



**HAL**  
open science

## ENSIM 4A Statique des poutres ( résistance des matériaux )

Jean-Michel Génevaux, Hugo Dujourdy, Antoine Sternberger, Rémi Mattéoli,  
Alan Geslain

► **To cite this version:**

Jean-Michel Génevaux, Hugo Dujourdy, Antoine Sternberger, Rémi Mattéoli, Alan Geslain. ENSIM 4A Statique des poutres ( résistance des matériaux ). École d'ingénieur. Statique des poutres, Le Mans Université, France. 2013. cel-00611692v17

**HAL Id: cel-00611692**

**<https://cel.hal.science/cel-00611692v17>**

Submitted on 16 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Open licence - etalab

## ENSIM 4A

Mécanique :

Statique des poutres (résistance des matériaux)

”A quoi cela sert, la statiques des poutres ?”

La réponse est dans la vidéo 383, accessible via :

<https://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=383>

Jean-Michel Génévaux et les contributions de  
Alan Geslin, Roger Serra, Rémi Mattéoli, Hugo Dujourdy, Charlène Lemasson, Antoine Sternbe  
avec les complicités des étudiant-e-s qui m’ont détecté  
les trop nombreuses autant qu’originales fautes d’orthographe et de grammaire.



*Chaque fois que je me plante, je pousse.*[1]

December 15, 2024

# Contents

<b>1 Capacités, note.</b>	<b>3</b>
1.1 Capacités . . . . .	3
1.2 Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences . . .	3
<b>2 Méthode de travail</b>	<b>6</b>
2.1 Modalités de formation . . . . .	6
2.2 Conseils aux référentes . . . . .	9
2.3 Modalités d'évaluation des capacités. . . . .	10
2.3.1 Évaluation par examen individuel . . . . .	10
2.3.2 Évaluation par ceinture individuelle . . . . .	11
2.4 Absence . . . . .	14
<b>3 Prérequis de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs</b>	
3.1 Objectifs . . . . .	17
3.2 Homogénéité, adimensionalisation . . . . .	17
3.3 Adimensionalisation . . . . .	18
3.4 Unités logarithmiques relatives ou absolues . . . . .	18
3.5 Ordres de grandeurs . . . . .	19
3.6 Chiffres significatifs . . . . .	19
3.7 Brevets d'acquisition de connaissance . . . . .	19
3.8 Brevets de vérification de connaissance (facultatifs) . . . . .	21
<b>4 Mécanique générale liaisons - chargement - isostaticité - hyperstaticité</b>	<b>23</b>
4.1 Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles . . . . .	23
4.2 Torseurs de chargement . . . . .	26
4.3 isostaticité - hyperstaticité . . . . .	28
<b>5 Prérequis de mécanique des solides déformables : Tracer un cercle de Mohr à partir des mesures</b>	
5.1 Calcul du tricerce de Mohr à partir d'une matrice des contraintes . . . . .	37
5.2 Calcul du cercle de Mohr à partir de mesures faites avec une rosette . . . . .	41
<b>6 De l'élasticité à la théorie des poutres</b>	<b>50</b>
6.1 Les Outils . . . . .	53
6.1.1 Notion de poutre . . . . .	53
6.1.2 Analyse à l'échelle locale 3D . . . . .	61
6.1.3 Analyse à l'échelle 1D . . . . .	62
6.1.4 Principes et lois . . . . .	63
6.1.5 Cinématique d'un point de la fibre moyenne . . . . .	64
6.1.6 Efforts intérieurs . . . . .	65
6.1.7 Équations d'équilibre . . . . .	71
6.1.8 Description de la section droite . . . . .	73
6.1.9 Annexe 1 . . . . .	79
6.2 Lois de comportement de la poutre . . . . .	79
6.2.1 Objectif . . . . .	81
6.2.2 1ère cinématique . . . . .	81

6.2.3	2nd cinématique . . . . .	87
6.2.4	3ième cinématique . . . . .	91
6.2.5	Exemple d'utilisation : sollicitation de traction . . . . .	95
6.2.6	flexion simple autour de l'axe $H\vec{z}$ . . . . .	96
6.3	Dimensionnement . . . . .	97
6.3.1	Cercle de Mohr des contraintes . . . . .	97
6.3.2	Critères de limite d'élasticité . . . . .	97
6.3.3	Méthode de calcul : détermination des limites d'élasticité . . . . .	98
6.3.4	Exemple de calcul . . . . .	100
6.3.5	Formules de Bresse . . . . .	104
6.4	Résolutions de problèmes . . . . .	110
6.4.1	Résolution par superposition . . . . .	111
6.4.2	Méthodes énergétiques . . . . .	114
6.4.3	Résolution de systèmes hyperstatiques . . . . .	117
6.4.4	Systèmes articulé . . . . .	128
6.5	Non linéarités géométriques (grands déplacements) . . . . .	129

**7 Feedback** **130**

Si vous êtes l'une des 208 personnes qui téléchargent annuellement ce polycopié sur <http://www.archives-ouvertes.fr>, et que vous passez par Le Mans, venez m'offrir un café (sans sucre)... et on en profitera pour parler du contenu afin de l'améliorer.

Jean-Michel

Avant toutes choses, répondre à la question :

*A quoi sert la théorie des poutres ?*

me semble essentiel. La réponse est dans la vidéo 383 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=383>. Regarde-la.

# Chapter 1

## Capacités, note.

### 1.1 Capacités

L'enchaînement des capacités est visible sur la figure 1.1.

Cet enseignement a trois capacités prérequisées,

- 511, blanche de physique pour l'ingénieur, 0 pts : déterminer si une équation est homogène ou la dimension d'une variable à partir de l'homogénéité.
- 611, jaune de mécanique, 0 pts : déterminer si un système est isostatique, hypostatique ou hyperstatique de degré  $n$  et exprimer les réactions aux liaisons en fonction du chargement et des éventuelle inconnues hyperstatiques.
- 731, violette de mécanique des solides déformables, 0 pts : tracer un cercle de Mohr à partir des mesures faites avec une rosette à  $45^\circ$ .

et cinq capacités de statique des poutres,

- 811, orange, 4 pts : déterminer les composantes d'un torseur d'efforts intérieurs et les exprimer en fonction du chargement et des éventuelles inconnues hyperstatiques.
- 812, bleue, 4 pts : déterminer le chargement maximal admissible d'une structure isostatique.
- 813, verte 4 pts : déterminer un élément du torseur de déplacement d'un point d'une structure isostatique et les exprimer en fonction du chargement.
- 814, marron, 4 pts : résoudre un problème hyperstatique extérieurement.
- 815, noire, 4 pts : résoudre un problème hyperstatique intérieurement.

Les capacités blanches, jaunes et violette qui sont des prérequis de ce cours et que vous auriez dû valider les semestres précédents, ne rapportent pas de points. Par contre, il est obligatoire de détenir blanche et jaune pour accéder à la capacité orange et violette pour accéder à la capacité bleue de ce cours comme le montre la figure 1.1.

### 1.2 Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences

L'interfaçage avec les modalités de contrôle des connaissances nécessite, hélas, une note... (Relire l'invariant pédagogique 19 de Célestin Freinet [13]). Les points associés à chaque capacité sont choisis pas l'enseignant. Une capacité est attribuée en "tout ou rien" pour la modalité ceintures, mais de 0% à 100% par examen.

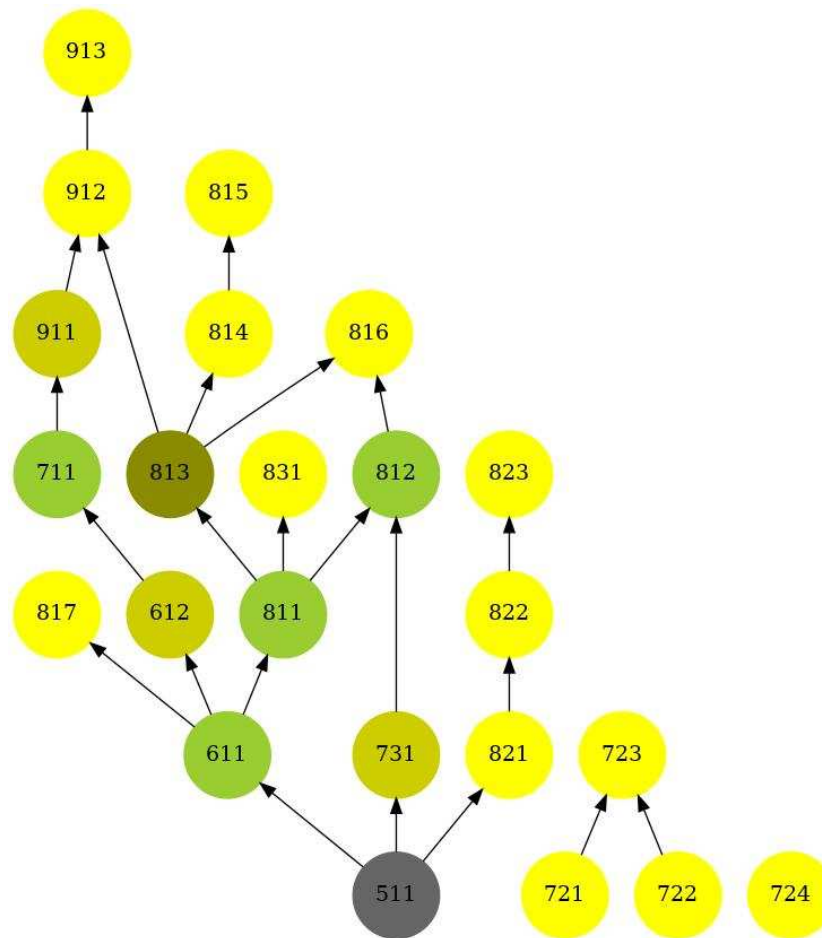


Figure 1.1: L'arbre des capacités de l'Ensim au 25 décembre 2022 (plus d'informations sur <https://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=2619>). Les capacités de ce cours sont les 811, 812, 813, 814, 815, 816 et 817. Les capacités prérequis sont les 511, 611 et 731.

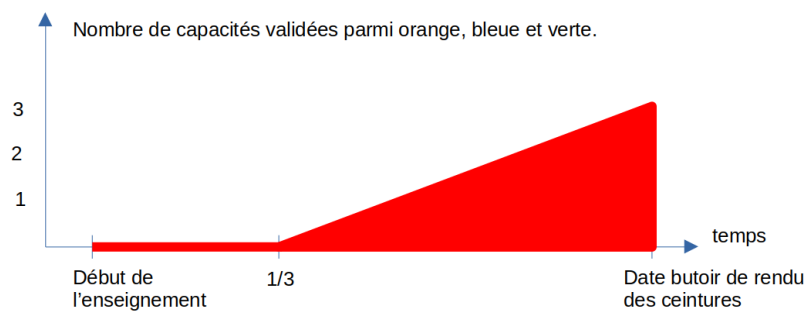


Figure 1.2: Pour valider la capacité rouge 816, l'obtention temporelle des capacités de ce cours doit se situer au dessus de la zone rouge.

Pour la modalité ceinture, le cumul de vos points obtenus aux ceintures,

$$n_{sdp} = \left( \sum_{i=orange,bleue,verte,marron,noire} 4t_i \right). \quad (1.1)$$

Nous transmettrons les capacités que chacun d'entre vous a validées, aux collègues des enseignements à venir qui ont comme prérequis des capacités de ce module.



## Chapter 2

# Méthode de travail

Avant toute chose, visionnez

<https://www.youtube.com/watch?v=RVB3PBPxMWg>,

pour mettre en place une méthode d'apprentissage qui vous fera rentabiliser au mieux 1 heure de travail personnel... ce qui vous laissera du temps pour aller au cinéma, lire un livre, organiser une fête, etc.

Après visionnage, il est temps de construire votre boîte de Leitner et vos cartes mentales. Personnellement, j'utilise "anki" pour gérer ma boîte de Leitner et je construis mes cartes mentales avec "freeplane".

<https://apps.ankiweb.net/>,  
<https://docs.freeplane.org/>,

Nous vous souhaitons une bonne découverte, une intéressante confrontation des modèles que nous développerons lors de cette formation à la réalité des essais effectués en travaux pratiques, et bien sûr... une bonne coopération entre vous, sauf lors de la validation de capacités.

## 2.1 Modalités de formation

La formation se fera en mode CRAIES (Coopérons à notre Rythme d'Apprentissage Individualisé, Efficace et Sympathique) : travail sur polycopié de cours, visionnage de vidéos, questionnements, analyse des réponses de l'enseignant, travail sur exercices ciblés (brevets) en présence d'autres étudiantes travaillant sur le même exercice, positionnement de sa progression personnelle en terme de brevet par rapport à l'ensemble de la promotion. Elle mixe une école mutuelle et un apprentissage à son rythme.

Pour les AJAC, à partir de septembre 2023, la formation se fait obligatoirement par groupe d'au maximum 3 étudiantes sur un problème à résoudre pour chaque capacité.

Vous trouverez

- le polycopié de cours, dans lequel sont inclus des liens vers des vidéos à visionner et des suggestions d'exercices à faire, appelé brevets, <https://cel.hal.science/cel-???>,
- d'un graphe des étapes de formation (brevets) (Fig. ??),
- le polycopié de brevets, <https://cel.hal.science/cel-00611694>.

*Il y a plusieurs vidéos qui ne nous concernent pas du tout et des pages auxquelles vous vous référez qui ne sont pas les mêmes que dans notre poly... La réponse est dans la vidéo 317 disponible sur*

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=317>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Doit-on connaître toutes les formules du poly ?* La réponse est dans la vidéo 060 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=060>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*A quelle vitesse doit-on avancer dans le polycopié, dans les exercices... ?* La réponse est dans la vidéo 233 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=233>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment lier l'école mutuelle et l'apprentissage à son rythme* La réponse est dans la vidéo 311 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=311>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## Les phases de travail

Les séquences d'enseignement sont divisées en plusieurs parties :

1. Avant la séance, lecture de quelques pages du polycopié et visionnage des vidéos indiquées dans ces quelques pages. En tant que lectrice, cochez les paragraphes où vous avez une question et écrivez votre question dans la marge.
2. Une phase de questions/réponses est faite : l'enseignant demande à chaque étudiante si elle a une ou plusieurs questions et s'assure que ses réponses sont suffisamment explicites. Pendant cette phase, une étudiante prend le rôle de secrétaire pour noter la question et la réponse. A la fin de la phase de questions/réponses, elle fait relire sa prise de note par deux étudiantes qui modifient/complètent. L'enseignant intègre cette prise de note au sein du polycopié pour l'année suivante.
3. Parfois une activités de la forme 1-4-tous est animée par l'enseignant, soit à propos d'une structure réelle, soit à propos d'une méthodologie de résolution. Il vous est posé une question à laquelle vous répondrez en 3 temps : 3 minutes de réflexion personnelle, 3 minutes de confrontation d'idées par groupe de 4, puis mise en commun collective sous le format : "Nous pensons que ... et nos raisons sont les suivantes ...".
4. La salle est ensuite mise en configuration avec une zone de travail personnel et une zone de consultation des corrigés ou résultats. Afin que chacun puisse se concentrer sur son travail, si vous échangez avec vos voisines, merci de le faire en chuchotant. Une phase d'exercices (brevets) est alors faite, à votre rythme. Pour plus d'efficacité asseyez-vous avec les étudiantes qui font le même brevet. Une banque de brevets regroupe l'ensemble des exercices. Ils ont été écrits suite aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevets concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM et certaines formations à l'UFR. Des leporello de différentes couleurs sont à votre disposition avec, sur chaque page, soit la correction du brevet, soit la réponse, et le prénom de la référente. Les brevets sont en effet de deux natures :
  - avec correction accessible : la correction de l'enseignant est consultable dans la salle, dans une zone dédiée où smartphone et stylo sont interdits, afin que vous puissiez comparer à votre tentative de résolution, comprendre ce qu'il vous reste à faire, et retourner à votre place pour le faire.
  - avec référente : l'enseignant sollicite les étudiantes qui ont réussi un brevet, pour que l'une d'elle accepte d'être référente. Une étudiante ne peut être référente que d'un seul

224	99	155	211	212	228	234	235		309	
							31		313	
16	15	14	13	90	39	38	37		321	
91									324	
92									325	
840	841	78	2	5				312	308	326
				18				316		
50	95	42		1				317	306	315
89		41		803						329
51		93	176		6	333	332	331	330	
52					40					
53	96	55	56		94	809	810	76	49	
			75							54
97	74	56	58					822	821	
57										
91	58	97bis	59	77	839					

Figure 2.1: Parcours de formation en méthode <sup>9</sup>CRAIES: les numéros représentent les brevets, les tuiles inclinées les ceintures/capacités, les briques rouges les positions de départ des étudiants dans l'apprentissage : pour la capacité blanche, vous commencez au brevet 224 (en haut à gauche), la jaune au brevet 31 (en haut milieu), la violette au brevet 302 (en bas au centre), la orange au

brevet au cours de l'année scolaire. Pas d'inquiétude, il y aura un brevet pour chacune ;).

5. Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées, pour compléter la fiche de feedback à propos de cette séance sur

<https://sondage.univ-lemans.fr/limesurvey/index.php/928161?lang=fr>

ou en flashant le qrcode en fin de polycopié avec votre smartphone. Vous serez autorisée à sortir de la salle si

- vous avez posé votre brique LEGO sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau vous permet de savoir instantanément quelle est votre progression par rapport à celle de la promotion. Il permet aussi lors de la séance suivante à l'enseignant, de vous répartir dans la salle en fonction du brevet que vous travaillez.
- vous confirmez à l'enseignant que vous avez complété le quiz de feedback.

*Est-ce que vous allez faire cours ?* La réponse est dans la vidéo 062 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=062>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Je n'ai pas fini de lire le polycopié. Est-ce grave ?* La réponse est dans la vidéo 073 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=073>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Existe-t-il un polycopié pour les brevets ?* La réponse est dans la vidéo 273 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=273>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*J'ai un problème de signe au brevet 179, est-ce normal ?* La réponse est dans la vidéo 553 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=553>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Les capacités peuvent-elles être passées dans n'importe quel ordre ?* La réponse est dans la vidéo 560 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=560>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Si je n'ai pas validé la compétence blanche, mais ai réussi chez moi les exercices correspondant à cette capacité, ai-je la possibilité de me mettre avec un groupe composé de membres rendu au stade des capacités jaunes ou dois-je rester avec mon équipe de capacités blanches ?* La réponse est dans la vidéo 561 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=561>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## 2.2 Conseils aux référentes

Si vous êtes "référente", merci de veillez à respecter ces conseils. Si vous êtes "apprenante", merci de signaler à la référente qu'elle ne respecte pas ces conseils : vous l'aidez à prendre la bonne posture afin que vous appreniez le plus efficacement possible.

Quelques conseils à la référente :

- Commence par demander "Tu en es où ? Qu'est ce que tu as déjà fait ? A quoi ça te fait penser ? Raconte ce que tu as compris du problème.". Essaie de parler moins de 10% du temps. Cela permet de l'aider juste là où elle en a besoin.
- Fais écrire l'étudiante plutôt que de le faire à sa place.
- Si tu dois faire l'exercice car l'étudiante n'écrit pas, essaie de la faire travailler sur un exercice jumeau : changer les fonctions, les conditions aux limites, les valeurs numériques... Par exemple en math, si l'étudiante doit dériver  $f(x) = 2x \cos(x)$ , lui faire dériver  $g(x) = 5x \sin(x)$ .
- Quand tu as expliqué quelque chose, demande à l'étudiante de réexpliquer ce que tu viens de faire.
- Se taire quand elle ont redémarré pour la laisser faire.

*Qu'est-ce qu'un étudiant référent d'un brevet ?* La réponse est dans la vidéo 085 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=085>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## 2.3 Modalités d'évaluation des capacités.

Deux modalités d'évaluations des capacités sont proposées au choix de chaque étudiante :

- évaluation par un examen le jour J,
- évaluation par ceintures : demande de sujet de ceintures, rédaction individuelle de réponse en travail à la maison, rendu de copie, test d'antidopage par jet de dé, accès aux ceintures chaînées suivantes en cas de réussite suffisante.

Le choix de votre méthode d'évaluation se fait au cours de la première séance. Une fois le choix faits, vous ne pouvez plus le modifier.

L'évaluation est faite par la validation de capacités. Le chaînage des capacités testées est indiqué figure 1.1. Un taux de réussite  $t_i$  est associé à chaque capacité  $i$ . Ce taux de réussite est le produit, et non la somme, de 5 taux de réussites décrits ci-dessous.

### 2.3.1 Évaluation par examen individuel

Si vous optez pour une évaluation par un examen classique de 1h30 officiellement (mais vous pourrez rester plus longtemps dans la salle), des sujets d'examens des années précédentes sont à votre disposition sur demande à l'enseignant.

L'examen comportera 4 questions, chacune testant une capacité :

- si tu ne détiens aucun des trois prérequis, les capacités testées sont blanche, jaune, violette, orange (tu ne peux donc valider que 5 points),
- si tu ne détiens pas deux des prérequis, les capacités testées sont les prérequis non détenus, orange, verte (tu ne peux donc valider que 10 points).
- si tu ne détiens pas un des prérequis, les capacités testées sont les prérequis non détenus, orange, bleu et verte (tu ne peux donc valider que 15 points).
- si tu détiens les trois prérequis, les capacités testées sont orange, bleue, verte, marron (tu peux valider 20 points),

Comment se passe l'examen final ? Quelles sont les différences entre la procédure des années précédentes et celle de 2024 ? La réponse est dans la vidéo 558 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=558>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

### 2.3.2 Évaluation par ceinture individuelle

Une tentative de ceintures est associée à un taux de réussite  $t_i$  est calculé à partir du produit de 5 valeurs

$$t_i = t_m t_r t_h t_u t_e \quad (2.1)$$

telles que présentées dans le tableau figure 2.2

En fonction de  $t_i$  l'accès aux capacités chaînées suivantes est ou non possible.

- Si  $t_i \geq 0.75$ , la capacité est acquise, vous ne pouvez pas la refaire pour améliorer votre score à cette capacité, vous accédez aux capacités chaînées suivantes.
- Si  $0.75 > t_i \geq 0.50$ , la capacité n'est pas acquise, vous pouvez tenter pendant une séance d'enseignement un "bon-sang-mais-c'est-bien-sûr" pour améliorer  $t_i$ . Vous expliquez oralement en moins de 3 minutes à l'évaluateur ou l'évaluatrice, "votre erreur", "ce qu'il fallait faire" et "les conséquences dans la suite de la copie", s'il ou elle est convaincu-e que vous avez bien compris votre erreur, il ou elle pourra alors augmenter  $t_i$  au delà de 0.749. En cas d'échec, vous devez recomposer sur la tentative suivante de cette capacité.
- Si  $0.5 > t_i$ , la capacité n'est pas acquise, vous devez faire la tentative suivante de cette capacité.

Vous pouvez tenter d'obtenir une capacité lorsque vous vous sentez prête à le faire. Vous ne pouvez tenter qu'une capacité à la fois. Vous pouvez tenter une capacité au maximum 3 fois. Si au bout de 3 tentatives, vous ne la détenez pas, vous pouvez tenter la ou les capacités  $n + 1$  suivantes. L'obtention d'une capacité de niveau  $n + 1$  vous attribue alors la capacité de niveaux  $n + 1$  et la capacité  $n$ , mais cette dernière avec un  $t_i$  de 0.75.

Le passage d'une ceinture en autonomie et le jet de dé antidopage, se fait à votre rythme, jusqu'au 4 avril 2025 12:00.

- Vous adressez à [jean-michel.genevaux@univ-lemans.fr](mailto:jean-michel.genevaux@univ-lemans.fr) un courriel dont le titre est "sdpd,"sdp,couleur, numéro de tentative".
- L'enseignant vous envoie le sujet et la feuille de composition.
- Sur cette copie, à coté de la déclaration suivante : *"Je m'engage sur l'honneur à n'évoquer avec personne le contenu du sujet de passage de cette ceinture. Cependant, dans le cas où je ne réussirais pas à l'obtenir, j'ai compris pouvoir discuter de mon travail avec les étudiantes ayant acquis cette ceinture. Si l'enseignant à la preuve que je n'ai pas respecté mon engagement (j'ai admis le non-respect, je suis incapable de refaire la ceinture en mode surveillé...), un rapport de fraude est fait par l'enseignant et transmis au directeur de l'école qui transmet à la commission de discipline de l'université. L'enseignant y demandera que je ne puisse plus passer de ceintures en autonomie."*, vous écrivez "lu et approuvé" et vous signez. Cela permet à vos camarades de faire une mesure "libre et non faussée" de leurs savoirs scientifiques et non de leur "capacité de mémorisation"... ou de (risquée) recopie.
- Vous composez de façon individuelle en dehors des séances d'enseignement.
- Vous photographiez le sujet et votre réponse, construisez un seul document pdf comportant les images dans cet ordre. Vous nommez votre pdf "couleur numéro-de-tentative prénom nom.pdf", et le déposez sur la page umtice de rendu de ceintures :

<https://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=10221>

<b>Modèle : \$t_m\$</b>	<b>2,5</b>
la méthode est parfaite	1
il y a une imprécision ou erreur dans la méthode	0,8
il y des erreurs dans la méthode	0,5
la méthode n'est absolument pas maîtrisée	0,2
<b>résultat : \$t_r\$</b>	<b>3,3</b>
les résultats finaux sont corrects	1
l'un des résultats finaux présente un écart inférieur à 10\% par rapport à la valeur correcte	0,8
l'un des résultats présente un écart supérieur à 10\% par rapport à la valeur correcte et cette erreur est due à une erreur précédente	0,7
Le résultat final n'est pas quantifié	0,6
l'un des résultats présente un écart supérieur à 10\% par rapport à la valeur correcte	0,2
Du calme sur les décimales !	
<b>homogénéité : \$t_h\$</b>	<b>1,5</b>
je n'ai détecté aucune erreur d'homogénéité	1
J'ai détecté au moins une erreur d'homogénéité	0,5
<b>unités : \$t_u\$</b>	<b>2,3</b>
tous les résultats numériques finaux et intermédiaires sont suivis par des unités	1
tous les résultats numériques finaux sont suivis par des unités mais pas des résultats intermédiaires	0,8
un des résultats final n'est pas suivi par des unités	0,5
plusieurs des résultats numériques finaux et intermédiaires ne sont pas suivi par des unités	0
<b>écriture : \$t_e\$</b>	<b>1,5</b>
(tous les torseurs précisent le point et les axes) et (tous les vecteurs ou pseudo-vecteurs sont notés avec des flèches) et (tous les tenseurs sont notés avec des doubles barres)	1
(soit un des torseurs ne précise pas le point et les axes, soit, un des vecteurs ou pseudo-vecteurs est noté sans flèches , soit , un tenseurs n'est pas notés avec des doubles barres	0,5

Figure 2.2: Grille critériée des cinq critères d'évaluation des capacités.



Veillez à le déposer dans la bonne rubrique cours-couleur : cela classe les ceintures et permet à l'enseignant de corriger en rafale les mêmes ceintures et donc de vous donner un feedback plus rapide. Une copie déposée dans une mauvaise rubrique ne sera pas corrigée. Une copie qui ne respecte pas le nom "couleur numéro-de-tentative prénom nom.pdf" ne sera pas corrigée.

- L'enseignant ou l'enseignante, via la plateforme moodle vous donne accès à votre copie sur laquelle il ou elle a entouré les erreurs détectées et vous transmet les 5 taux ( $t_m, t_r, t_h, t_u, t_e$ ).
- Pour que les points obtenus soient effectifs, vous devez faire le test d'antidopage à la séance suivante. Vous lancez un dé à 6 faces, si vous faites un chiffre différent de ceux indiqués à la couleur de capacité, votre copie est considérée comme faite par vos soins. Si vous faites l'un des chiffres associés à cette capacité, l'enseignant vous redonne le sujet et vous refaites une copie en mode surveillé. Tant que l'antidopage n'a pas été fait, les points ne sont pas associés à votre réussite de capacité.

*Des ceinture ? Des quoi ?* La réponse est dans la vidéo 540 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=540>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Pourriez-vous nous renseigner sur l'utilisation de WXMaxima ? Et nous préciser si on peut l'utiliser dans le cadre des ceintures.* La réponse est dans la vidéo 306 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=306>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?* La réponse est dans la vidéo 288 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=288>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Après la dernière séance, où pourra-t-on jeter les dés ?* La réponse est dans la vidéo 503 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=503>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Y a-t-il une nouvelle date limite de rendu de ceinture ?* La réponse est dans la vidéo 548 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=548>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Est-ce que la difficulté de la ceinture blanche est la même que les ceintures individuelles si on choisit la méthode crabe ?* La réponse est dans la vidéo 549 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=549>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

Vos validations/échecs aux capacités vous seront transmises par courriel via la plateforme moodle. La validation déblocquera le sujet des capacités chaînées suivantes, la non-validation, le sujet de la tentative suivante.

*Quelle est la cause de la mention "bof", pour la capacité "homogénéité des équations" ?* La réponse est dans la vidéo 272 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=272>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Pour la formation à l'Ensim, si on échoue 3 fois à la compétence orange, et que l'on valide la compétence bleue, cela valide-t-il la compétence orange et donc on récupère les points de celle-ci ?* La réponse est dans la vidéo 290 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=290>.



Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?* La réponse est dans la vidéo 288 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=288>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

Être détenteur d'une capacité, implique qu'en tant qu'expert de celle-ci, tout comme l'enseignant, vous aidiez vos camarades à l'obtenir. Votre dialogue doit porter sur un exemple similaire proposé par le demandeur d'aide. Il ne doit pas porter sur l'exemple qu'il a à résoudre. Vous l'orientez sur les brevets afférents, en répondant à leur questions sur ces brevets, en insistant sur des points qui vous ont éventuellement fait rater cette capacité dans des tentatives précédentes. Vous ne dévoilez pas le contenu du sujet de la capacité ni les réponses.

"C'est arrivé près de chez vous" : L'exemple d'étudiants qui "travaillent à 3 pour résoudre un sujet de capacité, recopie chacun sur une feuille la réponse qu'ils ont élaborée collectivement, rendent le même jour à la même heure leur feuilles en espérant ne pas faire 6", ne respectent pas les règles. En cas de détection par l'enseignant, le passage par ceintures est arrêté pour eux et dans le reste de leur scolarité, ils feront des examens dans les modules à venir.

## 2.4 Absence

Le conseil d'administration a voté l'obligation d'être présent aux séances d'enseignement.

Il me semble plus pertinent que l'obtention des capacités de base soit obligatoire pour justifier les 14 000 euros par an que la nation verse pour vous former grâce aux impôts récoltés en France. Via la TVA, vous-même, payez des impôts.

Ne pas venir à une séance de 1h1/4, représente donc un gaspillage de 23 euros... sauf si vous travaillez à la maison et que vous atteignez les capacités de base.

Pour concrétiser ceci auprès des étudiantes non alternants, la méthode suivante est utilisée :

- en début de séance, une feuille d'émargement circule : le nombre de signatures doit correspondre au nombre de présents,
- l'enseignant compte le nombre d'absences de chaque étudiante,
- le jour du jury, les capacités acquises par chaque étudiante sont figées,
- pour une étudiante qui a été détectée absente et qui a les capacités de base (qui donnent une note supérieure à 10/20), elle a rempli son contrat... et je lui souhaite une agréable suite de formation.
- pour une étudiante qui a été détectée absente, mais qui n'a pas les capacités de base, elle est considérée comme n'ayant pas rempli son contrat. Pour rembourser les contribuables,... choisissons les contribuables étudiantes, je lui demande de verser 23 euros par absence à la cafétéria de l'Ensim ou de l'UFR , ce qui permettra que la cafétéria offre gratuitement, par absence remboursée, 57 cafés ou 19 café+viennoiserie à qui le demande (dont l'étudiante absente).

