des contraintes

Voir le cours de Mécanique des solides déformables [12].

### 7.2.2 Critères de limite d'élasticité

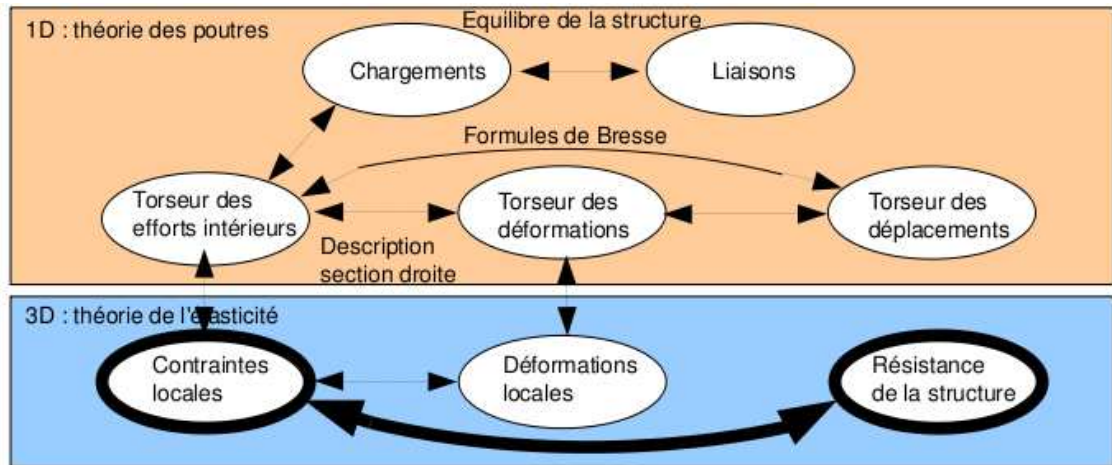


Figure 7.23: Les concepts utiles au passage direct du torseur des efforts intérieurs au torseur de déplacement.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 010 Comment choisir entre Tresca et Von Mises, pour dimensionner une structure ?, 304 La charge maximale en torsion est différente si la section est carrée. Pourquoi ?.

## Rappels

Nous ne rappelons ici que quelques définitions.

- Contraintes principales Le tenseur des contraintes exprimé dans la une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  correspondant aux directions principales a pour forme

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \otimes (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}. \quad (7.24)$$

- Les invariants de ce tenseur sont

$$I_1(\bar{\sigma}) = \text{trace}(\bar{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (7.25)$$

$$I_2(\bar{\sigma}) = (\text{trace}(\bar{\sigma}))^2 - \text{trace}(\bar{\sigma}^2) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (7.26)$$

$$I_3(\bar{\sigma}) = \det(s) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (7.27)$$

- Les parties sphérique  $\bar{S}$  et déviatorique  $\bar{D}$  peuvent aussi être calculées :

$$\bar{S} = \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{Id}, \quad (7.28)$$

$$\bar{D} = \bar{\sigma} - \bar{S}, \quad (7.29)$$

avec  $\bar{Id}$  le tenseur identité constitué de 1 sur la diagonale.



### Critère de Von-Mises

Le critère de Von-Mises est lié à la partie déviatorique du tenseur des contraintes

$$-I_2(\overline{\overline{D}}) < g^2, \quad (7.30)$$

soit

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx})^2 < g^2, \quad (7.31)$$

avec  $g$  la valeur de contrainte à ne pas dépasser. Dans un espace engendré par les contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la limite de Von Mises est un cylindre d'axe  $(1,1,1)$  et de section circulaire de rayon  $g$ .

### Critère de Tresca

Le vecteur contrainte tangentielle a un module inférieur à une valeur  $\tau$ . Dans un espace engendré par les contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la limite de Tresca est un cylindre d'axe  $(1,1,1)$  et de section hexagonale de côté  $\tau$ .

### 7.2.3 Méthode de calcul : détermination des limites d'élasticité



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 265 *Comment chercher le point le plus sollicité ?*, 291 *Où sont les fibres supérieure et inférieure ?*.

Lors des travaux pratiques, les charges maximales à appliquer à la structure doivent absolument être calculées avant de faire les essais. L'enseignant, ne vous donnera l'autorisation de charger cette structure que lorsque vous lui aurez fourni les valeurs que vous ne dépasserez pas.

La démarche à suivre est la suivante :

- bilan des actions
- calcul du torseur des efforts intérieurs
- détermination des évolutions de ses composantes le long de la poutre (avec l'abscisse curviligne  $s$ ) :
  - effort normal :  $N(s) =$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  :  $T_y(s) =$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  :  $T_z(s) =$
  - moment de torsion :  $M_x(s) =$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{y}$  :  $M_{fy}(s) =$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{z}$  :  $M_{fz}(s) =$
- recherche du point le plus sollicité : Les critères de limite d'élasticité s'écrivant en élasticité, il faudrait calculer le tenseur des contraintes en tout point P est lui appliquer un critère (par exemple de Von Mises pour de l'acier). On peut simplifier le critère dans quelques cas particuliers :

si la poutre est soumise à de la flexion  $M_{fz}$ , de l'effort tranchant  $T_y$  et de l'effort normal  $N$ , la contrainte en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{y}\vec{y} + \hat{z}\vec{z}$  est donnée par :

$$\sigma_{xx}(s, \hat{y}) = \frac{N(s)}{S(s)} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}(s)}. \quad (7.32)$$

Il faut rechercher le maximum et le minimum de  $\sigma_{xx}$ . On considérera donc les demie-épaisseurs de la poutre  $\hat{y}_{maxi} = h(s)/2$  ou  $\hat{y}_{maxi} = -h(s)/2$ . On se limitera :

- pour de l'acier à  $-240 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 240 \text{ MPa}$  ,
- pour de l'aluminium et ses alliages à  $-30 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 30 \text{ MPa}$  ,
- pour du bois sollicité dans le sens des fibres (longitudinalement) à  $-20 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 50 \text{ MPa}$  .

Pour les autres matériaux, consultez les tableaux affichés en salle tp.

si la poutre est soumise à de la torsion pure  $M_x$ , et que la section est circulaire de rayon  $r(s)$ , alors la contrainte est une contrainte de cisaillement. Elle est donnée en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{r}\vec{e}_r$  par,

$$\sigma_{x\theta}(s, \hat{r}) = \frac{M_x(s)\hat{r}}{I_0(s)}. \quad (7.33)$$

Sa valeur maximale est donnée pour  $\hat{r} = r(s)$ . On se limitera :

- pour de l'acier à  $-240/2 \text{ MPa} < \sigma_{x\theta} < 240/2 \text{ MPa}$  ,
- pour de l'aluminium et ses alliages  $-30/2 \text{ MPa} < \sigma_{x\theta} < 30/2 \text{ MPa}$  ,

Pour les autres matériaux, consultez les tableaux affichés en salle tp.

dans le cas où en un point est présent une contrainte normale  $\sigma_{xx}$  et une contrainte de cisaillement  $\sigma_{x\theta}$ , alors on calculera une contrainte équivalente (de Tresca),

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{x\theta}^2}. \quad (7.34)$$

Sa valeur doit être comprise :

- pour de l'acier entre  $-240 \text{ MPa} < \sigma_{equiv} < 240 \text{ MPa}$  ,
- pour de l'aluminium et ses alliages entre  $-30 \text{ MPa} < \sigma_{equiv} < 30 \text{ MPa}$  ,

## 7.2.4 Exemple de calcul

Soit une poutre droite  $AB = l\vec{i}$  (avec  $l = 0.2 \text{ m}$ ), encastree au point A et chargé par un effort  $F\vec{j}$  en B, de section circulaire de rayon  $r = 0.005 \text{ m}$ , en acier. Calculez la force  $F$  maximale admissible par la structure.

- bilan des actions :

une liaison encastrement en A  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_A$  ;

un torseur de chargement  $\left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ 0 \end{array} \right\}_B$

- calcul du torseur des efforts intérieurs : on oriente la poutre de A vers B. Le torseur des efforts intérieurs en  $H(s)$  tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ , se calcule en fonction de la partie aval :

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ F(l-s)\vec{k} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ F(l-s)\vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (7.35)$$

avec  $(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère local en  $H$ .

