



**HAL**  
open science

## Traitement dynamique des symétries : brisure et restauration

P. Schuck

► **To cite this version:**

P. Schuck. Traitement dynamique des symétries : brisure et restauration. École thématique. Ecole Joliot Curie "Symétries et physique nucléaire", Maubuisson, (France), du 15-19 septembre 1986 : 5ème session, 1986. cel-00644033

**HAL Id: cel-00644033**

**<https://cel.hal.science/cel-00644033>**

Submitted on 23 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**TRAITEMENT DYNAMIQUE DES SYMETRIES :  
BRISURE ET RESTAURATION**

**P. SCHUCK**

Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble

Résumé :

Les brisures (spontanées) de symétrie sont d'abord expliquées et leurs implications physiques discutées pour des systèmes infinis. La relation avec les transitions de phases est indiquée. Ensuite la spécificité des brisures de symétrie dans les systèmes finis et notamment dans les noyaux est abordée et illustrée en détail pour l'invariance de translation sur un modèle très simplifié mais exactement soluble. La méthode de projection (restauration de symétrie) est expliquée dans le cas statique et appliquée au modèle. La brisure de symétrie dans le cas dynamique et notamment la discussion d'un mode mou qui enclenche la brisure de symétrie sont expliquées dans le cas de la superfluidité et à nouveau un modèle exactement soluble est introduit. Le mode de Goldstone est traité en détail. Quelques remarques sur les analogies dans la brisure de la symétrie chirale sont faites. Quelques développements récents dans la restauration de symétrie sont brièvement expliqués.

Abstract :

First symmetry breaking (spontaneous) is explained and the physical implication discussed for infinite systems. The relation with phase transitions is indicated. Then the specific aspects of symmetry breaking in finite systems is treated and illustrated in detail for the case of translational invariance with the help of an oversimplified but exactly solvable model. The method of projection (restauration of symmetry) is explained for the static case and also applied to the model. Symmetry breaking in the dynamical case and for instance the notion of a soft mode responsible for the symmetry breaking is discussed in the case of superfluidity and another exactly solvable model is introduced. The Goldstone mode is treated in detail. Some remarks on analogies with the breaking of chiral symmetry are made. Some recent developments in the theory of symmetry restauration are briefly outlined.

## I. INTRODUCTION

En physique nucléaire, on travaille habituellement avec des Hamiltoniens (exemple : modèle en couches) qui brisent explicitement un certain nombre de symétries qui sont par contre conservées par l'Hamiltonien de départ, c'est-à-dire :

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{v}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} \quad (1)$$

où  $t$  est l'énergie cinétique et  $\bar{v}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  l'élément de matrice antisymétrisé de l'interaction entre deux nucléons. Nous avons

$$[H, \hat{P}] = [H, \hat{J}^2] = [H, \hat{N}] = [H, \hat{\Phi}] = \dots = 0 \quad (2)$$

où  $\hat{P}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{N}$ ,  $\hat{\Phi}$ , ... sont respectivement les opérateurs du moment total (invariance par translation), du moment cinétique (invariance par rotation), du nombre de particules (bon nombre de particules) et de la parité (bonne parité), etc. L'Hamiltonien du modèle en couches, c'est-à-dire de Hartree-Fock ( $h^{\text{H.F.}}$ ) ou de Hartree-Fock-Bogoliubov ( $h^{\text{HFB}}$ ) peut briser toutes ces symétries :

$$[h^{\text{HF}}, \hat{P}] \neq 0; [h^{\text{HF}}, \hat{J}^2] \neq 0; [h^{\text{HFB}}, \hat{N}] \neq 0; [h^{\text{HF}}, \hat{\Phi}] \neq 0; \dots \quad (3)$$

L'Hamiltonien du modèle en couches brise toujours la symétrie de translation; en plus, il peut briser la symétrie de rotation (noyaux déformés), ne pas conserver un bon nombre de particules (noyaux superfluides), ne pas être invariant par rapport à un changement de parité (noyaux avec une déformation octupolaire), etc...

Pendant le cours, nous allons insister sur le fait que toutes ces brisures de symétries sont intimement liées à ce que l'on appelle les transitions de phases qui, elles, sont déclenchées par un mode collectif qui devient (en fonction d'un paramètre physique) de plus en plus mou.

Ainsi, on peut s'imaginer que la brisure de l'invariance de translation est liée à la transition de phase gaz-liquide et au processus de fragmentation qui, elle, est déclenchée par des fluctuations de densité dans le gaz.

La brisure de l'invariance rotationnelle est liée à la transition sphérique-déformée qui est déclenchée par un mode mou qui est la vibration quadrupolaire de la surface.