Je ne citerai que Bernard Friot : "C'est le salaire qui mérite travail.", France Culture, mardi 4 avril 2023, 7h40, <https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/les-matins>

*Je m'étonne que vous osiez demander de l'argent à un étudiant, par un chèque de 23 euros !*  
La réponse est dans la vidéo 256 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=256>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

# Bibliography

- [1] Batoz, JL Dhatt, G *Modélisation des structures par éléments finis : volume 3: coques* Hermès, Paris, 1992
- [2] Chevalier, L *Mécanique des milieux continus déformables*, Ellipse, 2004
- [3] Dumontet *Exercices de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1994
- [4] JM Génevaux, fichiers disponible sur le réseau sous *distrib doc etu / 2a modelisation / model jmg*
- [5] JM Génevaux, fichiers disponible sur le réseau sous *distrib doc etu / 1a tdp / cinématiques*
- [6] Lemaitre, J Chaboche, JL *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, (cote 620.1 LEM à la BU)
- [7] Germain, P Muller, P *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1980
- [8] AFNOR, *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, AFNOR, Paris, 1996
- [9] Génevaux, JM *A propos des tenseurs*, cours Ensim 1A, 2005
- [10] Zucchini, A Lourenco, PB *A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry*, International Journal of Solids and Structures, **39**, Issue 12, June 2002, Pages 3233-3255.
- [11] Albigès Résistance des matériaux
- [12] Courbon
- [13] Feodosiev
- [14] Laroze Résistance des matériaux et structures (tome 2) éd. : Masson-Eyrolle
- [15] Timoshenko
- [16] Techniques de l'ingénieur, B5 I, 600,601, 5020, 5040 (concentrations de contraintes)
- [17] Chevalier Mécanique des systèmes et des milieux déformables, ellipse, paris, 2004.
- [18] Dumontet, Duvaut, Léné, Muller, Turbé, Exercices de mécanique des milieux continus, Masson, Paris 1994
- [19] Salencon,
- [20] Salencon, Mécanique des milieux continus, tome 2, Thermoélasticité, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001
- [21] Salencon, Mécanique des milieux continus, tome 3, Milieux curvilignes, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001
- [22] Axisa, F *Modélisation des systèmes mécaniques : systèmes continus* Hermès, Paris, 2001
- [23] Batoz, JL Dhatt, G *Modélisation des structures par éléments finis : volume 2 : poutres et plaques* Hermès, Paris, 1990
- [24] Chevalier, L *Mécanique des systèmes et des milieux déformables* Ellipses, Paris, 1996

Formation à la capacité blanche de physique pour l'ingénieur.

## Chapter 3

# Prérequis de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs

Le polycopié d'enseignement de *Physique pour l'ingénieur* de Samuel Gougeon est disponible via le lien :

[http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique\\_TC/1\\_Dimensions\\_unites\\_nombres.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique_TC/1_Dimensions_unites_nombres.pdf)

Vous pouvez aussi vous former à l'aide des sections suivantes rédigées par JM Génévaux.

### 3.1 Objectifs

- Homogénéité d'une relation
- Équation aux dimensions
- Unités adimensionnelles.
- Chiffres significatifs  
Unités angulaires : radian = unité physique. minutes et secondes d'arc.
- Unités logarithmiques relatives ou absolues, dimensionnées ou adimensionnées : dB, dBm, dBm - dBm = dB, dB/km, pH, octave, magnitude et niveau (visuelle, sismique), etc ...
- Ordres de grandeurs, échelles : de taille ; de masse ; de temps ; de puissance acoustique ; de puissance lumineuse ; débit d'informations...
- Conversions des principales unités entre système métrique et système impérial

### 3.2 Homogénéité, adimensionalisation

Les grandeurs de part et d'autre d'une équation sont généralement de natures différentes. Par exemple, le principe fondamental de la dynamique en terme de résultante

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}_{G,S/R_0}, \quad (3.1)$$

exprime une relation entre un effort  $F$ , une masse  $m$  et l'accélération du centre de gravité d'un solide  $\Gamma$  (voir cours de "Mécanique Générale"). Cette écriture est intrinsèque : elle ne dépend pas du repère dans lequel les grandeurs sont exprimées (repère cartésien, cylindrique, sphérique, curviligne...). Vous vous devez de vérifier pour chaque loi, que l'équation est homogène : que

les dimensions sont les mêmes de part et d'autre d'un signe égalité. Dans l'exemple précédent, l'équation est homogène à une masse fois une longueur divisée par un temps au carré :

$$MLT^{-2}. \quad (3.2)$$

Les équations sont donc indépendantes de l'unité prise pour chaque grandeur (pour la longueur  $L$  : le mètre, le centimètre, le pouce...). Il suffit de choisir les mêmes unités de part et d'autre de l'équation. Lorsque vous sumez deux termes, ils doivent aussi être homogènes. Ajouter une carotte et un chou ne fera pas deux quelque chose, mais juste un début de pot-au-feu. Essayez d'additionner des km/h et des kg pour vous en convaincre. La norme internationale ISO 1000 (ICS 01 060) décrit les unités du Système International et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités. Le Système International compte sept unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela, censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes.

Lorsqu'une grandeur est définie par une dérivée, une dérivée partielle ou une intégrale, l'équation aux dimensions est construite comme si les dérivées correspondaient à une division et l'intégrale à une multiplication. Par exemple,

- si  $f(s) = \frac{dg(s)}{ds}$  avec  $g(s)$  en m et  $s$  en kg, alors  $f(s)$  s'exprime en m/kg,
- si  $k(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt$  avec  $g(t)$  en V et  $t$  en s, alors  $k(t_1)$  s'exprime en V.s.

### 3.3 Adimensionalisation

Des grandeurs sont sans dimension. Vous n'ignorez pas que le périmètre d'un cercle de rayon  $r$  est  $p = 2\pi r$ . Si on ne décrit qu'une partie du cercle une relation similaire lie la longueur de l'arc de cercle  $c$  au rayon :  $c = \alpha r$ . L'angle est donc  $\alpha = c/r$  un rapport de deux longueurs : l'angle, exprimé en radian est sans dimension. De même, l'écoulement d'un fluide visqueux dépend du rapport entre les effets dynamiques et les effets visqueux. Lorsque l'on souhaite faire une maquette à échelle réduite, il faut conserver ce rapport entre les différentes forces : on conservera le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}$ , avec  $d$  une dimension caractéristique de l'écoulement,  $v$  une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\rho$  la masse volumique et  $\eta$  la viscosité dynamique. L'adimensionalisation des équations est très utilisée en mécanique des fluides, hélas beaucoup moins en mécanique des solides. Ceci n'est en fait dû qu'à des habitudes différentes au sein des deux communautés. Adimensionaliser les équations a l'avantage de faire apparaître les groupements adimensionnels de paramètres qui régissent le comportement, mais présente l'inconvénient, en cas d'erreur de calcul par une omission d'un terme adimensionnel, de laisser l'équation homogène (ce ne sont que des multiplications/additions/divisions de nombres sans dimension), et donc enlève un moyen de vérifier le résultat final.

### 3.4 Unités logarithmiques relatives ou absolues

Des capteurs, comme nos oreilles par exemple, ne sont pas sensibles de façon linéaire au signal reçu, pour nos oreilles, au bruit. Il est donc intéressant de ne pas mesurer le niveau acoustique sur une échelle linéaire, mais logarithmique. De plus, prendre en compte le seuil d'audibilité pour définir l'échelle logarithmique amène à considérer un niveau de référence de pression de  $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

On construit alors  $L_p = 10 \log \left( \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log \left( \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right)$  dont l'unité est alors le décibel noté dB, avec  $p_{eff}$  la pression efficace en Pa. Le choix d'une échelle logarithmique dans la représentation graphique d'une relation entre deux grandeurs  $a$  et  $b$  peut être justifiée par :

- des répartitions des valeurs de  $a$  ou  $b$  de façon géométrique
- pour déterminer des coefficients lorsque la fonction liant  $a$  et  $b$  est non linéaire.

Prenons par exemple une relation théorique du type  $b = a^{0.34}$ . Si l'on cherche à vérifier expérimentalement l'exposant de cette relation, il est plus judicieux de tracer  $\log b$  en fonction de  $\log a$  : la fonction

théorique ( $\log b = 0.34 \log a$ ) est une droite passant par l'origine, les points expérimentaux permettent de leur côté de déterminer la pente expérimentale (avec son incertitude) qui donne la valeur expérimentale du coefficient (avec son incertitude).

### 3.5 Ordres de grandeurs

Il ne suffit pas que votre mesure soit donnée dans des unités cohérentes, par exemple si votre capteur mesure la vitesse du cycliste en descente par la rupture de deux faisceaux lasers distants de 1 cm dans un intervalle de temps de  $12.3 \cdot 10^{-2}$  s, encore faut-il que la valeur soit réaliste. Dans le cas de votre cycliste, il roule à 0.29 km/h ! On compte sur votre expérience.

### 3.6 Chiffres significatifs

*Pourquoi 1340 a trois chiffres significatifs alors que 13,40 en a quatre ?* La réponse est dans la vidéo 270 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=270>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Le nombre de chiffres significatifs sont ceux après la virgule ?* La réponse est dans la vidéo 543 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=???>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

### 3.7 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 224, 99, 155, 211, 212, 228, 234 et 235.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 224 : Détermination des dimensions d'un paramètre à partir de l'homogénéité**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vd}{\nu}$  est adimensionnel. Il relie  $d$  une longueur caractéristique de l'écoulement,  $v$  une vitesse caractéristique de l'écoulement et  $\nu$  la viscosité cinématique.

Quelle est la dimension de  $\nu$ , et ses unités dans le système international ?

**brevet 099 : Nombre de chiffres significatifs**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Quels sont le nombre de chiffres significatifs de  $a = 23.3 \cdot 10^5$ ,  $b = 1230$ ,  $c = 0.054$ ,  $d = 34.70$ ,  $e = a * c$  et  $f = d + c$  ?

**brevet 155 : Homogénéité. Amortissement hystérétique.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] *chapitre 2, 2.3* ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un solide de masse  $m = 2$  kg guidé en translation dans la direction  $\vec{x}$ , relié par un ressort de rigidité  $k = 5 \text{ Nm}^{-1}$  et un amortisseur hystérétique de coefficient hystérétique  $\beta = 1$  ???. L'énergie dissipée  $\Delta E$  pendant un cycle d'amplitude  $X$  de mouvement de la masse, est reliée au coefficient d'amortissement hystérétique par

$$\Delta E = \pi k \beta X^2, \quad (3.3)$$

Quelles sont les unités de mesures de  $\beta$  dans le Système International ?

**brevet 211 : Homogénéité d'une équation (version 1).**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours de physique de bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit  $F$  une force,  $g$  la pesanteur,  $m$  une masse,  $a$  et  $b$  des longueurs, l'équation,

$$F = \frac{a + b}{b} \frac{2m}{g}, \quad (3.4)$$

est-elle homogène ?

**brevet 212 : Homogénéité d'une équation (version 2).**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours de physique de bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit  $F$  une force,  $g$  la pesanteur,  $m$  une masse,  $a$  et  $b$  des longueurs, l'équation,

$$F = \frac{a + b^2}{b} 2mg, \quad (3.5)$$

est-elle homogène ?

**brevet 228 : Équation aux dimensions avec dérivée et intégrale.**  
auteur : JM Génévaux ; ressource : cours de math de bac +1 ;  
autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit la grandeur  $g$  donnée par

$$g(x, y) = \frac{\frac{\partial t(x, y)}{\partial x} c}{\int_0^y h(y_1) dy_1} \quad (3.6)$$

avec  $t$  en s,  $x$  en V,  $y$  en kg,  $c$  en m et  $h$  en V.

Quelle est la dimension de  $g(x, y)$  exprimée dans les unités de base ?

**brevet 234 : chiffres significatifs pour une addition.**  
auteur : JM Génévaux ; ressource : cours physique pour  
l'ingénieur ; autoattribution .

Donnez le résultat des opérations suivantes en veillant au nombre de chiffres significatifs du résultat.

$$a = 23,56 + 5,3 + 0,004 = ?$$

$$b = 0,07 \text{ m} + 51 \text{ cm} + 41,34 \text{ dam} = ?$$

**brevet 235 : chiffres significatifs pour une multiplication ou division.**

auteur : JM Génévaux ; ressource : cours physique pour  
l'ingénieur ; autoattribution .

Donnez le résultat des opérations suivantes en veillant au nombre de chiffres significatifs du résultat.

$$a = 23,56 * 5,3 / 0,004 = ?$$

$$b = 0,07 \text{ m} * 51 \text{ kg} * 41,34 \text{ s} = ?$$

### 3.8 Brevets de vérification de connaissance (facultatifs)

Pour vérifier que vous savez réinvestir cette connaissance sur un autre cas, je vous invite à obtenir les brevets 213 et 224. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.



Formation à la capacité jaune de mécanique générale.

## Chapter 4

# Mécanique générale liaisons - chargement - isostaticité - hyperstaticité

Ce chapitre concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 4.1.

### 4.1 Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles

Dans ce cours, la résultante du torseur des efforts transmissibles sera notée  $\vec{R}$ , le moment, qui est un pseudo-vecteur, sera noté  $\check{M}$ .

*Qu'est-ce que le moment d'une force ?* La réponse est dans la vidéo 241 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=241>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Un torseur a une résultante et un moment... comment les utiliser ?* La réponse est dans la vidéo 250 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=250>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*C'est quoi un pseudo-vecteur ?* La réponse est dans la vidéo 251 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=251>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Pourquoi parle-t-on de pseudo-vecteur, pour l'un des termes du torseur ?* La réponse est dans la vidéo 002 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=002>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Les couples sont représentés par des pseudo-vecteurs car ils n'obéissent pas aux mêmes règles en cas de plan de symétrie. La figure est peu claire pour le comprendre.* La réponse est dans la vidéo 019 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=019>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

La liaison étant considérée parfaite, la puissance développée dans cette liaison doit être nulle quels que soient les déplacements et rotations éventuels possibles. Ceci implique que le travail d'une liaison soit nul. Il est calculé par le *comoment* des deux vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \check{M}_A \end{array} \right\}_A = 0, \quad (4.1)$$

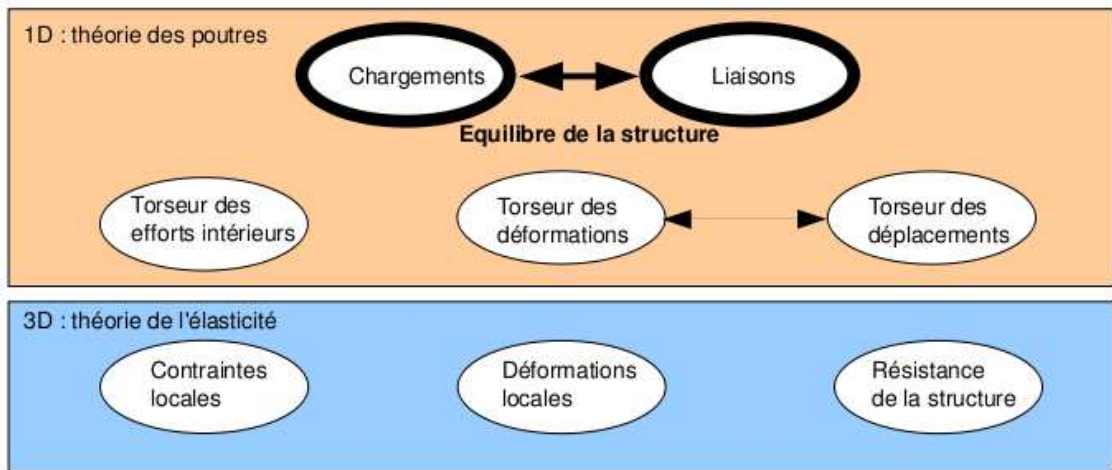


Figure 4.1: Les concepts utiles à la détermination du degré d'hyperstatisme et des réactions aux liaisons.

qui se développe en

$$\check{\omega} \cdot \check{M}_A + \check{u}_A \cdot \check{R} = 0. \quad (4.2)$$

Ci-dessous, sont donnés les torseurs d'efforts transmissibles. On peut les retrouver à partir des formules ci-dessus, en écrivant pour la liaison choisie le torseur cinématique associé (mouvements de translation et de rotation autorisés par la liaison), puis choisir un torseur d'inter-effort qui a a priori toutes les composantes en résultante et en moment, et écrire que le comoment est nul quelle que soit l'amplitude des mouvements possibles.

*Comment trouve-t-on les termes non nuls des liaisons d'inter-effort ?* La réponse est dans la vidéo 222 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=222>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Que signifie le fait que la puissance développée est nulle pour une liaison parfaite ?* La réponse est dans la vidéo 091 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=091>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Qu'est-ce que le principe des travaux virtuels ?* La réponse est dans la vidéo 238 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=238>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

Les liaisons associées à un problème tridimensionnel sont normalisées. La symbolique est donc la même que celle que vous utilisez pendant la formation de Technologie-Mécanique. Utilisez les dessins associés !

- liaison tridimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{l} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{l} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{l} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle hélicoïdale d'axe  $A\vec{i}$  de pas  $p$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2\pi C_i}{p} \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,



Figure 4.2: La symbolique des liaisons 2d utilisée dans ce cours (non normalisée) de gauche à droite : encastrement 2d, appui simple 2d, appui sur rouleau 2d, glissière 2d

- liaison tridimensionnelle pivot glissant d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_j\check{j} + C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique à doigt d'axe  $A\vec{i}$  et  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique en A :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle appui plan de normale  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} \\ C_j\check{j} + C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire rectiligne de normale  $A\vec{j}$  de direction  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j\vec{j} \\ C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire annulaire d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle ponctuelle d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ .

Les liaisons associées à un problème bidimensionnel ne sont pas normalisées. Faites attention à la signification de chaque symbole en fonction de l'ouvrage. Pour notre part, la symbolique présentée dans la figure 4.2 sera utilisée. Pour un problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  :

- liaison bidimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui simple :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ 0\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui sur rouleaux de normale  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j\vec{j} \\ 0\check{k} \end{Bmatrix}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \begin{Bmatrix} R_j\vec{j} \\ C_k\check{k} \end{Bmatrix}_A$ .

*Les torseurs sont écrits en certains points. A quel moment doit-on effectuer le changement de point et comment le choisir ?* La réponse est dans la vidéo 221 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=221>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

• **Erreur classique** : Il ne faut pas, lorsque le problème est bidimensionnel, utiliser les liaisons tridimensionnelles (et inversement).

• **Erreur classique** : Lorsque 2 poutres (ou plus) de directions différentes se raccordent en un point B, il ne faut pas rajouter une liaison encastrement entre ce point B et le référentiel Galiléen

: le point B peut se déplacer, tourner... et toutes les poutres aboutissant à ce point B se déplacent et tournent au point B de la même valeur.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 031, 037 et 038. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 031 : torseur de déplacement d'un solide, formule de changement de point d'un torseur**

**auteur : JM Géneaux ; ressource : [?], Autoattribution .**

Soient trois points A,B,C dans l'espace affine de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tels que  $\vec{AB} = 12\vec{i}$  m et  $\vec{BC} = 3\vec{j} - 6\vec{k}$  m. Soit un solide indéformable reliant les points A,B et C. Si le point A subit une translation  $4\vec{j} - 4\vec{k}$  m et une rotation  $2\vec{i}$  rad, quel est le torseur de déplacement de ce solide exprimée au point C ?

**brevet 037 : Torseur transmissible par la liaison bidimensionnelle appuis sur rouleaux**

**auteur : JM Géneaux ; ressource : cours techno-mécanique ; autoattribution .**

Soit pour un problème dans le plan  $(A, \vec{x}, \vec{y})$ , une liaison appuis sur rouleau en un point B de normale  $\vec{y}$ .

Si la liaison est parfaite, quel est le torseur des efforts transmissibles ? Vous l'exprimerez en B.

**brevet 038: Torseur transmissible par la liaison tridimensionnelle hélicoïdale**

**auteur : JM Géneaux ; ressource : cours techno-mécanique ; autoattribution .**

Soit pour un problème dans l'espace  $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , une liaison hélicoïdale d'axe  $B\vec{y}$  de pas  $p$ .

Si la liaison est parfaite, quel est le torseur des efforts transmissibles ? Vous l'exprimerez en B.

## 4.2 Torseurs de chargement

Dans ce cours, la résultante sera notée  $\vec{F}$ , le moment sera noté  $\check{C}$ . Les différents torseurs de chargements sont :

- force concentrée au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \check{0} \end{array} \right\}_A, \quad (4.3)$$

- couple concentré au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \check{0} \\ \check{C} \end{array} \right\}_A, \quad (4.4)$$

- densité linéique de force  $p\vec{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point  $P$

$$\{d\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} p\vec{i}ds \\ \check{0} \end{array} \right\}_P, \quad (4.5)$$

- densité linéique de couple  $c\check{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point  $P$

$$\{d\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ c\check{i}ds \end{array} \right\}_P, \quad (4.6)$$

- torseur équivalent exprimé au point C, d'un chargement linéique sur un segment AB :

$$\{\tau_5\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds + \vec{p}ds \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B \vec{p}ds \\ \int_A^B (\check{c} + \vec{p} \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C. \quad (4.7)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.

*Comment calculer la somme de charges réparties ?* La réponse est dans la vidéo 252 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=252>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 039 et 090. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 039 : Chargement réparti de couples**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours techno-mécanique ;**  
**autoattribution .**

Soit une poutre droite AB de longueur  $l = 2$  m d'axe  $\vec{i}$ , soumise tout son long à une répartition de couples par unité de longueur  $\check{c} = 0.1\check{j}$  en Nm/m.

Donnez l'expression de son torseur équivalent au point B.

**brevet 090 : Réalisation expérimentale de liaisons et de chargements**  
**auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B, qui ont comme coordonnées respectivement (0,0,0) et (l,0,0) dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encastré, le point B chargé par une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ).

Réalisez ce système à l'aide d'un spaghetti, deux parallélépipèdes et votre doigt.

### 4.3 isostaticité - hyperstaticité

Avant de rechercher les efforts intérieurs à une poutre, il est parfois nécessaire de calculer les réactions qui transitent par les liaisons qui maintiennent cette poutre en contact avec les autres solides voisins.

**démarche** La procédure suivante est à suivre

1. Isolement du solide. Pour ce faire :
  - vous définissez le solide ou l'ensemble de solides que vous souhaitez isoler (pour nous ce sera la poutre considérée),
  - par la pensée, vous entourez ce domaine isolé par une fine peau,
  - à chaque endroit où cette fine peau intersecte une liaison, ou un chargement, un torseur doit être écrit
2. Bilan des actions. En chaque point où doit être écrit un torseur, vous écrivez : le point, le type de liaison (éventuellement précisez de quel axe), le torseur (d'effort transmissible ou de chargement). Vous rajoutez à cette liste les torseurs de chargement à distance (pesanteur, forces électromagnétiques, ...)
3. Principe fondamental de la statique. Si le domaine isolé est en équilibre, la somme de ces torseurs est nulle. En présence d'un chargement linéique ou surfacique, l'écriture de l'équilibre doit faire apparaître l'intégration de ce torseur sur le domaine d'intégration (intégrale simple ou double).
4. Écriture du système d'équations. Dans le cas d'un problème tridimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 6 équations (trois de résultante, trois de moment). Dans le cas d'un problème bidimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 3 équations (deux de résultante, une de moment autour d'un axe perpendiculaire au plan du problème).
5. Détermination du nombre d'inconnues hyperstatiques. Attention, **le calcul (nombre d'inconnues - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme) est faux !** En effet, tout dépend comment les inconnues sont positionnées dans les équations. La méthode est la suivante :
  - Vous entourez en rouge les chargements. Ce sont les données du problème.
  - Parmi les réactions aux liaisons (les inconnues), vous entourez en bleu celles qui peuvent être déterminée en fonction des chargements.
  - Si toutes les inconnues sont déterminées : le système est dit isostatique.
  - Si toutes les inconnues ne peuvent pas être déterminées (deux inconnues sur une même équation, et qui n'apparaissent pas ailleurs par exemple), le système est hyperstatique vis-à-vis de ce degré de liberté. Vous choisissez l'une de ces inconnues que nous appellerons *inconnue hyperstatique*, vous l'encadrez en vert, et vous la supposez connue (au même titre que les chargements en rouge) pour recherchez toutes les inconnues qui peuvent de ce fait être maintenant déterminées (vous les entourez en bleu). Vous pouvez être amené à choisir plusieurs inconnues hyperstatiques.
  - **Le degré d'hyperstatisme est le nombre minimal d'inconnues (entourées en vert) qui ont dues être choisies comme hyperstatiques.**
6. Vous écrivez l'expression de chaque inconnue déterminée (en bleu), en fonction du chargement (en rouge) et des inconnues hyperstatiques (en vert). Dans la suite du problème, chaque fois qu'une inconnue bleu apparaît, elle sera remplacée par son expression rouge et verte.

*le calcul du "nombre d'inconnus - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme" est faux, pourquoi? Un exemple?* La réponse est dans la vidéo 267 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=267>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du photocopié.

**Exemples** L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système tridimensionnel est présenté figure 4.3.

L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système bidimensionnel est présenté figure 4.4. On remarquera que l'équilibre est écrit au point  $D$ , mais qu'il aurait pu être écrit en un autre point, les équations qui auraient alors été obtenues seraient une combinaison linéaire des équations présentées dans l'exemple. L'inconnue hyperstatique choisie est l'inconnue  $R_2$ . Il aurait été possible de choisir  $R_3$  ou  $C_2$ . Quelque soit ce choix, le nombre d'inconnues hyperstatique reste de 1.

*Quelle conséquence a le choix d'une inconnue hyperstatique ?* La réponse est dans la vidéo 237 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=237>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Lorsque l'on choisit une inconnue hyperstatique, on la considère connue... mais alors, comment peut-on la déterminer ?* La réponse est dans la vidéo 218 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=218>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Comment identifie-t-on une force dans une certaine direction, lorsque l'on choisit une inconnue hyperstatique ?* La réponse est dans la vidéo 220 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=220>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

**Système isostatique associé** On appelle système isostatique associé, le système identique géométriquement, mais dont les liaisons aux points où des inconnues hyperstatiques ont été choisies, doivent être modifiées :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la translation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison glissière d'axe  $\vec{i}$ . Si le problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , une liaison appuis simple sera remplacée par une liaison appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la rotation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison pivot d'axe  $\vec{i}$ .

Ce système isostatique associé est considéré comme chargé par

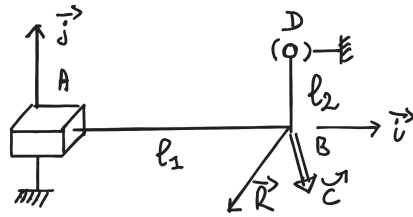
1. le même chargement extérieur que le système initial,
2. auquel on ajoute les inconnues hyperstatiques, qui sont alors considérées comme un chargement connu.

**Équation associée à une inconnue hyperstatique** Le problème isostatique associé peut donc être résolu complètement en fonction des données de chargement et des inconnues hyperstatiques. Appelons cette solution *solution 1*.

Pour retrouver le problème initial, l'inconnue hyperstatique assurait que le déplacement associé à celle-ci était nul. Il faut donc rajouter une équation cinématique par inconnue hyperstatique :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force  $R\vec{i}$  au point  $B$ , le déplacement dans cette direction en ce point doit être nul :  $\vec{u}_B \cdot \vec{i} = 0$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple  $C\vec{i}$  au point  $B$ , la rotation dans cette direction en ce point doit être nulle :  $\vec{\omega}_B \cdot \vec{i} = 0$ .





- Données
- déterminable
- ⊖ déterminée
- inconnue hyperstatique

Bilan des actions

+ liaison glissière 3D d'axe  $A\vec{i}$   $\left\{ \mathcal{L}_1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_{01} \vec{j} + R_{02} \vec{k} \\ C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k} \end{matrix} \right\}_A$

+ chargement en B (données du pb)  $\left\{ \mathcal{L}_2 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{C} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \\ C_4 \vec{i} + C_5 \vec{j} + C_6 \vec{k} \end{matrix} \right\}_B$

+ liaison sphérique en D  $\left\{ \mathcal{L}_3 \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_{03} \vec{i} + R_{04} \vec{j} + R_{05} \vec{k} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_D$

Equilibre

La somme des torseurs doit être nulle

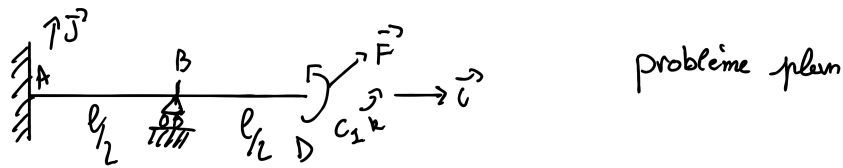
$\sum \left\{ \mathcal{L} \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} R_1 \vec{j} + R_2 \vec{k} \\ C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k} \end{matrix} + (R_1 \vec{j} + R_2 \vec{k}) \wedge \vec{AB} \right\}_B + \left\{ \begin{matrix} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \\ C_4 \vec{i} + C_5 \vec{j} + C_6 \vec{k} \end{matrix} \right\}_B$   
 $+ \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} + R_5 \vec{k} \\ (R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} + R_5 \vec{k}) \wedge \vec{DB} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \vec{0} \right\}$  avec  $\vec{AB} = l_1 \vec{i}$   
 $\vec{DB} = -l_2 \vec{j}$

$\left\{ \begin{matrix} R_3 = -F_1 \\ R_1 + R_4 = -F_2 \\ R_2 + R_5 = -F_3 \end{matrix} \right.$   $\left\{ \begin{matrix} C_1 + l_2 (R_5)' = -C_4 \\ C_2 + (R_3)' l_1 = -C_5 \\ C_3 - l_1 (R_1)' - l_2 (R_3)' = -C_6 \end{matrix} \right.$  hyperstatique de degré 2

hyperstatique en translation dans la direction  $\vec{j}$  et dans la direction  $\vec{k}$

Figure 4.3: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 3D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)



Bilan des actions

+ chargement (donné)  $\left\{ \mathcal{L}_1 \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D$

+ liaison encastrement 2D  $\left\{ \mathcal{L}_2 \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} \end{array} \right\}_A$

+ liaison appui sur rouleau  $\left\{ \mathcal{L}_3 \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_B$

Equilibre  $\varepsilon \{ \mathcal{L} \} = \{ 0 \}$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} + (R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j}) \wedge \overrightarrow{AD} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} + R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{BD} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ (c_2 - R_2 l) \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ -R_3 \frac{l}{2} \vec{k} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

D'où les équations :

$$\begin{cases} \boxed{R_1} = -F_1 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_3} = -F_2 \\ \boxed{c_2} - \boxed{R_2} l - \boxed{R_3} \frac{l}{2} = -c_1 \end{cases}$$

- données
- déterminable
- ⊖ déterminée
- inconnue hyperstatique

le système est hyperstatique d'ordre 1.

en translation dans la direction  $\vec{j}$

Figure 4.4: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 2D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)

Ces équations supplémentaires, fournissent des relations entre les inconnues hyperstatiques et les chargements. Elle permettent donc de déterminer les inconnues hyperstatiques en fonction du chargement.

La solution complète du problème qui vérifie les conditions aux limites du problème de départ, exprimée en fonction uniquement du chargement du problème de départ, est alors connue en remplaçant les inconnues hyperstatiques par leur expressions en fonction du chargement dans la solution 1.

*Comment déterminer les inconnues hyperstatiques ?* La réponse est dans la vidéo 271 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=271>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du photocopié.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 013, 014, 015, 016, 091 et 092. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 0013 : degré d'hyperstatisme d'une structure tridimensionnelle**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une poutre constituée d'un segment de droite  $AB$ , tel que  $\vec{AB} = l_1 \vec{i}$ , un segment de droite  $BC$ , tel que  $\vec{BC} = l_2 \vec{j}$ , et un segment de droite  $CD$ , tel que  $\vec{CD} = l_3 \vec{k}$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur

- en A par une glissière d'axe  $A\vec{i}$
- en B, par un appui ponctuel de normale  $B\vec{j}$
- en C, par un appui plan de normale  $C\vec{i}$ .

Elle subit un torseur de chargement quelconque en B.

Quel est le degré d'hyperstatisme de cette structure ?

**brevet 014 : degré d'hyperstatisme d'une structure plane**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : cours genesdp ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit le problème plan, formé par une poutre constituée d'un segment de droite  $AB$ , tel que  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$ , un segment de droite  $BC$ , tel que  $\vec{BC} = l_2\vec{j}$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur :

- en A un appui simple,
- en C, un appui sur rouleau de normale  $C\vec{i}$ .

Cette structure subie un chargement au point B :

- une force  $\vec{F}$  dont la direction n'est pas précisée,
- un couple  $C\check{k}$ .

Quel est le degré d'hyperstatisme de cette structure ?

**brevet 015 : choix de l'équation permettant de déterminer l'inconnue hyperstatique d'une structure plane.**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : cours genesdp ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit le problème plan, formé par une poutre constituée d'un segment de droite  $AB$ , tel que  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$ , un segment de droite  $BC$ , tel que  $\vec{BC} = l_2\vec{j}$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur :

- en A un encastrement,
- en C, un appui sur rouleau de normale  $C\vec{i}$ .

Soit un chargement au point B constitué d'un couple  $C\vec{k}$ . Le degré d'hyperstatisme de cette structure est 1.

Si l'on choisi comme inconnue hyperstatique la réaction en C, quelle est l'équation cinématique qui permet d'obtenir une équation supplémentaire permettant de déterminer l'inconnue hyperstatique ?

**brevet 016 : détermination du système isostatique associé à un système hyperstatique.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit le problème plan, formé par une poutre constituée d'un segment de droite  $AB$ , tel que  $\vec{AB} = l_1 \vec{i}$ , un segment de droite  $BC$ , tel que  $\vec{BC} = l_2 \vec{j}$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur :

- en A un encastrement,
- en C, un appui sur rouleau de normale  $C\vec{i}$ .

