



Sacs, skyrmions et solitons

G. Ripka

► To cite this version:

G. Ripka. Sacs, skyrmions et solitons. École thématique. Ecole Joliot Curie "Mésons, baryons, quarks et physique nucléaire", Bombannes, (France), du 17-21 septembre 1984: 3ème session, 1984. cel-00640918

HAL Id: cel-00640918

<https://cel.hal.science/cel-00640918>

Submitted on 14 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SACS, SKYRMIONS ET SOLITONS

G. RIPKA

Service de Physique Théorique, CEN Saclay

"Au demeurant, je n'ai cherché de rien prouver, mais de bien peindre et d'éclairer bien ma peinture".

A.Gide, Nourritures Terrestres.

Les cours sur les solitons, les skyrmions et les sacs susceptibles de décrire les hadrons ne sont pas nombreux surtout en langue française. Ce texte, pour débutants, fait suite à des cours donnés à l'université de Coimbra, au Centre International de Physique Théorique de Trieste, à la faculté de Sciences d'Orsay et à l'école Joliot-Curie à Bombannes. J'ai pris du plaisir à l'écrire et je remercie ces institutions de m'en avoir donné l'occasion.

Le style est relax. J'ai fait suivre chaque section d'exercices qui tantôt facilitent les calculs et tantôt poussent le lecteur à des réflexions que je crois utiles. Une version plus sobre et mieux farcie de références est en préparation en langue anglaise.

On s'étonnera peut-être de ne trouver dans ce cours pratiquement aucune confrontation entre la théorie et l'expérience, si ce n'est pour citer quelques ordres de grandeur des paramètres qui s'introduisent. Les modèles n'ont pas, à l'heure actuelle, été suffisamment travaillés pour qu'une comparaison avec les données permette d'en éliminer certains en faveur d'autres. En outre leurs domaines de validité sont encore mal définis et ne se chevauchent peut-être pas entièrement.

Au lieu d'essayer de justifier les différents modèles, j'ai cru plus utile, dans ce cours, de me borner à les décrire dans le but de faciliter au lecteur l'accès à l'abondante littérature. Il semble, en effet que, dans ce domaine, nombreux sont ceux qui, en présentant leurs travaux, prennent un tel soin à justifier leur description et à vouloir coûte que coûte l'intégrer dans un cadre théorique contraignant en apparence bien que rarement immuable, qu'ils en viennent souvent à oublier de préciser les calculs simples qu'ils ont faits, de peur peut-être de paraître ridicule, et sans doute dans le souci d'épargner ce ridicule à leurs collègues qui, par inadvertance, seraient tentés de les imiter. J'ai également omis toute discussion de la parenté entre les modèles et la QCD. Ceux-là mêmes qui ont contribué à ce sujet difficile [11], et ce sont toujours les mêmes qui sont cités, précisent que jusqu'à présent on ne peut qu'avancer des arguments qualitatifs et qu'ils ne proposent, en fin de compte, que des lagrangiens effectifs et phénoménologiques à la rigueur raisonnables. Dans ce domaine, comme dans tant d'autres, certains modèles simples peuvent bien marcher sans qu'on en comprenne la raison. En outre une certaine prudence nous dicte de ne pas se référer sans cesse à une théorie, somme toute encore assez peu vérifiée.

Je dois beaucoup à une collaboration continue et enrichissante avec Sid Kahana. Je dois exprimer aussi ma vive reconnaissance à Mannque Rho qui m'a prodigué de nombreux enseignements et avertissements, ainsi qu'à Jean-Paul Blaizot, Michel Gaudin et Vincent Pasquier qui, au cours d'innombrables discussions, m'ont énormément aidé à comprendre.

Saclay, Septembre 1984.

1. INTRODUCTION

Dans ce cours nous décrirons les hadrons et la matière hadronique à l'aide de lagrangiens effectifs qui mettent en jeu des quarks et des champs chirals. Ce sont des lagrangiens phénoménologiques dont la parenté avec la QCD n'est encore que spéculative /11/. Disons d'emblée que la spectroscopie des baryons peut être décrite avec une étonnante précision à l'aide de la dynamique de quarks non relativistes et que même l'interaction nucléon-nucléon peut, dans une large mesure, être reproduite ainsi /12/. Alors pourquoi ce foisonnement d'autres modèles (sacs chirals, skyrmions, etc.) qui ne rivalisent pas, à l'heure qu'il est, avec la spectroscopie de quarks non relativistes ? Plusieurs raisons nous poussent à introduire de nouveaux degrés de liberté dans la description des hadrons. L'existence du pion, qui régit la partie à longue portée de l'interaction nucléon-nucléon, est toujours ajoutée ex-tempore dans le calcul des déphasages. Nous verrons que la dynamique des quarks peut être profondément modifiée par l'introduction du champ du pion. D'autre part la brisure de la symétrie chirale dans le vide physique et le confinement des quarks ne sont probablement que des manifestations de la matière hadronique à basse température et (peut-être) à basse pression. Certains calculs en QCD /13/ semblent en effet indiquer qu'à mesure que la température

s'élève, le confinement des quarks cesse et la symétrie chirale est restaurée. Un des buts des lagrangiens effectifs qui introduisent le degré de liberté pionique est d'explorer ces états excités de la matière hadronique. En un premier temps on est bien obligé de leur demander une description raisonnable des

hadrons dont on connaît si bien les propriétés. Mais on n'exige pas encore des différents modèles, issus des lagrangiens effectifs, de rivaliser dans la précision avec laquelle ils reproduisent les données spectroscopiques d'autant moins que leurs domaines de validité restent encore à définir.

Précisons notre notation. Nous travaillons avec la métrique et les définitions des matrices de Dirac de Itzykson et Zuber /14/ (les mêmes que celles de Drell et Bjorken). Nous écrirons :

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) &= \frac{1}{c^2} (\partial_t \sigma)^2 - (\partial_i \sigma)^2 \\
 \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \\
 \gamma^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{c} \beta \partial_t - \underline{\gamma} \cdot \underline{\nabla}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nous sommes toujours les indices répétés. Les vecteurs d'espace seront notés $\underline{r}, \underline{\nabla}, \underline{\gamma}, \dots$. Les isovecteurs seront notés $\vec{\tau}, \vec{\pi}, \dots$ et les quadrivecteurs chiraux seront notés $\vec{\varphi} = (\sigma, \vec{\pi})$. Les produits scalaires des isovecteurs et des quadrivecteurs chiraux s'écriront :

$$\begin{aligned}
 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} &= \pi^a \pi^a = \sum_{a=1}^3 \pi^a \pi^a \\
 \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{\varphi}_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nous adoptons la notation habituelle des spineurs de Dirac $\Psi(\underline{r})$ pour représenter un vecteur (spineur) dont les composantes sont $\Psi_{s\tau}(\underline{r})$ où $s = 1, 2, 3, 4$ sont les indices sur lesquels agissent les matrices de Dirac γ_μ et où τ sont les indices d'isospin sur lesquels agissent les matrices de Pauli. Nous utiliserons de même des contractions incomplètes $\langle \underline{r} | \lambda \rangle$ pour

désigner un vecteur dont les composantes sont $\langle \underline{r} \sigma \tau | \lambda \rangle$

Dans cette notation, on a par exemple :

$$\Psi^\dagger(\underline{r}) \beta \Psi(\underline{r}) = \sum_{ss'} \sum_{\tau} \Psi_{s\tau}^\dagger(\underline{r}) \beta_{ss'} \Psi_{s'\tau}(\underline{r})$$

$$\langle \lambda | \underline{r} \rangle \beta \langle \underline{r} | \lambda \rangle = \sum_{ss'} \sum_{\tau} \langle \lambda | \underline{r} s \tau \rangle \beta_{ss'} \langle \underline{r} s' \tau | \lambda \rangle \quad (1.3)$$

2. LAGRANGIEN D'UN SYSTEME DE QUARKS EN INTERACTION AVEC UN CHAMP CHIRAL

Un système de fermions (quarks), représentés par un spineur de Dirac Ψ et en interaction avec un champ chiral réel $(\sigma, \vec{\pi})$ est décrit par le modèle σ non-linéaire [1]. La densité de lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - g (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \right] \Psi \\ & + \frac{1}{2 \hbar c} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2 \hbar c} (\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) - f (\sigma^2 + \vec{\pi}^2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

la notation est définie dans la section 1. La fonction $f(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ sera précisée ultérieurement et g est une constante de couplage, sans dimension, entre les quarks et le champ chiral. Les champs $(\sigma, \vec{\pi})$ ont la dimension d'une énergie et Ψ a la dimension $f_m^{-3/2}$. Au lieu de poser $\hbar = c = 1$ nous travaillerons avec des champs et des coordonnées sans dimension et définies ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= \frac{g \sigma_0}{\hbar c} \underline{r} & t' &= \frac{g \sigma_0}{\hbar} t & \partial'_\mu \partial'^\mu &= \partial_{t'}^2 - \underline{\nabla}'^2 \\ \Psi' &= \left(\frac{\hbar c}{g \sigma_0} \right)^{3/2} \Psi & \sigma' &= \frac{\sigma}{\sigma_0} & \vec{\pi}' &= \frac{\vec{\pi}}{\sigma_0} \\ f' &= g^2 \frac{(\hbar c)^3}{(g \sigma_0)^4} f \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans ces définitions, σ_0 est une constante que nous interpréterons (section 5) comme la valeur classique du champ σ dans le vide physique et qui a donc la dimension d'une énergie.

A l'aide des quantités sans dimension (2.2), l'action peut s'écrire ainsi :

$$I = \int d\underline{r} dt \mathcal{L}(\psi, \sigma, \vec{\pi}, \dots) = \hbar \int d\underline{r}' dt' \mathcal{L}'(\psi', \sigma', \vec{\pi}', \dots) \quad (2.3)$$

où $\mathcal{L}'$ est un lagrangien sans dimension égal à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \bar{\Psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \right] \Psi \\ & + \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) - f (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans l'équation (2.3), ainsi que dans celles qui suivent, nous omettons d'écrire les primes étant bien entendu que les coordonnées $\underline{r}$ et t ainsi que les champs $\psi, \sigma, \vec{\pi}$ qui apparaissent dans nos expressions sont les quantités primées, définies dans les équations (2.2). Les énergies ainsi obtenues seront exprimées en unités de $g\sigma_0$ et les distances en unités de $\hbar c/g\sigma_0$ qui sera identifié à la longueur de Compton du quark dans le vide physique. On remarquera l'absence de σ_0 dans la densité de lagrangien (2.4). Le choix de σ_0 pourra ainsi être déterminé soit en ajustant une énergie (qui est proportionnelle à σ_0), soit en ajustant une longueur (qui est inversement proportionnelle à σ_0). On remarquera également que la constante de couplage g n'apparaît pas dans le terme fermionique (le premier terme) du lagrangien (2.4). La dynamique des quarks est donc entièrement déterminée par la forme (dans l'espace et le temps) du champ chirale $(\sigma, \vec{\pi})$. En augmentant (ou en diminuant) la constante de couplage g on peut diminuer (ou augmenter) la contribution à l'énergie du champ chirale.

EXERCISE

E2.1 : Montrer qu'il existe une loi d'échelle qui permet d'augmenter l'énergie du système (en variant σ_0) et de diminuer, en même temps et en proportion, sa taille.

3. QUANTIFICATION DU CHAMP DES QUARKS

Il y a une disymétrie entre la dynamique des fermions et celle des bosons. En effet, il existe une approximation classique non triviale des champs bosoniques (ici, le champ chirale) alors que l'approximation classique du champ de fermions donne, en général $\Psi = 0$ et élimine les fermions du problème. A l'ordre le plus bas les fermions apparaissent donc comme une fluctuation quantique, c'est-à-dire qu'il faut quantifier les champs des fermions. Dans cette section nous étudierons le système dans l'approximation (dite d'une boucle fermion) où le champ des quarks est quantifié tandis que le champ chirale est classique. Nous ne savons pas si cette approximation (la première qui soit non triviale) est justifiée ou si, par exemple, il ne serait pas préférable de quantifier à la fois les bosons et les fermions et de travailler à l'approximation d'une boucle fermion et boson.

Soit $\Psi_{s\tau}(\underline{r}, t)$ le champ du quark à un instant t . Le champ peut-être considéré comme une variable dynamique dont le moment conjugué est

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\Psi}_{s\tau}(\underline{r}, t)} = i \Psi_{s\tau}(\underline{r}, t) \quad (3.1)$$

La règle canonique de quantification exige qu'à temps égaux, Ψ et $\Psi^\dagger$ obéissent aux règles d'anticommutation (propres aux fermions) :

$$\begin{aligned} [\Psi_{s\tau}(\underline{r}, t), \Psi_{s'\tau'}^\dagger(\underline{r}', t)]_+ &= \langle \underline{r} s \tau | \underline{r}' s' \tau' \rangle \\ &= \delta_{ss'} \delta_{\tau\tau'} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \end{aligned} \quad (3.2)$$

La densité d'hamiltonien s'écrit alors:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\psi}_{s\tau}(\underline{r}, t)} \dot{\psi}_{s\tau}(\underline{r}, t) - \mathcal{L}' \quad (3.3)$$

ce qui donne, explicitement :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \psi^\dagger & \left[\frac{\underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla}}{i} + \beta (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{c}) \right] \psi \\ & + \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_t \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \vec{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \vec{\pi})^2 + f (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'expression (3.4) représente l'hamiltonien du système dans l'approximation où seul le champ des quarks est quantifié. Il peut-être diagonalisé en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$\left[\frac{\underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla}}{i} + \beta (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{c}) \right] \langle \underline{r} | \lambda \rangle = e_\lambda \langle \underline{r} | \lambda \rangle$$

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (3.5)$$

qui est l'équation de Dirac d'une particule couplée à un champ chiral $(\sigma, \vec{\pi})$ extérieur. Les états propres $|\lambda\rangle$ seront appelés les orbites des quarks. Soit $|D\rangle$ le déterminant de Slater construit à partir des orbites d'énergie négative.

Nous l'écrivons :

$$|D\rangle = \prod_{\lambda < 0} a_\lambda^\dagger |0\rangle, \quad a_\lambda |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_\lambda^\dagger = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (3.6)$$

où $a_\lambda^\dagger$ est l'opérateur qui crée un quark dans l'orbite $|\lambda\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_{s\tau}^\dagger(\underline{r}) &= \sum_\lambda a_\lambda^\dagger \langle \lambda | \underline{r} s \tau \rangle \quad [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger]_+ = \langle \lambda | \lambda' \rangle \\ &= \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Noter la différence entre $\langle \underline{r} s \tau | \lambda \rangle$ dans (3.7) qui est un nombre et $\langle \underline{r} | \lambda \rangle$ dans (3.5) qui est un vecteur (un spineur) dont les composantes sont $\langle \underline{r} s \tau | \lambda \rangle$.

L'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (3.4) est égale à :

$$E = \sum_{\lambda < 0} e_\lambda + \frac{1}{g^2} \int d\underline{r} \left[\frac{1}{2} (\underline{\nabla} \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \vec{\pi})^2 + f (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right] \quad (3.8)$$

Si le système se composait de plusieurs quarks (de valence) occupant des orbitales d'énergie positive, comme cela se produit dans les modèles de sac, il faudrait ajouter à l'expression (3.8) la somme des énergies de ces orbitales de valence. L'expression (3.8) représente l'énergie du système calculée à l'approximation d'une boucle fermion.

A l'équilibre, le champ chirale est indépendant du temps et l'énergie est stationnaire par rapport aux variations du champ chirale $(\sigma, \vec{\pi})$. On a donc :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \sigma(\underline{r}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma(\underline{r})} + g^2 \langle \varrho(\underline{r}) \rangle &= 0 \\ -\nabla^2 \pi^a(\underline{r}) + \frac{\partial f}{\partial \pi^a(\underline{r})} + g^2 \langle \varrho^a(\underline{r}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

où les termes de source $\langle \varrho \rangle$ sont déterminés par les orbitales des quarks :

$$\begin{aligned} \langle \varrho(\underline{r}) \rangle &= \frac{\delta}{\delta \sigma(\underline{r})} \sum_{\lambda < 0} e_{\lambda} = \sum_{\lambda < 0} \langle \lambda | \underline{r} \rangle \beta \langle \underline{r} | \lambda \rangle \\ &= \langle D | \bar{\Psi}(\underline{r}) \Psi(\underline{r}) | D \rangle \\ \langle \varrho^a(\underline{r}) \rangle &= \frac{\delta}{\delta \pi^a(\underline{r})} \sum_{\lambda < 0} e_{\lambda} = \sum_{\lambda < 0} \langle \lambda | \underline{r} \rangle i \beta \gamma_5 \tau^a \langle \underline{r} | \lambda \rangle \\ &= \langle D | \bar{\Psi}(\underline{r}) i \gamma_5 \tau^a \Psi(\underline{r}) | D \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'ensemble des équations (3.5), (3.9) et (3.10) nous permet de calculer, pour une constante de couplage donnée, les orbitales des quarks et le champ chirale du système en équilibre, c'est-à-dire dans un état stationnaire. On distingue deux types de solution.

L'une, dans laquelle les champs σ et $\vec{\pi}$ ne dépendent pas de $\underline{r}$ et dans laquelle les orbites $|\lambda\rangle$ des quarks sont des ondes planes, est invariante par translation et décrit le vide physique (section 5). Mais d'autres solutions existent, auxquelles on attache souvent le nom de soliton, dans lesquelles les champs σ et $\vec{\pi}$ ne sont pas invariants par translation et où certaines orbites des quarks, près de la surface de Fermi, peuvent être des orbites liées. Le nucléon en est un exemple. Dans ce cours nous n'étudions que les cas où les champs ne diffèrent de leur valeur constante du vide physique que localement, c'est-à-dire dans un volume fini de l'espace.

Ce sont évidemment les conditions aux limites (que nous n'avons pas encore précisées) qui déterminent le système qu'on veut étudier. Le comportement des champs à l'infini sera précisé dans la section 5 où nous construirons le vide physique. Leur comportement à l'origine sera déterminé par les équations de mouvement et par l'exigence que l'énergie soit une quantité finie.

On peut définir un lagrangien effectif $\mathcal{L}'_{1F}$ à l'approximation d'une boucle fermions (d'où l'indice 1F) à partir duquel on peut, au besoin, quantifier à son tour le champ chiral afin de travailler à l'approximation d'une boucle fermion et boson. Pour cela nous construisons l'action effective :

$$I_{1F} = \hbar \int dt \mathcal{L}'_{1F}(t) \quad (3.11)$$

où le lagrangien effectif $\mathcal{L}'_{1F}(t)$ est défini par l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{1F}(t) &= \langle D | i \partial_t - H | D \rangle \\ &= \sum_{\lambda < 0} \langle \lambda | i \partial_t - \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} - \beta (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) | \lambda \rangle \\ &\quad + \frac{1}{g^2} \int d\underline{r} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi}) (\partial^\mu \vec{\pi}) - f (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans l'expression (3.12) les orbites $|\lambda\rangle$ et les champs σ et $\vec{\pi}$ dépendent du temps. Le prime sur L' indique que nous travaillons avec les quantités sans dimension (2.2).

Dans la mesure où les orbites des quarks sont considérées comme des fonctionnelles du champ chirale $(\sigma, \vec{\pi})$, le lagrangien effectif (3.12) peut-être considéré comme une fonctionnelle du seul champ chirale. Ce même lagrangien peut-être obtenu en écrivant l'intégrale de Feynman et en intégrant les champs de fermion. La possibilité de décrire un système de quarks (qu'ils soient en nombre pair ou impair), à l'aide d'une fonctionnelle du seul champ chirale, est exploitée par la théorie de Skyrme (section 8). Mais dans cette théorie, le lagrangien effectif, quoique apparenté au lagrangien (3.12), ne s'identifie pas à lui.

EXERCICES

E3.1 : Quantifier le champ des quarks à partir du lagrangien (2.1) et montrer que le champ conjugué à ψ est $i\bar{\psi}\gamma^0$. Vérifier que π s'élimine de la règle de quantification du champ de fermions :

$$[\psi_{s\tau}(\underline{r}, t), i\hbar\psi_{s'\tau'}^\dagger(\underline{r}', t)]_+ = i\hbar\langle s\tau | s'\tau' \rangle$$

E3.2 : On considère le lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\partial_\mu \gamma^\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau})] \psi$$

Etudier les solutions classiques des équations de mouvement du champ (de fermions). Montrer qu'une solution stationnaire classique non triviale ($\psi \neq 0$) n'existe que si l'hamiltonien à

un corps :

$$h = \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + g\beta(\sigma + i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{c})$$

admet une valeur propre nulle et que dans ce cas le nombre de particules $\int d\vec{r} \psi^\dagger \psi$ est indéterminé.

E3.3 : On considère l'hamiltonien $h = \frac{p_x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + y$ où $[p_x, x] = -i$ et où y commute avec x et p_x . Montrer que les vecteurs propres de h sont $|n, y\rangle$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et $\langle n, y | n', y' \rangle = \delta_{nn'} \delta(y - y')$ et que les valeurs propres sont $n + \frac{1}{2} + y$.

On dit que y est une variable classique du système.

