



**HAL**  
open science

## **ENSIM 4A Gestion des aléas : chaines de cotes et répartition des intervalles ; utilisation des incertitudes en tp**

Jean-Michel Génevaux, Catherine Potel

### ► **To cite this version:**

Jean-Michel Génevaux, Catherine Potel. ENSIM 4A Gestion des aléas : chaines de cotes et répartition des intervalles ; utilisation des incertitudes en tp. École d'ingénieur. France. 2013. <cel-00611698v13>

**HAL Id: cel-00611698**

**<https://cel.hal.science/cel-00611698v13>**

Submitted on 12 Jan 2026

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ETALAB - Open licence

ENSIM 4A

Gestion des aléas  
chaînes de cotes et répartition des intervalles  
utilisation des incertitudes en tp

<http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=4099>

numéro d'anonymat :

Jean-Michel Génevaux



*Chaque fois que je me plante, je pousse.* [9]

January 12, 2026

# Contents

<b>1</b>	<b>Les capacités de gestion des aléas et la note.</b>	<b>4</b>
1.1	Les capacités visées . . . . .	4
1.2	Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences . . .	4
<b>2</b>	<b>Méthode de travail</b>	<b>6</b>
2.1	Modalités de formation . . . . .	6
2.2	Conseils aux référentes . . . . .	9
2.3	Modalités d'évaluation des capacités. . . . .	10
2.3.1	Évaluation par examen individuel . . . . .	10
2.3.2	Évaluation par ceinture individuelle . . . . .	10
2.4	Absence . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Prérequis de mathématiques : capacité 011 : Utiliser à bon escient multiplication et division da</b>	
3.1	Pourquoi ce chapitre . . . . .	16
3.2	Brevets d'acquisition de connaissance . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Prérequis de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs</b>	
4.1	Objectifs . . . . .	20
4.2	Homogénéité, adimensionalisation . . . . .	20
4.3	Adimensionalisation . . . . .	21
4.4	Unités logarithmiques relatives ou absolues . . . . .	21
4.5	Ordres de grandeurs . . . . .	22
4.6	Chiffres significatifs . . . . .	22
4.7	Brevets d'acquisition de connaissance . . . . .	22
4.8	Brevets de vérification de connaissance (facultatifs) . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Gestion des aléas</b>	<b>26</b>
5.1	A propos de l'évaluation des incertitudes relatives à un résultat expérimental, à un modèle, à leur compa	
5.1.1	Quelques rappels de grandeurs . . . . .	26
5.1.2	Plan de formation . . . . .	31
5.1.3	Démarche suivie à titre d'exemple . . . . .	33
5.1.4	Classifions un peu nos approches . . . . .	38
5.1.5	Détection de points aberrants lors de la détermination d'une valeur moyenne	38
5.1.6	Incertitudes de type A . . . . .	41
5.1.7	Comparaison de deux échantillons . . . . .	44
5.1.8	Incertitudes de type B . . . . .	45
5.1.9	Détermination de l'incertitude globale . . . . .	46
5.1.10	Détection de points aberrants avant la détermination d'une régression linéaire	49
5.1.11	Evaluation statistique de l'incertitude sur une pente $p$ . . . . .	52
5.1.12	Evaluation manuelle de l'incertitude sur une pente $p$ . . . . .	55
5.1.13	Evaluation statistique d'une limite de linéarité et de la pente avant cette limite	57
5.1.14	Calcul de l'incertitude sur une grandeur composée, à partir de celles des paramètres expérimenta	
5.1.15	Méthode de grand-papa : à ne plus utiliser, car fausse. . . . .	65
5.1.16	Comparaison entre une théorie et une expérience . . . . .	66

5.1.17	Un exemple : Ouf ! . . . . .	67
5.1.18	Quelques utilitaires . . . . .	72
5.1.19	Termes métrologiques généraux . . . . .	74
5.2	Prise en compte des aléas en fabrication . . . . .	81
5.2.1	De l'idée d'une pièce à sa fabrication en série . . . . .	81
5.2.2	Les dispersions d'une cote à la fabrication . . . . .	86
5.2.3	La cotation de fabrication . . . . .	91

**6 Feedback** **101**

Si vous êtes l'une des 135 personnes qui téléchargent mensuellement ce polycopié sur archives-ouvertes.fr et que vous passez au Mans, venez m'offrir un café (sans sucre)... et on en profitera pour parler du contenu afin de l'améliorer.

# Chapter 1

## Les capacités de gestion des aléas et la note.

### 1.1 Les capacités visées

L'enchaînement des capacités est visible sur la figure 1.1.

Elles sont composées de deux capacités prérequisés,

1. 011, cyan de terminale, 0 pts : Utiliser à bon escient multiplication et division dans un problème simple.
2. 511, blanche de physique pour l'ingénieur, 0 pts : savoir déterminer si une équation est homogène ou la dimension d'une variable à partir de l'homogénéité, et de 3 capacités spécifiques à cet enseignement,
  1. 821, jaune, 20/3 points : savoir déterminer si les valeurs moyennes de deux populations ou d'un modèle et d'une expérience sont significativement différentes.
  2. 822, orange, 20/3 points : savoir déterminer la limite de linéarité entre deux paramètres d'une population et les paramètres de la régression linéaire.
  3. 823, verte, 20/3 points : savoir déterminer l'incertitude sur la valeur moyenne d'un paramètre d'une population et sur une grandeur composée.

Les capacités blanche et cyan ne rapportent pas de points. Par contre, il est obligatoire de les détenir pour accéder aux capacités de ce cours (jaune, orange et verte).

### 1.2 Des capacités à la note, aux savoir-faire, compétences et bloc de compétences

L'interfaçage avec les modalités de contrôle des connaissances nécessite, hélas, une note... (Relire l'invariant pédagogique 19 de Célestin Freinet [10]). **Une taux de réussite est associé à chaque capacité. En mode ceinture, un taux de 75% est nécessaire pour accéder aux capacités filles.**

**Pour la modalité ceinture, la note est construite avec le cumul de vos points obtenus aux ceintures, en tenant compte du coefficient  $ndp$  pour la ceinture refaite en mode surveillé (voir chapitre suivant),**

$$n_{mad} = \left( \sum_{i=jaune,orange,verte} t_i \right) ndp + t_{rouge}. \quad (1.1)$$

Nous transmettrons les capacités que chacune et chacun d'entre vous a validées, aux collègues des enseignements à venir qui ont comme prérequis des capacités de ce module.

Les capacités de cette matière sont concaténées avec les capacités des autres matières de cette UE afin de d'abonder les compétences, puis les blocs de compétences... mais c'est une autre histoire.

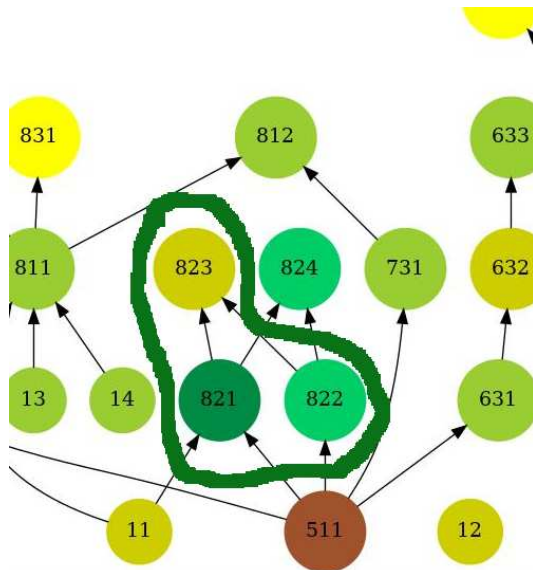


Figure 1.1: Extrait de l'arbre des capacités de l'Ensim au 18 décembre 2024 (plus d'informations sur <https://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=2619>). Les capacités de cet enseignement sont les capacités 821 822 et 823. La capacités prérequis nécessaires pour suivre cet enseignement sont les 011 et 511.

## Chapter 2

# Méthode de travail

Avant toute chose, visionnez

<https://www.youtube.com/watch?v=RVB3PBPxMWg>,

pour mettre en place une méthode d'apprentissage qui vous fera rentabiliser au mieux 1 heure de travail personnel... ce qui vous laissera du temps pour aller au cinéma, lire un livre, organiser une fête, etc.

Après visionnage, il est temps de construire votre boîte de Leitner et vos cartes mentales. Personnellement, j'utilise "anki" pour gérer ma boîte de Leitner et je construis mes cartes mentales avec "freeplane".

<https://apps.ankiweb.net/>,  
<https://docs.freeplane.org/>,

Nous vous souhaitons une bonne découverte, une intéressante confrontation des modèles que nous développerons lors de cette formation à la réalité des essais effectués en travaux pratiques, et bien sûr... une bonne coopération entre vous, sauf lors de la validation de capacités.

## 2.1 Modalités de formation

La formation se fera en mode CRAIES (Coopérons à notre Rythme d'Apprentissage Individualisé, Efficace et Sympathique) : travail sur polycopié de cours, visionnage de vidéos, questionnements, analyse des réponses de l'enseignant, travail sur exercices ciblés (brevets) en présence d'autres étudiantes travaillant sur le même exercice, positionnement de sa progression personnelle en terme de brevet par rapport à l'ensemble de la promotion. Elle mixe une école mutuelle et un apprentissage à son rythme.

Pour les AJAC, à partir de septembre 2023, la formation se fait obligatoirement par groupe d'au maximum 3 étudiantes sur un problème à résoudre pour chaque capacité.

Vous trouverez

- le polycopié de cours, dans lequel sont inclus des liens vers des vidéos à visionner et des suggestions d'exercices à faire, appelé brevets, <https://cel.hal.science/hal-04400695>,
- d'un graphe des étapes de formation (brevets) (Fig. ??),
- le polycopié de brevets, <https://cel.hal.science/cel-00611694>.

*Il y a plusieurs vidéos qui ne nous concernent pas du tout et des pages auxquelles vous vous référez qui ne sont pas les mêmes que dans notre poly... La réponse est dans la vidéo 317 disponible sur*

224						239	238
99						245	
155	211	212	228	234		241	
				235		243	
30	43	27	85		245	244	
48				86			
44	45	46		8			
			29	7			
		47					73
		10	68	69	70	71	72

Figure 2.1: Parcours de formation en méthode CRAIES : les numéros représentent les brevets, le fond de couleur la capacité travaillée.

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=317>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Doit-on connaître toutes les formules du poly ?* La réponse est dans la vidéo 060 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=060>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*A quelle vitesse doit-on avancer dans le polycopié, dans les exercices... ?* La réponse est dans la vidéo 233 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=233>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment lier l'école mutuelle et l'apprentissage à son rythme* La réponse est dans la vidéo 311 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=311>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## Les phases de travail

Les séquences d'enseignement sont divisées en plusieurs parties :

1. Avant la séance, lecture de quelques pages du polycopié et visionnage des vidéos indiquées dans ces quelques pages. En tant que lectrice, cochez les paragraphes où vous avez une question et écrivez votre question dans la marge.
2. Une phase de questions/réponses est faite : l'enseignant demande à chaque étudiante si elle a une ou plusieurs questions et s'assure que ses réponses sont suffisamment explicites. Pendant cette phase, une étudiante prend le rôle de secrétaire pour noter la question et la réponse. A la fin de la phase de questions/réponses, elle fait relire sa prise de note par deux étudiantes qui modifient/complètent. L'enseignant intègre cette prise de note au sein du polycopié pour l'année suivante.
3. Parfois une activité de la forme 1-4-tous est animée par l'enseignant, soit à propos d'une structure réelle, soit à propos d'une méthodologie de résolution. Il vous est posé une question à laquelle vous répondrez en 3 temps : 3 minutes de réflexion personnelle, 3 minutes de confrontation d'idées par groupe de 4, puis mise en commun collective sous le format : "Nous pensons que ... et nos raisons sont les suivantes ...".
4. La salle est ensuite mise en configuration avec une zone de travail personnel et une zone de consultation des corrigés ou résultats. Afin que chacun puisse se concentrer sur son travail, si vous échangez avec vos voisines, merci de le faire en chuchotant. Une phase d'exercices (brevets) est alors faite, à votre rythme. Pour plus d'efficacité asseyez-vous avec les étudiantes qui font le même brevet. Une banque de brevets regroupe l'ensemble des exercices. Ils ont été écrits suite aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevets concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM et certaines formations à l'UFR. Des leprelo de différentes couleurs sont à votre disposition avec, sur chaque page, soit la correction du brevet, soit la réponse, et le prénom de la référente. Les brevets sont en effet de deux natures :
  - avec correction accessible : la correction de l'enseignant est consultable dans la salle, dans une zone dédiée où smartphone et stylo sont interdits, afin que vous puissiez comparer à votre tentative de résolution, comprendre ce qu'il vous reste à faire, et retourner à votre place pour le faire.
  - avec référente : l'enseignant sollicite les étudiantes qui ont réussi un brevet, pour que l'une d'elle accepte d'être référente. Une étudiante ne peut être référente que d'un seul brevet au cours de l'année scolaire. Pas d'inquiétude, il y aura un brevet pour chacune ;).
5. Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées, pour compléter la fiche de feedback à propos de cette séance sur

<https://sondage.univ-lemans.fr/limesurvey/index.php/175934?lang=fr>

ou en flashant le qr code en fin de polycopié avec votre smartphone. Vous serez autorisée à sortir de la salle si

- vous avez posé votre brique LEGO sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau vous permet de savoir instantanément quelle est votre progression par rapport à celle de la promotion. Il permet aussi lors de la séance suivante à l'enseignant, de vous répartir dans la salle en fonction du brevet que vous travaillez.
- vous confirmez à l'enseignant que vous avez complété le quiz de feedback.

*Est-ce que vous allez faire cours ?* La réponse est dans la vidéo 062 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=062>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Je n'ai pas fini de lire le polycopié. Est-ce grave ?* La réponse est dans la vidéo 073 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=073>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Existe-t-il un polycopié pour les brevets ?* La réponse est dans la vidéo 273 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=273>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*J'ai un problème de signe au brevet 179, est-ce normal ?* La réponse est dans la vidéo 553 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=553>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Les capacités peuvent-elles être passées dans n'importe quel ordre ?* La réponse est dans la vidéo 560 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=560>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Si je n'ai pas validé la compétence blanche, mais ai réussi chez moi les exercices correspondant à cette capacité, ai-je la possibilité de me mettre avec un groupe composé de membres rendu au stade des capacités jaunes ou dois-je rester avec mon équipe de capacités blanches ?* La réponse est dans la vidéo 561 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=561>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## 2.2 Conseils aux référentes

Si vous êtes "référente", merci de veillez à respecter ces conseils. Si vous êtes "apprenante", merci de signaler à la référente qu'elle ne respecte pas ces conseils : vous l'aidez à prendre la bonne posture afin que vous appreniez le plus efficacement possible.

Quelques conseils à la référente :

- Commence par demander "Tu en es où ? Qu'est ce que tu as déjà fait ? A quoi ça te fait penser ? Raconte ce que tu as compris du problème.". Essaie de parler moins de 10% du temps. Cela permet de l'aider juste là où elle en a besoin.
- Fais écrire l'étudiante plutôt que de le faire à sa place.
- Si tu dois faire l'exercice car l'étudiante n'écrit pas, essaie de la faire travailler sur un exercice jumeau : changer les fonctions, les conditions aux limites, les valeurs numériques... Par exemple en math, si l'étudiante doit dériver  $f(x) = 2x \cos(x)$ , lui faire dériver  $g(x) = 5x \sin(x)$ .
- Quand tu as expliqué quelque chose, demande à l'étudiante de réexpliquer ce que tu viens de faire.
- Se taire quand elle ont redémarré pour la laisser faire.

*Qu'est-ce qu'un étudiant référent d'un brevet ?* La réponse est dans la vidéo 085 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=085>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

## 2.3 Modalités d'évaluation des capacités.

Deux modalités d'évaluations des capacités sont proposées au choix de chaque étudiante :

- évaluation par un examen le jour J,
- évaluation par ceintures : demande de sujet de ceintures, rédaction individuelle de réponse en travail à la maison, rendu de copie, test d'antidopage par jet de dé, accès aux ceintures chaînées suivantes en cas de réussite suffisante.

Le choix de votre méthode d'évaluation se fait au cours de la première séance. Une fois le choix fait, vous ne pouvez plus le modifier.

L'évaluation est faite par la validation de capacités. Le chaînage des capacités testées est indiqué figure ???. Un taux de réussite  $t_i$  est associé à chaque capacité  $i$ . Ce taux de réussite est le produit, et non la somme, de 5 taux de réussites décrits ci-dessous.

### 2.3.1 Évaluation par examen individuel

Si vous optez pour une évaluation par un examen classique de 1h30 officiellement (mais vous pourrez rester plus longtemps dans la salle), des sujets d'examens des années précédentes sont à votre disposition sur demande à l'enseignant.

L'examen comportera 4 questions, chacune testant une capacité :

- si tu ne détiens aucun des trois prérequis, les capacités testées sont blanche, jaune, violette, orange (tu ne peux donc valider que 5 points),
- si tu ne détiens pas deux des prérequis, les capacités testées sont les prérequis non détenus, orange, verte (tu ne peux donc valider que 10 points).
- si tu ne détiens pas un des prérequis, les capacités testées sont les prérequis non détenus, orange, bleu et verte (tu ne peux donc valider que 15 points).
- si tu détiens les trois prérequis, les capacités testées sont orange, bleue, verte, marron (tu peux valider 20 points),

*Comment se passe l'examen final ? Quelles sont les différences entre la procédure des années précédentes et celle de 2024 ?* La réponse est dans la vidéo 558 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=558>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

### 2.3.2 Évaluation par ceinture individuelle

Une tentative de ceintures est associée à un taux de réussite  $t_i$  est calculé à partir du produit de 5 valeurs

$$t_i = t_m t_r t_h t_u t_e \quad (2.1)$$

telles que présentées dans le tableau figure 2.2

En fonction de  $t_i$  l'accès aux capacités chaînées suivantes est ou non possible.

- Si  $t_i \geq 0.75$ , la capacité est acquise, vous ne pouvez pas la refaire pour améliorer votre score à cette capacité, vous accédez aux capacités chaînées suivantes.

<b>Modèle : \$t_m\$</b>	<b>2,5</b>
la méthode est parfaite	1
il y a une imprécision ou erreur dans la méthode	0,8
il y des erreurs dans la méthode	0,5
la méthode n'est absolument pas maîtrisée	0,2
<b>résultat : \$t_r\$</b>	<b>3,3</b>
les résultats finaux sont corrects	1
l'un des résultats finaux présente un écart inférieur à 10\% par rapport à la valeur correcte	0,8
l'un des résultats présente un écart supérieur à 10\% par rapport à la valeur correcte et cette erreur est due à une erreur précédente	0,7
Le résultat final n'est pas quantifié	0,6
l'un des résultats présente un écart supérieur à 10\% par rapport à la valeur correcte	0,2
Du calme sur les décimales !	
<b>homogénéité : \$t_h\$</b>	<b>1,5</b>
je n'ai détecté aucune erreur d'homogénéité	1
J'ai détecté au moins une erreur d'homogénéité	0,5
<b>unités : \$t_u\$</b>	<b>2,3</b>
tous les résultats numériques finaux et intermédiaires sont suivis par des unités	1
tous les résultats numériques finaux sont suivis par des unités mais pas des résultats intermédiaires	0,8
un des résultats final n'est pas suivi par des unités	0,5
plusieurs des résultats numériques finaux et intermédiaires ne sont pas suivi par des unités	0
<b>écriture : \$t_e\$</b>	<b>1,5</b>
(tous les torseurs précisent le point et les axes) et (tous les vecteurs ou pseudo-vecteurs sont notés avec des flèches) et (tous les tenseurs sont notés avec des doubles barres)	1
(soit un des torseurs ne précise pas le point et les axes, soit, un des vecteurs ou pseudo-vecteurs est noté sans flèches , soit , un tenseurs n'est pas notés avec des doubles barres	0,5

Figure 2.2: Grille critériée des cinq critères d'évaluation des capacités.

- Si  $0.75 > t_i \geq 0.50$ , la capacité n'est pas acquise, vous pouvez tenter pendant une séance d'enseignement un "bon-sang-mais-c'est-bien-sûr" pour améliorer  $t_i$ . Vous expliquez oralement en moins de 3 minutes à l'évaluateur ou l'évaluatrice, "votre erreur", "ce qu'il fallait faire" et "les conséquences dans la suite de la copie", s'il ou elle est convaincu-e que vous avez bien compris votre erreur, il ou elle pourra alors augmenter  $t_i$  au delà de 0.749. En cas d'échec, vous devez recomposer sur la tentative suivante de cette capacité.
- Si  $0.5 > t_i$ , la capacité n'est pas acquise, vous devez faire la tentative suivante de cette capacité.

Vous pouvez tenter d'obtenir une capacité lorsque vous vous sentez prête à le faire. Vous ne pouvez tenter qu'une capacité à la fois. Vous pouvez tenter une capacité au maximum 3 fois. Si au bout de 3 tentatives, vous ne la détenez pas, vous pouvez tenter la ou les capacités  $n + 1$  suivantes. L'obtention d'une capacité de niveau  $n + 1$  vous attribue alors la capacité de niveaux  $n + 1$  et la capacité  $n$ , mais cette dernière avec un  $t_i$  de 0.75.

Le passage d'une ceinture en autonomie et le jet de dé antidopage, se fait à votre rythme, jusqu'au 4 avril 2025 12:00.

- Vous adressez à [jean-michel.genevaux@univ-lemans.fr](mailto:jean-michel.genevaux@univ-lemans.fr) un courriel dont le titre est "sdpd,"sdp,couleur, numéro de tentative".
- L'enseignant vous envoie le sujet et la feuille de composition.
- Sur cette copie, à côté de la déclaration suivante : *"Je m'engage sur l'honneur à n'évoquer avec personne le contenu du sujet de passage de cette ceinture. Cependant, dans le cas où je ne réussis pas à l'obtenir, j'ai compris pouvoir discuter de mon travail avec les étudiantes ayant acquis cette ceinture. Si l'enseignant à la preuve que je n'ai pas respecté mon engagement (j'ai admis le non-respect, je suis incapable de refaire la ceinture en mode surveillé...), un rapport de fraude est fait par l'enseignant et transmis au directeur de l'école qui transmet à la commission de discipline de l'université. L'enseignant y demandera que je ne puisse plus passer de ceintures en autonomie."*, vous écrivez "lu et approuvé" et vous signez. Cela permet à vos camarades de faire une mesure "libre et non faussée" de leurs savoirs scientifiques et non de leur "capacité de mémorisation"... ou de (risquée) recopie.
- Vous composez de façon individuelle en dehors des séances d'enseignement.
- Vous photographiez le sujet et votre réponse, construisez un seul document pdf comportant les images dans cet ordre. Vous nommez votre pdf "couleur numéro-de-tentative prénom nom.pdf", et le déposez sur la page umtice de rendu de ceintures :

<https://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=10221>

Veillez à le déposer dans la bonne rubrique cours-couleur : cela classe les ceintures et permet à l'enseignant de corriger en rafale les mêmes ceintures et donc de vous donner un feedback plus rapide. Une copie déposée dans une mauvaise rubrique ne sera pas corrigée. Une copie qui ne respecte pas le nom "couleur numéro-de-tentative prénom nom.pdf" ne sera pas corrigée.

- L'enseignant ou l'enseignante, via la plateforme moodle vous donne accès à votre copie sur laquelle il ou elle a entouré les erreurs détectées et vous transmet les 5 taux ( $t_m, t_r, t_h, t_u, t_e$ ).
- Pour que les points obtenus soient effectifs, vous devez faire le test d'antidopage à la séance suivante. Vous lancez un dé à 6 faces, si vous faites un chiffre différent de ceux indiqués à la couleur de capacité, votre copie est considérée comme faite par vos soins. Si vous faites l'un des chiffres associés à cette capacité, l'enseignant vous redonne le sujet et vous refaites une copie en mode surveillé. Tant que l'antidopage n'a pas été fait, les points ne sont pas associés à votre réussite de capacité.

*Des ceinture ? Des quoi ?* La réponse est dans la vidéo 540 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=540>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Pourriez-vous nous renseigner sur l'utilisation de WXMaxima ? Et nous préciser si on peut l'utiliser dans le cadre des ceintures.* La réponse est dans la vidéo 306 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=306>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?* La réponse est dans la vidéo 288 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=288>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Après la dernière séance, où pourra-t-on jeter les dés ?* La réponse est dans la vidéo 503 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=503>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Y a-t-il une nouvelle date limite de rendu de ceinture ?* La réponse est dans la vidéo 548 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=548>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Est-ce que la difficulté de la ceinture blanche est la même que les ceintures individuelles si on choisit la méthode crabe ?* La réponse est dans la vidéo 549 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=549>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt.

Vos validations/échecs aux capacités vous seront transmises par courriel via la plateforme moodle. La validation déblocuera le sujet des capacités chaînées suivantes, la non-validation, le sujet de la tentative suivante.

*Quelle est la cause de la mention "bof", pour la capacité "homogénéité des équations" ?* La réponse est dans la vidéo 272 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=272>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Pour la formation à l'Ensim, si on échoue 3 fois à la compétence orange, et que l'on valide la compétence bleue, cela valide-t-il la compétence orange et donc on récupère les points de celle-ci ?* La réponse est dans la vidéo 290 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=290>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

*Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?* La réponse est dans la vidéo 288 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=288>.

Regarde-la, puis évalue son intérêt en entourant son numéro à la dernière page du poly si elle est intéressante, ou en la barrant si elle n'est pas intéressante.

Être détenteur d'une capacité, implique qu'en tant qu'expert de celle-ci, tout comme l'enseignant, vous aidiez vos camarades à l'obtenir. Votre dialogue doit porter sur un exemple similaire proposé par le demandeur d'aide. Il ne doit pas porter sur l'exemple qu'il a à résoudre. Vous l'orientez sur les brevets afférents, en répondant à leur questions sur ces brevets, en insistant sur des points qui vous ont éventuellement fait rater cette capacité dans des tentatives précédentes. Vous ne dévoilez pas le contenu du sujet de la capacité ni les réponses.

"C'est arrivé près de chez vous" : L'exemple d'étudiants qui "travaillent à 3 pour résoudre

un sujet de capacité, recopie chacun sur une feuille la réponse qu'ils ont élaborée collectivement, rendent le même jour à la même heure leur feuilles en espérant ne pas faire 6", ne respectent pas les règles. En cas de détection par l'enseignant, le passage par ceintures est arrêté pour eux et dans le reste de leur scolarité, ils feront des examens dans les modules à venir.

## 2.4 Absence

Le conseil d'administration a voté l'obligation d'être présent aux séances d'enseignement.

Il me semble plus pertinent que l'obtention des capacités de base soit obligatoire pour justifier les 14 000 euros par an que la nation verse pour vous former grâce aux impôts récoltés en France. Via la TVA, vous-même, payez des impôts.

Ne pas venir à une séance de 1h1/4, représente donc un gaspillage de 23 euros... sauf si vous travaillez à la maison et que vous atteignez les capacités de base.