- détermination des évolutions de ses composantes le long de la poutre (avec l'abscisse  $s$ ) :

- effort normal :  $N(s) = 0$
- effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  :  $T_y(s) = F$
- effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  :  $T_z(s) = 0$
- moment de torsion :  $M_x(s) = 0$
- moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{y}$  :  $M_{fy}(s) = 0$
- moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{z}$  :  $M_{fz}(s) = F(l-s)$

- recherche du point le plus sollicité :

La poutre est soumise à de la flexion  $M_{fz}$  de l'effort tranchant  $T_y$ , la contrainte en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{y}\vec{y} + \hat{z}\vec{z}$  est donnée par :

$$\sigma_{xx}(s, \hat{y}) = -\frac{F(l-s)\hat{y}}{\pi r^4/4}. \quad (7.36)$$

Il faut rechercher le maximum et le minimum de  $\sigma_{xx}$ . On considérera donc les demie-épaisseurs de la poutre  $\hat{y}_{maxi} = r$  ou  $\hat{y}_{maxi} = -r$ . On obtient donc :

$$\sigma_{xx}(0, -r) = \frac{Flr}{\pi r^4/4} = \frac{4Fl}{\pi r^3}, \quad (7.37)$$

d'où,

$$F < \frac{240 \cdot 10^6 \text{ Pa} \pi r^3}{4l}. \quad (7.38)$$

Soit pour une poutre de rayon  $r = 0.005$  m et une longueur de  $l = 0.2$  m, une force maximale admissible de  $F = 118$  N.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 076, 821, 822. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.



**Formation à la compétence verte de statique des poutres.**



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser une présentation de cette compétence. Le fichier est nommé *209 Compétence verte de statique des poutres : détermination du torseur de déplacement en un point*.

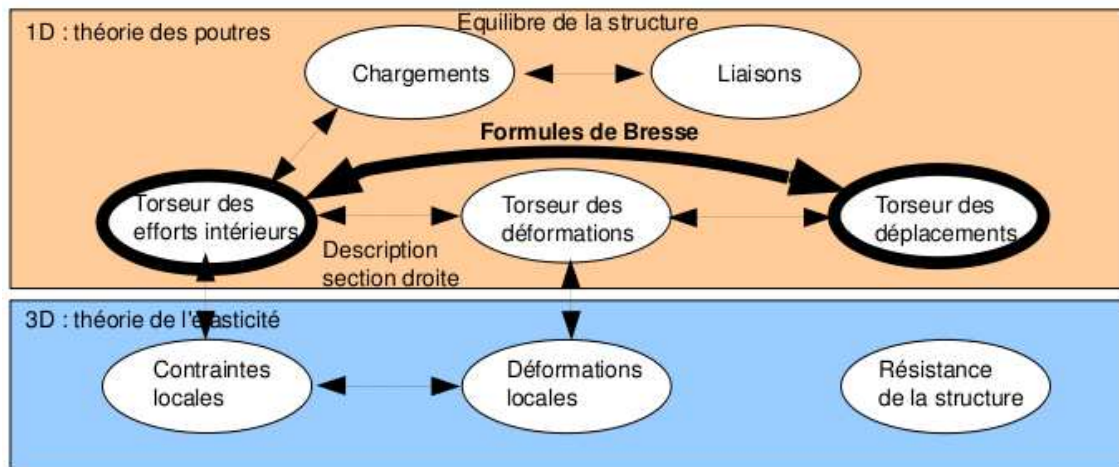


Figure 7.24: Les concepts utiles au passage direct du torseur des efforts intérieurs au torseur de déplacement.

### 7.2.5 Formules de Bresse



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 008 Pourquoi doit-on utiliser dans les formules de Bresse, les valeurs corrigées des aires des sec-

tions et du moment polaire ?, 306 : Pourriez vous nous renseigner sur l'utilisation de WX-Maxima ? Et nous préciser si on peut l'utiliser dans le cadre des ceintures. Merci. 307 : A quel moment a-t-on un angle de rotation non nul dans la formule de Bresse ? A quoi correspond-t-il exactement ? 328 : Comment peut-on obtenir la formule 5.73 et comment de l'appliquer. Particulièrement le coefficient 1.6, je sais pas du tout comment de l'obtenir. 329 : Pourrait-on avoir un exemple de rédaction d'un brevet du même type que le 821 ? (notamment avec le calcul du torseur des efforts intérieurs). J'ai des difficultés à formaliser mon raisonnement..

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 7.24.

Utilité : L'utilisation des Formules de Bresse, permet de résoudre des problèmes :

- dans l'espace tridimensionnel,
- pour des poutres dont la ligne moyenne n'est pas rectiligne.

C'est leur généralité qui leur donne toute leur force. Elles sont donc étudiées dans ce cours plutôt que se limiter aux méthodes associées uniquement aux poutres droites qui utilisent des formules du type  $EI_{Hz} \frac{d^2 y}{dx^2} = M_f z$ . Ces formules ne sont pas valables dans le cas de chargement tridimensionnels.

Les formules de Bresse peuvent être construites par approche successive. Soit une poutre reliant un point A à un point B, orientée de A vers B, le point courant étant noté H.

- Supposons que cette poutre soit infiniment rigide. Si le point A subit un torseur de déplacement composé d'un angle de rotation  $\tilde{\omega}_A$  et d'une translation  $\vec{u}_A$ , alors le torseur de déplacement au point B est obtenu par la formule de changement de point.

$$\tilde{\omega}_B = \tilde{\omega}_A, \quad (7.39)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \tilde{\omega}_A \wedge \vec{AB}. \quad (7.40)$$

- Supposons cette fois que le point A est immobile mais que seul se déforme un petit tronçon HH' de longueur  $ds$  à partir du point H. Le torseur de déplacement de H' est composé de  $\check{\omega}_{H'} = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds$  et d'une translation  $\vec{u}_{H'} = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds$ . La déformation de ce petit segment implique un torseur de déplacement au point B :

$$\check{\omega}_B = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds, \quad (7.41)$$

$$\vec{u}_B = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds + (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds \wedge \vec{H}\vec{B}. \quad (7.42)$$

- Supposons cette fois que le point A est mobile et que toute la poutre se déforme. Il suffit de faire la somme des torseurs : du premier et du second que l'on aura intégré le long de toute la poutre AB. On obtient les formules de Bresse ci-dessous.

Soit une poutre dont l'orientation de la fibre moyenne est de  $P_{deb}$  à  $P_{fin}$ , si le torseur des déformations est noté,

$$\{Def_H\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z} \\ N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (7.43)$$

avec le module de Coulomb  $G$  donné par (Eq. 7.15)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.44)$$

Alors le torseur de déplacement au point  $P_{fin}$  par rapport au torseur de déplacement du point  $P_{deb}$  est,

$$\begin{aligned} \{U_{Pfin}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{Pfin} \\ \vec{u}_{Pfin} \end{array} \right\}_{Pfin} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{Pdeb} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds \\ \vec{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb}\vec{P}_{fin} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds \\ \quad + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) \wedge \vec{H}\vec{P}_{fin}ds \end{array} \right\}_{Pfin} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{Pdeb} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z})ds \\ \vec{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb}\vec{P}_{fin} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z})ds \\ \quad + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H}\vec{P}_{fin}ds \end{array} \right\}_{Pfin} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Dans la formule de Bresse, les sections corrigées  $S_y$  et  $S_z$  sont indiquées dans la figure 7.21, dans l'avant dernière colonne. Elles diffèrent en fonction de la forme de la section droite.

Les formules de Bresse ci-dessus sont relatifs à la cinématique 3. Nous rappelons ci-dessous, les formules de Bresse pour la cinématique 2, qui ne diffèrent que par 3 termes :

$$\begin{aligned} \{U_{Pfin}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{Pfin} \\ \vec{u}_{Pfin} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{Pdeb} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/G\mathbf{I}_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z})ds \\ \vec{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb}\vec{P}_{fin} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (N/ES \vec{x} + T_y/G\mathbf{S}_y \vec{y} + T_z/G\mathbf{S}_z \vec{z})ds \\ \quad + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/G\mathbf{I}_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H}\vec{P}_{fin}ds \end{array} \right\}_{Pfin} \end{aligned} \quad (7.46)$$

• **Erreur classique la plus souvent commise (une seule fois... après vous ne le ferez plus !)** : Les formules de Bresse sont écrites dans le repère local. Lorsque vous faites les calculs et que l'on vous demande à la fin les valeurs de déplacement ou de rotation dans le repère global, il

est nécessaire de refaire le changement de repère. Si la poutre est avec un repère local qui dépend continuellement de  $s$ , alors exprimez le repère local dans le repère global, puis faite l'intégration.

• **Erreur classique :** Une fois les formules de Bresse utilisées, votre résultat ne doit plus faire apparaître les coordonnées du point  $H$ . Si c'est le cas, c'est que vous n'avez pas effectué l'intégration entre les abscisses  $s_{Pdeb}$  et  $s_{Pfin}$ .

• **Erreur classique :** Si dans un problème donné, le déplacement en  $P_{fin}$  est connu et que vous recherchez le déplacement en  $P_{deb}$ , écrivez la formule de Bresse comme ci-dessus, puis passer les termes complémentaires à  $\vec{u}_{P_{fin}}$  de l'autre côté de l'égalité.