La transition normale-superfluide brise la conservation du nombre de particules et est déclenchée par le mode mou dite de vibration des paires, etc.

Il faut tout de suite rappeler que la notion de transition de phases est strictement valable uniquement dans un système infini (c'est-à-dire macroscopique) et que dans des systèmes

finis, c'est-à-dire avec un petit nombre de particules, les transitions de phases sont toujours plus ou moins lavées. Ainsi, travailler avec des Hamiltoniens qui brisent les symétries (voir eq. (3)) n'a un sens et peut éventuellement nous amener à une description "exacte" du système que pour les systèmes macroscopiques (penser à des gouttes macroscopiques de  $\text{He}^3$  liquide). Pour des systèmes à un nombre de plus en plus petit de particules, l'introduction d'un Hamiltonien qui brise les symétries a de moins en moins un sens. Néanmoins, comme nous le savons, même pour des noyaux si petits que  $A \simeq 20$  le modèle en couche peut être encore une approximation très valable.

Ceci nous amène à la question de savoir si travailler avec un Hamiltonien qui brise un certain nombre de symétries peut être une bonne approximation et si surtout, lorsque  $A \rightarrow \infty$ , nous pouvons avoir une théorie avec symétrie brisée qui devient de plus en plus précise et qui peut devenir exacte, ce que nous allons démontrer dans le cadre de certains modèles.

Pendant le cours, nous allons aussi développer des notions intimement liées à tout processus de brisure de symétrie. Ce sera surtout le cas pour l'Hamiltonien du champ moyen (c'est à dire  $h^{\text{HF}}$ ) qui brise une symétrie et qui correspond à un Hamiltonien intrinsèque du système. Nous allons parler de la brisure spontanée de symétrie (et en fait tous les exemples que nous venons de citer plus haut correspondent à des brisures spontanées de symétries) et également du mode de Goldstone qui lui est associé.

Pour des petits nombres de particules où l'approximation du champ moyen devient de plus en plus mauvaise, il peut s'avérer nécessaire de restaurer les symétries; nous allons démontrer comment cela peut se faire dans la pratique.

Plus précisément, le plan du cours est le suivant. Dans le chapitre 2, nous ferons des remarques générales sur les brisures de symétries et surtout des illustrations concernant la brisure de la symétrie de translation sont données. Le chapitre 3 nous montre les implications de la brisure de symétrie pour des systèmes finis en utilisant un modèle exactement soluble. Le chapitre 4 parle des techniques de restauration de bonnes symétries dans le cas statique et le chapitre 5 est consacré aux aspects dynamiques et aux modes mous qui sont responsables de la brisure de symétrie. Dans le chapitre 6, quelques développements récents dans la théorie de la restauration de symétrie seront brièvement abordés.

## 2. REMARQUES GENERALES SUR LES BRISURES DE SYMETRIE ET LA BRISURE DE LA SYMETRIE DE TRANSLATION

Dans un certain sens, la brisure de symétrie de translation est le cas le plus simple. Néanmoins, on doit se méfier parce que justement à cause de sa simplicité, on pourrait manquer de comprendre la vraie nature de la brisure spontanée de symétrie. Imaginons un gaz chaud de nucléons. Ce gaz montre un comportement typique d'un gaz de Van der Waals parce que la force nucléaire a une partie à courte portée répulsive et une partie à longue portée attractive. Dans la figure 1, nous montrons qualitativement la dépendance du grand potentiel

$$\Omega = E - TS - \mu A \quad (2.1)$$

en fonction de la densité pour une température donnée et pour plusieurs valeurs du potentiel chimique  $\mu$ .

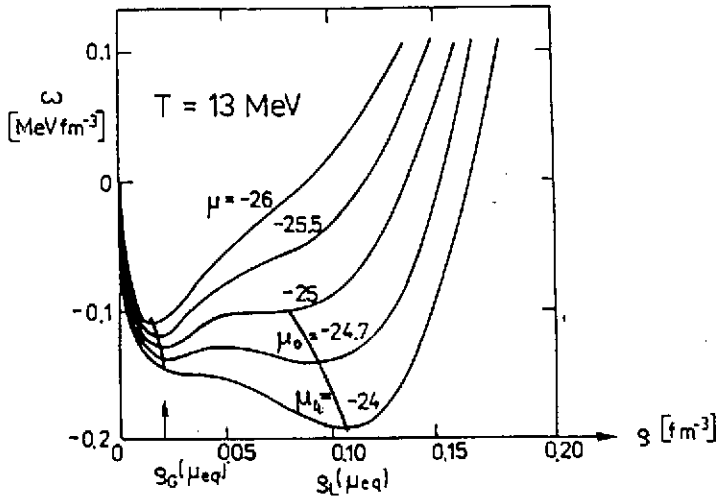


Fig. 1. Le grand potentiel  $\omega = \Omega/A$  en fonction de la densité  $\rho$  pour plusieurs valeurs du potentiel chimique  $\mu$ . La figure est celle de la réf. [1].