E3.4 : On considère l'hamiltonien quadratique de fermions

$$H = \sum_{ij} a_i^\dagger h_{ij} a_j \quad [a_i, a_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}$$

Soient $|\lambda\rangle$ les états propres normalisés de h . Montrer que

$$H = \sum_\lambda e_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda \quad \text{où } e_\lambda \text{ est une valeur propre de } h \text{ et}$$

$$a_\lambda^\dagger = \sum_i a_i^\dagger \langle i | \lambda \rangle.$$

Montrer que l'état fondamental de H est le déterminant de Slater composé des seules orbitales d'énergie négative ($e_\lambda < 0$). Montrer qu'on peut contrôler le nombre d'orbitales dans l'état fondamental en travaillant avec l'hamiltonien $H - \mu N$ et en ajustant μ (N est l'opérateur nombre de particules $N = \sum_i a_i^\dagger a_i$). Montrer que l'invariance relativiste exige que $\mu = 0$ pour des particules de Dirac.

E3.5 : Ecrire les équations de mouvement pour les champs σ et $\vec{\pi}$ et pour les orbitales $|\lambda\rangle$, qui viennent de la variation de l'action définie par les équations (3.11) et (3.12).

E3.6 : Etudier les raisons pour lesquelles la partie

bosonique de l'hamiltonien (3.4) contient des dérivées par rapport au temps tandis que la partie fermionique n'en contient pas. Pourquoi est-ce que le lagrangien de bosons est quadratique dans les dérivées par rapport au temps tandis que celui des fermions est linéaire ? Le champ de fermions peut-il être réel ? Peut-on définir un champ chiral complexe pour lequel le lagrangien serait linéaire dans les dérivées par rapport au temps ? (voir Bjorken and Drell, Relativistic Quantum Mechanics, page 199).

4. L'INVARIANCE CHIRALE

Pour discuter les invariances du lagrangien (2.1) il est commode d'utiliser une notation qui se révélera commode dans l'étude du skyrmion (section 8). A partir du champ chiral on peut construire la matrice (ou l'opérateur) :

$$U = \sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \quad U^\dagger = \sigma - i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}$$

$$U U^\dagger = U^\dagger U = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \quad (4.1)$$

Il est facile de vérifier que :

$$(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger) = (\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + (\partial_\mu \vec{\pi})(\partial^\mu \vec{\pi}) \quad (4.2)$$

Le lagrangien (2.4) peut donc s'écrire :

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - U)\Psi + \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger) - f(U U^\dagger) \right] \quad (4.3)$$

Le second terme du lagrangien (4.3) est, à proprement parler, une matrice. Cependant les équations (4.1) et (4.2) montrent que ce terme est un multiple de la matrice unité et il en sera de même dans les résultats qui suivent. Il est habituel de transformer les matrices, telles que le second terme de (4.3), en nombres, en prenant la trace sur les matrices γ et sur les matrices τ . Mais pour des termes, qui ne sont que des multiples de la matrice unité, cela revient à multiplier par la trace de l'unité, qui vaut $4 \times 2 = 8$ dans notre cas. Nous omettons dans la suite d'écrire la trace. On remarquera enfin que la matrice γ_5 s'élimine entièrement du second terme du lagrangien (4.3).

On distingue deux transformations globales qui laissent invariant le lagrangien (4.3). Elles peuvent-être représentées par les opérateurs unitaires

$$A = e^{iS} \quad \text{et} \quad B = e^{i\gamma_5 S} \quad (4.4)$$

où S est un opérateur hermitique, qui ne dépend ni de la

position ni du temps et qui commute avec les matrices de Dirac γ .

Pour les transformations de type A, les champs se transforment ainsi :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow A \psi & \psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger A^{-1} & (\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} A^{-1}) \\ U &\rightarrow A U A^{-1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il est trivial de vérifier que la transformation des champs (4.5) laisse le lagrangien (4.3) invariant. Un exemple d'une telle transformation est fournie par la rotation d'isospin qui est générée par l'opérateur :

$$A = e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{T} / 2} \quad (4.6)$$

où l'isovecteur $\vec{\alpha}$ définit la rotation. En effet $\vec{T}/2$ est le générateur des rotations d'isospin des quarks, de sorte que $\psi \rightarrow A \psi$ est une rotation d'isospin. Pour vérifier que $U \rightarrow A U A^{-1}$ est bien une rotation de l'isovecteur $\vec{\pi}$, calculons, pour α très petit :

$$\begin{aligned} A U A^{-1} &= \left(1 + i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{T}}{2} + \dots\right) (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{T}) \left(1 - i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{T}}{2} + \dots\right) \\ &= \sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{T} - \frac{\gamma_5}{2} [\vec{\alpha} \cdot \vec{T}, \vec{\pi} \cdot \vec{T}] + \dots \\ &= \sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{T} - i \gamma_5 \vec{T} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\pi}) + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

La transformation (4.7) laisse donc le champ scalaire invariant et transforme $\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} - \vec{\alpha} \times \vec{\pi}$. Il s'agit bien d'une rotation d'isospin.

Pour les transformations de type B, les champs se transforment ainsi :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow B \psi & \psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger B^{-1} & (\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} B) \\ U &\rightarrow B^{-1} U B^{-1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

On vérifie que cette transformation laisse le lagrangien (4.3) invariant. Noter bien la différence entre les transformations (4.5) et (4.8). Elle est due à la présence de γ_5 dans l'opérateur B. Les transformations de type B sont appelées des transformations chirales. Un exemple d'une telle transformation est la rotation chirale définie par l'opérateur

$$B = e^{i\gamma_5 \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} / 2} \quad (4.9)$$

l'analogue chirale de (4.6). Si on décompose le spineur Ψ en ses composantes droite-gauche :

$$\Psi = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_D + \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_G \quad (4.10)$$

on vérifie que, dans la transformation chirale $\Psi \rightarrow B\Psi$, les composantes droite et gauche de Ψ subissent des rotations d'isospin opposées :

$$\psi_D \rightarrow e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} / 2} \psi_D \quad \psi_G \rightarrow e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} / 2} \psi_G \quad (4.11)$$

alors que dans la rotation d'isospin (4.6) elles subissent la même rotation.

Pour déterminer la rotation chirale du champ U calculons, pour $\vec{\alpha}$ très petit :

$$\begin{aligned} B^{-1} U B^{-1} &= (1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2} + \dots) (\sigma + i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) (1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2} + \dots) \\ &= \sigma + i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} + \vec{\pi} \cdot \vec{\alpha} - i\gamma_5 \sigma \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

de sorte que les champs σ et $\vec{\pi}$ se transforment ainsi :

$$\sigma \rightarrow \sigma + \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} - \vec{\alpha} \times \sigma \quad (4.13)$$

la rotation chirale mélange donc le champ σ et le champ $\vec{\pi}$.

L'invariance chirale est importante car elle est spontanément brisée dans le vide physique, comme en témoigne la masse quasi-nulle du pion.

EXERCICES

E4.1 : Les identités suivantes sont utiles :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})]$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})] \vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] \vec{d}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\tau})(\vec{b} \cdot \vec{\tau}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\tau} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{\tau}, \vec{b} \cdot \vec{\tau}] = 2i \vec{\tau} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]$$

E4.2 : Vérifier que, dans les transformations (4.5) et (4.8), le second terme du lagrangien (4.3) reste un multiple de la matrice unité.

E4.3 : Vérifier que les générateurs des rotations chirales ont les mêmes nombres quantiques que les pions.

5. LE VIDE PHYSIQUE

Quelque soient les goûts que Pascal ait cru bon lui attribuer, l'univers se compose essentiellement du vide, que nous appellerons le vide physique, pour le distinguer des vides de divers opérateurs de destruction qu'on pourrait-être amené à définir. Les particules, noyaux et atomes sont des systèmes qui ne perturbent que localement le vide physique et on ne mesure jamais que des écarts du vide physique. Ce n'est qu'au centre des étoiles (à neutrons par exemple) qu'on pense trouver le vide physique perturbé sur une échelle macroscopique. C'est parcequ'une symétrie du lagrangien (la symétrie chirale) est brisée dans le vide physique, que nous devons le construire explicitement. Ceci est vrai tant pour les lagrangiens effectifs tels que (2.1) que pour le lagrangien de la QCD. Mais le travail est infiniment plus simple avec le lagrangien effectif (2.1) parceque la brisure spontanée de la symétrie chirale est obtenue par un choix approprié de la fonction $f(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ qui trouve là sa raison d'être. On pense, par ailleurs, qu'à haute température et (ou ?) haute pression, c'est-à-dire dans les conditions où se serait trouvé l'univers aux temps reculés, le vide physique aurait eu les mêmes symétries que son lagrangien et que certaines des symétries se seraient spontanément brisées au cours de son refroidissement et de son expansion.

A l'approximation d'une boucle fermions (section 3), le vide physique peut-être construit à partir de la solution stationnaire et invariante par translation des équations (3.5) et (3.9). Dans une telle solution :

$$\begin{aligned} \sigma(\underline{r}) &= \sigma \text{ (indépendant de } \underline{r} \text{)} : (\partial_\mu \sigma) = 0 \\ \vec{\pi}(\underline{r}) &= \vec{\pi} \text{ (indépendant de } \underline{r} \text{)} : (\partial_\mu \vec{\pi}) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Les orbites des quarks sont déterminées par l'équation de Dirac

(3.5) que nous écrirons à l'aide de la matrice U , définie en (4.1) :

$$h|\lambda\rangle = e_\lambda|\lambda\rangle \quad h = \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta U \quad (5.3)$$

Nous écrirons la matrice U dans la forme :

$$U = \sigma + i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} = \varphi e^{i\gamma_5 \vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}$$

où

$$\varphi^2 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \quad \sigma = \varphi \cos \theta \quad \vec{\pi} = \varphi \frac{\vec{\theta}}{\theta} \sin \theta \quad (5.4)$$

On appelle θ l'angle chirale (du champ chirale). Considérons la rotation chirale, de type (4.9), définie par l'opérateur unitaire

$$B = e^{i\gamma_5 \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} / 2} \quad (5.5)$$

Cette rotation chirale transforme l'hamiltonien (5.2) des quarks en :

$$B h B^{-1} = B \left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta U \right) B^{-1} = \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta \varphi \quad (5.6)$$

Nous voyons qu'une rotation chirale transforme l'hamiltonien des quarks en un hamiltonien de particules libres de masse égale à φ (en unités de $g\sigma_0/c^2$ selon nos définitions 2.4). La rotation chirale, générée par l'opérateur (5.5), laisse invariant le lagrangien et l'hamiltonien (et donc l'énergie) du système. Il est important de noter que cela n'est vrai que pour une solution stationnaire et invariante par translation, telle que B commute avec les gradients qui apparaissent dans l'hamiltonien.

Les états propres de l'hamiltonien (5.6) sont les ondes planes bien connues de Dirac, que nous écrivons $|\underline{k} \sigma \alpha \tau\rangle$:

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta \varphi \right) \langle \tau | \underline{k} \sigma \alpha \tau \rangle = (-)^{\frac{1}{2} - \alpha} e_{\underline{k}} \langle \tau | \underline{k} \sigma \alpha \tau \rangle$$

$$\langle \underline{k} \sigma \alpha \tau | \underline{k}' \sigma' \alpha' \tau' \rangle = \delta_{\underline{k} \underline{k}'} \delta_{\sigma \sigma'} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\tau \tau'}$$

où $\underline{k}$ et $\sigma = \pm 1/2$ dénotent l'impulsion et la projection du spin du quark, où $\alpha = \pm 1/2$ distingue les orbites d'énergie positive et négative et où τ désigne les autres nombres quantiques (isospin, couleur, étrangeté,...). L'énergie e_k de l'orbite est égale à :

$$e_k = \sqrt{k^2 + \varphi^2} \quad (5.8)$$

L'énergie (3.8) de l'état fondamental s'écrit, pour la solution invariante par translation :

$$E = -\nu \sum_k \sqrt{k^2 + \varphi^2} + \frac{\Omega}{g^2} f(\varphi^2) \quad (5.9)$$

où ν est la dégénérescence des orbites :

$$\nu = 2 (\text{spin}) \times 2 (\text{isospin}) \times 3 (\text{couleur}) \times \dots \quad (5.10)$$

et où Ω est le (grand) volume d'intégration. On voit que l'énergie n'est qu'une fonction de φ^2 et qu'elle est donc indépendante des angles chiraux $\vec{\theta}$. Nous reviendrons sur cette dégénérescence.

Dans le vide physique, φ^2 prendra la valeur qui minimise l'énergie (5.9) et cette valeur dépend de la fonction $f(\varphi^2)$ que nous choisirons plus bas de manière à briser la symétrie chirale. Mais auparavant nous devons nous soucier de ce que l'énergie des quarks (premier terme de 5.9) soit infinie. Que l'énergie du vide physique par unité de volume soit infinie n'est pas gênant en soi parceque nous ne mesurons que des variations de l'énergie du vide. Ce qui, par contre, est gênant dans l'expression (5.9), c'est que même la différence entre les énergies (par unité de volume), calculées pour deux valeurs différentes de φ^2 , soit infinie. On se heurte là à une difficulté typique de la théorie des champs et qui apparaît dès l'approximation d'une boucle. On la résoud (disons qu'on

l'évite) par un processus renormalisation qui, dans ce cas particulièrement simple, peut-être résolu analytiquement.

Pour cela prenons comme énergie de référence l'énergie E_0 obtenue pour la valeur $\varphi^2 = 1$:

$$E_0 = -\nu \sum_{\underline{k}} \sqrt{k^2 + 1} + \frac{\Omega}{g^2} f(\varphi^2 = 1) \quad (5.11)$$

Considérons le développement de $\sqrt{k^2 + \varphi^2}$ autour de la valeur

$$\varphi^2 = 1 : \quad \sqrt{k^2 + \varphi^2} = \sqrt{k^2 + 1} + \frac{\varphi^2 - 1}{2 \epsilon_k} - \frac{(\varphi^2 - 1)^2}{8 \epsilon_k^3} + \frac{(\varphi^2 - 1)^3}{16 \epsilon_k^5} + \dots \quad (5.12)$$

où nous avons posé

$$\epsilon_k = \sqrt{k^2 + 1} \quad (5.13)$$

qu'on prendra soin de ne pas confondre avec e_k défini en (5.8). En substituant ce développement dans (5.9) l'énergie du vide physique s'écrit :

$$\begin{aligned} E(\varphi^2) = E_0 - \nu \frac{\varphi^2 - 1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\epsilon_k} + \nu \frac{(\varphi^2 - 1)^2}{8} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\epsilon_k^3} \\ - \nu \frac{(\varphi^2 - 1)^3}{16} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\epsilon_k^5} + \dots \\ + \frac{\Omega}{g^2} [f(\varphi^2) - f(\varphi^2 = 1)] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Lorsqu'on remplace les sommes sur les impulsions par des intégrales :

$$\sum_{\underline{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\underline{k} \quad (5.15)$$

on trouve que les deux premiers termes de (5.14) donnent des intégrales divergentes alors qu'à partir du troisième terme les intégrales convergent. Supposons maintenant que la fonction $f(\varphi^2)$ ait une forme polynomiale que nous écrirons :

$$f(\varphi^2) - f(\varphi^2 = 1) = a_2 (\varphi^2 - 1) + a_4 (\varphi^2 - 1)^2 + a_6 (\varphi^2 - 1)^3 + \dots \quad (5.16)$$

On voit que les deux sommes infinies de l'énergie (5.14) peuvent être incluses dans les coefficients a_2 et a_4 du développement (5.16). Modifions donc les coefficients de la manière suivante :

$$a_2 \rightarrow a_2 + \frac{\nu}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{(k^2+1)^{1/2}}$$

$$a_4 \rightarrow a_4 - \frac{\nu}{8} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{(k^2+1)^{3/2}} \quad (5.17)$$

On voit qu'ils sont renormalisés par une quantité, infinie certes, mais indépendante de φ^2 . Il est important que seuls les coefficients a_2 et a_4 soient renormalisés parce-que, si le polynôme $f(\varphi^2)$ contenait des puissances plus élevées que φ^4 le lagrangien (3.12) cesserait d'être renormalisable dès l'approximation d'une boucle boson.

La modification (5.17) des coefficients a_2 et a_4 élimine les divergences qui apparaissent dans l'expression (5.14) de l'énergie. On obtient ainsi l'énergie renormalisée :

$$E(\varphi^2) - E(\varphi^2=1) = -\nu \sum_{\underline{k}} \sqrt{k^2+\varphi^2} + \nu \sum_{\underline{k}} \sqrt{k^2+1}$$

$$+ \nu \frac{\varphi^2-1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{(k^2+1)^{1/2}} - \nu \frac{(\varphi^2-1)^2}{8} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{(k^2+1)^{3/2}}$$

$$+ \frac{\Omega}{g^2} [a_2(\varphi^2-1) + a_4(\varphi^2-1)^2 + \dots] \quad (5.18)$$

Les termes de la deuxième ligne de (5.18) sont souvent appelés des contretermes qui assurent la convergence de l'énergie sans toutefois modifier la forme de sa dépendance en φ^2 . Les sommes (5.18) peuvent-être calculées analytiquement. Imaginons que nous

limitons les sommes sur les impulsions à un cut-off $k \leq \Lambda$. Cela revient à remplacer dans (5.18) :

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda 4\pi k^2 dk \quad (5.19)$$

Les intégrales du type $\int_0^\Lambda k^2 dk (k^2+1)^{p/2}$ sont citées dans les tables. On peut ainsi calculer l'énergie (5.18) pour un cut-off donné Λ et prendre la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ de la somme des termes (nous recommandons fortement ce calcul). Le calcul est élémentaire et il donne l'expression :

$$\begin{aligned} E(\varphi^2) - E(\varphi^2=1) = & -\nu \frac{\Omega}{2\pi^2} \left[\frac{\varphi^4 \lg \varphi^2}{16} + \frac{(\varphi^2-1)(1-3\varphi^2)}{32} \right] \\ & + \frac{\Omega}{g^2} \left[a_2 (\varphi^2-1) + a_4 (\varphi^2-1)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Choisissons la fonction $f(\varphi^2)$ de manière à ce qu'elle ait un minimum au point $\varphi^2 = 1$:

$$f(\varphi^2) = \frac{\kappa}{4} (\varphi^2-1)^2 \quad (5.21)$$

ce qui est bien un polynôme de degré 4. Dans ce cas le membre droit de l'équation (5.20) présente un minimum au point $\varphi^2 = 1$ et il peut donc représenter l'énergie du vide physique en fonction de $\varphi^2 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$. Nous écrirons :

$$\begin{aligned} E[\varphi^2] = & -\nu \frac{\Omega}{2\pi^2} \left[\frac{\varphi^4 \lg \varphi^2}{16} - \frac{(\varphi^2-1)(1-3\varphi^2)}{32} \right] \\ & + \frac{\Omega \kappa}{4g^2} (\varphi^2-1)^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Cette écriture revient à annuler l'énergie de référence (5.11)

et à l'identifier à l'énergie du vide physique.

L'énergie (5.23) présente un minimum au point $\varphi^2 = 1$:

$$E(\varphi^2=1) = 0, \quad \left. \frac{dE}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^2=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2E}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^2=1} = \frac{\Omega \kappa}{g^2} \quad (5.24)$$

Le premier terme de (5.23) peut-être considéré comme la contribution des quarks dans la mer de fermi à l'énergie du vide :

$$E_F = - \frac{\nu \Omega}{2\pi^2} \left[\frac{\varphi^4 \lg \varphi^2}{16} + \frac{(\varphi^2-1)(1-3\varphi^2)}{32} \right] \quad (5.25)$$

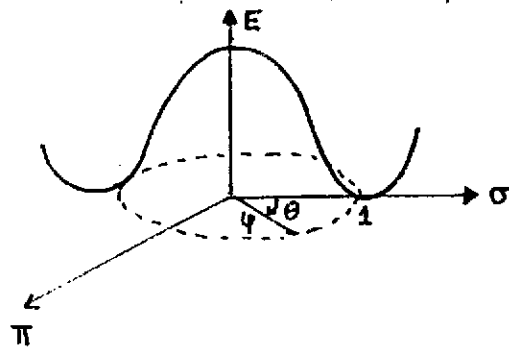
Les quarks ne contribuent ainsi en rien à l'énergie du vide physique au voisinage du point $\varphi^2 = 1$. On vérifie en effet que :

$$E_F(\varphi^2=1) = 0, \quad \left. \frac{dE_F}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^2=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2E_F}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^2=1} = 0 \quad (5.26)$$

Mais le lecteur attentif aura sans doute remarqué la part d'arbitraire qu'il y a à séparer les contributions respectives des quarks et du champ chiral à l'énergie du vide. En effet, nous avons éliminé les deux termes divergents du développement (5.14) de la contribution des quarks afin de les inclure complètement dans les coefficients a_2 et a_4 du développement de la fonction f . Mais nous aurions aussi bien pu remplacer chacune de ces sommes infinies par un nombre fini et arbitraire, et reléguer les différences infinies correspondantes dans les termes a_2 et a_4 . En d'autres mots, les contributions respectives des quarks et du champ chiral aux coefficients a_2 et a_4 restent indéterminées et arbitraires dans cette théorie. Le choix particulier que nous avons fait pour les séparer est exprimé par ce qu'on appelle des conditions de

renormalisation et qui trouvent leur expression dans les équations (5.26). Dans notre cas, le fait d'avoir inclus, dans la fonction $f(\varphi^2)$, les deux premiers termes du développement de l'énergie des quarks en puissances de $(\varphi^2 - 1)$ fait que le comportement de l'énergie du vide au voisinage du point $\varphi^2 = 1$ est entièrement régi par la fonction $f(\varphi^2)$. C'est commode, cependant nous aurions pu décider que les quarks ne contribuent pas à l'énergie au voisinage du point $\varphi^2 = 0$. Dans ce cas le premier terme de (5.23) aurait été modifié par un polynôme de degré 4 en φ^2 . Pour comparer les résultats de deux calculs il est important d'en préciser les conditions de renormalisation.