• **Erreur classique :** Si vous utilisez les formules de Bresse entre un point  $s_{Pdeb}$  et  $s_{Pfin}$  et que vous devez couper l'intégrale en deux en passant par un point  $s_{Pint}$  (comme "intermédiaire", la formule de Bresse en déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{u}_{P_{fin}} = & \vec{u}_{P_{deb}} + \vec{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} \\ & + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pint}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ & + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pint}} (M_x/GI_0^c \check{x} + M_{fy}/EI_{Hy} \check{y} + M_{fz}/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \\ & + \int_{s_{Pint}}^{s_{Pfin}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ & + \int_{s_{Pint}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + M_{fy}/EI_{Hy} \check{y} + M_{fz}/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds. \quad (7.47)\end{aligned}$$

Vous noterez bien que le vecteur après le produit vectoriel reste  $\vec{H} \vec{P}_{fin}$  dans les deux intégrales.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 093, 041, 042, 095, 050, 089, 051, 052, 053, 096 et 007. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

## 7.3 Résolutions de problèmes

Si l'objectif est de calculer un déplacement (ou une rotation) d'un point de la poutre, il faut :

- choisir un point de départ où le déplacement et/ou la rotation est connue
- orienter la poutre du point de départ au point où s'effectue la recherche de déplacement
- écrire la ou les formules de Bresse nécessaires
- identifier les composantes du torseur des efforts intérieurs qui doivent être calculées, et sur quel segment,
- calculer ces composantes en fonction du chargement (et des éventuelles inconnues hyperstatiques (en vert)). Le choix judicieux du secteur aval ou amont peut parfois permettre d'éviter de calculer les réactions aux liaisons.
- deux cas sont possibles :

- le système est hyperstatique
    - \* il faut écrire une équation supplémentaire : elle concerne le degré de liberté dual de l'inconnue hyperstatique (en vert).
    - \* Si c'est une force dans une direction, c'est le déplacement dans cette direction. Si c'est un moment autour d'un axe, c'est la rotation autour de cet axe.
    - \* Calculer (comme ci-dessus par les formules de Bresse ou une méthode énergétique) le déplacement recherché (ou la rotation recherchée). Ceci vous donne une équation supplémentaire qui lie l'inconnue hyperstatique (en vert) aux chargements (en rouge).
    - \* Remplacer dans les expressions des composantes d'effort intérieur, l'inconnue hyperstatique (en vert) par son expression en fonction du chargement,
  - si le système est isostatique, les composantes du torseur des efforts intérieurs sont alors connues en fonction uniquement des chargements (en rouge).
- injecter ces expressions dans les formules de Bresse,
  - faire les intégrales



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 075. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.3.1 Résolution par superposition

#### Hypothèses

Pour que le principe de superposition soit valide, il faut que la loi de comportement du matériau utilisé soit linéaire et que les déplacements soient petits devant les dimensions de la structure. Cette deuxième condition s'exprime plus précisément par le fait qu'il faut que le torseur des efforts intérieurs ne varie que de façon négligeable s'il est calculé pour la poutre dans sa configuration initiale et s'il est calculé dans sa configuration déformée.

#### Enoncé

Soit une structure élastique linéaire, sous un ensemble de chargements  $\{\tau_1\}$  cette structure subit un champs de déplacement  $\{U_1\}$ , sous un ensemble de chargements  $\{\tau_2\}$  cette structure subit un champs de déplacement  $\{U_2\}$ , alors si elle est chargée simultanément par  $\{\tau_1\} + \{\tau_2\}$ , son champs de déplacement est  $\{U_1\} + \{U_2\}$ .

#### Exemple

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, de moment quadratique  $I_{Hz} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$  autour de l'axe  $H\vec{z}$ , reliant les points A et B, tel que  $\vec{AP} = l\vec{i}$  et que le point A est encastré.

- Cette poutre sous une charge en B  $\vec{F} = 100\vec{j}$  N, subit un déplacement en B qui vaut  $\vec{u}_B = 0.0159\vec{j}$  m.
- Cette poutre sous un couple  $\check{C} = 100\check{k}$  N.m en D, milieu de [AB], subit un déplacement en B qui vaut  $\vec{u}_B = 0.0179\vec{j}$  m.

Sous les deux chargements, le déplacement du point B vaut  $\vec{u}_B = 0.0338\vec{j}$  m.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 056, 074, 097 et 057. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

**Formation à la compétence marron de statique des poutres.**



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser une présentation de cette compétence. Le fichier est nommé .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 091. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.3.2 Méthodes énergétiques



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 009 *Entre formules de Bresse et Castigliano, comment choisir la méthode de résolution ?*.

Les formules de Bresse nécessitent des calculs dans des espaces vectoriels, alors que bien souvent, c'est un déplacement dans une direction, une rotation autour d'un axe ou un état de déformation qui est cherché. Ce sont des grandeurs scalaires (des tenseurs d'ordre 0). Il est donc intéressant de mettre en place une méthode de résolution qui utilise une grandeur scalaire : l'énergie.

#### Energie de Déformation

Par définition l'énergie de déformation dans une structure composée de poutres correspond à la somme sur toute la poutre de l'énergie de déformation dans chacune des sections droites. Cette énergie de déformation locale est le comoment du torseur des déformations de la section droite et du torseur des efforts intérieurs. Le fait que la structure soit élastique, fait apparaître le coefficient 1/2 de part la proportionnalité de ces deux torseurs. En utilisant la loi de comportement de la cinématique 3, on peut remplacer le torseur des déformations par son expression du torseur des efforts intérieurs. On obtient ainsi la formule 7.48.

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_{structure} \left( \frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_y} + \frac{T_z^2}{GS_z} + \frac{M_x^2}{GI_0^c} + \frac{M f_y^2}{EI_{Hy}} + \frac{M f_z^2}{EI_{Hz}} \right) ds. \quad (7.48)$$

#### Travail des chargements extérieurs

Les chargements extérieurs sont de deux types :

- les réactions aux liaisons
- les chargements imposés

Supposons que pour une poutre, un unique chargement soit imposé en un point B et que celui-ci soit représenté par un torseur  $\{\tau_B\}$  dont les deux composantes  $\vec{F}$  et  $\check{C}$  croissent proportionnellement. Sous l'effet de ce chargement le point B subit un champs de déplacement représenté par le torseur  $\{U_B\}$  composé d'une résultante  $\check{\omega}$  et d'un moment  $\vec{u}_B$ . Le travail de ce torseur de chargement entre l'état repos et l'état chargé est la moitié du comoment des torseurs de chargement et de déplacement :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \left( \vec{F} \cdot \vec{u}_B + \check{C} \cdot \check{\omega} \right). \quad (7.49)$$

Les réactions aux liaisons, si elles sont parfaites, ne travaillent pas. En effet, soit la composante de déplacement ou de rotation est nulle alors qu'une réaction est présente, soit la composante de déplacement ou de rotation n'est pas nulle, mais la composante de force ou de couple est nulle.



### Travail d'un chargement constant lors d'un mouvement dû à une autre charge

Supposons qu'un torseur de chargement  $\{\tau_A\}$  soit appliqué à un point A et que ce point A subisse un torseur de déplacement  $\{U_A\}$  dû à un autre chargement. Le travail de  $\{\tau_A\}$  dans le mouvement  $\{U_A\}$  est,

$$W_{ext} = \left( \vec{F} \cdot \vec{u}_A + \check{C} \cdot \check{\omega} \right), \quad (7.50)$$

qui diffère de l'équation 7.49 simplement par l'absence du coefficient  $\frac{1}{2}$ .

### Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Supposons maintenant qu'un système subisse :

- un premier chargement  $\{\tau_1\}$  en un point A qui implique un champs de déplacement  $\{U_1\}$  en tout point de la poutre. Ce premier chargement est suivi d'un second  $\{\tau_2\}$  en un point B, qui implique un champs de déplacement supplémentaire  $\{U_2\}$ . Dans la première phase, le travail extérieur est  $W_{11} = \frac{1}{2} \left( \vec{F}_A \cdot \vec{u}_{1A} + \check{C}_A \cdot \check{\omega}_{1A} \right)$ . Dans la seconde phase il est  $W_{12} + W_{22} = \left( \vec{F}_A \cdot \vec{u}_{2A} + \check{C}_A \cdot \check{\omega}_{2A} \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{F}_B \cdot \vec{u}_{2B} + \check{C}_B \cdot \check{\omega}_{2B} \right)$ .
- un premier chargement  $\{\tau_2\}$  en un point B qui implique un champs de déplacement  $\{U_2\}$  en tout point de la poutre. Ce premier chargement est suivi d'un second  $\{\tau_1\}$  en un point A, qui implique un champs de déplacement supplémentaire  $\{U_1\}$ . Dans la première phase, le travail extérieur est  $W_{22} = \frac{1}{2} \left( \vec{F}_B \cdot \vec{u}_{2B} + \check{C}_B \cdot \check{\omega}_{2B} \right)$ . Dans la seconde phase il est  $W_{21} + W_{11} = \left( \vec{F}_B \cdot \vec{u}_{1B} + \check{C}_B \cdot \check{\omega}_{1B} \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{F}_A \cdot \vec{u}_{1A} + \check{C}_A \cdot \check{\omega}_{1A} \right)$ .