Pour concrétiser ceci auprès des étudiantes non alternants, la méthode suivante est utilisée :

- en début de séance, une feuille d'émargement circule : le nombre de signatures doit correspondre au nombre de présents,
- l'enseignant compte le nombre d'absences de chaque étudiante,
- le jour du jury, les capacités acquises par chaque étudiante sont figées,
- pour une étudiante qui a été détectée absente et qui a les capacités de base (qui donnent une note supérieure à 10/20), elle a rempli son contrat... et je lui souhaite une agréable suite de formation.
- pour une étudiante qui a été détectée absente, mais qui n'a pas les capacités de base, elle est considérée comme n'ayant pas rempli son contrat. Pour rembourser les contribuables,... choisissons les contribuables étudiantes, je lui demande de verser 23 euros par absence à la cafétéria de l'Ensim ou de l'UFR , ce qui permettra que la cafétéria offre gratuitement, par absence remboursée, 57 cafés ou 19 café+viennoiserie à qui le demande (dont l'étudiante absente).

Je ne citerai que Bernard Friot : "C'est le salaire qui mérite travail.", France Culture, mardi 4 avril 2023, 7h40, <https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/les-matins>

*Je m'étonne que vous osiez demander de l'argent à un étudiant, par un chèque de 23 euros !*  
La réponse est dans la vidéo 256 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/videos/?tag=256>.  
Regarde-la, puis évalue son intérêt.

Formation à la capacité cyan de mathématiques.

## Chapter 3

# Prérequis de mathématiques : capacité 011 : Utiliser à bon escient multiplication et division dans un problème simple.

### 3.1 Pourquoi ce chapitre

Pour un problème simple, quelque soit la matière scientifique concernée, il est nécessaire de poser le problème, sans doute à l'aide d'un schéma, de définir les grandeurs nécessaires à la résolution du problème et d'élaborer le calcul qui est nécessaire pour répondre à la question posée.

Nous vous suggérons de faire les exercices suivants pour vérifier que vous en êtes capable, car cette capacité est un prérequis de plusieurs enseignements à l'ENSIM.

Certains enseignements vérifieront que vous avez validé cette capacité, ou vous proposeront de la valider.

### 3.2 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets de 238 à 245.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 238 : capacité 011 : Allongement d'une barre.**

**auteur : S Durand et JM Génevaux ; ressource : terminale .**

Soit une barre ABC constituée de 2 matériaux. La première partie AB de longueur 1.2 [m] est en acier et elle subit une déformation de +3% en longueur. La seconde BC est en aluminium, de longueur 0.8 [m], et elle subit une déformation de +5% en longueur.

Quel est l'allongement total de la barre suite à ces déformations ?

**brevet 239 : capacité 011 : cinématique et vitesse moyenne.**  
**auteur : Samuel Gougeon ; ressource : terminale .**

Une voiture rouge fait un trajet entre deux villes distantes de 134 [km]. La traversée des agglomérations à la vitesse moyenne de 43 [km/h] représente 32% de la distance. Le reste du trajet se fait sur routes départementales à la vitesse moyenne de 76 [km/h].

Quelle est la vitesse moyenne pendant l'ensemble du trajet ?

**brevet 240 : capacité 011 : Les professeur-e-s détectent les pipeaux mal accordés.**

**auteur : T Vicente ; ressource : terminale .**

Un élève prend soin d'accorder son pipeau à l'aide d'une note à 440 Hz et répète une dernière fois sa partition avant son audition. Lorsque que l'élève monte sur l'estrade et commence à jouer du pipeau; sa professeure lui fait alors remarquer qu'il n'est plus accordé. La même note du pipeau joue alors une fréquence de 447 Hz. On prendra comme approximation que la fréquence de la note jouée par le pipeau s'exprime de la manière suivante:  $f = \frac{20 \cdot \sqrt{T}}{\lambda}$  avec  $T$  la température en Kelvin.

Quelle est la variation relative de la température à l'intérieur du pipeau? (A exprimer en pourcentage, avec deux chiffres significatifs)

**brevet 241 : capacité 011 : Temps de calcul en fonction du nombre de degrés de liberté dans un modèle élément finis.**

**auteur : N Joly ; ressource : terminale .**

Pour obtenir la solution d'une modélisation en éléments finis, la dernière étape du calcul consiste à résoudre un système linéaire. Pour résoudre un système linéaire de dimension  $N$  ( $N$  = nombre d'inconnues du système linéaire = nombre de degrés de liberté [ddl] du modèle) le coût de calcul par une méthode directe (Gauss, LU, Cholesky,...) évolue comme  $N^3$ . Ce coût de calcul est représentatif du nombre d'opérations à effectuer et du temps calcul.

Si, pour  $N = 10\,000$  ddl, la solution est obtenue après 2 minutes de calcul, combien de temps faudra-t-il attendre pour réaliser un calcul de 20 000 ddl ? pour 100 000 ddl ?

**brevet 242 : capacité 011 : Un bon coup de pédale sur un vélo.**

**auteur : G Minko Mi Mvono; ressource : terminale .**

Soit un cycliste se déplaçant sur un terrain plat. Pour un tour de pédale effectué, sa roue arrière de diamètre 700 [mm] tourne 2.5 fois grâce au système de transmission : chaîne, plateau et pignon.

1 - Quelle est la distance parcourue pour un tour de pédale (un développement) sachant qu'elle dépend du diamètre de la roue ?

2 - Combien de tours de pédale le cycliste doit-il effectuer pour parcourir 650 [m] ?

**brevet 243 : capacité 011 : ...**  
**auteur : A Aklouche; ressource : terminale .**

...

Quel est ...

**brevet 244 : capacité 011 : Calcul d'aire**  
**auteur : J-M Génevaux; ressource : terminale .**

Un tube creux en aluminium de longueur 4 [m], de section circulaire, a un diamètre externe de 23 [mm]. L'épaisseur de tube est de 3 [mm]. Le long d'une génératrice, une rainure est usinée avec une profondeur et une largeur de 2 [mm]. Le tube usiné est moins lourd que le tube non usiné.

Quel est le pourcentage de perte de masse entre la configuration non usinée et usinée ?

**brevet 245 : capacité 011 : Calcul d'une probabilité**  
**auteur : J-M Génevaux; ressource : terminale .**

Dans l'enseignement de gestion des aléas, une étudiante qui vise une moyenne de 10/20 doit valider deux capacités. Comme elles sont faites par un travail à la maison, l'enseignant se doit de vérifier que l'étudiante est bien l'auteur du documents rendu. Pour ce faire, elle jette un dé et si le chiffre n'est pas parmi ceux associés à la capacité, elle n'a pas besoin de refaire sa copie en mode surveillé.

Pour la première capacité, jaune, les chiffres sont 5 et 6. Pour la seconde capacité, orange, les chiffres sont 4, 5 et 6.

Quel est la probabilité pour qu'une étudiante qui fait deux capacités, n'ai pas à recomposer une seule fois ?

**brevet 246 : capacité 011 : Echantillonnage.**  
**auteur : J-H Thomas; ressource : terminale .**

Lors d'une acquisition...

Quel est ...

Formation à la capacité blanche de physique pour l'ingénieur.

## Chapter 4

# Prérequis de physique pour l'ingénieur : homogénéité, unités, dimensions et chiffres significatifs

Le polycopié d'enseignement de *Physique pour l'ingénieur* de Samuel Gougeon est disponible via le lien :

[http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique\\_TC/1\\_Dimensions\\_unites\\_nombres.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~sgougeon/ens/physique_TC/1_Dimensions_unites_nombres.pdf)

Vous pouvez aussi vous former à l'aide des sections suivantes rédigées par JM Génévaux.

### 4.1 Objectifs

- Homogénéité d'une relation
- Équation aux dimensions
- Unités adimensionnelles.
- Chiffres significatifs  
Unités angulaires : radian = unité physique. minutes et secondes d'arc.
- Unités logarithmiques relatives ou absolues, dimensionnées ou adimensionnées : dB, dBm, dBm - dBm = dB, dB/km, pH, octave, magnitude et niveau (visuelle, sismique), etc ...
- Ordres de grandeurs, échelles : de taille ; de masse ; de temps ; de puissance acoustique ; de puissance lumineuse ; débit d'informations...
- Conversions des principales unités entre système métrique et système impérial

### 4.2 Homogénéité, adimensionalisation

Les grandeurs de part et d'autre d'une équation sont généralement de natures différentes. Par exemple, le principe fondamental de la dynamique en terme de résultante

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}_{G,S/R_0}, \quad (4.1)$$

exprime une relation entre un effort  $F$ , une masse  $m$  et l'accélération du centre de gravité d'un solide  $\Gamma$  (voir cours de "Mécanique Générale"). Cette écriture est intrinsèque : elle ne dépend pas du repère dans lequel les grandeurs sont exprimées (repère cartésien, cylindrique, sphérique, curviligne...). Vous vous devez de vérifier pour chaque loi, que l'équation est homogène : que

les dimensions sont les mêmes de part et d'autre d'un signe égalité. Dans l'exemple précédent, l'équation est homogène à une masse fois une longueur divisée par un temps au carré :

$$MLT^{-2}. \quad (4.2)$$

Les équations sont donc indépendantes de l'unité prise pour chaque grandeur (pour la longueur  $L$  : le mètre, le centimètre, le pouce...). Il suffit de choisir les mêmes unités de part et d'autre de l'équation. Lorsque vous sumez deux termes, ils doivent aussi être homogènes. Ajouter une carotte et un chou ne fera pas deux quelque chose, mais juste un début de pot-au-feu. Essayez d'additionner des km/h et des kg pour vous en convaincre. La norme internationale ISO 1000 (ICS 01 060) décrit les unités du Système International et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités. Le Système International compte sept unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela, censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes.

Lorsqu'une grandeur est définie par une dérivée, une dérivée partielle ou une intégrale, l'équation aux dimensions est construite comme si les dérivées correspondaient à une division et l'intégrale à une multiplication. Par exemple,

- si  $f(s) = \frac{dg(s)}{ds}$  avec  $g(s)$  en m et  $s$  en kg, alors  $f(s)$  s'exprime en m/kg,
- si  $k(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt$  avec  $g(t)$  en V et  $t$  en s, alors  $k(t_1)$  s'exprime en V.s.

### 4.3 Adimensionalisation

Des grandeurs sont sans dimension. Vous n'ignorez pas que le périmètre d'un cercle de rayon  $r$  est  $p = 2\pi r$ . Si on ne décrit qu'une partie du cercle une relation similaire lie la longueur de l'arc de cercle  $c$  au rayon :  $c = \alpha r$ . L'angle est donc  $\alpha = c/r$  un rapport de deux longueurs : l'angle, exprimé en radian est sans dimension. De même, l'écoulement d'un fluide visqueux dépend du rapport entre les effets dynamiques et les effets visqueux. Lorsque l'on souhaite faire une maquette à échelle réduite, il faut conserver ce rapport entre les différentes forces : on conservera le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}$ , avec  $d$  une dimension caractéristique de l'écoulement,  $v$  une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\rho$  la masse volumique et  $\eta$  la viscosité dynamique. L'adimensionalisation des équations est très utilisée en mécanique des fluides, hélas beaucoup moins en mécanique des solides. Ceci n'est en fait dû qu'à des habitudes différentes au sein des deux communautés. Adimensionaliser les équations a l'avantage de faire apparaître les groupements adimensionnels de paramètres qui régissent le comportement, mais présente l'inconvénient, en cas d'erreur de calcul par une omission d'un terme adimensionnel, de laisser l'équation homogène (ce ne sont que des multiplications/additions/divisions de nombres sans dimension), et donc enlève un moyen de vérifier le résultat final.

### 4.4 Unités logarithmiques relatives ou absolues

Des capteurs, comme nos oreilles par exemple, ne sont pas sensibles de façon linéaire au signal reçu, pour nos oreilles, au bruit. Il est donc intéressant de ne pas mesurer le niveau acoustique sur une échelle linéaire, mais logarithmique. De plus, prendre en compte le seuil d'audibilité pour définir l'échelle logarithmique amène à considérer un niveau de référence de pression de  $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

On construit alors  $L_p = 10 \log \left( \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log \left( \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right)$  dont l'unité est alors le décibel noté dB, avec  $p_{eff}$  la pression efficace en Pa. Le choix d'une échelle logarithmique dans la représentation graphique d'une relation entre deux grandeurs  $a$  et  $b$  peut être justifiée par :

- des répartitions des valeurs de  $a$  ou  $b$  de façon géométrique
- pour déterminer des coefficients lorsque la fonction liant  $a$  et  $b$  est non linéaire.

Prenons par exemple une relation théorique du type  $b = a^{0.34}$ . Si l'on cherche à vérifier expérimentalement l'exposant de cette relation, il est plus judicieux de tracer  $\log b$  en fonction de  $\log a$  : la fonction

théorique ( $\log b = 0.34 \log a$ ) est une droite passant par l'origine, les points expérimentaux permettent de leur côté de déterminer la pente expérimentale (avec son incertitude) qui donne la valeur expérimentale du coefficient (avec son incertitude).

## 4.5 Ordres de grandeurs

Il ne suffit pas que votre mesure soit donnée dans des unités cohérentes, par exemple si votre capteur mesure la vitesse du cycliste en descente par la rupture de deux faisceaux lasers distants de 1 cm dans un intervalle de temps de  $12.3 \cdot 10^{-2}$  s, encore faut-il que la valeur soit réaliste. Dans le cas de votre cycliste, il roule à 0.29 km/h ! On compte sur votre expérience.

## 4.6 Chiffres significatifs

*Pourquoi 1340 a trois chiffres significatifs alors que 13,40 en a quatre ?* La réponse est dans la vidéo 270 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=270>. Regarde-la, puis évalue son intérêt en cochant une case à la dernière page du polycopié.

*Le nombre de chiffres significatifs sont ceux après la virgule ?* La réponse est dans la vidéo 543 disponible sur

<http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=543>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

## 4.7 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 224, 99, 155, 211, 212, 228, 234 et 235.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

**brevet 224 : Détermination des dimensions d'un paramètre à partir de l'homogénéité**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vd}{\nu}$  est adimensionnel. Il relie  $d$  une longueur caractéristique de l'écoulement,  $v$  une vitesse caractéristique de l'écoulement et  $\nu$  la viscosité cinématique.

Quelle est la dimension de  $\nu$ , et ses unités dans le système international ?

**brevet 099 : Nombre de chiffres significatifs**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Quels sont le nombre de chiffres significatifs de  $a = 23.3 \cdot 10^5$ ,  $b = 1230$ ,  $c = 0.054$ ,  $d = 34.70$ ,  $e = a * c$  et  $f = d + c$  ?

**brevet 155 : Homogénéité. Amortissement hystérétique.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] *chapitre 2, 2.3* ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit un solide de masse  $m = 2$  kg guidé en translation dans la direction  $\vec{x}$ , relié par un ressort de rigidité  $k = 5 \text{ Nm}^{-1}$  et un amortisseur hystérétique de coefficient hystérétique  $\beta = 1$  ???. L'énergie dissipée  $\Delta E$  pendant un cycle d'amplitude  $X$  de mouvement de la masse, est reliée au coefficient d'amortissement hystérétique par

$$\Delta E = \pi k \beta X^2, \quad (4.3)$$

Quelles sont les unités de mesures de  $\beta$  dans le Système International ?

**brevet 211 : Homogénéité d'une équation (version 1).**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours de physique de bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit  $F$  une force,  $g$  la pesanteur,  $m$  une masse,  $a$  et  $b$  des longueurs, l'équation,

$$F = \frac{a + b}{b} \frac{2m}{g}, \quad (4.4)$$

est-elle homogène ?

**brevet 212 : Homogénéité d'une équation (version 2).**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : cours de physique de bac +1 ; autoattribution .**

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit  $F$  une force,  $g$  la pesanteur,  $m$  une masse,  $a$  et  $b$  des longueurs, l'équation,

$$F = \frac{a + b^2}{b} 2mg, \quad (4.5)$$

est-elle homogène ?

**brevet 228 : Équation aux dimensions avec dérivée et intégrale.**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : cours de math de bac +1 ;  
autoattribution .

Si vous avez du mal à faire ce brevet, je vous invite à lire le paragraphe "Homogénéité, adimensionalisation" et de regarder les vidéos afférentes.

Soit la grandeur  $g$  donnée par

$$g(x, y) = \frac{\frac{\partial t(x, y)}{\partial x} c}{\int_0^y h(y_1) dy_1} \quad (4.6)$$

avec  $t$  en s,  $x$  en V,  $y$  en kg,  $c$  en m et  $h$  en V.

Quelle est la dimension de  $g(x, y)$  exprimée dans les unités de base ?

**brevet 234 : chiffres significatifs pour une addition.**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : cours physique pour  
l'ingénieur ; autoattribution .

Donnez le résultat des opérations suivantes en veillant au nombre de chiffres significatifs du résultat.

$$a = 23,56 + 5,3 + 0,004 = ?$$

$$b = 0,07 \text{ m} + 51 \text{ cm} + 41,34 \text{ dam} = ?$$

**brevet 235 : chiffres significatifs pour une multiplication ou division.**

auteur : JM Géneaux ; ressource : cours physique pour  
l'ingénieur ; autoattribution .

Donnez le résultat des opérations suivantes en veillant au nombre de chiffres significatifs du résultat.

$$a = 23,56 * 5,3 / 0,004 = ?$$

$$b = 0,07 \text{ m} * 51 \text{ kg} * 41,34 \text{ s} = ?$$

## 4.8 Brevets de vérification de connaissance (facultatifs)

Pour vérifier que vous savez réinvestir cette connaissance sur un autre cas, je vous invite à obtenir les brevets 213 et 224. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant.

Formation à la compétence jaune de gestion des aléas.

# Chapter 5

## Gestion des aléas

Ce chapitre n'est à travailler que si vous êtes détenteur ou détentrice de la capacité blanche.

L'objectif de cet enseignement est que vous sachiez, lorsque vous énoncez le résultat d'une mesure, afficher son incertitude associée au taux de confiance que vous avez choisi. De plus, lorsque la grandeur est obtenue par la composition de plusieurs grandeurs, que vous sachiez propager les incertitudes de chacune d'elles pour évaluer l'incertitude de cette grandeur composée, ainsi que la loi qui régit sa distribution de probabilité.

### **5.1 A propos de l'évaluation des incertitudes relatives à un résultat expérimental, à un modèle, à leur comparaison.**

#### **5.1.1 Quelques rappels de grandeurs**

Au paragraphe 5.1.19, est fourni un extrait de la norme qui définit exactement les termes employés. Nous reviendrons ici sur quelques définitions et concepts.

- valeur vraie (voir figure 5.1)

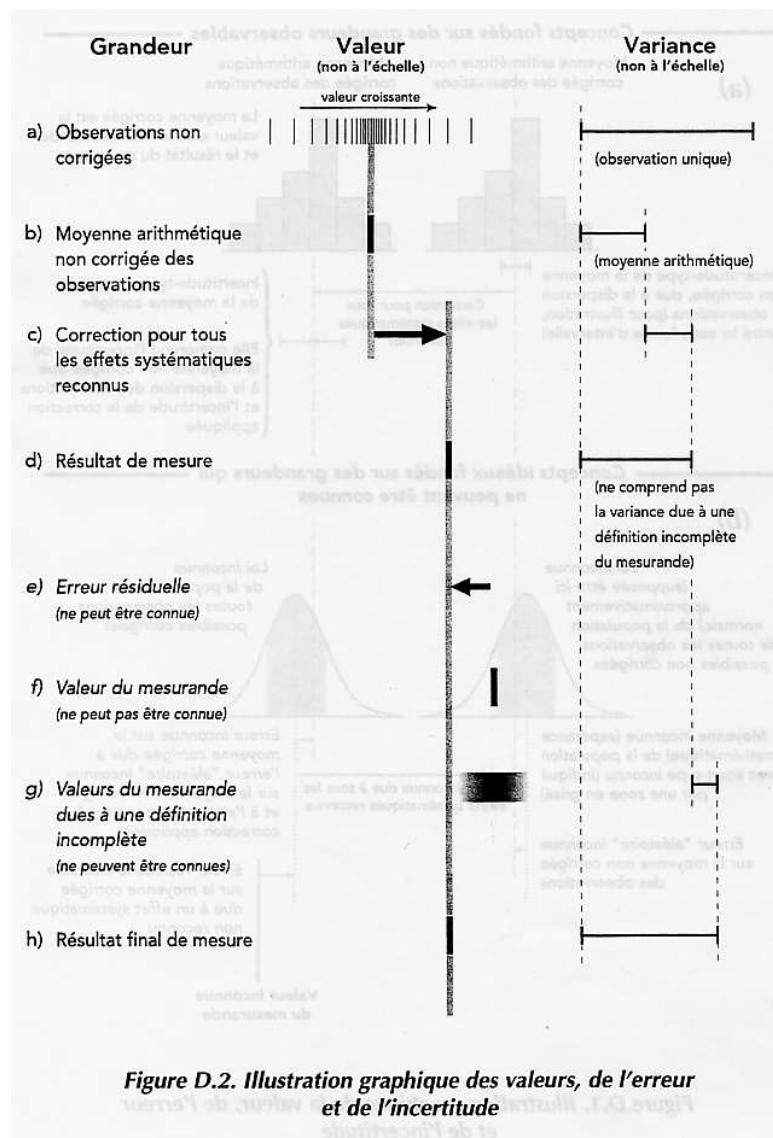


Figure 5.1: Relation entre valeur vraie et mesure.

- mesurande : C'est la grandeur soumise à mesurage.
- erreur : C'est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie : elle est par définition inaccessible.
- moyenne : nous la noterons

$$\bar{q} = \frac{\sum_{k=1}^n q_k}{n}, \quad (5.1)$$

- variance d'une population (voir figure 5.2) :

$$s_q = \frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n - 1}, \quad (5.2)$$

avec  $n$  le nombre de points de mesure.

- écart type d'une population :

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n - 1}}, \quad (5.3)$$

avec  $n$  le nombre de points de mesure.

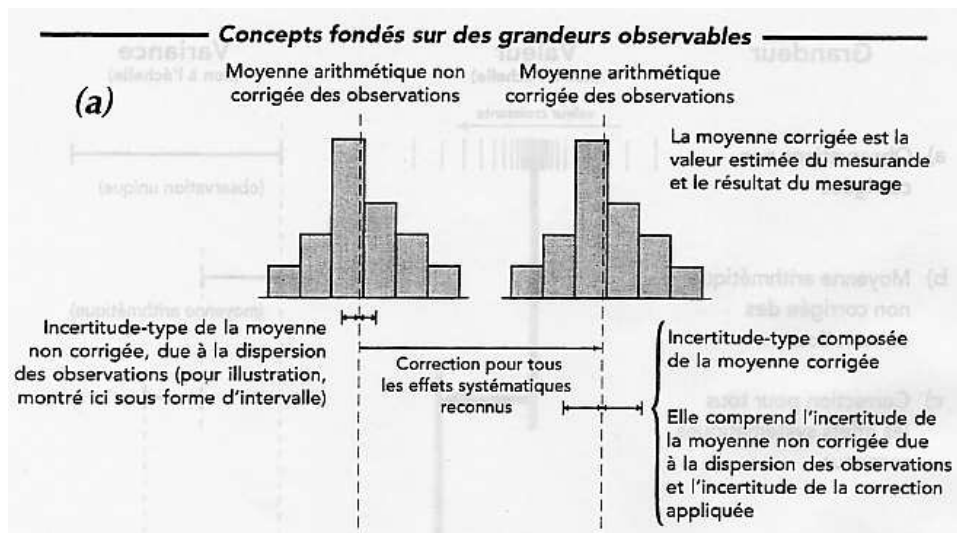


Figure 5.2: Les seules informations auxquelles il est possible d'accéder à partir des mesures.

- variance sur la moyenne d'une population

$$\sigma^2(\bar{q}) = \frac{\sigma_q^2}{n}, \quad (5.4)$$

- écart type :  $\sigma$
- covariance : elle définit la liaison statistique entre deux grandeurs  $y$  et  $z$ . C'est une grandeur dimensionnelle :

$$s_{yz} = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})(z_k - \bar{z})}{n - 1}, \quad (5.5)$$

*Pouvez-vous ré-expliciter les deux premiers graphiques du poly ?*

La réponse est dans la vidéo 612 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=612>.

Regarde-la et note-la.

Ce concept sera utile lorsque nous évaluerons l'incertitude sur une grandeur composée de plusieurs grandeurs qui auront été mesurées. Si la covariance n'est pas nulle, on risque de surestimer l'incertitude sur la grandeur composée.

*La prise en compte de la covariance implique-t-elle une erreur sur l'estimation de l'incertitude ?*

La réponse est dans la vidéo 606 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=606>.

Regarde-la.

*Que représente la notion de covariance ?*

La réponse est dans la vidéo 601 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=601>.

Regarde-la.

On peut aussi définir la covariance des moyennes,

$$s_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{s_{yz}}{n}, \quad (5.6)$$

- coefficient de corrélation : c'est la grandeur adimensionnelle comprise entre 1 et -1 qui quantifie le lien entre deux grandeurs,

$$r_{yz} = \frac{s_{yz}}{\sigma_y \sigma_z}, \quad (5.7)$$

- résultat brut
- biais : la connaissance approfondie de l'appareil de mesure, et son étalonnage par rapport à des grandeurs de références, permettent de quantifier l'écart entre la valeur de référence et la valeur donnée par l'appareil de mesure. Ceci sera appelé biais. L'incertitude sur ce biais est aussi à prendre en compte.
- résultat corrigé
- incertitude type : c'est l'incertitude d'un résultat de mesurage, exprimée sous la forme d'un écart-type.
- incertitude élargie : c'est l'incertitude associée à un mesurage afin qu'elle comprenne une fraction élevée de valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande.
- facteur d'élargissement : une fois défini le taux de confiance avec lequel on souhaite afficher le résultat, il faut prendre en compte le type de loi pour calculer ce facteur d'élargissement.

Table G.2 – Valeur de  $t_p(v)$  de la loi de  $t$  pour  $v$  degrés de liberté, qui définit un intervalle de  $-t_p(v)$  à  $+t_p(v)$  comprenant la fraction  $p$  de la loi

Nombre de degrés de liberté $v$	Fraction $p$ en pourcentage					
	68,27 <sup>(a)</sup>	90	95	95,45 <sup>(a)</sup>	99	99,73 <sup>(a)</sup>
	Valeur de $t_p(v)$					
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
$\infty$	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

<sup>(a)</sup>Pour une grandeur  $z$  décrite par une loi normale d'espérance mathématique  $\mu_z$  et d'écart-type  $\sigma$ , l'intervalle  $\mu_z \pm k\sigma$  comprend respectivement  $p = 68,27; 95,45$  et  $99,73$  pour-cent de la loi pour  $k = 1, 2$  et  $3$ .

Figure 5.3: Table de Student

- intervalle de confiance : la norme précise que cette appellation n'est valable que si toutes les incertitudes types sont obtenues par une méthode de type A.
- niveau de confiance
- répétabilité
- reproductibilité
- distribution uniforme
- distribution gaussienne
- distribution de Student (voir figure 5.3)

- degrés de liberté :
  - pour une grandeur unique estimée par la moyenne arithmétique de  $n$  observations indépendantes,  $\nu = n - 1$ .
  - pour une grandeur estimée par une droite des moindres carrés (pente et origine) utilisant  $n$  observations indépendantes,  $\nu = n - 2$ .

*La loi gaussienne est-elle la même que la loi normale ? Pourriez-vous redéfinir la loi de Student ?*

La réponse est dans la vidéo 605 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=605>.  
Regarde-la.

*C'est quoi un degré de liberté en statistique ?*

La réponse est dans la vidéo 530 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=530>.  
Regarde-la.

*Quelle différence en biais et erreur ?*

La réponse est dans la vidéo 611 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=611>.  
Regarde-la.

*Quelle est la différence entre une incertitude et une incertitude type ?*

La réponse est dans la vidéo 076 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=076>.  
Regarde-la.