Avec le choix (5.21) de la fonction $f(\varphi^2)$ l'énergie peut-être représentée en fonction de φ et de (la valeur absolue de) l'angle chirale θ par une surface en forme de chapeau mexicain (ou de fond de bouteille, d'autres y voient un kuglupf alsacien) :



(5.27)

L'énergie ne dépend pas de l'angle chirale θ et le vide est donc dégénéré le long du cercle chirale défini par l'équation

$$\varphi^2 = \sigma^2 + \pi^2 = 1 \quad (5.28)$$

On passe d'un point de ce cercle à un autre par une rotation chirale. Bien qu'on puisse représenter le vide par un quelconque des points sur le cercle chirale, il est évidemment plus simple

de choisir le point $\theta = 0$:

$$\sigma = 1 \quad \vec{\pi} = 0 \quad (\text{vide physique, champs sans dimension}) \quad (5.29)$$

En unités dimensionnées (voir 2.2) le vide physique est caractérisé par les valeurs classiques suivantes du champ

chiral :

$$\sigma = \sigma_0 \quad \vec{\pi} = 0 \quad (5.30)$$

Il est difficile de déterminer la courbe (5.27) expérimentalement et les calculs en QCD n'en sont pas encore là. Donc on ne peut que identifier le paramètre σ_0 du lagrangien (2.1) à la valeur classique du champ scalaire dans le vide. Cependant on peut aussi calculer le temps de vie du pion ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$) à partir du lagrangien (2.1). Cela permet de déterminer une valeur $\sigma_0 = 93$ MeV, indépendamment des autres paramètres du lagrangien.

Le fait que le vide physique se réalise sur le cercle chiral $\varphi=1$ et non au point $\varphi=0$ est l'expression de la brisure spontanée de la symétrie chirale dans le vide. Il est bien entendu que nous n'avons pas expliqué cette brisure de symétrie puisque nous avons choisi la fonction $f(\varphi^2)$ de manière à ce qu'elle ait lieu.

Lorsqu'on calcule les vibrations du vide physique autour de son état d'équilibre, on trouve un mode de vibration sans force de rappel et dont la trajectoire est le long du cercle chiral. Un tel mode, dû à la brisure de symétrie, porte le nom de boson de Goldstone et il représente une particule de masse nulle. Il a les mêmes nombres quantiques que les générateurs de la symétrie brisée. Dans notre cas où la symétrie brisée est une rotation chirale représentée par l'opérateur (4.9) il a les mêmes nombres quantiques que le pion : isovecteur et pseudoscalaire. Le lagrangien (2.1) prévoit un pion de masse nulle. Sa faible masse de 150 MeV peut-être obtenue en ajoutant une

faible perturbation de la forme $c\sigma$ qui brise légèrement l'invariance chirale du lagrangien (voir la discussion pages 540-555 dans Itzykson et Zuber).

EXERCICES

E5.1 : Montrer que les équations (3.5) et (3.9) admettent une solution invariante par translation de la forme (5.1) et (5.7).

E5.2 : Tracer la courbe de l'énergie (5.23) en fonction de φ^2 pour différentes valeurs de K/g^2 . Montrer qu'elle n'a qu'un minimum local au point $\varphi^2 = 1$ (la contribution des fluctuations quantiques du champ chirale, dits effets à une boucle boson, peut stabiliser le vide pour $\varphi^2 \rightarrow \infty$).

E5.3 : On définit $I_p(\lambda) = \int_0^\lambda x^2 dx (1+x^2)^{p/2}$.
Montre que (voir Gradshtein p. 86)

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{8} \left[\frac{\sinh 4x}{4} - x \right] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{8} \left[2\lambda^4 + 2\lambda^2 - \lg 2\lambda + \frac{1}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$I_{-1}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 2x}{2} - x \right] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \left[\lambda^2 - \lg 2\lambda + \frac{1}{2} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$I_{-3}(\lambda) = x - \tanh x \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lg 2\lambda - 1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$I_{-5}(\lambda) = \frac{1}{3} \tanh^3 x \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

$$I_{-7}(\lambda) = \frac{1}{3} \tanh^3 x - \frac{1}{5} \tanh^5 x \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{15}$$

avec $\lambda = \sinh x$ $x = \lg [\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}]$

Utiliser les intégrales ci-dessus pour étudier la manière dont l'énergie (5.18) dépend du cut-off $k < \Lambda$. Tracer la courbe de l'énergie (5.18) en fonction du cut-off pour $\varphi = 0.5$ et $\varphi = 1.5$ (belle occasion pour programmer votre HP 11C).

6. LE SAC DE MIT

Deux modèles du nucléon rivalisent par leur simplicité et ont été par conséquent très développés. Ils donnent des descriptions différentes du hadron. Il s'agit du modèle du sac de MIT /2/ et du skyrmion /3/. Nous les décrivons dans cette section et dans la section 8. Dans le modèle du sac de MIT, les trois quarks qui composent le nucléon creusent dans le vide physique une petite cavité (le sac) où ils se propagent librement avec une masse nulle. Dans cette cavité la symétrie chirale est restaurée. Les quarks ne peuvent quitter la cavité car, dans le vide physique, ils acquièrent une masse infinie. Nous verrons que dans le modèle de Skyrme, la symétrie chirale est partout brisée et, ce qui distinguera les régions intérieures et extérieures du nucléon, ce sera l'angle chiral qui passera continuellement de 0 à π à mesure qu'on pénètre le nucléon en partant du vide physique. Dans ce modèle, le confinement, voire la présence des quarks, ne seront pas explicités. Annonçons d'avance qu'un troisième modèle, dit du sac chiral /4/ et décrit dans la section 10, a été conçu pour concilier le sac de MIT et le skyrmion. Dans le modèle du sac chiral, le nucléon se compose d'une cavité intérieure semblable (quoique plus petite) que celle du sac de MIT et entourée d'une région extérieure décrite par le lagrangien de Skyrme.

Il existe un lagrangien effectif pour le modèle du sac de MIT (voir le soliton de T.D. Lee décrit dans la section 7) et il existe un autre lagrangien pour décrire le skyrmion. Malheureusement il n'existe pas actuellement de lagrangien effectif qui soit à la fois invariant chiral et qui prévoie une région intérieure du nucléon où la symétrie chirale serait restaurée, bien que le modèle du sac chiral puisse être

considéré comme un premier pas dans cette direction.

Le modèle du sac de MIT est mieux discuté avec les champs et les distances dimensionnées du lagrangien (2.1) qu'avec les variables sans dimensions définies en (2.4) qui, elles sont plus utiles pour la description des solitons. La réécriture des équations avec les quantités dimensionnées est triviale et, dans cette section, nous la ferons sans autre commentaire.

Le modèle du sac de MIT suppose que la valeur classique du champ du pion est partout nulle :

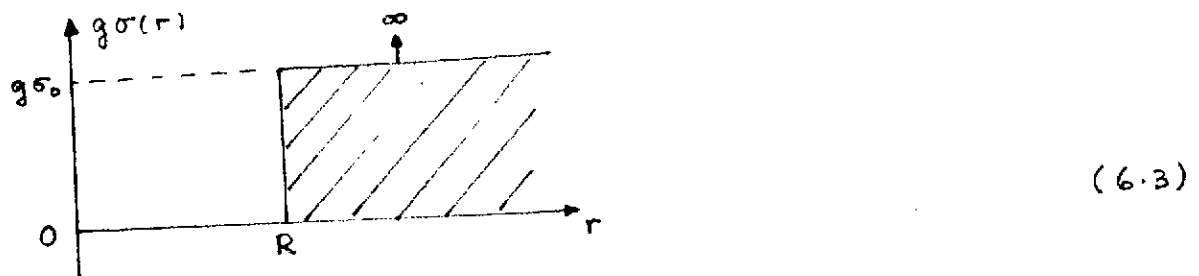
$$\vec{\pi} = 0 \quad (6.1)$$

Les quarks n'interagissent effectivement qu'avec un champ scalaire $\sigma(r)$ et $g\sigma(r)$ joue le rôle de masse locale des quarks. Les orbites des quarks sont solution de l'équation de Dirac (3.5) :

$$\left[\hbar c \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + g\beta\sigma(r) \right] \langle r | \lambda \rangle = e_\lambda \langle r | \lambda \rangle \quad (6.2)$$

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = 1$$

et la masse effective $g\sigma(r)$ est (dans le cas invariant par rotation) supposée être nulle à l'intérieure d'une sphère de rayon R (qui définit le sac) et infinie à l'extérieur :



On voit que si σ_0 est la valeur classique du champ scalaire dans le vide physique ($\sigma_0 \sim 95$ MeV voir section 5) le modèle du sac de MIT suppose une constante de couplage infinie

$$g \rightarrow \infty \quad (6.4)$$

entre les quarks et le champ scalaire. (C'est pour cela que les variables (2.4) sans dimension ne sont pas adaptées à ce modèle). La paroi infinie (6.3) de la masse du quark impose aux orbites la condition

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_R = \langle \lambda | r=R \rangle \beta \langle r=R | \lambda \rangle = 0 \quad (6.5)$$

A l'intérieur du sac où la masse $g\sigma = 0$ les orbites obéissent à l'équation :

$$\hbar c \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} \langle r | \lambda \rangle = e_\lambda \langle r | \lambda \rangle \quad r < R$$

$$\int_{r < R} \langle \lambda | r \rangle \langle r | \lambda \rangle dr = 1 \quad (6.6)$$

et elles s'annulent à l'extérieur du sac ($r > R$). Les équations (6.5) et (6.6) permettent de calculer les orbites des quarks. L'orbite la plus basse, d'énergie positive est l'orbite $s_{1/2}$ ($\ell = 0$) dont la fonction d'onde (non-normalisée) s'écrit :

$$\langle r | k \sigma \rangle = \begin{pmatrix} i j_0(kr) | \sigma \rangle \\ -j_1(kr) (\sigma \cdot \hat{r}) | \sigma \rangle \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

où σ est la projection du spin (égal, pour $\ell = 0$, au moment cinétique total) et l'énergie de l'orbite est

$$e = \hbar c k \quad (6.8)$$

La condition aux limites (6.5) est satisfaite lorsque

$$j_0(kR) = j_1(kR) \rightarrow kR = 2.04 \quad (6.9)$$

L'orbite du quark a donc une énergie égale à

$$e = \hbar c \frac{2.04}{R} \quad (6.10)$$

L'énergie du système (voir 3.8) composé du N quarks de valence

dans l'orbite d'énergie (6.10) est égale à

$$E = \hbar c \frac{2.04 N}{R} + \frac{4}{3} \pi R^3 B \quad (6.11)$$

où on néglige la contribution des orbites de la mer de Fermi dont on ne sait, au juste, dans quelle mesure elle est comprise dans la fonction f , c'est-à-dire, ici, dans la constante du sac B .

Le rayon d'équilibre est celui qui minimise l'énergie (6.11). Pour un nucléon composé de $N = 3$ quarks et d'énergie égale à 1 GeV on trouve un rayon d'équilibre égal à 1.61 fm et une constante du sac $B = 14,3 \text{ MeV/fm}^3$. Cependant, dans la mesure où on peut comparer le mouvement des quarks dans le sac à celui de particules dans un oscillateur harmonique, on doit calculer l'énergie du système de N quarks en remplaçant N par $N-1$ pour extraire l'énergie spurieuse du mouvement de leur centre de masse. L'énergie d'un nucléon dont l'énergie d'équilibre est 1 GeV, calculé en posant $N = 2$ dans la formule de masse (6.11) donne alors un rayon d'équilibre égal à 1.07 fm et une constante du sac $B = 48 \text{ MeV/fm}^3$, valeurs proches de celles couramment utilisés pour la spectroscopie des hadrons.

Relevons l'image physique sous-jacente au modèle du sac de MIT. Les quarks se propagent à l'intérieur du sac, librement et avec une masse nulle. Le sac délimite deux régions de l'espace. L'intérieur où la symétrie chirale est restaurée ($\sigma = \vec{\pi} = 0$) et l'extérieur, le vide physique, où elle est brisée ($\sigma = \sigma_0, \vec{\pi} = 0$) et où les quarks ont une masse infinie.

On peut donc considérer le sac comme une surface qui sépare deux phases du vide et la constante B du sac mesure la différence en l'énergie, par unité de volume, entre

ces deux phases. D'après ce modèle, il en coûterait au vide environ 50 MeV/fm^3 pour restaurer la symétrie chirale.

EXERCICES

E6.1 : La condition aux limites (6.5) est également satisfaite par les deux équations $j_0(kR) = \pm j_1(kR)$. Montrer que ces équations donnent les énergies des orbites $S_{1/2}$ et $P_{1/2}$ respectivement et que le prolongement analytique des fonctions de Bessel aux arguments négatifs donne également les énergies négatives des orbites dans la mer de Dirac.

E6.2 : Soient E_0 et R_0 l'énergie et le rayon d'équilibre prévus par la formule de masse (6.11). Montrer que

$$R_0 = 2.04 \hbar c \frac{4N}{3E_0} \quad B = \frac{3E_0}{16\pi R_0^3} \quad (\hbar c = 197,3 \text{ MeV fm}).$$

E6.3 : Montrer que, pour une constante B donné, le rayon d'équilibre varie comme $N^{1/4}$ et que l'énergie varie comme $N^{3/4}$. Montrer que ces lois cessent d'être valables lorsque $N \gg N_0$ est la dégénérescence (5.10) des orbites. Montrer qu'un seul quark forme un sac de rayon $0,89 \text{ fm}$ et d'énergie $0,6 \text{ GeV}$ (on prendra $B = 50 \text{ MeV/fm}^3$). Montrer que le nucléon est lié par une énergie de 0.8 GeV par rapport à la fission en 3 quarks et de $0,2 \text{ GeV}$ par rapport à la fission en un sac de 2 quarks et un sac de 1 quark. Est-ce raisonnable ?

7. LE SOLITON DE FRIEBERG ET LEE

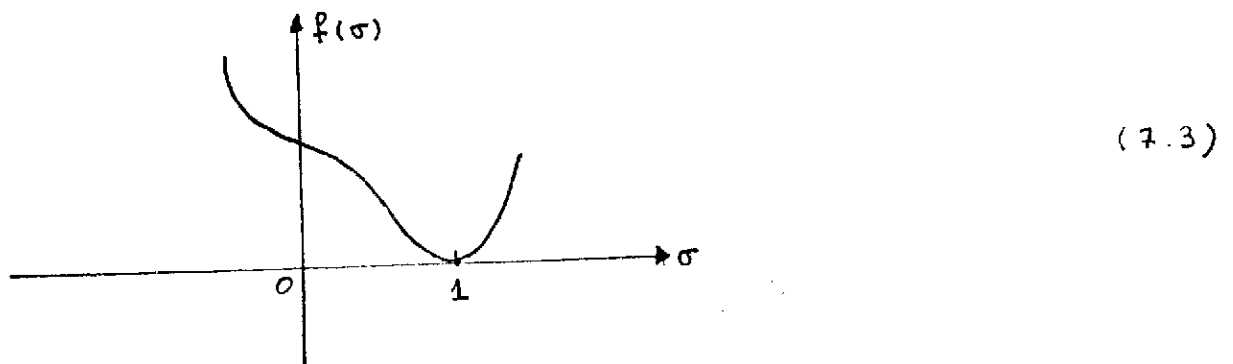
Friedberg et Lee se sont proposés de dériver le modèle du sac de MIT à partir d'un lagrangien effectif [5] qui n'est autre que le lagrangien (2.1) ou (2.4) dans lequel on pose $\vec{\pi} = 0$, c'est-à-dire qu'on néglige le degré de liberté du pion, du moins à l'approximation classique. Le lagrangien effectif (2.4) se réduit alors à l'expression

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma) \Psi + \frac{1}{g^2} [(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - f(\sigma)] \quad (7.1)$$

Le champ scalaire est traité classiquement. En outre on limite l'espace des configurations des quarks aux orbites d'énergie positive (donc aux seuls quarks de valence) de sorte qu'on néglige les effets dûs aux quarks dans la mer de Dirac. Dans cette approximation l'énergie d'un état stationnaire ayant N quarks dans une orbite $|\lambda\rangle$ d'énergie e_λ est égale à (voir section 3):

$$E = N e_\lambda + \frac{1}{g^2} \int d\tau \left[\left(\frac{\nabla \sigma}{2} \right)^2 + f(\sigma) \right] \quad (7.2)$$

Le vide physique étant défini, dans ce modèle, par l'absence de quarks de valence ($N = 0$) et par l'invariance par translation du champ ($\nabla \sigma = 0$) la fonction $f(\sigma)/g^2$ représente l'énergie, par unité de volume, du vide physique. T.D. Lee considère des fonctions $f(\sigma)$ telles que



le vide physique étant réalisé au point $\sigma = 1$.

L'orbite des quarks est déterminée par l'équation de

Dirac :

$$\left[\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta \sigma(r) \right] \langle r | \lambda \rangle = e_\lambda \langle r | \lambda \rangle$$

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (7.4)$$

Le champ scalaire est déterminé par l'équation

$$-\nabla^2 \sigma(r) + \frac{\partial f}{\partial \sigma(r)} + g^2 g(r) = 0 \quad (7.5)$$

où le terme de source est déterminé par l'orbite des quarks :

$$g(r) = \langle \bar{\psi}(r) \psi(r) \rangle = N \langle \lambda | r \rangle \beta \langle r | \lambda \rangle \quad (7.6)$$

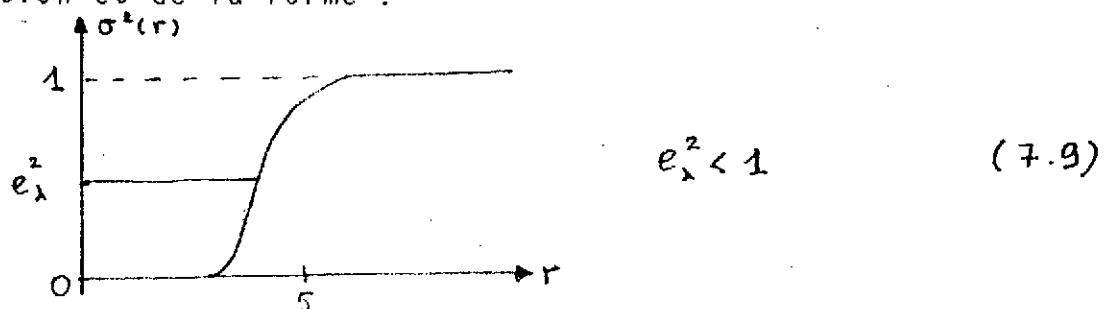
A l'infini le champ scalaire retrouve sa valeur classique dans le vide physique, et on impose donc la condition aux limites :

$$\sigma(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 1 \quad (7.7)$$

Montrons que les équations (7.4) et (7.5) admettent une solution localisée dans l'espace à condition que la constante de couplage soit assez forte. Pour cela nous remarquerons qu'on peut toujours choisir une fonction d'essai $\sigma(r)$ telle que l'orbite du quark soit une orbite liée, c'est-à-dire telle que :

$$e_\lambda^2 < 1 \quad (\text{orbite liée}) \quad (7.8)$$

Il suffit pour cela de choisir, par exemple, $\sigma(r)$ invariant par rotation et de la forme :



En effet, en élevant au carré l'hamiltonien de Dirac on s'aperçoit, qu'à des effets de gradient près, l'énergie e_λ est la même que celle d'une particule de Schrödinger, de masse égale à 1/2 dans un potentiel égal à $\sigma^2(\underline{r})$. La profondeur de ce potentiel étant fixée à 1 par la condition aux limites (7.7) il suffit d'augmenter suffisamment son rayon pour qu'apparaissent des orbites liées, $e_\lambda^2 < 1$. On peut alors toujours trouver une constante de couplage g assez forte pour que l'énergie (7.2) soit telle que :

$$E < N \quad (\text{système lié}) \quad (7.10)$$

Cette énergie est inférieure à l'énergie de N quarks se propageant librement dans le vide physique où leur masse est égale à 1. Les équations (7.4) et (7.5) expriment la stationnarité de l'énergie par rapport aux variations, tant des orbites des quarks, que du champ σ . Par conséquent, pour la constante de couplage choisie de manière à satisfaire (7.10), un meilleur choix de la fonction $\sigma(\underline{r})$ ne pourra qu'abaisser l'énergie et renforcer l'inégalité (7.10). Une orbite liée a une fonction d'onde qui décroît exponentiellement avec la distance. Il en sera de même du terme de source (7.6). Par conséquent $\sigma(r)$ ne diffère de sa valeur asymptotique $\sigma = 1$ que dans la région admise classiquement pour le quark, c'est-à-dire dans la région où $e_\lambda^2 > \sigma^2(\underline{r})$.

Une solution des équations (7.4) et (7.5), qui est localisée dans l'espace, porte le nom de soliton. Nous n'avons pas analysé si cette dénomination (qui s'applique au mascaret qui atteignait Rouen) est correcte ou pas et nous suivons T.D. Lee dans son emploi. Notre soliton n'est ni plus ni moins un état lié de quarks et il n'est pas localisé pour d'autres raisons.