Le champ de déplacement total ne dépend pas de l'ordre dans lequel les chargements ont été appliqués. Le travail des forces extérieures n'en dépend donc pas. Egaler ces travaux amène à l'égalité  $W_{12} = W_{21}$  : *le travail du chargement 1 dans le déplacement 2 est égal au travail du chargement 2 dans le déplacement 1*.

A titre d'illustration, si le chargement 1 est une force  $\vec{F}_{1A}$  en A qui implique un déplacement  $\vec{u}_{1B}$  en B, le chargement 2 est une force  $\vec{F}_{2B}$  en B qui implique un déplacement  $\vec{u}_{2A}$  en A, alors,

$$\vec{F}_{1A} \cdot \vec{u}_{2A} = \vec{F}_{2B} \cdot \vec{u}_{1B}. \quad (7.51)$$

Si les modules des forces et leurs directions sont les mêmes, et que les déplacements sont mesurés dans les directions de ces forces,

$$u_{2A} = u_{1B}. \quad (7.52)$$

Si l'on appelle  $c_{12} = \frac{u_{1B}}{F_{1A}}$ , le coefficient d'influence d'une force en A sur le déplacement en B, on a alors l'égalité des coefficients d'influence,

$$c_{12} = c_{21}. \quad (7.53)$$

Le coefficient d'influence n'est rien d'autre que la fonction de réponse en fréquence entre le point A et le point B à fréquence nulle.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 058 et 098. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### Théorème de Castigliano

Sur l'exemple du ressort de raideur  $k$ , montrons que le déplacement  $u$  est relié à la force  $F$  par  $u = \frac{\partial W_{ext}}{\partial F}$ .  $W_{ext} = \frac{1}{2}uF$ , or  $u = F/k$ , donc  $W_{ext} = \frac{1}{2}F^2/k$ , d'où  $\frac{\partial W_{ext}}{\partial F} = F/k$  et  $\frac{\partial W_{ext}}{\partial F} = u$ .

Si le système est conservatif, le travail des chargements extérieurs est stocké sous la forme d'énergie interne. On a donc l'égalité  $W_{int} = W_{ext}$ .

On peut donc énoncer de façon plus générale, le théorème de Castigliano comme suit.

Pour un effort  $F\vec{n}$  en un point A,

$$\vec{u}_A \cdot \vec{n} = \frac{\partial W_{int}}{\partial F}. \quad (7.54)$$

Pour un couple  $C\vec{n}$  en un point A,

$$\vec{\omega}_A \cdot \vec{n} = \frac{\partial W_{int}}{\partial C}, \quad (7.55)$$

Le théorème de Castigliano peut aussi être utilisé en un point non chargé. Pour cela,

- on ajoute au chargement réel un chargement fictif dual du déplacement recherché,
- on calcule le torseur des efforts intérieurs dû à ces chargements
- on utilise le théorème de Castigliano, et on trouve le déplacement en fonction du chargement réel et fictif,
- dans le résultat de déplacement, on annule le chargement fictif pour retrouver le problème réel initial.

• **Optimisation classique des calculs :** Il ne faut pas calculer l'intégrale de l'énergie de déformation, avant de faire la dérivation par rapport au paramètre  $q$ , mais échanger les signes intégration et dérivation pour faire la dérivation en premier. En effet, si une composante ne dépend pas du paramètre de dérivation (par exemple  $N$ ), le terme  $2N \frac{\partial N}{\partial q} = 0$ , cela n'aurait servi à rien de calculer  $\frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{N^2}{ES} ds$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 059. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.3.3 Résolution de systèmes hyperstatiques

Extérieurement



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser une présentation de cette compétence. Le fichier est nommé 309: Méthodologie pour une structure hyperstatique intérieurement..

Dans le paragraphe 5.3, vous avez déterminé si le système étudié était isostatique ou hyperstatique par rapport aux liaisons avec le monde extérieur. Pour chaque inconnue hyperstatique, vous avez écrit, paragraphe 5.3, l'équation cinématique associée permettant d'obtenir une équation supplémentaire. Le calcul de la valeur du degré de liberté associé peut être fait :

- par les formules de Bresse, appliquées au système isostatique associé.
- par Castigliano.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *012 Pourriez-vous nous éclairer sur la méthode de résolution d'un problème hyperstatique intérieurement ?*.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 077. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

Formation à la compétence noire de statique des poutres.

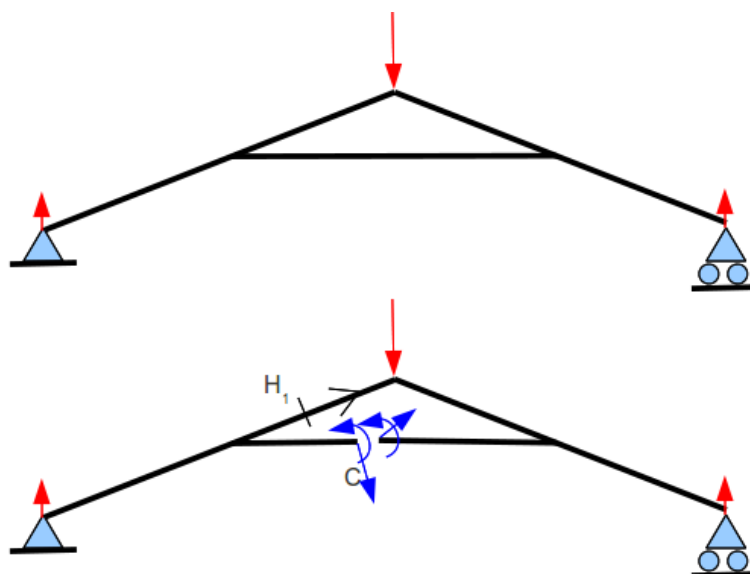


Figure 7.25: Un système hyperstatique intérieurement nécessite d'effectuer une coupure en un point arbitraire C.

### Intérieurement



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 012 Pourriez-vous nous éclairer sur la méthode de résolution d'un problème hyperstatique intérieurement ? 308 : Y-a-t-il des brevets sur la résolution des problèmes hyperstatiques intérieurement ?

Un système est hyperstatique intérieurement, lorsque la fibre moyenne est fermée (voir figure 7.25).

En effet, si l'on effectue une étude du torseur des efforts intérieurs en un point H, il est nécessaire de définir les segments seg+ et seg-. Or, si la fibre moyenne est fermée, ces segments sont reliés entre eux par la fibre moyenne sans passer par H. Il est alors impossible de définir le torseur des efforts intérieurs.

Le démarche à suivre est donc la suivante :

- on choisit un point de coupure C sur la fibre moyenne fermée.
- on coupe par la pensée la fibre moyenne en C
- on charge les deux faces de la coupure avec deux torseurs  $\{\tau_1\}$  et  $\{\tau_2\}$  dont les 6 composantes sont inconnues. Nous avons donc a priori 12 inconnues hyperstatiques. Dans le cas d'un problème plan, les deux torseurs n'auront que 3 inconnues chacun: deux de résultantes et une de moment.
- Des relations existent entre ces 12 composantes. Pour les trouver, on isole un petit tronçon de fibre moyenne de longueur  $2ds$  autour du point C ce qui définit les point C' et C'', puis on écrit l'équilibre de ce petit tronçon qui est chargé par  $-\{\tau_1\}_{C'}$ ,  $-\{\tau_2\}_{C''}$  et éventuellement un chargement concentré connu en C  $\{\tau_C\}$ . L'équilibre fournit 6 équations reliant les composantes de  $\{\tau_2\}$  à celles de  $\{\tau_1\}$  et  $\{\tau_C\}$ . On fera tendre  $ds$  vers 0, afin de simplifier les relations.

- La fibre moyenne de la structure n'est alors plus fermée, le torseur des efforts intérieurs en un point H peut être calculé classiquement en fonction des chargements extérieurs et des composantes de  $\{\tau_1\}$
- Pour déterminer les valeurs des inconnues hyperstatiques, on agira classiquement en utilisant Castigliano : la nullité traduit que le déplacement relatif de C'' par rapport à C' est nul et que la rotation relative de C'' et C' est nulle.