Soit un chargement au point B constitué d'un couple  $C\vec{k}$ . Le degré d'hyperstatisme de cette structure est de 1.

- a) Si l'on choisi comme inconnue hyperstatique la réaction en C, quel est le système isostatique associé et le chargement qui lui est appliqué ?
- b) Si l'on choisi comme inconnue hyperstatique la réaction dans la direction  $\vec{i}$  en A, quel est le système isostatique associé et le chargement qui lui est appliqué ?

**brevet 091 : Détection expérimentale d'un système hyperstatique**

**auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B, C et D, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/3,0,0)$ ,  $(2l/3,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A B et D sont sur des appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ , le point C chargé par une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ).

Réalisez ce système à l'aide d'un spaghetti, trois cylindres de diamètres différents et votre doigt. La pesanteur suffit-elle pour que le contact au point A, B et D ait lieu quelque soit la valeur de  $F$  ?

**brevet 092 : Réalisation expérimentale d'un système isostatique associé à un système hyperstatique**

auteurs : JM Géneaux ; ressource : [?], paragraphe .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *isostaticité - hyperstaticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B, C et D, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/3,0,0)$ ,  $(2l/3,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A B et D sont sur des appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ , le point C chargé par une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ).

Si on considère la réaction au point A comme hyperstatique, réalisez le système isostatique associé à l'aide d'un spaghetti, deux cylindres de diamètres différents et deux doigts.

Formation à la capacité violette de mécanique des solides déformables

## Chapter 5

# Prérequis de mécanique des solides déformables : Tracer un cercle de Mohr à partir des mesures faites avec une rosette à $45^\circ$ .

Le tracé du cercle de Mohr est une représentation bidimensionnelle du tenseur des contraintes. Cette représentation peut être construite à partir

- de la connaissance d'un tenseur des contraintes en un point,
- de la mesure avec des jauges de déformation de l'état de contrainte en surface d'une pièce sollicitée.

### 5.1 Calcul du tricercler de Mohr à partir d'une matrice des contraintes

Nous vous proposons de travailler les sections 1.4 et 1.5 du polycopié de *mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire* (version 1.6) E. Ringot, augmenté par des brevets concoctés par Jean-Michel Gènevaux :

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf)



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 309, 313, 321, 324, 325, 326. Les numéros de brevet sont positionnés dans la marge, cerclé de rouge, en vis-à-vis du bas du paragraphe nécessaire pour les résoudre. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur le discord.



**brevet 309 : directions principales de déformations**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \quad (5.1)$$

Quel sont les trois directions principales de déformations associées aux valeurs  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{33}$  trouvées au brevet 308 ?

**brevet 313 : contrainte normale maximale**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Mécanique", cours de LPIAV ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des contraintes tel que,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} 10^6 \text{ Pa.} \quad (5.2)$$

Quelle est la normale  $\vec{n}$  telle que la contrainte  $\sigma_{nn}$  soit maximale ?

**brevet 321 : Vecteur contrainte.**

auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un solide élastique en acier (masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ) de longueur  $b = 0.240 \text{ m}$  dans la direction  $\vec{z}$  et dont la forme dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est un triangle isocèle de coté  $2a = 0.300 \text{ m}$  (Fig. 5.1). Cette pièce est dans un champs de gravité  $\vec{g} = -9.81 \text{ m.s}^{-2} \vec{y}$  et est posé sur une table dans la plan perpendiculaire à  $\vec{y}$ .

Un étudiant (mais où va-t-il chercher tout cela ?) a écrit que au point P tel que  $\vec{OP} = x_p \vec{x} + y_p \vec{y} + z_p \vec{z}$ , le tenseur des contraintes est :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -76518 \frac{9.74 \cdot 10^{-3} - 0.15 y_p + 0.577 y_p^2}{0.15 - 0.577 y_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (5.3)$$

1. Quelles sont les vecteurs contrainte au point P de coordonnées  $\vec{OP} = (0.100\vec{x} + 0.100\vec{y} + 0.100\vec{z}) \text{ m}$ ,  $\vec{T}(P, \vec{x})$ ,  $\vec{T}(P, \vec{y})$  et  $\vec{T}(P, \vec{z})$  ?
2. Quelle est le vecteur contrainte au point P tel que  $\vec{OP} = (0.100\vec{x} + 0.100\vec{y} + 0.100\vec{z}) \text{ m}$ ,  $\vec{T}(P, \vec{n}')$ , avec  $\vec{n}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$  ?

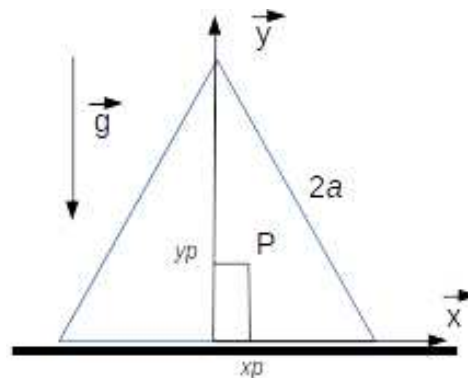


Figure 5.1: Une pièce posée sur un plan dans un champs de gravité.

**brevet 324 : Parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes.**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -0.032 & 0 \\ -0.032 & -0.040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \otimes (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad 10^6 \text{ Pa} ;$$

Quels sont les tenseurs sphérique  $\bar{\sigma}_S$  et déviatorique  $\bar{\sigma}_D$  de ce tenseur ?

**brevet 325 : Invariants de la partie déviatorique du tenseur des contraintes.**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -0.032 & 0 \\ -0.032 & -0.040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \otimes (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad 10^6 \text{ Pa} ;$$

Quels sont les 3 invariants  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  de la partie déviatorique  $\bar{\sigma}_D$  de ce tenseur ?

**brevet 326 : Conditions aux limites en déplacement en coordonnées carthésiennes.**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un barrage poids tel le barrage de Serre-Ponçon, dont on ne considère que une tranche parrallèle à la vallée (Fig. ??), avec un angle  $\alpha$  au sommet, un fluide de masse volumique  $\rho$ , une hauteur d'eau  $h$  et un champs de pesanteur  $g$ , encastré à sa base.

Nous supposons que le champs de déplacement est de la forme,

$$\vec{u} = u_x \vec{x} + u_y \vec{y} + u_z \vec{z}, \quad (5.4)$$

où chacune des fonctions  $u$  est dépendante des coordonnées du point P  $(x_p, y_p, z_p)$ .

Des 4 surfaces  $S_1$  à  $S_4$ , quelles sont celles où l'on peut écrire une condition aux limites en déplacement ? Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du champs de déplacement ?

## 5.2 Calcul du cercle de Mohr à partir de mesures faites avec une rosette

Nous vous proposons de travailler les sections 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6 du polycopié de *mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire* (version 1.6) E. Ringot, augmenté par des brevets concoctés par Jean-Michel Génévaux :

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf)



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 307, 308, 312, 316, 317. Les numéros de brevet sont positionnés dans la marge, cerclé de rouge, en vis-à-vis du bas du paragraphe nécessaire pour les résoudre. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur le discord.

**brevet 307 : déformation mesurée par une jauge de déformation**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \quad (5.5)$$

Quel est la déformation  $\epsilon_{nn}$  qui peut être mesurée par une jauge de déformation collée dans une direction parallèle au vecteur  $\vec{n}' = 1\vec{x} + 1\vec{y} + 1\vec{z}$  ? (la déformation  $\epsilon_{nn}$  est notée  $\epsilon_e$  dans le polycopié de cours de E. Ringot).

**brevet 308 : déformations principales**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \quad (5.6)$$

Quel sont les trois valeurs de déformations principales  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{33}$  ?

**brevet 312 : calcul du tenseur des déformations à partir de la mesure de trois jauges de déformation.**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

En un point P, situé à la surface d'une pièce qui est non chargée sur sa surface au point P (l'action de l'air est négligeable par rapport aux chargements en d'autres points de la pièce), sont collées trois jauges de déformations dans les directions  $\vec{a} = \vec{x}$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{y}$  et  $\vec{c} = \vec{y}$ . Les déformations mesurées par ces trois jauges sont  $\epsilon_{aa} = 30 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{bb} = 50 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{cc} = 50 \cdot 10^{-6}$ .

Quel est le tenseur des déformations

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (5.7)$$

en ce point P ?

**brevet 316 : Cercle de MOHR associé à un état de déformations**  
**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -86.1 & 0 & 0 \\ 0 & 116.1 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \otimes (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (5.8)$$

Tracez le demi-cercle de MORH lorsque le vecteur normal à la facette tourne

- de la direction principale  $\vec{e}_1$  à la direction principale  $\vec{e}_2$ ,
- de la direction principale  $\vec{e}_2$  à la direction principale  $-\vec{e}_1$ .

**brevet 317 : Tricercler de MOHR associé à un état de déformations**

**auteur : JM Géneaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -86.1 & 0 & 0 \\ 0 & 116.1 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \otimes (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} . \quad (5.9)$$

Hachurez la zone qui peut être parcourue dans le plan de MORH par l'extrémité du vecteur déformation, lorsque le vecteur normal à la facette décrit toutes les directions de l'espace ?

Le dépassement de la limite d'élasticité est un critère local, en un point P de la matière. Il est donc nécessaire d'utiliser la mécanique des solides déformables pour y répondre et plus particulièrement :

- le tracé du tricercler de Mohr des contraintes,
- le choix du critère de limite d'élasticité (Von-Mises, Tresca, Drücker-Prager...)
- la vérification que le tricercler de Mohr reste dans la zone de comportement élastique.

Pour vous former à cela, nous vous mettons à disposition,

- Le polycopié d'enseignement de *mécanique des solides déformables* de Stéphane Durand :

<http://perso.univ-lemans.fr/~sdurand/monjolipoly.pdf>

- Le polycopié de *mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire* (version 1.6) E. Ringot, augmenté par des brevets concoctés par Jean-Michel Géneaux :

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf)



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 306, 315, 329, 330, 331, 332 et 333.

**brevet 306 : calcul d'un vecteur déformation**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \quad (5.10)$$

Quel est le vecteur déformation  $\vec{\epsilon}(P, \vec{n})$  pour une facette dont la normale est parallèle au vecteur  $\vec{n}' = 1\vec{x} + 1\vec{y} + 1\vec{z}$  ?

**brevet 315 : Invariant d'un tenseur des déformations**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des déformations tel que,

$$\bar{\epsilon} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -86.1 & 0 & 0 \\ 0 & 116.1 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \otimes (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} . \quad (5.11)$$

Quelles sont les valeurs des trois invariants de ce tenseur des déformations ?



**brevet 329 : Conditions aux limites en déplacement en coordonnées cylindriques.**

auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un cylindre à base circulaire de rayon  $r$  et de longueur  $l$ . Ce solide est chargé sur sa surface supérieure par une force  $\vec{F} = -F\vec{z}$  et l'on supposera que la charge se répartie uniformément sur la surface  $S_4$  (Fig. 5.2).

Trois cas de conditions aux limites sont faites

- a) le cylindre est posé sur un plan parfaitement lubrifié et qui permet le glissement dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ,
- b) le cylindre est encastré sur le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ,
- c) le cylindre est inséré partiellement dans un alésage sans jeu parfaitement lubrifié.

Le champs de déplacement est noté

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{z}, \quad (5.12)$$

où chacune des fonctions  $u$  est dépendante des coordonnées du point P  $(x_p, y_p, z_p)$ .

Des surfaces  $S_1$  à  $S_4$ , quelles sont celles où l'on peut écrire une condition aux limites en déplacement ? Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du champs de déplacement ?

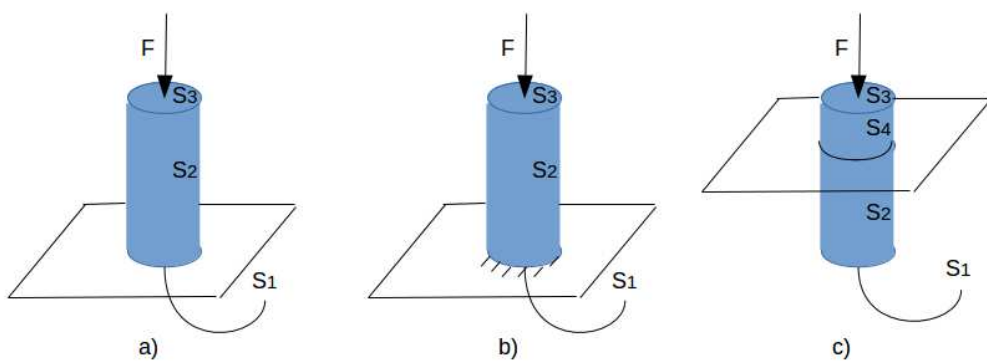


Figure 5.2: Trois types de conditions aux limites pour un cylindre.

**brevet 330 : Conditions aux limites en contraintes en coordonnées cylindriques.**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un cylindre à base circulaire de rayon  $r$  et de longueur  $l$ . Ce solide est chargé sur sa surface supérieure par une force  $\vec{F} = -F\vec{z}$  et l'on supposera que la charge se répartie uniformément sur la surface  $S_4$  (Fig. 5.2).

Trois cas de conditions aux limites sont faites

- a) le cylindre est posé sur un plan parfaitement lubrifié et qui permet le glissement dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ,
- b) le cylindre est encastré sur le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ,
- c) le cylindre est inséré partiellement dans un alésage sans jeu parfaitement lubrifié.

Le tenseur des contraintes est noté

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{s\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z}) \otimes (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})} \quad (5.13)$$

où chacune des fonctions  $\sigma$  est dépendante des coordonnées du point P  $(x_p, y_p, z_p)$ .

Des surfaces  $S_1$  à  $S_4$ , quelles sont celles où l'on peut écrire une condition aux limites en contrainte ? Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du tenseur des contraintes ?

**brevet 331 : Type de loi de comportement.**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Solliciter plusieurs pièces.

- a) Positionner une craie entre les deux mâchoires d'une pince multiple. Serrez jusqu'à l'obtention de la rupture.
- b) Prendre un fil de fer entre vos deux mains. Fléchir ce fil très légèrement et relâcher. Observer. Fléchir ce fil fortement et relâcher. Observer. Obtenez la rupture en fléchissant alternativement le fil dans les deux sens. Observer.
- c) Prendre un spaghetti entre vos deux mains. Fléchir ce spaghetti très légèrement et relâcher. Observer. Fléchir ce spaghetti fortement. Observer. Ne mangez pas le spaghetti : il n'est pas cuit.

Le comportement élastique est-il observable ? Le comportement plastique est-il observable ? La rupture est-elle fragile ou ductile ?

**brevet 332 : Conditions aux limites en contraintes en coordonnées cartésiennes.**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un barrage poids tel le barrage de Serre-Ponçon, dont on ne considère que une tranche parallèle à la vallée (Fig. ??), avec un angle  $\alpha$  au sommet, un fluide de masse volumique  $\rho$ , une hauteur d'eau  $h$  et un champs de pesanteur  $g$ , encastré à sa base.

Nous supposons que le tenseur des contraintes est de la forme,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (5.14)$$

où chacune des fonctions  $\sigma$  est dépendante des coordonnées du point P  $(x_p, y_p, z_p)$ .

Des 4 surfaces  $S_1$  à  $S_4$ , quelles sont celles où l'on peut écrire une condition aux limites en contrainte ? Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du tenseur des contraintes ?

**brevet 333 : Dépassement de la limite d'élasticité.**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : "Polycopié de mécanique des milieux continus ; élasticité linéaire" (version 1.6) E. Ringot ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite, au sein du du polycopié [http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc\\_general\\_jmg7.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/ufr/mmc_general_jmg7.pdf), à lire le paragraphe qui précède l'apparition dans la marge de ce numéro de brevet et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un tenseur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -134 & 0 \\ -134 & -112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad 10^6 \text{ Pa} .$$

Si la limite d'élasticité en traction est  $\sigma^{ce} = 150 \text{ MPa}$  et en compression  $\sigma^{ce} = -150 \text{ MPa}$ ,

- l'état de contraintes  $\bar{\sigma}$  est-il encore élastique vis-à-vis du critère de Von-Mises ?
- l'état de contraintes  $\bar{\sigma}$  est-il encore élastique vis-à-vis du critère de Tresca ?

## Chapter 6

# De l'élasticité à la théorie des poutres

# Bibliography

- [1] M. Guez, *La communication non violente*, stage 1
- [2] J.M. Génévaux, *Introduction aux tenseurs*, cours de l'Ensim niveau L3, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [3] Albigès Résistance des matériaux
- [4] Courbon
- [5] Feodossiev
- [6] Laroze Résistance des matériaux et structures (tome 2) éd. : Masson-Eyrolle
- [7] Germain Introduction à la mécanique des milieux continus éd. : Masson
- [8] Timoshenko
- [9] Techniques de l'ingénieur, B5 I, 600,601, 5020, 5040 (concentrations de contraintes)
- [10] JM Génévaux, *Base de l'acoustique*, cours de Licence Professionnelle Vibration Acoustique, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [11] JM Génévaux, *Modélisation*, cours de 4<sup>ème</sup> année de L'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, <http://www.archives-ouvertes.fr>
- [12] S Durand, *Mécanique des solides déformables*, cours de 4<sup>ème</sup> année de L'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans
- [13] J.M. Génévaux Atravail pr. Pelat, *Une pédagogie participative en école d'ingénieur (alias Freinet 5CH)*, formation pédagogique de l'Université du Maine, mars 2014, <https://cel.archives-ouvertes.fr/???>

Formation à la compétence orange de statique des poutres.



Sur  
<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=208>,  
vous pouvez visualiser une présentation des  
cette compétence. Le fichier sont nommé *208  
Compétence orange de statique des poutres :  
détermination du torseur des efforts intérieurs.*

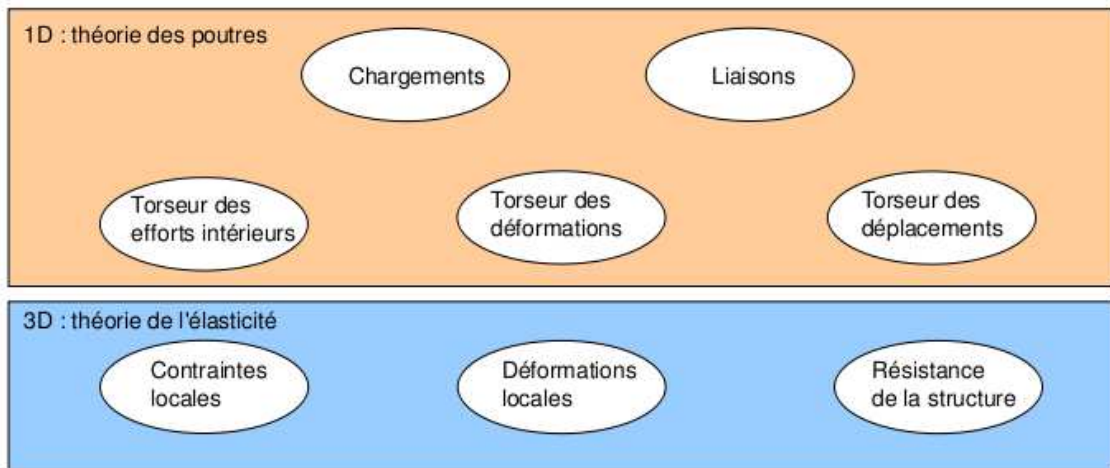


Figure 6.1: Les différents concepts nécessaires à la théorie des poutres.

## 6.1 Les Outils

Le synopsis de la démarche associée à la théorie des poutres est présenté figure 6.1.

### 6.1.1 Notion de poutre

*Qu'est-ce qu'une poutre ?* La réponse est dans la vidéo 001 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=001>. Regarde-la.

*Qu'est-ce que la fibre moyenne d'une poutre ? Ce n'est pas clair pour le comprendre.* La réponse est dans la vidéo 054 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=054>. Regarde-la.

Nous travaillons ici,

- soit dans un repère global associé à l'ensemble de la poutre. Nous noterons les vecteurs de ce repère global  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ,
- soit dans un repère local à un point H. Nous noterons les vecteurs de ce repère local  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ . Le vecteur  $\vec{x}$  sera toujours choisi parallèle à la fibre moyenne. Les vecteurs  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  orthogonaux à  $\vec{x}$ , seront dans les directions principales de la section droite (voir paragraphe 6.1.8).

• **Erreur classique** : Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, dans quel repère il est exprimé.

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Elle peut être envisagée lorsque le corps solide déformable possède une dimension bien plus grande que les deux autres. Un solide de ce type sera appelé *poutre*. Si l'on fait une section dans le plan des petites dimensions, le barycentre de cette section sera noté  $H$ . Si vous lisez d'autres livres de théorie des poutres, ce point est généralement appelé  $G$ . Pour éviter que vous ne le confondiez avec le centre de gravité de la poutre complète (erreur devenue classique ces dernières années, mais extrêmement énervante pour l'enseignant), nous choisirons de l'appeler par la lettre  $H$ . L'ensemble des barycentres de la poutre définit la *ligne moyenne*. Si la section est perpendiculaire à la ligne moyenne, elle sera appelée *section droite*. La position sur cette ligne moyenne est repérée par une abscisse  $s$ . Cette ligne moyenne peut être continue, discontinue, être continuellement dérivable par rapport à la variable  $s$  ou non.



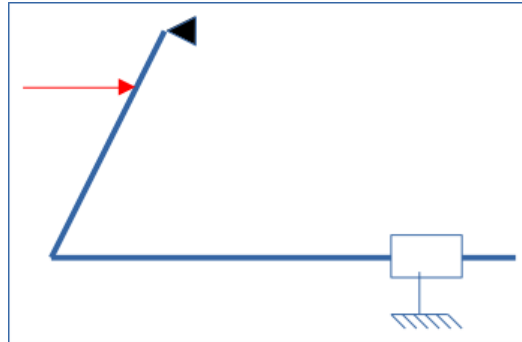


Figure 6.2: Un exemple 2D de poutre avec un chargement, une liaison glissière 2D et un appui simple.

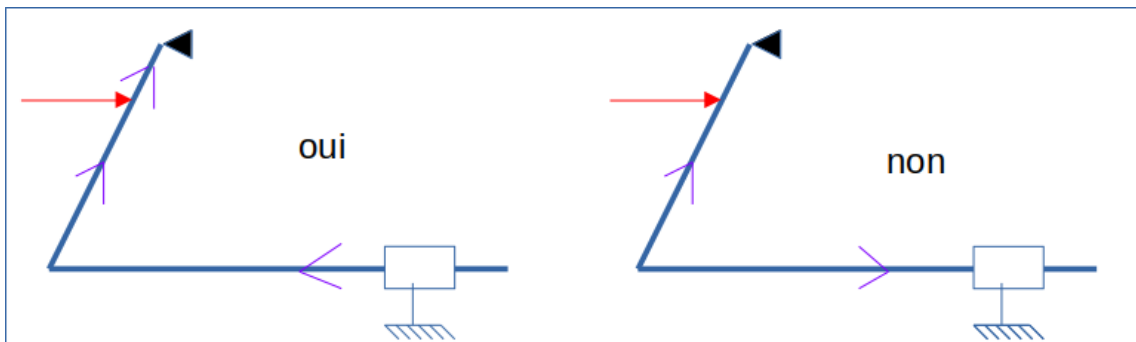


Figure 6.3: Exemple d'orientation de la poutre.

Nous travaillons ici dans un repère local à un point. Nous noterons les vecteurs de ce repère local  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ .

Pour définir ce repère pour un problème donné (Fig. 6.2), la démarche à suivre est la suivante :

1. la poutre du début à la fin de celle-ci sans faire "demi-tour" (Fig. 6.3),
2. choisir un point  $H_i$  dans chaque tronçon de poutre (ne pas le dessiner au milieu du tronçon pour éviter les ambiguïtés) (Fig. 6.5),
3. dessiner le vecteur  $\vec{x}$  tangent à cette poutre dans le sens de l'orientation de la poutre à chaque point  $H_i$  (Fig. 6.6),
4. dessiner les vecteurs  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  afin que le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  soit direct (Fig. 6.7),
5. poser le paramétrage pour repérer les points  $H_i$  tel qu'il soit croissant dans le sens de la poutre (Fig. 6.7).

Si dans un problème, le paramétrage est donné, choisir l'orientation de la poutre telle que la dernière condition soit vérifiée.

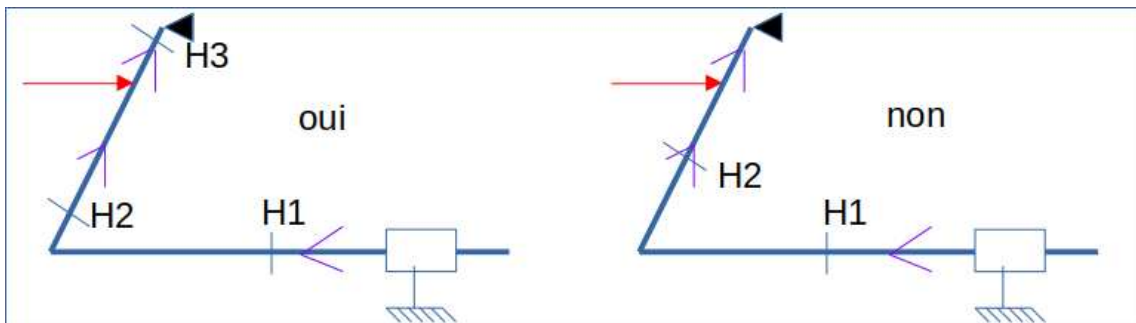


Figure 6.4: Définition d'un point  $H_i$  pour chaque segment.

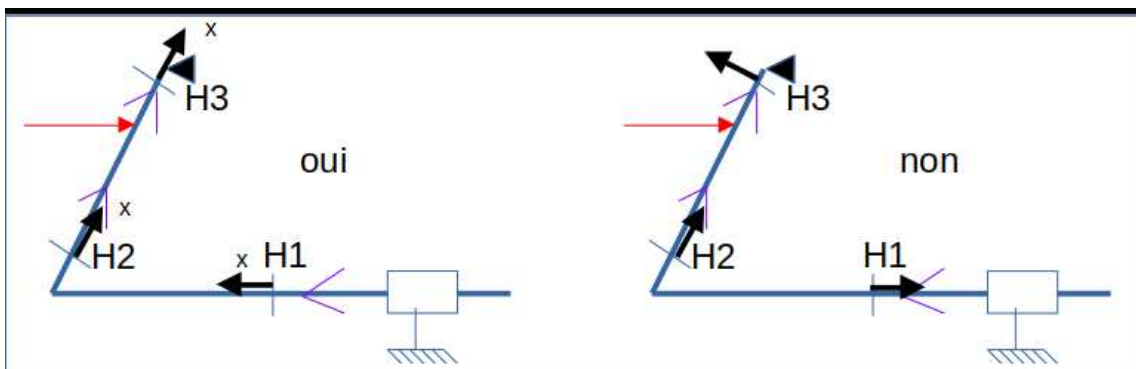


Figure 6.5: Définition des vecteurs  $\vec{x}$  pour chaque point  $H_i$ .

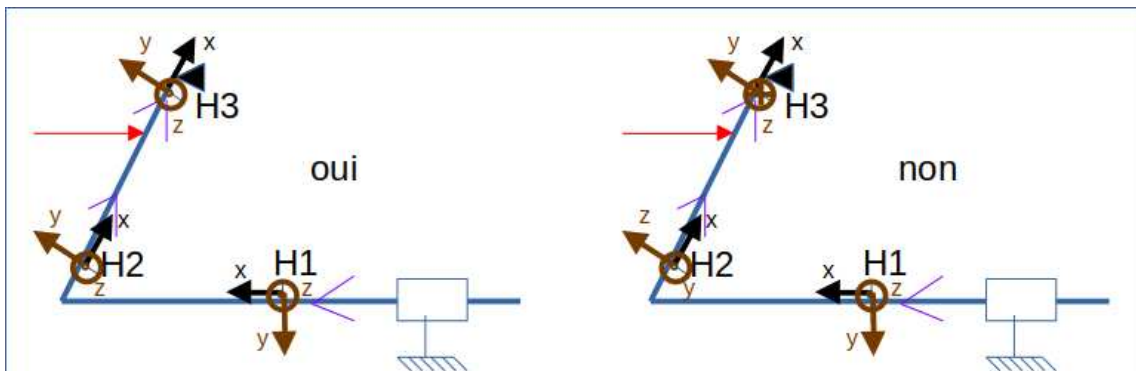


Figure 6.6: Définition des vecteurs  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  pour chaque point  $H_i$ .

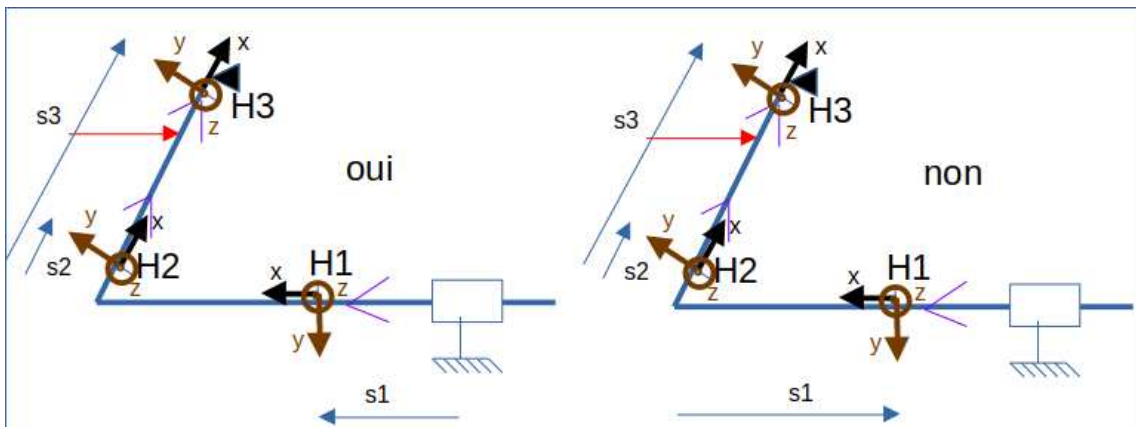


Figure 6.7: Définition des paramétrages de chaque point  $H_i$ .

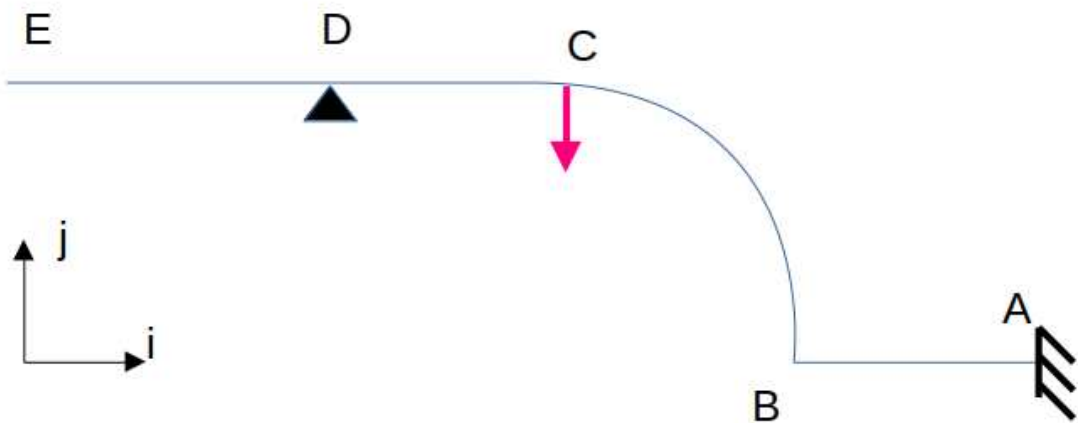


Figure 6.8: Une structure poutre, ses liaisons et son chargement.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 840 et 841. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter la référente du brevet correspondant.

**brevet 840 : Repère local, repérage et parties aval et amont.**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours techno-mécanique ;**  
**autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Les Outils" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit la structure formée d'une poutre connectée au repère global  $(\vec{i}, \vec{v}ecy, \vec{z})$  et subissant des chargements tels que représentés figure 6.8.

Si l'on oriente la poutre à partir de A, dessinez les repères  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  en chaque point  $H_i$  nécessaire sur la fibre moyenne. Définissez le paramétrage  $s_i$  ou  $\theta_i$  associé à chaque point  $H_i$ , puis dessinez la partie aval associée à chaque point  $H_i$ .

**brevet 841 : Repère local, repérage et parties aval et amont.**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours techno-mécanique ;**  
**autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Les Outils" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit la structure formée d'une poutre connectée au repère global  $(\vec{i}, \vec{v}ecy, \vec{z})$  et subissant des chargements tels que représentés figure 6.9.

Si l'on oriente la poutre à partir de A et G, dessinez le repère  $(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  au point  $H_5$  entre G et C. Définissez le paramétrage  $s_5$  associé au point  $H_5$ . Dessinez la partie aval du point  $H_5$ .