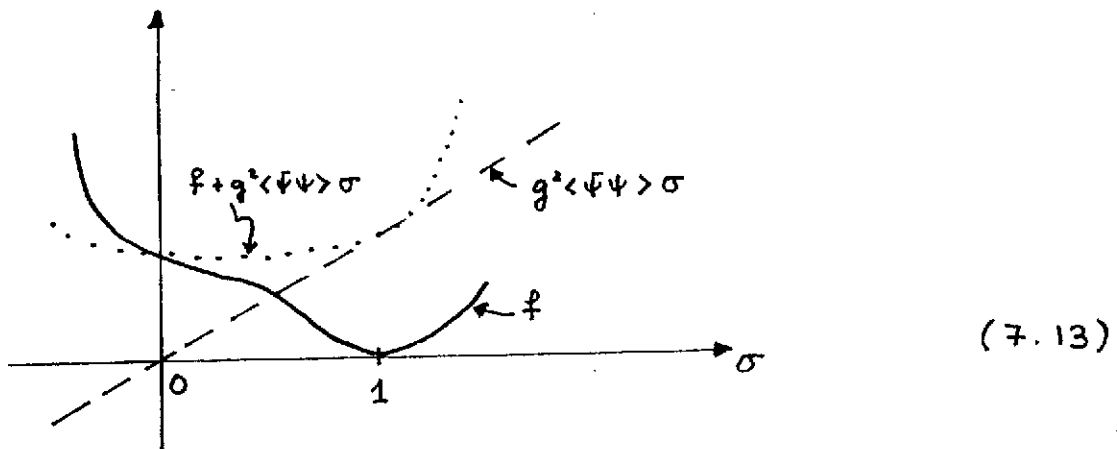
Précisons le rôle de la fonction $f(\sigma)$. L'équation (7.10) s'écrit de manière plus succincte ainsi :

$$-\nabla^2 \sigma + \frac{\partial f}{\partial \sigma} + g^2 \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = 0 \quad (7.11)$$

Si nous négligeons les effets dus aux variations des orbites des quarks (et donc de $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$) on peut dire que l'effet des quarks sur le champ σ revient à ajouter à la fonction f un terme $g^2 \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sigma$, linéaire en σ . Les quarks provoquent donc la modification :

$$f(\sigma) \rightarrow f(\sigma) + g^2 \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sigma \equiv f' \quad (7.12)$$

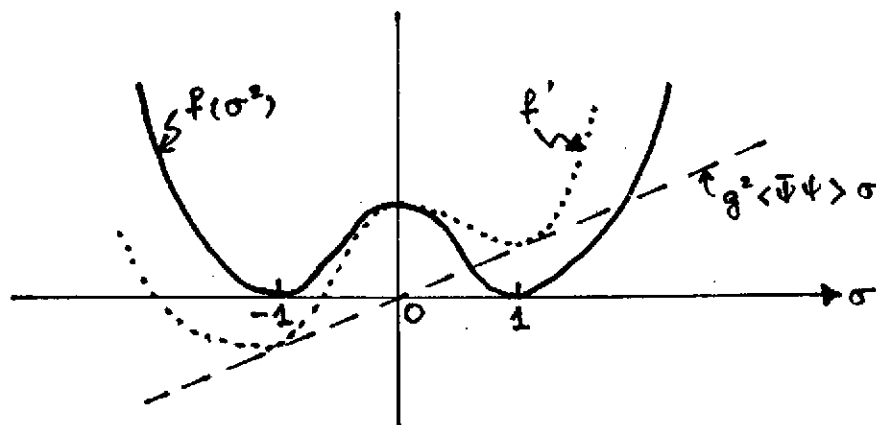
L'effet est représenté ci-dessous :



On voit qu'une augmentation de la constante de couplage g accentue la pente de la droite $g^2 \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sigma$ et finit par faire passer le minimum du point $\sigma = 1$ au point $\sigma = 0$. Le champ σ concentre sa valeur dans la région où f' est minimum (l'étalement étant dû au terme $\nabla^2 \sigma$), de sorte que σ acquiert la forme (7.9) pour laquelle les quarks ont une masse nulle ($g\sigma = 0$) dans la région centrale du soliton, comme dans le sac de MIT. Mais, contrairement au sac de MIT, la région intérieure du soliton de T.D. Lee est séparée de la région extérieure par une surface diffuse. En outre, tant que la constante de couplage

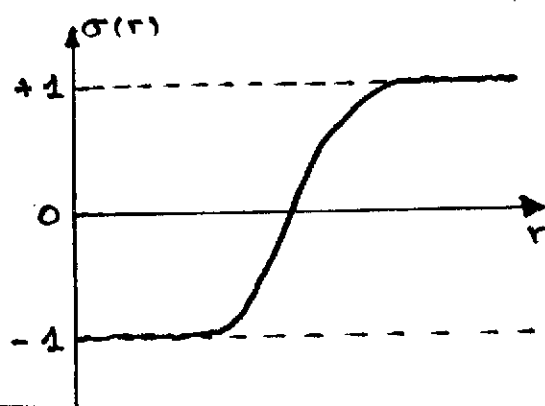
g reste finie, les quarks peuvent se propager librement dans le vide physique, avec une masse égale à zéro. A mesure que l'on augmente la masse du quark dans le vide (en augmentant la constante de couplage) l'épaisseur de la surface se rétrécit et, à la limite $g \rightarrow \infty$ on retrouve le sac de MIT. La constante B du sac est alors égale à $f(\sigma = 0)$, où f est la fonction dimensionnée du lagrangien (2.1).

On notera enfin que nous avons utilisée une fonction $f(\sigma)$ qui n'est pas symétrique autour du point $\sigma = 0$, comme l'étaient les fonctions f des lagrangiens invariants chiraux (voir 5.27 par exemple). Si nous avons utilisé une fonction $f(\sigma^2)$, symétrique par rapport à l'origine, et qui présente donc deux minima, l'un à $\sigma = 1$ et l'autre à $\sigma = -1$, les quarks de valence feraient simplement basculer le minimum de f' du point $\sigma = 1$ au point $\sigma = -1$ comme le montre la figure ci-dessous :



(7.14)

Le champ σ prendrait alors la forme :



(7.15)

et la densité des quarks aurait tendance à se concentrer à la surface où $\sigma \approx 0$. A la limite $g \rightarrow \infty$ une telle solution donne le modèle du sac du SLAC [7]. Nous retrouvons ici la difficulté de trouver un lagrangien, invariant chirale, qui donne un soliton avec une région centrale où la symétrie chirale est restaurée.

EXERCICES

E7.1 : Montrer que si $|\lambda\rangle$ est une orbite d'énergie e_λ , solution de (7.4), alors $\beta\gamma_5|\lambda\rangle$ est une orbite d'énergie $-e_\lambda$.

Montrer que ces deux orbites ont la même densité de quarks. En déduire que le champ chirale ne peut pas modifier la densité de quarks de la mer de Dirac.

E7.2 : On considère l'équation de Dirac (7.4) dans le cas où le champ $\sigma(r)$ est invariant par rotation. Montrer que dans ce cas les orbites peuvent se mettre sous la forme

$$\langle r | n l j m \rangle = \begin{pmatrix} \frac{i F_{lj}^n(r)}{r} | l j m \rangle \\ \frac{G_{lj}^n(r)}{r} \underline{\sigma} \cdot \hat{r} | l j m \rangle \end{pmatrix}$$

et que les fonctions radiales F et G sont solution du problème aux valeurs propres

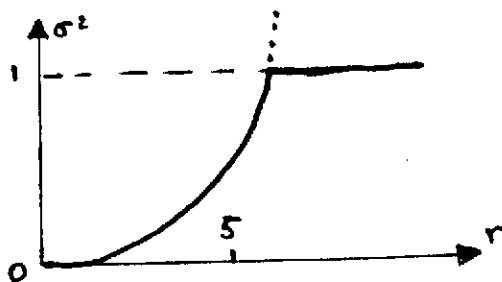
$$\begin{pmatrix} \sigma & -(\partial_r + \frac{\omega_{lj}+1}{r}) \\ \partial_r - \frac{\omega_{lj}+1}{r} & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{lj}^n(r) \\ G_{lj}^n(r) \end{pmatrix} = e_{nlj} \begin{pmatrix} F_{lj}^n(r) \\ G_{lj}^n(r) \end{pmatrix}$$

où $\omega_{e_j} = \ell$ si $j = \ell + \frac{1}{2}$ et $\omega_{e_j} = -\ell - 1$ si $j = \ell - \frac{1}{2}$ (voir Itzykson et Zuber pages 77-78). Ce problème aux valeurs propres n'admet pas des paires de solutions d'énergie opposées. Comment concilier cela avec le résultat de l'exercice précédent ?

E7.3 : Etes-vous réellement convaincu par l'argument que l'équation (7.10) est une condition pour que le système soit lié ? (Ceux qui ont fait les exercices de la section précédente le seront moins. Qu'ils essaient d'améliorer l'argument).

E7.4 : Montrer que les équations (7.4) et (7.5) n'admettent une solution sphérique (où σ et φ sont invariants par rotation) que si les quarks forment des couches complètes. Préciser.

E7.5 : On suppose que, près de l'origine, $\sigma^2(r)$ a la forme $\sigma^2 = \omega^2 r^2 / 2$ d'un oscillateur :



Elever au carré l'hamiltonien de Dirac et montrer que (7.4) donne :

$$[-\nabla^2 + \sigma^2(r) + i \underline{\gamma} \cdot (\underline{\nabla} \sigma)] |\lambda\rangle = e_\lambda^2 |\lambda\rangle$$

On néglige le terme $\underline{\nabla} \sigma$ et on assimile (pour une orbite bien liée) à l'oscillateur. Montrer que pour une orbite d'énergie $e \sim 0.5$ on a $\omega \sim \frac{1}{6}$ et la taille sans dimension des systèmes est alors ~ 3 .

8. LE SKYRMION

Il y a 24 ans environ, Skyrme proposait de décrire les hadrons à l'aide d'un seul champ chiral, astreint au cercle chiral :

$$U = \sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \quad U U^\dagger = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 = 1 \quad (8.1)$$

où σ et $\vec{\pi}$ sont sans dimension. Dans cette définition, nous avons gardé le γ_5 afin de maintenir un lien avec les sections 2-5 où le champ chiral U était couplé aux quarks. Les résultats de cette section ne changent pas si nous omettons le γ_5 , plus précisément si nous posons $\gamma_5 = 1$.

Skyrme n'a pas introduit de quarks dans sa théorie. Soyons indulgents. Gell-Mann et Zweig ne les inventaient que 4 ans plus tard. Skyrme a néanmoins défini, à partir du champ chiral (8.1), un courant baryonique, idée a priori choquante (et il nous en proposera une autre plus bas) puisque nous autres, nous savons aujourd'hui que ce sont les quarks qui portent la charge baryonique et non les mésons σ et $\vec{\pi}$. Nous insistons là-dessus pour souligner l'originalité de la pensée de Skyrme. Il semble que pendant vingt ans personne n'avait compris qu'il avait quelque chose à dire.

Définissons les opérateurs

$$L_\mu = -i U^\dagger (\partial_\mu U) = i (\partial_\mu U^\dagger) U \quad (8.2)$$

qui sont hermitiques parce que U est supposé unitaire partout :

$$\partial_\mu (U^\dagger U) = (\partial_\mu U^\dagger) U + U^\dagger (\partial_\mu U) \quad (8.3)$$

A partir des opérateurs L_μ on peut définir un courant

$$B^\mu = \frac{\gamma_5}{12\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} L_\alpha L_\beta L_\gamma \quad (8.4)$$

où $\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ est le tenseur complètement antisymétrique

$$\epsilon^{1234} = -\epsilon^{2134} = \dots = 1.$$

Exprimons ce courant à l'aide du quadrivecteur chiral :

$$\bar{\varphi} \equiv (\sigma, \vec{\pi}) \quad \bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi} = 1 \quad \bar{\varphi} \cdot (\partial_\mu \bar{\varphi}) = 0 \quad (8.5)$$

On utilise la relation (8.3) pour écrire :

$$\begin{aligned} L_\alpha L_\beta L_\gamma &= U^\dagger (\partial_\alpha U) U^\dagger (\partial_\beta U) U^\dagger (\partial_\gamma U) \\ &= - (\partial_\alpha U^\dagger) (\partial_\beta U) U^\dagger (\partial_\gamma U) \end{aligned} \quad (8.6)$$

On substitue cette expression dans (8.4), on utilise la définition (8.1) de U et, au bout d'un certain temps, on trouve :

$$B^\mu = \frac{1}{12\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \epsilon_{abcd} \bar{\varphi}^a \bar{\varphi}_\alpha^b \bar{\varphi}_\beta^c \varphi_\gamma^d \quad (8.7)$$

où les indices $a, b, \dots$ dénotent les composantes du quadrivecteur chiral $\bar{\varphi}$ ($a = 0, 1, 2, 3$) et où nous utilisons la notation

$$\bar{\varphi}_\alpha^b \equiv (\partial_\alpha \bar{\varphi}^b) \quad (8.7 \text{ bis})$$

A partir de cette expression, il est facile de vérifier que le courant B^μ est conservé :

$$\partial_\mu B^\mu = 0 \quad (8.8)$$

Skyrme propose de décrire les hadrons avec la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} L_\mu L^\mu + \frac{\hbar c}{16g^2} [L_\mu, L_\nu] [L^\mu, L^\nu] \quad (8.9)$$

où σ_0 a la dimension d'énergie et où g est sans dimension. À l'aide des relations E4.1 on vérifie que :

$$L_\mu L^\mu = \bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu$$

$$[L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu] = -4 [(\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu)^2 - (\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}_\nu)(\bar{\varphi}^\mu \cdot \bar{\varphi}^\nu)] \quad (8.10)$$

de sorte que le lagrangien de Skyrme peut aussi s'écrire à l'aide du quadrivecteur chirale :

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} \bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu - \frac{\hbar c}{4g^2} [(\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu)^2 - (\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}_\nu)(\bar{\varphi}^\mu \cdot \bar{\varphi}^\nu)] \quad (8.11)$$

L'invariance de Lorenz et l'invariance chirale (rotation des quadrivecteurs chiraux) est manifeste dans cette écriture. Dans le lagrangien, les 4 composantes du quadrivecteur $\bar{\varphi}$ ne sont pas indépendantes car elles sont contraintes par la relation (8.5).

Le champ chirale du lagrangien de Skyrme est traité classiquement. Cherchons une solution stationnaire. On a :

$$\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu = \frac{1}{c^2} (\partial_t \bar{\varphi}) \cdot (\partial_t \bar{\varphi}) - (\partial_i \bar{\varphi}) \cdot (\partial_i \bar{\varphi}) \quad (8.12)$$

Pour un état stationnaire $(\partial_t \bar{\varphi}) = 0$ et la densité d'énergie est égale à :

$$\epsilon(\Sigma) = \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} \bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_i + \frac{\hbar c}{4g^2} [(\bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_i)^2 - (\bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_j)(\bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_j)] \quad (8.13)$$

Cette énergie doit être stationnaire par rapport aux variations du champ $\bar{\varphi}$ le long du cercle chirale $\bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi} = 1$ (en fait ce "cercle" est une sphère dans l'espace à 4 dimensions du quadrivecteur $\bar{\varphi}$).

Une solution saute aux yeux. C'est celle où les champs σ

et $\vec{\pi}$ sont des constantes indépendantes de la position et du temps.

Une rotation chirale peut alors ramener la solution au point:

$$\sigma = 1 \quad \vec{\pi} = 0 \quad (U = 1) \text{ vide physique} \quad (8.14)$$

Cette solution est identifiée au vide physique qui est dégénéré par rapport aux rotations chirales (voir section 5). L'énergie du vide physique est égale à zéro.

L'intérêt du lagrangien de Skyrme, c'est qu'il admet d'autres solutions qui sont localisées dans l'espace et qui serviront à décrire les hadrons. (On se souviendra que les hadrons sont des particules qui subissent des interactions fortes : $p, n, \pi, \Omega, \dots$. Les hadrons peuvent avoir des nombres baryoniques différents. Les $\pi, K, \dots$ ont un nombre baryonique égal à 0. Les $p, n, \Delta, \Sigma, \dots$ ont un nombre baryonique égal à 1). Nous demanderons aux solutions qui décrivent les hadrons de satisfaire la condition aux limites :

$$U \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 1 \quad (8.15)$$

qui dit qu'à l'extérieur du hadron on retrouve le vide physique.

Skyrme a proposé une solution de la forme :

$$\sigma(\underline{r}) = \cos \theta(r) \quad \vec{\pi}^a(\underline{r}) = \hat{r}_a \sin \theta(r)$$

$$(\theta(r) \text{ invariant par rotation}) \quad (8.16)$$

où $\hat{r} = \underline{r}/r$ est le vecteur position unité. Une solution de cette forme porte le nom de hérisson, traduction fidèle de hedgehog. Elle est justement célèbre car elle a de quoi choquer nous autres qui savons que l'orientation d'un isovecteur $\vec{\pi}$ n'a rien à voir avec l'orientation d'un vecteur tel que $\underline{r}$. Pourtant ces deux vecteurs sont alignés dans la solution (8.16). On vérifie aisément qu'une solution de la forme (8.16) existe qui rend l'énergie (8.13) stationnaire. On peut considérer la solution en hérisson comme une brisure de symétrie engendrée par

l'approximation classique des équations de mouvement. L'approximation classique peut être conçue comme une approximation de champ moyen et nous savons, par l'expérience acquise en physique nucléaire, que ce genre d'approximation peut briser des symétries du lagrangien. La symétrie qui est brisée par la solution en hérisson est l'invariance par rapport aux rotations et l'invariance par rapport aux rotations dans l'espace d'isospin. (Seule une rotation conjointe de l'espace et de l'isospin laisse la solution invariante). Nous verrons dans la section 10 qu'on peut associer un mouvement collectif de rotation à cette brisure de symétrie. Des solutions aux équations de mouvement classiques, qui couplent des variables internes (ici l'isospin) aux variables externes de l'espace, se retrouvent dans les études plus récentes des monopoles /9/.

Un petit calcul permet de vérifier qu'avec la forme (8.16) des champs on a :

$$(\partial_i \sigma) = - \hat{r}_i \sin \theta \frac{d\theta}{dr}$$

$$(\partial_i \pi^a) = (\delta_{ia} - \hat{r}_i \hat{r}_a) \frac{\sin \theta}{r} + \hat{r}_i \hat{r}_a \cos \theta \frac{d\theta}{dr} \quad (8.17)$$

de sorte que

$$\bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_j = (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \hat{r}_i \hat{r}_j \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \quad (8.18)$$

Ces formules permettent d'exprimer l'énergie (8.13) comme une fonctionnelle du seul angle chiral $\theta(r)$:

$$E = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{2\sin^2\theta}{r^2} \right] + \frac{\hbar c}{2g^2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left[\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.19)$$

Effectuons le changement de variable, identique à (2.4) :

$$y = \frac{g\sigma_0}{\hbar c} r \quad (8.20)$$

L'énergie (8.22) devient alors proportionnelle à σ_0/g :

$$E = \frac{\sigma_0}{g} 4\pi \int_0^\infty y^2 dy \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \frac{2\sin^2\theta}{y^2} \right] + \frac{\sin^2\theta}{2y^2} \left[\frac{\sin^2\theta}{y^2} + 2 \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.21)$$

(On notera que les paramètres définis par Adkins, Nappi et Witten /8/ sont reliés aux nôtres par les équations $4\sigma_0^2 = \hbar c F_\pi^2$, $g^2 = \hbar c e^2$ et $r = 2y$.)

Nous imposons à $\theta(r)$ la condition aux limites (8.15)

$$\theta(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad (8.22)$$

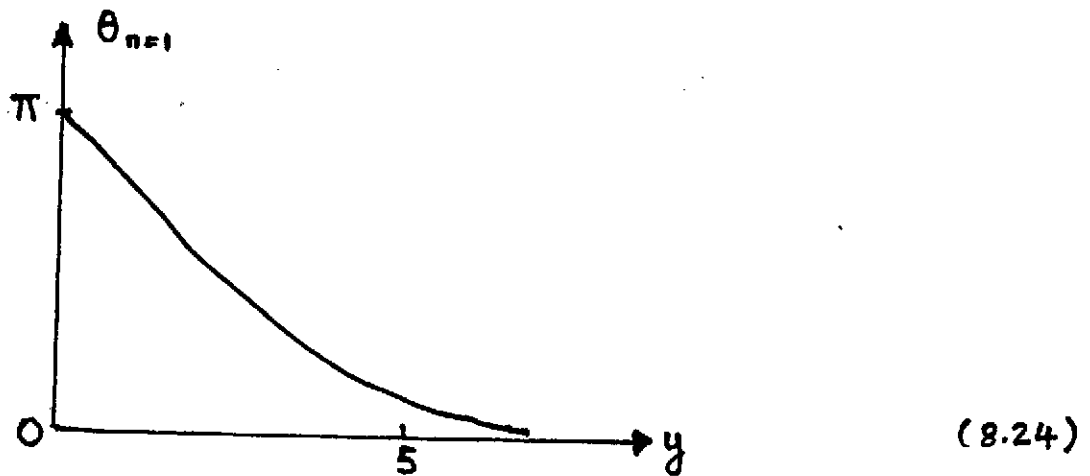
Par ailleurs, l'énergie (8.19) devient infinie à moins qu'à l'origine on ait :

$$\theta(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.23)$$

où n est un nombre entier qui sera identifié plus bas au nombre baryonique.