**Exemple de résolution** Soit une poutre en acier de section circulaire de diamètre  $d = 0.01$  m dont la fibre moyenne est constituée de 4 segments de droite AB, BC, CD et DA dont les coordonnées respectives dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(2a, a, 0)$ ,  $(-2a, a, 0)$ ,  $(-2a, -a, 0)$ ,  $(2a, -a, 0)$  avec  $a = 0.2$  m. Cette poutre est chargée au point E milieu de DA par une force  $F\vec{i}$ , et est en appui simple au point G milieu de BC.

La symétrie du système et du chargement par rapport à l'axe  $O\vec{i}$  nous invite à travailler sur un demi-système, par exemple GBAE, en bloquant en G la rotation et en E la translation dans la direction  $\vec{j}$  et la rotation. Cela revient donc à mettre en G un encastrement et en E une liaison glissière bidimensionnelle d'axe  $E\vec{i}$ . Le système est devenu hyperstatique extérieurement.

Dans la résolution qui suit, nous ne le ferons pas afin de rester hyperstatique intérieurement et de bien faire apparaître le torseur de coupure. Cette démarche n'est pas optimale, mais rien n'assure que les problèmes que vous aurez à résoudre posséderont des symétries.

Le problème est bidimensionnel. La fibre moyenne est fermée : il est nécessaire de faire une coupure. Nous choisissons de couper au point I milieu de AB. Tout autre point de la fibre moyenne aurait convenu en évitant les points de liaison et de chargement. Le torseur de coupure en I qui agit sur le segment AI sera noté :

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (7.56)$$

Par le principe d'action et de réaction, le torseur en I agissant sur le segment IB est :

$$\{-\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_1\vec{i} - F_2\vec{j} \\ -C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (7.57)$$

Si le point I appartient à un plan de symétrie du problème et que ce point I n'est pas chargé par une force extérieure perpendiculaire à la fibre moyenne, alors  $F_2 = 0$ .

Si le point I appartient à un plan de symétrie du problème et que ce point I est chargé par une force extérieure  $F_3$  perpendiculaire à la fibre moyenne, alors  $F_2 = F_3/2$ .

Ces simplifications sont obtenues en faisant l'équilibre d'un petit tronçon infiniment petit en I de longueur  $\epsilon$  de chaque côté du point I.

Le torseur de coupure sur le segment AI, du fait de la symétrie et du non chargement en I donne

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I, \quad (7.58)$$

et sur le segment IB en

$$\{-\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_1\vec{i} \\ -C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (7.59)$$

Le système est hyperstatique intérieurement de degré 2 avec comme inconnues hyperstatiques  $F_1$  et  $C$ .

Pour le calcul des torseurs d'efforts intérieurs, on oriente la poutre, par exemple dans le sens AIBGCDEA. Soit  $H_1$  appartenant à AI,  $H_2$  appartenant à IB,  $H_3$  appartenant à BG,  $H_4$  appartenant à GC,  $H_5$  appartenant à CD,  $H_6$  appartenant à DE et  $H_7$  appartenant à EA.

Soit  $H_1$  tel que  $A\vec{H}_1 = s_1(-\vec{i})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H1}\} = \{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_{H1}. \quad (7.60)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{i}$ ,  $\vec{y} = -\vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_1 = -F_1$ ,  $Mfz_1 = C$ .

Soit  $H_2$  tel que  $I\vec{H}_2 = s_2(-\vec{i})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg-,

$$\{\tau_{H2}\} = -(-\{\tau_c\}) = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_{H2}. \quad (7.61)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{i}$ ,  $\vec{y} = -\vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_2 = -F_1$ ,  $Mfz_2 = C$ .

Soit  $H_3$  tel que  $B\vec{H}_3 = s_3(-\vec{j})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg-,

$$\{\tau_{H3}\} = -(-\{\tau_c\}) = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1s_3)\check{k} \end{array} \right\}_{H3}. \quad (7.62)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{j}$ ,  $\vec{y} = \vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_3 = F_1$ ,  $Mfz_3 = C - F_1s_3$ .

Soit  $H_4$  tel que  $G\vec{H}_4 = s_4(-\vec{j})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+ car cela évite de passer par le torseur de la liaison, donc nous évite de calculer l'équilibre (fort simple) de la structure ("Quel finaud !" ;),

$$\{\tau_{H4}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\check{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(a + s_4))\check{k} \end{array} \right\}_{H4} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -Fs_4\check{k} \end{array} \right\}_{H4}. \quad (7.63)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{j}$ ,  $\vec{y} = \vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_4 = F_1 + F$ ,  $Mfz_4 = C - F_1(a + s_4) + Fs_4$ .

Soit  $H_5$  tel que  $C\vec{H}_5 = s_5\vec{i}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H5}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\check{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(2a))\check{k} \end{array} \right\}_{H5} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -Fa\check{k} \end{array} \right\}_{H5}. \quad (7.64)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{i}$ ,  $\vec{y} = \vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_5 = F_1 + F$ ,  $Mfz_5 = C - 2F_1a - Fa$ .

Soit  $H_6$  tel que  $D\vec{H}_6 = s_6\vec{j}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H6}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\check{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(2a - s_6))\check{k} \end{array} \right\}_{H6} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -F(a - s_6)\check{k} \end{array} \right\}_{H6}. \quad (7.65)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{j}$ ,  $\vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_6 = -F_1 - F$ ,  $Mfz_6 = C - F_1(2a - s_6) - F(a - s_6)$ .

Soit  $H_7$  tel que  $E\vec{H}_7 = s_7\vec{j}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H6}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(a - s_7))\check{k} \end{array} \right\}_{H7}. \quad (7.66)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{j}$ ,  $\vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_7 = -F_1$ ,  $Mfz_7 = C - F_1(a - s_7)$ .

Il est maintenant possible de calculer l'énergie de déformation et plus précisément la dérivée de celle-ci par rapport aux deux inconnues hyperstatiques qui doivent être nulles. Ce calcul se fera sur wxmaxima.

(% restart; n1:-f1;mfz1:c; n2:-f1;mfz2:c; t3:f1;mfz3(s3):=c-f1\*s3; t4:f1+f;mfz4(s4):=c-f1\*(a+s4);  
i63) n5:f1+f;mfz5:c-f1\*(2\*a)-f\*a; t6:-f1-f;mfz6(s6):=c-f1\*(2\*a-s6)-f\*(a-s6); t7:-f1;mfz7(s7):=c-f1\*(a-s7);

restart

(% o49)



$$-f1 \tag{n1}$$

$$c \tag{mfz1}$$

$$-f1 \tag{n2}$$

$$c \tag{mfz2}$$

$$f1 \tag{t3}$$

$$\text{mfz3}\left(s3\right):=c-f1\ s3 \tag{\% o55}$$

$$f1+f \tag{t4}$$

$$\text{mfz4}\left(s4\right):=c-f1\ \left(a+s4\right) \tag{\% o57}$$

$$f1+f \tag{n5}$$

$$-\frac{2f1}{5}-\frac{f}{5}+c \tag{mfz5}$$

$$-f1-f \tag{t6}$$

$$\text{mfz6}\left(s6\right):=c-f1\ \left(2a-s6\right)+\left(-f\right)\ \left(a-s6\right) \tag{\% o61}$$

$$-f1 \tag{t7}$$

$$\text{mfz7}\left(s7\right):=c-f1\ \left(a-s7\right) \tag{\% o63}$$

$$\tag{\% i69} \tag{E:2.1e11;nu:0.28;a:1/5;d:0.01; S:\%pi*d^2/4;lhz:\%pi*d^4/64;$$

$$2.110^{11} \tag{E}$$

$$0.28 \tag{nu}$$

$$\frac{1}{5} \tag{a}$$

$$0.01 \tag{d}$$

$$2.510^{-5}\pi \tag{S}$$

$$1.562510^{-10}\pi \quad (\text{Ihz})$$

```
(% wint1:1/2*integrate (n1^2/(E*S)+mfz1^2/(E*Ihz), s1,0,2*a); wint2:1/2*integrate
i88) (n2^2/(E*S)+mfz2^2/(E*Ihz), s2,0,2*a); wint3:1/2*integrate (mfz3(s3)^2/(E*Ihz),
s3,0,a); wint4:1/2*integrate (mfz4(s4)^2/(E*Ihz), s4,0,a); wint5:1/2*integrate
(n5^2/(E*S)+mfz5^2/(E*Ihz), s5,0,4*a); wint6:1/2*integrate (mfz6(s6)^2/(E*Ihz), s6,0,a);
wint7:1/2*integrate (mfz7(s7)^2/(E*Ihz), s7,0,a);
```

$$\frac{\frac{1.90476190476190410^{-7} f1^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047c^2}{\pi}}{5} \quad (\text{wint1})$$