*Comment choisir entre une loi normale et une loi de Student ?*

La réponse est dans la vidéo 077 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=077>.  
Regarde-la.

### 5.1.2 Plan de formation

- Avec de l'expérience, l'évaluation d'incertitudes de type B
- Sans information précise, l'évaluation d'incertitudes de type A
- Quelle est la distribution sous-jacente ? Simulation des lois ; des pièces mises bout à bout  $(a+b+c)$  ; une grandeur fonction de nombreuses autres  $(2*a+\exp(b))/c$ .
- Procédure et expression de l'incertitude : voir figure 5.4 et le fichier "FicheIncertainite".

## 8 Récapitulation de la procédure d'évaluation et d'expression de l'incertitude

Les étapes à suivre pour évaluer et exprimer l'incertitude du résultat d'un mesurage, telles qu'elles sont présentées dans ce *Guide*, peuvent être résumées comme suit :

1 Exprimer mathématiquement la relation entre le mesurande  $Y$  et les grandeurs d'entrée  $X_i$  dont  $Y$  dépend :  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . La fonction  $f$  doit contenir chaque grandeur,  $y$  compris toutes les corrections et facteurs de correction qui peuvent contribuer à une composante significative de l'incertitude du résultat du mesurage (voir 4.1.1 et 4.1.2).

2 Déterminer  $x_i$ , la valeur estimée de la grandeur d'entrée  $X_i$ , soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations, soit par d'autres moyens (voir 4.1.3).

3 Evaluer l'incertitude-type  $u(x_i)$  de chaque estimation  $x_i$ . Pour une estimation d'entrée obtenue par l'analyse statistique de séries d'observations, l'incertitude-type est évaluée comme décrit en 4.2 (*évaluation de Type A de l'incertitude-type*). Pour une estimation d'entrée obtenue par d'autres moyens, l'incertitude-type  $u(x_i)$  est évaluée comme décrit en 4.3 (*évaluation de Type B de l'incertitude-type*).

4 Evaluer les covariances associées à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées (voir 5.2).

5 Calculer le résultat du mesurage, c'est-à-dire l'estimation  $y$  du mesurande  $Y$ , à partir de la relation fonctionnelle  $f$  en utilisant pour les grandeurs d'entrée  $X_i$  les estimations  $x_i$  obtenues à l'étape 2 (voir 4.1.4).

6 Déterminer l'incertitude-type composée  $u_c(y)$  du résultat de mesure  $y$  à partir des incertitudes-types et des covariances associées aux estimations d'entrée, comme décrit au chapitre 5. Si le mesurage détermine simultanément plusieurs grandeurs de sortie, calculer leurs covariances (voir 7.2.5, H.2, H.3 et H.4).

7 S'il est nécessaire de donner une incertitude élargie  $U$ , avec pour objectif de fournir un intervalle de  $y - U$  à  $y + U$  dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande  $Y$ , multiplier l'incertitude-type composée  $u_c(y)$  par un facteur d'élargissement  $k$ , typiquement situé dans la plage de 2 à 3, pour obtenir  $U = k u_c(y)$ . Choisir  $k$  sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle (voir 6.2, 6.3 et spécialement l'annexe G qui présente le choix d'une valeur de  $k$  produisant un intervalle avec un niveau de confiance proche d'une valeur spécifiée).

8 Donner dans un rapport le résultat du mesurage  $y$  avec son incertitude-type composée  $u_c(y)$  ou son incertitude élargie  $U$  en suivant les indications données en 7.2.1 ou 7.2.3. Utiliser l'un des modes d'expression recommandés en 7.2.2 ou 7.2.4. Décrire, comme exposé aussi au chapitre 7, comment les valeurs de  $y$  et  $u_c(y)$  ou  $U$  ont été obtenues.

Figure 5.4: Procédure d'expression de l'incertitude.

- Incertitude sur une moyenne
- Choix du type de régression
- Incertitude sur les coefficients d'une régression linéaire
- Incertitude sur une limite de linéarité
- Et en non-linéaire ?...
- Comparaison de populations

### 5.1.3 Démarche suivie à titre d'exemple

Nous nous proposons de déterminer la résistance au roulement  $C$  d'un sol sur une bille : au point de contact  $P$  bille/sol, le sol exerce sur la bille qui roule dans la direction  $\vec{i}$  un torseur,

$$\left\{ \begin{array}{l} N\vec{k} + T\vec{i} \\ -C\vec{j} \end{array} \right\}_P. \quad (5.8)$$

Pour déterminer ce paramètre  $C$ , nous lâcherons sans vitesse initiale une bille sur un plan incliné, arrivée en bas de ce plan incliné, elle poursuivra son mouvement sur une surface horizontale dont on veut mesurer la résistance au roulement. Les données de l'expérience seront l'angle  $\alpha$  du plan incliné, la distance entre le point lâcher et la fin du plan incliné  $\tilde{x}_0$ , la masse de la bille  $m$ , son rayon  $R$ , la pesanteur  $g$ . Le résultat de l'expérience sera la longueur parcourue à l'horizontale  $x_2$  (voir figure 5.5)

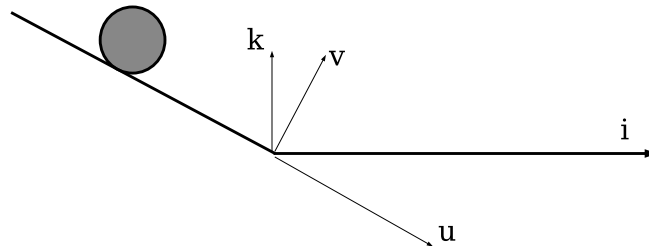
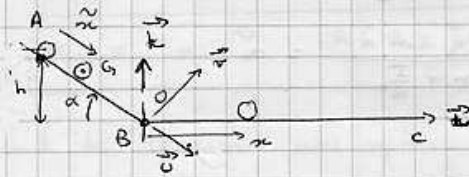


Figure 5.5: Un essai de lâcher d'une bille pour mesurer le coefficient de résistance au roulement.

Nous suivrons la démarche suivante, qui utilisera les concepts présentés dans les paragraphes de ce chapitre :

- modélisation (voir figures 5.6, 5.7, 5.8) pour mettre en évidence les relations entre  $C$  et les paramètres de l'essai
- choix d'un jeu de paramètres
- 1er essai
- mesure de la réponse
- précision de la réponse : incertitude de type B (paragraphe 5.1.8)
- calcul de l'estimation  $C_1$  :
- précision sur  $C_1$  : incertitude de type A ; incertitude théorique (paragraphe 5.1.14)
- 2ième essai
- comparaison des 2 résultats expérimentaux  $x_{2,1}$  et  $x_{2,2}$  : répétabilité ; courbe comparative
- $n$ ième essai :  $x_{2,n}$
- calcul de la moyenne  $\bar{x}_2$
- calcul de l'estimation  $C_2$ .
- incertitude sur la moyenne de ces  $n$  essais  $\Delta\bar{x}_2$  : incertitude statistique sur une valeur moyenne de ces  $n$  essais (paragraphe 5.1.6) ; programme *incvalmoy.ods*
- calcul de l'incertitude sur  $C_2$ .
- changement d'un paramètre (la distance de lacher), car le coefficient  $C$  ne doit pas en dépendre
- incertitude sur la moyenne de ces  $m$  essais, calcul de  $C_3$  et de son incertitude : comparaison
- relation linéaire entre  $C$  et  $\tilde{x}_0$ , utilisation de la pente de la droite  $x_2$  fonction de  $\tilde{x}_0$  :  $x_2 = p\tilde{x}_0$
- mesure des pentes maximale et minimale par la méthode manuelle (paragraphe 5.1.12)
- mesure des pentes maximale et minimale par la méthode statistique (paragraphe 5.1.11) ; programme *incvalli.sxc*
- calcul des valeurs maximale et minimale de  $C_4$
- détermination de la fin d'une relation de linéarité ; programme *incvalli.sce*

• longueur de roulement d'une bille



- pas de résistance au roulement le long de AB
- résistance au roulement le long de BC
- pas de glissement.

Rodélisation

Equation de mouvement le long de AB

• Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_{G \in S / R_0}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\beta}^2$$

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = (-\tilde{x}_0 + \tilde{x}) \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{OG}}{dt} = \tilde{\dot{x}} \vec{u}$$

$\beta \neq$  pas de glissement  $\beta = \frac{\tilde{x}}{R}$   $\dot{\beta} = \frac{\tilde{\dot{x}}}{R}$   $R = \tilde{x}$

$$T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \tilde{\dot{x}}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\dot{x}}} = \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \tilde{\dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\dot{x}}} = \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \tilde{\ddot{x}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} = 0$$

• bilan des effets

plan incliné  $\left\{ \mathcal{E}_1 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -T \vec{u} + N \vec{v} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$

poids  $\left\{ \mathcal{E}_2 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -m g \vec{e}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$

$$\left\{ \mathcal{E}_{110} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{u} \\ \tilde{\dot{x}} \vec{u} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\dot{x}}}{R} \vec{u} \\ \tilde{\dot{x}} \vec{u} \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{ \mathcal{E}_{110, \tilde{x}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \vec{u} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_G$$

$$Q_{\tilde{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \vec{u} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{l} -T \vec{u} + N \vec{v} \quad -m g \vec{e}_3 \\ (-T \vec{u} + N \vec{v}) \wedge R \vec{v} \end{array} \right\}_G$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \vec{u} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{l} -T \vec{u} + N \vec{v} - m g \vec{e}_3 \\ -T R (-\vec{v}) \end{array} \right\}_G = T - T + m g \sin \alpha = m g \sin \alpha$$

Figure 5.6: Modélisation d'un essai de lâcher d'une bille pour mesurer le coefficient de résistance au roulement: p1.

l'équation de Lagrange donne

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{x} = mg \sin \alpha$$

A l'instant  $t=0$   $\dot{x} = -\dot{x}_0$

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = a$$

$$\dot{x} = at + 0$$

$$x = a \frac{t^2}{2} - \dot{x}_0 t$$

A  $t_1$ , la bille arrive en O

$$\dot{x} = 0$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \dot{x}_0}{a}}$$

sa vitesse est  $\dot{x}(t_1) = a \sqrt{\frac{2 \dot{x}_0}{a}} = \sqrt{2a \dot{x}_0} = v_1$

Equation de mouvement sur la ligne BC

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Bilan des actions

pesanteur  $\left\{ \mathcal{C}_1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} -mg \vec{k} \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$



$$\left\{ \begin{matrix} N_2 \vec{j} \\ T_2 \vec{i} \end{matrix} \right\}_C$$

roulement avec résistance  $\left\{ \mathcal{C}_2 \right\} = \left\{ \begin{matrix} +N_2 \vec{k} + T_2 \vec{j} \\ -C \vec{j} \end{matrix} \right\}_P$

$$\left\{ \mathcal{C}_{2/O_2} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{R} \vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

$$= \left\{ \begin{matrix} +N_2 \vec{k} + T_2 \vec{j} \\ -C \vec{j} + (N_2 \vec{k} + T_2 \vec{j}) \wedge R \vec{k} \end{matrix} \right\}_G$$

$$Q_x = \frac{1}{R} (-C - RT_2) + T_2 = \left\{ \begin{matrix} +N_2 \vec{k} + T_2 \vec{j} \\ (-C - RT_2) \vec{j} \end{matrix} \right\}_G$$

$$Q_x = -\frac{C}{R}$$

Equation du mouvement

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{x} = -\frac{C}{R}$$

$$\ddot{x} = -\frac{C}{R \left(m + \frac{I}{R^2}\right)} = -b$$

$$\dot{x} = -bt + v_1$$

car à  $t=0$   $\dot{x} = v_1$

$$x = -b \frac{t^2}{2} + v_1 t$$

car à  $t=0$   $x=0$

la bille s'arrête lorsque  $\dot{x} = 0$   $t_2 = \frac{v_1}{b} = \frac{\sqrt{2a \dot{x}_0} R \left(m + \frac{I}{R^2}\right)}{C}$

sa position est à  $t_2$ :  $x_2 = \frac{-C}{R \left(m + \frac{I}{R^2}\right)} \frac{R^2 \left(m + \frac{I}{R^2}\right)^2}{C^2} \frac{2a \dot{x}_0}{2}$

Figure 5.7: Modélisation d'un essai de lâcher d'une bille pour mesurer le coefficient de résistance au roulement: p2.

$$+ \sqrt{2a\tilde{\alpha}_0} \frac{\sqrt{2a\tilde{\alpha}_0}}{c} R(m + \frac{I}{R^2})$$

$$\alpha_2 = \frac{-R(m + \frac{I}{R^2})}{c} a \tilde{\alpha}_0 + \frac{2a\tilde{\alpha}_0}{c} R(m + \frac{I}{R^2})$$

$$\boxed{\alpha_2 = a \tilde{\alpha}_0 \frac{R(m + \frac{I}{R^2})}{c}}$$

Calcul de  $I$  pour une sphère



$$\begin{aligned} I &= \iiint [r \cos \beta]^2 r^2 dr d\alpha d\beta \rho \\ &= \rho \iiint r^4 \cos^2 \beta dr d\alpha d\beta \\ &= \frac{10}{3} \pi^2 R^3 \left[ \frac{2}{5} \pi^2 R^5 \right] \\ &= \frac{3}{10} m R^2 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{m g \sin \alpha}{(m + \frac{I}{R^2})} \tilde{\alpha}_0 \frac{R(m + \frac{I}{R^2})}{c} = \frac{1}{c} m g \sin \alpha \tilde{\alpha}_0 R$$

Vérification de l'homogénéité:

$$\left[ \frac{\text{kg m s}^{-2} \text{ m m}}{\text{N m}} \right] = \frac{\text{kg m}^3 \text{ s}^{-2}}{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}} = \text{m} \quad \underline{\text{OK!}}$$

Figure 5.8: Modélisation d'un essai de lâcher d'une bille pour mesurer le coefficient de résistance au roulement: p3.

### 5.1.4 Classifions un peu nos approches

Un client souhaite connaître "la valeur" d'une grandeur  $X$ . Vous lui répondrez en quantifiant la précision sur votre évaluation de cette grandeur  $X$ , et en lui associant un niveau de confiance.

Nous ne reviendrons pas sur les éventuelles corrections à apporter à la mesure (d'étalonnage, d'environnement). Elles nécessitent un modèle et donc les incertitudes sur ces corrections peuvent être traitées comme dans le paragraphe 5.1.14.

La procédure à suivre dépend de la demande du client. Si la grandeur demandée est directement accessible par l'essai (une température avec l'aide un thermomètre ...), en fonction de votre connaissance (ou ignorance), vous choisirez :

- une évaluation de l'incertitude sur des mesures répétées, par méthode statistique (type A) (paragraphe 5.1.6),
- et lorsque votre connaissance de l'expérience est plus empirique, vous pourrez évaluer cette incertitude (type B) (paragraphe 5.1.8).

Si la grandeur demandée caractérise le lien entre deux grandeurs mesurables  $a$  et  $b$ , vous mènerez un essai de  $b$  en fonction de  $a$ . Si ce lien est linéaire, la grandeur demandée peut être la pente  $p$  ou l'ordonnée à l'origine  $c$ . Vous adopterez la méthode statistique (paragraphe 5.1.11) ou la méthode manuelle (paragraphe 5.1.12) en fonction du type A ou B des incertitudes sur  $a$  et  $b$ .

Si la grandeur demandée, est une fonction plus ou moins complexe de votre résultat d'expérience, mais faisant intervenir des grandeurs auxiliaires, un calcul de l'incertitude sur  $E$  est à faire par la méthode du paragraphe 5.1.14. Par exemple, le module d'Young  $E$  d'une éprouvette de traction de section  $e$  de largeur  $h$  de longueur  $l$  est donnée en fonction de la pente  $p$  de la courbe de traction (écartement des mors et fonction de la force) par,

$$E = \frac{1}{p} \frac{l}{eh}. \quad (5.9)$$

Nous concluons cette présentation par quelques réflexions sur la méthode de calcul d'erreur que vous utilisiez auparavant.

### 5.1.5 Détection de points aberrants lors de la détermination d'une valeur moyenne

Supposons que nous disposons d'une série de  $n$  mesures  $a_i$  d'une grandeur  $a$ . On peut calculer la valeur moyenne  $\bar{a}$  en utilisant tous les points, mais il est judicieux de vérifier auparavant que cette série ne comporte pas de mesure "aberrante". La détermination statistique pour rejeter une valeur est la suivante :

- classer les valeurs par ordre croissant  $a_{(i)}$ ,
- pour la valeur **extrême** que vous souhaitez tester  $a_{(1)}$  ou  $a_{(n)}$ , calculer  $v = \frac{|\bar{a}-a_1|}{\sigma_a}$  ou  $v = \frac{|\bar{a}-a_n|}{\sigma_a}$ , avec  $\sigma_a$  donné par l'équation 5.3.
- choisir un seuil de signification  $\alpha$ , par exemple  $\alpha = 0.05$  : cela signifie que vous acceptez d'avoir 5% de (mal)chance de considérer une valeur comme correcte, alors qu'elle n'est là que par hasard.
- calculer  $Q = 200\alpha$ ,
- extraire de la table figures 5.9 et 5.10 la valeur de  $v_{max}(n; Q)$ ,
- si  $v < v_{max}(n; Q)$  alors la mesure n'est pas considérée aberrante au seuil de  $\alpha$ ,
- si  $v > v_{max}(n; Q)$  alors la mesure est considérée aberrante au seuil de  $\alpha$ , supprimer ce point de la liste des  $a_i$ , puis reprendre la procédure à la première étape pour vérifier les nouvelles valeurs extrêmes.

La procédure s'arrête lorsque les deux valeurs extrêmes sont considérées comme non aberrantes.

Valeurs « maximales admissibles »  $v_{\max}(\alpha; Q)$  des écarts réduits  
 (élimination des résultats aberrants d'observation; sélection à une  
 dimension; seuil de signification  $\alpha = 0,200$ )

$n$	$Q$								
	0,05	0,1	0,2	0,3	1	2	3	10	20
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412	1,408
4	1,732	1,732	1,731	1,730	1,728	1,729	1,710	1,689	1,645
5	1,906	1,904	1,900	1,893	1,872	1,955	1,917	1,889	1,791
6	2,219	2,212	2,208	2,193	2,161	2,120	2,067	1,990	1,894
7	2,408	2,395	2,377	2,344	2,310	2,265	2,182	2,088	1,974
8	2,585	2,547	2,521	2,475	2,431	2,374	2,273	2,172	2,041
9	2,704	2,677	2,643	2,580	2,532	2,464	2,349	2,238	2,097
10	2,822	2,788	2,747	2,650	2,610	2,540	2,414	2,294	2,146
11	2,925	2,884	2,837	2,719	2,682	2,608	2,470	2,345	2,190
12	2,995	2,950	2,915	2,800	2,755	2,680	2,519	2,387	2,229
13	3,046	3,044	2,984	2,892	2,800	2,715	2,553	2,421	2,264
14	3,107	3,111	3,046	2,947	2,859	2,759	2,602	2,461	2,297
15	3,232	3,171	3,102	2,997	2,905	2,800	2,638	2,494	2,327
16	3,290	3,225	3,152	3,042	2,949	2,837	2,670	2,523	2,354
17	3,343	3,274	3,198	3,083	2,983	2,871	2,701	2,554	2,380
18	3,399	3,320	3,240	3,120	3,017	2,903	2,728	2,577	2,404
19	3,437	3,361	3,278	3,155	3,049	2,932	2,754	2,601	2,428
20	3,478	3,400	3,314	3,187	3,079	2,959	2,779	2,628	2,447
21	3,516	3,436	3,347	3,217	3,106	2,984	2,801	2,644	2,467
22	3,552	3,460	3,378	3,245	3,132	2,998	2,823	2,664	2,486
23	3,585	3,500	3,407	3,271	3,156	3,030	2,849	2,683	2,504
24	3,616	3,525	3,434	3,293	3,179	3,051	2,862	2,701	2,521
25	3,646	3,558	3,459	3,318	3,200	3,071	2,880	2,718	2,537
26	3,673	3,582	3,483	3,340	3,220	3,089	2,897	2,734	2,553
27	3,699	3,606	3,506	3,360	3,239	3,107	2,913	2,749	2,568
28	3,724	3,629	3,528	3,380	3,258	3,124	2,928	2,764	2,582
29	3,747	3,651	3,548	3,399	3,275	3,140	2,944	2,778	2,596

Figure 5.9: Table de détermination de l'écart maximum admissible pour ne pas rejeter une valeur douteuse (extrait de [7])

n	α								
	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20
30	3,709	3,672	3,537	3,416	3,291	3,158	2,958	2,792	2,609
31	3,791	3,692	3,536	3,423	3,307	3,171	2,972	2,805	2,622
32	3,811	3,711	3,508	3,449	3,322	3,185	2,985	2,818	2,634
33	3,850	3,729	3,620	3,465	3,337	3,199	2,998	2,830	2,646
34	3,848	3,746	3,636	3,480	3,351	3,212	3,010	2,842	2,657
35	3,866	3,762	3,652	3,494	3,364	3,224	3,023	2,855	2,668
36	3,882	3,776	3,667	3,507	3,377	3,236	3,033	2,864	2,679
37	3,898	3,790	3,681	3,521	3,390	3,248	3,044	2,874	2,689
38	3,914	3,808	3,695	3,530	3,401	3,259	3,055	2,885	2,699
39	3,929	3,822	3,708	3,545	3,413	3,270	3,065	2,894	2,709
40	3,943	3,835	3,720	3,557	3,424	3,281	3,075	2,904	2,718
41	3,957	3,848	3,733	3,568	3,435	3,291	3,084	2,915	2,727
42	3,970	3,861	3,745	3,579	3,445	3,301	3,094	2,925	2,736
43	3,983	3,873	3,756	3,590	3,455	3,310	3,103	2,934	2,745
44	3,995	3,885	3,767	3,600	3,465	3,320	3,112	2,944	2,753
45	4,007	3,896	3,778	3,610	3,474	3,329	3,120	2,952	2,762
46	4,019	3,907	3,788	3,620	3,483	3,338	3,128	2,959	2,770
47	4,030	3,918	3,798	3,630	3,492	3,346	3,137	2,967	2,778
48	4,041	3,928	3,808	3,639	3,501	3,354	3,145	2,972	2,785
49	4,052	3,938	3,818	3,648	3,510	3,363	3,152	2,980	2,793
50	4,062	3,948	3,827	3,656	3,518	3,370	3,160	2,987	2,800
51	4,072	3,957	3,836	3,665	3,526	3,378	3,167	2,994	2,807
52	4,082	3,966	3,845	3,673	3,534	3,386	3,175	3,001	2,814

Figure 5.10: Table de détermination de l'écart maximum admissible pour ne pas rejeter une valeur douteuse (extrait de [7])



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire le brevet 085. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 085 : Détection statistique d'une valeur aberrante lors de la détermination d'une valeur moyenne**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Soit un jeu de points expérimentaux ( $a_i$ ) qui sont des masses de pièces sortant d'une machine de production. Les valeurs en kg sont 4.63, 4.62, 4.78, 4.23, 4.56, 4.56, 4.63, 4.72 et 4.56. Les incertitudes sur la grandeur  $a$  ne sont pas connues.

Quelles sont les valeurs  $a_i$  à considérer aberrantes au seuil de signification  $\alpha = 10\%$  ?

### 5.1.6 Incertitudes de type A

Elles sont essentiellement utilisées pour quantifier les incertitudes de répétabilité. **L'évaluation d'une incertitude de type A est plus chère qu'une évaluation a priori, appelée évaluation de type B.** Vous le constaterez en séance de tp.

On souhaite obtenir la mesure  $Y$ , dont le meilleur estimateur est la moyenne  $\bar{Y}$  des mesures  $Y_i$  que l'on réalisera. Il nous faut évaluer l'incertitude de  $\bar{Y}$ .

La démarche à suivre est la suivante :

1. faire les mesures  $Y_i$  pour  $i$  de 1 à  $N$ ,
2. vérifier qu'il n'y a pas de point aberrant dans les valeurs,
3. calculer la moyenne des réalisations  $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}$ ,
4. calculer l'écart type estimé sur les réalisations de mesure  $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N-1}}$ ,
5. vérifier, en traçant un histogramme, que la distribution des mesures tend vers une répartition Gaussienne, ou pour le moins que les valeurs sont regroupées et ne forment pas deux "paquets" distants ce qui signifierait qu'il existe 2 sous-populations dans l'échantillon,
6. calculer la valeur de l'écart type (incertitude type) de la valeur moyenne  $\sigma(\bar{Y}) = \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{N}}$ , (c'est celle qui sera utilisée par la suite dans le calcul d'une incertitude sur une valeur composée).
7. choisir un niveau de confiance  $P\%$ , par négociation avec le client, car le coût sera différent. Par exemple, on acceptera un résultat avec 5% de chances de se tromper (soit  $P = 95\%$ ).
8. connaissant le nombre de degrés de liberté ( $N - 1$ ), prendre le facteur d'élargissement  $t_p$  dans la table de Student (figure 5.3),
9. calculer la valeur de l'incertitude élargie de la valeur moyenne :  $\Delta\bar{Y} = t_p\sigma(\bar{Y})$ .

Comment choisit-on le nombre de mesures  $N$ ? Il vous suffit d'observer lors des essais l'évolution de  $\Delta\bar{Y}$ , et de vous arrêter lorsque le client est satisfait de la précision obtenue, ou qu'il ne veut pas payer plus, ou qu'il exige de respecter une norme.

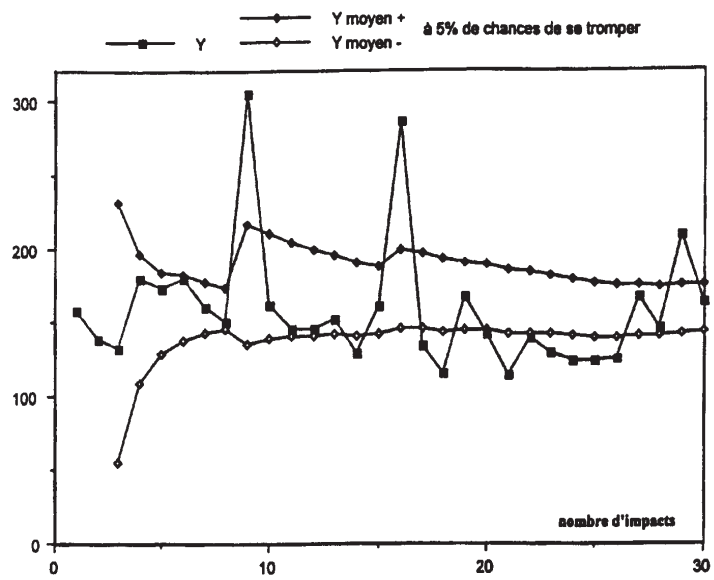


Figure 5.11: carré : les mesures  $y_i$  ; losanges : les bornes de la valeur moyenne  $\bar{Y} + \Delta \bar{Y}$  et  $\bar{Y} - \Delta \bar{Y}$  avec 5% de chances de se tromper.

Un programme en langage scilab, qui fait cette analyse et trace la courbe d'évolution de  $\bar{Y} + \Delta\bar{Y}$  et  $\bar{Y} - \Delta\bar{Y}$ , vous est fourni sur le site <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>. Il produit la figure 5.11.

*Comment peut-on écrire et sauvegarder un fichier .dat ?* La réponse est dans la vidéo 542 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=542>. Regarde-la, puis évalue son intérêt (barre la dans le graphe en fin de poly si elle a peu d'intérêt, entoure la si elle est intéressante).