Pour n donné, la fonction $\theta(y)$ qui minimise l'énergie (8.24) est une fonction universelle (c'est-à-dire indépendante de tout paramètre). Pour $n = 1$ un calcul numérique /8/ lui donne

la forme :



Muni de cette fonction on peut calculer l'énergie de la valeur stationnaire de l'énergie (8.21). On trouve [8] :

$$E_{n=1} \approx \frac{73 \sigma_0}{g} \quad (8.25)$$

Anticipons : cette solution décrit un nucléon dont l'énergie (la masse au repos) est de l'ordre de 1 GeV. Si $\sigma_0 \sim 95 \text{ MeV}$, la constante de couplage doit être de l'ordre de $g \sim 7$. Pour une solution qui satisfait à la condition aux limites (8.15) ou (8.22), la conservation du courant (8.7) assure que la quantité

$$B = \int d\mathbf{r} B^{\mu=0}(\mathbf{r}) \quad (8.26)$$

est une constante du mouvement. Avec la solution en hérisson (8.16) on trouve que la composante $\mu=0$ du courant (8.7)

est égal à

$$B^{\mu=0}(r) = -\frac{1}{2\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dr} \right) \quad (8.27)$$

En tenant compte des conditions aux limites (8.22) et (8.23) on trouve alors que la quantité conservée B est égale à

$$\begin{aligned} B &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr B^{\mu=0}(r) = \frac{1}{\pi} \left| \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right|_0^\infty \\ &= n \end{aligned} \quad (8.28)$$

Skyrme a proposé d'identifier le courant baryonique au courant B^μ .

Dans ce cas $B^{\mu=0}(\underline{r})$ devient la densité baryonique (nombre de baryons moins antibaryons par unité de volume) et le nombre baryonique B est quantifié par les conditions aux limites. Cette quantification du nombre baryonique trouve également son expression dans les propriétés topologiques de la projection d'une matrice unitaire U dans l'espace-temps /10/. Chacun pourra accorder à ces propriétés topologiques l'importance qui lui conviendra (voir la discussion plus loin). Une solution localisée dans l'espace, telle que (8.24), est souvent appelé soliton topologique et, comme on en rencontre dans d'autres domaines, celui-ci porte le nom commode de Skyrmon. Des solutions peuvent-être trouvées pour des valeurs différentes de n . Le vide est un état stationnaire ayant $n = 0$, donc un nombre baryonique nul. On peut aussi calculer les vibrations autour du vide et obtenir ainsi des états excités du

vide, ayant également $n = 0$. Ces états sont des mésons (de nombre baryonique nul) dont le méson π qui a une masse nulle. Comme nous l'avions annoncé, le nucléon serait une solution avec $n = 1$ ayant donc nombre baryonique égal à 1. L'énergie (8.21) étant une fonction paire de θ , l'état $n = -1$ peut représenter un antinucléon de même masse que le nucléon. Le système composé représenté par le produit $U_{n=1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) U_{n=-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)$ peut représenter un système baryon-antibaryon etc.

L'énergie (8.21) devenant infinie si l'angle θ n'est pas, à l'origine, un multiple de π , on ne peut pas déformer, par exemple, la courbe (8.24) ayant $n = 1$ pour la transformer en une courbe passant par l'origine (ayant donc $n = 0$) sans que l'énergie devienne infinie en cours de route. Les solutions ayant des valeurs différentes de n sont donc séparées par des barrières infinies en énergie et on dit qu'elles appartiennent à des secteurs topologiques différents. Cependant, il semble que ces propriétés topologiques soient dues au refus obstiné de mettre en jeu les degrés de liberté des quarks. Nous verrons dans la section 11 que, dès qu'on décrit le système à l'aide de quarks en interaction avec le champ chiral, comme dans le lagrangien (2.1) par exemple, on n'a plus à franchir de barrière d'énergie infinie pour passer continuellement d'une solution ayant $n = 1$ à une solution $n = 0$. Dans ce cas, les propriétés topologiques du champ chiral perdent de l'importance. La pertinence de la topologie de U semble ainsi liée au choix qui est fait pour la description du système (avec ou sans quarks). C'est Skyrme qui nous a donné la possibilité de ce choix.

Cela dit, la théorie que nous avons développée dans cette section et qui résume l'apport de Skyrme dans les années 1960, est incomplète. C'est à Adkins, Nappi et Witten /8/ que nous

devons, non seulement de prendre la théorie de Skyrme au sérieux, mais aussi de la développer au point où on peut distinguer le neutron du proton, le proton du Δ , etc afin de voir, par comparaison avec les données expérimentales, s'il s'agit d'une théorie crédible ou pas. C'est ce développement que nous abordons dans la section

EXERCICES

E8.1 : Montrer que les opérateurs (8.2) définissent un isovecteur $\vec{\omega}_\mu$:

$$L_\mu = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}_\mu$$

$$\vec{\omega}_\mu = \gamma_5 [\sigma \vec{\pi}_\mu - \sigma_\mu \vec{\pi}] + (\vec{\pi} \times \vec{\pi}_\mu)$$

Vérifier les propriétés remarquables suivantes :

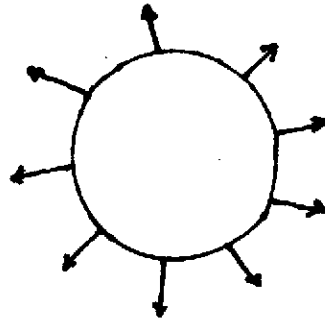
$$\vec{\omega}_\mu \cdot \vec{\omega}_\nu = \vec{\varphi}_\mu \cdot \vec{\varphi}_\nu$$

$$i \gamma_5 \vec{\omega}_\alpha \cdot (\vec{\omega}_\beta \times \vec{\omega}_\gamma) = \epsilon_{abcd} \bar{\varphi}^a \bar{\varphi}_\alpha^b \bar{\varphi}_\beta^c \bar{\varphi}_\gamma^d$$

qui relie les produits vectoriels des isovecteurs $\vec{\omega}_\mu$ aux produits vectoriels des quadrivecteurs chiraux $\vec{\varphi}_\mu$.

E8.2 : Ecrire l'équation qui exprime que l'énergie (8.13) est stationnaire et vérifier qu'une solution en forme d'hérisson (8.16) existe.

E8.3 : Un hérisson, qui a peur, se met en forme de boule ainsi :



où les flèches représentent ses piques. Quel rapport avec la solution (8.16) ?

E8.4 : Ecrire l'équation pour $\theta(y)$ qui minimise l'énergie (8.21). Montrer qu'à l'origine $\theta(y) = n\pi + \alpha y$ et qu'à l'infini $\theta(y) \sim \beta/y^2$. Le champ du pion se comporte à l'origine et à l'infini comme un champ classique dipolaire. Pourquoi ne décroît-il pas exponentiellement comme $\exp(-m_\pi c r/k)$? Discuter.

E8.5 : Montrer que

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} \bar{\psi}^a \bar{\psi}_i^b \bar{\psi}_j^c \bar{\psi}_k^d \\ = - \epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} \left[\sigma \pi_i^a \pi_j^b \pi_k^c - 3 \sigma_i \pi^a \pi_j^b \pi_k^c \right]$$

en déduire (8.7).

E8.6 : La symétrie par rapport aux rotations n'est pas la seule qui soit brisée par le soliton de Skyrme. Cherchez-en deux autres.

E8.7 : Etudier si le soliton de T.D. Lee a, ou non, une taille voisine de celle du Skyrmion (comparer E7.5 et 8.24).

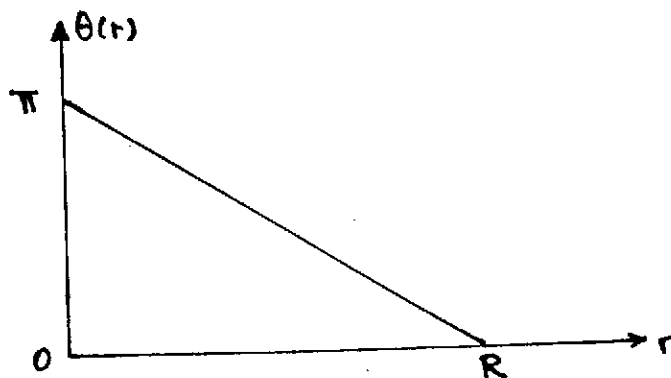
E8.8 : On cherche une solution de la forme

$$\sigma(\underline{r}) = \sigma(r) \quad \pi^a(\underline{r}) = \pi^a(r)$$

c'est-à-dire une solution où le champ du pion est invariant par rotation. Montrer que dans ce cas la densité d'énergie (8.13) devient égale à $\epsilon = (\sigma_0^2/2\kappa c)(\sigma'^2 + \vec{\pi}' \cdot \vec{\pi}')$ où $\sigma' = d\sigma/dr$ et $\vec{\pi}' = d\vec{\pi}/dr$. Vérifier que la solution (8.14) du vide physique est la seule (à une rotation chirale près) qui minimise l'énergie dans ce cas.

E8.9 : Démontrer que la densité d'énergie (8.13) est positive partout.

E8.1 : On suppose que l'angle chirale $\theta(r)$ de l'hérisson varie linéairement de π à 0 à une distance R :



Vérifier les intégrales

$$\int_0^R 4\pi r^2 dr \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + 2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right] = 4\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right) R$$

$$\int_0^R 4\pi r^2 dr \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{r^2} + 2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] = \frac{150,56}{R}$$

En déduire la formule de masse suivante pour le Skyrmion (avec $n=B=1$)

$$E = 26,95 \frac{\sigma_0^2}{\hbar c} R + 75.28 \frac{\hbar c}{g^2} \frac{1}{R}$$

Montrer que le rayon d'équilibre R_0 et l'énergie d'équilibre E_0 sont :

$$R_0 = \frac{\hbar c}{g \sigma_0} 1.67$$

$$E_0 = 30.1 \frac{\sigma_0}{g}$$

et comparer à (8.25).

9. MOUVEMENT COLLECTIF DE TRANSLATION D'UN SYSTEME SIMPLE

Pour illustrer la méthode que nous appliquerons aux rotations du Skyrmion (section 10), considérons un système simple qui se compose d'un champ scalaire $\sigma(x, t)$ plongé dans un espace à 1 dimension d'espace et à 1 dimension de temps. (Avez-vous déjà imaginé un monde ayant deux dimensions de temps ?). Le lagrangien de ce système a la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - f(\sigma) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - f(\sigma) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Les équations de mouvement qui rendent l'action stationnaire sont

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (9.2)$$

L'énergie classique du système est égale à :

$$\begin{aligned}
 E &= \int dx \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} - L \right] \\
 &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + f(\sigma) \right] \quad (9.3)
 \end{aligned}$$

Une solution stationnaire $\sigma_0(x)$ s'obtient en posant $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ dans l'équation de mouvement (9.2) :

$$- \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0 \quad (9.4)$$

Multiplions cette équation par $d\sigma_0/dx$. On obtient

$$\frac{d}{dx} \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2 + f \right] = 0 \quad (9.5)$$

Avec une condition aux limites telle que, par exemple

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad f(\sigma(x)) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad (9.6)$$

l'équation (9.5) s'intègre pour donner

$$\int dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2 = \int dx f(\sigma_0) \quad (9.7)$$

Ce résultat est une expression du théorème du viriel.

L'énergie de l'état stationnaire est égale à

$$M = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2 + f \right] = \int dx \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2 \quad (9.7 \text{ bis})$$

On a doté cette énergie du symbole M parce-qu'elle est identifiée à la masse au repos d'une particule.

L'invariance de Lorenz prévoit que si $\sigma_0(x)$ est un champ stationnaire, solution de (9.4), alors

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \quad (9.8)$$

est une solution des équations de mouvement (9.2) pour laquelle l'énergie (9.3) est égale à

$$E = \frac{M}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (9.9)$$

Cela se vérifie directement en remplaçant la forme (9.8) dans les équations (9.2) et (9.3). Nous obtenons ainsi, à partir d'une solution stationnaire, une solution qui évolue dans le temps et qui décrit un mouvement de translation de vitesse u .

L'invariance de Lorenz ne viendra pas à notre secours pour l'étude ultérieure des rotations. Alors imaginons que nous ignorions les transformations de Lorenz. Comment retrouverions nous la solution (9.8) à partir du lagrangien (9.1) dont Dieu nous

aurait dicté la forme invariante ?

Nul besoin d'être Einstein pour remarquer l'invariance du lagrangien par rapport aux translations globales $\sigma(x,t) \rightarrow \sigma(x-R,t)$ où R est indépendant de x et t , et pour en suite essayer de décrire le mouvement collectif de translation en permettant à la "variable collective" $R \rightarrow R(t)$ de dépendre du temps, ainsi qu'au champ σ (ce qui est essentiel). On considère donc la transformation

$$\sigma \rightarrow \chi(x,t) = \sigma(x - R(t), t) \quad (9.10)$$

$\chi(x,t)$ peut être considéré comme le champ $\sigma(x,t)$ dans un repère translaté d'une distance $R(t)$ et en mouvement. On voit que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \dot{R} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (9.12)$$

Le lagrangien dans le repère mouvant s'obtient en écrivant le lagrangien (9.1) à l'aide du champ χ . On utilise (9.12) pour écrire :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \dot{R} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 - \rho \quad (9.13)$$

Cherchons une solution stationnaire dans le repère mouvant. Celle-ci s'obtient en posant $\partial \chi / \partial t = 0$ dans l'équation de mouvement qui rend l'action (9.13) stationnaire. Le champ stationnaire $\chi(x)$ dans le repère mouvant obéit donc à l'équation

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} (1 - \dot{R}^2) + \frac{\partial f}{\partial \chi} = 0 \quad (9.14)$$

Si $\sigma_0(x)$ est solution de (9.4) alors

$$\chi(x) = \sigma_0 \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \right) \quad (9.15)$$

est solution de (9.14). D'après (9.12) on a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \dot{R} = \frac{\dot{R}}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \sigma_0' \quad (9.16)$$

de sorte que l'énergie (9.3) de la solution (9.15) est, compte tenu de (9.7), égale à

$$E = \frac{M}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}}$$

résultat que d'aucuns reconnaissent exact. Le résultat prévu par l'invariance de Lorenz s'obtient donc en cherchant un champ stationnaire dans un repère animé d'une vitesse $\dot{R}$.

EXERCICES

E9.1 : On considère le lagrangien $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - f(\sigma)$ dans un espace ayant D dimensions d'espace et 1 dimension de temps. Soit $\sigma_0(r)$ une solution stationnaire. On pose $\sigma(t) = \sigma_0(\lambda r)$. Montrer que

$$(D-2) \int d^3r \frac{1}{2} (\partial_i \sigma)^2 = -D \int d^3r f$$

En déduire qu'une solution stationnaire, localisée dans l'espace (donc un soliton), ne peut pas exister dans un espace de dimension $D \geq 3$. Ce résultat est connu sous le nom du théorème de Derrick. Comment est-ce que le soliton de T.D. Lee (Section 7) et le skyrmion (section 8) évitent le théorème de Derrick ? Retrouver l'équation (9.7) à l'aide de ce théorème.

E9.2 : Montrer que, si $\sigma(x, t)$ obéit à l'équation de mouvement (9.5), la fonction

$$\mathcal{U}(x, t) = \sigma \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}} \right)$$

y obéit aussi. Expliquer pourquoi.

E9.3 : On considère l'énergie (9.3) comme une fonctionnelle de σ qu'on veut minimiser pour une vitesse de translation $\dot{R}$ donnée. Montrer que

$$E(\sigma) = (1 + \dot{R}^2) \int dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \int dx f(\sigma)$$

est stationnaire pour $\sigma(x) = \sigma_0 \left(\frac{x}{\sqrt{1+\dot{R}^2}} \right)$ et que la valeur de l'énergie stationnaire est égale à $M/\sqrt{1+\dot{R}^2}$. Quelle erreur a-t-on commise pour obtenir ce faux résultat ?

E9.4 : Vérifier que si une solution stationnaire des équations de mouvement (9.2) est invariante par translation la masse M est nulle et le système ne présente pas de mouvement collectif de translation.

10. MOUVEMENT CLASSIQUE DE ROTATION DU SKYRMION

Dans la section 8 nous avons étudié une solution stationnaire localisée des équations de mouvement du skyrmion. La solution en hérisson, définie en (8.16), n'est ni invariante par rotation (le champ classique du pion est un champ dipolaire), ni invariante par rotation d'isospin (le champ classique du pion est un isovecteur). Dans cette section nous étudions le mouvement collectif de rotation associé à cette brisure spontanée de symétrie, qui a lieu dans un volume fini de l'espace. Nous suivons la méthode esquissée dans la section 9. On notera que l'hérisson (8.16) est invariant par rapport aux rotations simultanées de l'espace et de l'isospin car une telle rotation laisse le produit scalaire et donc U invariant. Une rotation de l'isospin de l'hérisson est donc équivalente à une rotation inverse de l'hérisson dans l'espace. Il s'en suit que l'hérisson aura toujours un isospin égal à son moment cinétique. (Ce sujet épineux est approfondi dans les références 15 et 16).

Le mouvement de rotation d'isospin est plus facile à étudier avec la forme (8.11) du lagrangien de Skyrme qu'avec la forme (8.9) parce-que les rotations d'isospin préservent la norme des quadrivecteurs chiraux (8.5). Le lagrangien de Skyrme est :

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0^2}{2kc} \bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu - \frac{kc}{4g^2} [(\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu)^2 - (\varphi_\mu \cdot \varphi_\nu)(\bar{\varphi}^\mu \cdot \bar{\varphi}^\nu)] \quad (10.1)$$

avec les notations (8.5) et (8.7 bis).

Nous pouvons expliciter le lagrangien ainsi :

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} \bar{\varphi}_0^2 + \frac{\hbar c}{2g^2} \left[\bar{\varphi}_0^2 \bar{\varphi}_i^2 - (\bar{\varphi}_0 \cdot \bar{\varphi}_i)^2 \right] - \mathcal{E}(\bar{\varphi}) \quad (10.2)$$

ou, encore plus explicitement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c^3} \left\{ (\partial_t \sigma)^2 + (\partial_t \vec{\pi})^2 \right\} \\ & + \frac{\hbar}{2g^2 c} \left\{ [(\partial_t \sigma)^2 + (\partial_t \vec{\pi})^2] [(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \vec{\pi})^2] \right. \\ & \quad \left. - [(\partial_t \sigma)(\partial_i \sigma) + (\partial_t \vec{\pi}) \cdot (\partial_i \vec{\pi})]^2 \right\} \\ & - \mathcal{E}(\bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Dans les expressions (10.2) et (10.3) la fonction $\mathcal{E}(\bar{\varphi})$, qui représente la densité d'énergie d'une solution stationnaire des équations de mouvement, est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\bar{\varphi}) = & \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c} [(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \vec{\pi})^2] \\ & + \frac{\hbar c}{4g^2} \left\{ [(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \vec{\pi})^2]^2 - [(\partial_i \sigma)(\partial_j \sigma) + (\partial_i \vec{\pi}) \cdot (\partial_j \vec{\pi})]^2 \right\} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Les équations de mouvement, qui rendent l'action stationnaire, s'écrivent

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0^2}{\hbar c^3} \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{g^2 c} \left\{ (\partial_i \bar{\varphi})^2 \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} [\varphi^a (\partial_t \bar{\varphi} \cdot \partial_i \bar{\varphi})] \right\} \\ & = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi^a} \end{aligned} \quad (10.5)$$

où φ^a ($a=1,2,3$) sont les composantes du quadrivecteur chiral $\bar{\varphi} = (\sigma, \vec{\pi})$. Normalement nous aurions dû introduire, dans les équations de mouvement (10.5), un paramètre de lagrange pour contraindre la norme $\bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi}$ du quadrivecteur chiral à rester égale à 1. Cependant, dans cette section, où la dépendance dans le temps des champs sera due à une rotation d'isospin qui conserve cette norme, l'introduction d'une contrainte sur la norme s'avère inutile.

La solution stationnaire en hérisson (8.16) est une solution de l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi^a(\underline{r})} = 0 \quad (10.6)$$

obtenue en annulant les dérivées des champs par rapport au temps dans l'équation de mouvement (10.5).

Puisque le lagrangien de Skyrme est quadratique dans les dérivées des champs par rapport au temps, l'énergie classique est égale à :

$$\begin{aligned} E &= \int d\underline{r} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^a} \dot{\varphi}^a - \mathcal{L} \right\} \\ &= \int d\underline{r} \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2k c^3} (\partial_t \bar{\varphi})^2 + \frac{\hbar}{2g^2 c} \left[(\partial_t \bar{\varphi})^2 (\partial_i \bar{\varphi})^2 - (\partial_t \bar{\varphi} \cdot \partial_i \bar{\varphi})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}(\bar{\varphi}) \right\} \quad (10.7) \end{aligned}$$

Le lagrangien de Skyrme (10.1) est invariant par rapport aux rotations d'isospin globales définies par :

$$U(\underline{r}, t) = A U(\underline{r}, t) A^{-1} \quad (10.8)$$

où A est l'opérateur unitaire défini en (4.6) supposé indépendant de $\underline{r}$ et t , et où U est la matrice unitaire

$$U(\underline{r}, t) = \sigma(\underline{r}, t) + i \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(\underline{r}, t) \quad U U^\dagger = 1 \quad (10.9)$$

Le lagrangien de Skyrme n'est cependant pas invariant par rapport aux rotations locales d'isospin, définies par la transformation :

$$U(\underline{r}, t) \rightarrow W(\underline{r}, t) = A(\underline{r}, t) U(\underline{r}, t) A^{-1}(\underline{r}, t) \quad (10.10)$$

où A est la matrice unitaire (4.6) avec $\vec{\alpha}$ dépendant de $\underline{r}$ et de t .