$$\frac{\frac{1.90476190476190410^{-7} f1^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047c^2}{\pi}}{5} \quad (\text{wint2})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (f1^2 - 15c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint3})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (7f1^2 - 45c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint4})$$

$$\frac{2 \left( \frac{1.90476190476190410^{-7} (f1+f)^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047 \left( -\frac{2f1}{5} - \frac{f}{5} + c \right)^2}{\pi} \right)}{5} \quad (\text{wint5})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (7f1^2 + (5f - 45c) f1 + f^2 - 15cf + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint6})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (f1^2 - 15c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint7})$$

```
(% wint(f1,c):=wint1+wint2+wint3+wint4+wint5+wint6+wint7; wintf(f1,c):=float(expand(wint(f1,c)));
i105) eq1:diff(wintf(f1,c),f1)=0; eq2:diff(wintf(f1,c),c)=0;
```

$$\text{wint}(f1, c) := \text{wint1} + \text{wint2} + \text{wint3} + \text{wint4} + \text{wint5} + \text{wint6} + \text{wint7} \quad (\% \text{ o102})$$

$$\text{wintf}(f1, c) := \neq \{\text{Lispfunction}\} (\neq \{\text{Lispfunction}\} (\text{wint}(f1, c))) \quad (\% \text{ o103})$$

$$0.001655712619913004f1 + 6.85576843370223710^{-4}f - 0.004656418906460024c = 0 \quad (\text{eq1})$$

$$-0.004656418906460024f1 - 0.001746157089922509f + 0.02328209453230011c = 0 \quad (\text{eq2})$$

```
(% wint(f1,c):=wint1+wint2+wint3+wint4+wint5+wint6+wint7;
i112)
```

$$\text{wint}(f1, c) := \text{wint1} + \text{wint2} + \text{wint3} + \text{wint4} + \text{wint5} + \text{wint6} + \text{wint7} \quad (\% \text{ o112})$$

```
(% float(solve([eq1,eq2],[f1,c]));
i113)
```

rat: replaced -0.004656418906460024 by -1734367/372467992 = -0.004656418906460021rat: replaced 6.8557684337

$$[[f1 = -0.4642904968084612f, c = -0.01785809936169213f]] \quad (\% \text{ o113})$$

Nous venons d'obtenir les valeurs des inconnues hyperstatiques intérieures en fonction du chargement :

$$F_1 = -0.46F, \quad (7.67)$$

dont le coefficient est adimensionnel, et

$$C = -0.018F, \quad (7.68)$$

dont le coefficient est en [m].



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 839. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <https://lite.framacalc.org/lemans-sdp-1819>.

### 7.3.4 Systèmes articulé

Si la barre est droite, articulée et non chargée sur sa longueur alors,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} N_i^{\vec{\tau}} \\ 0 \end{array} \right\}_H, \quad (7.69)$$

avec  $\vec{i}$  direction de la barre

**Treillis plan** Un treillis est un assemblage de poutres droites que l'on peut considérées articulées entre elles ou non. Dans le cas où elles sont considérées articulées entre elles et que les chargements sont appliqués sur les noeuds du treillis, alors, le paragraphe ci-dessus implique qu'elles ne subissent que des efforts normaux. Dans ce cas, la résolution peut être faite progressivement en faisant l'équilibre de chaque noeud, à partir d'un noeud où seuls deux efforts normaux sont inconnus. Une méthode de résolution graphique (Crémona et funiculaire) existe, mais n'est pas vu dans ce cours.

## 7.4 Non linéarités géométriques (grands déplacements)

Le cours a été mené dans l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations et petits déplacements par rapport aux dimensions de la structure). Lorsque l'hypothèse des petits déplacement est caduque, il faut réécrire le torseur des efforts intérieurs dans la configuration déformée et non la configuration initiale. Une méthode itérative doit être mise en place.

Ceci ne sera pas fait analytiquement dans ce cours. Vous le ferez numériquement dans le cours de modélisation et expérimentalement lors du travail pratique sur le flambement.

# Chapter 8

## Problèmes

Remarque : Des malus peuvent être appliqués à votre copie : -4 points si au moins une erreur d'homogénéité est détectée et que vous êtes en 4<sup>ème</sup> année, -8 points si au moins une erreur d'homogénéité est détectée et que vous êtes en 5<sup>ème</sup> année, -2 points si au moins un torseur est écrit sans indiquer en quel point ou dans quelle base ce torseur est exprimé, -2 points si un résultat à une question présente une valeur chiffrée sans préciser les unités.

### 8.1 Août 2020, Février 2021, Août 2021

Soit les points O, A, B, D et E dont les coordonnées dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(-l,-l,0)$ ,  $(0,-l,0)$ ,  $(l,0,0)$  et  $(0,l,0)$ . La longueur est  $l = 0.6$  m. Une poutre de section circulaire de rayon  $r = 0.015$  m en aluminium relie les points ABDE. La fibre moyenne du segment AB est droite. La fibre moyenne du segment BDE est un arc de cercle de rayon  $l$  de centre O. Ce solide est relié au référentiel par une liaison encastrement en A. Ce solide est soumis en E à une force de valeur  $F = -57\vec{j}$  N. Soit un point  $H_1$  de AB tel que  $\vec{AH}_1 = s_1\vec{i}$  et un point  $H_2$  de BDE repéré par l'angle  $\theta$  qui varie de 0 à  $\pi$  lorsque  $H_2$  passe de B à E :  $\vec{OH} = -l \cos \theta \vec{j} + l \sin \theta \vec{i}$ .

1. Question orange. (4 pts)

Donnez les valeurs numériques des composantes (efforts normal, tranchants, moments de torsion et fléchissants) du torseur des efforts intérieurs aux points  $H_1$  pour  $s_1 = 0.2$  m et  $H_2$  pour  $\theta = \pi/3$  et des éventuelles inconnues hyperstatiques que vous auriez à choisir. Vous orienterez la poutre de A vers E.

2. Question bleue. (4 pts)

Quel est le point le plus sollicité de la structure ? Vous préciserez l'abscisse  $s_1$  ou l'angle  $\theta$  de ce point et la position  $\tilde{y}, \tilde{z}$  dans la section droite. Quelle est la valeur du coefficient  $\alpha$  par lequel on peut multiplier le chargement  $F$  pour ne pas dépasser la limite  $(-150 \text{ MPa} < \sigma < 150 \text{ MPa})$  ?

3. Question verte. (4 pts)

Quelle est la valeur numérique de l'angle de rotation du point E et autour de quel axe ?  
Quelle est la valeur numérique du déplacement du point B et dans quelle direction ?

4. Question marron. (4 pts)

Une liaison est ajoutée en E qui laisse libre les translations, mais bloque la rotation autour de l'axe  $E\vec{k}$ . Quelle est la valeur numérique du couple  $C\vec{k}$  (hyperstatique) en E ?

5. Question noire. (4 pts)

La liaison de la question marron n'est pas mise en place. Par contre, une barre (poutre articulée à ses deux extrémités), de section carrée de côté  $a = 0.002$  m, en aluminium est

positionnée entre les points B et E. Quelle est la valeur de l'effort normal au sein de cette barre ?

## 8.2 Mai 2011

L'école nationale supérieure des ingénieurs du bois à Épinal possède une passerelle qui est renforcée par un support le long de la portée telle que représentée figure 8.1. La fibre moyenne est composée de deux branches : ABE et ABD. La base du poteau est articulée au point A (figure 8.2) et le bras BE est renforcé par une barre articulée fixée au point E et au point D (figure 8.3). Nous étudierons le système poteau-bras-barre et nous testerons plusieurs modélisations.



Figure 8.1: Une passerelle supportée par deux poteaux en bois, câbles et rouleau.



Figure 8.2: La base du poteau est articulée.

Remarque : L'étude du modèle d est indépendante des études des modèles a-b-c.



Figure 8.3: Le bras est renforcée par une barre articulée à ses deux extrémités.

### 8.2.1 jaune : Modèle a : tige-bras, sans barre, subissant uniquement une force verticale de la passerelle

Un premier modèle plan (8.4a) considère la tige soumise uniquement à une force verticale  $\vec{F} = -F\vec{j}$  due à la passerelle. Le poids du poteau est négligé. Le vecteur  $\vec{AE}$  est parallèle au vecteur  $\vec{j}$ .