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire les brevets 026, 027, 043 et 030. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 026 : savoir évaluer une incertitude avec un taux de confiance de 95% sur une valeur moyenne de mesures obtenues par répétabilité**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; attribution : autoattribution .**

Soit un jeu de points expérimentaux ( $a_i$ ) de valeurs en mètres 4.63, 4.62, 4.78, 4.23, 4.56, 4.56, 4.63, 4.72 et 4.56. Les incertitudes sur la grandeur  $a$  ne sont pas connues.

Calculez les valeurs minimales et maximales de la moyenne  $\bar{a}$  avec un taux de confiance de 95%. En cas de recherche de point aberrant, on utilisera un taux de signification du test de  $\alpha = 0.1$ .

**brevet 027 : savoir choisir le nombre de mesures pour obtenir une incertitude relative de x % sur une valeur moyenne de mesure obtenue par répétabilité**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; attribution : autoattribution .**

Télécharger le tableur-sujet *td2bis.ods* disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403> . Compléter les cases avec des " ? " .

**brevet 043 : Détermination d'une incertitude de type A, avec un taux de confiance de 90%**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit la mesure d'une même longueur  $a$  faite par répétabilité. Les valeurs mesurées successivement sont exprimées en mètres : 1.22, 1.24, 1.22, 1.25, 1.25, 1.23, 1.30, 1.23

Après avoir testé l'absence ou la présence de point(s) aberrant(s) avec un taux de signification  $\alpha = 0.05$ , quelle est la valeur moyenne  $\bar{a}$  et son incertitude au taux de confiance de 90% ? Vous pouvez utiliser le tableur *incvalmoy.ods* ou *incvalmoy.sci*

**brevet 030 : savoir évaluer une incertitude sur une valeur moyenne de mesures obtenues par répétabilité avec un taux de confiance de 90%**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; attribution : autoattribution .**

Soient les mesures d'une tension en volts  $a$  faites successivement : 1.23, 1.45, 1.43, 1.27, 1.34, 1.18.

Quelle est l'incertitude sur la valeur moyenne  $\pm \Delta \bar{a}$  avec un taux de confiance de 90% ? On pourra si nécessaire considérer  $\alpha = 0.1$  si vous souhaitez tester la présence de points aberrants.

### 5.1.7 Comparaison de deux échantillons

Lorsque l'on souhaite comparer deux types d'échantillons ou tester la reproductibilité ou la répétabilité d'une expérience, la comparaison ne peut être faite sur chaque réalisation de mesure, mais sur la moyenne obtenue sur chaque ensemble de réalisations. On pourrait aussi envisager de comparer les variances des échantillons, mais ce cas est bien plus rare. Pour ce dernier cas, nous invitons le lecteur intéressé par ce dernier test à se reporter au livre de S. Geller.

Cette problématique est bien souvent rencontrée par les enseignants et les étudiants : les deux types d'échantillons peuvent être les notes obtenues par deux sous-groupes d'une même promotion qui ont passé un examen noté par des enseignants différents. Il suffit de calculer la moyenne avec 3 chiffres significatifs pour constater que les moyennes des deux échantillons sont différentes, mais cet écart est-il significatif ? Si c'est le cas, le débat peut s'engager sur la recherche des causes (groupe plus faible, enseignant plus exigeant...). Si ce n'est pas le cas, la discussion n'a pas lieu d'être.

Les distributions suivent une loi de Student qui, si l'un des échantillons est grand, est une gaussienne. On peut se poser la question, "Quelle est la probabilité pour que la valeur absolue de la différence des deux moyennes soit supérieure ou inférieure à une valeur donnée?"

Si  $n_1$  est le nombre de mesures  $x_i$  de l'échantillon 1,  $n_2$  est le nombre de mesures  $y_i$  de l'échantillon 2, on calcule,

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum^{n_2} (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad (5.10)$$

dans la mesure où,

$$t_{ech} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_s^2}{n_1} + \frac{\sigma_s^2}{n_2}}} \quad (5.11)$$

suit une loi de student avec  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  degrés de liberté, il suffit de retrouver la valeur de  $t_{stu}$  dans le tableau 5.3. On en déduit la probabilité pour que l'écart des moyennes soit représentatif d'un même échantillon.

Si  $t_{ech} > t_{stu}$ , vous pouvez énoncer la phrase suivante : *J'affirme avec  $x\%$  de confiance, que les deux moyennes sont significativement différentes*



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faites le brevet 048. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 048 : Deux moyennes sont-elles significativement différentes ?**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une promotion de l'élèves de l'Ensim qui ont été examinés par deux jurys. Les notes des étudiants qui ont été évalués par le jury 1 sont : 12, 11, 14, 9, 15, 6, 12, 10, 11, 13. Les notes des étudiants qui ont été évalués par le jury 2 sont : 8, 15, 4, 18, 11, 10, 14, 8, 9, 7, 5, 10, 11, 13, 12, 9, 8, 9, 10, 8.

Les moyennes de ces deux groupes sont-elles significativement différentes au seuil de 95% de confiance ? Vous pouvez utiliser le programme *com-valmoy.ods*.

*Comparaison de deux échantillons : A partir de quand un échantillon est-il considéré comme "grand" ?*

La réponse est dans la vidéo 079 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=079>. Regarde-la.

### 5.1.8 Incertitudes de type B

Fondée sur l'expérience des utilisateurs, sur la connaissance des phénomènes physiques, c'est une définition *a priori* de l'étendue des valeurs possibles.

Par exemple, pour un acier dont on n'a pas mesuré les caractéristiques mécaniques, le module de Young  $E$  est compris entre  $2.05 \cdot 10^{11}$  Pa et  $2.15 \cdot 10^{11}$  Pa. Sans information complémentaire, on prendra une distribution *a priori* uniforme entre ces deux valeurs, pour calculer l'incertitude type associée.

Second exemple, dans le cas d'un affichage digital, on peut considérer la résolution de lecture de plus ou moins 0.5 digit.

Si un appareil de mesure est de classe  $c$ , et que sa gamme de mesure est  $g$ , on peut évaluer une incertitude de type B à partir de l'intervalle  $\frac{cg}{100}$ . Il faut encore savoir si les dispersions suivent une loi normale ou une loi uniforme.

Dans le cas d'une incertitude de type B, on peut donc également afficher  $X$  avec son incertitude  $\Delta X$ .

*Concernant les incertitudes de type B, y a-t-il une méthode générale ou leur dépendance de l'instrument de mesure implique-t-elle une évaluation en cas par cas ?*

La réponse est dans la vidéo 576 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=576>. Regarde-la.



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire les brevets 044 et 045. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 044 : Détermination d'une incertitude de type B d'une mesure faite avec un pied à coulisse.**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit la mesure de la dimension d'une pièce avec un pied à coulisse mécanique sans affichage digital, dont les graduations sont faites tous les 0.02 mm. La mesure donne  $a = 12.34$  mm.

Quelle est l'incertitude élargie sur cette mesure ?

**brevet 045 : Détermination d'une incertitude de type B d'une valeur donnée dans la littérature.**

**auteur : JM Génevaux et A Houdouin ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soient trois grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  qui sont données dans la littérature  $a = 12.3$  m,  $b = 13400$  A et  $c = 28.0$  kg sans indications complémentaires

Quelles sont les incertitudes élargies que l'on peut considérer sur ces grandeurs en faisant l'hypothèse que le rédacteur de l'ouvrage est cohérent ?

### 5.1.9 Détermination de l'incertitude globale

La démarche doit être la suivante :

- définition du mesurande,
- description de la procédure de mesure,
- liste des appareils utilisés lors de cette mesure,
- analyse des causes d'incertitude : sur une ligne on reporte les différents composants de la mesure, et pour chacun, on définit les causes possibles d'incertitude (exemple pour le cas d'un étalonnage d'ampèremètre, figures 5.13 5.14),
- modélisation du processus de mesure : on doit obtenir la formule liant la grandeur que l'on souhaite évaluer aux grandeurs mesurées ainsi que leurs éventuelles corrections,
- évaluation des corrections,
- calcul des incertitudes type : par la méthode de type A pour le traitement des lectures lorsqu'elles ne sont pas uniques, par la méthode de type B pour chaque appareil (étalonnage, dérive, résolution, effet de température...),
- calcul de l'incertitude type composée (voir paragraphe 5.1.14).

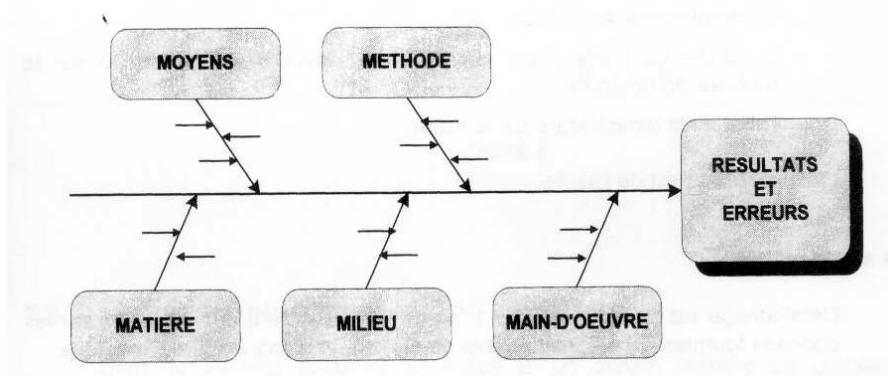


Figure 5.12: Méthode des 5 M pour la détermination des incertitudes (extrait de *recueil d'exemples d'évaluation d'incertitudes*)

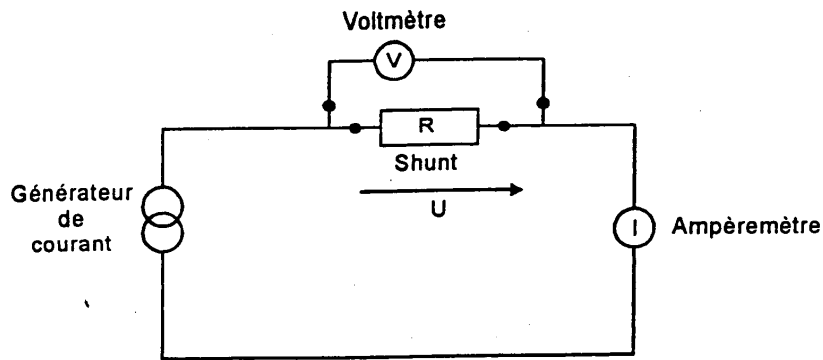


Figure 5.13: Montage d'étalonnage d'un ampèremètre (extrait de *recueil d'exemples d'évaluation d'incertitudes*)

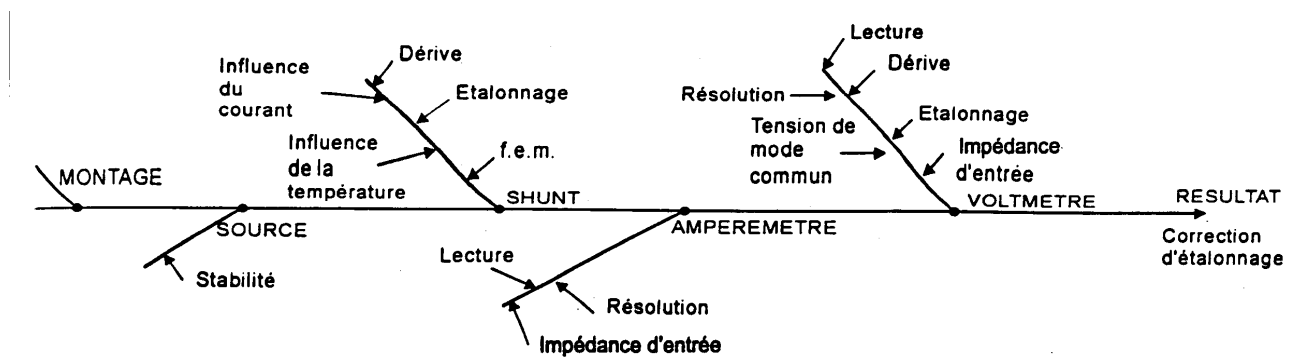


Figure 5.14: Analyse des causes d'incertitudes lors de l'étalonnage d'un ampèremètre (extrait de *recueil d'exemples d'évaluation d'incertitudes*)

Formation à la compétence orange de gestion des aléas.

### 5.1.10 Détection de points aberrants avant la détermination d'une régression linéaire

Supposons que nous disposons d'une série de  $n$  mesures de couples  $(a_i, b_i)$  de mesurandes  $a$  et  $b$ . On peut calculer, comme dans le paragraphe ci-dessus la valeur moyenne de la pente  $\bar{p}$  et  $\bar{c}$  d'une régression linéaire  $b = pa + c$  en utilisant tous les points, mais il est judicieux de vérifier auparavant que cette série ne comporte pas de mesure "aberrante".

La première idée est de tracer les points afin de voir si à l'oeil l'un des points est situé en dehors du nuage de points formé par les autres.

La seconde idée est d'effectuer un test statistique sur l'ensemble des points, et si nécessaire à commencer par le point qui est le plus "excentré" des autres. C'est la méthode statistique dont la procédure est détaillée ci-dessous.

- calcul du coefficient de régression

$$r = \frac{s_{ab}}{\sigma_a \sigma_b}, \quad (5.12)$$

avec  $s_{ab}$  la covariance entre  $a$  et  $b$  (Eq. 5.5),

- calculer

$$Q = \frac{n^2}{2} \sigma_a^2 \sigma_b^2 (1 - r^2) \quad (5.13)$$

qui représente la somme du carré de l'aire des triangles dont deux sommets sont toutes les combinaisons possibles des couples de points d'échantillonnage  $a_i, b_i$  et le troisième est le barycentre du système  $(\bar{a}, \bar{b})$  (voir fig 5.15).

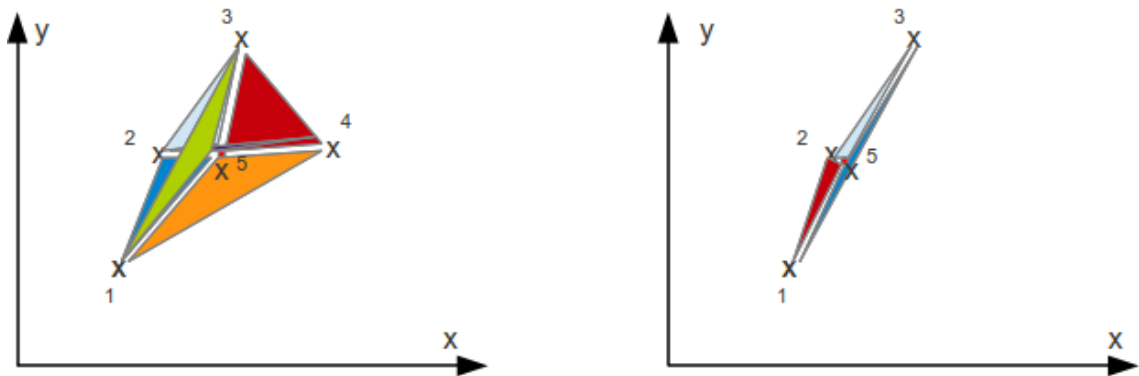


Figure 5.15: Mesure de la surface de l'ensemble des triangles reliant les points par triplet. La suppression du point le plus excentré implique la diminution la plus forte de cette surface.

- calculer pour chaque point  $j = 1$  à  $n$ , la valeur

$$\lambda^{(j)} = \frac{Q^{(j)}}{Q}, \quad (5.14)$$

où  $Q^{(j)}$  a été calculé par la formule 5.13 en considérant tous les points sauf ce point  $j$ .

- la valeur minimale des  $\lambda^{(j)}$  indique l'indice  $j_1$  la plus douteuse.
- choisir un seuil de signification  $\alpha$ , par exemple  $\alpha = 0.05$ ,
- à l'aide de la table figure 5.16 extraire la valeur  $R_{min}^{(1)}(\alpha, n)$ ,
- si  $\lambda^{(j_1)} > R_{min}^{(1)}(\alpha, n)$  alors la mesure n'est pas considérée aberrante au seuil de  $\alpha$ , et la procédure de test s'arrête,

- si  $\lambda^{(j_1)} < R_{min}^{(1)}(\alpha, n)$  alors la mesure est considérée aberrante au seuil de  $\alpha$ , il faut supprimer ce point de la liste, puis reprendre la procédure à la première étape.

Valeurs minimales admissibles  $R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$  et  $R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$  des statistiques critiques  $R_{i_0}$  et  $R_{i_0 j_0}$  (élimination des résultats aberrants d'observation; schéma de corrélation;  $\alpha$  — seuil de signification;  $n$  — nombre total des observations; l'indice supérieur de  $R$  indique le nombre de points « douteux »)

n	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,025$		$\alpha = 0,01$	
	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$
5	0,02000	0,00501	0,01000	0,00250	0,00500	0,00125	0,00200	0,00050
6	0,06525	0,04791	0,04110	0,03372	0,02589	0,02376	0,04406	0,01498
7	0,11952	0,10904	0,08452	0,08601	0,05976	0,06794	0,03780	0,04982
8	0,17328	0,16955	0,13133	0,14167	0,09953	0,11852	0,06898	0,09374
9	0,22314	0,22444	0,17711	0,19419	0,14057	0,16820	0,10358	0,13926
10	0,26827	0,27305	0,22007	0,24188	0,18053	0,21444	0,13895	0,18308
11	0,30878	0,31592	0,25965	0,28462	0,21834	0,25661	0,17364	0,22397
12	0,34511	0,35381	0,29584	0,32286	0,25361	0,29479	0,20689	0,26160
13	0,37776	0,38747	0,32886	0,35712	0,28629	0,32932	0,23835	0,29606
14	0,40719	0,41753	0,35897	0,38792	0,31647	0,36058	0,26790	0,32758
15	0,43383	0,44453	0,38650	0,41573	0,34433	0,38897	0,29556	0,35641
16	0,45804	0,46892	0,41171	0,44096	0,37007	0,41483	0,32141	0,38284
17	0,48014	0,49106	0,43487	0,46394	0,39387	0,43848	0,34555	0,40713
18	0,50038	0,51125	0,45620	0,48496	0,41593	0,46017	0,36810	0,42952
19	0,51899	0,52974	0,47591	0,50426	0,43642	0,48014	0,38919	0,45019
20	0,53615	0,54676	0,49417	0,52205	0,45547	0,49859	0,40893	0,46935
21	0,55205	0,56246	0,51113	0,53849	0,47324	0,51567	0,42743	0,48714
22	0,56680	0,57700	0,52692	0,55374	0,48984	0,53155	0,44480	0,50371
23	0,58053	0,59051	0,54166	0,56793	0,50538	0,54633	0,46113	0,51918

Suite de la table 19

n	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,025$		$\alpha = 0,01$	
	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(1)}(\alpha; n)$	$R_{\min}^{(2)}(\alpha; n)$
24	0,59335	0,60310	0,55545	0,58117	0,51996	0,56014	0,47651	0,53365
25	0,60535	0,61487	0,56838	0,59354	0,53367	0,57037	0,49102	0,54722
26	0,61660	0,62589	0,58053	0,60515	0,54657	0,58520	0,50471	0,55996
27	0,62717	0,63623	0,59197	0,61604	0,55874	0,59660	0,51767	0,57196
28	0,63713	0,64596	0,60276	0,62630	0,57025	0,60734	0,52994	0,58328
29	0,64653	0,65513	0,61296	0,63598	0,58113	0,61748	0,54158	0,59397
30	0,65540	0,66380	0,62260	0,64513	0,59144	0,62707	0,55263	0,60409
35	0,69342	0,70082	0,66402	0,68424	0,63587	0,66814	0,60048	0,64753
40	0,72335	0,72990	0,69675	0,71501	0,67113	0,70050	0,63870	0,68184
45	0,74758	0,75343	0,72330	0,73992	0,69982	0,72671	0,66994	0,70968
50	0,76763	0,77288	0,74532	0,76052	0,72365	0,74841	0,69598	0,73276
55	0,78451	0,78926	0,76388	0,77787	0,74378	0,76669	0,71803	0,75222
60	0,79895	0,80327	0,77975	0,79271	0,76102	0,78233	0,73694	0,76887
65	0,81145	0,81539	0,79351	0,80555	0,77596	0,79586	0,75336	0,78328
70	0,82238	0,82600	0,80554	0,81678	0,78904	0,80770	0,76775	0,79590
75	0,83203	0,83537	0,81616	0,82670	0,80060	0,81815	0,78048	0,80704
80	0,84061	0,84370	0,82561	0,83553	0,81088	0,82746	0,79181	0,81695
85	0,84830	0,85118	0,83408	0,84343	0,82010	0,83579	0,80197	0,82583
90	0,85524	0,85791	0,84172	0,85056	0,82841	0,84330	0,81115	0,83384
95	0,86152	0,86402	0,84864	0,85703	0,83595	0,85012	0,81946	0,84110
100	0,86725	0,86960	0,85494	0,86292	0,84281	0,85632	0,82704	0,84771
200	0,92574	0,92664	0,91924	0,92316	0,91280	0,91971	0,90435	0,915018
300	0,94751	0,94799	0,94310	0,94564	0,93871	0,94330	0,93293	0,94023
400	0,95908	0,95936	0,95573	0,95759	0,95240	0,95532	0,94801	0,95349
500	0,96631	0,96650	0,96361	0,96500	0,96093	0,96350	0,95739	0,96180

Figure 5.16: Table de détermination de l'écart maximum admissible pour ne pas rejeter une valeur douteuse dans le cas d'une régression linéaire (extrait de [7])



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire le brevet 086. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 086 : Détection statistique d'une valeur aberrante lors de la détermination d'une relation linéaire**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?], paragraphe .**

Soit un jeu de points expérimentaux  $(a_i, b_i)$  exprimés en (kg,V) tels que : (1,0.84), (1.3,1.19), (1.7,1.5), (2,1.91), (2.5,2.5), (3,1.75), (4,3.95), (4.2,4.22) et (4.3,4.5). Les incertitudes sur les grandeurs  $a$  et  $b$  ne sont pas connues.

Existe-t-il un ou plusieurs points aberrants au seuil de signification  $\alpha = 5\%$  ? Si oui, lesquels ?

*Qu'est-ce qu'un barycentre ?*

La réponse est dans la vidéo 075 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=075>. Regarde-la.

### 5.1.11 Evaluation statistique de l'incertitude sur une pente $p$

On recherche une pente dans le cas où la modélisation nous laisse présager une relation de type  $b = pa + c$ .

Dans le cas où les incertitudes sur  $a$  et  $b$  sont de type A, on peut évaluer l'incertitude sur les deux coefficients de la régression  $p$  et  $c$ , par la démarche suivante :

1. obtenir par essai  $N$  couples  $(a_i, b_i)$
2. tracer la courbe et vérifier, à l'oeil, la linéarité de la corrélation (cela vous évitera d'essayer de faire passer une droite par des points voisins d'une parabole !).
3. vérifier qu'il n'y a pas de point aberrant,
4. calculer les estimateurs des coefficients de la droite des moindres carrés,

$$p = \frac{N \sum_{i=1}^N a_i b_i - \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N b_i}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[ \sum_{i=1}^N a_i \right]^2} \quad (5.15)$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N b_i \sum_{i=1}^N a_i^2 - \sum_{i=1}^N a_i b_i \sum_{i=1}^N a_i}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[ \sum_{i=1}^N a_i \right]^2}, \quad (5.16)$$

5. les résidus  $r_i = b_i - (pa_i + c)$  peuvent être calculés.
6. l'écart type sur chaque résidu  $\sigma_{r_i}$ , est lié à l'écart type sur la dispersion de la mesure  $\sigma$  par,

$$\sigma_{r_i}^2 = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{2a_i \sum_{j=1}^N a_j - Na_i^2 - \sum_{j=1}^N a_j^2}{N \sum_{j=1}^N a_j^2 - \left[ \sum_{j=1}^N a_j \right]^2} \right]. \quad (5.17)$$

Ceci traduit que les résidus  $r_i$  de chaque point, sont corrélés entre eux. Or on ne connaît pas  $\sigma$ . La formule 5.17 n'est donc pas utilisable. On calculera un estimateur  $\sigma_e$  de l'écart type  $\sigma$  par,

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N r_i^2}{N - 2}, \quad (5.18)$$

7. on calculera les grandeurs écart type de la pente ( $\sigma_p$ ) et de l'ordonnée à l'origine ( $\sigma_c$ ) telles que,

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_e^2 N}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[ \sum_{i=1}^N a_i \right]^2}, \quad (5.19)$$

$$\sigma_c^2 = \frac{\sigma_e^2 \sum_{i=1}^N a_i^2}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[ \sum_{i=1}^N a_i \right]^2}, \quad (5.20)$$

8. connaissant le nombre de degrés de liberté ( $N - 2$ ), prendre le facteur d'élargissement  $t_p$  dans la table de Student.

9. obtenir les valeurs des incertitudes élargies sur  $p$  et  $c$  :

$$\Delta p = t_p \sigma_p, \quad (5.21)$$

$$\Delta c = t_p \sigma_c. \quad (5.22)$$

10. obtenir les valeurs des pentes maximale et minimale

$$p_{max} = p + \Delta p, \quad (5.23)$$

$$p_{min} = p - \Delta p, \quad (5.24)$$

11. obtenir les valeurs des ordonnées à l'origine maximale et minimale

$$c_{max} = c + \Delta c, \quad (5.25)$$

$$c_{min} = c - \Delta c. \quad (5.26)$$

On appellera précision sur la pente la valeur adimensionnelle  $\Delta p/p$ .

*Nous sommes à la page 31, dans votre cours vous dites souvent connaissant le nombre de degrés de liberté. Il y est écrit  $N-2$  ... Pourquoi ?*

La réponse est dans la vidéo 080 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=080>. Regarde-la.

Appliquons cette méthode à un exemple. L'évolution de la pente  $p$  et de l'ordonnée à l'origine  $c$  est tracée sur les figures 5.17. Si le modèle est linéaire sur tout le domaine d'étude, la convergence des pentes maximale et minimale doit être observée. L'augmentation du nombre de points pris en compte doit se traduire par une diminution de l'écart entre pente maximale et minimale, si le bruit de mesure n'augmente pas. La solution recherchée est la partie commune des valeurs admissibles sur l'ensemble du domaine. Elle peut différer de la solution obtenue avec le nombre maximal de points pris en compte (voir figure 5.17).