Le gaz est invariant par translation (nous supposons des conditions aux limites périodiques au bord du container macroscopique des  $A$  particules). Plaçons nous d'abord dans la situation  $\mu = \mu_0$  et la densité du gaz est au voisinage de  $\rho \approx \rho_G$  comme indiqué sur la figure. Imaginons que nous puissions agir sur le potentiel chimique et passons de  $\mu = \mu_0$  à  $\mu = \mu_4$ . Le gaz "voit" maintenant une situation où, à une densité plus élevée, il pourrait gagner beaucoup d'énergie. Seulement le container a un volume  $V$  et un nombre de particules  $A$  donné, c'est à dire la densité  $\rho_G = A/V$  est fixée. Comment le système va-t-il s'arranger pour gagner de l'énergie quand même ? Dans le gaz, il y a toujours des fluctuations de densité, c'est à dire localement dans l'espace et dans le temps il y a des endroits dans le gaz où la densité est plus élevée ou plus diluée que la moyenne. Ces fluctuations, de nature thermique ou quantique, ne sont pas invariantes par translation car localisées dans l'espace, mais à cela il n'y a rien d'anormal. Ces fluctuations vont et viennent c'est à dire qu'elles représentent des paquets d'ondes dépendants du temps; on peut se les imaginer aussi comme une superposition d'ondes de densité

$$\rho_{\vec{r}}(\vec{r}, t) = \rho_0 + b(t) \cos \vec{k} \vec{r} \quad (2.2)$$

Tout cela est tout à fait naturel car obéissant à l'équation de Schrödinger dépendant du temps. Si maintenant une de ces fluctuations locales de densité est suffisamment forte pour que le gain en énergie de volume surcompense le coût de l'énergie de surface, elle va s'amplifier jusqu'à ce qu'elle soit "tombée" dans le minimum de la figure 1 pour  $\mu = \mu_4$  c'est à dire  $\rho = \rho_L$ . Comme le

nombre de particules reste fixe et le volume aussi, il s'est nécessairement formé une ou plusieurs gouttelettes de matière\*

$$\rho(\vec{R}, \vec{r}, t) = \int d^3k f_{\vec{R}}(\vec{k}) \rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

qui sont centrées autour de  $\vec{R}$  (prenez à titre d'exemple  $f_{\vec{R}}(\vec{k}) = \cos \vec{k} \cdot \vec{R} e^{-k^2/k_0^2}$ , habituellement on prendra  $\vec{R} = 0$ ). Même si ce réservoir de particules est infini, il se forme toujours, d'abord à partir des fluctuations localisées (2.3) des gouttelettes qui grandissent, se réunissent jusqu'à ce que finalement tout le réservoir soit rempli de la phase liquide avec  $\rho = \rho_L$ .

A ce stade de la discussion, tout est encore en ordre parce que rien de plus normal que de former un paquet d'onde (2.3). Seulement si la masse de la gouttelette devient macroscopique (exemple : goutte de  $\text{He}^3$  liquide) l'étalement du paquet d'onde (2.3) devient si lent qu'on peut le considérer comme inexistant (ce qui est strictement vrai lorsque la masse de la gouttelette tend vers l'infini); à ce moment le paquet (2.3) est devenu un état stationnaire. Cet état stationnaire brise explicitement la symétrie de translation. Les brisures de symétrie doivent en général toujours être comprises dans ce sens : elles correspondent à des paquets d'ondes qui n'ont pas la symétrie de l'Hamiltonien mais qui sont stationnaires à cause de la taille macroscopique du système. Ceci est vrai, comme nous allons le voir explicitement dans plusieurs cas de figures, pour la déformation, la superfluidité, l'aimantation dans un ferromagnét, mais aussi pour la brisure de la chiralité du vide, etc...