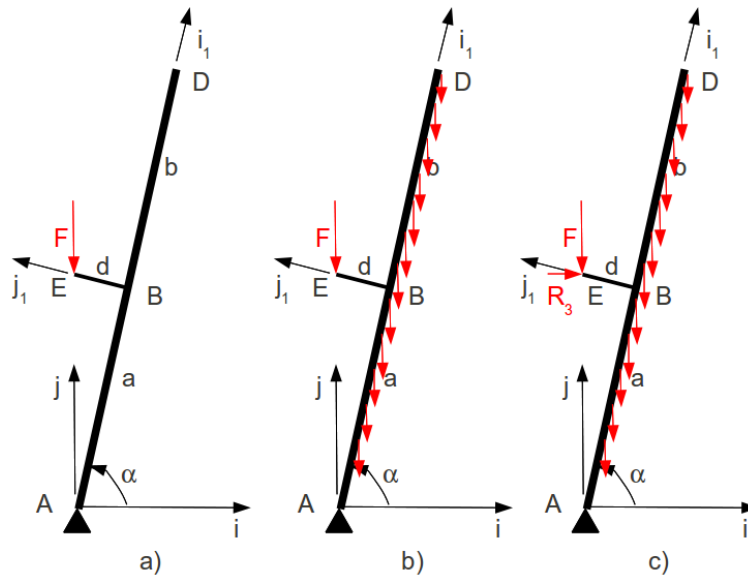


Figure 8.4: Les trois modèles envisagés de la structure.

1. Faire le bilan des actions agissant sur le structure
2. Écrire l'équilibre de la structure
3. Quelles sont les réactions aux liaisons ?
4. Le système est-il isostatique sous la charge  $\vec{F}$  ? Pourquoi ?

### 8.2.2 jaune b : tige-bras, sans barre, subissant une force verticale de la passerelle et le poids propre du poteau.

Un second modèle plan (8.4b) considère la tige soumise à une force verticale  $\vec{F} = -F\vec{j}$  due à la passerelle et le poids propre du poteau. On notera l'accélération de la pesanteur  $g$ , la masse volumique du bois  $\rho$  et  $S(s)$  l'aire de la section droite en un point H tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_1$  le vecteur unitaire dans la direction de la fibre moyenne du poteau, qui fait un angle  $\alpha$  avec la direction  $\vec{i}$ .

1. Faire le bilan des actions agissant sur la structure
2. Écrire l'équilibre de la structure
3. Quelles sont les réactions aux liaisons ? On ne calculera pas les intégrales, car la fonction  $S(s)$  n'est pas précisée.
4. Le système est-il isostatique sous la charge  $\vec{F}$  ? Pourquoi ?

### 8.2.3 jaune c : tige-bras, sans barre, subissant une force de la passerelle et le poids propre du poteau.

Un troisième modèle plan (8.4b) considère la tige soumise à une force  $\vec{F} = -F_j\vec{j} + R_3\vec{i}$  dus à la passerelle et le poids propre du poteau.

1. Faire le bilan des actions agissant sur la structure
2. Ecrire l'équilibre de la structure
3. Quelles sont les réactions aux liaisons ? On ne calculera pas les intégrales, car la fonction  $S(s)$  n'est pas précisée.
4. Le système est-il isostatique sous la charge  $\vec{F}$  ? Pourquoi ?

### 8.2.4 Modèle d : bras

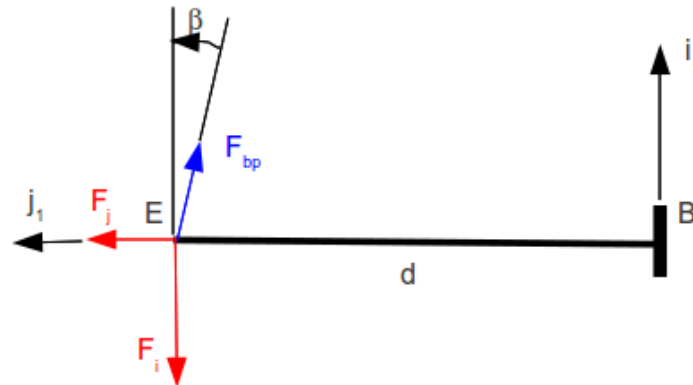


Figure 8.5: Le modèle associé au bras.

On s'intéresse maintenant aux contraintes dans le bras BE dues aux efforts en bout de celui-ci. Pour simplifier nous noterons la somme de ces deux efforts  $\vec{F} + \vec{R}_3 = -F_i\vec{i}_1 + F_j\vec{j}_1$  (voir figure 8.5). Nous appellerons  $H$  un point courant de la section droite telle que  $\vec{BH} = s_H\vec{j}_1$ . Dans le reste du problème, les résultats seront fournis en fonction des scalaires  $F_i$ ,  $F_j$  qui seront considérés connus, le module de Young  $E$  de l'acier, l'aire  $S_b$  de la section droite approximée rectangulaire de dimensions  $\tilde{b}$  et  $\tilde{h}$  constantes avec  $\tilde{h}$  dans la direction  $\vec{i}_1$ , le moment quadratique d'une section droite  $I_{Hz}$  autour de l'axe  $H\vec{z}$  approximée aussi constante.

1. verte : Quel est déplacement en E dû aux forces  $\vec{F}_i$  et  $\vec{F}_j$ , en supposant le point B immobile ?
2. bleue : Quels sont le lieu et la contrainte maximale dans la poutre BE ?
3. verte : La barre entre E et D, est équivalente à un ressort de raideur  $k$ . Cette barre, si elle est soumise à une force  $F_b$  à ses deux extrémités, subit un allongement noté  $\Delta l$ . Quelle est la relation entre  $\Delta l$ ,  $F_b$  et  $k$  ?



Figure 8.6: Un remonte-pente.

4. jaune : Si cette barre est fixée au point E, la barre exerce sur la poutre BE une force notée  $\vec{F}_{bp}$ . Donnez la relation entre  $\vec{F}_{bp}$  et  $\vec{F}_b$ .
5. orange : Quelle relation cinématique permet de calculer  $F_{bp}$  en fonction de  $F_i$  ? On écrira cette relation au premier ordre, c'est-à-dire, pour  $\epsilon = u_{Ei}/b \ll 1$  et  $\gamma = d/b \ll 1$ .
6. verte : Quel est déplacement en E dû aux forces  $\vec{F}_i$ ,  $\vec{F}_j$  et  $\vec{F}_{bp}$  ? Pour ce faire, on donnera l'expression de  $\gamma = F_b/F_i$  en fonction de  $E$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{h}$ ,  $\beta$ ,  $d$  et  $k$ , et on exprimera le résultat final du déplacement en E en fonction de  $F_i$ ,  $F_j$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{h}$ ,  $E$  et  $\delta$ .
7. bleue : Quels sont le lieu et la contrainte maximale dans la poutre ?
8. noire : Quelle est l'utilité de la barre ED ?

### 8.3 Janvier 2009 : Que la montagne est belle !

La structure d'un remonte pente (figure 8.6) est constituée principalement d'une poutre courbée en forme de "S", d'une structure "siège" et d'un tirant.

#### 8.3.1 Structure sans tirant

Considérons dans un premier temps la structure formée uniquement de la poutre en "S" et du siège. Nous modéliserons ceci par (voir figure 8.7):

- une poutre de ligne moyenne sous forme de deux arcs de cercle de rayon  $a$  reliant les points A, B, C et D, de section tubulaire creuse, de module d'Young  $E$ , de moment quadratique par rapport à une direction transverse  $I_{Hz}$ , d'aire de section droite  $S$ . La fibre moyenne ABC est un arc de centre  $O_1$ . La fibre moyenne CD est un arc de cercle de centre  $O_2$ .
- une poutre indéformable de ligne droite reliant les points D, E et G.

Le chargement sera une force connue  $F$  appliquée en E. La pesanteur est négligée. La liaison en A avec le câble est modélisée par un appui simple de normale  $A\vec{j}$ .

On donne les coordonnées des points dans une base directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{j}$  soit opposé au sens de la pesanteur :  $O_2\vec{G} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i}$ ,  $O_2\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i}$ ,  $O_2\vec{D} = a\vec{i}$ ,  $O_2\vec{H}_1 = a \cos \alpha_1 \vec{i} + a \sin \alpha_1 \vec{j}$ ,  $O_2\vec{C} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ,  $O_2\vec{O}_1 = a\sqrt{2}\vec{i} + a\sqrt{2}\vec{j}$ ,  $O_1\vec{B} = -a\vec{i}$ ,  $O_1\vec{A} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ,  $O_1\vec{H}_2 = a \cos \alpha_2 \vec{i} + a \sin \alpha_2 \vec{j}$ .

1. orange : Après avoir tracé l'évolution du moment fléchissant le long de la poutre en "S", quelle est la section droite dans laquelle le moment fléchissant est maximal ?