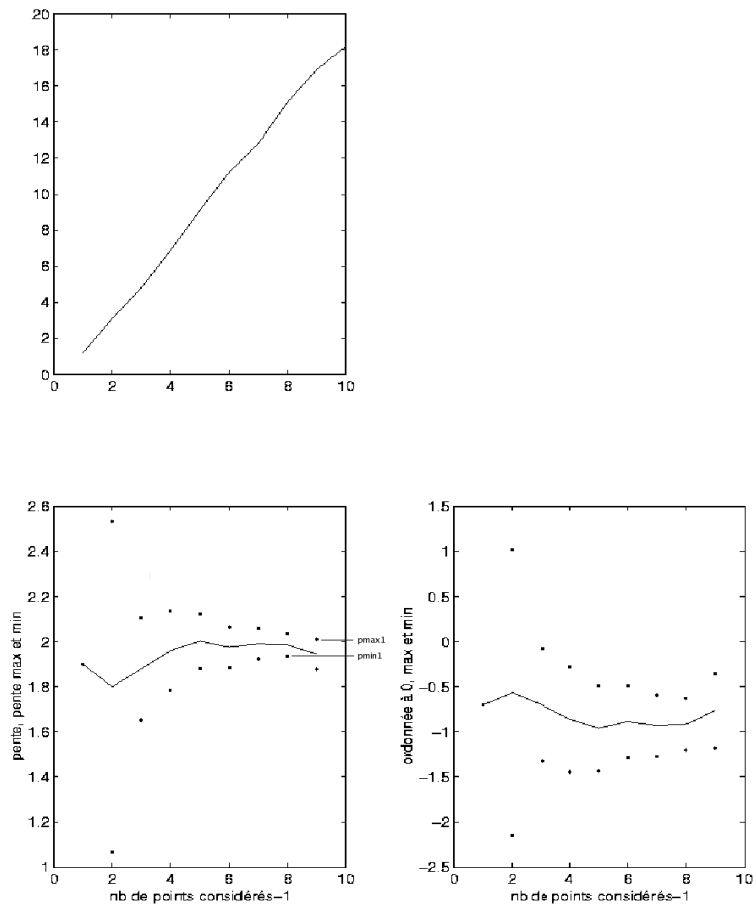


Figure 5.17: (haut) évolution de  $y$  en fonction de  $x$ . (gauche) évolution des valeurs maximale et minimale de pente en fonction du nombre de points considérés. (droite) évolution des valeurs maximale et minimale d'ordonnée à l'origine en fonction du nombre de points considérés. On notera que la valeurs maximale  $p_{max1}$  et minimale  $p_{min1}$  retenues ne sont pas nécessairement celles correspondantes au nombre maximal de points.



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faites le brevet 008 à l'aide du programme scilab *incvalli.sce*. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 008 : Détection statistique d'une valeur aberrante lors de la détermination d'une relation lin008 : évaluation statistique de l'incertitude sur une droite passant au mieux de points expérimentaux d'incertitude inconnue**  
auteur : JM Génevaux ; ressource : cours [?] .

Soit un jeu de points expérimentaux  $(a_i, b_i)$  exprimés en (V,m) tels que : (1,0.84), (1.3,1.19), (1.7,1.5), (2,1.91), (2.5,2.5), (3,1.75), (4,3.95), (4.2,4.22) et (4.3,4.5). Les incertitudes sur les grandeurs  $a$  et  $b$  ne sont pas connues.

Si l'on modélise le lien entre  $a$  et  $b$  par un modèle linéaire  $b = pa + c$ , quelle est la précision, avec un taux de confiance de 95%, sur la pente  $p$  passant par ces points ?

### 5.1.12 Evaluation manuelle de l'incertitude sur une pente $p$

On recherche une pente dans le cas où la modélisation nous laisse présager une relation de type  $b = pa + c$ .

Cette méthode ne peut s'appliquer que si pour les deux paramètres  $a$  et  $b$  les incertitudes sont connues (voir figure 5.18).

1. faire les mesures des couples  $(a_i, b_i)$ .
2. placer les couples  $(a_i, b_i)$  dans un graphe.
3. tracer les rectangles d'incertitude autour de chaque couple. Leur dimension peut être fonction du couple.
4. chercher les droites de pente maximale et minimale qui passent **par tous les rectangles d'incertitude**. Si nécessaire, éliminer les points aberrants (vis-à-vis du modèle que vous avez en tête). Si les incertitudes sont tellement petites qu'elle sont non représentables sur le graphe, il est possible d'effectuer un zoom sur les résidus entre le points de mesure et une droite des moindres carrés. Ceci permet de les visualiser, puis de faire le tracé.
5. mesurer les pentes max et min  $p_{min}$  et  $p_{max}$

*Lorsque l'on recherche l'incertitude sur la pente pour la méthode manuelle lorsque l'on connaît l'incertitude sur chaque point, il est difficile de trouver ces pentes maxi et mini. La réponse est disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=544>. Regarde-la, puis évalue son intérêt (barre la dans le graphe en fin de poly si elle a peu d'intérêt, entoure la si elle est intéressante).*

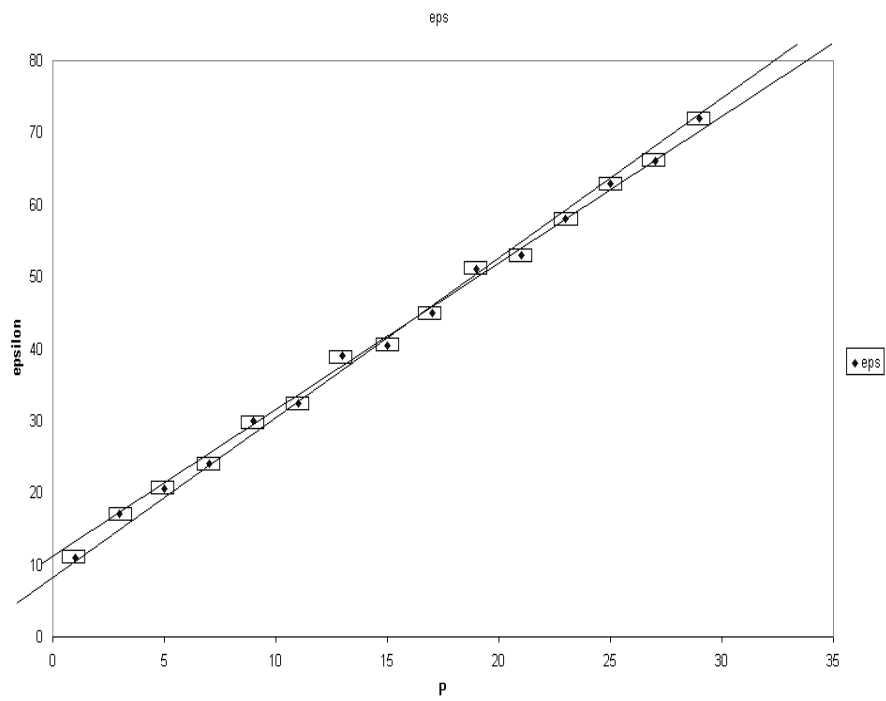


Figure 5.18: Tracé à la main des pentes maximale et minimale passant par les rectangles d'incertitude.



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faite le brevet 007 sur une feuille de papier. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 007 : évaluation manuelle de l'incertitude sur une droite passant au mieux de points expérimentaux d'incertitude connue**  
auteur : JM Géneaux ; ressource : cours [?] ; Autoattribution

Soient des données représentées par des couples (x,y) exprimés en (mètres,Volts) tels que (1,0.84), (1.3,1.19), (1.7,1.5), (2,1.91), (2.5,2.5), (3,2.75), (4,3.95), (4.2,4.22), (4.3,4.5). Les incertitudes sont  $\Delta x = 0.2$  m et  $\Delta y = 0.15$  V.

Tracez, mesurez et affichez la précision sur la pente d'un modèle linéaire passant par ces points.

### 5.1.13 Evaluation statistique d'une limite de linéarité et de la pente avant cette limite

Dans le cas d'un essai, la rupture de linéarité n'est pas nécessairement évidente. Il s'agit de déterminer la valeur pour laquelle cette limite est atteinte et de mesurer la pente précédente. Nous le ferons dans le cas où les incertitudes sur les grandeurs mesurées sont de type A pour des petits échantillons.

Dans le cas où le nombre de données est très grand, on pourra se référer aux travaux de De Domenico et Latora [8].

Il faut être capable de détecter la coordonnée  $x$  à partir de laquelle un modèle linéaire n'est plus acceptable. Pour ce faire, il faut calculer la pente de la droite des moindres carrés et son incertitude, en considérant successivement un nombre de points croissants ( les 3 premiers points expérimentaux, les 4, les 5 ...).

Nous pouvons rejeter l'hypothèse de linéarité sur toute la plage de mesure, dès que il n'existe plus de valeur de pente admissible sur l'ensemble du domaine (figure 5.19), c'est-à-dire lorsque la plus petite des valeurs maximale  $p_{max2}$  devient inférieure à la plus grande des valeurs minimales  $p_{min1}$ . Soit  $b$  le numéro du point tel que la pente minimale  $p_{min1}$  soit atteinte. Nous considérerons que le domaine de linéarité est compris entre le premier point et le  $b$ ème point. On peut alors obtenir les valeurs maximale et minimales de pente  $p_{max1}$   $p_{min1}$ , ainsi que les valeurs extrêmes de l'ordonnée à l'origine  $c_{min1}$  et  $c_{max1}$ .

Par exemple, si l'on souhaite aussi calculer la limite d'élasticité en terme de variable  $y$ , on peut calculer la valeur de  $y$  la plus probable pour les points compris entre 1 et  $b$ ,

$$y_{lim} = \frac{p_{max1} + p_{min1}}{2} x_b + \frac{c_{max1} + c_{min1}}{2}. \quad (5.27)$$

Si l'on considère que la pente et l'ordonnée à l'origine sont décorréelées (ce qui est abusif), alors l'incertitude sur  $y_{lim}$  est donnée par l'incertitude sur  $c$  :

$$y_{limmax} = y_{lim} + \frac{c_{max1} - c_{min1}}{2}, \quad (5.28)$$

$$y_{limmin} = y_{lim} - \frac{c_{max1} - c_{min1}}{2}. \quad (5.29)$$

En effet, la probabilité d'être simultanément avec la pente maximale à 95% et l'ordonnée à l'origine maximale à 95 %, est avec une probabilité plus faible.

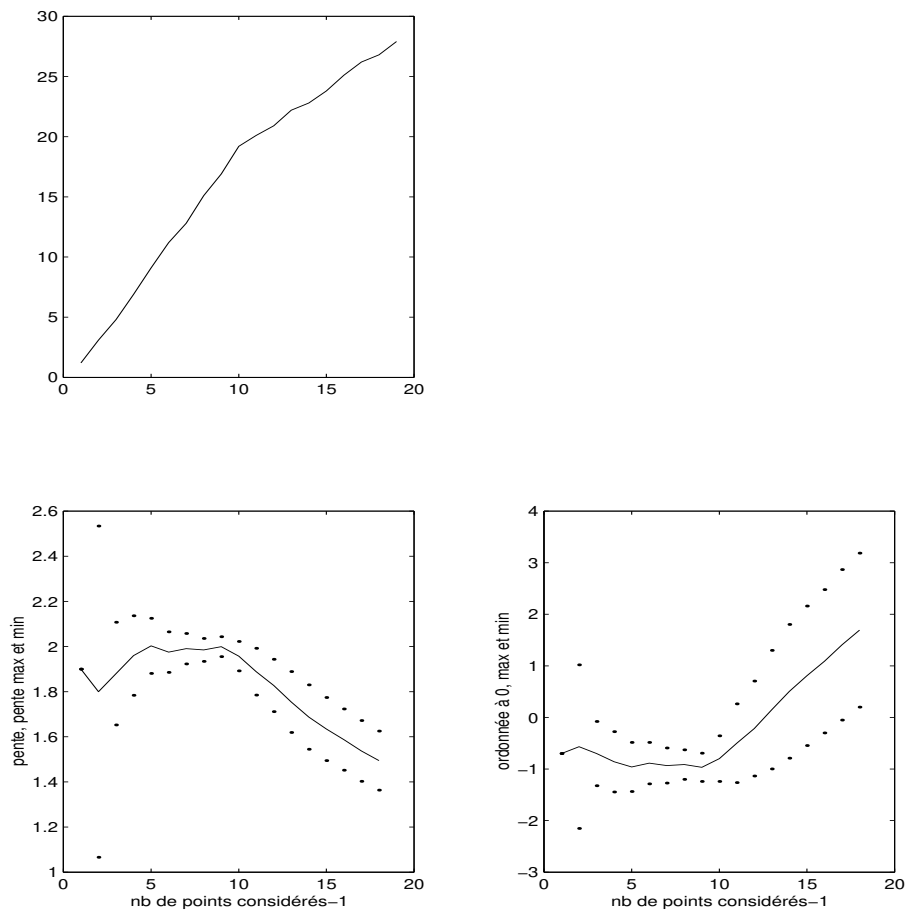


Figure 5.19: (haut) évolution de  $y$  en fonction de  $x$ . (gauche) évolution des valeurs maximale et minimale de pente en fonction du nombre de points considérés. (droite) évolution des valeurs maximale et minimale d'ordonnée à l'origine en fonction du nombre de points considérés. Le domaine de linéarité est ici compris entre 1 et 10 points.

Ceci est fait par le programme scilab "incvalli.sci" accessible via <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?i>

*Page 34 : Qu'est-ce que la limite d'élasticité ?*

La réponse est dans la vidéo 081 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=081>.  
Regarde-la.

Cette méthode est appliquée aussi à un autre exemple : une portion d'une fonction racine (figure 5.20).

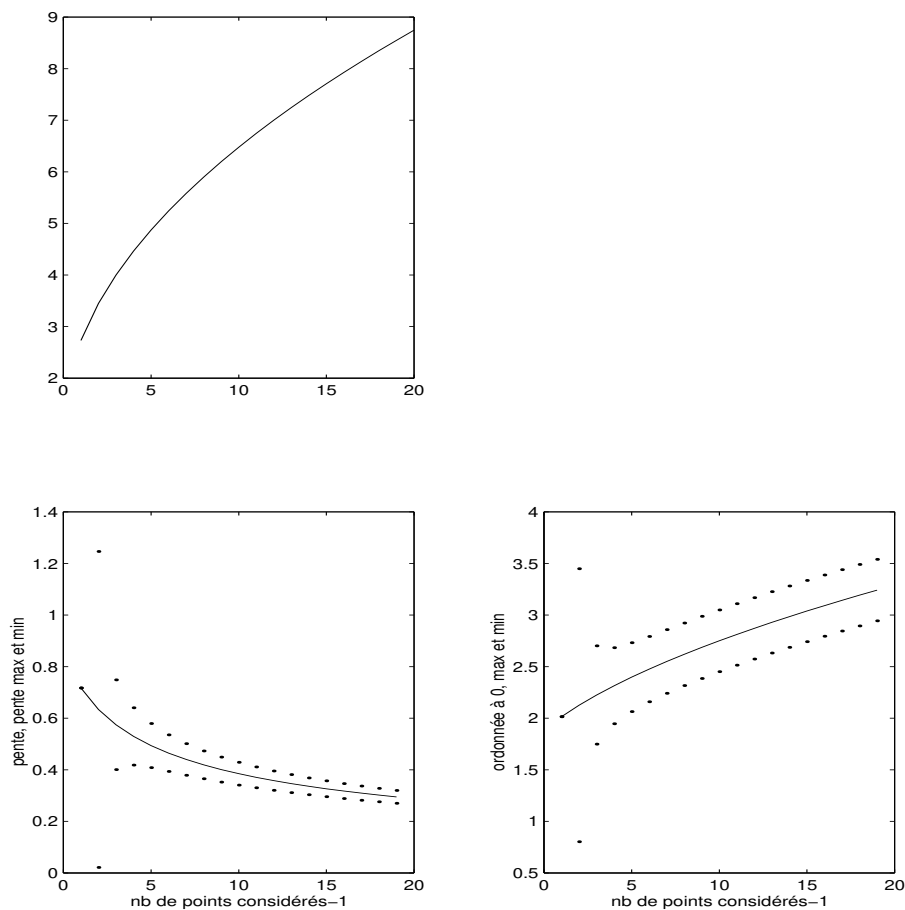


Figure 5.20: (haut) évolution de  $y$  en fonction de  $x$ . (gauche) évolution des valeurs maximale et minimale de pente en fonction du nombre de points considérés. (droite) évolution des valeurs maximale et minimale d'ordonnée à l'origine en fonction du nombre de points considérés. Le test est fait sur une fonction "racine".



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faite les brevets 029. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 029 : évaluation statistique de la fin de dépendance linéaire entre deux variables  $y = px + c$**   
auteur : JM Génévaux ; ressource : [?] .

Soit un jeu de points expérimentaux  $(a_i, b_i)$  tels que :  $(1, 0.84)$ ,  $(1.3, 1.19)$ ,  $(1.7, 1.5)$ ,  $(2, 1.91)$ ,  $(2.5, 2.5)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3.5, 3)$ ,  $(4, 3.25)$  et  $(4.3, 2.95)$ . Les incertitudes sur les grandeurs  $a$  et  $b$  ne sont pas connues.

Si l'on modélise le lien entre  $a$  et  $b$  par un modèle linéaire  $b = pa + c$  à partir des premiers points de mesure, détectez la fin de linéarité avec un taux de confiance de 95%, donnez le nombre de points tels que l'hypothèse de linéarité est valide et l'incertitude sur la pente.

Formation à la compétence verte de gestion des aléas.

### 5.1.14 Calcul de l'incertitude sur une grandeur composée, à partir de celles des paramètres expérimentaux



Si vous voulez vérifier avant toute chose que modifier les incertitudes sur les données, les lois de distribution, les valeurs, influent sur la valeur moyenne d'une grandeur composée et sur son incertitude, je vous invite à faire la manipulation 001, dont le fichier *manip001.ods* est disponible sur la page moodle de ce cours.

Soit une grandeur  $Y$  fonction des  $q$  paramètres  $x_1, \dots, x_q$ . Nous noterons  $Y = f(x_1, x_2, \dots)$ .

Supposons que nous connaissons les écarts-types  $\sigma_i$  sur chaque paramètre  $x_i$ . Cet écart-type dépend de la forme de probabilité dans l'intervalle de tolérance (figure 5.21). L'écart-type  $\sigma_Y$  sur la grandeur  $Y$  est donné par,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^q \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} s_{x_i x_j}, \quad (5.30)$$

avec la covariance entre les deux paramètres  $x_i$  et  $x_j$  donnée par,


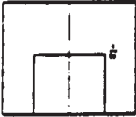

$$s_{x_i x_j} = E [(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)], \quad (5.31)$$

que l'on peut estimer dans le cas de  $N$  paires d'observations simultanées par,

$$s_{x_i, x_j} = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N (x_{il} - \bar{x}_i)(x_{jl} - \bar{x}_j). \quad (5.32)$$

## LOIS POUR LE TYPE B

### ■ LOIS DE PROBABILITE USUELLES POUR LA METHODE DE TYPE B

Moyenne $\mu=0$ et étendue $2a$ .			
Lois		Variance	Ecart-type
Normale $a=3\sigma$ 99.73%		$\frac{a^2}{9}$	$\frac{a}{3}$
Uniforme		$\frac{a^2}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$
Dérivée d'arc sinus		$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

**ENSIM**

Figure 5.21: Relations entre l'intervalle de tolérance, sa forme et l'écart type.

L'estimation de la variance de  $\bar{Y}$  nécessite donc de calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  par rapport à chaque paramètre  $x_i$ . Pour ce faire, vous utilisez les valeurs moyennes de chaque paramètre  $x_i$  et non des valeurs particulières lorsque une grandeur  $x_i$  est mesurée plusieurs fois. La lourdeur (intellectuelle) de cette démarche est néanmoins utile car elle permet de ne pas surestimer l'incertitude sur  $\bar{Y}$ .

Une fois la valeur de l'incertitude-type obtenue, il faut calculer le facteur d'élargissement, et pour cela connaître le nombre de degrés de liberté effectifs [4] :

$$\nu_{eff} = \frac{\sigma_{\bar{Y}}^4}{\sum_{i=1}^q \frac{(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i)^4}{\nu_i}}, \quad (5.33)$$

- Si le paramètre  $x_i$  est déterminé par une méthode de type A,  $\nu_i$  le nombre de degrés de liberté de la variable  $x_i$  est connu.
- Si le paramètre  $x_i$  est déterminé par une méthode de type B, soit l'on considère que  $\nu_i = \infty$ , soit on le calcule par,

$$\nu_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta u}{u} \right]^{-2}. \quad (5.34)$$

$\frac{\Delta u}{u}$  est la précision relative de la mesure

**Erreur classique :** Si l'un des paramètres  $x_i$  est la moyenne de  $N$  mesures  $a_j$ , alors  $x_i = \bar{a}$ , pour le calcul de la grandeur composée, il faut utiliser  $\sigma(x_i) = \sigma(\bar{a})$  et non  $\sigma(a) = \sqrt{N} \sigma(\bar{a})$ .



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faites les brevets 046 et 084. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 046 : Incertitude sur une grandeur composée**  
**auteur : JM Génevaux T Jupin; ressource : [?] ; autoattribution**

Soit une grandeur  $y$  composée de grandeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  par la relation  $y = (ab)/(c + 2d)$ . La valeur  $a = 12.34$  mm est mesurée au pied à coulisse dont les graduations sont distantes de 0.02 mm. La valeur  $b$  est mesurée par une répétabilité de 12 mesures (1.123, 1.124, 1.119, 1.130, 1.124, 1.128, 1.121, 1.120, 1.123, 1.117, 1.127, 1.125), la valeur  $c$  est donnée dans la littérature  $c = 12.3$  V et la valeur  $d$  est de moyenne  $\bar{d} = 1.25$  V avec un écart type sur la moyenne de  $\sigma_{\bar{d}} = 0.04$  V et une loi de répartition de Student à 12 degrés de liberté autour de cette moyenne.

Quelle est la valeur moyenne et l'incertitude élargie sur  $y$  à un taux de confiance de 95% ?

**brevet 084 : Incertitude composée et covariance**  
**auteur : JM Génevaux et S VERHAEGHE ; ressource : [?],**  
**paragraphe**

Soit une série de plaque qui ont été découpées sur une même machine. On mesure les deux dimensions  $a$  et  $b$  dans le plan moyen de cette plaque. On obtient les couple en (m,m) : (1.23,2.34), (1.18,2.17), (1.25,2.32), (1.30,2.41), (1.19,2.21) et (1.21,2.25). Soit  $s = ab$  l'aire de la surface de ces plaques.

Quelle est la valeur moyenne de  $s$  et l'incertitude élargie  $\Delta \bar{s}$  avec un taux de confiance de 95% ?

### 5.1.15 Méthode de grand-papa : à ne plus utiliser, car fausse.

On peut croiser dans la littérature, la méthode faisant apparaître les dérivées logarithmiques, appelée "méthode de calcul d'erreur". Si l'on se réfère à la définition de l'erreur (écart entre la valeur obtenue et la valeur vraie), dans la mesure où l'expérimentateur ne connaît pas la valeur vraie qui reste inaccessible, il lui est impossible en toute rigueur de calculer cette erreur.

Néanmoins, pour ceux qui y tiennent vraiment, prenons un exemple,

$$X = 4 \frac{c_1^2 \sqrt{c_4}}{c_2 c_3^3}, \quad (5.35)$$

en prenant le logarithme,

$$\log X = \log 4 + 2 \log c_1 + 1/2 \log c_4 - \log c_2 - 3 \log c_3, \quad (5.36)$$

et en dérivant,

$$\frac{dX}{X} = 2 \frac{dc_1}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{dc_4}{c_4} - \frac{dc_2}{c_2} - 3 \frac{dc_3}{c_3}, \quad (5.37)$$

on obtient classiquement,

$$\frac{\Delta X}{X} = 2 \frac{\Delta c_1}{c_1} + 1/2 \frac{\Delta c_4}{c_4} + \frac{\Delta c_2}{c_2} + 3 \frac{\Delta c_3}{c_3}. \quad (5.38)$$

**Vous êtes en droit de sommer les erreurs, mais pas les incertitudes!**

En assimilant  $\Delta X$  à une incertitude (alors que c'est une erreur), vous présumez que les valeurs extrêmes des  $c_i$  peuvent être atteintes simultanément, et donc a fortiori, que les paramètres sont fortement corrélés. Votre "incertitude" obtenue sur  $X$  est plus grande que si elle est évaluée statistiquement : vous obtenez un piètre résultat.

Le client risque de trouver un meilleur rapport qualité prix chez votre concurrent qui ne confond pas ces deux concepts.

De plus cette démarche est moins directe si la fonction présente des termes additionnels comme dans

$$X = 4 \frac{c_1^2}{c_2 c_3^3} + \frac{\sqrt{c_4}}{c_2^2}. \quad (5.39)$$

Il faut alors calculer la différentielle totale exacte,

$$dX = dc_1 \left[ 8 \frac{c_1}{c_2 c_3^3} \right] + dc_2 \left[ \frac{-4c_1^2}{c_2^2 c_3^3} + \frac{-3\sqrt{c_4}}{c_2^3} \right] + dc_3 \left[ \frac{-12c_1^2}{c_2 c_3^4} \right] + dc_4 \left[ \frac{1}{2c_2^2 \sqrt{c_4}} \right], \quad (5.40)$$

puis identifier les variations aux erreurs en prenant les valeurs absolues de chaque terme,

$$\Delta X = \Delta c_1 \left| 8 \frac{c_1}{c_2 c_3^3} \right| + \Delta c_2 \left| \frac{-4c_1^2}{c_2^2 c_3^3} + \frac{-3\sqrt{c_4}}{c_2^3} \right| + \Delta c_3 \left| \frac{-12c_1^2}{c_2 c_3^4} \right| + \Delta c_4 \left| \frac{1}{2c_2^2 \sqrt{c_4}} \right|, \quad (5.41)$$

A bon entendeur ...



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faite le brevet 047. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 047 : Incertitude sur une grandeur composée à partir des sommation d'erreurs relatives**

**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] ; autoattribution .**

Soit une grandeur  $y$  composée de grandeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  par la relation  $y = (ab)/(c + 2d)$ . La valeur  $a = 12.34$  mm est mesurée au pied à coulisse dont les graduations sont distantes de 0.02 mm. La valeur  $b$  est mesurée par une répétabilité de 12 mesures (0.123, 0.124, 0.119, 0.130, 0.124, 0.128, 0.121, 0.120, 0.123, 0.117, 0.127, 0.125), la valeur  $c$  est donnée dans la littérature  $c = 12,3$  V et la valeur  $d$  est de moyenne  $\bar{d} = 1.25$  avec une variance de  $\sigma_d = 0.12$  et une loi de répartition de Student à 12 degrés de liberté autour de cette moyenne.

Pouvez-vous déterminer la valeur moyenne et l'incertitude élargie sur  $y$  à un taux de confiance de 95% à l'aide de la méthode des dérivées logarithmiques (méthode de grand-papa) ?

*Page 40, vous présentez la méthode "de grand-papa" et dites qu'il ne faut pas l'utiliser, pourtant, vous posez un brevet demandant de le faire. N'est-ce pas contradictoire ?*

La réponse est dans la vidéo 082 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=082>. Regarde-la.

### 5.1.16 Comparaison entre une théorie et une expérience

Deux cas peuvent se présenter pour la valeur théorique :

- Si la valeur théorique d'une grandeur  $y_{th}$  est donnée dans la littérature, vous connaissez ses valeurs minimales et maximales.
- si à l'aide d'un modèle, la théorie vous a fourni une relation entre la grandeur recherchée  $y_{th}$  en fonction de paramètres  $x_i$ ,  $i$  allant de 1 à  $N$ . Il vous faut avoir pris soin de considérer dans la relation précédente l'ensemble des données réellement mesurées  $x_i$ . Par la propagation d'incertitudes paragraphe 5.1.14, et en ayant choisi un taux de confiance (par exemple 95%) vous connaissez l'incertitude élargie sur la valeur fournie par le modèle. Vous avez donc les valeurs minimales et maximales de  $y_{th}$ .

Du côté expérimental, deux cas se présentent aussi ::

- A l'aide d'une expérience, vous avez obtenu directement la valeur de  $y_{ex}$  et avez évalué l'incertitude élargie sur celle-ci. Vous avez donc les valeurs minimales et maximales de  $y_{ex}$ .
- A l'aide d'une expérience, vous avez obtenu indirectement la valeur de  $y_{ex}$  à partir de mesures de grandeurs  $z_i$ . Par la même démarche que précédemment, vous avez évalué l'incertitude élargie sur  $y_{ex}$ . Vous avez donc les valeurs minimales et maximales de  $y_{ex}$ .