La matrice $W(\underline{r}, t)$ que nous écrirons :

$$W(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}, t) + i \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\chi}(\underline{r}, t) \quad (10.11)$$

représente le champ chirale dans le référentiel iso-tournant. Le champ scalaire $\sigma(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}, t)$ ne subit évidemment pas cette rotation.

Exprimons le lagrangien (10.1) à l'aide du champ chirale tournant (10.11). Le lagrangien ne dépend que des dérivées des champs. On a $U = A^{-1} W A$. Calculons donc :

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) &= \partial_\mu (A^{-1} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} A) \\ &= A^{-1} \{ \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\chi} + [(A \partial_\mu A^{-1}), \vec{\tau} \cdot \vec{\chi}] \} A \end{aligned} \quad (10.12)$$

Nous définissons un isovecteur $\vec{\Omega}_\mu$, qui représente la vitesse de iso-rotation, par l'expression

$$A (\partial_\mu A^{-1}) = - (\partial_\mu A) A^{-1} = -i \frac{\vec{\Omega}_\mu \cdot \vec{\tau}}{2} \quad (10.12)$$

On a donc

$$\vec{\tau} \cdot (\partial_\mu \vec{\pi}) = A^{-1} \vec{\tau} A \{ \partial_\mu \vec{\chi} + \vec{\Omega}_\mu \times \vec{\chi} \} \quad (10.13)$$

Cette équation exprime la loi de transformation des dérivées du champ du pion dans une rotation locale d'isospin. On peut comparer cette loi, à celle qui exprime la transformation du champ du pion :

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = A^{-1} \vec{\tau} A \cdot \vec{\chi} \quad (10.14)$$

Le facteur $A^{-1} \vec{\tau} A$ est une transformation unitaire de l'isovecteur $\vec{\tau}$ (son iso-rotation) et il conserve les produits scalaires des isovecteurs ainsi que des quadrivecteurs chirals (8. 5). La loi de transformation des produits scalaires de deux isovecteurs chirals s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_\mu \cdot \vec{\varphi}_\nu &= (\partial_\mu \sigma) (\partial_\nu \sigma) + (\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial_\nu \vec{\pi}) \\ &= (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) + (\partial_\mu \vec{\chi} + \vec{\Omega}_\mu \times \vec{\chi}) \cdot (\partial_\nu \vec{\chi} + \vec{\Omega}_\nu \times \vec{\chi}) \end{aligned} \quad (10.15)$$

Le lagrangien de Skyrme dans le référentiel iso-tournant s'écrit donc ainsi :

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0^2}{2\kappa c} \vec{\varphi}_\mu \cdot \vec{\varphi}^\mu - \frac{\hbar c}{4g^2} [(\vec{\varphi}_\mu \cdot \vec{\varphi}^\mu) - (\vec{\varphi}_\mu \cdot \vec{\varphi}_\nu) (\vec{\varphi}^\mu \cdot \vec{\varphi}^\nu)] \quad (10.16)$$

où nous avons défini :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi} + \vec{\Omega}_\mu \times \bar{\psi}) \\ &= (\partial_\mu \psi, \partial_\mu \vec{x} + \vec{\Omega}_\mu \times \vec{x})\end{aligned}\quad (10.17)$$

Nous allons étudier le cas où l'opérateur A dépend du temps t mais pas de la position $\underline{r}$. Dans ce cas vecteur vitesse $\vec{\Omega}_\mu = (\vec{\Omega}, 0, 0, 0)$ défini en (10.12) n'a qu'une composante qu'on appellera $\vec{\Omega}$:

$$A(\partial_t A^{-1}) = -(\partial_t A) A^{-1} = -i \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{r}}{2} \quad (10.18)$$

On peut se demander s'il est prudent de ne pas permettre à A de dépendre de la position ; en effet, à première vue, si $\vec{\Omega}$ est assez grand, des points assez éloignés de l'axe de rotation pourraient être dotés de vitesses supérieures à la vitesse de la lumière...

Dans le cas (10.8) on a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_0 &= \frac{1}{c} (\partial_t \psi, \partial_t \vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x}) \\ \tilde{\psi}_i &= (\partial_i \psi, \partial_i \vec{x})\end{aligned}\quad (10.18 \text{ bis})$$

La forme (10.3) du lagrangien (10.16) dans le référentiel iso-tournant s'obtient en remplaçant, dans (10.3), les champs $\vec{\sigma}$ et $\vec{\pi}$ respectivement par $\psi (= \sigma)$ et $\vec{x}$ et en remplaçant les dérivées $\partial_t \vec{\pi}$ par $(\partial_t \vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x})$. L'expression du lagrangien dans le référentiel iso-tournant est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{\sigma_0^2}{2\kappa c^3} \left\{ (\partial_t \varphi)^2 + (\partial_t \vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x})^2 \right\} \\
& + \frac{\hbar}{2g^2 c} \left\{ [(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_t \vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x})^2] [(\partial_i \varphi)^2 + (\partial_i \vec{x})^2] \right. \\
& \quad \left. - [(\partial_t \varphi)(\partial_i \varphi) + (\partial_t \vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x}) \cdot (\partial_i \vec{x})]^2 \right\} \\
& - E(\partial_i \varphi, \partial_i \vec{x})
\end{aligned} \tag{10.19}$$

où E est la fonctionnelle définie en (10.4). Formule à rapprocher de l'expression (9.13). Nous cherchons une solution stationnaire

$$\partial_t \varphi = \partial_t \vec{x} = 0 \tag{10.20}$$

des équations de mouvement qui rendent l'action $\int dt d\underline{r} \mathcal{L}$ stationnaire. Un peu de réflexion permet de conclure qu'une solution stationnaire (c'est-à-dire indépendante du temps dans le référentiel iso-tournant) s'obtient en rendant stationnaire la fonction

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi, \vec{x}) = & E(\varphi, \vec{x}) - \frac{\sigma_0^2}{2\kappa c^3} (\vec{\Omega} \times \vec{x})^2 \\
& - \frac{\hbar}{2g^2 c} \left\{ (\vec{\Omega} \times \vec{x})^2 (\partial_i \varphi)^2 + (\vec{\Omega} \times \vec{x})^2 (\partial_i \vec{x})^2 - [(\vec{\Omega} \times \vec{x}) \cdot (\partial_i \vec{x})]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{10.21}$$

de sorte que la solution stationnaire $\varphi(\underline{r})$ et $\vec{x}(\underline{r})$ obéit aux équations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi(\underline{r})} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x^a(\underline{r})} = 0 \tag{10.22}$$

On remarquera que la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ n'apparaît qu'au deuxième ordre dans l'expression (10.21) et donc aussi dans les équations (10.22). Donc, au premier ordre dans la vitesse angulaire, le champ stationnaire $(\varphi, \vec{\chi})$ obéit aux mêmes équations (10.6) que les champs non tournants $(\sigma, \vec{\pi})$. A cet ordre les champs $(\varphi, \vec{\chi})$ dans le référentiel mouvant ont la même forme que les champs $(\sigma, \vec{\pi})$ du Skyrmin au repos.

Même si les champs $(\varphi, \vec{\chi})$ ne changent pas, on peut, l'énergie (10.7) du Skyrmin, qui, vu du labo, est en train de tourner, varie avec la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. En effet les équations (10.15) et (10.20) nous précisent que

$$\begin{aligned} (\partial_t \bar{\varphi})^2 &= (\vec{\Omega} \times \vec{\chi})^2 \\ (\partial_t \bar{\varphi}) \cdot (\partial_i \bar{\varphi}) &= (\vec{\Omega} \times \vec{\chi}) \cdot (\partial_i \vec{\chi}) \end{aligned} \quad (10.23)$$

de sorte que l'énergie (10.7) du Skyrmin iso-tournant est égale à :

$$\begin{aligned} E = \int d\tau \left\{ E(\varphi, \vec{\chi}) + \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c^3} (\vec{\Omega} \times \vec{\chi})^2 \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{2g^2 c} [(\vec{\Omega} \times \vec{\chi})^2 [(\partial_i \varphi)^2 + (\partial_i \vec{\chi})^2] \right. \\ \left. - [(\vec{\Omega} \times \vec{\chi}) \cdot (\partial_i \vec{\chi})]^2] \right\} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Désignons par $M c^2$ l'énergie du Skyrmin au repos, état dans

lequel $\vec{\Omega} = 0$ et $\varphi = \sigma$, $\vec{\chi} = \vec{\pi}$ sont solutions de (10.6). A l'approximation où on néglige l'effet de l'iso-rotation sur les champs φ et $\vec{\chi}$, c'est-à-dire, au deuxième ordre en $\vec{\Omega}$, l'énergie est égale à :

$$E = Mc^2 + \int d\underline{r} \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2\hbar c^3} (\vec{\Omega} \times \vec{\pi})^2 + \frac{\hbar}{2g^2 c} [(\vec{\Omega} \times \vec{\pi})^2 [(\partial_i \sigma)^2 + (\partial_i \vec{\pi})^2] - [(\vec{\Omega} \times \vec{\pi}) \cdot (\partial_i \vec{\pi})]^2] \right\} \quad (10.26)$$

où σ et $\vec{\pi}$ sont les solutions de (10.6). A cette approximation, celle où travaillent Adkins, Witten et Nappi /8/, l'énergie est quadratique dans la vitesse $\vec{\Omega}$ et le système se conduit comme un rotateur rigide.

Pour la solution en hérisson (8.10), on peut utiliser les formules (8.17) et (8.18) pour réduire l'énergie (10.26) du hérisson iso-tournant à celle d'un rotateur isotrope (ayant les trois moments d'inertie égaux) :

$$E = Mc^2 + \frac{1}{2} \int \vec{\Omega}^2 \quad (10.27)$$

où l'énergie au repos Mc^2 est donnée par (8.21)

$$Mc^2 = \frac{\sigma_0}{g} \int d\underline{y} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{y^2} \right] + \frac{\sin^2 \theta}{2y^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{y^2} + 2 \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] \right\} \quad (10.28)$$

et où le moment d'inertie $\mathcal{I}$ est égal à :

$$\mathcal{I} = \frac{\hbar^2}{g^3 \sigma_0} \int dy \frac{2}{3} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{\sin^2 \theta}{y^2} + \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] \quad (10.29)$$

où nous avons exprimé l'intégrale en termes de la variable sans dimension $y = \frac{g\sigma_0}{\hbar c} r$. Pour un hérisson ayant $n = 1$, donc nombre baryonique $B = 1$ (voir section 8), $\theta(y)$ est la fonction universelle (8.24) et les intégrales (10.28) et (10.29) peuvent être évaluées numériquement [8]. Il en résulte l'expression suivante pour le moment d'inertie :

$$\mathcal{I} = \frac{\hbar^2 \pi (50.9)}{3 g^3 \sigma_0} \quad (10.30)$$

Nous ne serons pas surpris d'apprendre, qu'une fois quantifié le rotateur (10.27), le spectre du Skyrmion ayant isospin T (égal au moment cinétique) est égal à

$$\begin{aligned} E_{n=1}^T &= M c^2 + \frac{\hbar^2 T(T+1)}{2 \mathcal{I}} \\ &= \frac{73 \sigma_0}{g} + \frac{3 g^3 \sigma_0}{2 \pi (50.9)} T(T+1) \end{aligned} \quad (10.31)$$

Si on détermine les deux constantes du lagrangien de Skyrme (σ_0 et g) en exigeant que la formule (10.31) donne correctement les masses du nucléon (939 MeV) ayant $T = I = 1/2$ et du delta (1232 MeV) ayant $T = I = 3/2$, on obtient les valeurs :

$$g = 5,44 \quad \sigma_0 = 64,5 \text{ MeV} \quad (10.32)$$

On peut admirer ou déplorer l'accord avec la valeur

expérimentale $\sigma_0 \sim 95 \text{ MeV}$ selon qu'on manifeste scepticisme ou enthousiasme vis à vis de la théorie de Skyrme qui, avec jusqu'ici seulement deux paramètres, relie les propriétés des mésons et des baryons. La référence /8/ pousse la comparaison entre théorie et expérience plus loin.

EXERCICES

10.1 : La solution en hérisson (8.16) n'est pas invariante par rapport aux rotations chirales (4.8) engendrées par l'opérateur (4.9). Expliquer pourquoi le skyrmion n'est pas animé d'un mouvement collectif associé à cette brisure de symétrie.

10.2 : On définit un opérateur $\tilde{\partial}_\mu$ par les expressions

$$\tilde{\partial}_\mu \sigma = \partial_\mu \sigma \quad \tilde{\partial}_\mu \vec{\pi} = \partial_\mu \vec{\pi} + \vec{\Omega} \times \vec{\pi}.$$

Vérifier que $(\tilde{\partial}_\mu U^\dagger)U + U^\dagger(\tilde{\partial}_\mu U) = 0$ où U est défini par (10.1). Interpréter.

10.3 : Vérifier que l'équation de mouvement (10.5) s'obtient en rendant stationnaire l'action $\int dt \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est le lagrangien (10.1), mais qu'elle ne s'obtient pas en rendant l'énergie (10.7) stationnaire. Vérifier cependant que l'équation (10.6) qui donne un état stationnaire s'obtient en minimisant son énergie.

10.4 : La rotation d'isospin (10.10) n'affecte pas le

champ scalaire et on a $\sigma(\underline{r}, t) = \varphi(\underline{r}, t)$. Est-ce à dire que le champ scalaire ne dépend pas de la vitesse d'iso-rotation Ω ?

10.5 : Le champ chiral $(\varphi, \vec{\chi})$ est invariant par rapport à la transformation $A \rightarrow -A$ (voir 10.10 et 10.11). Montrer que la transformation $A \rightarrow -A$ équivaut à ajouter 2π à l'angle de l'iso-rotation (voir 4.6).

11. LE POINT DE VUE DES QUARKS

La théorie de Skyrme décrit à la fois les mésons et les baryons à l'aide de champs mésoniques et de ce point de vue elle constitue une théorie unifiée des hadrons c'est à dire des particules subissant des interactions fortes. Une autre théorie unifiée des hadrons est construite à partir des quarks qui échangent des gluons, eux-mêmes en interaction entre eux. C'est la chromodynamique quantique (QCD après permutation anglaise des sigles). On espère que le lagrangien de Skyrme, (ou des lagrangiens du même genre faisant intervenir davantage de champs mésoniques) donne des résultats semblables à ceux que donnerait la QCD, si seulement on savait les calculer, et cela dans certaines conditions/11/. Le lagrangien de Skyrme n'est probablement pas le seul lagrangien effectif ayant cette propriété et on peut également songer à un lagrangien effectif, tel que celui du modèle σ (auquel on ajoute éventuellement d'autres champs mésoniques), où les quarks sont pris en compte explicitement et où ils portent la charge baryonique. Cette approche a l'avantage de ne pas se heurter à certaines anomalies (telles que les anomalies triangulaires) qui se traduisent, dans l'approche de Skyrme, par des termes supplémentaires, tels que le terme de Wess-Zumino, qu'on doit introduire dès qu'on veut généraliser le Skyrmin de la section 8 au groupe SU3 de saveurs /17/.

Elle a le désavantage d'être plus compliquée puisqu'elle couple la dynamique des champs mésoniques (chirals entre autres) à celle des quarks.

Dans cette section nous abordons l'étude de cette approche en étudiant la réponse d'une mer de Dirac à un champ chiral extérieur. Cela nous permettra de mieux comprendre la nature du courant baryonique (8.7) proposé par Skyrme.

Les orbites des quarks couplés à un champ chirale U sont données par l'équation de Dirac

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta U \right) |\lambda\rangle = e_\lambda |\lambda\rangle \quad \langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (11.1)$$

où U est donné par l'expression (8.1). Pour le champ chirale (8.16), en hérisson, les orbites $|\lambda\rangle$ sont les états propres du hamiltonien

$$h = \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta (\sigma + i \gamma_5 \hat{r} \cdot \vec{\tau} \pi)$$

$$h |\lambda\rangle = e_\lambda |\lambda\rangle \quad \langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (11.2)$$

Ce problème aux valeurs propres a été étudié en détail par Gaudin /18/. L'hamiltonien h est invariant par rapport à la parité et par rapport aux rotations conjointes d'espace et d'isospin, engendrées par l'opérateur grand spin :

$$\vec{G} = \vec{j} + \vec{t} \quad (11.3)$$

où $\vec{j} = \frac{\vec{r} \times \nabla}{i} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$ et $\vec{t} = \vec{\tau}/2$. On peut donc étiqueter les orbites par leur parité p leur grand spin et projection (G, M) . Une orbite $|n G M p\rangle$, où n distingue les différentes orbites de même parité p et grand spin (GM) , peut être représentée à l'aide de quatre fonctions radiales réelles ainsi :

$$\langle r | n G M p \rangle = \begin{pmatrix} i \frac{F_1^n(r)}{r} | \ell j G M \rangle \\ \frac{F_2^n(r)}{r} (\underline{\sigma} \cdot \hat{r}) | \ell j G M \rangle \\ i \frac{F_3^n(r)}{r} | \ell' j' G M \rangle \\ \frac{F_4^n(r)}{r} (\underline{\sigma} \cdot \hat{r}) | \ell' j' G M \rangle \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

Pour les orbites de parité $(-)^G$ on a :

$$p = (-)^G \quad \ell = \ell' = G \quad j = G + \frac{1}{2} \quad j' = G - \frac{1}{2} \quad (11.5a)$$

Pour les orbites de parité $(-)^{G+1}$ on a :

$$p = (-)^{G+1} \quad \ell = G+1 \quad \ell' = G-1 \quad j = G + \frac{1}{2} \quad j' = G - \frac{1}{2} \quad (11.5b)$$

Dans l'expression (11.4), $| \ell j G M \rangle$ est l'état obtenu en couplant le moment cinétique $\vec{j}$ et l'isospin $1/2$ à un grand spin total G :

$$| \ell j G M \rangle = \sum_{m \tau} \begin{bmatrix} j & 1/2 & G \\ m & \tau & M \end{bmatrix} | \ell j m \rangle \quad | \frac{1}{2} \tau \rangle$$

$$\langle \hat{r} | \ell j m \rangle = \sum_{m_\ell \sigma} \begin{bmatrix} \ell & 1/2 & j \\ m_\ell & \sigma & m \end{bmatrix} Y_m^\ell(\hat{r}) \quad | \frac{1}{2} \sigma \rangle \quad (11.6)$$

Les 4 fonctions radiales $F_i^n(r)$ peuvent être calculées en résolvant le problème aux valeurs propres :

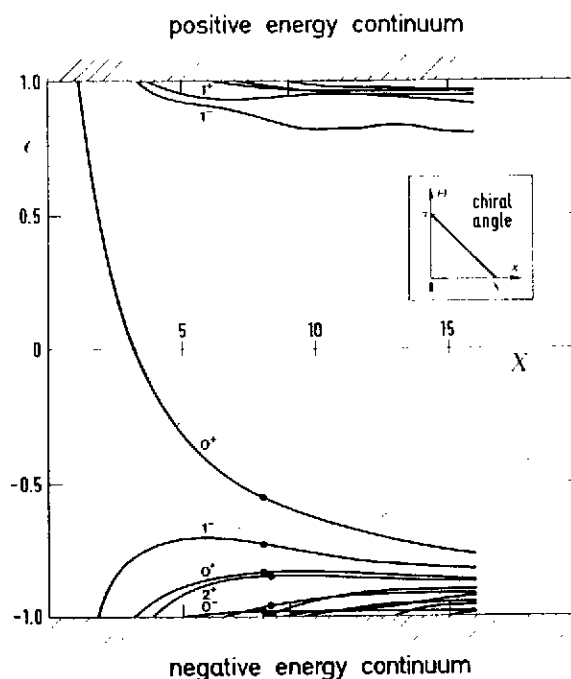
$$\begin{pmatrix}
 \sigma - e & -\partial_r \mp \frac{G+1}{r} & 0 & \pi \frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} \\
 & + \frac{\pi}{2G+1} & & \\
 \hline
 \partial_r \mp \frac{G+1}{r} & -\sigma - e & \pi \frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} & 0 \\
 & + \frac{\pi}{2G+1} & & \\
 \hline
 0 & \pi \frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} & \sigma - e & -\partial_r \pm \frac{G}{r} \\
 & & & - \frac{\pi}{2G+1} \\
 \hline
 \pi \frac{2\sqrt{G(G+1)}}{2G+1} & 0 & \partial_r \pm \frac{G}{r} & -\sigma - e \\
 & & - \frac{\pi}{2G+1} &
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 F_1(r) \\
 F_2(r) \\
 F_3(r) \\
 F_4(r)
 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.7)$$

Là où apparaissent les signes $\mp$ et $\pm$ il faut choisir le signe supérieur ou inférieur pour les orbites de parité $(-)^G$ ou $(-)^{G+1}$ respectivement.