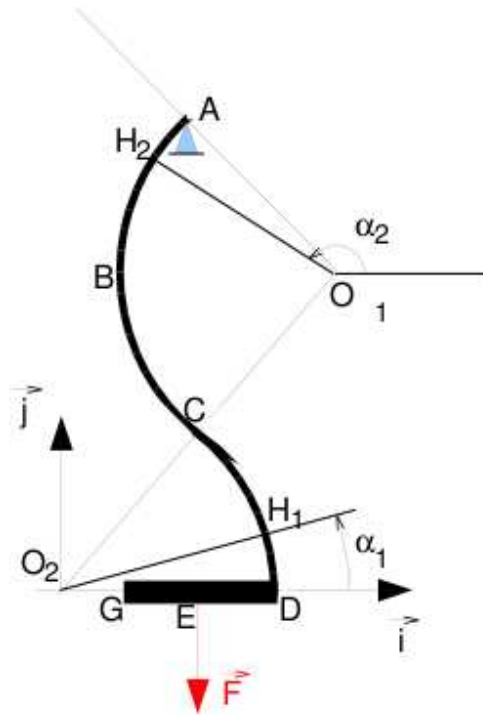


Figure 8.7: Modèle 1 du remonte pente.

2. orange : Après avoir tracé l'évolution de l'effort normal le long de la poutre en "S", quelle est la section droite dans laquelle l'effort normal est maximal ?
3. bleue : En quel point la contrainte est maximale ?.

### 8.3.2 Structure avec tirant

Considérons dans un second temps la structure précédente à laquelle est ajoutée le tirant BG (voir figure 8.8).

Si l'on considère que ce tirant est articulé à ses deux extrémités B et G, ce tirant ne peut subir qu'un effort dans la direction BG. Notons  $N_3$  l'effort normal dans ce tirant à priori inconnu.

1. verte : Quel est l'allongement de ce tirant sous cet effort normal  $N_3$  ?
2. jaune : Le système complet (poutre en "S", siège et tirant) est-il hyperstatique ?
3. jaune : Quelle-s est-sont la-es équation-s cinématique-s associée-s à chaque inconnue hyperstatique ?
4. noire : Comment résoudriez-vous les équations précédentes ? (donnez la démarche, ne pas faire les calculs).
5. noire : Quelle est la valeur de l'effort normal dans le tirant ?

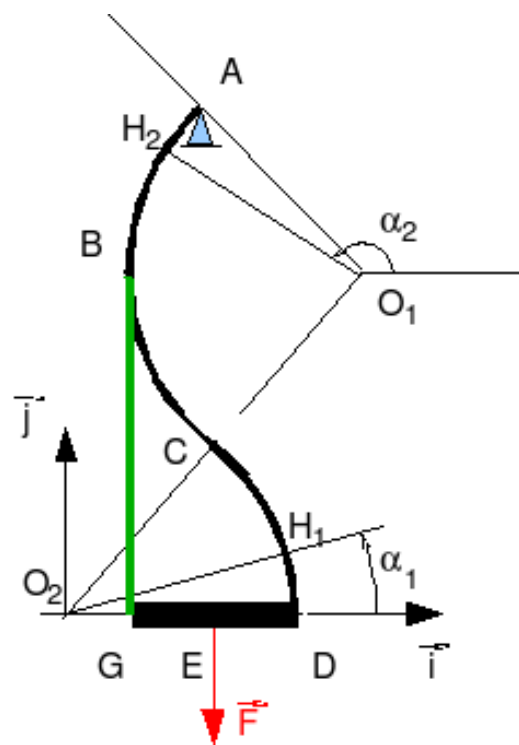


Figure 8.8: Modèle 2 du remonte pente.

# Chapter 9

## Projet

Pour l'année 2021-2022, la structure à l'échelle 1, est un assemblage de poutres qui permette de supporter des bacs contenant de la terre pour mettre à disposition de l'Ensim un jardin suspendu à épices à côté de la cafétéria. Cette structure est construite en bambou.

### 9.1 Cahier des charges

- L'emprise au sol doit être contenue dans un rectangle de 2 m par 3 m.
- La structure est formée par des tiges de bambou.
- Les liaisons entre les bambous sont assurées par des perçages et des câbles ou des boulons/écrous.
- La structure doit avoir 3 points de contact avec le sol.
- La structure doit être hyperstatique intérieurement.
- Trois bacs à épices doivent être suspendus.
- Chaque bac à épices est constitué d'une jardinière de dimension  $x \times x \text{ m}^3$  et de sa coupelle.
- La surface supérieure de chaque bac à épices, doit être à une hauteur comprise entre 0.85 m et 0.90 m.
- Le volume en dessous de chaque bac à épices doit être libre afin qu'une personne à mobilité réduite en fauteuil puisse passer ses jambes en dessous pour aller cueillir des épices.
- Lors du chargement, terre, épices, eau d'arrosage débordante, aucune déformation irréversible de la structure ne doit être observée.
- Entre l'état "sec" et l'état "arrosé" (la coupelle doit déborder d'eau suite à un arrosage à travers la terre), le déplacement vertical de chaque bac doit être compris entre 0.05 m et 0.10 m.

### 9.2 Accompagnement du projet

L'encadrement sera assuré par Charlène Lemasson et Jean-Michel Gènevaux.

- séance 2 (CL) : présentation de la méthode et atelier croquis
- séance 3 (CL) : prototypage rapide et modèle de calcul
- séance 4-5 (JMG) : maquette numérique
- séance 6 (CL) : questionnaire et récolte

- séance 7-8 (JMG) : amélioration maquette numérique
- séance 9-12 (JMG) : construction, test de sollicitations, calculs analytiques
- séance 13 (CL) : préparation rendus sur la forme, mallette de communication
- séance 14 (CL et JMG) : soutenance

### **9.3 Évaluation**

L'évaluation sera faite conformément à la description disponible section 3.3.3.

## Chapter 10

# Grilles de recueil de votre progression et ressenti

Les pédagogies que nous utilisons font l'objet d'une étude de leur efficience. Pour cela, nous avons besoin de recueillir la progression de chacune et chacun au fur et à mesure des séances. Ce recueil est anonyme. Pour que ce soit le plus léger possible pour vous, une version papier de la grille à compléter en fin de chaque séance est fournie. Lors de la dernière séance d'enseignement, nous recueillerons cette grille. Il existe une grille spécifique à la modalité de formation que vous avez choisie : craies, exercice, problème, projet.

Merci de compléter la grille vous concernant en fin de chacune des séances.

numéro de séance	entre la séance précédente et la séance de ce jour...			à la fin de cette séance		efficacité ressentie pendant cette séance				plaisir ressenti pendant cette séance
	nb d'heures travaillées	nb de vidéos regardées	j'ai validé la capacité (entourer)	n° de page lue	n° brevet actuellement travaillé	phase de questions/réponses	travail sur brevet (entourer : -2 nulle; 0 normale, 2 extra)	débat scientifique		
1			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
2			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
3			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
4			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
5			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
6			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
7			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
8			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
9			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
10			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
11			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
12			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
13			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
14			b-j-o-vi-b-ve-m-n			-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	

Figure 10.1: Grille de recueil de progression et ressentis pour la méthode CRAIES.

numéro de séance	entre la séance précédente et la séance de ce jour...			à la fin de cette séance	efficacité ressentie pendant cette séance				plaisir ressenti pendant cette séance
	nb d'heures travaillées	nb de vidéos regardées	j'ai validé la capacité (entourer)		n° brevet actuellement travaillé	phase de questions/réponses	travail sur brevet (entourer : -2 nulle, 0 normale, 2 extra)	débat scientifique	
1			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
2			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
3			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
4			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
5			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
6			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
7			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
8			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
9			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
10			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
11			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
12			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
13			b-j-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
14			b-i-o-vi-b-ve-m-n		-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	

Figure 10.2: Grille de recueil de progression et ressentis pour la méthode par exercices.

numéro de séance	entre la séance précédente et la séance de ce jour ...			à la fin de cette séance	efficacité ressentie pendant cette séance				plaisir ressenti pendant cette séance
	nb d'heures travaillées	nb de vidéos regardées	j'ai validé la capacité (entourer)		phase de questions/réponses	travail sur problème	débat scientifique		
1			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
2			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
3			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
4			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
5			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
6			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
7			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
8			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
9			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
10			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
11			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
12			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
13			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	
14			b-j-o-vi-b-ve-m-n	pb question	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2	

Figure 10.3: Grille de recueil de progression et ressentis pour la méthode par problèmes.



numéro de séance	entre la séance précédente et la séance de ce jour...		à la fin de cette séance	efficacité ressentie pendant cette séance			plaisir ressenti pendant cette séance
	nb d'heures travaillées	nb de vidéos regardées		phase de questions/réponses	travail sur projet (entourer : -2 nulle, 0 normale, 2 extra)	débat scientifique	
1			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
2			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
3			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
4			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2
5			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
6			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
7			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
8			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2
9			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
10			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
11			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
12			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2
13			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2
14			cdc-i-o-b-v-m-n-cp	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2		-2/-1/0/1/2

Figure 10.4: Grille de recueil de progression et ressentis pour la méthode par projet.