Revenons à notre exemple de la translation qui comme je l'ai dit est dans un certain sens un cas simple qui peut introduire une mauvaise conception de la réalité. Car pour la translation il est, au moins en principe, toujours possible de raisonner sans la terminologie de transitions de phases et de la brisure de symétrie dont nous venons de parler : pour une gouttelette macroscopique on peut toujours transformer l'Hamiltonien (1.1) en coordonnées intrinsèques  $\xi_e$  et coordonnée de centre de masse

$$\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_i \vec{r}_i \quad (2.4)$$

Avec

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \sum_e \frac{\partial \xi_e}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_e}$$

nous obtenons pour (1.1) (écrit sans seconde quantification) :

\* Il est clair que les noyaux se forment aussi et surtout par réactions nucléaires. En plus, les noyaux ne sont pas des objets macroscopiques. Néanmoins, nous poursuivons l'exemple de la transition gaz liquide parce qu'il est très illustratif.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \right)^2 + V = \frac{\vec{P}^2}{2Am} + \sum_{cc'} D_{cc'}(\vec{F}) \pi_c \pi_{c'} + V(\vec{F}) \quad (2.5)$$

où

$$\vec{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \quad ; \quad \pi_c = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{F}_c} \quad ; \quad D_{cc'}(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial \vec{F}_c}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{F}_{c'}}{\partial \vec{r}_i} \quad (2.6)$$

et où nous avons utilisé le fait que  $\sum_i (\partial/\partial \vec{r}_i) \vec{F}_c = 0$  car les coordonnées intrinsèques dépendent uniquement des différences  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

Pour la partie intrinsèque, nous obtenons une équation de Schrödinger stationnaire pour les énergies propres de la gouttelette. Seulement l'exemple de la translation est le seul cas (à ma connaissance) où (pour un système macroscopique c'est à dire  $A \rightarrow \infty$ ) une formulation d'une transition de phases en gardant la bonne symétrie soit possible d'une manière univoque par une séparation de coordonnées; cependant, une description en gardant la bonne symétrie de translation masque en quelque sorte le phénomène physique de la transition de phases décrite plus haut. Pour toutes les autres transitions de phases, il faut avoir recours à la formulation (2.3) et il est impossible, d'avoir une description autre que celle qui brise explicitement la symétrie.

Reprenons l'exemple (2.3) d'une gouttelette macroscopique de fermions. Il se trouve que tout comme pour le gaz un déterminant de Slater est une très bonne première approximation. Pour celle-ci, les fonctions d'ondes individuelles de H.F. ne sont évidemment plus des ondes planes mais des fonctions qui elles aussi brisent la symétrie de translation dans le sens que leur champ moyen dépend du centre de masse  $\vec{R}$ : c'est évidemment le modèle en couche pour une goutte macroscopique même si la goutte est si grande qu'en réalité le spectre est pratiquement continu.

D'après ce que nous venons de discuter, il devient aussi clair que d'autres notions fréquemment employées dans le concept de transitions de phases et de brisure de symétrie ont un sens: c'est notamment le cas pour la variable redondante du centre de masse; en effet, le paquet d'onde (2.3) est caractérisé en outre des  $3A$  coordonnées  $r_i$  des  $A$  particules qui sont contenues dans le paquet d'ondes par la coordonnée  $\vec{R}$  du centre de masse du paquet d'onde; comme le paquet d'ondes est stationnaire, nous pouvons résoudre une équation de Schrödinger indépendante du temps impliquant une variable redondante ( $\vec{R}$ ) et néanmoins, au moins en principe, obtenir une solution exacte. Il devient évident que cette solution n'est pas à considérer, dans le sens habituel d'une fonction d'ondes stationnaire, fonction propre de l'Hamiltonien (1.1) mais elle décrit plutôt un système intrinsèque caractérisé par le centre de masse de la gouttelette. Ce qui n'empêche pas qu'elle peut décrire exactement l'état physique du système.



Pour un système macroscopique, la largeur du paquet d'ondes (2.3) dans la coordonnée  $\vec{R}$  est zéro, c'est à dire c'est une fonction de Dirac  $\delta(\vec{R})$ . C'est pour cela que une fois la taille macroscopique atteinte, c'est à dire la symétrie brisée, cela n'a plus de sens de vouloir décomposer le paquet d'ondes dans ses composantes individuelles. Seulement pour des transitions de phases géométriques comme la brisure de translation ou la déformation, on est toujours tenté de rétablir la symétrie par une transformation des 3A coordonnées  $r_i$  en (3A-3) coordonnées intrinsèques ( $\xi_1$ ) et 3 coordonnées géométriques (centre de masse  $R_x, R_y, R_z$ ; angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ ) Pour d'autres transitions de phases comme dans le cas de la superfluidité (qui implique pourtant une physique analogue) on aurait jamais l'idée d'éliminer la variable supplémentaire (l'angle de jauge) par une telle transformation car cet angle de jauge n'a rien à voir avec les coordonnées dans l'espace réel. Ceci illustre parfaitement que le concept des variables redondantes est intimement lié à la transition de phases et n'a rien d'artificiel.