Si une zone commune existe entre  $[y_{thmin}, y_{thmax}]$  et  $[y_{exmin}, y_{exmax}]$ , alors le modèle est validé par l'expérience.

Si aucune zone commune n'existe entre  $[y_{thmin}, y_{thmax}]$  et  $[y_{exmin}, y_{exmax}]$ , alors le modèle n'est pas adapté à l'expérience.



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, faite le brevet 010. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 010 : comparaison entre un modèle et une expérience**  
**auteur : JM Génevaux ; ressource : [?] .**

Une modélisation permet de trouver un encadrement d'une grandeur  $a$  :  $13.43 < a_{theo} < 14.56$ . Une expérience permet de trouver l'encadrement expérimental de la même grandeur  $a$  :  $12.26 < a_{expe} < 13.57$ .  
 Le modèle est-il adapté à l'expérience ?

### 5.1.17 Un exemple : Ouf !

Nous souhaitons vérifier le modèle suivant : les déformations d'une éprouvette en traction varient linéairement avec la pression dans un vérin qui tire sur la structure. La loi théorique est,

$$\epsilon = P * \frac{S_v}{ES}, \quad (5.42)$$

avec  $\epsilon$  la déformation,  $P$  la pression,  $S_v$  la section du vérin,  $S$  la section de l'éprouvette et  $E$  le module de Young.

#### Démarches expérimentales

- Supposons que pour une pression nulle, l'équilibrage du pont d'extensométrie n'est pas parfait. L'étudiant pressé peut se contenter de deux mesures,

$P$ $10^5 \text{ Pa}$	$\epsilon$ $10^{-6}$
1	12
20	54

Se jettant ensuite sur la calculette, il obtient deux valeurs de pente  $\epsilon/P$ ,  $12/1 = 12 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ , et  $54/20 = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$

- Il est étonnant que la sensibilité de la déformation/pression dépende de la pression. Ce n'est pas conforme au modèle que l'on cherche à vérifier (la pente  $\epsilon/P$  doit être constante). Il est encore plus inutile de faire la moyenne de ces deux valeurs.
- Le modèle ne prend pas en compte le fait que la déformation n'est pas nulle à pression nulle (défaut d'équilibrage) aussi il faut considérer la pente entre les deux points :  $\epsilon/P = \frac{54-12}{20-1} = 2.21052632 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$
- les valeurs de pression et de déformations sont données avec deux chiffres significatifs, le résultat ne peut être donné avec plus de deux chiffres significatifs : nous garderons donc  $\epsilon/P = 2.2 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$
- il est nécessaire de faire une répétabilité afin de confirmer la valeur obtenue.

- Un deuxième essai fournit

$P$ $10^5 \text{ Pa}$	$\epsilon$ $10^{-6}$
3	14
30	70

- La pente obtenue par le deuxième essai est :  $\epsilon/P = 2.1 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ . Elle est différente de la valeur du premier essai. Pour pouvoir affirmer que ces *estimations* de pente sont représentatives de la même grandeur, il faut évaluer l'incertitude sur chacune des mesures. Si vous ne faites pas cela, l'essai doit être considéré comme non répétable, et ce n'est pas la peine d'aller plus loin sans avoir compris les causes de cette mauvaise répétabilité.
- Si les incertitudes  $\Delta\epsilon$  en déformation ( $1 \cdot 10^{-6}$  par exemple) et  $\Delta P$  en pression ( $2 \cdot 10^5$  par exemple) sont connues (type B), alors on peut tracer (ou calculer) les pentes maxi et mini qui passent par les rectangles d'incertitudes (voir figure 5.18). Ceci doit être fait pour les deux essais. Par exemple pour le deuxième essai, on obtient,

$$pmin = \frac{(70-\Delta\epsilon)-(14+\Delta\epsilon)}{(30+\Delta P)-(3-\Delta P)} = 1.74 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.43)$$

$$pmax = \frac{(70+\Delta\epsilon)-(14-\Delta\epsilon)}{(30-\Delta P)-(3+\Delta P)} = 2.54 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.44)$$

- L'essai est considéré *répétable*, si une zone commune est obtenue entre les pentes minimale et maximale des deux essais.
- Si les incertitudes en déformation et en pression ne sont pas connues (type A), il faut évaluer l'écart type sur la mesure des paramètres. Un essai avec plus de deux points de mesure est nécessaire.

3. Un essai est effectué à pression croissante en prenant plus de deux mesures.

$P$ $10^5 \text{ Pa}$	$\epsilon$ $10^{-6}$
1	11
3	17
5	21
7	24
9	30
11	32
13	39
15	41
17	45
19	51
21	53
23	58
25	63
27	66
29	72

- Si les incertitudes sont de type B, on trace le graphe de la figure 5.18, en veillant à ce que les droites passent par tous les rectangles associés aux points expérimentaux. On trouve sur ce graphe,

$$pmin = \frac{80-11.2}{34.1-0} = 2.018 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.45)$$

$$pmax = \frac{80-8.1}{32.4-0} = 2.219 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.46)$$

- Si les incertitudes sont de type A, on utilise la méthode statistique, par l'intermédiaire du programme *incvalli.m*. On visualise les évolutions des pentes moyenne, minimale et maximale (avec 5% de chances de se tromper), lorsque l'on considère un nombre croissant de points (voir 5.22).

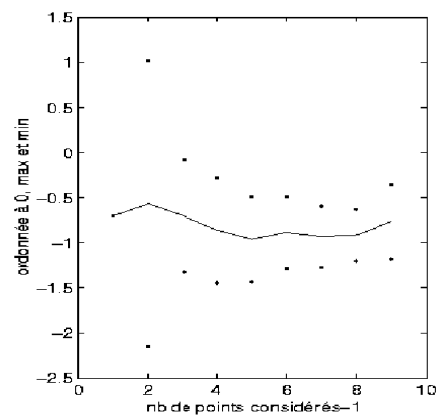
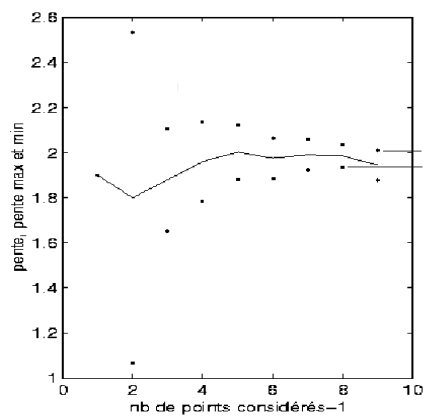
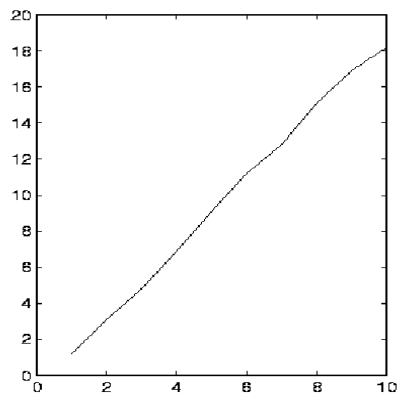


Figure 5.22: (haut) évolution de  $\epsilon$  en fonction de  $P$ . (gauche) évolution des valeurs maximale et minimale de pente en fonction du nombre de points considérés. (droite) évolution des valeurs maximale et minimale d'ordonnée à l'origine en fonction du nombre de points considérés.

On obtient le tableau pour la pente,

nb points	pente moyenne	pente maxi	pente mini
4	2.3750	6.9613	-2.2113
5	2.1250	3.0560	1.1940
6	2.2500	2.7090	1.7910
7	2.1429	2.4568	1.8289
8	2.2232	2.4606	1.9859
9	2.1339	2.3446	1.9232
10	2.1000	2.2639	1.9361
11	2.1318	2.2666	1.9970
12	2.0977	2.2142	1.9812
13	2.0935	2.1893	1.9977
14	2.1044	2.1855	2.0233
15	2.0940	2.1640	2.0239
16	2.1098	2.1731	2.0466

On retient la valeur minimale des pentes maxi 2.1640 et maximale des pentes mini 2.0466. Comme il existe une zone possible, on peut donc afficher comme résultat :

Le modèle linéaire est validé par l'expérience.

La pente est comprise entre,

$$pmin = 2.0466 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.47)$$

$$pmax = 2.1640 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.48)$$

- Il reste à vérifier la répétabilité de la mesure. On effectue une deuxième prise de mesure, on réitère la démarche ci-dessus, et on vérifie qu'il existe une zone commune entre les valeurs possibles de pente des deux essais.
- Il faut encore comparer au modèle avec incertitudes

### Démarche théorique

L'incertitude sur la pente théorique doit être évaluée à partir des incertitudes des grandeurs qui ont été mesurées. Si la section de l'éprouvette  $S$  est évaluée par la mesure des cotes  $b$  et  $h$  de cette section, il faut écrire la formule en ces termes.

$$\frac{\epsilon}{P_{th}} = \frac{S_v}{ES} = \frac{S_v}{Ebh}. \quad (5.49)$$

Si les données sont :  $S_v = 7.1410^{-4} m^2$ ,  $E = 2.110^{11} Pa$ ,  $S = bh$ , avec  $b = 0.02m$  et  $h = 0.0078m$  mesurées au pied à coulisse, la valeur moyenne est  $2.1795 \cdot 10^{-11} Pa^{-1}$ , et la variance de la pente est donnée par la formule (5.30). Les mesures des grandeurs n'étant pas corrélée, la covariances de celles-ci est nulle, et l'on obtient :

$$\sigma_{\epsilon/P}^2 = \left( \frac{1}{Ebh} \right)^2 \sigma_{S_v}^2 + \left( -\frac{S_v}{E^2bh} \right)^2 \sigma_E^2 + \left( -\frac{S_v}{Eb^2h} \right)^2 \sigma_b^2 + \left( -\frac{S_v}{Ebh^2} \right)^2 \sigma_h^2. \quad (5.50)$$

Les variances sont calculées à partir du type d'incertitude (voir figure 5.21).

- La section efficace du verin est donnée dans les documents techniques avec 3 chiffres significatifs. On a donc,  $\Delta S_v = 0.005 \cdot 10^{-4} m^2$ , soit pour une forme de type rectangle,  $\sigma_{S_v} = \frac{\Delta S_v}{\sqrt{3}} = 0.0029 \cdot 10^{-4} m^2$ .
- Le module d'Young est aussi donné dans les documents, et on obtient par la même démarche,  $\sigma_E = \frac{\Delta E}{\sqrt{3}} = 0.029 \cdot 10^{11} Pa$ .

- La dimension  $b$  est mesurée. Ceci est fait avec un pied à coulisse qui a une précision de mesure  $\Delta b = 0.00002$  m, donc,  $\sigma_b = \frac{\Delta b}{\sqrt{3}} = 1.2 \cdot 10^{-5}$  m, et  $\sigma_h = 1.2 \cdot 10^{-5}$  m.

La variance sur la pente est donc,

$$\sigma_{\epsilon/P} = 0.030 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}. \quad (5.51)$$

Il nous reste à calculer le nombre de degrés de liberté effectifs associé à l'ensemble des données du problème. La formule 5.33 donne :

- incertitudes de type A : aucun paramètre de la formule 5.49 n'est de type A
- pour les données d'incertitude de type B, on peut considérer que  $\nu_{Sv} = \infty$ ,  $\nu_E = \infty$ ,  $\nu_b = \infty$ ,  $\nu_h = \infty$ .

soit,

$$\nu_{eff} = \frac{(0.03 \cdot 10^{-11})^4}{\frac{(0.0029 \cdot 10^{-4})^4}{\infty} + \frac{(0.029 \cdot 10^{-11})^4}{\infty} + \frac{(1.2 \cdot 10^{-5})^4}{\infty} + \frac{(1.2 \cdot 10^{-5})^4}{\infty}} = \infty. \quad (5.52)$$

Le coefficient d'élargissement à 95% est donc de 1.96. Le cas traité est un cas très spécial pour lequel tous les nombres de degrés de libertés sont infinis. Dans le cas contraire, si l'une des composantes est mesurée par une méthode de type A, le nombre de degrés de liberté effectif, pourra être voisin (et obligatoirement plus grand) de ce nombre de degrés de liberté (voir le brevet 46).

On peut donc affirmer avec 5% de chances de se tromper que la pente théorique est connue avec une incertitude de  $1.96 \sigma_{\epsilon/P}$ . On obtient donc,

$$pmin_{th} = (2.1795 - 1.96 \cdot 0.030) \cdot 10^{-11} = 2.1203 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.53)$$

$$pmax_{th} = (2.1795 + 1.96 \cdot 0.030) \cdot 10^{-11} = 2.2386 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.54)$$

Pour cet exemple, illustré figure 5.23, on remarque que le modèle est en accord avec l'expérience, car il existe une zone commune entre les résultats expérimentaux et théoriques. Dans le cas contraire, *le modèle est insuffisant pour expliquer l'expérience.*

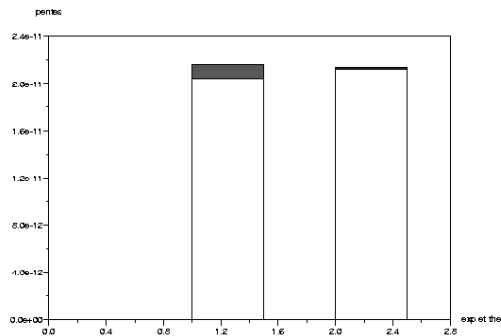


Figure 5.23: Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques. Il existe une zone commune : le modèle est conforme à l'expérience

### 5.1.18 Quelques utilitaires

Les programmes utiles au calcul des incertitudes sont à votre disposition sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>

- creapoin.m : creation de faux points expérimentaux utilisant des distributions de bruit.
- histo.m : permet de tracer un histogramme de la distribution
- student.dat : valeur du facteur d'élargissement pour un niveau de 95% de confiance, en fonction du nombre de degrés de liberté
- incvalmoy.sce : utilitaire de détermination de l'incertitude sur la valeur moyenne (version scilab "mises à jour")
- incvalmoy.sxc : utilitaire de détermination de l'incertitude sur la valeur moyenne (version OpenOffice "mises à jour")
- incvalmoy.m : utilitaire de détermination de l'incertitude sur la valeur moyenne (version matlab "plus de mises à jour")
- incvalli.sce : utilitaire de détermination des incertitudes sur la pente et l'ordonnée à l'origine d'une approximation par un modèle linéaire de la relation entre deux grandeurs (version scilab "mises à jour")
- incvalli.sxc : utilitaire de détermination des incertitudes sur la pente et l'ordonnée à l'origine d'une approximation par un modèle linéaire de la relation entre deux grandeurs (version OpenOffice "mises à jour")
- incvalli.m : utilitaire de détermination des incertitudes sur la pente et l'ordonnée à l'origine d'une approximation par un modèle linéaire de la relation entre deux grandeurs (version matlab "plus de mises à jour")
- compvalmoy.m : utilitaire de comparaison des valeurs moyennes de deux populations
- res2.dat : fichier exemple de données d'une variable
- resp2.dat : fichier exemple de données relatives à deux
- FicheIncertitudes.sxc : fichier OpenOffice de calcul d'incertitude sur une grandeur composée de plusieurs variables (voir figure 5.24)

Fiche de Détermination d'Incertitude						Fiche N°
						Date :
Référentiel :						
Domaine, Unités :						
Détermination des Incertitudes :						
Méthode de Type A :						
Méthode de Type B						
B1						
B2						
B3						
B4						
B5						
B6						
B7						
Tableau récapitulatif						
INCERTITUDES	l	type loi "u" "n" "as"	$u_i$	$u_i^2$	nb ddl (nui)	$(u_i^4)/nui$
Type A			2	4	3	5,33
Type B						
B1	1	n	0,33	0,11	1000	0
B2	0	n	0	0	1000	0
B3	0	n	0	0	1000	0
B4	0	u	0	0	1000	0
B5	1	u	0,58	0,33	1000	0
B6	1	as	0,71	0,5	1000	0
B7	0	as	0	0	1000	0
			somme( $u_i^2$ )		nb de ddl effectifs	
			4,94		4,58	5,33
Résultat :			Ecart-type composé $u_c$ :		2,22	student
			facteur d'élargissement $k=$		2,32	
			Incertitude $I =$		5,16	
cases à compléter/renseigner						

Figure 5.24: Exemple de fiche de calcul d'incertitude

### **5.1.19 Termes métrologiques généraux**

Figures 5.25 à 5.29, sont définis les termes métrologiques généraux tels que définis par la norme de 1995.

## Annexe B

### Termes métrologiques généraux

#### B.1 Origine des définitions

Les définitions des termes métrologiques généraux ayant rapport avec ce *Guide* et données ci-après proviennent du *Vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie* (en abrégé VIM), deuxième édition [6], publié par l'Organisation internationale de normalisation (ISO) au nom des sept organisations qui ont apporté leur soutien à sa mise au point et nommé les experts qui l'ont préparé : le Bureau international des poids et mesures (BIPM), la Commission électrotechnique internationale (CEI), la Fédération internationale de chimie clinique (FICC), l'ISO, l'Union internationale de chimie pure et appliquée (UICPA), l'Union internationale de physique pure et appliquée (UIPPA) et l'Organisation internationale de métrologie légale (OIML). Le VIM doit être la source consultée en priorité pour les définitions de termes qui ne seraient pas inclus ci-après dans cette annexe ou dans le texte du *Guide*.

NOTE - Certains termes et concepts statistiques fondamentaux sont donnés en annexe C, tandis que les termes "valeur vraie", "erreur" et "incertitude" sont développés de manière plus approfondie en annexe D.

#### B.2 Définitions

Comme pour le chapitre 2, dans les définitions suivantes, l'utilisation de parenthèses autour de mots de certains termes signifie que ces mots peuvent être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

Les termes en caractères gras dans certaines notes correspondent à des termes métrologiques complémentaires définis dans ces notes sous forme implicite ou explicite (voir la référence [6]).

##### B.2.1 grandeur (mesurable) [VIM 1.1]

attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance,

qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement

#### NOTES

1 Le terme "grandeur" peut se rapporter à une grandeur dans un sens général [voir exemple a)] ou à une grandeur particulière [voir exemple b)].

#### EXEMPLES

- a) grandeurs dans un sens général : longueur, temps, masse, température, résistance électrique, concentration en quantité de matière;
  - b) grandeurs particulières
    - longueur d'une tige donnée
    - résistance électrique d'un échantillon donné de fil
    - concentration en quantité de matière d'éthanol dans un échantillon donné de vin.
- 2 Les grandeurs qui peuvent être classées les unes par rapport aux autres en ordre croissant (ou décroissant) sont appelées **grandeurs de même nature**.
  - 3 Les grandeurs de même nature peuvent être groupées ensemble en **catégories de grandeurs**, par exemple :
    - travail, chaleur, énergie
    - épaisseur, circonférence, longueur d'onde.
  - 4 Des symboles de grandeurs sont donnés dans l'ISO 31.

##### B.2.2 valeur (d'une grandeur) [VIM 1.18]

expression quantitative d'une grandeur particulière, généralement sous la forme d'une unité de mesure multipliée par un nombre

#### EXEMPLES

- a) longueur d'une tige : 5,34 m ou 534 cm;
- b) masse d'un corps : 0,152 kg ou 152 g;
- c) quantité de matière  
d'un échantillon d'eau (H<sub>2</sub>O) : 0,012 mol ou 12 mmol.

#### NOTES

1 La valeur d'une grandeur peut être positive, négative ou nulle.

Figure 5.25: Norme 1995

2 La valeur d'une grandeur peut être exprimée de plus d'une façon.

3 Les valeurs des grandeurs de dimension un sont généralement exprimées sous la forme de nombres.

4 Certaines grandeurs, pour lesquelles on ne sait pas définir leur rapport à une unité, peuvent être exprimées par référence à une échelle de repérage ou à un procédé de mesure spécifié ou aux deux.

### B.2.3 valeur vraie (d'une grandeur) [VIM 1.19]

valeur compatible avec la définition d'une grandeur particulière donnée

#### NOTES

1 C'est une valeur que l'on obtiendrait par un mesurage parfait.

2 Toute valeur vraie est par nature indéterminée.

3 L'article indéfini "une" plutôt que l'article défini "la" est utilisé en conjonction avec "valeur vraie" parce qu'il peut y avoir plusieurs valeurs correspondant à la définition d'une grandeur particulière donnée.

Commentaire du *Guide* : voir annexe D, en particulier D.3.5 qui expose la raison pour laquelle le terme "valeur vraie" n'est pas utilisé dans le présent *Guide* et pourquoi les termes "valeur vraie d'un mesurande" (ou d'une grandeur) et "valeur d'un mesurande" (ou d'une grandeur) sont considérés comme équivalents.

### B.2.4 valeur conventionnellement vraie (d'une grandeur) [VIM 1.20]

valeur attribuée à une grandeur particulière et reconnue, parfois par convention, comme la représentant avec une incertitude appropriée pour un usage donné

#### EXEMPLES

a) en un lieu donné, la valeur attribuée à la grandeur réalisée par un étalon de référence peut être prise comme étant une valeur conventionnellement vraie;

b) valeur recommandée par CODATA (1986) pour la constante d'Avogadro,  $N_A$  :  $6,022\ 136\ 7 \times 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>.

#### NOTES

1 La valeur conventionnellement vraie est quelquefois appelée valeur assignée, meilleure estimation de la valeur, valeur convenue ou valeur de référence; le terme "valeur de référence", dans ce sens, ne doit pas être confondu avec le même terme utilisé dans le sens de la note de 5.7 du VIM.

2 On utilise souvent un grand nombre de résultats de mesures d'une grandeur pour établir une valeur conventionnellement vraie.

Commentaire du *Guide* : voir le commentaire du *Guide* pour B.2.3.

### B.2.5 mesurage [VIM 2.1]

ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur

NOTE - Le déroulement des opérations peut être automatique.

### B.2.6 principe de mesure [VIM 2.3]

base scientifique d'un mesurage

#### EXEMPLES

a) l'effet thermoélectrique utilisé pour le mesurage de la température;

b) l'effet Josephson utilisé pour le mesurage de la tension électrique;

c) l'effet Doppler utilisé pour le mesurage de la vitesse;

d) l'effet Raman utilisé pour le mesurage du nombre d'onde des vibrations moléculaires.

### B.2.7 méthode de mesure [VIM 2.4]

succession logique des opérations, décrites d'une manière générique, mises en oeuvre lors de l'exécution de mesurages

NOTE - La méthode de mesure peut être qualifiée de diverses façons telles que :

- méthode de substitution
- méthode différentielle
- méthode de zéro.

### B.2.8 mode opératoire (de mesure) [VIM 2.5]

ensemble des opérations, décrites d'une manière spécifique, mises en oeuvre lors de l'exécution de mesurages particuliers selon une méthode donnée

NOTE - Le mode opératoire est habituellement décrit dans un document qui est quelquefois appelé lui-même "mode opératoire" et qui donne assez de détails pour qu'un opérateur puisse effectuer un mesurage sans avoir besoin d'autres informations.

### B.2.9 mesurande [VIM 2.6]

grandeur particulière soumise à mesurage

EXEMPLE - pression de vapeur d'un échantillon donné d'eau à 20 °C.

NOTE - La définition du mesurande peut nécessiter des indications relatives à des grandeurs telles que le temps, la température et la pression.

Figure 5.26: Norme 1995

**B.2.10 grandeur d'influence** [VIM 2.7]  
grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage

## EXEMPLES

- température d'un micromètre lors de la mesure d'une longueur;
- fréquence lors de la mesure de l'amplitude d'une tension électrique alternative;
- concentration en bilirubine lors de la mesure de la concentration en hémoglobine dans un échantillon de plasma sanguin humain.

Commentaire du *Guide* : la définition de la grandeur d'influence doit se comprendre comme incluant les valeurs associées aux étalons, aux matériaux de référence, et aux données de référence, valeurs dont peut dépendre le résultat d'un mesurage, aussi bien que les phénomènes tels que les fluctuations à court terme de l'instrument de mesure et les grandeurs telles que la température ambiante, la pression atmosphérique et l'humidité.

**B.2.11 résultat d'un mesurage** [VIM 3.1]  
valeur attribuée à un mesurande, obtenue par mesurage

## NOTES

- Lorsqu'on donne un résultat, on indiquera clairement si l'on se réfère :
  - à l'indication
  - au résultat brut
  - au résultat corrigé
 et si cela comporte une moyenne obtenue à partir de plusieurs valeurs.
- Une expression complète du résultat d'un mesurage comprend des informations sur l'incertitude de mesure.

**B.2.12 résultat brut** [VIM 3.3]  
résultat d'un mesurage avant correction de l'erreur systématique

**B.2.13 résultat corrigé** [VIM 3.4]  
résultat d'un mesurage après correction de l'erreur systématique

**B.2.14 exactitude de mesure** [VIM 3.5]  
étroitesse de l'accord entre le résultat d'un mesurage et une valeur vraie du mesurande

## NOTES

- Le concept d'"exactitude" est qualitatif.
- Le terme "précision" ne doit pas être utilisé pour "exactitude".

Commentaire du *Guide* : voir le commentaire du *Guide* pour B.2.3.

**B.2.15 répétabilité (des résultats de mesurage)** [VIM 3.6]

étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure

## NOTES

- Ces conditions sont appelées conditions de répétabilité.
- Les conditions de répétabilité comprennent :
  - même mode opératoire
  - même observateur
  - même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions
  - même lieu
  - répétition durant une courte période de temps.
- La répétabilité peut s'exprimer quantitativement à l'aide des caractéristiques de dispersion des résultats.

**B.2.16 reproductibilité (des résultats de mesurage)** [VIM 3.7]

étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure

## NOTES

- Pour qu'une expression de la reproductibilité soit valable, il est nécessaire de spécifier les conditions que l'on fait varier.
- Les conditions que l'on fait varier peuvent comprendre :
  - principe de mesure
  - méthode de mesure
  - observateur
  - instrument de mesure
  - étalon de référence
  - lieu
  - conditions d'utilisation
  - temps.
- La reproductibilité peut s'exprimer quantitativement à l'aide des caractéristiques de dispersion des résultats.
- Les résultats considérés ici sont habituellement les résultats corrigés.

**B.2.17 écart-type expérimental** [VIM 3.8]  
pour une série de  $n$  mesurages du même mesurande, grandeur  $s(q_k)$  caractérisant la dispersion des résultats, donnée par la formule :

Figure 5.27: Norme 1995

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}$$

$q_k$  étant le résultat du  $k$ ème mesurage et  $\bar{q}$  la moyenne arithmétique des  $n$  résultats considérés.

## NOTES

1 En considérant la série de  $n$  valeurs comme échantillon d'une loi de probabilité,  $\bar{q}$  est un estimateur sans biais de la moyenne  $\mu_q$  et  $s^2(q_k)$  est un estimateur sans biais de la variance  $\sigma^2$  de cette loi.

2 L'expression  $s(q_k)/\sqrt{n}$  est une estimation de l'écart-type de la loi de  $\bar{q}$  et est appelée écart-type expérimental de la moyenne.

3 L'écart-type expérimental de la moyenne est parfois appelé à tort erreur de la moyenne.

Commentaire du *Guide* : certains symboles utilisés dans le VIM ont été changés pour être cohérent avec les notations utilisées en 4.2 de ce *Guide*.