La normalisation $\langle \lambda | \lambda \rangle = 1$ se traduit par l'équation :

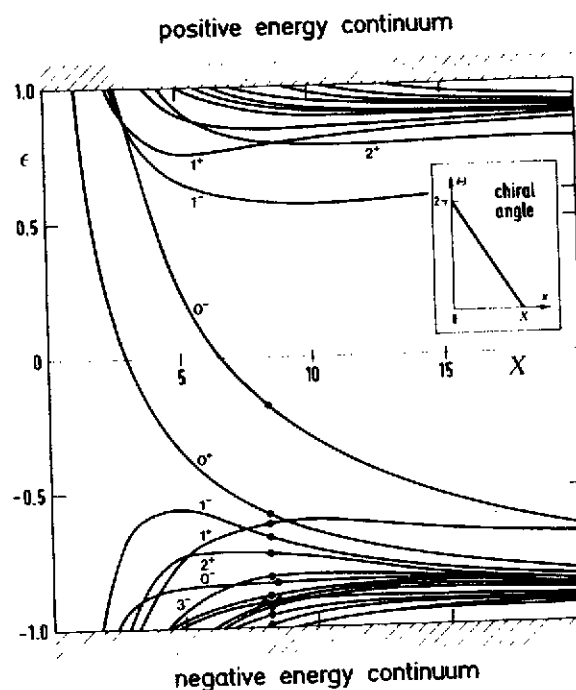
$$\int_0^\infty dr [F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2] = 1 \quad (11.8)$$

La figure (11.9) ci-dessous /19/ montre le spectre des orbites



(11.9)

dans le cas où $\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = 1$ de sorte que le champ chirale est paramétrisé par un seul angle chirale, comme en (8.16). On suppose en outre que l'angle chirale varie linéairement de π à 0 à une distance X . Le paramètre X est une mesure de la taille du soliton (nous justifions plus loin l'usage de ce mot pour décrire le système). Lorsque $X \rightarrow 0$ le champ chirale n'affecte plus que les orbites du continu de très haut moment. Lorsque X grandit une orbite O^+ (ayant $G=0$ et parité positive) quitte le continu pour rejoindre les autres orbites de la mer de Dirac. Soit N_c le nombre de couleurs; chaque quark porte un nombre baryonique $1/N_c$ (car il en faut N_c pour faire un nucléon) et une orbite saturée de couleur porte un nombre baryonique égal à 1. Donc la mer de Dirac, c'est à dire l'état fondamental de l'hamiltonien des quarks (obtenu en remplissant les orbites d'énergie négative), s'enrichit d'un baryon lorsque l'angle chirale varie de π à zéro, en accord avec l'interprétation de Skyrme ($n = 1$ dans l'expression 8.23). La figure (11.10) montre le spectre des orbites pour $n = 2$, c'est à dire dans le cas où l'angle chirale varie de 2π à 0.



(11.10)

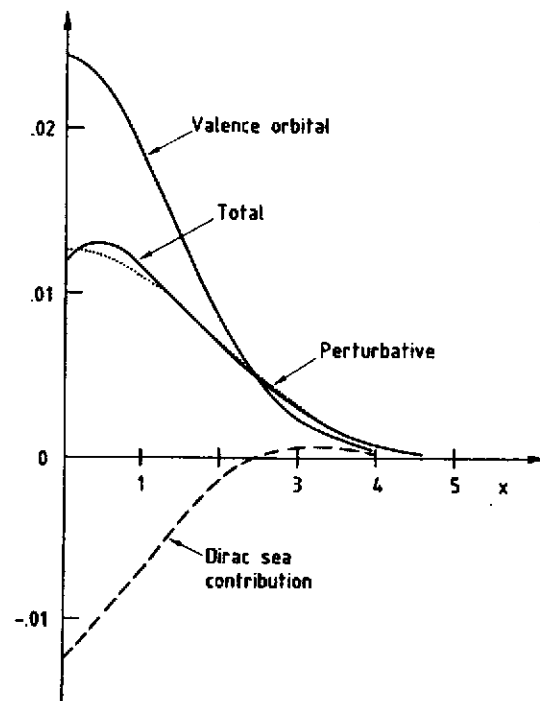
(S. Kahana et G. Ripka, Nucl. Phys. A 429 (1984) 462)

On voit qu'une seconde orbite 0^- rejoint les orbites de la mer de Dirac de sorte que celle-ci acquiert un nombre baryonique $B = 2$ (et change aussi de parité si N_c est impair.

La densité baryonique portée par les quarks s'écrit

$$\rho(r) = \sum_{\lambda < 0} \langle \lambda | r \rangle \langle r | \lambda \rangle \quad (11.11)$$

où la somme s'étend aux orbites occupées. Pour X assez grand cette somme se confond avec les orbites d'énergie négative mais lorsqu'une orbite acquiert une énergie positive rien ne nous empêche de l'inclure dans la somme. La figure (11.12) montre la densité (11.11) dans le cas $n = 1$ pour une taille $X = 5$. La contribution de l'orbite de valence est explicitée (c'est l'orbite qui, dans la figure (11.9), traverse l'énergie zéro). La valeur donnée par l'expression (8.27) de Skyrme est dessinée en hachuré. Elle est dite "perturbative" car la formule (8.27) de



(11.12)

(S.Kahana and G.Ripka, Nucl. Phys. A429 (1984) 462)

Skyrme peut aussi être obtenue par un calcul perturbatif [20]. On voit que la densité portée par les quarks exposés au champ chirale est très voisine de la densité baryonique effective attribuée au champ chirale de Skyrme (à condition toutefois de ne pas la confondre avec la seule densité de l'orbite O^+ de valence). En ce qui concerne la densité baryonique, on peut dire que le champ chirale de la théorie de Skyrme décrit une mer de Dirac de quarks couplés à ce champ chirale. De là à conclure que la théorie de Skyrme décrit la même dynamique qu'un système de quarks couplés au champ chirale est un pas que nous nous garderons de faire car c'est un problème autrement compliqué. La raison de cette complication vient de ce que la somme (11.11) qui donne la densité, soit convergente tandis qu'une somme des énergies des orbites (telle que 3.8 par exemple) diverge, et son évaluation numérique est difficile [21].

EXERCICES

E11.1 : Montrer qu'une orbite ayant grand spin G porte un nombre baryonique $26+1$ lorsqu'elle est saturée de couleur. Vérifier que toute orbite saturée de couleur a une couleur totale nulle. Montrer que pour X assez grand (voir les figures telles que 11.9) la mer de Dirac s'enrichit d'un spin entier ou demi-entier selon que le nombre N_c de couleurs est pair ou impair.

E.11.2 : Poser $\Pi = 0$ dans le problème aux valeurs propres (11.7) et en déduire la nature des orbites du modèle de sac de MIT. Vérifier l'orbite (6.7). Etudier le spectre des orbites du sac de MIT.

12. LE SOLITON CHIRAL

Nous pouvons étendre au champ chiral la théorie du soliton de Friedberg et Lee décrite dans la section 7. En d'autres mots, nous pouvons étudier l'état lié (s'il y en a) formé par des quarks en interaction avec un champ chiral, en négligeant la contribution, à l'énergie, de la mer de Dirac. Imaginons, pour simplifier, que le champ chiral soit astreint au cercle chiral et que celui-ci ait la forme (8.16) en hérisson. Si le nombre de couleurs des quarks est N_c , on peut former un nucléon en mettant N_c quarks dans l'orbite O^+ de valence (voir la figure 11.9) de manière à la saturer en couleur. Numériquement, dans la région $2.5 < X < 15$ l'énergie e de cette orbite peut être paramétrisée par l'expression :

$$\frac{e}{g\sigma_0} = \frac{3.12}{X} - 0.94 \quad \left(X = \frac{g\sigma_0}{\hbar c} R \right) \quad (12.1)$$

où nous avons supposé une variation linéaire de l'angle chiral, comme dans la section 11 et ainsi que l'illustre l'encart de la figure (11.9). L'énergie (3.8) du système est alors donnée (en unités dimensionnées) par l'expression

$$E = 2\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) \frac{\sigma_0^2}{\hbar c} R + 3.12 \hbar c \frac{N_c}{R} - 0.94 N_c g\sigma_0 \quad (12.2)$$

qui constitue une formule de masse (approchée) du soliton chiral. Un meilleur calcul [19,22] peut être obtenu en résolvant les équations self-consistantes (3.5) et (3.9) qui minimisent l'énergie (3.8). L'argument avancé en section 7 à propos du soliton de Friedberg et Lee, peut être utilisé ici pour montrer que si l'orbite de valence est liée (c'est à dire si son énergie se trouve dans le "mass gap" qui sépare les continus d'énergie positive ou négative), on peut toujours trouver une constante de

couplage g assez forte pour lier le système, d'où l'usage du mot soliton pour décrire l'état de quarks liés par le champ chirale. Les états de rotation du soliton chirale ont été étudiés par des méthodes de projection du moment cinétique et de l'isospin /22/. L'accord obtenu avec l'expérience est du même ordre de grandeur que dans la théorie de Skyrme et elle est sensiblement améliorée avec l'introduction de champs vectoriels couplés aux quarks /22/.

Un problème encore partiellement ouvert est posé par la contribution à l'énergie des orbites de la mer de Dirac, qu'on appelle l'énergie de Casimir (qui lui n'y est pour rien). A ce jour seuls des calculs perturbatifs ont été effectués /23/. Ceux-ci montrent en particulier que le lagrangien de Skyrme n'est pas équivalent à un système de quarks couplés au champ chirale. Ils mettent également en doute la stabilité du soliton chirale par rapport à l'effondrement aux courtes distances. Malheureusement, pour un soliton de petite taille, le champ chirale varie rapidement avec la position et les calculs perturbatifs deviennent moins précis de sorte que la stabilité du soliton chirale, une fois prise en compte la contribution de la mer de Dirac, n'est pas encore connue.

EXERCICE

E12.1 : Confronter, comparer et discuter les formules de masse obtenues dans les trois modèles remontrés jusqu'ici :

$$E = \frac{4\pi}{3} R^3 B + 2.04 \hbar c \frac{N_c}{R} \quad (\text{sec de MIT})$$

$$E = 27 \frac{\sigma_0^2}{\hbar c} R + 75.3 \frac{\hbar c}{g^2} \frac{1}{R} \quad (\text{Skyrmion, voir E8.11})$$

$$E = 27 \frac{\sigma_0^2}{\hbar c} R + 3.12 \hbar c \frac{N_c}{R} - 0.94 N_c g \sigma_0 \quad (\text{soliton chirale})$$

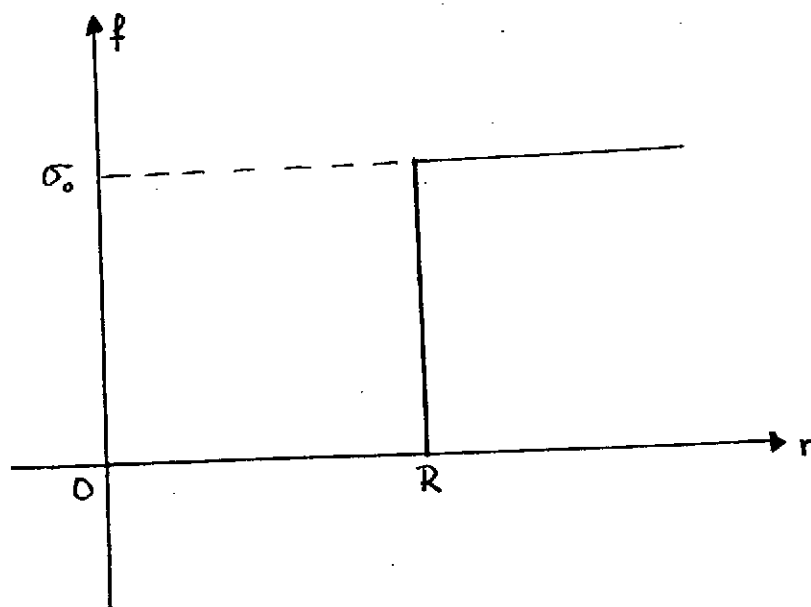
13. LE SAC CHIRAL

Le modèle du sac de MIT (décrit dans la section 6) prétend que les quarks se propagent librement à l'intérieur d'une cavité où leur masse s'annule et où le vide a restauré la symétrie chirale, ce qui lui coûte environ $B \sim 50 \text{ MeV}/f_m^3$ d'énergie. Le modèle de Skyrme (décrit dans la section 8) prétend, au contraire, que la symétrie chirale est brisée partout mais que l'angle chirale peut varier localement, le nucléon n'étant qu'un "pli" du vide pour lequel l'angle chirale a varié de π . Le sac chirale /4,24/ tente une synthèse de ces deux modèles, trouvant le sac de MIT à son goût pour ce qu'il lui rappelle la liberté asymptotique, tout en étant séduit par la théorie de Skyrme qui, elle, respecte l'invariance chirale.

Une manière de présenter le sac chirale est de lui assigner le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[i \hbar c \partial_\mu \gamma^\mu - g (\sigma + i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \right] \Psi \\ & + \frac{f^2}{2 \hbar c} \bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu - \frac{\hbar c f^4}{4 e^2} \left[(\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}^\mu)^2 - (\bar{\varphi}_\mu \cdot \bar{\varphi}_\nu) (\bar{\varphi}^\mu \cdot \bar{\varphi}^\nu) \right] \\ & - \frac{\lambda}{8} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f^2)^2 + U(f) \end{aligned} \quad (13.1)$$

La première ligne représente des quarks couplés à un champ chirale $\varphi = (\sigma, \vec{\pi})/f$. La deuxième ligne n'est autre que le lagrangien de Skyrme (8.11). Dans la dernière ligne, f est un champ externe, fonction de $\underline{r}$ (et éventuellement du temps) auquel, dans ce modèle, on donne la forme :



(13.2)

La figure (13.2) représente f dans le cas d'un sac sphérique. Plus généralement, on dira que $f=0$ à l'intérieur du sac (quel que soit sa forme) et $f=\sigma_0$ à l'extérieur.

La forme (13.1) du lagrangien n'est pas unique, d'autant moins qu'on considèrera la limite

$$\lambda \rightarrow \infty$$

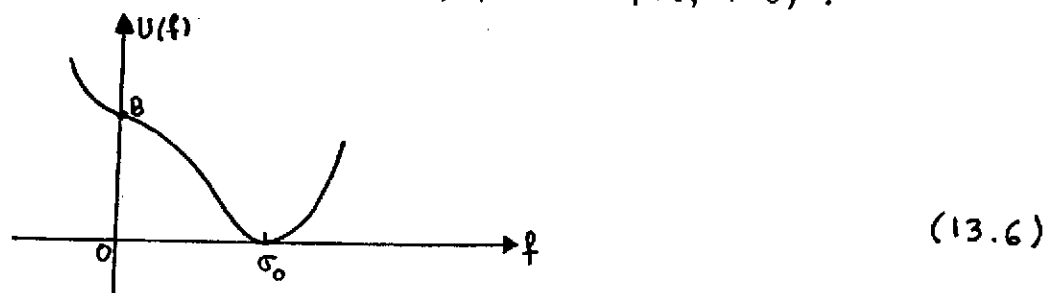
(13.3)

Dans cette limite, le seul effet du terme proportionnel à λ est de forcer le champ chirale à rester sur un cercle chirale de rayon $f(r)$ qui dépend de la position. On peut donc paramétriser le champ chirale ainsi :

$$\sigma(r) + i \gamma_5 \vec{\pi}(r) \cdot \vec{\tau} = f(r) e^{i \gamma_5 \vec{\theta}(r) \cdot \vec{\tau}}$$

(13.5)

Enfin, le terme $U(f)$ représente l'énergie, par unité de volume, du vide physique, en fonction du rayon du cercle chiral, du moins à l'approximation où on néglige la contribution de la mer de Dirac (voir cependant la discussion dans la section 5). Cette fonction aura une forme semblable à celle qui intervient dans le modèle de Friedberg et Lee (voir, par exemple, 7-3) :



Les orbites des quarks sont solution de l'équation de Dirac :

$$\left(\hbar c \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + g f \beta e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \right) |\lambda\rangle = e_\lambda |\lambda\rangle \quad (13.7)$$

A l'intérieur du sac $f(r) = 0$ de sorte que les quarks ont une masse nulle et ils obéissent à l'équation de Dirac :

$$\hbar c \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} |\lambda\rangle = e_\lambda |\lambda\rangle \quad (13.8)$$

Comme dans le modèle du sac de MIT, on suppose que la constante de couplage g est infinie de manière à ce que la masse du quark soit infinie à l'extérieur (où elle vaut $g\sigma_0$) et qu'elle s'annule à l'intérieur (où elle vaut gf avec $f \rightarrow 0$). Dans ce cas, pour qu'une orbite $|\lambda\rangle$ ait une énergie finie, il faut que

$$\langle \lambda | \vec{r} \rangle \beta e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \langle \vec{r} | \lambda \rangle = 0 \quad r \geq R \quad (13.9)$$

Les fonctions d'onde $\langle \vec{r} | \lambda \rangle$ des quarks décroissent exponentiellement et infiniment vite à l'extérieur du sac et elles sont

donc normalisées à l'intérieur du sac :

$$\int_{r < R} d\mathbf{r} \langle \lambda | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \lambda \rangle = 1 \quad (13.10)$$

L'équation (13.9) fournit une condition aux limites des orbites, condition qui quantifie les niveaux d'énergie e_λ des quarks et qui ne dépend que de la valeur de l'angle chirale à la surface.

A l'extérieur du sac, seul subsiste le champ chirale (13.5):

$$\sigma(\mathbf{r}) + i \gamma_5 \vec{\pi}(\mathbf{r}) \cdot \vec{\tau} = \sigma_0 e^{i \vec{\theta}(\mathbf{r}) \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \quad (13.11)$$

de sorte que, dans la région extérieure, la dynamique système est régie par le lagrangien de Skyrme (8.11). Elle est identique à celle qui est étudiée dans la section 8. Puisque le lagrangien (13.1) est invariant par rapport aux rotations chirales (4.8) et (4.9), le courant axial, associé à cette rotation, est conservé.

Il en résulte que la composante d'isospin a , du courant axial $\underline{j}_a^5(\mathbf{r})$, normale à la surface, est continue. Donc, à la surface du sac, le courant axial $\underline{n} \cdot \langle \underline{j}_a^5(\mathbf{r}) \rangle_q$ porté par les quarks doit être égal au courant axial $\underline{n} \cdot \underline{j}_a^5(\mathbf{r})$ porté par le champ chirale :

$$\underline{n} \cdot \langle \underline{j}_a^5(\mathbf{r}) \rangle_q = \underline{n} \cdot \underline{j}_a^5(\mathbf{r}) \big|_s \quad (13.12)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unité normal à la surface.

Cette équation constitue une condition aux limites pour le champ chirale, une seconde condition étant que l'angle chirale s'annule à l'infini :

$$\theta(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad (13.13)$$

On peut donc résumer le modèle du sac chiral de la manière suivante. On postule l'existence de deux régions de l'espace séparées par une surface (qui définit le sac). A l'intérieur du sac il y a des quarks libres de masse nulle dont les orbites obéissent à la condition aux limites (13.9) qui les empêche de quitter le sac. A l'extérieur le système est décrit par le lagrangien de Skyrme (8.11). La région intérieure communique avec la région extérieure par la continuité (13.12) du courant axial.

Voyons comment ce modèle se réalise concrètement dans le cas d'un sac sphérique. A l'extérieur, où le système est décrit par le lagrangien de Skyrme, l'angle chiral a la forme (8.16) en hérisson de sorte que :

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_0 \cos \theta(r) & \pi^a(r) &= \hat{r}_a \sigma_0 \sin \theta(r) \\ (\theta^a(r) &= \hat{r}_a \theta(r)) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Calculons le courant axial porté par ce champ chiral en hérisson. Pour cela, nous notons la transformation (4.13) subie par σ et $\vec{\pi}$ dans une rotation chirale. On en déduit que, pour une rotation chirale dont les amplitudes $\vec{\alpha}$ sont petites, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\mu \psi^\mu &\rightarrow \bar{\psi}_\mu \psi^\mu + 2 \vec{\alpha}_\mu \cdot (\vec{\pi} \sigma^\mu - \sigma \vec{\pi}^\mu) / f^2 \\ (\bar{\psi}_\mu \bar{\psi}_\nu) (\psi^\mu \psi^\nu) &\rightarrow (\bar{\psi}_\mu \bar{\psi}_\nu) (\psi^\mu \psi^\nu) + 4 \vec{\alpha}_\mu \cdot [\vec{\pi} \sigma_\nu - \sigma \vec{\pi}_\nu] (\bar{\psi}^\mu \bar{\psi}^\nu) / f^2 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Le courant axial associé à cette rotation chirale est (voir Itzykson et Zuber, page 28) :

$$\begin{aligned} j_a^{\mu 5} &= - \frac{1}{\hbar c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\alpha_\mu^a)} = \frac{1}{(\hbar c)^3} (\pi_a^\mu \sigma - \pi_a \sigma^\mu) \\ &+ \frac{1}{e^2 f^2} \left[(\bar{\psi}_\nu \bar{\psi}^\nu) (\pi_a^\mu \sigma - \pi_a \sigma^\mu) - (\bar{\psi}^\mu \bar{\psi}^\nu) (\pi_\nu^a \sigma - \pi^a \sigma_\nu) \right] \end{aligned} \quad (13.16)$$

Dans le cas où le champ chiral a la forme en hérisson, la composante du courant axial normale à la surface se réduit à l'expression :

$$\hat{j}_a^5 \cdot \hat{r} = \hat{r}_a \left(\frac{f}{k_c} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right) \left[1 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2} \left(\frac{k_c}{ef} \right)^2 \right] \quad (13.17)$$

Les orbites des quarks sont déterminées par les équations (13.8) et (13.9). L'angle chiral en forme d'hérisson est tel que :

$$\vec{\theta}(r) \cdot \vec{\tau} = \hat{r} \cdot \vec{\tau} \theta(r) \quad (13.18)$$

de sorte que la condition aux limites (13.9) n'est invariante que par une rotation simultanée de l'espace et de l'isospin (laissant le produit $\hat{r} \cdot \vec{\tau}$ invariant). Les orbites seront donc étiquetées par les valeurs propres (G,M) du grand spin $\vec{G} = \vec{J} + \vec{\tau}$ défini en (11.3). Les orbites auront donc la même forme (11.4) que celles du soliton chiral, discuté en section 11. Les fonctions radiales seront solution du problème aux valeurs propres (11.7) dans lequel on aura posé $\sigma = \pi = 0$.