Pour l'instant, nous n'avons parlé que des systèmes macroscopiques. Que se passe t il pour des systèmes aussi petits que les noyaux ? Etonnamment tous les concepts que nous venons d'écrire restent valables (dans le sens d'une bonne approximation) pour des systèmes très petits, de l'ordre de quelques dizaines de particules. Notamment, le concept du système intrinsèque est en quelque sorte à la base de la physique nucléaire et dès que l'on parle du modèle en couches ou de la théorie Hartree-Fock, on a implicitement formé ce paquet d'ondes dont le centre de masse peut être le centre de masse physique (translation) ou (en plus) les angles qui fixent l'orientation d'un noyau déformé ou l'angle de jauge qui fixe l'orientation dans un espace abstrait (superfluidité). Ce paquet d'ondes si on le mettait dans l'équation de Schrödinger dépendant du temps s'étalerait très vite (à cause du petit nombre de particules) mais les physiciens nucléaires qui utilisent le modèle en couches ou la théorie H.F. savent qu'il est apparemment une bonne approximation de négliger cet étalement et de faire comme s'il restait stationnaire. Les raisons de ce fait ne sont pas tout à fait éclaircies. D'autre part, il est néanmoins bien clair que ce concept ne peut être qu'une première approximation et bien souvent on est obligé en physique nucléaire de rétablir la bonne symétrie c'est à dire de filtrer du paquet d'ondes (2.3) qui, pour un système fini, aura une certaine largeur en  $\vec{R}$  et donc en  $\vec{P}$  la composante qui a le bon nombre quantique de l'impulsion totale. Ceci correspond à des techniques de projection qui compliquent énormément la théorie de Hartree-Fock et dont nous allons parler dans le prochain cours.

Résumons : La brisure de symétrie et la brisure spontanée de symétrie dont nous allons parler plus en détail plus loin peut être considérée comme une fluctuation locale dans l'espace et le temps, c'est à dire un paquet d'ondes comportant initialement peu de particules, qui pour des raisons énergétiques (voir figure 1) envahit tout le système et devient macroscopique. A ce moment, le paquet d'ondes caractérisé par sa position et son impulsion est piégé car il ne peut plus s'étaler et la brisure de symétrie devient permanente (symétrie spontanément brisée).

Comme généralement pour les systèmes de fermions, l'approximation de Hartree-Fock ou de H.F. dépendant du temps sont des bonnes approximation, il va de même pour un système avec symétrie brisée. Les fonctions d'ondes individuelles obéissent dans ce cas à une équation de Schrödinger à un corps avec symétrie intrinsèquement brisée caractérisée par une coordonnée (centre de masse du paquet d'ondes) comme le centre de gravité, les angles d'Euler, l'angle de jauge, etc...

Ce genre de raisonnement est valable pour des systèmes infinis c'est à dire dans la limite  $A \rightarrow \infty$  ; mais même pour des objets aussi petits que les noyaux cela reste une très bonne première approximation et nous allons en étudier les implications et conséquences sur un petit modèle soluble mais très schématique dans le prochain chapitre.

### 3. ETUDE SUR UN MODELE SCHEMATIQUE

Considérons le modèle hyper-simplifié suivant : deux particules distinctes avec masses  $m_1$  et  $m_2$  interagissent avec une force harmonique (voir figure 2); en plus, on se place à 1 dimension et on considère des particules sans spin.

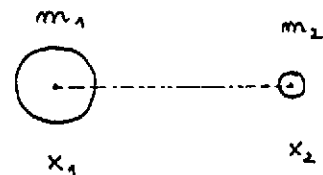
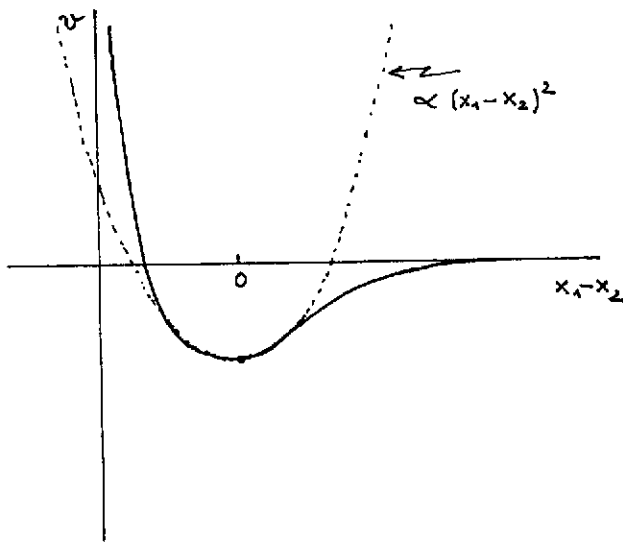