Commentaire du *Guide* pour la version française : le VIM emploie le terme "distribution" dans les notes 1 et 2. En matière de probabilité, le terme "loi" est plus correct.

**B.2.18 incertitude (de mesure) [VIM 3.9]**

paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande

## NOTES

1 Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

2 L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

3 Il est entendu que le résultat du mesurage est la meilleure estimation de la valeur du mesurande, et que toutes les composantes de l'incertitude, y compris celles qui proviennent d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux corrections et aux étalons de référence, contribuent à la dispersion.

Commentaire du *Guide* : il est signalé dans le VIM que

cette définition et les notes sont identiques à celles de ce *Guide* (voir 2.2.3).

Commentaire du *Guide* pour la version française : en note 2, le VIM emploie le terme "distribution de probabilité". Le terme "loi de probabilité" est plus correct.

**B.2.19 erreur (de mesure) [VIM 3.10]**

résultat d'un mesurage moins une valeur vraie du mesurande

## NOTES

1 Etant donné qu'une valeur vraie ne peut pas être déterminée, dans la pratique on utilise une valeur conventionnellement vraie (voir VIM 1.19 [B.2.3] et 1.20 [B.2.4]).

2 Lorsqu'il est nécessaire de faire la distinction entre "l'erreur" et "l'erreur relative", la première est parfois appelée "erreur absolue de mesure". Il ne faut pas confondre avec la valeur absolue de l'erreur, qui est le module de l'erreur.

Commentaire du *Guide* : si le résultat d'un mesurage dépend des valeurs de grandeurs autres que le mesurande, les erreurs des valeurs mesurées de ces grandeurs contribuent à l'erreur sur le résultat du mesurage. Voir aussi le commentaire du *Guide* pour B.2.22 et B.2.3.

**B.2.20 erreur relative [VIM 3.12]**

rapport de l'erreur de mesure à une valeur vraie du mesurande

NOTE - Etant donné qu'une valeur vraie ne peut pas être déterminée, dans la pratique on utilise une valeur conventionnellement vraie (voir VIM 1.19 [B.2.3] et 1.20 [B.2.4]).

Commentaire du *Guide* : voir le commentaire du *Guide* pour B.2.3.

**B.2.21 erreur aléatoire [VIM 3.13]**

résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité

## NOTES

1 L'erreur aléatoire est égale à l'erreur moins l'erreur systématique.

2 Comme on ne peut faire qu'un nombre fini de mesurages, il est seulement possible de déterminer une estimation de l'erreur aléatoire.

Commentaire du *Guide* : voir aussi le commentaire du *Guide* pour B.2.22.

Figure 5.28: Norme 1995

**B.2.22 erreur systématique [VIM 3.14]**

moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité, moins une valeur vraie du mesurande

## NOTES

- 1 L'erreur systématique est égale à l'erreur moins l'erreur aléatoire.
- 2 Comme la valeur vraie, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent pas être connues complètement.
- 3 Pour un instrument de mesure, voir "erreur de justesse" (VIM 5.25).

Commentaire du *Guide* : l'erreur sur le résultat d'un mesurage (voir B.2.19) peut souvent être considérée comme provenant d'un certain nombre d'effets systématiques et aléatoires qui contribuent aux composantes individuelles de l'erreur sur le résultat. Voir

aussi les commentaires du *Guide* pour B.2.19 et B.2.3.

**B.2.23 correction [VIM 3.15]**

valeur ajoutée algébriquement au résultat brut d'un mesurage pour compenser une erreur systématique

## NOTES

- 1 La correction est égale à l'opposé de l'erreur systématique estimée.
- 2 Puisque l'erreur systématique ne peut pas être connue parfaitement, la compensation ne peut pas être complète.

**B.2.24 facteur de correction [VIM 3.16]**

facteur numérique par lequel on multiplie le résultat brut d'un mesurage pour compenser une erreur systématique

NOTE - Puisque l'erreur systématique ne peut pas être connue parfaitement, la compensation ne peut pas être complète.

Figure 5.29: Norme 1995

Formation à la compétence marron de gestion des aléas.

Cette capacité marron ne fait plus partie des objectifs de formation. Néanmoins, par curiosité, vous pouvez lire ce qui suit.

## **5.2 Prise en compte des aléas en fabrication**

### **5.2.1 De l'idée d'une pièce à sa fabrication en série**

Une fois l'idée d'une pièce jaillie de l'imagination d'un inventeur ou d'un groupe de travail, le chemin pour arriver à l'existence de cette pièce en grand nombre, passe par plusieurs services (voir figure 5.30) :

- le service commercial effectue une étude de marché,
- le bureau d'étude, à partir d'un cahier des charges, doit élaborer les plans d'ensemble du système pour aboutir aux dessins de définition de chacune des pièces, associée à la cotation fonctionnelle (la cotation minimale qui assure le bon fonctionnement de la pièce)
- le bureau des méthodes assure que chacune des pièces est fabricables et élabore les gammes de fabrications, la cotation de fabrication et les outils nécessaires associés
- l'atelier fabrique les pièces et assure un contrôle final de la validité des pièces

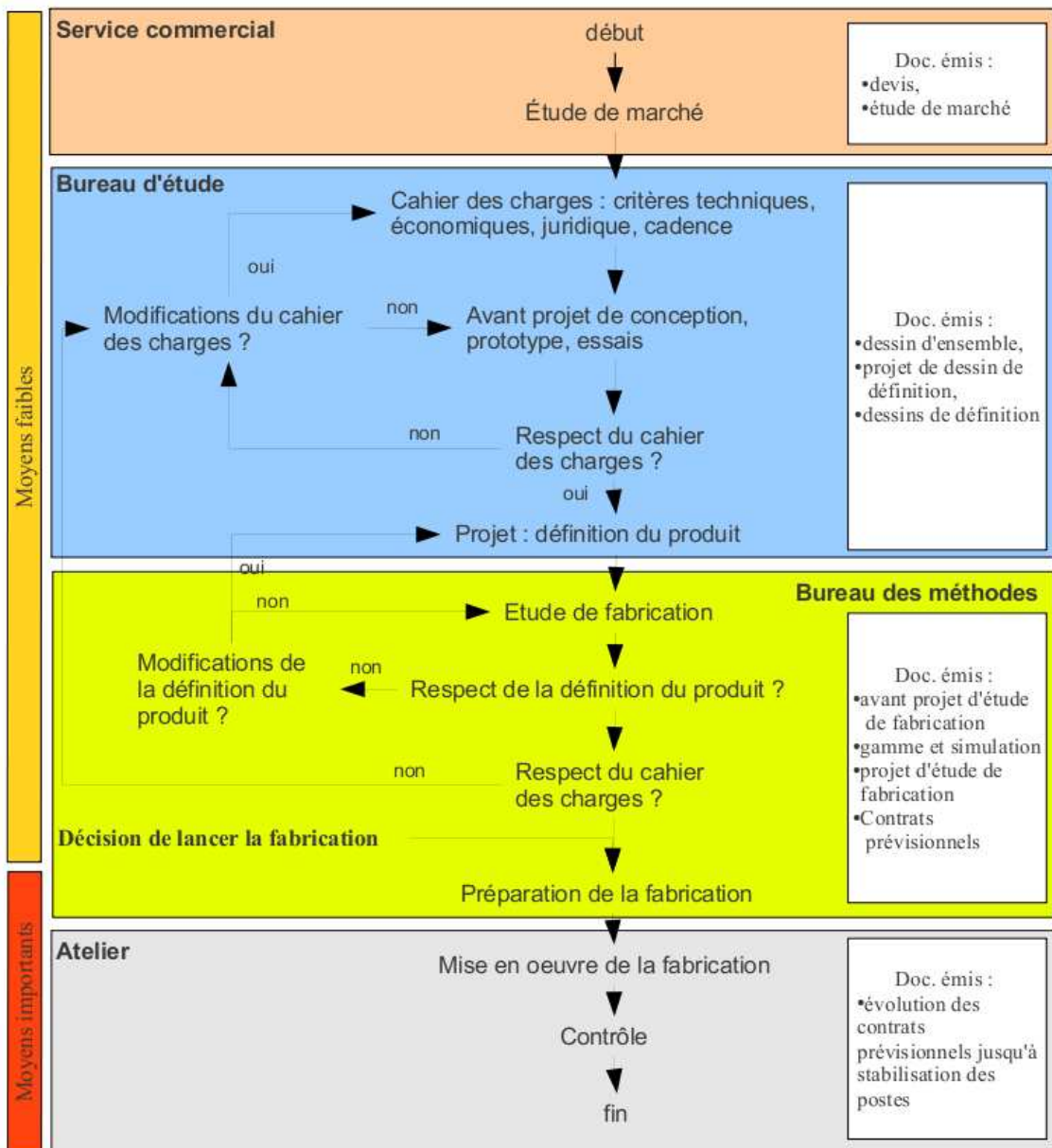


Figure 5.30: Les différents services et leurs actions pour la réalisation d'une pièce.

Si l'on détaille un peu plus le travail du bureau des méthode, interface entre le bureau d'étude qui conçoit le système et l'atelier qui fabrique les pièces, les différentes étapes sont résumées dans la figure 5.31. On remarquera les nombreux échanges entre les différents services à différentes étapes du processus.

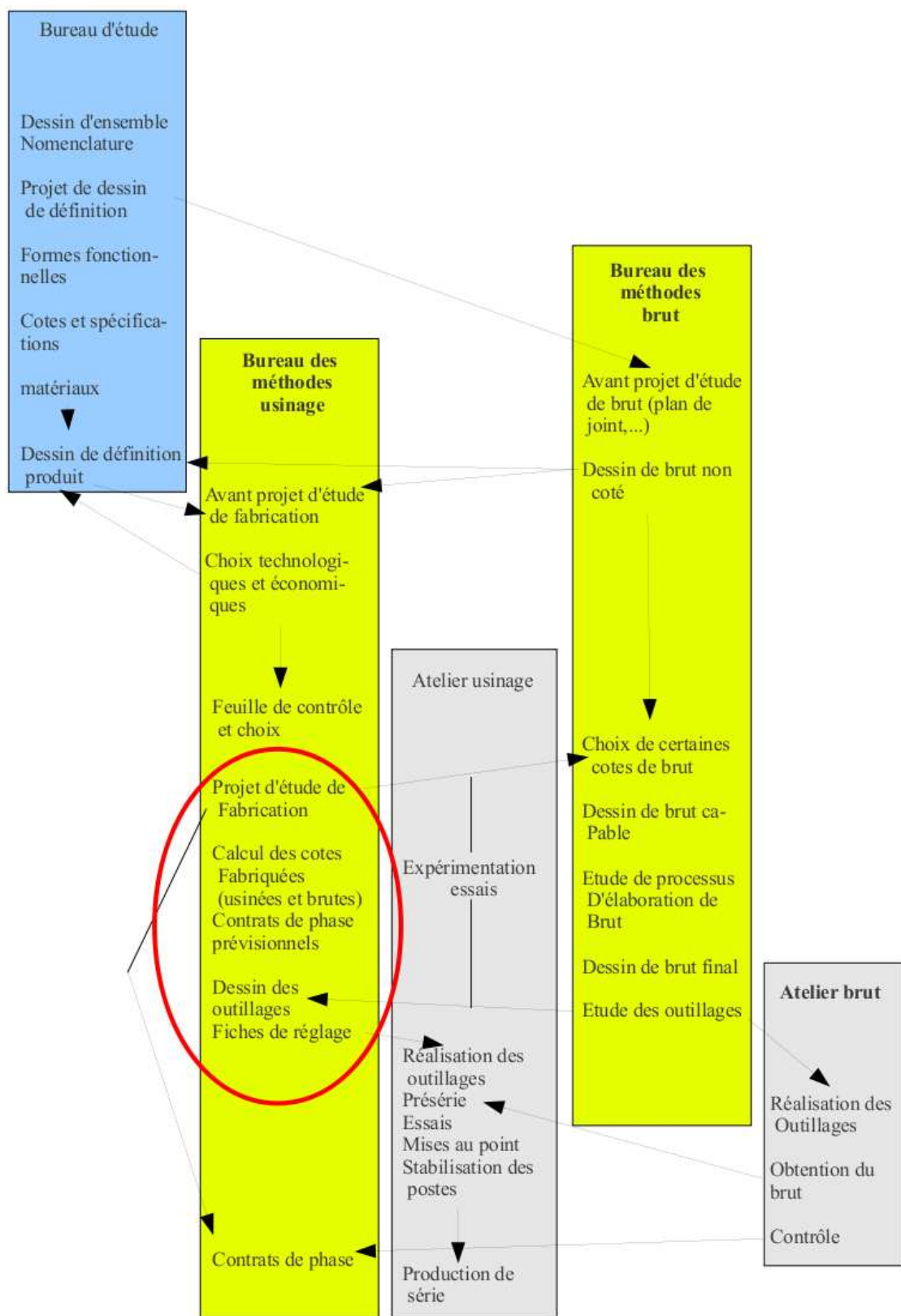


Figure 5.31: Du dessin de définition d'une pièce à la gamme de fabrication de celle-ci.

Nous supposons que la formation de l'Ensim de première année en technologie mécanique, vous permet d'effectuer le travail du bureau d'étude, et que vous disposez pour une pièce des cotes fonctionnelles. Elle sont issues du travail de chaîne de cotes qui établit pour chaque jeu fonctionnel les dimensions qui interviennent pour réaliser ce jeu fonctionnel. Sur l'exemple figure 5.32, le jeu fonctionnel est noté  $j$ . Il relie la surface  $s_1$  de la pièce 1, à la surface  $s_2$  de la pièce 2. Pour réaliser cette condition, les dimensions qui interviennent sont :  $d_1$  entre la surface  $s_1$  et la surface  $s_3$  de la pièce 1,  $d_2$  la tolérance de contact entre la surface  $s_3$  de la pièce 1 et la surface  $s_3$  de la pièce 2 et  $d_3$  entre la surface  $s_3$  et la surface  $s_2$  de la pièce 2. Une chaîne de cote est orientée : elle part de l'origine de la condition  $j$  et fini à l'extrémité de la condition. L'équation associée à cette chaîne de cote est,

$$j = -d_1 - d_2 + d_3. \quad (5.55)$$

On obtient les équations en terme de jeu maximal  $j_M$  et de jeu minimal  $j_m$  :

$$j_M = d_{1m} - d_{2m} + d_{3M}, \quad (5.56)$$

$$j_m = d_{1M} - d_{2M} + d_{3m}. \quad (5.57)$$

La méthode de répartition des intervalles de tolérance sera vue dans la paragraphe suivant.

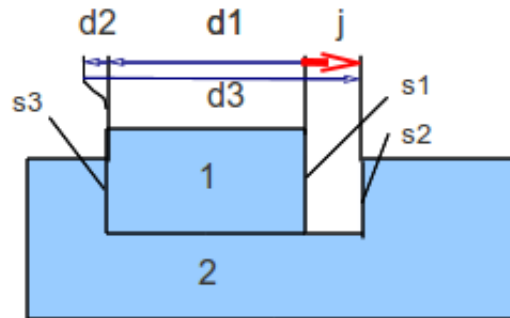


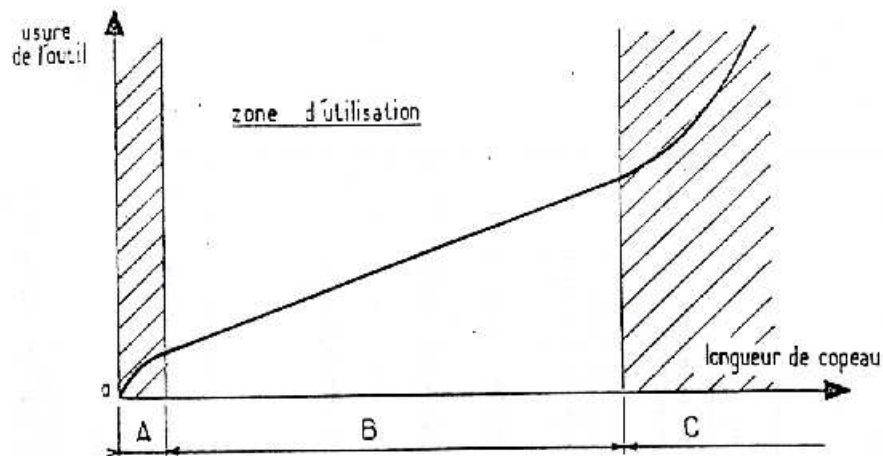
Figure 5.32: Exemple d'une chaîne de cote.

Il faut maintenant traduire en cotes fonctionnelles en cotes de fabrication (zone cerclée de rouge dans la figure 5.31), ces dernières dépendront de l'ordre dans lequel vous choisirez d'effectuer les usinages. Mais auparavant, voyons pourquoi les cotes ne peuvent être obtenues avec une précision infinie.

### 5.2.2 Les dispersions d'une cote à la fabrication

Prenons l'exemple d'un diamètre d'un cylindre obtenu par tournage d'une pièce. le diamètre de la pièce est imposé par les positions successives du point extrémité de l'outil de coupe. Celui-ci se déplace sur une droite parallèle à l'axe de rotation de la pièce. La distance entre l'axe de rotation de la pièce et ce point de l'outil de coupe réalise le rayon du diamètre fabriqué. Nous vous invitons à faire un dessin de ceci.

À la pointe d'outil, les frottements sont importants. L'outil étant beaucoup plus dur que la pièce travaillée, une fissure se propage juste en avant de l'arrêt de coupe, séparant le copeau de la partie massive de la pièce. Le copeau s'enroule en glissant sur l'une des faces de l'outil en frottant sur celui-ci. Les pressions sont considérables, comme le montre la structure du copeau qui est formée de matière qui présente des plans de glissement de cisaillement interne. Sur la face de dépouille de l'outil, la matière qui était comprimée par l'arrivée de la fissure, se relâche et frotte donc aussi sur cette face de dépouille. Ces frottements usent l'outil (voir figure 5.33), arrachant de la matière à l'outil : la pointe d'outil recule donc par rapport au corps de l'outil, qui elle est en translation. Ceci implique donc une variation de la distance entre l'axe de rotation et ce point, donc une variation du diamètre de la pièce fabriquée. Cette usure n'est pas proportionnelle à la durée de travail de l'outil (voir figure 5.34).



**ZONE A** zone de rodage, adaptation à la coupe de l'arête tranchante  
(pour réduire A on peut prévoir un rodage artificiel)

**ZONE B** zone d'usure linéaire ou zone de travail

$$K = k \times l_c$$

$k$  = constante fonction de la nature et géométrie de l'outil  
état et nature du matériau usiné

$l_c$  = longueur de copeau

**ZONE C** zone d'usure accélérée, détérioration rapide de l'outil

Figure 5.33: L'usure d'un outil n'est pas proportionnelle à la longueur de copeaux produite.

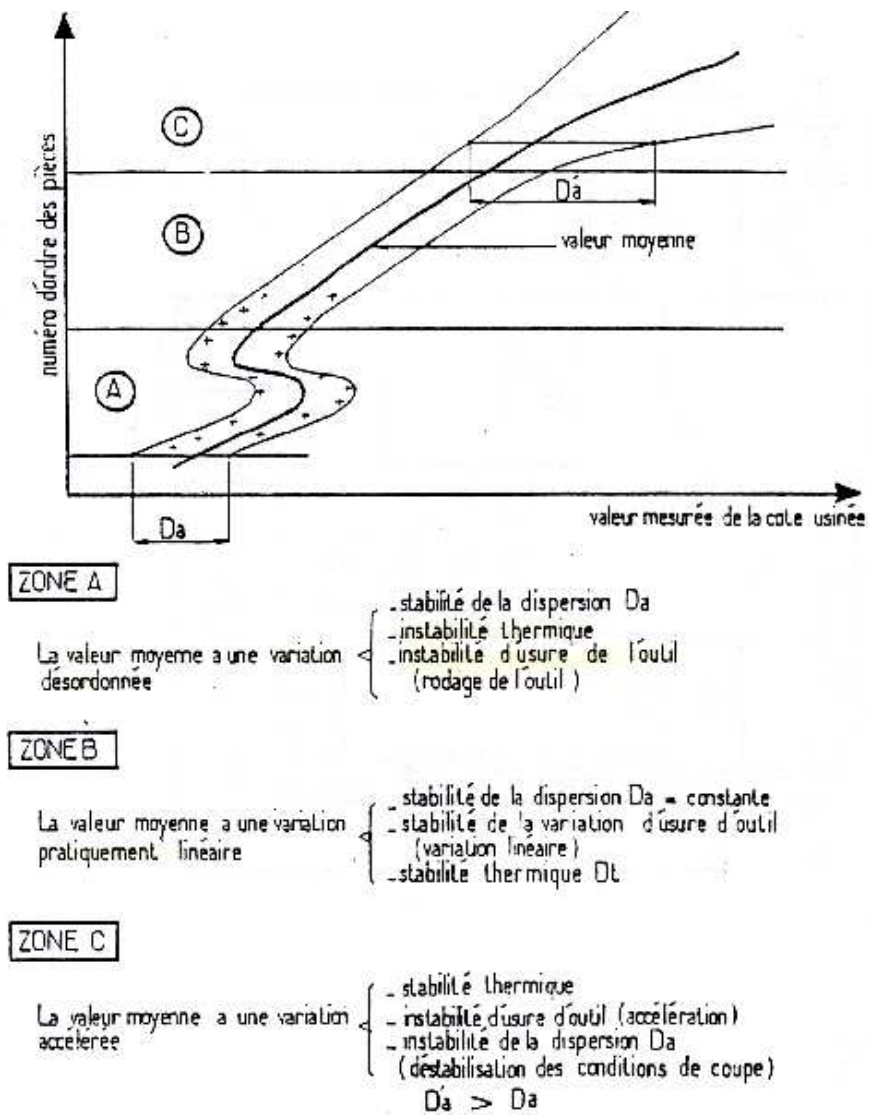


Figure 5.34: La cote réalisée sur la pièce n'est pas proportionnelle au nombre de pièces usinées depuis le dernier affutage de l'outil.

On imagera aisément que même si l'opérateur a réglé la distance entre l'axe de rotation de la pièce et la pointe de l'outil avec une précision infinie (ce qui lui est impossible), même si la thermique de la machine est parfaitement stable (ce qui est impossible), même si les efforts de coupe importants ne font pas fléchir les pièces (ce qui est impossible), même si les vibrations engendrées par les efforts de coupe impliquent des déplacements négligeables de la pointe de coupe (là c'est possible), même si aucun jeu n'est présent dans la machine (ce qui est impossible), la cote obtenue pendant l'usinage de la série de pièce variera, et qu'il est donc nécessaire de vérifier régulièrement si la cote fabriquée reste dans la tolérance de fabrication. Pour éviter d'avoir à faire une mesure, on utilise en général un outillage spécifique, un gabarit "entre - n'entre pas", qui permet de tester rapidement si la dimension est conforme.

Un exemple de dépendance de la cote usinée par rapport aux jeux dans la machine dans le cas du dressage d'une face au tour est présenté figure 5.37. En fonction du type de surface, de type de liaison, les valeurs des dispersions sont différentes (voir figure 5.38).

#### Dispersion en tournage (dressage de face)

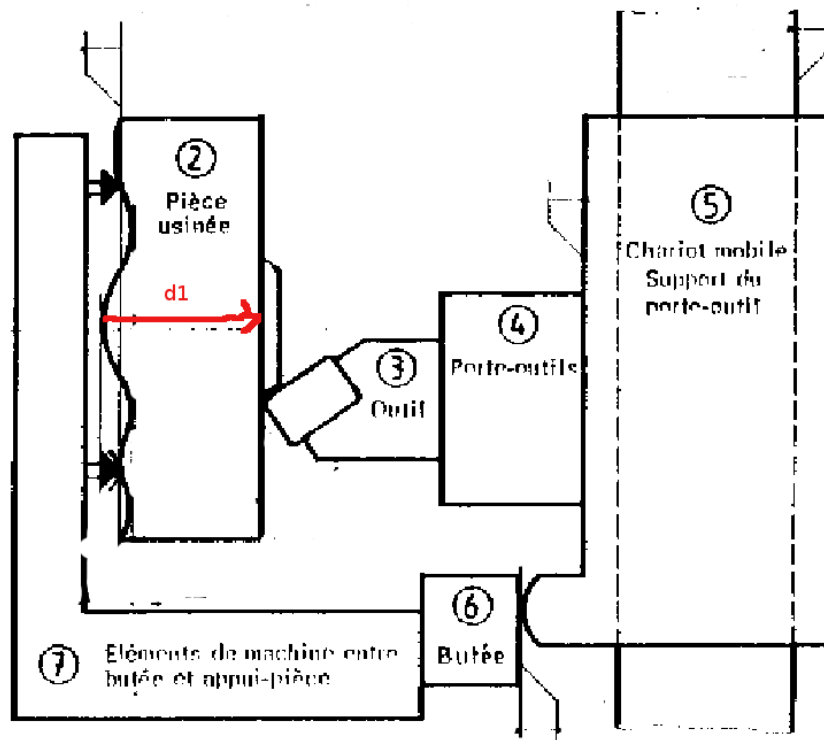


Figure 5.35: La cote réalisée au tour en dressage dépend des jeux dans le système d'usinage.

<b>Dispersions dues à l'usure de l'outil</b>			
Valeurs variables suivant notamment la nature de l'outil, la nature de la pièce, les conditions de coupe, le temps de coupe.			
<b>Dispersions dues aux prises de pièces (mm)</b>			
surface d'appui de la pièce	brute	moulée au sable	0,4
		moulée en coquille	0,2
		sciée	0,1 à 0,4
	usinée		0,02 à 0,1
<b>Dispersions dues aux butées de course (mm)</b>			
type de butée		ébauche	finition
fixe		0,04 à 0,08	0,02 à 0,04
débrayage mécanique		0,1 à 0,2	0,05 à 0,1
débrayage électrique		0,05 à 0,1	0,03 à 0,05
<b>Dispersions dues aux porte-pièces (mm)</b>			
Mandrin 3 mors durs		dispersion de coaxialité	0,1 à 0,2
Mandrin 3 mors doux			0,02 à 0,04
centreur cylindrique			fonction du jeu
centreur quelconque			0,02 à 0,04
rondelles Ringspann			0,01 à 0,02
expansibles			0,01 à 0,02
Valeurs courantes données à titre de première estimation			

Figure 5.36: Les dispersions dépendent du type de surface et du type de contact.

### Dispersion en tournage (dressage de face)

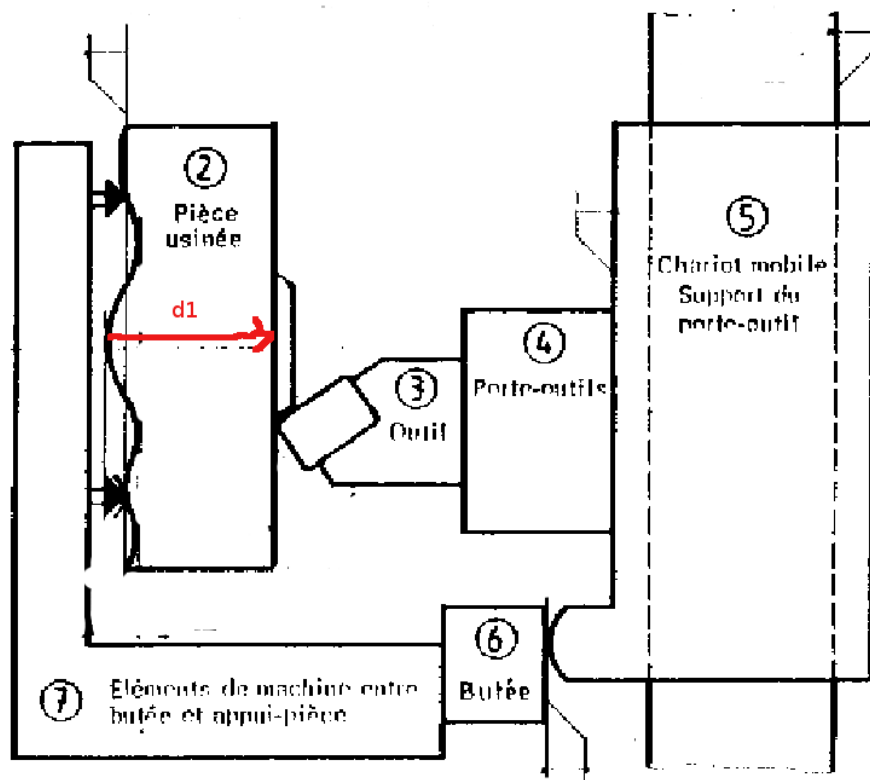


Figure 5.37: Dressage d'une face au tour.