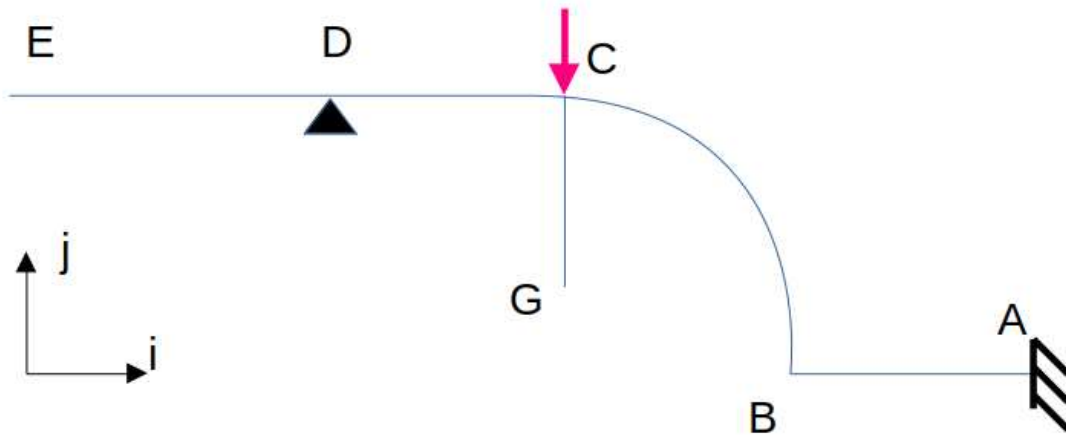


Figure 6.9: Une structure poutre, ses liaisons et son chargement.

La théorie des poutres fournit des solutions en déplacement et contraintes qui ne sont pas nécessairement valables en tout point. Mais loin des points d'application des chargements, des liaisons (blocages cinématiques) et des variations brusques de section, elle est tout à fait suffisante. Ces conditions sont présentes en de nombreux points de ce type de structures.

Nous rappelons les grandeurs et relations utiles en élasticité tridimensionnelle : (voir tableau 6.1)

*A quoi sert le tableau "équations de la mécanique..." ? Comment s'en sert-on ?* La réponse est dans la vidéo 259 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=259>. Regarde-la.

*Que signifient les 2 barres au dessus du terme epsilon ?* La réponse est dans la vidéo 253 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=253>. Regarde-la.

*Que représentent dans la table 3.1, les équations de compatibilité ?* La réponse est dans la vidéo 015 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=015>. Regarde-la.

*Qu'est-ce qu'un tenseur ?* La réponse est dans la vidéo 003 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=003>. Regarde-la.

*Peut-on avoir un cours sur les tenseurs ?* La réponse est dans la vidéo 316 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=316>. Regarde-la.

*Pour la déformation d'un solide, vous avez parlé de cisaillement, mais pas de torsion et de rotation. Pourquoi ?* La réponse est dans la vidéo 254 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=254>. Regarde-la.

*Comment différenciez-vous un tenseur et une matrice ?* La réponse est dans la vidéo 258 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=258>. Regarde-la.

Le même jeu de relations est présent dans le cas de la théorie des poutres, seules les grandeurs utilisées sont décrites à l'aide d'objets que l'on appelle tenseur. Ce sont les mêmes êtres mathématiques que ceux que vous avez utilisés en mécanique des solides indéformables pour décrire leur mouvement. Ils seront ici simplement associés aux déplacements et rotations d'une section droite, aux déformations d'une section droite et aux efforts généralisés (résultante et moment) sur cette section.

*Que représente le module de Coulomb noté "G" ?* La réponse est dans la vidéo 018 disponible sur

	déplacements	déformations	contraintes
	$\vec{u}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\sigma}$
condition aux limites en déplacement	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur $\Gamma_u$		
passage déplacements	+ éq. compatibilité $\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{kj,il} =$	$\bar{\epsilon} = 1/2 \left( \text{grad } \vec{u} + {}^T \text{grad } \vec{u} \right)$	+ éq. compatibilité (Beltrami)
déformations	$\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{lj,ik}$ pour $i \neq j$ et $l \neq k$		$(1 + \nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 (\text{trace } \bar{\sigma})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $\text{grad } f = 0$
loi de comportement		$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d$	$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{trace}(\bar{\epsilon}) \bar{I}_d$
équations d'équilibre (statique)	éq. de Navier: $(\lambda + \mu) \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{u})$ $+ \mu \text{div}(\text{grad } \vec{u}) + \rho \vec{u} = 0$		$\text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{f} = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$
condition aux limites en contraintes			$\vec{T}(P, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n} = \vec{F}_d$ sur $\Gamma_f$
passage contrainte torseur			$N = \int_S \sigma_{xx} dS$ $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$ $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ $M_x = \int_S \sigma_{\theta x} r dS$ $M_{fy} = \int_S \sigma_{xx} z dS$ $M_{fz} = - \int_S \sigma_{xx} y dS$

Table 6.1: Équations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle

	torseur des déplacements	torseur des déformations	torseur des efforts intérieurs
	$\{U\} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{u} \end{Bmatrix}_H$ $\{U\} = \{U\}_d$ au point $P_d$	$\{Def\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z} \\ \epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{Bmatrix}_H$	$\{Tint\} = \begin{Bmatrix} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_x\vec{x} + M_f\vec{y} + M_z\vec{z} \end{Bmatrix}_H$
condition aux limites en déplacement			
passage déplacements déformations	formules de Bresse (fonction de $\epsilon_x, \gamma_y, \dots$ )		
loi de comportement	formules de Bresse (fonction de $N, T_y, \dots$ )	$\alpha_x = M_x/GI_0^c$ $\alpha_y = M_fy/EI_{Hy}$ $\alpha_z = M_fz/EI_{Hz}$ $\epsilon_x = N/ES$ $\gamma_y = T_y/GS_y$ $\gamma_z = T_z/GS_z$	$M_x = \alpha_x GI_0^c$ $M_fy = \alpha_y EI_{Hy}$ $M_fz = \alpha_z EI_{Hz}$ $N = \epsilon_x ES$ $T_y = \gamma_y GS_y$ $T_z = \gamma_z GS_z$
équations d'équilibre (poutre droite)			$p_x + \frac{dN}{ds} = 0$ $p_y + \frac{dT_y}{ds} = 0$ $p_z + \frac{dT_z}{ds} = 0$ $c_x + \frac{dM_x}{ds} = 0$ $c_y + \frac{dM_fy}{ds} - T_z = 0$ $c_z + \frac{dM_fz}{ds} + T_y = 0$
condition aux limites en chargement			$-\{\tau_{s+}\} + \{\tau_{s-}\} = \{\tau_d\}$ au point $P_f$
passage torseur contrainte			$\sigma_{xx} = N/S + \frac{M_fz\vec{z}}{I_{Hz}} - \frac{M_fy\vec{y}}{I_{Hy}}$ $\sigma_{yy} = \frac{T_y g_y(\vec{y}, \vec{z})}{S}$ $\sigma_{zz} = \frac{T_z g_z(\vec{y}, \vec{z})}{S}$ $\sigma_{yy} = 0$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = 0$ $\sigma_{\theta x} = \frac{M_x \tilde{r}_{\theta 0}(\vec{y}, \vec{z})}{I_0}$

Table 6.2: Équations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle en cinématique 3.

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=018>. Regarde-la.

*Que représentent dans la table 3.2, les formules de Bresse qui ne sont pas détaillées. Est-ce normal ?* La réponse est dans la vidéo 017 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=017>. Regarde-la.

*Le module de Young  $E$  peut aussi dépendre de  $s$  et quelle est la signification de la lettre  $S$ ?* La réponse est dans la vidéo 320 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=320>. Regarde-la.

## 6.1.2 Analyse à l'échelle locale 3D

Nous ne rappellerons que quelques définitions de l'élasticité linéaire isotrope.

*Qu'est ce qu'un matériau orthotrope ?* La réponse est dans la vidéo 244 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=244>. Regarde-la.

- Les différentes possibilités de déformations d'un volume élémentaire ( $dx\ dy\ dz$ ). On définit les 3 déformations d'allongement (ou de contraction)  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ , ainsi que les 6 déformations de cisaillement  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yz}$ ,  $\epsilon_{zx}$ ,  $\epsilon_{yx}$ ,  $\epsilon_{zy}$ ,  $\epsilon_{xz}$ .
- Tenseur des déformations. Ces 9 composantes peuvent être ordonnées dans une matrice associée au tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$ . Ce tenseur est symétrique de part sa construction. Il y a donc 6 composantes indépendantes.
- Tenseur des contraintes. Il est associé aux contraintes agissant sur chaque facette d'un parallélépipède. La facette de normale  $\vec{x}$  subit les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{zx}$ . Nous appellerons  $E$  le module de Young du matériau (en Pa). Nous appellerons  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (sans unité). Nous appellerons  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de Coulomb du matériau (en Pa). La loi de comportement permettant de passer du tenseur des déformations au tenseur des contraintes est,

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{trace}(\bar{\sigma})\bar{I}_d, \quad (6.1)$$

ou

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\epsilon} + \lambda\text{trace}(\bar{\epsilon})\bar{I}_d, \quad (6.2)$$

avec les deux coefficients de Lamé donnés par,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (6.3)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (6.4)$$

*Qu'est-ce qu'un tenseur ?* La réponse est dans la vidéo 058 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=058>. Regarde-la.

*Pourquoi parle-t-on de tenseur ?* La réponse est dans la vidéo 074 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=074>. Regarde-la.

On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des termes sur la diagonale de celle-ci.

Tableau 1 : Caractéristiques de plusieurs matériaux.



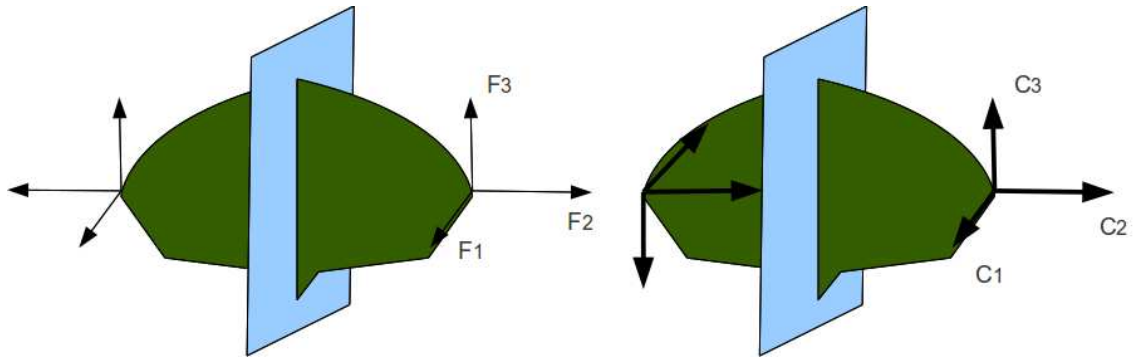


Figure 6.10: Un vecteur et un pseudo-vecteur ne sont pas transformés de la même façon par un plan de symétrie.

matériau	Mod. de Young 10 <sup>9</sup> Pa	Coeff. de Poisson	lim. élas. trac. 10 <sup>6</sup> Pa	lim. élast. compr.	masse vol. kg/m <sup>3</sup>
				lim. élas. traction	
acier	210	0.285	200 à 600	1	7800
aluminium AU4G	75	0.33	20 à 25	1	2800
béton	14 à 21	0.3	30	11	1900
bronze	100	0.31	126	3	8400
cuivre	100	0.33	180	1.3	8900
fonte	100	0.29	200 à 530	3.3	7100
laiton	92	0.33	50 à 290	1.4	7300
marbre	25	0.3	50	15	2800
plexiglass	2.9	0.4	8	1.2	1800
titane	100	0.34	100 à 225	1	4510
verre	60	à 0.3	50 à 80	10	2530

### 6.1.3 Analyse à l'échelle 1D

On doit définir des grandeurs "équivalentes" à celles utilisées en 3D, au point de la section droite appartenant à la fibre moyenne. Cette fibre moyenne est la ligne qui relie l'ensemble des barycentres des sections droites de la poutre. Une section droite est une coupure de la poutre dans le plan qui contient les deux plus petites dimension. Nous utiliserons des torseurs : torseur de chargement, de mouvement possible à une liaison, de déplacement, d'inter-effort, de déformation, d'effort intérieur. Un torseur est toujours composé d'un vecteur appelé *résultante*  $\vec{R}$  et d'un pseudo-vecteur appelé *moment*  $\check{M}$ , et il est exprimé nécessairement en un point A. Pour ceux qui ne se souviennent plus de ce qu'est un pseudo-vecteur, consultez le cours sur les tenseurs de 3A [2]. Dans le cas d'un torseur de chargement, la figure 6.10 illustre que les forces  $F_i$  et les couples  $C_i$  en un point A ne subissent pas les mêmes transformations par un plan de symétrie : la force est un vecteur, le couple, un pseudo-vecteur.

Pour changer d'un point A à un point B, la formule de changement de point d'un torseur est à connaître.

Pour un torseur de chargement, d'inter-effort ou d'effort intérieurs :

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \check{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \check{M}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \check{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B. \quad (6.5)$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule de changement de point, est de vous souvenir de votre héros de jeunesse "BABAR" :  $\check{M}_B = \check{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$ .

Pour un torseur de déplacement :

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_A + \check{\omega} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B. \quad (6.6)$$



Figure 6.11: Un bureau plein d'objets manufacturés (pas de remarque sur le rangement... merci !)

- **Erreur classique** : Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, en quel point il est exprimé.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 078. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter la référente du brevet correspondant.

**brevet 0078 : Identification de poutres parmi des objets manufacturés**

**auteur : JM Géneaux ; ressource : [?] ; autoattribution**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *De l'élasticité à la théorie des poutres* et de regarder les vidéos afférentes.

Déterminez parmi les objets présents sur la figure 6.11, au moins 6 objets qui soient modélisables par une poutre, ou dont une partie est modélisable par une poutre.

#### 6.1.4 Principes et lois

Nous développerons une théorie linéaire, donc nous vérifierons le principe de superposition : si un chargement 1 implique un champ de torseurs de déplacement 1, un chargement 2 implique un champ de torseurs de déplacement 2, alors appliquer la somme des deux chargements implique un champ de déplacement somme des deux champs précédents.

Le principe de St Venant, exprime que la solution de la théorie des poutres fournie est admissible loin des points de chargement, de liaison, des discontinuités de fibre moyenne et de sa dérivée et

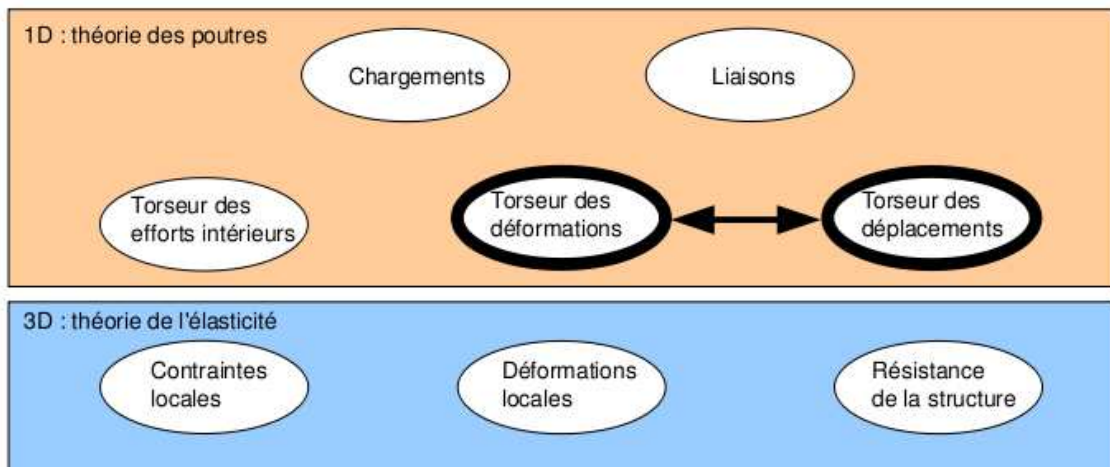


Figure 6.12: Les concepts à la description du mouvement de la fibre moyenne.

des variations brusques de section.

Le mouvement d'un point  $M$  de la poutre sera associé au mouvement du point  $H$  de la section droite à laquelle il appartient. Il est donc nécessaire de définir le type de lien cinématique entre le point  $M$  et le point  $H$ . Différentes hypothèses de cinématique de section droite sont possibles :

- de Bernoulli : une section plane reste plane et normale à la fibre moyenne. Nous la nommerons plus tard, *cinématique numéro 2*,
- de Timoshenko : une section plane reste plane,
- de Bernoulli généralisée : une section plane peut se voiler. Nous la nommerons plus tard, *cinématique numéro 3*.

La rigidité équivalent de la section droite sera dépendante de la cinématique choisie.

### 6.1.5 Cinématique d'un point de la fibre moyenne

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.12.

- Le torseur des déplacements du barycentre d'une section peut être écrit

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_H, \quad (6.7)$$

avec  $\tilde{\omega}$  l'angle dont à tourné la section droite,  $\vec{u}$  le déplacement du point  $H$ . Les unités S.I. de  $\omega$  est le radian qui est sans dimension, celles de  $u$  est le m.

*Qu'est-ce qu'un torseur des déplacements ?* La réponse est dans la vidéo 056 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=056>. Regarde-la.

- Le torseur des déformations entre deux points  $H(s)$  et  $H(s + ds)$  éloignés l'un de l'autre de  $ds$  qui peut être pris infiniment petit, est défini par :

$$\{Def\}_H = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left( \{U\}_{H(s+ds)} - \{U\}_{H(s)} \right). \quad (6.8)$$

Tout calculs faits (voir figure 6.13), on obtient,

$$\{Def\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\tilde{\omega}}{ds} \\ \frac{d\vec{u}}{ds} - \tilde{\omega} \wedge \vec{x} \end{array} \right\}_H. \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \mathcal{D}_d \right\} &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \left\{ \mathcal{U}_{s+ds} \right\} - \left\{ \mathcal{U}_s \right\} \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s+ds) \\ \vec{v}(s+ds) \end{array} \right\}_{H'} - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) \\ \vec{v}(s) \end{array} \right\}_H \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left[ \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s+ds) \\ \vec{v}(s+ds) + \vec{\omega}(s+ds) \wedge \vec{H'H} \end{array} \right\}_H - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) \\ \vec{v}(s) \end{array} \right\}_H \right] \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(s) + \frac{d\vec{\omega}}{ds}(s) ds + o(ds^2) \\ \vec{v}(s) + \frac{d\vec{v}}{ds}(s) ds + \left( \vec{\omega}(s) + \frac{d\vec{\omega}}{ds}(s) ds \right) \wedge (-ds \vec{e}_1) - \vec{v}(s) \end{array} \right\}_H \\
 &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\vec{\omega}}{ds} ds \\ \frac{d\vec{v}}{ds} ds + \vec{\omega} \wedge (-\vec{e}_1) ds \end{array} \right\}_H \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\vec{\omega}}{ds} \\ \frac{d\vec{v}}{ds} + \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 \end{array} \right\}_H
 \end{aligned}$$

Figure 6.13: Démonstration de l'expression du torseur des déformations.

Pour cette démonstration, vous noterez qu'est effectué un développement de Taylor des variables et que seuls les termes d'ordre 2 sont conservés. Si entre deux points  $H$  et  $H'$ , le mouvement est celui d'un solide rigide, les deux torseurs sont reliés par la formule de changement de point, alors le torseur des déformations est nul.

Attention ! Dans ce cours,

- $\tilde{\omega}$  désigne un angle de rotation (en radian), et non une vitesse de rotation (dans le torseur cinématique d'un solide, elle était notée  $\vec{\Omega}_{S2/S1}$ ).
- $\vec{u}$  désigne un déplacement (en mètre)
- Ils sont donnés par rapport au repère global  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

## 6.1.6 Efforts intérieurs

### Calcul du torseur des efforts intérieurs

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.14.

Dans ce cours, pour le torseur des efforts intérieurs, la résultante sera notée  $\vec{R}_{int}$ , le moment sera noté  $\vec{M}_{int}$ .

On oriente la poutre. Soit le point  $H$  d'abscisse  $s$ . On notera  $seg+$  la demi poutre dont les abscisses sont supérieures à  $s$ . On notera  $seg-$  la demi poutre dont les abscisses sont inférieures à  $s$ .

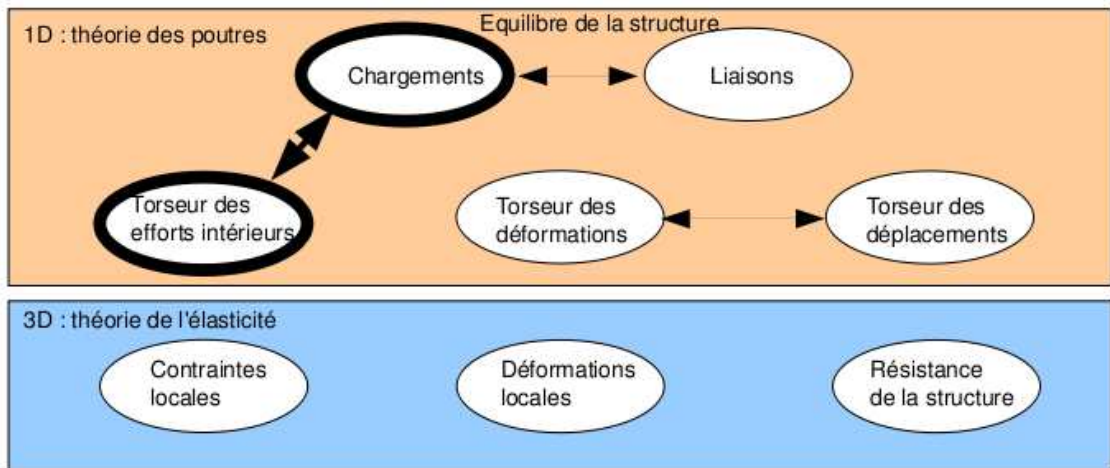


Figure 6.14: Les concepts utiles à la détermination du degré d'hyperstatisme et des réactions aux liaisons.

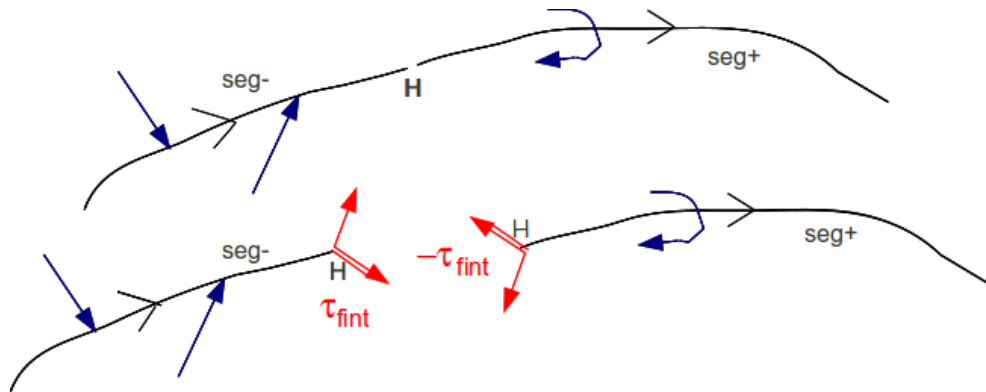


Figure 6.15: Définition du torseur des efforts intérieurs.

Si le paramétrage est donné, on veillera pour la simplicité des calculs, à orienter la poutre dans le même sens que les paramètres sont croissants ( $s$  croissants ou  $\theta$  croissant).

Prenons comme définition que le torseur des efforts intérieur représente les actions de la partie  $seg+$  sur la partie  $seg-$  (voir figure 6.15).

Si l'on isole le segment  $seg-$ , celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs (de chargement ou de liaison) sur le segment  $seg-$  et par le torseur des efforts intérieurs. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nulle, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\}. \quad (6.10)$$

Nous aurions aussi pu isoler le segment  $seg+$ . Celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs (de chargement ou de liaison) sur le segment  $seg+$  et par un torseur qui est l'opposé du torseur des efforts intérieurs par le principe d'action et de réaction. Nous faisons ici l'hypothèse qu'au point de coupure  $H$  il n'y a pas de force concentrée. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nulle, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}. \quad (6.11)$$

On note donc que nous disposons à chaque fois de deux manières de calculer le torseur des efforts intérieurs, en utilisant soit la partie  $seg+$  soit la partie  $seg-$ . Les deux méthodes donnent le

même résultat, car la poutre, dans sa globalité  $\text{seg}+ \cup \text{seg}-$  est en équilibre. C'est à vous de choisir le segment qui implique le moins de calcul. Par exemple, si sur l'un des segments il y a des liaisons et des chargements, et sur l'autre que des chargements (par définition connus), c'est ce dernier segment qu'il faut utiliser car cela vous évite d'avoir à calculer les inconnues aux liaisons, et donc de faire l'équilibre global de la structure, déterminer son degré d'hyperstatisme, and so on....

En général, la connaissance du torseur des efforts intérieurs est nécessaire sur l'ensemble de la poutre. Plusieurs cas doivent être étudiés en faisant varier le point  $H$ , car lorsque  $s$  croît, à chaque passage d'un chargement, le torseur de chargement passe du segment  $\text{seg}+$  au segment  $\text{seg}-$ .

*Quelle est l'influence de l'orientation d'une poutre ?* La réponse est dans la vidéo 535 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=535>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Dans la démarche pour trouver le torseur de cohésion, que faut-il faire après avoir fais le PFS ? Doit-on le ramener au point où on l'étudie ?* La réponse est dans la vidéo 538 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=535>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Dans le cas de l'équilibre total de la poutre, doit-on prendre en compte la gravité en ne prenant en compte que la moitié de la poutre ?* La réponse est dans la vidéo 539 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=535>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

• **Erreur classique** : Si vous oubliez de définir l'orientation de la poutre par une phrase ("La poutre est orientée de A vers D") ou par une flèche sur le dessin du système, alors, le correcteur ne pourra être sûr que votre démarche est correcte : cela peut entraîner un échec à la tentative de ceinture.

**Exemple** Dans le premier exemple (figure 6.16, le calcul du torseur des efforts intérieurs ne nécessite pas la détermination des inconnues aux liaisons. On remarquera dans cet exemple que deux cas sont à étudier en fonction de la position du point  $H$ .

**Composantes du torseur des efforts intérieurs** La détermination du torseur des efforts intérieurs en un point  $H$  est généralement faite dans le repère global  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Son expression peut même être donnée en un point différent de  $H$ . Néanmoins, si le type de sollicitation vous est demandé, et c'est toujours le cas, il est nécessaire

1. d'exprimer ce torseur au point  $H$
2. de l'exprimer dans le repère local au point  $H$  qui prenne en compte l'orientation locale de la poutre et de la forme de sa section droite.

En effet, si par exemple le torseur des efforts intérieur comporte une force  $F\vec{j}$  la réponse en déformation de la poutre sera différente si la direction  $\vec{j}$  est parallèle à la fibre moyenne ou perpendiculaire.

Soit  $(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère local tel que,

- $H\vec{x}$  tangent à la fibre moyenne,
- $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  axes principaux de la section droite,

*Pourquoi est-il indispensable de calculer le torseur des efforts intérieurs dans une base locale ?* La réponse est dans la vidéo 303 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=303>. Regarde-la.

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_x\vec{x} + M_y\vec{y} + M_z\vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (6.12)$$



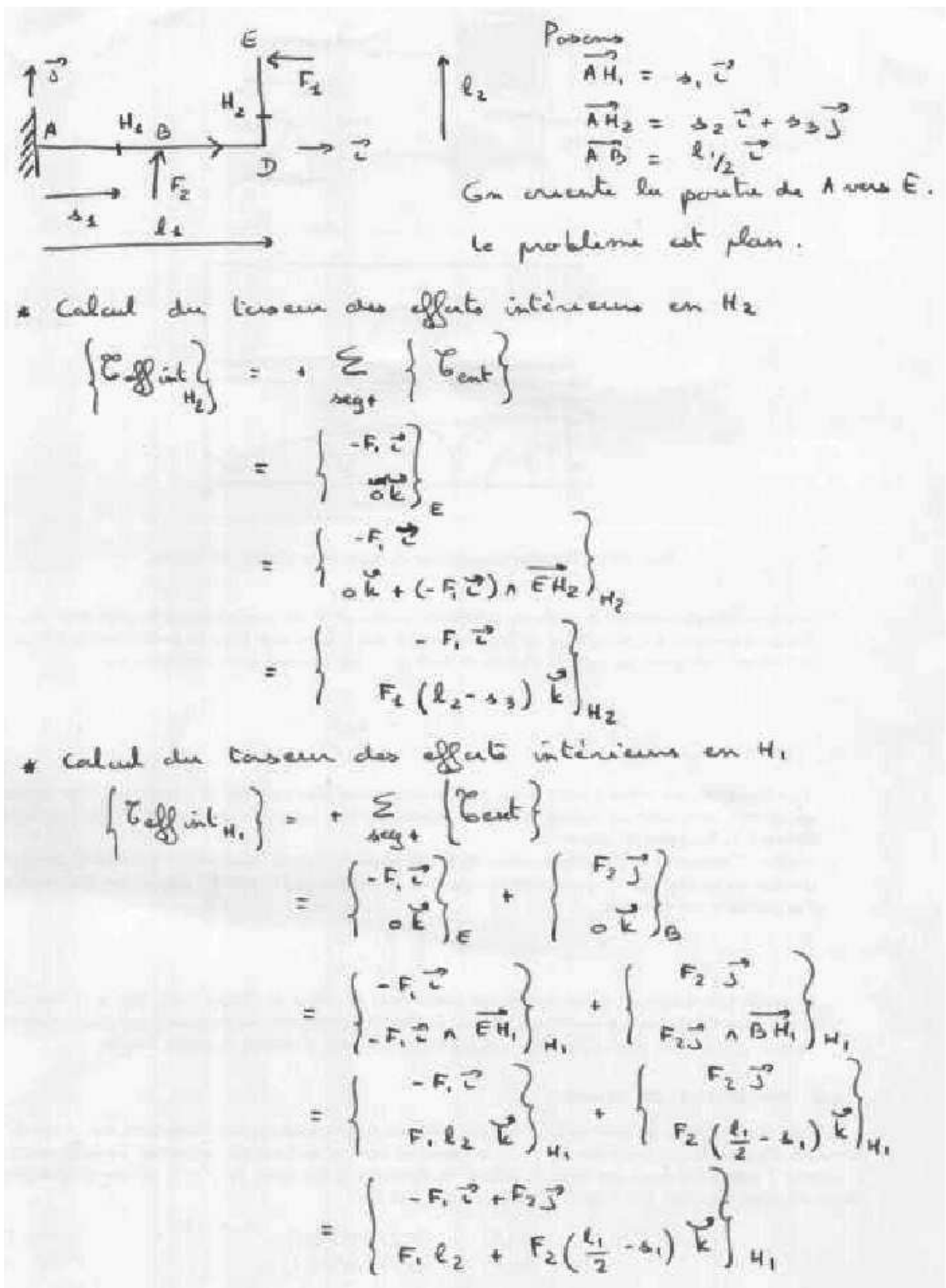


Figure 6.16: Exemple de détermination du torseur des efforts intérieurs pour un système 2D.

avec,

- $N$  : effort normal,
- $T_y$  : effort tranchant suivant la direction  $\vec{y}$ ,
- $T_z$  : effort tranchant suivant la direction  $\vec{z}$ ,
- $M_x$  : moment de torsion,
- $M_{f_y}$  : moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{y}$ ,
- $M_{f_z}$  : moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$ .

On écrira donc le torseur des efforts intérieurs, au point  $H$  et dans ce repère local, afin de pouvoir identifier les types de sollicitation que la poutre subit.

**Exemple** Si l'on reprend le cas tridimensionnel précédemment traité, la détermination des composantes

- au point  $H_1$  donne un effort normal  $N_1 = -F_1$ , un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y1} = F_2$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz1} = F_1(l_2) + F_2(l_1/2 - s_1)$ . En effet, repère local et global sont confondus :  $\vec{x} = \vec{i}, \vec{y} = \vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ .
- au point  $H_2$  compris entre B et D, donne un effort normal  $N_2 = -F_1$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz2} = F_1 l_2$ . En effet, repère local et global sont confondus.
- au point  $H_2$  compris entre D et E, donne un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y2} = F_1$ , et un moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$   $M_{fz2} = F_1(l_2 - s_3)$ . En effet, repère local et global ne sont plus confondus :  $\vec{x} = \vec{j}, \vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ .

• **Erreur classique** : Pour déterminer les composantes d'un torseur des efforts intérieurs, il ne faut pas oublier avant identification, d'exprimer ce torseur dans le repère local au point  $H$ .