Fig. 2 . Approximation harmonique de deux particules en interaction (en une dimension)

L'Hamiltonien de ce système est donné par :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c(x_1 - x_2)^2 \quad (3.1)$$

En coordonnée du centre de masse et coordonnée relative

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = R ; \quad x_1 - x_2 = S \quad (3.2)$$

ceci s'écrit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + c s^2 \quad (3.3)$$

avec

$$M = m_1 + m_2 ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

La solution exacte est immédiate et nous avons (pour le fondamental) :

$$H \Psi_0(x_1, x_2) = E_0^P \Psi_0(x_1, x_2) \quad (3.4)$$

avec

$$\Psi_0(x_1, x_2) \propto e^{iPR} \varphi_0(s) \quad (3.5)$$

$$\varphi_0(s) = [\sqrt{\pi} b]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{b}\right)^2\right]$$

et

$$b^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu c}}$$

$$E_0^P = \frac{P^2}{2M} + \sqrt{\frac{c}{2\mu}} \equiv \frac{P^2}{2M} + \frac{\omega_0}{2} \quad (3.6)$$

où l'énergie de translation est  $P^2/2M$  et l'énergie intrinsèque  $\omega_0/2$ .

Bien que cela ne soit pas réaliste, nous pouvons maintenant chercher (comme habituellement en physique nucléaire) une solution approchée sous forme de produit. Nous posons donc comme fonction d'essai

$$\Psi_0^H(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \quad (3.7)$$

Naïvement, on pourrait penser qu'il serait bon de chercher parmi les fonctions d'ondes qui conservent la symétrie de translation  $[H, \hat{P}] = 0$  que possède l'Hamiltonien (3.1). Cependant, ceci ne nous laisse guère d'autre choix que de prendre des ondes planes pour les  $\varphi_i$  :

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{L^{1/2}} e^{i p_1 x_1} ; \quad \varphi_2(x_2) = \frac{1}{L^{1/2}} e^{i p_2 x_2} \quad (3.8)$$

où  $L$  caractérise la taille du système en considération. Une petite réflexion montre que le minimum de l'énergie est atteint pour  $p_1 = p_2 = 0$ . On peut maintenant se poser la question si en brisant la symétrie c'est à dire en localisant les  $\phi_i$  par une superposition d'ondes planes

$$\psi_i(x_i) = \frac{1}{L^{1/2}} \int dk f(p_i - k) e^{ikx_i} \quad (3.9)$$

un gain en énergie peut être obtenu. Si on prend par exemple pour fonction de distribution

$$f(p-k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{-(p-k)^2/\Delta^2} \quad (3.10)$$

un calcul simple montre que l'énergie

$$E_0^H(\Delta) \equiv \langle \psi_0^H | H | \psi_0^H \rangle \quad (3.11)$$

est instable par rapport à des petites variations en  $\Delta$  autour de la solution  $\Delta = 0$  qui conserve la symétrie. Si notre modèle n'était pas trop simplifié, on pourrait dire que la symétrie se brise spontanément. Rappelons que cette notion n'a un sens stricto sensu que dans un système infini. Cependant, nous pouvons apprendre bien des choses en poussant l'étude de notre modèle jusqu'au bout. Au lieu de calculer (3.11) avec (3.10) faisons un calcul variationnel sans restriction

$$\delta E_0^H = 0$$

avec

$$E_0^H = \frac{1}{2m_1} \langle \psi_1 | \hat{p}_1^2 | \psi_1 \rangle + \frac{1}{2m_2} \langle \psi_2 | \hat{p}_2^2 | \psi_2 \rangle + c \left[ \langle \psi_1 | x_1^2 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | x_2^2 | \psi_2 \rangle \right] \quad (3.12)$$

où les termes mélangés sont zéro à cause de la conservation de la parité. Ceci nous amène à :

$$h_1 \psi_1^i \equiv \left( -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c x_1^2 \right) \psi_1^i(x_1) = \epsilon_1^i \psi_1^i \quad (3.13a)$$

$$h_2 \varphi_2^i \equiv \left( -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c x_2^2 \right) \varphi_2^i(x_2) = \varepsilon_2^i \varphi_2^i(x_2) \quad (3.13b)$$