Si l'on reprend l'exemple de la figure 5.32, en petite série, les intervalles de tolérance associés à l'équation 5.55 doivent vérifier,

$$IT_j = IT_{d_1} + IT_{d_2} + IT_{d_3}, \quad (5.58)$$

dont seul l'intervalle de tolérance de  $d_2$  est a priori connu : il dépend du type de surfaces en contact (via le tableau 5.38).



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire les brevets 068, 69 et 70. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 068 : chaîne de cote**

**auteur : JM Génévaux ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Lors du dressage de la face, telle que représentée figure 5.37, la distance  $d_1$  entre la surface dressée et la surface de référence dépend des qualités des appuis et de certaines distances de la machine.

Tracez la chaîne de cote associée à cette distance  $d_1$ .

Dispersions dues à l'usure de l'outil			
Valeurs variables suivant notamment la nature de l'outil, la nature de la pièce, les conditions de coupe, le temps de coupe.			
Dispersions dues aux prises de pièces (mm)			
surface d'appui de la pièce	brute	moulée au sable	0,4
		moulée en coquille	0,2
		sciée	0,1 à 0,4
	usinée	0,02 à 0,1	
Dispersions dues aux butées de course (mm)			
type de butée		ébauche	finition
fixe		0,04 à 0,08	0,02 à 0,04
débrayage mécanique		0,1 à 0,2	0,05 à 0,1
débrayage électrique		0,05 à 0,1	0,03 à 0,05
Dispersions dues aux porte-pièces (mm)			
Mandrin 3 mors durs		dispersion de coaxialité	0,1 à 0,2
Mandrin 3 mors doux			0,02 à 0,04
centreur cylindrique			fonction du jeu
centreur quelconque			0,02 à 0,04
rondelles Ringspann			0,01 à 0,02
expansibles			0,01 à 0,02
Valeurs courantes données à titre de première estimation			

Figure 5.38: Les dispersions dépendent du type de surface et du type de contact.

**brevet 069 : Equations associées à une chaîne de cote**  
**auteur : JM Génévaux ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Lors du dressage de la face, la distance  $d_1$  entre la surface dressée et la surface de référence dépend des cotes et des qualités de contacts telles que représentés figure ??.

Donnez l'équation liant  $d_1$  aux autres cotes. Donnez l'expression des valeurs maxi et mini ( $d_{1M}$  et  $d_{1m}$ ).

**brevet 070 : Incertitudes sur une cote de fabrication**  
**auteur : JM Génévaux ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Lors du dressage de la face, la distance  $d_1$  entre la surface dressée et la surface de référence dépend des cotes et des qualités de contacts telles que représentés figure ??. La chaîne de cote associée fournit l'équation  $d_1 = d_2 + d_{12} + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 - d_7 - d_8 - d_9 - d_{10} - d_{11}$ .

A partir du tableau présenté figure 5.38, donnez la valeur de l'incertitude en dessous de laquelle la cote  $d_1$  ne peut pas être réalisée sur cette machine. On fera cette estimation dans le cas d'une petite série.

Si du fait des valeurs des dispersions aux butées, l'incertitude engendrée par ces butées est supérieure à l'incertitude souhaitée sur la cote, on peut soit rechercher une autre technique de fabrication de cette surface, en prenant appuis par exemple sur une autre surface, en changeant de machine, ou en procédant à un pré-usinage d'une surface brute, mesure sans démonter la pièce de la cote  $d_{1brute}$ , et réglage du complément de déplacement de l'outil pour obtenir  $d_1$ .

### 5.2.3 La cotation de fabrication

Les cotes fournies par le bureau d'étude sont les cotes nécessaires pour que la pièce remplisse ses fonctions une fois assemblée dans le système (voir figure 5.39).

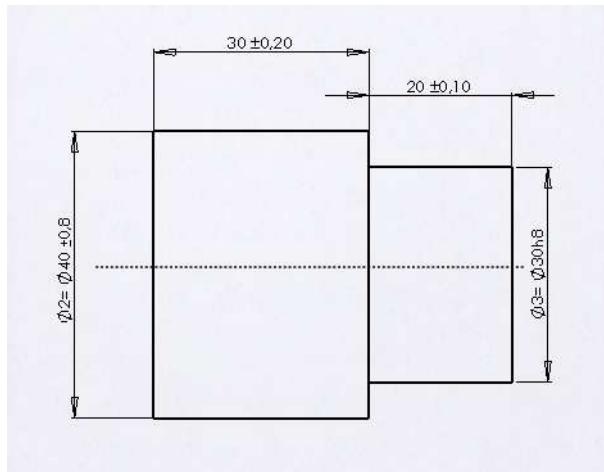


Figure 5.39: Exemple de cotation fournie par le bureau d'étude.

L'ordre dans lesquels les surfaces sont fabriquées ne sont pas imposées par le bureau d'étude. Le bureau des méthodes doit donc étudier les différentes possibilités. En fonction des machines et de l'outillage disponible au sein de l'entreprise, la création d'une surface se fait toujours par rapport à une autre. C'est la distance entre la surface créée et la surface de référence qui doit être cotée par le bureau des méthodes à chaque étape de fabrication. Elles ne sont pas a priori les mêmes que les cotes fonctionnelles fournies par le bureau d'étude.

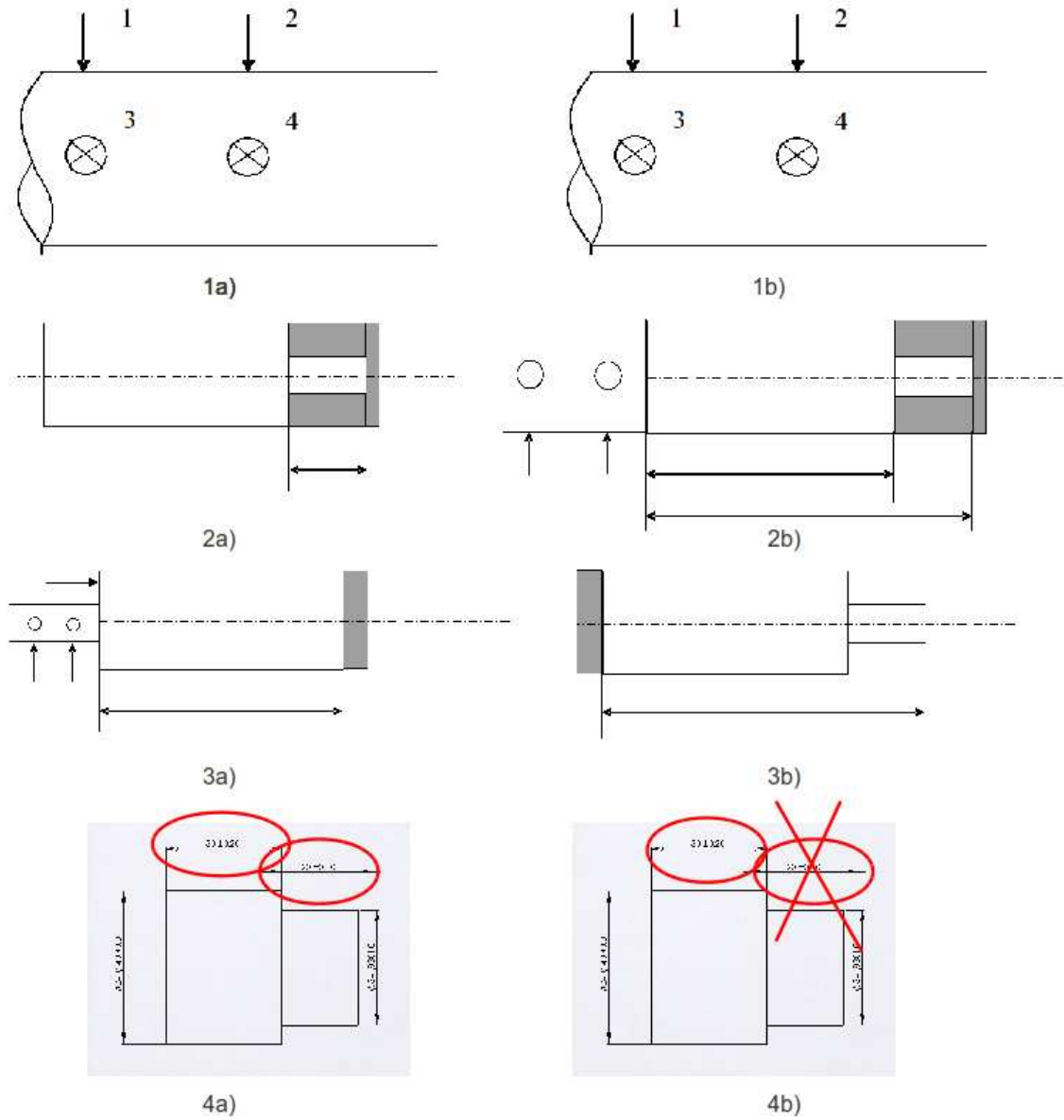


Figure 5.40: Deux procédures d'obtention de la pièce.

Sur l'exemple de la pièce tournée de la figure 5.39, détaillons les différentes possibilités. La figure 5.40 présente deux modes d'obtention des surface répéré par les indices a) et b). Les volumes grisés correspondent à la matière enlevée.

- Les étapes 1a) et 1b) de tronçonnage d'une barre d'étiré sont identiques.
- L'étape 2a) correspond au dressage de la face de droite, puis du diamètre et du dressage de l'épaulement.
- La pièce est alors retournée, mis en butée sur l'épaulement, serrée sur le diamètre le plus petit, puis la surface opposée est usinées. Ceci est représenté par l'étape 3a).
- La figure 4a) indique les cotes qui ont été fabriquée : elles sont identiques à celles du bureau d'étude.
- L'étape 2b) correspond au dressage de la face la plus grande.
- L'étape 3b) correspond au retournement de la pièce, la mise en butée sur la surface précédente, le serrage sur le diamètre extérieur, le dressage de la face la plus petite, le tournage du cylindre le plus petit pour finir par le dressage de l'épaulement. C'est la longueur totale de la pièce qui correspond à la cote fabriquée.
- La figure 4b) indique que l'une des cotes du bureau d'étude n'a pas été fabriquée directement. Il sera nécessaire de faire un transfert de cote, en prenant la cote du bureau d'étude non fabriquée comme condition.

La répartition des intervalles de tolérance sur chacune des cotes doit suivre la procédure suivante.

Explicitons cette démarche pour la procédure b). Des pastilles de couleur en haut de la figure 5.41, indiquent dans quel ordre remplir la feuille de calcul de cotes : flèches et valeurs sont associées à une couleur, donc à une étape de la procédure.

- étape 1 bleu : identifier l'ordre de fabrication des surfaces et pour chaque surface, par rapport à quelle autre surface elle est fabriquée. Cela définit les cotes de fabrication  $cf_i$  que l'on doit déterminer.
- étape 2 verte : pour la première cote du bureau d'étude  $ce1$ , identifier la chaîne de cotes  $cf$  qui permette de la réaliser. Ici, la cote de fabrication  $cf4$  correspond à la cote de bureau d'étude  $ce1$ .
- étape 3 brune : faire la même chose pour les autres cotes de bureau d'étude (ici,  $ce2$ ) et les cotes de surépaisseur de brut  $cm_i$  qui sont données par le bureau des méthodes. Pour  $ce2$ , la chaîne de cote fait intervenir  $cf4$  et  $cf3$ . Même travail pour les cotes  $cm2$  et  $cm1$ .

L'ensemble des chaînes de cotes est ainsi tracée. Il faut maintenant répartir des incertitudes des conditions sur les différentes cotes de fabrication. Deux voies sont possible : l'écriture du système d'équation, ou le remplissage du tableau tel que présenté figure 5.41. Ce tableau n'est que l'image du système d'équations, les résultats sont donc les mêmes.

### Résolution par le système d'équation :

- étape 3 magenta : pour les cotes de bureau d'étude  $ce$  et de surépaisseur  $cm$ , donnez leur dimension moyenne  $dm$ , leur intervalle de tolérance  $IT$ , le nombre  $n$  de cotes de fabrications qui composent la chaîne de cote associée  $n$  et la valeur  $IT/n$ . Dans le cas d'une cote mini ou maxi n'indiquer que cette valeur. Pour notre exemple, cela donne :

$$ce1_M = cf4_M, \quad (5.59)$$

$$ce1_m = cf4_m, \quad (5.60)$$

$$ce2_M = -cf4_m + cf3_M, \quad (5.61)$$

$$ce2_m = -cf4_M + cf3_m, \quad (5.62)$$

$$cm2_m = -cf3_M + cf2_m, \quad (5.63)$$

$$cm1_m = cf1_m - cf2_M. \quad (5.64)$$

- étape 4 rouge : calculer les valeurs moyennes des cotes de fabrication  $cf$ .

$$ce1 = cf4, \quad (5.65)$$

$$ce2_M = -cf4 + cf3. \quad (5.66)$$

d'où (en mm)

$$cf4 = 30, \quad (5.67)$$

$$cf3 = 20 + 30 = 50. \quad (5.68)$$

- étape 5 grise et 6 rose : distribuer les intervalles de tolérance. En petite série, l'incertitude de la condition est divisée par le nombre de cotes composant la chaîne de cote et elle est répartie uniformément sur les cotes.

$$IT_{cf4} \leq IT_{ce1}/1, \quad (5.69)$$

$$IT_{cf4} \leq IT_{ce2}/2, \quad (5.70)$$

$$IT_{cf3} \leq IT_{ce2}/2. \quad (5.71)$$

La condition la plus restrictive sur  $cf4$  est due à  $ce2$ , donc  $IT_{cf4} = 0.2$  mm et  $IT_{cf3} = 0.2$  mm. Ici, la condition  $ce1$  implique que la tolérance sur  $cf4$  est de 0.2 mm. Les valeurs maxi et mini de  $cf4$  et  $cf3$  sont alors connues :

$$cf4 = 30 \pm 0.2 \quad (5.72)$$

$$cf3 = 50 \pm 0.2. \quad (5.73)$$

- étape 7 bleu clair : Pour les conditions mini et maxi reporter les valeurs obtenues maximale ou minimale Les deux équations

$$cm2_m = -cf3_M + cf2_m, \quad (5.74)$$

$$cm1_m = cf1_m - cf2_M. \quad (5.75)$$

peuvent maintenant se ré-écrire :

$$1 = -50.2 + cf2_m, \quad (5.76)$$

$$1 = cf1_m - cf2_M. \quad (5.77)$$

La première équation donne  $cf2_m = 51.2$  mm. ON choisira pour continuer une incertitude sur la  $cf2$  de 2 mm, qui ne demande pas d'effort particulier (donc pas de surcoût) lors de la découpe du brut :  $cf2_M = cf2_m + 2 = 53.2$  mm. On déduit donc de la seconde équation  $cf1_m = 1 + 53.2 = 54.2$  mm.

**Résolution par le tableau :** Le même raisonnement que précédemment est fait, mais présenté simplement sous forme de tableau.

- étape 3 magenta : pour les cotes de bureau d'étude  $ce$  et de surépaisseur  $cm$ , donnez leur dimension moyenne  $dm$ , leur intervalle de tolérance  $IT$ , le nombre  $n$  de cotes de fabrications qui composent la chaîne de cote associée  $n$  et la valeur  $IT/n$ . Dans le cas d'une cote mini ou maxi n'indiquer que cette valeur.
- étape 4 rouge : calculer les valeurs moyennes des cotes de fabrication  $cf$ .
- étape 5 grise : distribuer les intervalles de tolérance les plus petits. Ici, la condition  $ce1$  implique que la tolérance sur  $cf4$  est de 0.2 mm.
- étape 6 rose : reporter tous les intervalles déterminés à l'étape 5 dans les autres cotes apparaissant sur les autres conditions. Ici, on reporte sur la cote  $cf4$  qui apparaît dans la condition  $ce1$ . On notera que la condition  $ce1$  est vérifiée car  $0.2 \leq 0.4$ , ce qui n'aurait pas été le cas si l'on avait distribuer en premier l'intervalle de tolérance de  $ce1$ .



La même démarche peut être faite pour la procédure a) et le tableau de résolution est présenté figure 5.41.

ordre de remplissage : ● ● ● ● ● ● ● ●

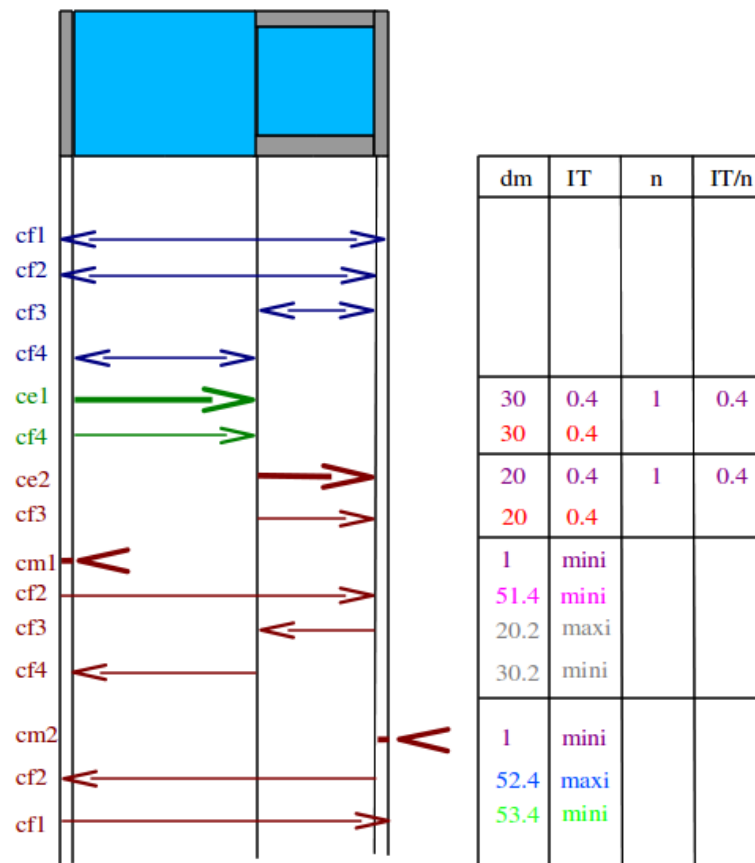


Figure 5.42: Détermination des cotes de bureau des méthodes et de leurs incertitudes dans le cas de la procédure d'usinage a)

Une fois les deux études faites, il faut choisir la procédure de fabrication qui est la moins coûteuse, donc qui permet d'avoir des cotes de fabrication ayant les intervalles de tolérance les plus grands. Dans le cas explicité ici, c'est la procédure a) qui doit être choisie.



Si vous voulez vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à faire les brevets 071, 072 et 073. En cas de difficulté pour obtenir le bon résultat d'un des brevets, n'hésitez pas à consulter la référente.

**brevet 071 : Gamme d'usinage**

**auteur : S Deslandes ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Le bureau d'étude transmet au bureau des méthodes le dessin de définition d'une pièce (fig. 5.43).

Dessiner la gamme de fabrication si l'ordre d'obtention des surfaces est 4 puis 1 puis 2 puis 3.

**brevet 072 : Répartition des intervalles de tolérance sur des cotes de fabrication**

**auteur : S Deslandes ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Le bureau d'étude a transmis au bureau des méthodes le dessin de définition d'une pièce (fig. 5.43). Ceci a donné lieu à une gamme de fabrication avec un ordre d'obtention des surfaces qui est 4 puis 1 puis 2 puis 3 (fig. ??).

Répartir les intervalles de tolérance sur les différentes cotes de fabrication.

**brevet 073 : Choix d'une procédure de fabrication**

**auteur : S Deslandes ; ressource : [?] ; auto-attribution .**

Le bureau d'étude a transmis au bureau des méthodes le dessin de définition d'une pièce (fig. 5.43). Ceci a donné lieu à deux gammes de fabrication avec un ordre d'obtention des surfaces différents (fig. ?? et donc des intervalles de tolérances différents sur les cotes de fabrications (fig. ?? pour la gamme 1 et ?? pour la gamme 2).

Quelle est la gamme de fabrication à choisir.

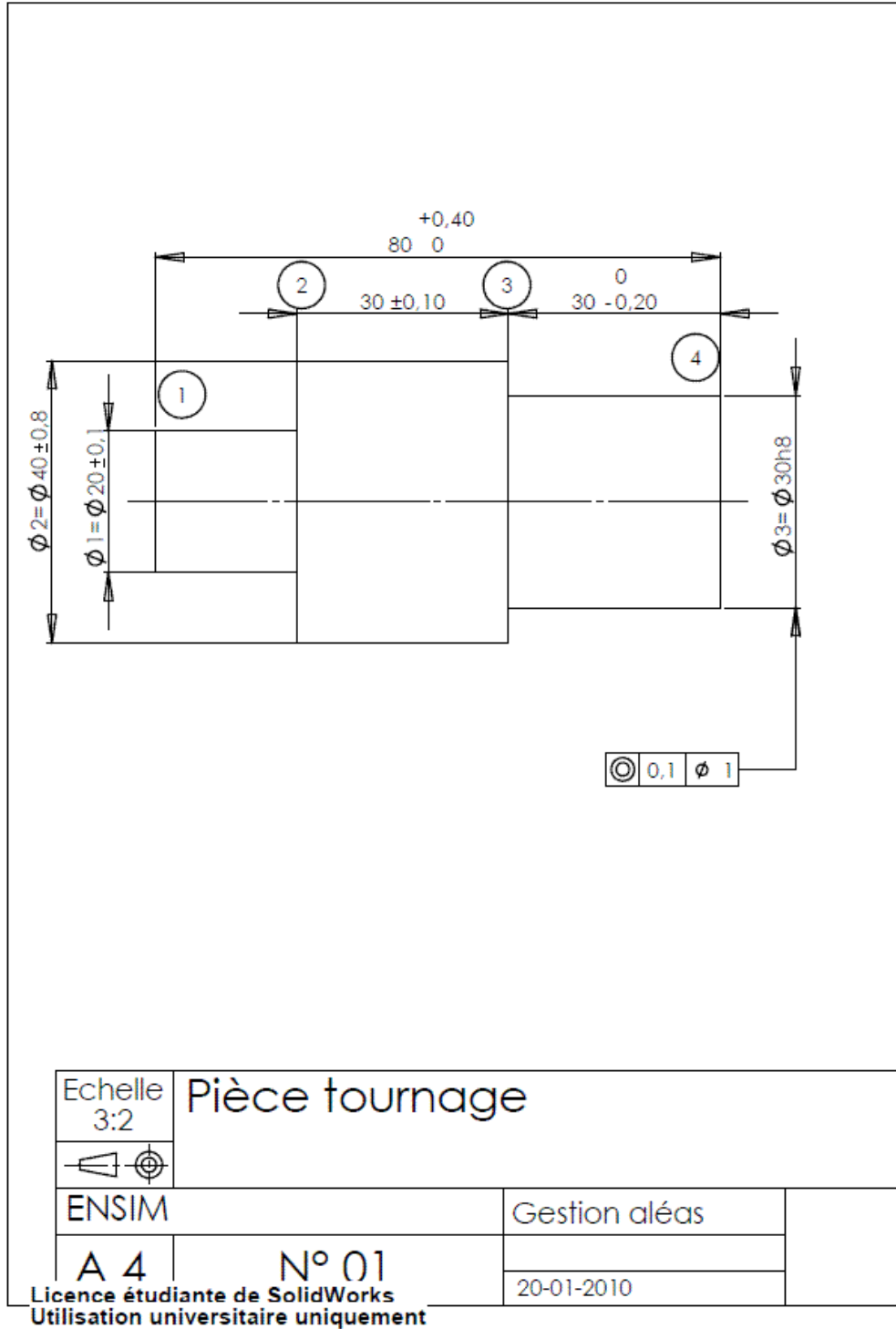


Figure 5.43: Dessin de définition d'une pièce à fabriquer.

# Bibliography

- [1] JM Breteau *Introduction aux mesures et capteurs*
- [2] du polycopié de travaux pratiques de l'ENSEM (Nancy)
- [3] S. Geller *Statistiques* (519.5 GEL à la bibliothèque universitaire du Mans),
- [4] de la norme française XP X 07-020 (juin 96), *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*
- [5] Mouvement français pour la qualité, *recueil d'exemples d'évaluation d'incertitudes*, 1999, Bagneux.
- [6] K Protassov *Probabilités et incertitudes dans l'analyse de données expérimentales.*, Presses Universitaires de Grenoble, 1999.
- [7] S. Aïvazian *Etude statistique des dépendances*, Ed Mir, Moscou, 1970
- [8] M. De Domenico, V. Latora, *Fast detection of nonlinearity and nonstationarity in short and noisy time series*. EuroPhys.Lett. 91, 2010
- [9] M. Guez, *La communication non-violente* Stage 1
- [10] J.M. Génévaux A. Pelat, *Une pédagogie participative en école d'ingénieur (alias ?Freinet 5CH?)*, formation pédagogique de l'Université du Maine, mars 2014

## Chapter 6

# Feedback

224						239	238
99						245	
155	211	212	228	234		241	
				235		243	
30	43	27	85		245	244	
48				86			
44	45	46		8			
			29	7			
		47					73
		10	68	69	70	71	72

Figure 6.1: Parcours des brevets : chaque couleur cible une capacité. Barrez les brevets que vous avez fait.

RVB3P BPxMW g	317	060	233	311	062	073	273	085	540
									306
	270	543		256	288	290	272	503	288
			612						
601	606	608	518		80	81	82		
605					75				
530	611	76	77	542	533				

Figure 6.2: Parcours des vidéos : chaque couleur cible une capacité. Si une vidéo ne vous paraît pas pertinente, barrez-là. Si elle vous paraît pertinente entourez là.

Merci de flasher le QR code pour donner votre feedback sur cette séance, ou d'utiliser le lien <https://sondage.univ-lemans.fr/limesurvey/index.php/175934>.



Pour faciliter vos réponses d'une séance à l'autre, veuillez noter ci-dessous :

- votre numéro d'anonymat :
- votre méthode CRAIES ou CRABE :

et incrémenter pour chaque séance

- le nombre de fiches dans votre boîte de Leitner :
- le nombre de capacités obtenues :
- le nombre de brevet faits :
- le nombre de vidéos regardées :

Si vous voulez savoir pourquoi l'enseignant vous demande ce feedback, je vous invite à regarder la vidéo *Stratégies gagnantes pour une étudiante en méthode CRAIES ? Une réponse grâce à l'analyse en composantes principales.* qui est disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=546>.