• **Erreur classique** : Il ne faut pas confondre le moment  $M$  à une liaison, et un moment fléchissant  $M_f$  ou de torsion  $M_x$  : l'un traduit les efforts et moments transmissibles (qui peuvent être exprimés dans n'importe quel repère), l'autre des efforts et moments à l'intérieur de la poutre (qui ne peuvent être exprimés que dans le repère local au point  $H$  de cette poutre.)

• **Erreur classique** : Les composantes du torseur des efforts intérieurs doivent être exprimées en fonction des chargements et des inconnues hyperstatiques. Si vous les laissez en fonction des inconnues aux liaisons, vous ne trouverez pas les contraintes, déplacements et rotations en fonction du chargement.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 002, 005, 018, 001 et 803. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.



**brevet 002 : choix du secteur aval ou amont à utiliser pour le calcul du torseur des efforts intérieurs**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Efforts intérieurs* et de regarder les vidéos afférentes.

Soient les points A,B,C,D,E positionnés tels que  $\vec{AB} = l\vec{i} + a\vec{j}$ ,  $\vec{AC} = 2l\vec{i}$ ,  $\vec{AE} = 2.5l\vec{i}$ ,  $\vec{AD} = 3l\vec{i}$ . Soit une poutre formée par les lignes droites AB, BC, CE et ED. Cette poutre est en appui simple en A et en appui sur rouleau de normale  $\vec{j}$  en C. Elle résiste vaillamment à une charge répartie sur le segment ED de force linéique  $d\vec{F} = p dx\vec{j}$ . Soient ( $H_1, H_2, H_3$ ) les points courants des fibres moyennes AC, CE et ED. La poutre est orientée de A vers D.

Donnez pour chaque point  $H_1, H_2, H_3$ , la définition du torseur des efforts intérieurs que vous utiliserez pour faire le moins de calculs possibles (vers l'aval ou vers l'amont ?).

**brevet 005 : torseur des efforts intérieurs dans le cas d'un chargement linéique.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Efforts intérieurs* et de regarder les vidéos afférentes.

Soient les points A,B positionnés tels que  $\vec{AB} = l\vec{i}$ . La poutre est formée par une ligne moyenne rectiligne entre A et B. Elle est encastree en A et chargée aux points P du tronçon AB tel que  $\vec{AP} = x_P\vec{i}$  par une charge répartie  $d\vec{F}_1 = a x_P dx_P \vec{j}$ , et une charge concentrée en B :  $\vec{F}_2 = -F_2\vec{j}$ .

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points et les éventuels repères locaux.

Quel est le torseur des efforts intérieurs en un point H tel que  $\vec{AH} = x_H\vec{i}$ . Application numérique :  $F_2 = 100$  N,  $l = 0.200$  m,  $a = 200$  N.m<sup>-2</sup>,  $x_H = 0.100$  m.

**brevet 018 : torseur des efforts intérieurs et torseur de chargement.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Efforts intérieurs* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit le problème plan, formé par une poutre constituée d'un segment de droite AB, tel que  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$ . Le point A est encastree. Soit un chargement au point B constitué d'un couple  $C\check{k}$ . Soit H un point courant compris entre A et B. La poutre est orientée de B vers A.

Le torseur,

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\check{k} \end{array} \right\}_H \quad (6.13)$$

est-il un torseur des efforts intérieur ou un torseur de chargement ?

**brevet 001 : orientation de fibre moyenne et repère local**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Efforts intérieurs* et de regarder les vidéos afférentes.

Soient quatre points A,B,C,D positionnés tels que  $\vec{BC} = l\vec{i}$ ,  $\vec{BD} = -R\vec{j}$ ,  $\vec{BA} = -2R\vec{j}$ . Soit une poutre de fibre moyenne AB (1/2 cercle de rayon R de centre D) et BC (ligne droite). Au point B la ligne moyenne ne fait pas de point anguleux. Soit un point  $H_1$  de la fibre moyenne BC repéré par  $\vec{BH}_1 = x_{H_1}\vec{i}$ , et un point  $H_2$  de la fibre moyenne AB repéré par  $\vec{DH}_2 = R\cos(\theta)\vec{j} - R\sin(\theta)\vec{i}$ . La poutre est encadrée en C et en appui sur rouleau de normale  $\vec{j}$  en B.

Exprimez les repères locaux  $(H_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(H_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en fonction des vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

- si on oriente la poutre de A vers C
- si on oriente la poutre de C vers A

**brevet 803 : Repère local associé à une fibre moyenne**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Efforts intérieurs* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une poutre en acier, de section circulaire de diamètre  $d$ , constituée d'un arc de cercle ABD de rayon  $a$  et d'un segment droit DE, dont les coordonnées des points A, B, D, E dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont respectivement  $(-a,0,0)$ ,  $(0,a,0)$ ,  $(a,0,0)$  et  $(3a,0,0)$ .

On notera  $H_1$  un point courant de la poutre AD tel que  $\vec{AH}_1 = a\vec{i} + a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}$ .

On notera  $H_2$  un point courant de la poutre DE tel que  $\vec{DH}_2 = s_2\vec{i}$ .

Donnez les relations entre le repère global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et

- le repère local en  $H_1$  :  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,
- le repère local en  $H_2$  :  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ,

ainsi que l'expression de  $ds$  par rapport aux paramètres  $\theta$  et  $s_2$ .

### 6.1.7 Équations d'équilibre

Elles ne sont pas vues dans ce cours bien que figurant dans le second tableau du paragraphe 6.1. Elles ne sont pas indispensables à la résolution de problème. Référez-vous à la bibliographie.

Formation à la compétence bleue de statique des poutres.



Sur  
<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=210>,  
vous pouvez visualiser une présentation de  
cette compétence. Le fichier est nommé *210*  
*Compétence bleue de statique des poutres :*  
*détermination du chargement maximal.*

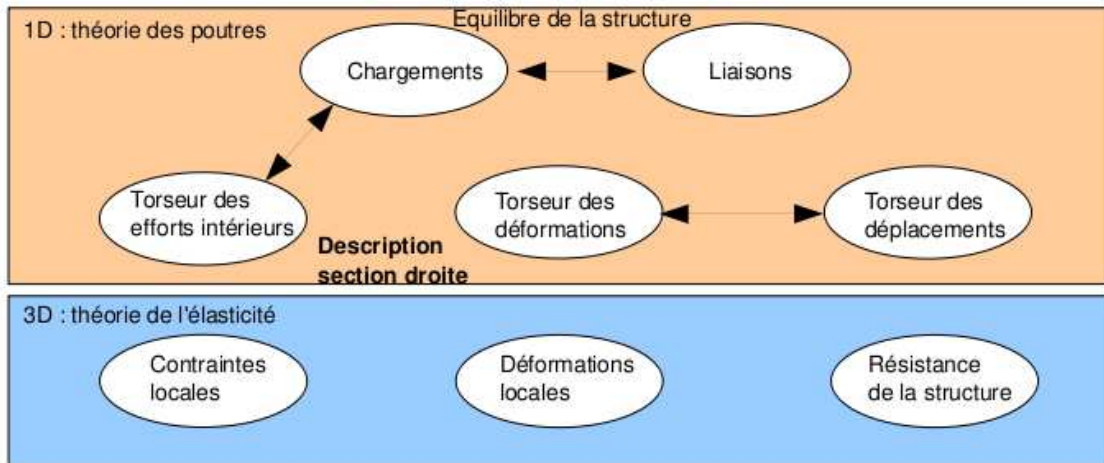


Figure 6.17: Les concepts utiles à la détermination à venir de la loi de comportement de la fibre moyenne.

### 6.1.8 Description de la section droite

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.17.

La théorie des poutres n'utilisant que la fibre moyenne, il est nécessaire d'associer à cette fibre moyenne des grandeurs décrivant la section droite.

- **Erreur classique** : Attention aux unités ! Les intégrales sont effectuées sur des surfaces et non des volumes (comme dans le cas du cours de mécanique générale), et la masse volumique n'apparaît pas (comme dans le cas du cours de mécanique générale).

#### Moment statique d'une aire plane

Si la section droite est notée  $S$ , et  $\delta$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite,

$$m_{\Delta} = \int \int_S \delta dS. \quad (6.14)$$

est le moment statique de cette section par rapport à la droite  $\Delta$ . Elle est homogène à une longueur<sup>3</sup>.

Un exemple de calcul de moment statique est fait figure 6.18.

#### Barycentre

Si  $d_H$  est la distance entre le barycentre de la section droite et la droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite, et  $S$  l'aire de la section droite, alors :

$$d_H = \frac{m_{\Delta}}{S}. \quad (6.15)$$

Le distance est homogène à une longueur (Si! Si! N'est-ce pas formidable ?).

Un exemple de calcul du barycentre est fait figure 6.19.

- **Erreur classique** : Ne pas confondre le barycentre  $H$  d'une section avec le centre de gravité  $G$  de la poutre complète. Ils ne sont pas confondus pour une poutre faite en deux matériaux de masse volumique différentes dans l'épaisseur (par exemple un bilame).

$\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{y}_1 + \frac{1}{3} \vec{z}_1$

$$\begin{aligned}
 m_{Ay_1} &= \int \int \delta \, d\vec{y}_1 \, d\vec{z}_1 \\
 &= \int_{y_1=0}^a \left[ \int_{z_1=0}^{b - \frac{b}{a} y_1} \vec{z}_1 \, d\vec{z}_1 \right] d\vec{y}_1 \\
 &= \int_{y_1=0}^a \left[ \frac{1}{2} \vec{z}_1^2 \right]_0^{b - \frac{b}{a} y_1} d\vec{y}_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{y_1=0}^a \left[ b^2 - \frac{2b^2}{a} y_1 + \frac{b^2}{a^2} y_1^2 \right] d\vec{y}_1 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ b^2 a - \frac{b^2}{a} a^2 + \frac{b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{2} b^3 \left[ \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{3b} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{a b^2}{3}
 \end{aligned}$$

Figure 6.18: Exemple de détermination du moment statique d'une section droite triangulaire.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{a b}{2} \\
 \vec{AH} \cdot \vec{z}_1 &= \frac{m_{Ay_1}}{S} \\
 &= \frac{\frac{a b^2}{6}}{\frac{a b}{2}} \\
 &= \frac{b}{3}
 \end{aligned}$$

Figure 6.19: Exemple de détermination du barycentre d'une section droite triangulaire.

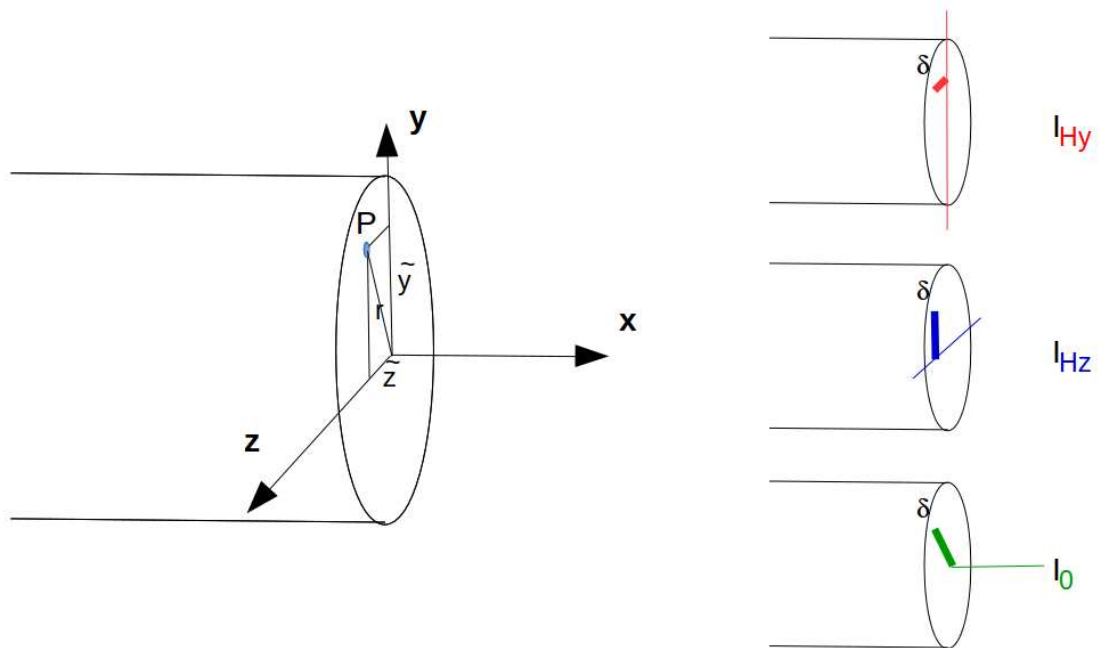


Figure 6.20: Exemples de définition de la distance  $\delta$  pour chaque calcul de moment quadratique ou polaire.

### Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane

La figure 6.20 présente un exemple des différents axes autour desquels peuvent être calculés les moments quadratiques et polaire passant par le barycentre H d'une section droite.

Le moment quadratique par rapport à une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite

$$I_{\Delta} = \int \int_S \delta^2 dS, \quad (6.16)$$

est homogène à une longueur<sup>4</sup>. On peut donc l'écrire

- par rapport à l'axe  $H\vec{y}$  :

$$I_{Hy} = \int \int_S \tilde{z}^2 dS, \quad (6.17)$$

- par rapport à l'axe  $H\vec{z}$  :

$$I_{Hz} = \int \int_S \tilde{y}^2 dS. \quad (6.18)$$

Ce terme apparaîtra dans la loi de comportement en flexion : plus le point est éloigné de la fibre moyenne, plus il sera sollicité (proportionnalité à  $\delta$ ) et plus sa sollicitation créera un moment (à nouveau proportionnalité à  $\delta$ ): d'où le terme en  $\delta^2$ . A aire de section droite  $S$  constante, plus la matière est loin de la fibre moyenne, plus le moment quadratique est grand.

Si la section droite est notée  $S$ ,  $\delta$  la distance entre un point M de cette section droite et une droite  $\Delta$  appartenant au plan de la section droite, et  $\delta'$  la distance entre un point M de cette section droite et une droite  $\Delta'$  appartenant au plan de la section droite, le produit quadratique de cette section par rapport aux deux axes  $\delta$  et  $\delta'$  est donné par

$$I_{\Delta\Delta'} = - \int \int_S \delta \delta' dS, \quad (6.19)$$

qui est homogène à une longueur<sup>4</sup>. Par exemple, par rapport aux axes  $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  le produit quadratique s'écrit :

$$I_{Hyz} = - \int \int_S \tilde{z} \tilde{y} dS. \quad (6.20)$$

Quelle est la différence entre un moment quadratique et un produit quadratique... et avez-vous un exemple ? La réponse est dans la vidéo 534 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=534>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

A l'aide de ces grandeurs, on peut construire le tenseur quadratique de la section droite. Par exemple, par rapport aux deux droites  $H\vec{y}_1$  et  $H\vec{z}_1$  avec  $\vec{y}_1$  et  $\vec{z}_1$  deux directions orthogonales entre elles, on obtient,

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} I_{Hy_1} & I_{Hy_1z_1} \\ I_{Hy_1z_1} & I_{Hz_1} \end{bmatrix}_{(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)}. \quad (6.21)$$

Les axes principaux d'une section droite, sont les deux axes  $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  tels que les termes hors diagonale de ce tenseur sont nuls :

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} I_{Hy} & 0 \\ 0 & I_{Hz} \end{bmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})}. \quad (6.22)$$

Pour la diagonalisation d'une matrice, veuillez consulter vos cours de math ou [10].

Qu'est ce physiquement qu'un moment quadratique ? La réponse est dans la vidéo 005 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=005>. Regarde-la.

**Exemple** Les calculs d'un moment quadratique et d'un produit quadratique d'une section triangulaire par rapport à deux droites passant par son barycentre sont détaillés figures 6.21 et 6.22. Le calcul des directions principales et de l'expression du tenseur d'inertie dans cette base est donnée ci-dessous.

Si l'on prend comme dimensions de la section triangulaire  $a = 3$  mm et  $b = 2$  mm, le programme scilab (demo09.sce) suivant donne  $A$  la matrice associée au tenseur d'inertie dans la base  $(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $A2$  la matrice associée au tenseur d'inertie dans la base  $(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})$  et  $X$  les vecteurs directeurs (en colonne) des deux directions principales.

```
//demo09.sce avec scilab
a=3;b=2;
iyy=a*b^3/36;izz=b*a^3/36;iyz=a^2*b^2/72;izy=iyz;
A=[iyy,iyz;izy,izz];
Ai
[A2,X]=bdiag(A);
A2
X
```

Ceci fournit les résultats :

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}_{(\vec{y}_1, \vec{z}_1) \otimes (\vec{y}_1, \vec{z}_1)} \text{ mm}^4. \quad (6.23)$$

$$\bar{\bar{I}}_H = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 \\ 0 & 1.73 \end{bmatrix}_{(\vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{y}, \vec{z})} \text{ mm}^4. \quad (6.24)$$

$$\vec{y} = -0.91\vec{y}_1 + 0.42\vec{z}_1, \quad (6.25)$$

$$\vec{z} = -0.42\vec{y}_1 - 0.91\vec{z}_1. \quad (6.26)$$

Les deux vecteurs sont bien de norme 1. On remarquera dans ce cas que les direction principales ne sont pas parallèles à l'un des bords de la surface considérée. Les valeurs de moments quadratiques autour des deux axes principaux d'inertie sont les deux valeurs extrêmes (minimale et maximale) lorsque la base d'expression du tenseur d'inertie tourne autour de l'axe  $H\vec{x}$ .

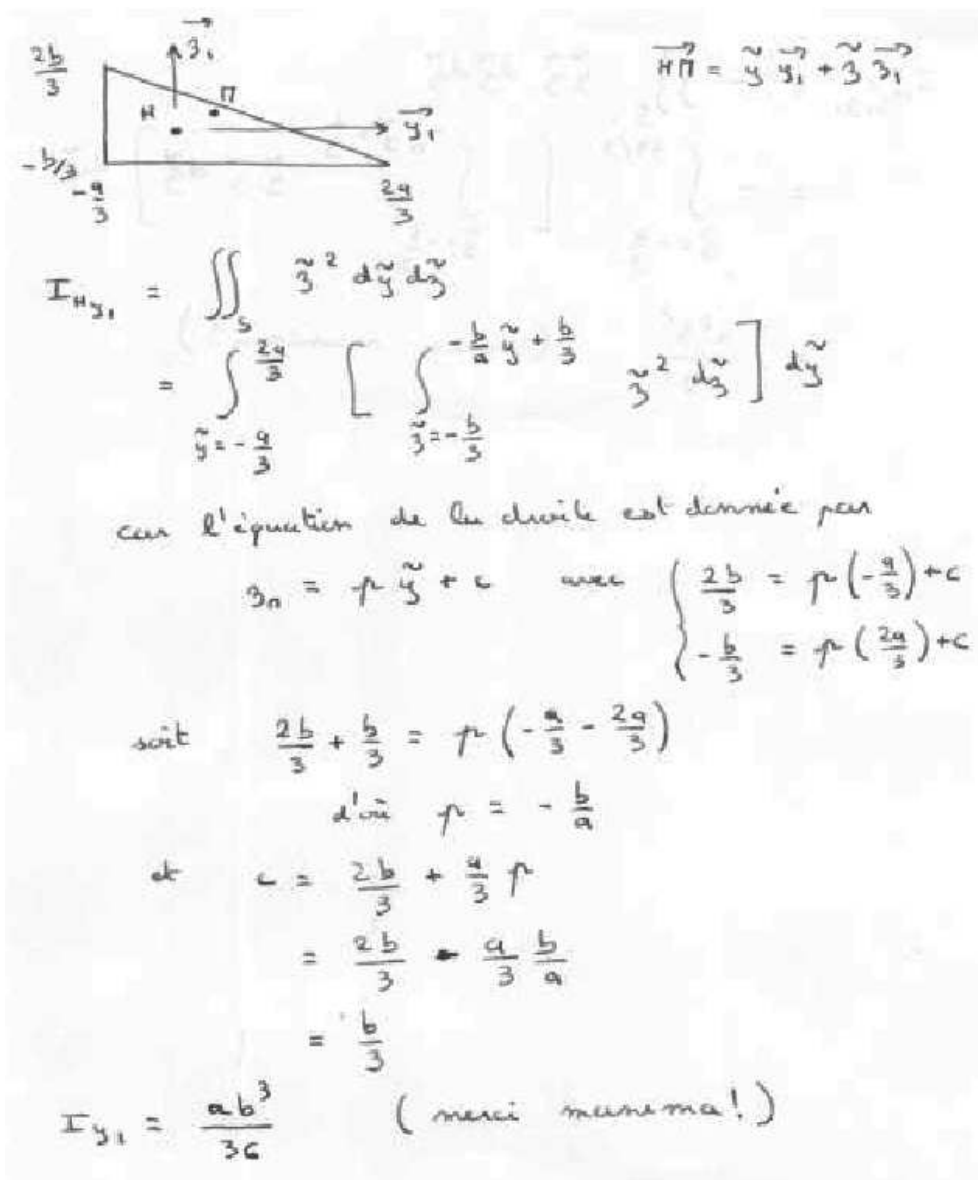


Figure 6.21: Exemple de détermination d'un moment quadratique d'une section droite triangulaire.

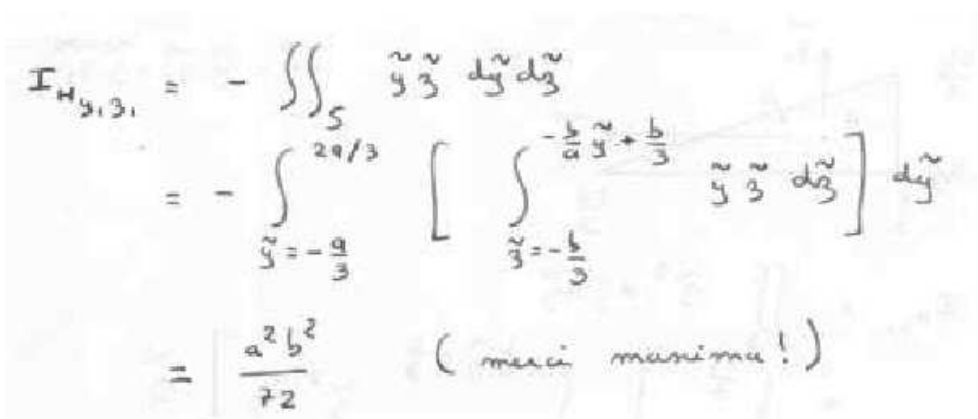
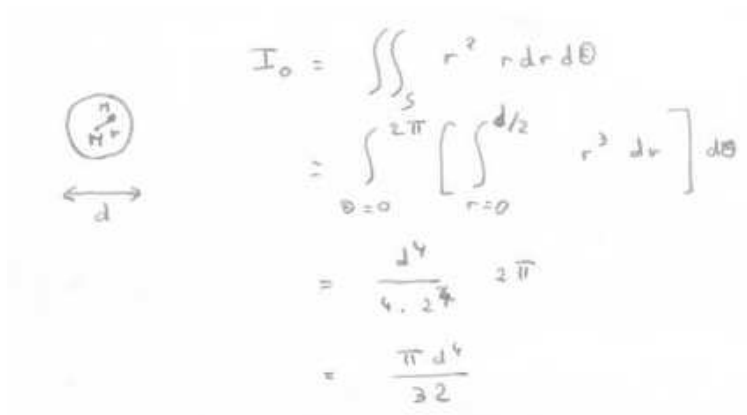


Figure 6.22: Exemple de détermination d'un produit quadratique d'une section droite triangulaire.





The diagram shows a circular cross-section of a pipe with diameter  $d$ . To the right, the polar moment of inertia  $I_0$  is calculated using a double integral in polar coordinates:

$$I_0 = \iint_S r^2 r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \int_{r=0}^{d/2} r^3 dr \right] d\theta$$

$$= \frac{d^4}{4 \cdot 2^4} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{\pi d^4}{32}$$

Figure 6.23: Exemple de détermination d'un moment polaire d'une section droite circulaire.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir la partie du brevet 006 associée au moment quadratique.

**brevet 006 : Moment quadratique**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] et cours "mécanique générale" ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit dans un repère global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un tube d'acier de masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$  de section circulaire de diamètre extérieur  $d = 0.3 \text{ m}$ , de diamètre intérieur  $d_1 = 0.25 \text{ m}$ , de longueur  $l = 1.4 \text{ m}$ , de centre d'inertie  $G$ , d'axe  $G\vec{k}$ .

Une section droite de ce cylindre, nécessite l'utilisation du repère local  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , avec l'axe  $\vec{x}$  parallèle à l'axe  $\vec{k}$ . Quel est le moment quadratique  $I_{Hz}$  de la section droite passant par le point  $H = G$  ?

### moment polaire

Si la section droite est notée  $S$ , la normale à cette section  $\vec{x}$  (tangent à la fibre moyenne), et  $r$  la distance entre un point  $M$  de cette section droite et la droite  $H\vec{x}$ , alors le moment polaire par rapport à l'axe  $H\vec{x}$

$$I_0 = \int \int_S r^2 dS. \tag{6.27}$$

a la dimension d'une longueur<sup>4</sup>.

*Quelles différences entre moment quadratique et moment polaire ?* La réponse est dans la vidéo 007 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=007>. Regarde-la.

**exemple** Le calcul du moment polaire d'une section circulaire est détaillé figure 6.23.

• **Erreur classique** : Ne pas confondre moment quadratique et moment d'inertie. Ils ne sont pas homogènes entre eux !

• **Erreur classique** : Ne pas confondre produit quadratique et produit d'inertie. Ils ne sont pas homogènes entre eux !

### 6.1.9 Annexe 1



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir les brevets 040 et 094. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 040 : Moment polaire d'une section droite**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : cours techno-mécanique ;  
autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une section droite de section carré de côté  $a = 10$  mm, évidée en son centre par une section circulaire de diamètre  $d = 5$  mm.

Quelle est la valeur de son moment polaire  $I_0$  par rapport à son axe  $H\vec{x}$ , avec  $H$  son barycentre et  $\vec{x}$  le vecteur normal à cette surface.

**brevet 094 : Comparaison expérimentale des moments polaires de deux poutres**  
auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane* et de regarder les vidéos afférentes.

Le problème est plan. Soit deux poutres de fibres moyennes reliant les points A et B, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encastré et le point B est soumis à un couple  $C\vec{i}$  (avec  $C > 0$ ).

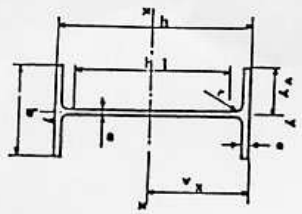
La première poutre est réalisée par le collage le long de leur génératrice de 7 spaguettis, tel que la section droite est représentée figure ??a. La seconde poutre est réalisée par le collage le long de leur génératrice de 6 spaguettis, tel que la section droite est représentée figure ??b. Pour les fabriquer, nous vous suggérons aux deux extrémités de la poutre, d'insérer un petit bout de spaghetti au centre tel que la longueur soit très inférieure à  $l$  : cela permettra de positionner les spaguettis.

L'encastrement et le couple sont appliqués à l'aide de vos mains.

## 6.2 Lois de comportement de la poutre

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.25.

Poutres	Dimensions						Partie droite de l'axe $h_1$	Masse $M$ en kg	Surface de peinture $S$ en $m^2/m$	Caractéristiques rapportées à l'axe neutre										Moment d'inertie de torsion $J$ en $cm^4$	Module de résilience $d$ en $cm$	Profil
	h	b	a	e	f	g				$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$	$r_x$	$r_y$	$r_{xy}$	$i_x$	$i_y$	$i_{xy}$				
80	80	46	3,8	5,2	5	60	6,0	7,54	0,329	80,1	20,0	3,24	11,6	6,9	3,33	8,49	3,69	1,05	0,70	0,299	80	
100	100	55	4,1	5,7	7	75	8,1	10,3	0,401	171	34,2	4,07	19,7	8,7	4,22	15,9	5,79	1,24	1,10	0,313	100	
120	120	64	4,4	6,3	7	93	10,4	13,2	0,474	318	53,0	4,80	30,4	10,5	5,10	27,7	8,65	1,45	1,71	0,338	120	
140	140	73	4,7	6,9	7	112	12,9	16,4	0,550	541	77,3	5,74	44,2	12,2	5,99	44,9	12,3	1,65	2,54	0,359	140	
160	160	82	5,0	7,4	9	127	15,8	20,1	0,622	859	109	6,58	61,9	14,0	6,90	68,3	16,7	1,84	3,53	0,379	160	
180	180	91	5,3	8,0	9	146	18,8	23,9	0,698	1317	146	7,42	83,2	15,9	7,78	101	22,2	2,05	4,90	0,404	180	
200	200	100	5,6	8,5	12	159	22,4	28,5	0,768	1943	184	8,26	110	17,6	8,66	142	28,5	2,24	6,46	0,425	200	
220	220	110	5,9	9,2	12	178	26,2	33,4	0,848	2772	252	9,11	143	19,4	9,67	205	37,3	2,48	8,86	0,460	220	
240	240	120	6,2	9,8	15	190	30,7	39,1	0,921	3892	324	9,97	183	21,2	10,55	284	47,3	2,69	11,60	0,490	240	
270	270	135	6,6	10,2	15	220	36,1	45,9	1,04	5790	429	11,2	239	24,2	11,88	420	62,2	3,02	14,93	0,510	270	
300	300	150	7,1	10,7	15	249	42,2	53,8	1,16	8358	557	12,5	314	26,6	13,20	604	80,5	3,25	19,47	0,535	300	
330	330	160	7,5	11,5	18	271	49,1	62,6	1,25	11770	713	13,7	402	29,3	14,52	788	98,5	3,55	25,70	0,558	330	
360	360	170	8,0	12,7	18	299	57,1	72,7	1,35	16270	904	15,0	510	31,9	15,82	1043	123	3,79	36,20	0,600	360	
400	400	180	8,6	13,5	21	331	66,3	84,5	1,47	23130	1180	16,5	654	35,4	17,50	1318	146	3,95	46,80	0,607	400	
450	450	190	9,4	14,6	21	379	77,6	98,8	1,61	33740	1500	18,5	849	39,7	19,33	1876	176	4,12	63,80	0,618	450	
500	500	200	10,2	16,0	21	426	90,7	116	1,74	48200	1930	20,4	1100	43,9	21,28	2142	254	4,31	89,00	0,640	500	
550	550	210	11,1	17,2	24	488	106	134	1,88	67120	2440	22,3	1390	48,2	23,02	2668	294	4,45	118,4	0,657	550	
600	600	220	12,0	19,0	24	514	122	156	2,02	92080	3070	24,3	1760	52,4	25,16	3387	308	4,66	166,2	0,697	600	



poutrelles IPE

Figure 6.24: Un exemple de caractéristiques d'une section droite.

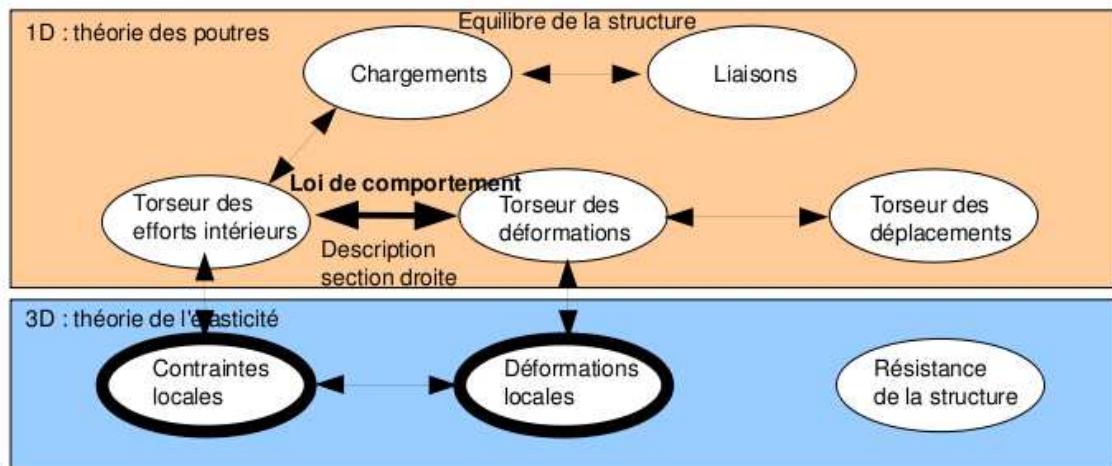


Figure 6.25: Les concepts utiles à la détermination à venir de la loi de comportement de la fibre moyenne.

### 6.2.1 Objectif

En l'état actuel, vous savez calculer le torseur des efforts intérieurs en tout point d'une poutre en fonction du chargement et d'éventuelles inconnues hyperstatiques. Deux types de démarche peuvent alors vous être demandées :

1. calculer les déplacements et rotations de sections droite en certains points de la poutre
2. calculer les contraintes maximales dans la poutre pour déterminer si les limites d'élasticité du matériau constitutif de la poutre ne sont pas dépassées.