L'état fondamental est donc donné par

$$(h_1 + h_2) \psi_0^H = (\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0) \varphi_1^0 \varphi_2^0 \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(x_1) &= [\sqrt{\pi} b_1]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{b_1}\right)^2\right] \\ \varphi_2^0(x_2) &= [\sqrt{\pi} b_2]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{b_2}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$b_i^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_i c}} ; \quad \varepsilon_i^0 = \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{2m_i}} \equiv \frac{\omega_i}{2}$$

Il est clair que l'Hamiltonien  $h_1 + h_2$  ne commute plus avec l'impulsion totale, c'est-à-dire

$$[h_1 + h_2, \hat{P}] \neq 0 \quad (3.16)$$

ce qui est tout à fait analogue au problème Hartree-Fock habituel.

Considérons la limite lorsque une des deux masses, soit  $m_1$ , tend vers l'infini. L'énergie exacte et de Hartree sont données par

$$E_0^{\text{exact}} = \frac{P^2}{2(m_1 + m_2)} + \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}} \quad (3.17a)$$

$$\xrightarrow{m_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{2 m_2}}$$

$$E_0^H = \varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 + \hbar \sqrt{\frac{c}{2m_1}} + \hbar \sqrt{\frac{c}{2m_2}} \quad (3.17b)$$

$$\xrightarrow{m_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{2 m_2}}$$

Il en résulte donc que l'énergie de Hartree est égale à l'énergie exacte lorsqu'une des deux masses tend vers l'infini. Ceci n'est pas tout à fait surprenant car dans ce cas, la masse légère gravite autour du centre fixe de la masse lourde. Néanmoins, il reste vrai, dans le cas général, que l'approximation du champ moyen (c'est-à-dire Hartree-Fock) dans la base de la symétrie brisée est d'autant meilleure (pour certaines valeurs moyennes) que le système est lourd. Nous allons voir ce fait aussi dans l'exemple beaucoup moins trivial de la superfluidité que nous allons étudier dans le chapitre 5.

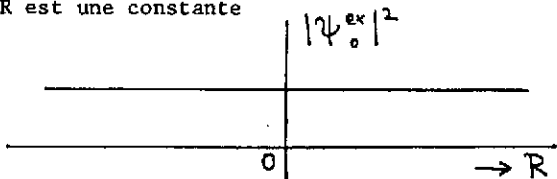
Notons en passant qu'on a aussi la relation

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \varphi_0^{(exact)} \rightarrow \varphi_2^0 \quad (3.18)$$

Ceci nous incite à étudier les diverses fonctions d'ondes plus en détail. Considérons surtout la dépendance en centre de masse et choisissons pour cela, sans restreindre le caractère général, en coordonnée relative, le point  $s = 0$ ; selon (3.5) la fonction d'onde exacte est donc proportionnelle à une onde plane

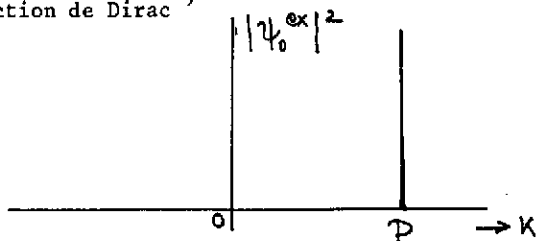
$$\psi_0^{exact}(R, s=0) \propto e^{iPR} \quad (3.19)$$

et par conséquent la distribution en  $R$  est une constante

$$|\psi_0^{ex}(R)|^2 = \text{const.} \quad (3.19')$$


The graph shows a horizontal line representing a constant value of  $|\psi_0^{ex}|^2$  across the range of  $R$ . The vertical axis is labeled  $|\psi_0^{ex}|^2$  and the horizontal axis is labeled  $R$ . The origin is marked with 0.

et la distribution en impulsion une fonction de Dirac<sup>\*</sup>)

$$|\psi_0^{ex}(k)|^2 \propto \delta(k-P) \quad (3.19'')$$


The graph shows a Dirac delta function  $\delta(k-P)$  plotted against  $k$ . The vertical axis is labeled  $|\psi_0^{ex}|^2$  and the horizontal axis is labeled  $k$ . The origin is marked with 0, and the peak of the delta function is at  $P$ .