Les fonctions radiales s'expriment alors à l'aide des fonctions de Bessel sphériques. Il est commode de définir quatre états de base $|nk_j GM\rangle$ ainsi :

$$\langle r11k_j GM \rangle = \begin{pmatrix} i j_e(kr) & 1l_j GM \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{parite}' = (-)^G$$

$$\langle r12k_j GM \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ j_{e\pm 1}(kr) & 1l_{\pm 1} j GM \end{pmatrix} \quad \text{parite}' = (-)^G$$

$$\langle r13k_j GM \rangle = \begin{pmatrix} i j_{e\pm 1}(kr) & 1l_{\pm 1} j GM \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{parite}' = (-)^{G+1}$$

$$\langle r14k_j GM \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ j_e(kr) & 1l_j GM \end{pmatrix} \quad \text{parite}' = (-)^{G+1}$$

(13.19)

où nous avons posé

$$l = G \quad j = G \pm \frac{1}{2} \quad (13.20)$$

et où nous avons utilisé la notation (11.6).

Il est aisé de vérifier les relations :

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) (11\rangle \pm \frac{k}{E+m} 12\rangle) = E (11\rangle \pm \frac{k}{E+m} 12\rangle)$$

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) \left(\mp \frac{k}{E+m} 11\rangle + 12\rangle \right) = -E \left(\mp \frac{k}{E+m} 11\rangle + 12\rangle \right)$$

et

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) (13\rangle \mp \frac{k}{E+m} 14\rangle) = E (13\rangle \mp \frac{k}{E+m} 14\rangle)$$

$$\left(\frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \beta m \right) \left(\pm \frac{k}{E+m} 13\rangle + 14\rangle \right) = -E \left(\pm \frac{k}{E+m} 13\rangle + 14\rangle \right)$$

(13.21)

où :

$$E = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (13.22)$$

Les propriétés utiles des états $|l_j G M\rangle$ sont :

$$\langle l_j G M | l_{j'}' G' M' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta_{GG'} \delta_{MM'}$$

$$\langle l_j G M | \hat{r} \cdot \underline{\sigma} | l_{j'}' G' M' \rangle = \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{G(G+1)} \\ -2\sqrt{G(G+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} j' = G - \frac{1}{2} \\ j' = G + \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$j = G - \frac{1}{2} \qquad j = G + \frac{1}{2}$

$$\langle l_j G M | \underline{\sigma} \cdot \vec{r} | l_{j'}' G' M' \rangle = \frac{1}{2G+1} \begin{pmatrix} -(2G-1) & 4\sqrt{G(G+1)} \\ 4\sqrt{G(G+1)} & -(2G+3) \end{pmatrix} \begin{matrix} j' = G - \frac{1}{2} \\ j' = G + \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$j = G - \frac{1}{2} \qquad j = G + \frac{1}{2}$

(13.23)

A l'aide de ces relations il est facile d'étudier le spectre des orbites. Par exemple, l'orbite 10^+ a la fonction d'onde (poser $m=0$ dans l'équation 13.21) :

$$\langle r | 10^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \begin{pmatrix} i j_0(kr) |v\rangle \\ -j_1(kr) \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{r}} |v\rangle \end{pmatrix}$$

$$(\underline{\sigma} + \underline{\hat{r}}) |v\rangle = 0 \quad (13.24)$$

et la condition aux limites (13.9) s'écrit

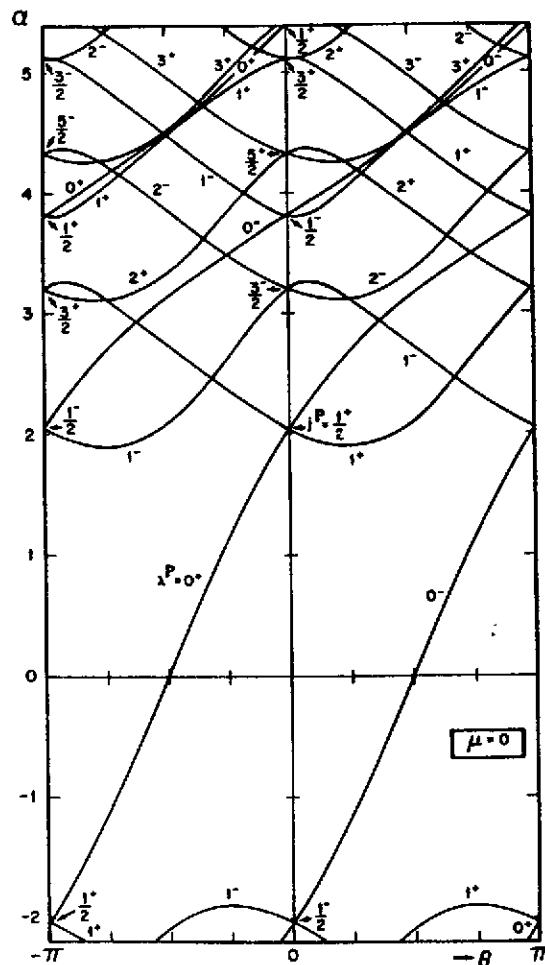
$$\langle \lambda | \underline{r} \rangle \beta e^{i \underline{\hat{r}} \cdot \underline{\hat{r}} \theta(r) \gamma_s} \quad \langle \underline{r} | \lambda \rangle \Big|_{r=R} = 0$$

En utilisant les relations (13.23) on obtient

$$\tan \theta(R) = \frac{j_0^2(kR) - j_1^2(kR)}{2j_0(kR)j_1(kR)} \quad (13.26)$$

Cette équation quantifie k et donc les énergies $\pm \hbar c k$ des orbites. On voit que si $\theta(R) \rightarrow 0$, ce qui arrive à la limite où R est très grand, la condition (13.26) se réduit à celle (6.9) du sac de MIT. D'ailleurs le modèle du sac chiral se confond avec le modèle du sac de MIT à la limite où son rayon $R \rightarrow \infty$.

A la limite inverse $R \rightarrow 0$ il se réduit évidemment au Skyrmion. On voit aussi que pour $\theta(R) = \frac{\pi}{2}$, on a $k = 0$ de sorte que l'énergie de l'orbite 0^+ s'annule. Le spectre des orbites a été étudié en détail par Mülders /24/ et il a la forme suivante, en fonction de $\theta(R)$. Pas plus que dans le soliton chiral (section 11) les orbites ne viennent par paires d'énergies égales et opposées. Le spectre se reproduit chaque fois que $\theta(R)$ augmente de π .



P.J. Mulders, Phys.
Rev. D 30 (1984) 1073

(13.27)

Le courant axial des quarks associé à la rotation chirale (4.8) et (4.9), est représenté par l'opérateur

$$j_a^{\mu 5} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \Psi \quad (13.28)$$

Soit N_c le nombre de couleurs des quarks ($N_c = 3$). Si on met N_c quarks dans l'orbite (13.24) de manière à former un état de couleur nulle, la composante normale à la surface du courant axial, porté par les quarks, est

$$\langle j_a^5 \cdot \hat{r} \rangle = - \frac{N_c}{4\pi\alpha} \frac{3}{8} \hat{r}_a \left[j_0^2(kr) + j_1^2(kr) \right] \quad (13.29)$$

Dans cette expression, le facteur de normalisation α de l'orbite (13.24) est égal à

$$\alpha = \int_0^R r^2 dr \left[j_0^2(kr) + j_1^2(kr) \right] \quad (13.30)$$

On remarquera que la composante normale du courant axial (13.29) porté par les quarks a la même forme (proportionnelle à $\hat{r}_a$) que celle (Eq. 13.17) portée par le champ chiral. Nous vérifions là une condition de self-consistence, qui permet au courant axial d'être continu à la surface du sac). Si, pour une forme en hérisson du champ chiral, on n'avait pas placé N_c quarks dans une orbite $G = 0$ (ou, plus généralement, si on n'avait pas formé des couches G complètes) on n'aurait pas pu réaliser la continuité (13.12) du courant axial sur la surface d'un sac sphérique. On remarquera aussi qu'avec la réalisation (E13.1) de la condition aux limites (13.9) et avec la forme en hérisson (13.14) de l'angle chiral, le courant axial porté par une orbite $|\lambda\rangle$ est relié à la dérivée de l'énergie de l'orbite par la relation :

$$\langle \lambda | \underline{j}_a^5 \cdot \hat{r} | \lambda \rangle = \frac{\hat{r}_a}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\delta e_\lambda}{\delta \theta(r)} \quad (13.31)$$

L'équation (13.29) devient alors

$$\langle \underline{j}_a^5 \cdot \hat{r} \rangle_r = \frac{\hat{r}_a}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta \theta(r)} \sum_{\lambda_{occ}} e_\lambda \quad (13.32)$$

où la somme est limitée aux orbites occupees par les quarks.

Dans ces conditions la continuité du courant axial à la surface, exprimée par l'équation (13.12), devient, compte tenu des résultats (13.17) et (13.32) :

$$\frac{1}{2R^2} \frac{\delta}{\delta \theta(R)} \sum_{\lambda_{occ}} e_\lambda = \left(\frac{\sigma_0}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_R \left[1 + \frac{2 \sin^2 \theta}{R^2} \left(\frac{\hbar c}{e \sigma_0} \right)^2 \right] \quad (13.33)$$

Une fois calculés l'angle chirale $\theta(r)$ et l'énergie e_λ de l'orbite $|\lambda\rangle$ (où sont placés N_c quarks de valence) l'énergie du système devient égale à :

$$E = N_c e_\lambda + \frac{4\pi}{3} R^3 B + 4\pi \int_R^\infty r^2 dr \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2k_c} \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2} \right] + \frac{\hbar c}{2a^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{r^2} + 2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] \right\} \quad (13.34)$$

Le premier terme est l'énergie des quarks dans le sac. Le deuxième terme est l'énergie de volume du sac dû à la restauration de la symétrie chirale au sein du sac. Le dernier terme est l'énergie (8.19) du Skyrme intégrée à l'extérieur du sac.

On a proposé /4/ de suivre le schéma suivant le calcul :

- a) On détermine $\theta(r)$ en rendant stationnaire l'énergie (13.34) par rapport aux variations de $\theta(r)$ et en imposant la condition aux limites :

$$\theta(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{r^2} \quad (13.35)$$

où a est fixé de manière à obtenir la valeur expérimentale de g_A .

- b) On se donne un rayon R et on calcule les orbites des quarks compte tenu de la condition aux limites (13.25), qui est connue dès lors que $\theta(r)$ a été calculé au point R .

- c) En général, on trouvera que la continuité (13.33) du courant axial ne sera pas réalisée par ce calcul. On recommence donc le calcul avec des valeurs différentes du paramètre e du lagrangien de Skyrme jusqu'à ce que la condition (13.33) soit satisfaite.

On peut imaginer d'autres schémas de calcul. Par exemple,

il a été suggéré de choisir la valeur de B afin de rendre l'énergie stationnaire par rapport aux variations du rayon R du sac /24/. On peut aussi inclure la contribution des quarks de la mer de Dirac à la fois à l'énergie et au courant axial. Cela exige une renormalisation /4/ que nous ne discuterons pas ici. Nous ne discuterons, non plus, les propriétés intéressantes du courant baryonique dans le modèle du sac. Bornons nous à les décrire. A l'extérieur, le courant baryonique est porté par le champ chiral et il est donné par l'expression (8.7) ou, dans le cas de l'hérisson, par l'expression (8.26). Le nombre de baryons à l'extérieur du sac est donc égal à

$$B_{\text{ext}} = 4\pi \int_R^\infty r^2 dr B^{\mu=0}(r) = - \frac{1}{\pi} \left[\theta(R) - \frac{\sin 2\theta(R)}{2} \right] \quad (13.36)$$

Puisque $\theta(R)$ est une fonction continue de R , le nombre de baryons à l'extérieur du sac peut être fractionnaire.

Pour que nous puissions, dans ce modèle continuer à identifier le courant (8.7) de Skyrme au courant baryonique, il faut que la contribution B_{int} , au nombre baryonique, des quarks à l'intérieur du sac soit également fractionnaire. C'est cette propriété qu'ont démontré Goldstone et Jaffe /25/, qui

obtiennent le résultat remarquable $B_{\text{int}} + B_{\text{ext}} = 1$.

Pour l'instant le champ externe (voir 13.2), introduit dans le lagrangien (13.1), n'a pas d'interprétation dynamique. Ce terme brise l'invariance par translation du lagrangien et on aimerait voir la fonction f apparaître par exemple comme une valeur classique d'un champ dynamique. En d'autres mots on aimerait connaître le mécanisme qui crée le sac. Les quelques tentatives /26/ dans cette direction n'ont, jusqu'à présent, pas réussies. L'existence même du sac n'est, à l'heure actuelle, pas

vraiment démontrée expérimentalement. Il nous reste encore beaucoup à apprendre sur la structure des hadrons.

EXERCICES

E13.1 : Montrer que la condition aux limites (13.9) peut être réalisée par l'équation

$$i \underline{n} \cdot \underline{\gamma} |\lambda\rangle = e^{i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} |\lambda\rangle$$

E13.2 : Soit $\underline{j}$ un courant conservé : $\underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$. On considère le volume qui entoure de près une surface S . On a

$$\int_V d_3 r \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \int_S d_2 S \underline{n} \cdot \underline{j}$$

En déduire la condition aux limites (13.10).

E13.3 : Discuter si le confinement des quarks dans la mer de Dirac est correctement décrit par la condition aux limites (13.12). Est-ce que cette condition permet, par exemple, la création d'une antiparticule de couleur nulle de se propager ?

E13.4 : Vérifier que le facteur $(-1/\hbar c)$, apparaissant dans la définition (13.16) du courant axial, est choisi de manière à ce que le courant baryonique des quarks, associé à la transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ soit égal à $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$.

E13.5 : On a exigé au courant axial d'être continu à la surface du sac. Pourquoi n'a-t-on pas, par exemple, exigé au

courant d'isospin, associé à une rotation d'isospin, d'être continu à la surface ? (On aura intérêt, pour répondre à cette question, à calculer le courant d'isospin porté par les quarks ainsi que celui porté par le champ chiral). Faut-il rendre les courants, associés aux translations, continus à la surface ? (Question bien plus intéressante !) Et, tant qu'on y est, le courant baryonique est-il continu à la surface du sac ? Et la densité baryonique ? (Voir la référence 25).

REFERENCES

Il est utile d'avoir sous la main un bon livre sur la théorie des champs. Nous nous référons souvent au texte de C. Itzykson et J.B. Zuber, Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill, 1980. On pourra ainsi se référer au texte moins moderne de J.D. Bjorken et S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields, Mc Graw-Hill, 1965. Une référence utile pour les propriétés des particules est l'ouvrage de T.D. Lee, Particle physics and introduction to field theory, Harwood Academic Publishers, 1981.

1. Modèle σ :

M. Gell-Mann et M. Lévy, Nuovo Cim. 16 (1960) 705 ;
Itzykson-Zuber (p. 540) et T.D. Lee (cités plus hauts).

2. Sac de MIT :

A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn and V.F. Weisskopf,
Phys. Rev. D9 (1974) 3471

A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson and C.B. Thorn, Phys. Rev. D10
(1974) 2599

T. De Grand, R.L. Jaffe, K. Johnson and J. Kiskis, Phys. Rev. D12
(1975) 2060

3. Skyrmions :

T.H.R. Skyrme, Nucl. Phys. 31 (1962) 556 et références /8/.

4. Sac chiral (voir aussi Ref. 24) :

G.E. Brown, A.D. Jackson, M. Rho et V. Vento, Phys. Lett. 140B
(1984) 285

V. Vento et M. Rho, Nucl. Phys. A412 (1984) 413

M. Rho, Chiral bags, Skyrmions and Quarks in nuclei, International
School of Physics "Enrico Fermi" June 1984, Varenna

5. Soliton de Friedberg et Lee (voir le livre de T.D. Lee, cité plus haut et :

R. Friedberg et T.D. Lee, Phys. Rev. D15 (1977) 1694 ; D16 (1977) 1096

R. Goldflam et L. Wilets, Phys. Rev. D25 (1982) 1951

7. *Le sac de SLAC :*

W.A. Bardeen, M.S. Chanowitz, S.D. Drell, M. Weinstein, et
T.M. Yan, Phys. Rev. D11 (1975) 1094

8. *Quelques applications récentes de la théorie de Skyrme :*

G.S. Adkins, C.R. Nappi, et E. Witten, Nucl. Phys. B228 (1983) 552 ;
Nucl. Phys. B223 (1984) 109

E. Guardini, Nucl. Phys. B236 (1984) 35

M. Chemtob, Saclay preprint SPHT/84/100 (1984)

G.S. Adkins and C.R. Nappi, Phys. Lett. 137B (1984) 251

K.F. Liu, J.S. Zhang and G.R.E. Black, Phys. Rev. D30 (1984) 2015

J.A. Parmentola, Phys. Rev. D30 (1984) 685

A. Jackson, A.D. Jackson and V. Pasquier, Nucl. Phys. (à paraître)

I. Zahed, U.G. Meissner et U.B. Kaulfuss, Nucl. Phys. A426 (1984) 525

C.G. Callan Jr. et E. Witten, Monopole catalysis of Skyrminion decay,
University of Princeton preprint.

9. *Monopoles :*

G.'t Hooft, Nucl. Phys. B79 (1974) 276

A.M. Polyakov, JETP Lett. 20 (1974) 194

10. *Topologie :*

T. Eguchi, R. Gilkey and A. Hanson, Phys. Rep. 66 (1980) 213

J. Madore, Phys. Rep. 75 (1981) 125

11. *Relations avec la QCD :*

E. Witten, Nucl. Phys. B160 (1979) 57 ; B223 (1983) 422 et 433

G.'t Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461 ; B75 (1974) 461

A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B234 (1984) 189

E. Witten, Skyrminions and QCD, Proceedings of the workshop on solitons
in nuclear and particle physics at the Lewes Centre of Physics, June 1984

12. *Quarks non relativistes*

B. Silvestre-Brac, A.K. Jain et C. Gignoux, Phys. Lett. 137B (1984) 5
et autres références citées là.

13. *Calculs QCD et températures de transition*

J. Kogut, M. Stone, H.W. Wyld, W.R. Gibbs, J. Shigemitsu,
S.H. Shenker et D.K. Sinclair, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 393

A. Billoire, R. Lacaze, E. Marinari et A. Morel, *Nucl. Phys B (FS)* 1985 (à paraître)

14. *C. Itzykson et J.B. Zuber, Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill (1982) :*

J.D. Bjorken et S.D. Drell, *Relativistic quantum fields*, Mc. Graw Hill
(1965)

15. *Deformations d'isospin :*

A. Bohr et B. Mottelson, *Nuclear Structure II*, page 21, Benjamin 1975

16. *J.P. Blaizot et G. Ripka, Quantum Theory of Finite Systems, to be published by MIT press*

17. *J. Wess et B. Zumino, Phys. Lett. 37B (1971) 95 :*

voir aussi articles de Chemtob et de Guardini de la référence 8

18. *Orbites de quarks dans un champ chirale :*

M. Gaudin, sur le spectre des fermions dans le champ d'un soliton
chiral sphérique, Saclay preprint 1984. Voir aussi la référence 24

19. *Soliton Chiral (voir aussi Ref. 22) et quarks dans champ chirale :*

S. Kahana, G. Ripka and V. Soni, *Nucl. Phys.* A415 (1984) 351

S. Kahana and G. Ripka, *Nucl. Phys.* A429 (1984) 462

20. *J. Goldstone et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 986*

21. *M. Gaudin, Lagrangien effectif du champ classique couplé aux fermions.*
Saclay preprint SPh-T/84/004 (1984)

22. *Soliton chiral (voir aussi Ref. 19) :*

M.C. Birse et M.K. Banerjee, *Phys. Lett.* 136B (1984) 284

W. Broniowski and M.K. Banerjee, Chiral model of N and Δ with vector
mesons ; University of Maryland preprint pp # 85-010 (1984)

23. *Energie de casimir :*

I.J.R. Aitchison et C.M. Fraser, University of Oxford preprint 43/84
(1984)

M. Gaudin (voir Ref. 21)

R. Mac Kenzie, Santa Barbara preprint NSF-ITP-84-135 (1984)

R.I. Nepomechie, *Ann. Phys.* 158 (1984) 67

24. *Orbites et énergies du sac chiral :*

P.J. Mulders, Phys. Rev. D30 (1984) 1073

25. *Nombre baryonique du sac chiral :*

J. Goldstone and R.L. Jaffe, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1518

26. R. Seki et S. Ohta, *Non-topological and topological chiral soliton bags as a model of the nucleon*, Marmal aid prepreprint series MAP-57 (1984)