La première démarche nécessite à partir des torseurs d'efforts intérieurs, de calculer les torseurs de déformation, puis le champs de déplacement et de rotation des points de la fibre moyenne. Ces calculs peuvent être fait en restant dans une description 1D si l'on connaît la relation entre les composantes du torseur des déformations et les composantes du torseur des efforts intérieurs. Pour démontrer ces relations il faut passer (voir figure 6.25) par une description locale 3D des déformations et contraintes engendrées en un point  $P$  de la section droite distant du point  $H$  de la fibre moyenne par un vecteur tel que  $\vec{HP} = \tilde{y}\vec{y} + \tilde{z}\vec{z}$ . Ces relations appelées *loi de comportement de la poutre* dépendent des hypothèses de cinématique prises dans la section droite. C'est pourquoi, nous étudierons 3 cas. Ces trois cas sont illustrés sur une poutre en flexion représentée figure 6.26.

*Pouvez vous expliquer pourquoi il y a 3 cinématiques ?* La réponse est dans la vidéo 536 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=536>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

### 6.2.2 1ère cinématique

#### description de la cinématique

Le plan normal suit le torseur en  $H'$  sans se déformer dans le plan. On peut alors calculer le déplacement du point  $P'$  par rapport au point  $P$  (voir figure 6.27). On considère le torseur des déformations connu. La section droite passant par  $H'$  subit un mouvement de corps solide, donc les torseurs de déplacement sont les mêmes pour tous les points de la section droite.

#### déformations

On calcule le tenseur des déformations du parallélepède entre  $P$  et  $P'$  de cotés  $d\tilde{y}$ ,  $d\tilde{z}$ ,  $ds$  (voir figure 6.28). On évalue dans un premier temps le gradient de  $\vec{u}$ , en notant que  $dx = ds$ ,  $dy = d\tilde{y}$

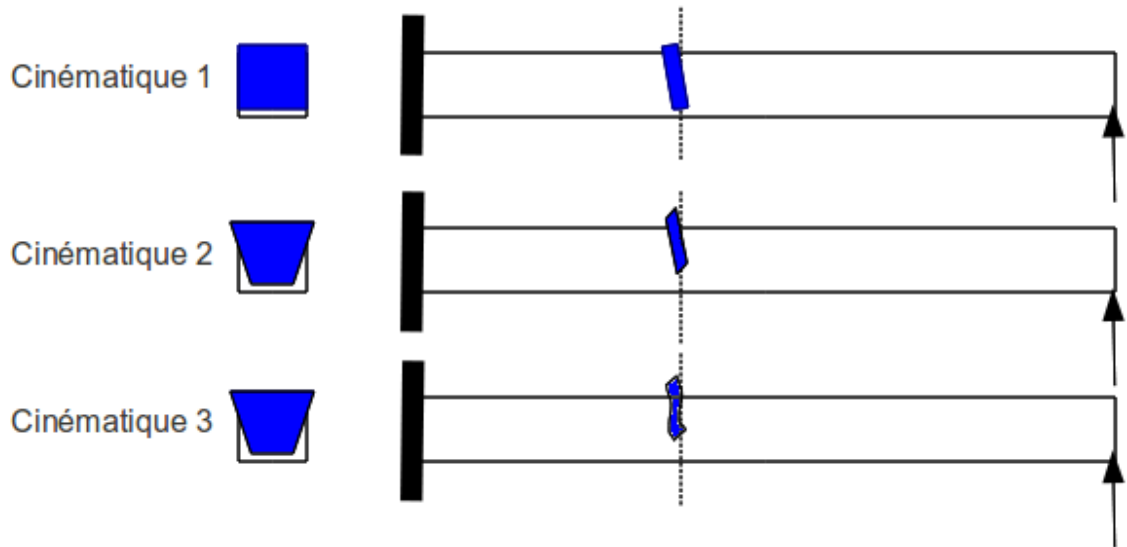


Figure 6.26: Les trois cinématiques des sections droites envisagées, illustrées dans le cas d'une poutre de section droite rectangulaire, sollicitée en flexion et effort tranchant.

et  $dz = d\tilde{z}$ .

#### contraintes

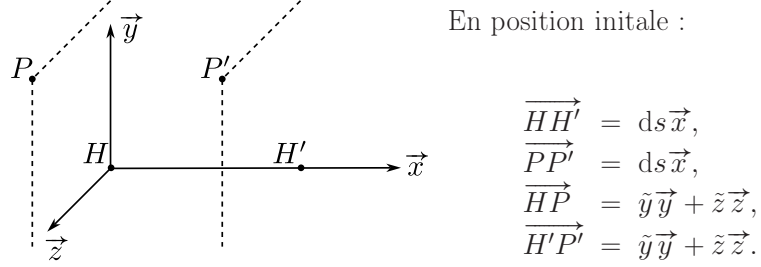
On calcule le tenseur des contraintes nécessaire à l'obtention de ce tenseur des déformations (voir figure 6.29). On utilise pour cela la loi de comportement de l'élasticité tridimensionnelle, qui utilise les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$ .

#### torseur des efforts intérieurs

L'ensemble des contraintes sur les facettes de normale  $\vec{x}$  aux points  $P'$  de la section droite passant par  $H'$ , en se cumulant, réalisent les actions du segment  $\text{seg}+$  sur le segment  $\text{seg}-$ . Elles doivent donc être équivalentes au torseur des efforts intérieurs. Il faut donc faire des intégrales sur la section droite (voir figure 6.30). Comme le point  $H'$  est le barycentre de la section droite, les moments statiques sur l'ensemble de la section sont nuls : ceci fait disparaître quelques intégrales. D'autre part,  $ds$  pouvant être pris infiniment petit, d'autres intégrales sont négligeables. Pour les termes de moment, apparaissent les moments quadratiques, le moment polaire et les produit quadratiques de la section droite. Ces derniers sont nuls si les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sont les directions principales de la sections droite : c'est ce qui est choisi.

#### écriture matricielle

Les 6 équations précédentes peuvent être écrites sous forme matricielles en faisant apparaître le module de Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$ , grâce aux relations 6.3 les liants aux coefficients



$$\{\text{Def}\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \varepsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{array} \right\}_H$$

Mouvement de  $P'$  :

$$\begin{aligned} \{U\}_{P'} &= \{U\}_{H'} \\ &= \{\text{Def}\}_H ds \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x ds \check{x} + \alpha_y ds \check{y} + \alpha_z ds \check{z} \\ \varepsilon_x ds \vec{x} + \gamma_y ds \vec{y} + \gamma_z ds \vec{z} \end{array} \right\}_H \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x ds \check{x} + \alpha_y ds \check{y} + \alpha_z ds \check{z} \\ \varepsilon_x ds \vec{x} + \gamma_y ds \vec{y} + \gamma_z ds \vec{z} \\ + (\alpha_x ds \check{x} + \alpha_y ds \check{y} + \alpha_z ds \check{z}) \wedge (\tilde{y} \vec{y} + \tilde{z} \vec{z}) \end{array} \right\}_P \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x ds \check{x} + \alpha_y ds \check{y} + \alpha_z ds \check{z} \\ (\varepsilon_x ds + \alpha_y ds - \alpha_z ds) \vec{x} \\ + (\gamma_y ds - \alpha_x ds \tilde{z}) \vec{y} \\ + (\gamma_z ds + \alpha_x ds \tilde{y}) \vec{z} \end{array} \right\}_P, \end{aligned}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{P'}} \cdot \vec{x} = \varepsilon_x ds + \alpha_y ds \tilde{z} - \alpha_z ds \tilde{y} = u_x \\ \overrightarrow{u_{P'}} \cdot \vec{y} = \gamma_y ds - \alpha_x ds \tilde{z} = u_y \\ \overrightarrow{u_{P'}} \cdot \vec{z} = \gamma_z ds + \alpha_x ds \tilde{y} = u_z \end{array} \right. .$$

Figure 6.27: Calcul du déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$ .

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} & -\alpha_z ds & \alpha_y ds \\ \gamma_y - \alpha_x \tilde{z} & 0 & -\alpha_x ds \\ \gamma_z + \alpha_x \tilde{y} & \alpha_x ds & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} + {}^T \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u}) \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} & & & (\text{sym}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z ds) & 0 & & \\ \frac{1}{2}(\gamma_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y ds) & 0 & 0 & \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

Figure 6.28: Calcul du tenseur des déformations pour la cinématique 1.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma}} &= 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{trace}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{\text{Id}}} \\ &= \begin{bmatrix} (2\lambda + \mu)(\varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) & & & (\text{sym}) \\ \mu(\gamma_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z ds) & \lambda(\varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) & & \\ \mu(\gamma_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y ds) & 0 & \lambda(\varepsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) & \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

Figure 6.29: Calcul du tenseur des contraintes pour la cinématique 1..

$$\begin{aligned}
N &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \left[ \varepsilon_x \iint d\tilde{y} d\tilde{z} + \alpha_y \iint \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_z \iint \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \right] \\
&= (2\mu + \lambda) \varepsilon_x S
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_y &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{yx} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \mu \left[ \gamma_y \iint d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_x \iint \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} - \lim_{ds \rightarrow 0} \left( \alpha_z ds \iint d\tilde{y} d\tilde{z} \right) \right] \\
&= \mu \gamma_y S
\end{aligned}$$

$$T_z = \mu \gamma_z S$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} -\sigma_{yx} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} + \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{zx} \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \alpha_x \iint \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} + \alpha_x \iint \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= \alpha_x \iint \tilde{r}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} \quad \text{avec } \tilde{r}^2 = \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \\
&= \alpha_x I_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{fy} &= \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \left[ \alpha_y \iint \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} - \alpha_z \iint \tilde{z} \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \right] \\
&= (2\mu + \lambda) \alpha_y I_{Hy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{fz} &= - \int_{\tilde{y}} \int_{\tilde{z}} \sigma_{xx} \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \\
&= (2\mu + \lambda) \alpha_z I_{Hz}
\end{aligned}$$

Figure 6.30: Calcul des composantes du torseur des efforts intérieurs la cinématique 1..



de Lamé.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \dots \tag{6.28} \\
 \dots & \begin{bmatrix} \frac{ES(-1+\nu)}{(1+\nu)(-1+2\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Ebh(b^2+h^2)}{2(1+\nu)12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ehb^3(-1+\nu)}{12(1+\nu)(-1+2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ehb^3(-1+\nu)}{12(1+\nu)(-1+2\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

### incompatibilité

Cette cinématique implique que les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  ne sont pas nulles dans la section droite, donc à fortiori sur les surface latérales de la poutre. Or, sur ces surfaces non chargées, les contraintes exercées par l'air sur la poutre sont nulles. Il y a donc contradiction entre la réalité et le modèle associé à la cinématique 1. Prenons l'exemple d'un torseur des déformations ne comportant que le terme  $\epsilon_x$ . Tous les petits parallélépipèdes entre les points  $P$  et  $P'$  s'allongent de la valeur  $\epsilon_x ds$ . De part l'effet Poisson, ils souhaitent se contracter dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Or la cinématique 1 choisie, d'un mouvement en bloc rigide d'une section droite les en empêche. Cette cinématique n'est pas réaliste pour une poutres non bloquée sur toutes ses surfaces latérales.

Il nous faut chercher une cinématique telles que sur les surfaces latérales les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  soient nulles. C'est l'objet de la seconde cinématique.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 809. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

$$\begin{cases} \vec{u}_{P'} \cdot \vec{x} = \varepsilon_x ds + \alpha_y ds \tilde{z} - \alpha_z ds \tilde{y} + \\ \vec{u}_{P'} \cdot \tilde{y} = \delta_y ds - \alpha_x ds \tilde{z} + \tilde{u}_y(\tilde{y}, \tilde{z}) \\ \vec{u}_{P'} \cdot \tilde{z} = \delta_z ds + \alpha_x ds \tilde{y} + \tilde{u}_z(\tilde{y}, \tilde{z}) \end{cases}$$

Figure 6.31: Calcul du déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$  pour la cinématique 2.

**brevet 094 : Comparaison expérimentale des moments polaires de deux poutres**

auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Moment quadratique - rayon de giration - produit quadratique d'une aire plane* et de regarder les vidéos afférentes.

Le problème est plan. Soit deux poutres de fibres moyennes reliant les points A et B, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encasté et le point B est soumis à un couple  $C\vec{i}$  (avec  $C > 0$ ).

La première poutre est réalisée par le collage le long de leur génératrice de 7 spaguettis, tel que la section droite est représentée figure ??a. La seconde poutre est réalisée par le collage le long de leur génératrice de 6 spaguettis, tel que la section droite est représentée figure ??b. Pour les fabriquer, nous vous suggérons aux deux extrémités de la poutre, d'insérer un petit bout de spaghetti au centre tel que la longueur soit très inférieure à  $l$  : cela permettra de positionner les spaguettis.

L'encastrement et le couple sont appliqués à l'aide de vos mains.

### 6.2.3 2nd cinématique

Le plan normal peut se déformer dans le plan tel que  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  restent nuls.

#### description de la cinématique

Le torseur des déformations est choisi identique à celui de la cinématique 1, mais un mouvement du point  $P'$  dans le plan  $\tilde{u}_y(\tilde{y}, \tilde{z})\vec{y} + \tilde{u}_z(\tilde{y}, \tilde{z})\vec{z}$ , mouvement pour l'instant inconnu, est rajouté (voir figure 6.31).

#### déformations

Le tenseur des déformations est aussi modifié par la présence de ces deux fonctions (voir figure 6.32).

#### contraintes

On peut donc en déduire par la loi de l'élasticité, le tenseur des contraintes (voir figure 6.33). Si la poutre n'est pas chargée sur ses faces de normale  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , les  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , et  $\sigma_{yz}$  doivent être nulles sur ces faces. Recherchons une solution telles qu'elles soient nulles dans toute la poutre, cela impose une relation sur les fonctions inconnues. Si l'on réécrit ces conditions en terme de déformation, le coefficient de poisson  $\nu$  entre les déformations apparaît (voir figure 6.34). On peut alors en déduire les champs de déplacement complémentaires pour assurer que les contraintes soient nulles sur les faces latérales de la poutre. On remarquera que cela implique en tout point de la section droite, que les contraintes  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , et  $\sigma_{yz}$  sont toutes nulles.

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} \\ \frac{1}{2} (\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z \tilde{x}) \\ \frac{1}{2} (\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} \right) \\ \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sym} \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \otimes (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{array}$$

Figure 6.32: Calcul du tenseur des déformations pour la cinématique 2.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= 2\mu \bar{\epsilon} + d(\text{tr} \bar{\epsilon}) \bar{I}d \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (2\mu + d)(\epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} + \alpha_z \tilde{y}) + d \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right) \\ \sigma_{yy} = (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + d \left( \epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right) \\ \sigma_{zz} = (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} + d \left( \epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} \right) \\ \sigma_{xy} = \mu (\delta_y - \alpha_x \tilde{z} - \alpha_z \tilde{x}) \\ \sigma_{xz} = \mu (\delta_z + \alpha_x \tilde{y} + \alpha_y \tilde{x}) \\ \sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}} \right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{yz} = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + d \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = -d(\epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) \\ d \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + (2\mu + d) \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = -d(\epsilon_x + \alpha_y \tilde{z} - \alpha_z \tilde{y}) \\ \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Figure 6.33: Calcul du tenseur des contraintes pour la cinématique 2 et des conditions de surfaces libres de contrainte.

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\mu+d) \varepsilon_{yy} + d \varepsilon_{33} = -d \varepsilon_{xx} \\ d \varepsilon_{yy} + (2\mu+d) \varepsilon_{33} = -d \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{y3} + \varepsilon_{3y} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{-d}{2(\mu+d)} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{y3} = 0 \\ \varepsilon_{3y} = 0 \quad \text{car } \bar{\varepsilon} \text{ symétrique} \end{array} \right.$$

On  $\frac{-d}{2(\mu+d)} = -\nu$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{y3} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_y = -\nu \varepsilon_{xx} \tilde{y} + a_0 \\ \tilde{u}_3 = -\nu \varepsilon_{xx} \tilde{z} + b_0 \end{array} \right.$$

Pour  $(\tilde{y}, \tilde{z}) = (0, 0)$  on choisit sans perte de généralité  
 $(\tilde{u}_y, \tilde{u}_z) = (0, 0)$  soit  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 0$ .

Figure 6.34: Relation entre les déformations pour la cinématique 2 et les champs de déplacement complémentaires.

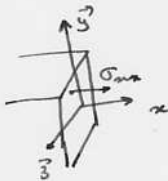
$$\begin{aligned}
N &= \iint \sigma_{xx} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \iint (2\mu + d) \varepsilon_x + d(-2\nu \varepsilon_x) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \varepsilon_x (2\mu + d - 2\nu d) \iint d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= ES \varepsilon_x \\
T_y &= \iint \sigma_{yx} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \iint \mu \gamma_y \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= \mu S \gamma_y \\
T_z &= \mu S \gamma_z \\
M_{fy} &= \iint \sigma_{xx} \tilde{z} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= EI_{Hy} \alpha_y \\
M_{fz} &= \iint -\sigma_{xx} \tilde{y} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \\
&= EI_{Hz} \alpha_z \\
M_x &= G I_0
\end{aligned}$$


Figure 6.35: Expression des composantes du torseur des efforts intérieurs pour la cinématique 2.

### torseur des efforts intérieurs

Par la même démarche que pour la cinématique 1, il faut donc faire des intégrales sur la section droite (voir figure 6.35) pour obtenir les composantes du torseur des efforts intérieurs. Dans les calculs présentés la nullité des moments statiques par rapport à H est utilisée.

### écriture matricielle

Les 6 équations précédentes peuvent être écrites sous forme matricielles.

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

avec  $G$  le module de Coulomb,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.31)$$

### incompatibilité

Cette cinématique implique que les contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  sont constantes dans l'épaisseur de la poutre, donc sur les surfaces extérieures latérales. Du fait de la symétrie du tenseur des contraintes, cela implique sur la surface de normale  $\vec{y}$  que la contrainte  $\sigma_{yx}$  soit non nulle. Or elle doit être égale

à la contrainte exercée par l'extérieur sur cette surface. Si cette surface est libre, cette contrainte extérieure est nulle. Il y a donc contradiction entre la réalité et le modèle.

Il nous faut chercher une cinématique telles que la répartition des contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  soient des fonctions de  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  et nulles sur les bords de la section droite. C'est l'objet de la troisième cinématique qui implique un voilement de la section en présence d'un effort tranchant.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 810 et 076. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 810 : Contraintes dans un plot en compression posé sur un plan parfaitement lubrifié**  
**auteur : JM Géneaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *2nd cinématique* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un cylindre de direction  $\vec{j}$ , de section droite circulaire de diamètre  $d = 10$  [mm], en aluminium AU4G, de longueur  $l = 50$  [mm]. Ce plot est soumis à une force  $\vec{F} = -200\vec{j}$  [N] sur sa surface supérieure. Sa surface inférieure est bloquée en translation dans la direction  $\vec{j}$  par une surface parfaitement lubrifiée. Sous cette charge, la surface supérieure se déplace d'une valeur  $\vec{u} = -u\vec{j}$ .

Quelles sont les contraintes dans ce plot ? Quelle est la force maximale pour ne pas dépasser la limite d'élasticité ?

**brevet 076 : Démarche générale de résolution d'un problème de contrainte en théorie des poutres**  
**auteur : JM Géneaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Méthode de calcul : détermination des limites d'élasticité* et de regarder les vidéos afférentes.

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *2nd cinématique* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un crochet fixé au plafond, représenté par une poutre en acier de diamètre  $d$ , composé d'un segment droit reliant les points  $A$  et  $B$ , puis d'un segment d'arc de cercle de rayon  $r$  reliant les points  $B$   $D$  et  $C$ . On appellera  $O$  le centre du cercle. Les coordonnées des points dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sont  $A(0, r + l)$ ,  $B(0, r)$ ,  $C(0, -r)$ ,  $D(-r, 0)$ . Une force  $\vec{F} = -F\vec{j}$  est exercée en  $C$ .

Donnez la démarche pour calculer le point le plus sollicité entre  $A$  et  $D$  (ne pas faire les calculs).

## 6.2.4 3ième cinématique

Le plan normal se déforme dans le plan tel que  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  restent nuls, et tel que les contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  soient nulles sur les bords de la section droite. Cette cinématique (Fig. 6.26) sera

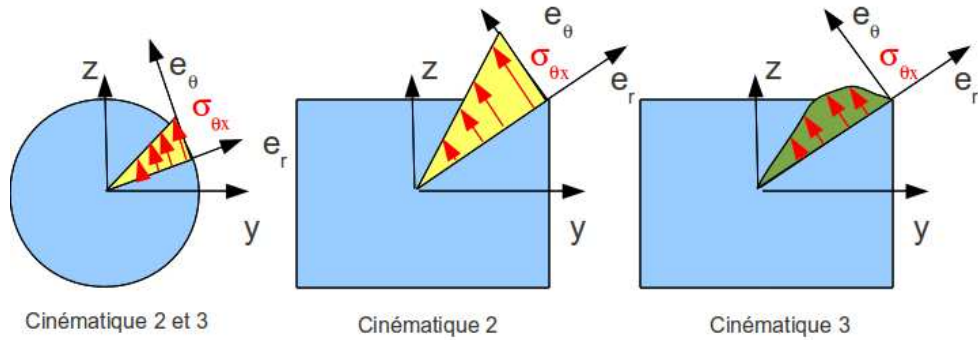


Figure 6.36: Répartition des contraintes de cisaillement dues à une sollicitation de torsion, en fonction de la forme de la section droite et de la cinématique choisie.

étudiée plus avant dans le cours de modélisation [11]. Nous y obtiendrons des facteurs correctifs du moment polaire et des sections équivalentes sous effort tranchant. Ces facteurs correctifs sont détaillés dans les tableaux (et non pas les équations) des figures 6.37 et 6.38. Il en est de même pour la sollicitation de torsion pour laquelle la proportionnalité de la contrainte de cisaillement avec la distance au point H n'est vérifiée que dans le cas d'une poutre de section droite circulaire (Fig. 6.36).

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

On rappelle ci-dessous la loi de comportement pour la cinématique 2, qui ne diffère de la loi de comportement de la cinématique 3 que par trois termes, sur les lignes 2, 3 et 4 :

$$\begin{bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

• **Erreur classique** : Ne pas confondre dans la notation ci-dessus,  $G$  le module de Coulomb exprimé en  $Pa$ , le centre de gravité de l'ensemble de la poutre  $G$  (c'est un point, cela n'a pas d'unité), et le barycentre d'une section droite  $H$  (c'est un point, cela n'a pas d'unité).



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 049. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

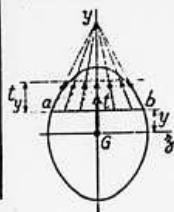


TABLEAU II. — EFFORT TRANCHANT - CONTRAINTES DE CISAILEMENT

TABLEAU II, 2. — SECTIONS USUELLES - CONTRAINTES DE CISAILEMENT ET DÉFORMATION DUES A L'EFFORT TRANCHANT - FORMULES APPROCHÉES

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_1$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau II, 1 et des hypothèses supplémentaires suivantes :

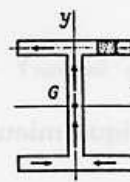
a) Cas des sections pleines.



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie  $Gz$  d'ordonnée  $y$ , coupant le contour de la section aux deux points  $a$  et  $b$  :

1. les contraintes de cisaillement,  $t$ , passent toutes par le point de concours des deux tangentes en  $a$  et  $b$  au contour de la section.
2. la composante  $t_y$  suivant  $Gy$  des contraintes de cisaillement  $t$  est constante.

b) Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILEMENT			DÉFORMATION	
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	
Triangle isocèle			$t_y = \frac{6T}{S} \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$ $S = \frac{bh}{2}$	$t_y = 1,5 \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{6}$		
Rectangle			$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ pour $y = 0$		$S_1 = \frac{5}{6} S$
Losange			$t_y = \frac{T}{S} \left[ 1 + \frac{y}{h} - \frac{2y^2}{h^2} \right]$ $t_x = t_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ $S = a \cdot h$	$t_y = \frac{9}{8} \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{4}$		$S_1 = \frac{30}{31} S$
Carré évidé				$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \frac{1+k+k^3}{1+k^2}$ pour $mm$		

Figure 6.37: Effet du cisaillement p1



Tableau II, 2. — Sections usuelles - Contraintes de cisaillement et déformation dues à l'effort tranchant - Formules approchées (suite)

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_1$
Hexagone			$t_y = \frac{T}{2,88 h^4} \frac{(h-y)(2h^2 + 3yh - y^2)}{(2h-y)}$ $S = 3,464 h^2$	$t_y = 1,46 \frac{T}{S}$ point A direction AB		
Cercle			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$ $t_{en A} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ lc long de CD		$S_1 = \frac{9}{10} S$
Ellipse			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ $S = \pi a b$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ lc long de CD		
Section en I			$t_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^2 - (b - b') (h - 2e)^2}$ $t_2 = t_1 (b/b')$ $t_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{b'h} \frac{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^2}{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)}$	$t_y = t_2$		
Section circulaire mince			$t_y = \frac{zT}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$t_A = t_B = \frac{zT}{S}$		$S_1 = 0,5 S$
Profil mince en I			$t_{2(A)} = \frac{T}{I} (b - z) h$ $t_{2(B)} = \frac{T}{I e} \left[ z b e' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$ $S = 2 h e$ $S' = 2 b e' \quad \lambda = \frac{S}{S'}$ $I = \frac{h^2}{3} (S + 6 S')$	$t_{2(A)} = \frac{T}{I} b h$ $t_{2(B)} = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $t_{2(C)} = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		$S_1 = 2 h e$

Figure 6.38: Effet du cisaillement p2

**brevet 049 : Contrainte de cisaillement maximale dans une section droite ?**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.1$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.2$  m dans la direction  $\vec{y}$ . Dans une section droite l'effort tranchant est  $T_y = 1000$  N.

Faites un dessin de la structure.

Quelle est la contrainte de cisaillement  $\sigma_{yx}$  maximale dans la section droite en utilisant la cinématique 3 (avec voilement de la section droite car les contraintes sont non constantes dans la section droite) ? Diffère-t-elle de la contrainte de cisaillement que vous obtenez avec l'hypothèse de la cinématique 2 (sans voilement de section droite, car les contraintes sont constantes dans la section droite) ?

### 6.2.5 Exemple d'utilisation : sollicitation de traction

Pour une poutre sollicitée en traction-compression, seul l'effort normal  $N$  est différent de 0. La loi de comportement de la fibre moyenne 6.32 fournit donc,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N/ES \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Les composantes du tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  en un point  $P$  à la distance  $y_1$  et  $z_1$  de la fibre moyenne, sont alors données par,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= N/ES, \\ \epsilon_{yy} &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{zz} &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{xy} &= 0, \\ \epsilon_{yz} &= 0, \\ \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Les composantes du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  sont alors données par,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= N/S, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= 0, \\ \sigma_{xy} &= 0, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

On note dans ce cas particulier que les tenseurs des contraintes et des déformations ne dépendent pas de la position du point  $P$  par rapport au point  $H$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 054. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 054 : Déformation mesurée sur une poutre en traction**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.015$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02(s + 1)$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $A\vec{H} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encasté, et une force à l'extrémité B implique que l'effort normal dans toute la poutre est  $N = 1000$  N. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa, son coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ .

Si une jauge de déformation est collée sur la surface libre de normale  $+\vec{j}$  dans la section droite du point H d'abscisse  $s = 0.2$  m, quelle est la déformation mesurée si la jauge est collée dans la direction  $\vec{i}$  ? Même question si elle est collée dans la direction  $\vec{k}$  ?

### 6.2.6 flexion simple autour de l'axe $H\vec{z}$

Une poutre est sollicitée en flexion simple autour de l'axe  $H\vec{z}$  lorsque  $M_{fz}$  et  $T_y$  sont différents de 0. La loi de comportement de la fibre moyenne 6.32 fournit donc,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_y/GS_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{fz}/EI_{Hz} \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Les composantes du tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$  en un point  $P$  à la distance  $y_1$  et  $z_1$  de la fibre moyenne, sont alors données par,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(y_1, z_1) &= -\frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} y_1, \\ \epsilon_{yy}(y_1, z_1) &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{zz}(y_1, z_1) &= -\nu\epsilon_{xx}, \\ \epsilon_{xy}(y_1, z_1) &= \frac{T_y}{GS} g(y_1), \\ \epsilon_{yz} &= 0, \\ \epsilon_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

La répartition des déformations dans l'épaisseur de la poutre n'est pas constante (cinématique 3). La fonction  $g(y_1)$  peut être calculée (voir cours de 2<sup>ème</sup> année à venir). C'est la raison pour laquelle il faut corriger la section en cisaillement ( $S_y$ ) dans la loi de comportement. Des exemples de ces fonctions sont fournies dans les tableaux joints (figures 6.37 6.38).

Les composantes du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  sont alors données par,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(y_1, z_1) &= -\frac{M_{fz}}{I_{Hz}} y_1, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= 0, \\ \sigma_{xy}(y_1, z_1) &= \frac{T_y}{S} g(y_1), \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{zx} &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

avec  $\sigma_{xy}(y_1, z_1) = t_y$  du tableau précédent.

On note dans ce cas particulier que les tenseurs des contraintes et des déformations dépendent de la position du point  $P$  par rapport au point  $H$ .

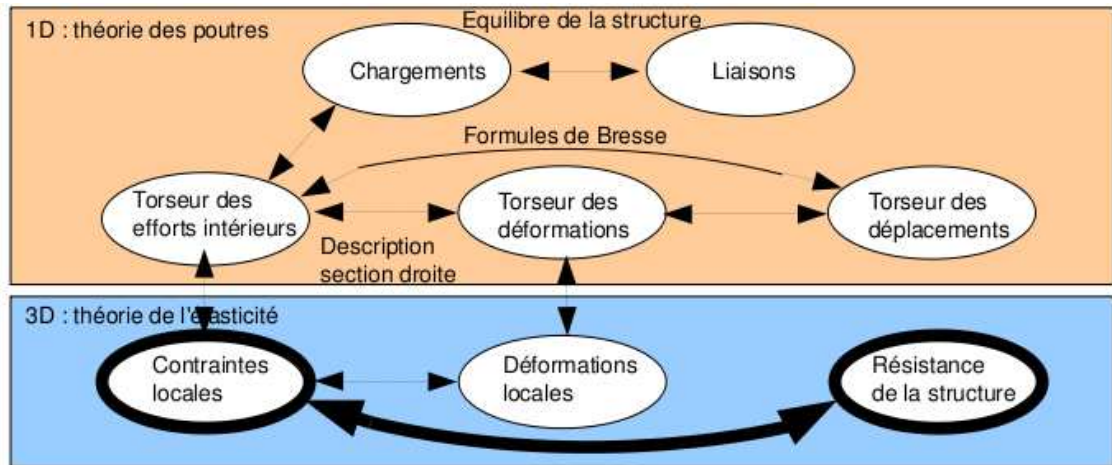


Figure 6.39: Les concepts utiles au passage direct du torseur des efforts intérieurs au torseur de déplacement.

## 6.3 Dimensionnement

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.39.

### 6.3.1 Cercle de Mohr des contraintes

Voir le cours de Mécanique des solides déformables [12].

### 6.3.2 Critères de limite d'élasticité

#### Rappels

Nous ne rappelons ici que quelques définitions.

- Contraintes principales Le tenseur des contraintes exprimé dans la une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  correspondant aux directions principales a pour forme

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \otimes (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}. \quad (6.40)$$

- Les invariants de ce tenseur sont

$$I_1(\bar{\sigma}) = \text{trace}(\bar{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (6.41)$$

$$I_2(\bar{\sigma}) = (\text{trace}(\bar{\sigma}))^2 - \text{trace}(\bar{\sigma}^2) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (6.42)$$

$$I_3(\bar{\sigma}) = \det(s) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (6.43)$$

- Les parties sphérique  $\bar{S}$  et déviatorique  $\bar{D}$  peuvent aussi être calculées :

$$\bar{S} = \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{Id}, \quad (6.44)$$

$$\bar{D} = \bar{\sigma} - \bar{S}, \quad (6.45)$$

avec  $\bar{Id}$  le tenseur identité constitué de 1 sur la diagonale.

### Critère de Von-Mises

Le critère de Von-Mises est lié à la partie déviatorique du tenseur des contraintes

$$-I_2(\overline{\overline{D}}) < g^2, \quad (6.46)$$

soit

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx})^2 < g^2, \quad (6.47)$$

avec  $g$  la valeur de contrainte à ne pas dépasser. Dans un espace engendré par les contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la limite de Von Mises est un cylindre d'axe  $(1,1,1)$  et de section circulaire de rayon  $g$ .

### Critère de Tresca

Le vecteur contrainte tangentielle a un module inférieur à une valeur  $\tau$ . Dans un espace engendré par les contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , la limite de Tresca est un cylindre d'axe  $(1,1,1)$  et de section hexagonale de côté  $\tau$ .

*Comment choisir entre Tresca et Von Mises, pour dimensionner une structure ?* La réponse est dans la vidéo 010 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=010>. Regarde-la.

### 6.3.3 Méthode de calcul : détermination des limites d'élasticité

Lors des travaux pratiques, les charges maximales à appliquer à la structure doivent absolument être calculées avant de faire les essais. L'enseignant, ne vous donnera l'autorisation de charger cette structure que lorsque vous lui aurez fourni les valeurs que vous ne dépasserez pas.

La démarche à suivre est la suivante :

- bilan des actions
- calcul du torseur des efforts intérieurs
- détermination des évolutions de ses composantes le long de la poutre (avec l'abscisse curviligne  $s$ ) :
  - effort normal :  $N(s) =$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  :  $T_y(s) =$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  :  $T_z(s) =$
  - moment de torsion :  $M_x(s) =$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{y}$  :  $M_{fy}(s) =$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{z}$  :  $M_{fz}(s) =$
- recherche du point le plus sollicité : Les critères de limite d'élasticité s'écrivant en élasticité, il faudrait calculer le tenseur des contraintes en tout point P est lui appliquer un critère (par exemple de Von-Mises pour de l'acier). On peut simplifier le critère dans quelques cas particuliers :
  - **si la poutre est soumise à de la flexion  $M_{fz}$ , de l'effort tranchant  $T_y$  et de l'effort normal  $N$** , la contrainte en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{y}\vec{y} + \hat{z}\vec{z}$  est donnée par :

$$\sigma_{xx}(s, \hat{y}) = \frac{N(s)}{S(s)} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}(s)}. \quad (6.48)$$

- si la poutre est soumise à de la flexion  $M_{fy}$ , de l'effort tranchant  $T_z$  et de l'effort normal  $N$ , la contrainte en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{y}\vec{y} + \hat{z}\vec{z}$  est donnée par :

$$\sigma_{xx}(s, \hat{z}) = \frac{N(s)}{S(s)} + \frac{M_{fy}(s)\hat{z}}{I_{Hy}(s)}. \quad (6.49)$$

Attention à l'inversion de signe dans le calcul de la contrainte qui est simplement dû au fait que le repère local est direct.

Il faut rechercher le maximum et le minimum de  $\sigma_{xx}$  qui se situent sur une fibre appartenant à la surface latérale de la poutre. On considérera donc les demie-épaisseurs de la poutre  $\hat{y}_{maxi} = h(s)/2$  ou  $\hat{y}_{maxi} = -h(s)/2$ .

Dans le cas où les limites d'élasticité en traction et compression sont les mêmes, par exemple,

- pour de l'acier à  $-240 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 240 \text{ MPa}$
- pour de l'aluminium et ses alliages à  $-80 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 80 \text{ MPa}$ ,

il est possible de vérifier que la valeur absolue de  $\sigma_{xx}$  reste inférieure à la limite d'élasticité  $\sigma_{ce}$ .

Dans le cas où les limites d'élasticité en traction et compression sont différentes, par exemple,

- pour du béton à  $-18 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 18/11 \text{ MPa}$ ,
- pour du bois dans le sens des fibres (direction longitudinale du tronc) à  $-20 \text{ MPa} < \sigma_{xx} < 50 \text{ MPa}$ ,

il faut vérifier les contraintes sur la fibre supérieure et la fibre inférieure en tenant compte du signe. Le lieu où la contrainte atteint en premier sa limite d'élasticité indique si la rupture apparaît d'abord en compression ou en traction.

Pour les autres matériaux, consultez les tableaux affichés en salle tp.

*Où sont les fibres supérieure et inférieure ?* La réponse est dans la vidéo 291 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=291>. Regarde-la.

*Pourquoi dans la capacité bleue, on a besoin d'une fibre supérieure et d'une fibre inférieure ?* La réponse est dans la vidéo 541 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=291>. Regarde-la.

**si la poutre est soumise à de la torsion pure  $M_x$ , et que la section est circulaire de rayon  $r(s)$ , alors la contrainte est une contrainte de cisaillement. Elle est donnée en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{r}\vec{e}_r$  par,**

$$\sigma_{x\theta}(s, \hat{r}) = \frac{M_x(s)\hat{r}}{I_0(s)}. \quad (6.50)$$

Sa valeur maximale est donnée pour  $\hat{r} = r(s)$ . On se limitera :

- pour de l'acier à  $-240/2 \text{ MPa} < \sigma_{x\theta} < 240/2 \text{ MPa}$ ,
- pour de l'aluminium et ses alliages  $-80/2 \text{ MPa} < \sigma_{x\theta} < 80/2 \text{ MPa}$ ,

Pour les autres matériaux, consultez les tableaux affichés en salle tp.

*Comment chercher le point le plus sollicité ?* La réponse est dans la vidéo 265 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=265>. Regarde-la.

La charge maximale en torsion est différente si la section est carrée. Pourquoi ? La réponse est dans la vidéo 304 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=304>. Regarde-la.

dans le cas où en un point est présent une contrainte normale  $\sigma_{xx}$  et une contrainte de cisaillement  $\sigma_{x\theta}$ , alors on calculera une contrainte équivalente (de Tresca),

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{x\theta}^2}. \quad (6.51)$$

Sa valeur doit être telle que :

- pour de l'acier  $\sigma_{equiv} < 240 \text{ MPa}$  ,
- pour de l'aluminium  $\sigma_{equiv} < 30 \text{ MPa}$  ,

### 6.3.4 Exemple de calcul

Soit une poutre droite  $AB = l\vec{i}$  (avec  $l = 0.2 \text{ m}$ ), encastrée au point  $A$  et chargée par un effort  $F\vec{j}$  en  $B$ , de section circulaire de rayon  $r = 0.005 \text{ m}$ , en acier. Calculez la force  $F$  maximale admissible par la structure.

- bilan des actions :

une liaison encastrement en  $A$   $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_A$  ;

un torseur de chargement  $\left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$

- calcul du torseur des efforts intérieurs : on oriente la poutre de  $A$  vers  $B$ . Le torseur des efforts intérieurs en  $H(s)$  tel que  $AH = s\vec{i}$ , se calcule en fonction de la partie aval :

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{j} \\ F(l-s)\vec{k} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ F(l-s)\vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (6.52)$$

avec  $(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère local en  $H$ .

- détermination des évolutions de ses composantes le long de la poutre (avec l'abscisse  $s$ ) :
  - effort normal :  $N(s) = 0$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  :  $T_y(s) = F$
  - effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  :  $T_z(s) = 0$
  - moment de torsion :  $M_x(s) = 0$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{y}$  :  $M_{fy}(s) = 0$
  - moment de flexion autour de l'axe  $H\vec{z}$  :  $M_{fz}(s) = F(l-s)$





Figure 6.40: Le viaduc de Millau.

- recherche du point le plus sollicité :

La poutre est soumise à de la flexion  $M_{fz}$  de l'effort tranchant  $T_y$ , la contrainte en un point P de la section droite tel que  $\vec{HP} = \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$  est donnée par :

$$\sigma_{xx}(s, \hat{y}) = -\frac{F(l-s)\hat{y}}{\pi r^4/4}. \quad (6.53)$$

Il faut rechercher le maximum et le minimum de  $\sigma_{xx}$ . On considérera donc les demie-épaisseurs de la poutre  $\hat{y}_{maxi} = r$  ou  $\hat{y}_{maxi} = -r$ . On obtient donc :

$$\sigma_{xx}(0, -r) = \frac{Flr}{\pi r^4/4} = \frac{4Fl}{\pi r^3}, \quad (6.54)$$

d'où,

$$F < \frac{240 \cdot 10^6 \text{ Pa} \pi r^3}{4l}. \quad (6.55)$$

Soit pour une poutre de rayon  $r = 0.005$  m et une longueur de  $l = 0.2$  m, une force maximale admissible de  $F = 118$  N.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 821, 822. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 821 : Est-ce une sollicitation de traction/compression ?**

Sur le viaduc de Millau, on s'intéresse au tablier entre deux poteaux.

On considérera la structure lors de sa construction, donc quand le poteau vertical est construit, que de part et d'autre de ce poteau, de chaque coté et symétriquement, les tabliers sont installés par tronçons en étant soutenu par les câbles.

Le tablier est-il sollicité en traction/compression ? Est-ce la seule sollicitation ?



**brevet 822 : Est-ce une sollicitation de traction/compression ?**

Sur le viaduc de Millau, on s'intéresse à la flèche au dessus du poteau qui débute au niveau du tablier.

La flèche est-elle sollicitée en traction/compression ? Est-ce la seule sollicitation ?

*Pourrait-on avoir un exemple de rédaction d'un brevet du même type que le 821 ? (notamment avec le calcul du torseur des efforts intérieurs). J'ai des difficultés à formaliser mon raisonnement.*

*Merci.* La réponse est dans la vidéo 329 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=329>. Regarde-la.

**Formation à la compétence verte de statique des poutres.**



Sur  
<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=209>,  
vous pouvez visualiser une présentation de  
cette compétence. Le fichier est nommé *209  
Compétence verte de statique des poutres :  
détermination du torseur de déplacement en un  
point.*

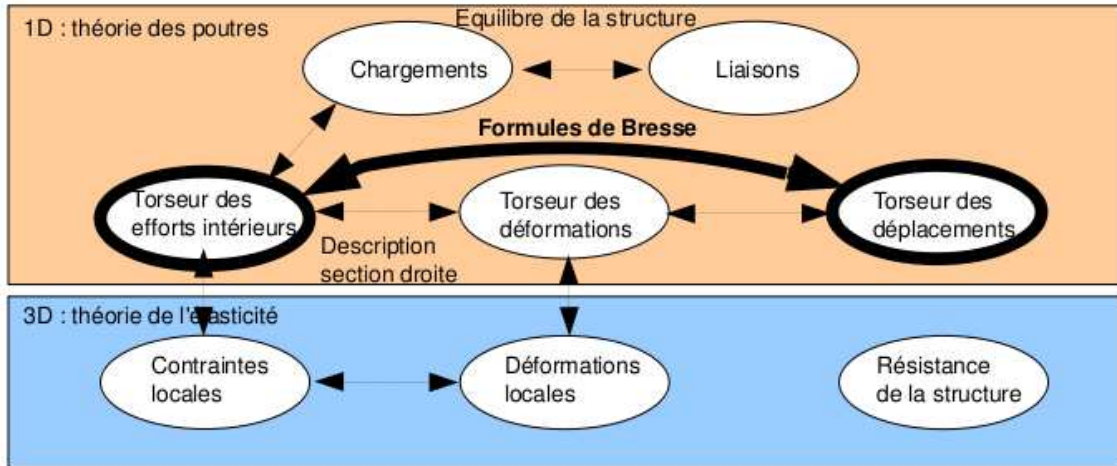


Figure 6.41: Les concepts utiles au passage direct du torseur des efforts intérieurs au torseur de déplacement.

### 6.3.5 Formules de Bresse

Ce paragraphe concerne les étapes mises en gras dans le synopsis figure 6.41.

Utilité : L'utilisation des Formules de Bresse, permet de résoudre des problèmes :

- dans l'espace tridimensionnel,
- pour des poutres dont la ligne moyenne n'est pas rectiligne.

C'est leur généralité qui leur donne toute leur force. Elles sont donc étudiées dans ce cours plutôt que se limiter aux méthodes associées uniquement aux poutres droites qui utilisent des formules du type  $EI_{Hz} \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{fz}$ . Ces formules ne sont pas valables dans le cas de chargement tridimensionnels.

Les formules de Bresse peuvent être construites par approche successive. Soit une poutre reliant un point A à un point B, orientée de A vers B, le point courant étant noté H.

- Supposons que cette poutre soit infiniment rigide. Si le point A subit un torseur de déplacement composé d'un angle de rotation  $\check{\omega}_A$  et d'une translation  $\vec{u}_A$ , alors le torseur de déplacement au point B est obtenu par la formule de changement de point.

$$\check{\omega}_B = \check{\omega}_A, \quad (6.56)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB}. \quad (6.57)$$

- Supposons cette fois que le point A est immobile mais que seul se déforme un petit tronçon HH' de longueur  $ds$  à partir du point H. Le torseur de déplacement de H' est composé de  $\check{\omega}_{H'} = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) ds$  et d'une translation  $\vec{u}_{H'} = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z}) ds$ . La déformation de ce petit segment implique un torseur de déplacement au point B :

$$\check{\omega}_B = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) ds, \quad (6.58)$$

$$\vec{u}_B = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z}) ds + (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) ds \wedge \vec{HB}. \quad (6.59)$$

- Supposons cette fois que le point A est mobile et que toute la poutre se déforme. Il suffit de faire la somme des torseurs : du premier et du second que l'on aura intégré le long de toute la poutre AB. On obtient les formules de Bresse ci-dessous.

Soit une poutre dont l'orientation de la fibre moyenne est de  $P_{deb}$  à  $P_{fin}$ , si le torseur des déformations est noté,

$$\{Def_H\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_x/GI_0^c \check{x} + M_{f_y}/EI_{Hy} \check{y} + M_{f_z}/EI_{Hz} \check{z} \\ N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (6.60)$$

avec le module de Coulomb  $G$  donné par (Eq. 6.31)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6.61)$$

Alors le torseur de déplacement au point  $P_{fin}$  par rapport au torseur de déplacement du point  $P_{deb}$  est,

$$\begin{aligned} \{U_{P_{fin}}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{P_{fin}} \\ \check{u}_{P_{fin}} \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) ds \\ \check{u}_{P_{deb}} + \check{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\epsilon_x \check{x} + \gamma_y \check{y} + \gamma_z \check{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \check{u}_{P_{deb}} + \check{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \check{x} + T_y/GS_y \check{y} + T_z/GS_z \check{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \quad (6.62) \end{aligned}$$

Dans la formule de Bresse, les sections corrigées  $S_y$  et  $S_z$  sont indiquées dans la figure 6.37, dans l'avant dernière colonne. Elles diffèrent en fonction de la forme de la section droite.

*Pourquoi doit-on utiliser dans les formules de Bresse, les valeurs corrigées des aires des sections et du moment polaire ?* La réponse est dans la vidéo 008 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=008>. Regarde-la.

*A quel moment a-t-on un angle de rotation non nul dans la formule de Bresse? A quoi correspond-t-il exactement ?* La réponse est dans la vidéo 307 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=307>. Regarde-la.

*Comment utilise-t-on de façon efficace les formules de Bresse ?* La réponse est disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=545>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

Les formules de Bresse ci-dessus sont relatifs à la cinématique 3. Nous rappelons ci-dessous, les formules de Bresse pour la cinématique 2, qui ne diffèrent que par 3 termes :

$$\begin{aligned} \{U_{P_{fin}}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{P_{fin}} \\ \check{u}_{P_{fin}} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \check{u}_{P_{deb}} + \check{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \check{x} + T_y/GS \check{y} + T_z/GS \check{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \quad (6.63) \end{aligned}$$

• **Erreur classique la plus souvent commise (une seule fois... après vous ne le ferez plus !)** : Les formules de Bresse sont écrites dans le repère local. Lorsque vous faites les calculs et que l'on vous demande à la fin les valeurs de déplacement ou de rotation dans le repère global, il est nécessaire de refaire le changement de repère. Si la poutre est avec un repère local qui dépend continuellement de  $s$ , alors exprimez le repère local dans le repère global, puis faite l'intégration.

• **Erreur classique** : Une fois les formules de Bresse utilisées, votre résultat ne doit plus faire apparaître les coordonnées du point  $H$ . Si c'est le cas, c'est que vous n'avez pas effectué l'intégration entre les abscisses  $s_{P_{deb}}$  et  $s_{P_{fin}}$ .

• **Erreur classique** : Si dans un problème donné, le déplacement en  $P_{fin}$  est connu et que vous recherchez le déplacement en  $P_{deb}$ , écrivez la formule de Bresse comme ci-dessus, puis passez les termes complémentaires à  $\vec{u}_{P_{fin}}$  de l'autre côté de l'égalité.

• **Erreur classique** : Si vous utilisez les formules de Bresse entre un point  $s_{P_{deb}}$  et  $s_{P_{fin}}$  et que vous devez couper l'intégrale en deux en passant par un point  $s_{P_{int}}$  (comme "intermédiaire", la formule de Bresse en déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{P_{fin}} &= \vec{u}_{P_{deb}} + \vec{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} \\ &+ \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{int}}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ &+ \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{int}}} (M_x/GI_0^c \vec{x} + M_{f_y}/EI_{Hy} \vec{y} + M_{f_z}/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \\ &+ \int_{s_{P_{int}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ &+ \int_{s_{P_{int}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \vec{x} + M_{f_y}/EI_{Hy} \vec{y} + M_{f_z}/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Vous noterez bien que le vecteur après le produit vectoriel reste  $\vec{H} \vec{P}_{fin}$  dans les deux intégrales.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 093, 041, 042, 095, 050, 089, 051, 052, 053 et 096. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 093 : Comparaison expérimentale des moments quadratiques d'une poutre**

auteurs : JM Génévaux ; ressource : [?], paragraphe .

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B et C, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/2,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A et B sont sur des appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ , le point C chargé par une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ). La poutre est réalisée par le collage le long de leur génératrice de 8 spaguettis, tel que la section droite soit un assemblage de 4 x 2 spaguettis. Les appuis sur rouleau sont réalisés par le contact entre la poutre et deux cylindres. Le chargement est réalisé par un doigt.

La rigidité de la structure est-elle plus grande lorsque la grande hauteur de la section droite (4 spaguettis) est parallèle au chargement ?

**brevet 041 : Raideur d'un plot en compression, ajusté dans un contenant cylindrique parfaitement lubrifié**

auteur : JM Génevax ; ressource : [?] ; autoattribution .

Soit un cylindre de direction  $\vec{j}$ , de section droite circulaire de diamètre  $d = 10$  mm, en aluminium AU4G, de longueur  $l = 50$  mm, ajusté dans un contenant cylindrique indéformable parfaitement lubrifié. Ce plot est soumis à une force  $\vec{F} = -200\vec{j}$  sur sa surface supérieure. Sa surface inférieure est bloquée en translation par une surface de normale  $\vec{j}$ . Sous cette charge, la surface supérieure se déplace d'une valeur  $\vec{u} = -u\vec{j}$ .

Quelle est la rigidité  $k = F/u$  de ce plot?

**brevet 042 : Raideur d'un plot en compression posé sur un plan parfaitement lubrifié**

auteur : JM Génevax ; ressource : [?] ; autoattribution .

Soit un cylindre de direction  $\vec{j}$ , de section droite circulaire de diamètre  $d = 10$  mm, en aluminium AU4G, de longueur  $l = 50$  mm. Ce plot est soumis à une force  $\vec{F} = -200\vec{j}$  sur sa surface supérieure. Sa surface inférieure est bloquée en translation dans la direction  $\vec{j}$  par une surface parfaitement lubrifiée. Sous cette charge, la surface supérieure se déplace d'une valeur  $\vec{u} = -u\vec{j}$ .

Quelle est la rigidité  $k = F/u$  de ce plot ?

**brevet 095 : Comparaison expérimentale des rigidités de deux plots en fonction de leur cinématiques possibles**

auteurs : JM Génevax ; ressource : [?], paragraphe .

Le problème est plan tel que représenté figure 6.42. Soit deux poutres de fibres moyennes reliant les points A et B, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$  et  $(0,l,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encasté et le point B est soumis à une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ). Les poutres sont en caoutchouc, ou en flamby, ou en flan patissier maison. L'une d'elle est insérée dans un cylindre creux parfaitement ajusté et lubrifié, l'autre est libre de se dilater. Les forces égales sont réalisées en posant de façon bien symétrique une masse.

Après chargement, la masse est-elle inclinée (contractions différentes des deux plots) ?

**brevet 050 : Déplacement pour une poutre en traction**

auteur : JM Génevax ; ressource : [?] ; autoattribution .

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.1$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.2(s+1)$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encasté, et une force à l'extrémité B implique que l'effort normal dans toute la poutre est  $N = 1000$  N. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Quel est le déplacement du point B ?

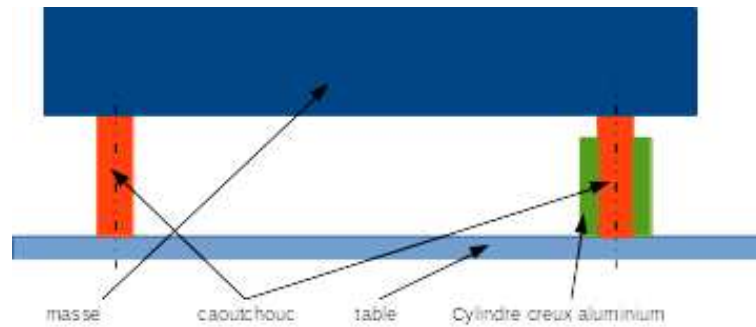


Figure 6.42: Un montage de test de la dépendance de la rigidité à la cinématique possible de section droite.

**brevet 089 : Formule de Bresse et intégration**

**auteurs : B Brouard et JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B et D, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(0.1,0,0)$  et  $(0.2,0.1,0)$  en m dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On oriente la poutre de A vers D. Le point A est encastré, le point D chargé par une force  $10\vec{i}$  N. La poutre est de section circulaire de diamètre  $d = 0.005$  m, en acier de module de Young  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Si l'on note  $H_1$  un point courant de AB tel que  $\vec{AH}_1 = s_1\vec{i}$ , les composantes du torseur des efforts intérieurs sont  $N_1 = 10$  N,  $T_{y1} = 0$  N et  $M_{fz1} = -1$  N.m.

Si l'on note  $H_2$  un point courant de BD tel que  $\vec{BH}_2 = s_2 \left( \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \right)$  alors les composantes du torseur des efforts intérieurs sont  $N_2 = 10/\sqrt{2}$  N,  $T_{y2} = -10/\sqrt{2}$  N et  $M_{fz2} = -(\sqrt{2} - 10s_2)/\sqrt{2}$  N.m.

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.

Quel est le déplacement du point D exprimé dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  ?

**brevet 051 : Déplacement pour une poutre en flexion dû au moment fléchissant**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.15$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02(s+1)$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré, et une force à l'extrémité B dans la direction  $\vec{j}$  implique que l'effort tranchant  $T_y = 1000$  N et un moment fléchissant  $M_{fz}(s) = 1000(l - s)$  Nm. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.

Quel est le déplacement dans la direction  $\vec{j}$  du point B dû au moment fléchissant ?

**brevet 052 : Déplacement pour une poutre en flexion dû à l'effort tranchant dans le cas de la cinématique 3 (avec voilement de la section droite)**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.15$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02(s+1)$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré, et une force à l'extrémité B dans la direction  $\vec{j}$  implique que l'effort tranchant  $T_y = 1000$  N et un moment fléchissant  $Mf_z(s) = 1000(l - s)$  N.m. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa, son coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ .

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.

Quel est le déplacement dans la direction  $\vec{j}$  du point B dû à l'effort tranchant dans le cas de la cinématique 3 ?

**brevet 053 : Déplacement pour une poutre en flexion dû à l'effort tranchant dans le cas de la cinématique 2**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.15$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02(s+1)$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré, et une force à l'extrémité B dans la direction  $\vec{j}$  implique que l'effort tranchant  $T_y = 1000$  N et un moment fléchissant  $Mf_z(s) = 1000(l - s)$  Nm. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa, son coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ .

Quel est le déplacement dans la direction  $\vec{j}$  du point B dû à l'effort tranchant dans le cas de la cinématique 2 ?

**brevet 096 : Déterminations expérimentales du lieu de déplacement maximal et du lieu de rupture**

**auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B et C, qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/3,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encastré, le point B chargé par une force  $-F\vec{j}$  (avec  $F > 0$ ).

Expérimentalement, la poutre est réalisée avec un spaghetti, l'encastrement à l'aide de deux parallélépipèdes, le chargement par votre doigt.

Quel est le point de déplacement maximum ? Quel est le point où se produit la rupture ?



## 6.4 Résolutions de problèmes

Si l'objectif est de calculer un déplacement (ou une rotation) d'un point de la poutre, il faut :

- choisir un point de départ où le déplacement et/ou la rotation est connue
- orienter la poutre du point de départ au point où s'effectue la recherche de déplacement
- écrire la ou les formules de Bresse nécessaires
- identifier les composantes du torseur des efforts intérieurs qui doivent être calculées, et sur quel segment,
- calculer ces composantes en fonction du chargement (et des éventuelles inconnues hyperstatiques (en vert)). Le choix judicieux du secteur aval ou amont peut parfois permettre d'éviter de calculer les réactions aux liaisons.
- deux cas sont possibles :
  - le système est hyperstatique
    - \* il faut écrire une équation supplémentaire : elle concerne le degré de liberté dual de l'inconnue hyperstatique (en vert).
    - \* Si c'est une force dans une direction, c'est le déplacement dans cette direction. Si c'est un moment autour d'un axe, c'est la rotation autour de cet axe.
    - \* Calculer (comme ci-dessus par les formules de Bresse ou une méthode énergétique) le déplacement recherché (ou la rotation recherchée). Ceci vous donne une équation supplémentaire qui lie l'inconnue hyperstatique (en vert) aux chargements (en rouge).
    - \* Remplacer dans les expressions des composantes d'effort intérieur, l'inconnue hyperstatique (en vert) par son expression en fonction du chargement,
  - si le système est isostatique, les composantes du torseur des efforts intérieurs sont alors connues en fonction uniquement des chargements (en rouge).
- injecter ces expressions dans les formules de Bresse,
- faire les intégrales



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 075. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 075 : Démarche générale de résolution d'un problème de déplacement en théorie des poutres**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .

Soit un crochet fixé au plafond, représenté par une poutre en acier de diamètre  $d$ , composé d'un segment droit reliant les points  $A$  et  $B$ , puis d'un segment d'arc de cercle de rayon  $r$  reliant les points  $B$   $C$  et  $D$ . On appellera  $O$  le centre du cercle. Les coordonnées des points dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sont  $A(0, r + l)$ ,  $B(0, r)$ ,  $C(0, -r)$ ,  $D(-r, 0)$ . Une force  $\vec{F} = -F\vec{j}$  est exercée en  $C$ .

Donnez la démarche pour calculer le déplacement du point  $C$  (ne pas faire les calculs).

## 6.4.1 Résolution par superposition

### Hypothèses

Pour que le principe de superposition soit valide, il faut que la loi de comportement du matériau utilisé soit linéaire et que les déplacements soient petits devant les dimensions de la structure. Cette deuxième condition s'exprime plus précisément par le fait qu'il faut que le torseur des efforts intérieurs ne varie que de façon négligeable s'il est calculé pour la poutre dans sa configuration initiale et s'il est calculé dans sa configuration déformée.

### Enoncé

Soit une structure élastique linéaire, sous un ensemble de chargements  $\{\tau_1\}$  cette structure subit un champs de déplacement  $\{U_1\}$ , sous un ensemble de chargements  $\{\tau_2\}$  cette structure subit un champs de déplacement  $\{U_2\}$ , alors si elle est chargée simultanément par  $\{\tau_1\} + \{\tau_2\}$ , son champs de déplacement est  $\{U_1\} + \{U_2\}$ .

### Exemple

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, de moment quadratique  $I_{Hz} = 1 \cdot 10^{-8}$  m<sup>4</sup> autour de l'axe  $H\vec{z}$ , reliant les points A et B, tel que  $\vec{AP} = l\vec{i}$  et que le point A est encasté.

- Cette poutre sous une charge en B  $\vec{F} = 100\vec{j}$  N, subit un déplacement en B qui vaut  $\vec{u}_B = 0.0159\vec{j}$  m.
- Cette poutre sous un couple  $\vec{C} = 100\vec{k}$  N.m en D, milieu de [AB], subit un déplacement en B qui vaut  $\vec{u}_B = 0.0179\vec{j}$  m.

Sous les deux chargements, le déplacement du point B vaut  $\vec{u}_B = 0.0338\vec{j}$  m.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 056, 074, 097 et 057. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 056 : Le principe de superposition est-il applicable ?**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.015$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encasté. Un premier chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_1 = 100\vec{j}$ . Un second chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_2 = -1000\vec{j}$ . Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.  
En calculant le déplacement en bout de poutre, dites si les hypothèses du principe de superposition sont vérifiées dans ce cas ?

**brevet 074 : Le principe de superposition est-il applicable ? (version 2)**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.015$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré. Un premier chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_1 = 1000\vec{i}$ . Un second chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_2 = -100\vec{j}$ . Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.

En calculant le moment en A dans la configuration de référence et dans la configuration déformée, dites si les hypothèses du principe de superposition sont vérifiées dans ce cas ?

**brevet 097 : Vérification expérimentales approximative du principe de superposition**

**auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B, C, et D qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/3,0,0)$ ,  $(l/2,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encastré, le point B chargé par une force  $-F_1\vec{j}$  (avec  $F_1 > 0$ ), le point C chargé par une force  $-F_2\vec{j}$  (avec  $F_2 > 0$ ).

Faites un dessin de la structure, placez le repère global, les points, les éventuels repères locaux, les liaisons et les chargements.

Expérimentalement, la poutre est réalisée avec un spaghetti, l'encastrement à l'aide de deux parallélépipèdes, les chargements, en suspendant avec un fil un tube de tipex ou un stylo.

Mesurez le déplacement du point D sous le chargement en B dû au tipex, puis lorsque le chargement en C est dû au stylo, puis lorsque les deux chargements sont appliqués simultanément.

Le principe de superposition est-il vérifié approximativement ?

**brevet 057 : Énergie de déformation**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Résolution par superposition* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.15$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré. Un chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_2 = 100\vec{j}$  N. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Quelle est l'énergie de déformation  $W_{int}$  contenue dans la poutre ?

Formation à la compétence marron de statique des poutres.

## 6.4.2 Méthodes énergétiques

Les formules de Bresse nécessitent des calculs dans des espaces vectoriels, alors que bien souvent, c'est un déplacement dans une direction, une rotation autour d'un axe ou un état de déformation qui est cherché. Ce sont des grandeurs scalaires (des tenseurs d'ordre 0). Il est donc intéressant de mettre en place une méthode de résolution qui utilise une grandeur scalaire : l'énergie.

### Energie de Déformation

Par définition l'énergie de déformation dans une structure composée de poutres correspond à la somme sur toute la poutre de l'énergie de déformation dans chacune des sections droites. Cette énergie de déformation locale est le comoment du torseur des déformations de la section droite et du torseur des efforts intérieurs. Le fait que la structure soit élastique, fait apparaître le coefficient 1/2 de part la proportionnalité de ces deux torseurs. En utilisant la loi de comportement de la cinématique 3, on peut remplacer le torseur des déformations par son expression du torseur des efforts intérieurs. On obtient ainsi la formule 6.65.

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_{structure} \left( \frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_y} + \frac{T_z^2}{GS_z} + \frac{M_x^2}{GI_0^c} + \frac{M f_y^2}{EI_{Hy}} + \frac{M f_z^2}{EI_{Hz}} \right) ds. \quad (6.65)$$

### Travail des chargements extérieurs

Les chargements extérieurs sont de deux types :

- les réactions aux liaisons
- les chargements imposés

Supposons que pour une poutre, un unique chargement soit imposé en un point B et que celui-ci soit représenté par un torseur  $\{\tau_B\}$  dont les deux composantes  $\vec{F}$  et  $\check{C}$  croissent proportionnellement. Sous l'effet de ce chargement le point B subit un champs de déplacement représenté par le torseur  $\{U_B\}$  composé d'une résultante  $\check{\omega}$  et d'un moment  $\vec{u}_B$ . Le travail de ce torseur de chargement entre l'état repos et l'état chargé est la moitié du comoment des torseurs de chargement et de déplacement :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \left( \vec{F} \cdot \vec{u}_B + \check{C} \cdot \check{\omega} \right). \quad (6.66)$$

Les réactions aux liaisons, si elles sont parfaites, ne travaillent pas. En effet, soit la composante de déplacement ou de rotation est nulle alors qu'une réaction est présente, soit la composante de déplacement ou de rotation n'est pas nulle, mais la composante de force ou de couple est nulle.

### Travail d'un chargement constant lors d'un mouvement dû à une autre charge

Supposons qu'un torseur de chargement  $\{\tau_A\}$  soit appliqué à un point A et que ce point A subisse un torseur de déplacement  $\{U_A\}$  dû à un autre chargement. Le travail de  $\{\tau_A\}$  dans le mouvement  $\{U_A\}$  est,

$$W_{ext} = \left( \vec{F} \cdot \vec{u}_A + \check{C} \cdot \check{\omega} \right), \quad (6.67)$$

qui diffère de l'équation 6.66 simplement par l'absence du coefficient  $\frac{1}{2}$ .

### Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Supposons maintenant qu'un système subisse :

- un premier chargement  $\{\tau_1\}$  en un point A qui implique un champs de déplacement  $\{U_1\}$  en tout point de la poutre. Ce premier chargement est suivi d'un second  $\{\tau_2\}$  en un point B, qui implique un champs de déplacement supplémentaire  $\{U_2\}$ . Dans la première phase, le travail extérieur est  $W_{11} = \frac{1}{2} \left( \vec{F}_A \cdot \vec{u}_{1A} + \check{C}_A \cdot \check{\omega}_{1A} \right)$ . Dans la seconde phase il est  $W_{12} + W_{22} = \left( \vec{F}_A \cdot \vec{u}_{2A} + \check{C}_A \cdot \check{\omega}_{2A} \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{F}_B \cdot \vec{u}_{2B} + \check{C}_B \cdot \check{\omega}_{2B} \right)$ .

- un premier chargement  $\{\tau_2\}$  en un point B qui implique un champs de déplacement  $\{U_2\}$  en tout point de la poutre. Ce premier chargement est suivi d'un second  $\{\tau_1\}$  en un point A, qui implique un champs de déplacement supplémentaire  $\{U_1\}$ . Dans la première phase, le travail extérieur est  $W_{22} = \frac{1}{2} (\vec{F}_B \cdot \vec{u}_{2B} + \vec{C}_B \cdot \vec{\omega}_{2B})$ . Dans la seconde phase il est  $W_{21} + W_{11} = (\vec{F}_B \cdot \vec{u}_{1B} + \vec{C}_B \cdot \vec{\omega}_{1B}) + \frac{1}{2} (\vec{F}_A \cdot \vec{u}_{1A} + \vec{C}_A \cdot \vec{\omega}_{1A})$ .

Le champ de déplacement total ne dépend pas de l'ordre dans lequel les chargements ont été appliqués. Le travail des forces extérieures n'en dépend donc pas. Egaler ces travaux amène à l'égalité  $W_{12} = W_{21}$  : le travail du chargement 1 dans le déplacement 2 est égal au travail du chargement 2 dans le déplacement 1.

A titre d'illustration, si le chargement 1 est une force  $\vec{F}_{1A}$  en A qui implique un déplacement  $\vec{u}_{1B}$  en B, le chargement 2 est une force  $\vec{F}_{2B}$  en B qui implique un déplacement  $\vec{u}_{2A}$  en A, alors,

$$\vec{F}_{1A} \cdot \vec{u}_{2A} = \vec{F}_{2B} \cdot \vec{u}_{1B}. \quad (6.68)$$

Si les modules des forces et leurs directions sont les mêmes, et que les déplacements sont mesurés dans les directions de ces forces,

$$u_{2A} = u_{1B}. \quad (6.69)$$

Si l'on appelle  $c_{12} = \frac{u_{1B}}{F_{1A}}$ , le coefficient d'influence d'une force en A sur le déplacement en B, on a alors l'égalité des coefficients d'influence,

$$c_{12} = c_{21}. \quad (6.70)$$

Le coefficient d'influence n'est rien d'autre que la fonction de réponse en fréquence entre le point A et le point B à fréquence nulle.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 058 et 097bis. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

#### brevet 058 : Réciprocité

auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.015$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $A\vec{H} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré. Un chargement 1 est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_1 = 100\vec{j}$  N. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa. Sous cette charge, le déplacement en milieu de poutre (point C) est  $u_C = 0.0139$  m. Le chargement 1 est enlevé. Une seconde charge  $\vec{F}_2 = 50\vec{j}$  N est appliquée au point C.

Quelle est le déplacement au point B sous cette seconde charge ?

**brevet 097 bis : Vérification expérimentales approximative du théorème de Maxwell-Betti**

auteurs : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .

Le problème est plan. Soit une poutre reliant les points A, B et C qui ont comme coordonnées respectivement  $(0,0,0)$ ,  $(l/3,0,0)$  et  $(l,0,0)$  dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point A est encastré, le point B ou le point C peuvent être chargés par une force  $-F_1\vec{j}$  (avec  $F_1 > 0$ ).

Expérimentalement, la poutre est réalisée avec un spaguetti, l'encastrement à l'aide de deux parallélépipèdes, les chargements, en suspendant avec un fil un tube de tipex.

Mesurez le déplacement du point C sous le chargement en B dû au tipex. Puis mesurez le déplacement du point B sous le chargement en C dû au tipex.

Les deux déplacements mesurés sont-ils approximativement les mêmes ?

### Théorème de Castigliano

Sur l'exemple du ressort de raideur  $k$ , montrons que le déplacement  $u$  est relié à la force  $F$  par  $u = \frac{\partial W_{ext}}{\partial F}$ .  $W_{ext} = \frac{1}{2}uF$ , or  $u = F/k$ , donc  $W_{ext} = \frac{1}{2}F^2/k$ , d'où  $\frac{\partial W_{ext}}{\partial F} = F/k$  et  $\frac{\partial W_{ext}}{\partial F} = u$ .

Si le système est conservatif, le travail des chargements extérieurs est stocké sous la forme d'énergie interne. On a donc l'égalité  $W_{int} = W_{ext}$ .

On peut donc énoncer de façon plus générale, le théorème de Castigliano comme suit.

Pour un effort  $F\vec{n}$  en un point A,

$$\vec{u}_A \cdot \vec{n} = \frac{\partial W_{int}}{\partial F}. \quad (6.71)$$

Pour un couple  $C\vec{n}$  en un point A,

$$\vec{\omega}_A \cdot \vec{n} = \frac{\partial W_{int}}{\partial C}, \quad (6.72)$$

Le théorème de Castigliano peut aussi être utilisé en un point non chargé. Pour cela,

- on ajoute au chargement réel un chargement fictif dual du déplacement recherché,
- on calcule le torseur des efforts intérieurs dû à ces chargements
- on utilise le théorème de Castigliano, et on trouve le déplacement en fonction du chargement réel et fictif,
- dans le résultat de déplacement, on annule le chargement fictif pour retrouver le problème réel initial.

• **Optimisation classique des calculs** : Il ne faut pas calculer l'intégrale de l'énergie de déformation, avant de faire la dérivation par rapport au paramètre  $q$ , mais échanger les signes d'intégration et de dérivation pour faire la dérivation en premier. En effet, si une composante ne dépend pas du paramètre de dérivation (par exemple  $N$ ), le terme  $2N \frac{\partial N}{\partial q} = 0$ , cela n'aurait servi à rien de calculer  $\frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{N^2}{ES} ds$ .

Entre formules de Bresse et Castigliano, comment choisir la méthode de résolution ? La réponse est dans la vidéo 009 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=009>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 059. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 059 : Castigliano**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Théorème de Castigliano* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit une poutre droite de longueur  $l = 1$  m, dont la fibre moyenne relie un point A et un point B, de section droite rectangulaire de largeur  $b = 0.015$  m dans la direction  $\vec{z}$  et de hauteur  $h = 0.02$  m dans la direction  $\vec{y}$ , avec  $s$  l'abscisse d'un point courant de la poutre tel que  $A\vec{H} = s\vec{i}$ . Les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  coïncident. Le point A est encastré. Un chargement est constitué d'une force à l'extrémité B  $\vec{F}_2 = 100\vec{j}$  N. Le module de Young du matériau est  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa.

Quel est le déplacement du point B dans la direction de la force qui lui est appliqué ?

### 6.4.3 Résolution de systèmes hyperstatiques

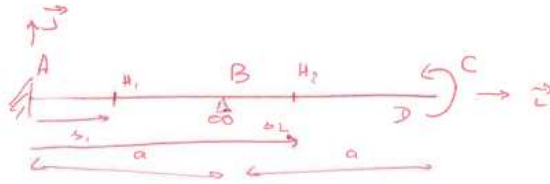
#### Extérieurement

Dans le paragraphe 4.3, vous avez déterminé si le système étudié était isostatique ou hyperstatique par rapport aux liaisons avec le monde extérieur. Pour chaque inconnue hyperstatique, vous avez écrit, paragraphe 4.3, l'équation cinématique associée permettant d'obtenir une équation supplémentaire. Le calcul de la valeur du degré de liberté associé peut être faite :

- par les formules de Bresse, appliquées au système isostatique associé.
- par Castigliano.

Un exemple de résolution d'un problème hyperstatique extérieurement est présenté dans les figures 6.43, 6.44 et 6.45. La résolution nécessite des calculs d'intégrales. Elles sont faites ici "à la main". Vous pouvez vous aider de *wxmaxima* pour les faire. En consultant l'exemple pour le cas de l'hyperstatisme intérieur, vous trouverez toutes les commandes utiles.





le problème est plan

Equilibre du système.

Bilan des actions.

$$\left\{ \mathcal{C}_A \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ C \perp \vec{k} \end{array} \right\}_A$$

car encastrement 2D

$$\left\{ \mathcal{C}_B \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_B$$

car appuis sur rouleau de normale  $B\vec{j}$

$$\left\{ \mathcal{C}_C \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C \vec{k} \end{array} \right\}_C$$

car chargement.

La somme des tenseurs est nulle.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ C \perp \vec{k} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{j} \\ R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{BA} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C \vec{k} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 + \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} = 0 \\ C \perp + a R_3 + \underline{C} = 0 \end{array} \right.$$

On choisit  $R_3$  comme inconnue hyperstatique.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 0 \\ R_2 = -R_3 \\ C_1 = -C - a R_3 \end{array} \right.$$

Calcul des tenseurs des efforts intérieurs.

Soit  $H_1 \in [A, B]$

$$\left\{ \mathcal{C}_{eff, int, H_1} \right\} = - \left\{ \mathcal{C}_A \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{j} \\ (C + a R_3) \vec{k} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{j} \\ (C + a R_3) \vec{k} + R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{AH_1} \end{array} \right\}_{H_1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{j} \\ (C + a R_3 - a_1 R_3) \vec{k} \end{array} \right\}_{H_1}$$

Figure 6.43: Résolution d'un problème hyperstatique extérieurement.

Passons dans le repère local.

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{x} \\ \vec{j} = \vec{y} \\ \vec{k} = \vec{z} \end{cases}$$

$$\left\{ \mathcal{G}_{\text{int } H_1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_3 \vec{y} \\ (C + (a-b)R_3) \vec{z} \end{array} \right\}_{H_1}$$

D'où les composantes

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_{y1} = R_3 \\ P_{z1} = C + (a-b)R_3 \end{cases}$$

et Soit  $H_2 \in [BD]$

$$\left\{ \mathcal{G}_{\text{int } H_2} \right\} = \left\{ \vec{G}_2 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C \vec{k} \end{array} \right\}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C \vec{k} \end{array} \right\}_{H_2}$$

Passons dans le repère local.

$$\vec{i} = \vec{x} ; \vec{j} = \vec{y} ; \vec{k} = \vec{z}$$

d'où les composantes

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_{y2} = 0 \\ P_{z2} = C \end{cases}$$

Calcul de l'inconnue hyperstatique  $R_3$

$$\vec{u}_B \cdot \vec{j} = 0$$

donc  $\frac{\delta W_{\text{int}}}{\delta R_3} = 0$

$$\left[ \begin{array}{l} \int_A^B \left( \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\delta N_1}{\delta R_3} \frac{N_1}{ES} + 2 \frac{\delta T_{y1}}{\delta R_3} \frac{T_{y1}}{Gf_y} + 2 \frac{\delta P_{z1}}{\delta R_3} \frac{P_{z1}}{E+H_3} \right) ds_1 \right. \\ \left. + \int_B^C \frac{\delta P_{z2}}{\delta R_3} \frac{P_{z2}}{E+H_3} ds_2 \right] = 0 \end{array} \right.$$

(Note: The first term is marked as "negligable" with arrows pointing to the  $\frac{\delta T_{y1}}{\delta R_3} \frac{T_{y1}}{Gf_y}$  and  $\frac{\delta P_{z1}}{\delta R_3} \frac{P_{z1}}{E+H_3}$  terms.)

Figure 6.44: Résolution d'un problème hyperstatique extérieurement.

$$\int_A^B \left( \frac{\partial R_3}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_3} \right) ds_1 = 0$$

$$\int_A^B (a-s_1) \frac{C + (a-s_1)R_3}{E I_H B} ds_1 = 0$$

$$\int_0^a [C(a-s_1) + (a-s_1)^2 R_3] ds_1 = 0$$

$$\tilde{s} = a - s_1$$

$$\int_a^0 [C\tilde{s} + R_3\tilde{s}^2] (-d\tilde{s}) = 0$$

$$\left[ C\frac{\tilde{s}^2}{2} + R_3\frac{\tilde{s}^3}{3} \right]_0^a = 0$$

$$C\frac{a^2}{2} + R_3\frac{a^3}{3} = 0$$

$$R_3 = \left( -C\frac{a^2}{2} \right) \frac{3}{a^3}$$

$$\boxed{R_3 = -\frac{3}{2} \frac{C}{a}}$$

Figure 6.45: Résolution d'un problème hyperstatique extérieurement.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le [brevet 077](#). Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 077 : Démarche générale de résolution d'un problème hyperstatique en théorie des poutres**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Résolution de systèmes hyperstatiques - extérieurement* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un crochet fixé au plafond, représenté par une poutre en acier de diamètre  $d$ , composé d'un segment droit reliant les points  $A$  et  $B$ , puis d'un segment d'arc de cercle de rayon  $r$  reliant les points  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ . On appellera  $O$  le centre du cercle. Les coordonnées des points dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sont  $A(0, r + l)$ ,  $B(0, r)$ ,  $C(r, 0)$ ,  $D(0, -r)$ ,  $E(-r, 0)$ . Une force  $\vec{F} = -F\vec{j}$  est exercée en  $D$ . Le point  $C$  (qui touche le mur latéral) est en liaison appui sur rouleau de normale  $C(-\vec{i})$ .

Donnez la démarche pour calculer le déplacement du point  $D$  (ne pas faire les calculs).

Formation à la compétence noire de statique des poutres.



Sur  
<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=309>,  
vous pouvez visualiser une présentation des  
cette compétence. Le fichier sont nommé *309*  
: *Méthodologie de résolution pour une structure*  
*hyperstatique intérieurement..*

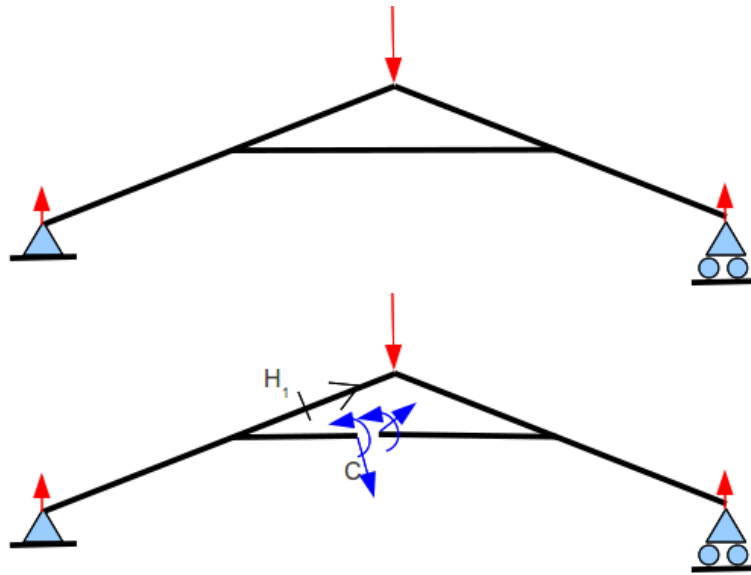


Figure 6.46: Un système hyperstatique intérieurement nécessite d'effectuer une coupure en un point arbitraire C.

### Intérieurement

Un système est hyperstatique intérieurement, lorsque la fibre moyenne est fermée (voir figure 6.46).

En effet, si l'on effectue une étude du torseur des efforts intérieurs en un point H, il est nécessaire de définir les segments seg+ et seg-. Or, si la fibre moyenne est fermée, ces segments sont reliés entre eux par la fibre moyenne sans passer par H. Il est alors impossible de définir le torseur des efforts intérieurs.

Le démarche à suivre est donc la suivante :

- on choisit un point de coupure C sur la fibre moyenne fermée.
- on coupe par la pensée la fibre moyenne en C
- on charge les deux faces de la coupure avec deux torseurs  $\{\tau_1\}$  et  $\{\tau_2\}$  dont les 6 composantes sont inconnues. Nous avons donc a priori 12 inconnues hyperstatiques. Dans le cas d'un problème plan, les deux torseurs n'auront que 3 inconnues chacun: deux de résultantes et une de moment.
- Des relations existent entre ces 12 composantes. Pour les trouver, on isole un petit tronçon de fibre moyenne de longueur  $2ds$  autour du point C ce qui définit les point C' et C'', puis on écrit l'équilibre de ce petit tronçon qui est chargé par  $-\{\tau_1\}_{C'}$ ,  $-\{\tau_2\}_{C''}$  et éventuellement un chargement concentré connu en C  $\{\tau_C\}$ . L'équilibre fournit 6 équations reliant les composantes de  $\{\tau_2\}$  à celles de  $\{\tau_1\}$  et  $\{\tau_C\}$ . On fera tendre  $ds$  vers 0, afin de simplifier les relations.
- La fibre moyenne de la structure n'est alors plus fermée, le torseur des efforts intérieurs en un point H peut être calculé classiquement en fonction des chargements extérieurs et des composantes de  $\{\tau_1\}$
- Pour déterminer les valeurs des inconnues hyperstatiques, on agira classiquement en utilisant Castigliano : la nullité traduit que le déplacement relatif de C'' par rapport à C' est nul et que la rotation relative de C'' et C' est nulle.

*Pourriez-vous nous éclairer sur la méthode de résolution d'un problème hyperstatique intérieurement ?* La réponse est dans la vidéo 012 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=012>. Regarde-la.

**Exemple de résolution** Soit une poutre en acier de section circulaire de diamètre  $d = 0.01$  m dont la fibre moyenne est constituée de 4 segments de droite AB, BC, CD et DA dont les coordonnées respectives dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $(2a, a, 0)$ ,  $(-2a, a, 0)$ ,  $(-2a, -a, 0)$ ,  $(2a, -a, 0)$  avec  $a = 0.2$  m. Cette poutre est chargée au point E milieu de DA par une force  $F\vec{i}$ , et est en appui simple au point G milieu de BC.

La symétrie du système et du chargement par rapport à l'axe  $O\vec{i}$  nous invite à travailler sur un demi-système, par exemple GBAE, en bloquant en G la rotation et en E la translation dans la direction  $\vec{j}$  et la rotation. Cela revient donc à mettre en G un encastrement et en E une liaison glissière bidimensionnelle d'axe  $E\vec{i}$ . Le système est devenu hyperstatique extérieurement.

Dans la résolution qui suit, nous ne le ferons pas afin de rester hyperstatique intérieurement et de bien faire apparaître le torseur de coupure. Cette démarche n'est pas optimale, mais rien n'assure que les problèmes que vous aurez à résoudre posséderont des symétries.

Le problème est bidimensionnel. La fibre moyenne est fermée : il est nécessaire de faire une coupure. Nous choisissons de couper au point I milieu de AB. Tout autre point de la fibre moyenne aurait convenu en évitant les points de liaison et de chargement. Le torseur de coupure en I qui agit sur le segment AI sera noté :

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (6.73)$$

Par le principe d'action et de réaction, le torseur en I agissant sur le segment IB est :

$$\{-\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_1\vec{i} - F_2\vec{j} \\ -C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (6.74)$$

Si le point I appartient à un plan de symétrie du problème et que ce point I n'est pas chargé par une force extérieure perpendiculaire à la fibre moyenne, alors  $F_2 = 0$ .

Si le point I appartient à un plan de symétrie du problème et que ce point I est chargé par une force extérieure  $F_3$  perpendiculaire à la fibre moyenne, alors  $F_2 = F_3/2$ .

Ces simplifications sont obtenues en faisant l'équilibre d'un petit tronçon infiniment petit en I de longueur  $\epsilon$  de chaque côté du point I.

Le torseur de coupure sur le segment AI, du fait de la symétrie et du non chargement en I donne

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I, \quad (6.75)$$

et sur le segment IB en

$$\{-\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_1\vec{i} \\ -C\vec{k} \end{array} \right\}_I. \quad (6.76)$$

Le système est hyperstatique intérieurement de degré 2 avec comme inconnues hyperstatiques  $F_1$  et  $C$ .

Pour le calcul des torseurs d'efforts intérieurs, on oriente la poutre, par exemple dans le sens AIBGCDEA. Soit  $H_1$  appartenant à AI,  $H_2$  appartenant à IB,  $H_3$  appartenant à BG,  $H_4$  appartenant à GC,  $H_5$  appartenant à CD,  $H_6$  appartenant à DE et  $H_7$  appartenant à EA.

Soit  $H_1$  tel que  $A\vec{H}_1 = s_1(-\vec{i})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H1}\} = \{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_{H1}. \quad (6.77)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{i}$ ,  $\vec{y} = -\vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_1 = -F_1$ ,  $Mfz_1 = C$ .

Soit  $H_2$  tel que  $I\vec{H}_2 = s_2(-\vec{i})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg-,

$$\{\tau_{H2}\} = -(-\{\tau_c\}) = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_{H2}. \quad (6.78)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{i}$ ,  $\vec{y} = -\vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_2 = -F_1$ ,  $Mfz_2 = C$ .

Soit  $H_3$  tel que  $B\vec{H}_3 = s_3(-\vec{j})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg-,

$$\{\tau_{H3}\} = -(-\{\tau_c\}) = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1s_3)\vec{k} \end{array} \right\}_{H3}. \quad (6.79)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{j}$ ,  $\vec{y} = \vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_3 = F_1$ ,  $Mfz_3 = C - F_1s_3$ .

Soit  $H_4$  tel que  $G\vec{H}_4 = s_4(-\vec{j})$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+ car cela évite de passer par le torseur de la liaison, donc nous évite de calculer l'équilibre (fort simple) de la structure ("Quel finaud !" ;),

$$\{\tau_{H4}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(a + s_4))\vec{k} \end{array} \right\}_{H4} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -Fs_4\vec{k} \end{array} \right\}_{H4}. \quad (6.80)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = -\vec{j}$ ,  $\vec{y} = \vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_4 = F_1 + F$ ,  $Mfz_4 = C - F_1(a + s_4) + Fs_4$ .

Soit  $H_5$  tel que  $C\vec{H}_5 = s_5\vec{i}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H5}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(2a))\vec{k} \end{array} \right\}_{H5} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -Fa\vec{k} \end{array} \right\}_{H5}. \quad (6.81)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{i}$ ,  $\vec{y} = \vec{j}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $N_5 = F_1 + F$ ,  $Mfz_5 = C - 2F_1a - Fa$ .

Soit  $H_6$  tel que  $D\vec{H}_6 = s_6\vec{j}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H6}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(2a - s_6))\vec{k} \end{array} \right\}_{H6} + \left\{ \begin{array}{c} F\vec{i} \\ -F(a - s_6)\vec{k} \end{array} \right\}_{H6}. \quad (6.82)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{j}$ ,  $\vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_6 = -F_1 - F$ ,  $Mfz_6 = C - F_1(2a - s_6) - F(a - s_6)$ .

Soit  $H_7$  tel que  $E\vec{H}_7 = s_7\vec{j}$ . Le torseur des efforts intérieurs est calculé à partir de seg+,

$$\{\tau_{H6}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ C\vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} F_1\vec{i} \\ (C - F_1(a - s_7))\vec{k} \end{array} \right\}_{H7}. \quad (6.83)$$

La base locale étant prise en compte avec  $\vec{x} = \vec{j}$ ,  $\vec{y} = -\vec{i}$  et  $\vec{z} = \vec{k}$ , les composantes sont donc  $T_7 = -F_1$ ,  $Mfz_7 = C - F_1(a - s_7)$ .

Il est maintenant possible de calculer l'énergie de déformation et plus précisément la dérivée de celle-ci par rapport aux deux inconnues hyperstatiques qui doivent être nulles. Ce calcul se fera sur wxmaxima.

```
(% restart; n1:-f1;mfz1:c; n2:-f1;mfz2:c; t3:f1;mfz3(s3):=c-f1*s3; t4:f1+f;mfz4(s4):=c-f1*(a+s4);
i63 n5:f1+f;mfz5:c-f1*(2*a)-f*a; t6:-f1-f;mfz6(s6):=c-f1*(2*a-s6)-f*(a-s6); t7:-f1;mfz7(s7):=c-f1*(a-s7);
```

```
restart (o49)
```

```
-f1 (n1)
```

```
c (mfz1)
```



$$-f1 \tag{n2}$$

$$c \tag{mfz2}$$

$$f1 \tag{t3}$$

$$\text{mfz3}(s3) := c - f1 s3 \tag{\% o55}$$

$$f1 + f \tag{t4}$$

$$\text{mfz4}(s4) := c - f1 (a + s4) \tag{\% o57}$$

$$f1 + f \tag{n5}$$

$$-\frac{2f1}{5} - \frac{f}{5} + c \tag{mfz5}$$

$$-f1 - f \tag{t6}$$

$$\text{mfz6}(s6) := c - f1 (2a - s6) + (-f) (a - s6) \tag{\% o61}$$

$$-f1 \tag{t7}$$

$$\text{mfz7}(s7) := c - f1 (a - s7) \tag{\% o63}$$

**(% i69)** E:2.1e11;nu:0.28;a:1/5;d:0.01; S:%pi\*d^2/4;Ihz:%pi\*d^4/64;

$$2.110^{11} \tag{E}$$

$$0.28 \tag{nu}$$

$$\frac{1}{5} \tag{a}$$

$$0.01 \tag{d}$$

$$2.510^{-5}\pi \tag{S}$$

$$1.562510^{-10}\pi \tag{Ihz}$$

```
(% wint1:1/2*integrate (n1^2/(E*S)+mfz1^2/(E*Ihz), s1,0,2*a); wint2:1/2*integrate
i88) (n2^2/(E*S)+mfz2^2/(E*Ihz), s2,0,2*a); wint3:1/2*integrate (mfz3(s3)^2/(E*Ihz),
s3,0,a); wint4:1/2*integrate (mfz4(s4)^2/(E*Ihz), s4,0,a); wint5:1/2*integrate
(n5^2/(E*S)+mfz5^2/(E*Ihz), s5,0,4*a); wint6:1/2*integrate (mfz6(s6)^2/(E*Ihz), s6,0,a);
wint7:1/2*integrate (mfz7(s7)^2/(E*Ihz), s7,0,a);
```

$$\frac{\frac{1.90476190476190410^{-7} f1^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047c^2}{\pi}}{5} \quad (\text{wint1})$$

$$\frac{1.90476190476190410^{-7} f1^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047c^2}{\pi} \quad (\text{wint2})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (f1^2 - 15c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint3})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (7f1^2 - 45c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint4})$$

$$2 \left( \frac{1.90476190476190410^{-7} (f1+f)^2}{\pi} + \frac{0.03047619047619047 \left(-\frac{2f1}{5} - \frac{f}{5} + c\right)^2}{\pi} \right) \quad (\text{wint5})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (7f1^2 + (5f - 45c) f1 + f^2 - 15cf + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint6})$$

$$\frac{4.06349206349206310^{-5} (f1^2 - 15c f1 + 75c^2)}{\pi} \quad (\text{wint7})$$

```
(% wint(f1,c):=wint1+wint2+wint3+wint4+wint5+wint6+wint7; wintf(f1,c):=float(expand(wint(f1,c)));
i105) eq1:diff(wintf(f1,c),f1)=0; eq2:diff(wintf(f1,c),c)=0;
```

```
wint (f1, c) := wint1 + wint2 + wint3 + wint4 + wint5 + wint6 + wint7 (% o102)
```

```
wintf (f1, c) := ≠ {Lispfunction} (≠ {Lispfunction} (wint (f1, c))) (% o103)
```

$$0.001655712619913004f1 + 6.85576843370223710^{-4} f - 0.004656418906460024c = 0 \quad (\text{eq1})$$

$$-0.004656418906460024f1 - 0.001746157089922509f + 0.02328209453230011c = 0 \quad (\text{eq2})$$

```
(% wint(f1,c):=wint1+wint2+wint3+wint4+wint5+wint6+wint7;
i112)
```

```
wint (f1, c) := wint1 + wint2 + wint3 + wint4 + wint5 + wint6 + wint7 (% o112)
```

```
(% float(solve([eq1,eq2],[f1,c]));
i113)
```

```
rat: replaced -0.004656418906460024 by -1734367/372467992 = -0.004656418906460021rat: replaced 6.8557684337
```

$$[[f1 = -0.4642904968084612f, c = -0.01785809936169213f]] \quad (\% \text{ o113})$$

Nous venons d'obtenir les valeurs des inconnues hyperstatiques intérieures en fonction du chargement :

$$F_1 = -0.46F, \quad (6.84)$$

dont le coefficient est adimensionnel, et

$$C = -0.018F, \quad (6.85)$$

dont le coefficient est en [m].



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 839. Si vous avez des difficultés, je vous invite à vous appuyer sur le "coup de pouce" qui décrit la démarche théorique à suivre, mais aussi à contacter le référent du brevet.

**brevet 839 : Détermination d'une inconnue hyperstatique intérieure.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours techno-mécanique ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe *Résolution de systèmes hyperstatiques - intérieurement* et de regarder les vidéos afférentes.

Soit les points A, B, et D dont les coordonnées dans un repère orthonormé direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont respectivement  $(a, 0, 0)$ ,  $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$  et  $(0, a, 0)$ , avec  $l = 0.6$  [m]. Une poutre en aluminium est faite par un arc de cercle de centre l'origine du repère et de rayon  $a$ , qui passe donc par les points A, B et D. La section droite est carrée de côté  $b = 0.01$  [m]. Le point A est en appui simple, le point D en appuis sur rouleau de normale  $\vec{i}$ , le chargement est une force  $\vec{F} = 57$  [N]  $\vec{i}$  au point B. Un autre segment de poutre droite en aluminium de section circulaire de rayon  $r = 0.002$  [m] relie le point A au point B.

Quelle est la valeur de l'effort normal dans la poutre droite AB ?

#### 6.4.4 Systèmes articulés

Si la barre est droite, articulée et non chargée sur sa longueur alors,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{i} \\ \text{\textcircled{0}} \end{array} \right\}_H, \quad (6.86)$$

avec  $\vec{i}$  direction de la barre

**Treillis plan** Un treillis est un assemblage de poutres droites que l'on peut considérées articulées entre elles ou non. Dans le cas où elles sont considérées articulées entre elles et que les chargements sont appliqués sur les noeuds du treillis, alors, le paragraphe ci-dessus implique qu'elles ne subissent que des efforts normaux. Dans ce cas, la résolution peut être faite progressivement en faisant l'équilibre de chaque noeud, à partir d'un noeud où seuls deux efforts normaux sont inconnus. Une méthode de résolution graphique (Crémona et funiculaire) existe, mais n'est pas vu dans ce cours.

## 6.5 Non linéarités géométriques (grands déplacements)

Le cours a été mené dans l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations et petits déplacements par rapport aux dimensions de la structure). Lorsque l'hypothèse des petits déplacements est caduque, il faut réécrire le tenseur des efforts intérieurs dans la configuration déformée et non la configuration initiale. Une méthode itérative doit être mise en place.

Ceci ne sera pas fait analytiquement dans ce cours. Vous le ferez numériquement dans le cours de modélisation et expérimentalement lors du travail pratique sur le flambement.

## Chapter 7

# Feedback

224	99	155	211	212	228	234	235		309	
							31		313	
16	15	14	13	90	39	38	37		321	
91									324	
92									325	
840	841	78	2	5				312	308	326
				18				316		
50	95	42		1				317	306	315
89		41		803						329
51		93	176		6	333	332	331	330	
52					40					
53	96	55	56		94	809	810	76	49	
			75							54
97	74	56	58					822	821	
57										
91	58	97bis	59	77	839					

Figure 7.1: Parcours des brevets : chaque couleur cible une capacité. Barrez les brevets que vous avez fait.

383	RVB3P BPxMMW g	317	060	233	311	062			241
						073			250
	503	288	306	540	085	273			251
	272								2
	290		267	252	221	238	91	222	19
	288		237						
	256		218		254	258	18	17	320
270		271	220		316				244
	208				3		56	74	58
	1	54	259	253	15		535		
							538	539	303
329	304	265	541	291	10				534
					536	7		7	5
						5		536	
						534	210		209
									8
				546	12	309	9	545	307

Figure 7.2: Parcours des vidéos : chaque couleur cible une capacité. Si une vidéo ne vous paraît pas pertinente, barrez-là. Si elle vous paraît pertinente entourez là.

Merci de flasher le QR code pour donner votre feedback sur cette séance :



Pour faciliter vos réponses d'une séance à l'autre, veuillez noter ci-dessous :

- votre numéro d'anonymat :
- votre méthode CRAIES ou CRABE :

et incrémenter pour chaque séance

- le nombre de fiches dans votre boîte de Leitner :
- le nombre de capacités obtenues :
- le nombre de brevet faits :
- le nombre de vidéos regardées :

Si vous voulez savoir pourquoi l'enseignant vous demande ce feedback, je vous invite à regarder la vidéo *Stratégies gagnantes pour une étudiante en méthode CRAIES ? Une réponse grâce à l'analyse en composantes principales.* qui est disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=546>.