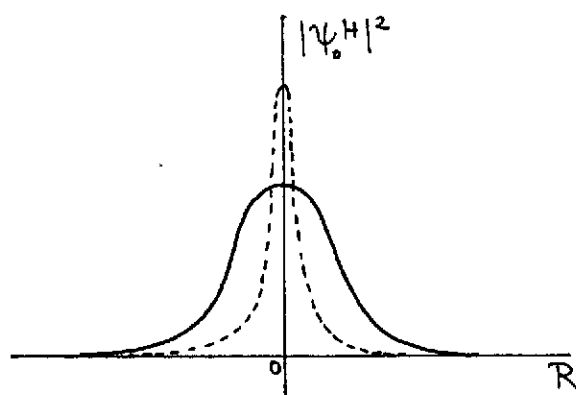
Donc la fonction exacte a bien évidemment les caractéristiques d'une fonction propre de l'impulsion totale.

\* Pour dériver ce résultat, il est indiqué de passer par la transformée de Wigner de la matrice de densité.

Faisons maintenant la même étude pour la solution approchée de Hartree (3.14,3.15)

$$|\Psi_0^H(R, s=0)|^2 = \pi^{-1} (2c \sqrt{m_1 m_2})^{1/2} \exp[-\sqrt{2c} (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) R^2] \quad (3.20)$$

Prenons la limite de cette expression lorsque  $m_1 \rightarrow \infty$ , c'est à dire pour le cas où nous avons vu précédemment que la solution Hartree est une très bonne approximation tendant vers le résultat exact pour l'énergie du fondamental:



$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} |\Psi_0^H(R)|^2 \propto \delta(R) \quad (3.21)$$

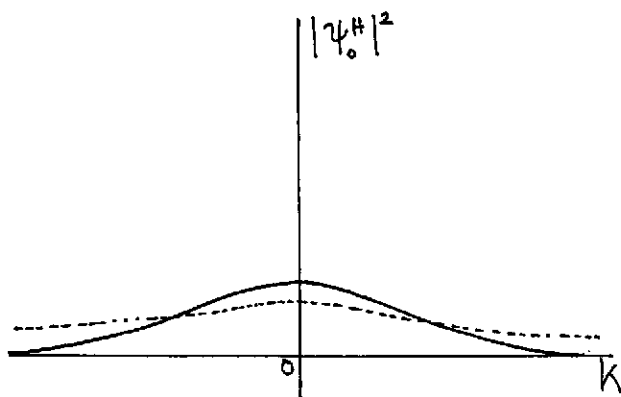
Fig. 3 : Distribution en R pour la solution Hartree pour deux valeurs de  $m_1$

Le résultat (3.20,3.21) est schématiquement représenté sur la Fig. 3.

La distribution en impulsion s'ob-

tient facilement par transformation de Fourier :

$$|\Psi_0^H(k)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dR \cos RK \Psi_0^H(R, s=0) \right|^2 \propto \exp \left[ -\sqrt{\frac{1}{2c}} \frac{k^2}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \right] \quad (3.22)$$



$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} |\Psi_0^H(k)|^2 = \text{const.} \quad (3.23)$$

Fig.4 : Distribution en K pour la solution Hartree pour deux valeurs de  $m_1$

Les résultats que nous venons d'obtenir, bien que dérivés uniquement dans le cadre de notre petit modèle, sont d'une nature tout à fait géné-

rale : pour des systèmes infinis (simulés par  $m_1 \rightarrow \infty$  dans notre cas) la fonction d'ondes en symétrie (spontanément) brisée devient fonction propre (3.21), (3.23) de l'opérateur du centre de masse  $\hat{R}$ . Ceci est tout à fait le contraire au cas avec une bonne symétrie où la fonction d'onde est fonction propre de  $\hat{P}$  (impulsion totale). Nous avons étudié cela ici pour la translation mais il en est de même pour l'angle de jauge en superfluidité dans un solide ou pour les angles d'Euler d'un objet déformé macroscopique (grande molécule par exemple) ou encore pour l'angle  $\phi$  de la symétrie chirale, etc.

Il est peut-être bon à présent de rappeler que nous avons fait notre étude en approximation du champ moyen mais que les résultats sont tout à fait généraux : on aurait aussi pu former des paquets d'ondes très localisées en  $R$  par une superposition de fonctions d'ondes exactes, invariantes par translation, et cela nous aurait amenés aux mêmes conclusions. Seulement pour des systèmes fermioniques, l'approximation du champ moyen est généralement une bonne approximation et elle facilite grandement les calculs.

Jusqu'à présent, nous avons discuté uniquement deux cas extrêmes c'est à dire la symétrie totalement conservée ou totalement brisée telle qu'elle se réalise dans les systèmes infinis. Les noyaux sont des objets intermédiaires déjà suffisamment grands pour qu'une description en symétrie brisée soit une bonne, pour certains aspects même déjà une très bonne, première approximation. Néanmoins, les noyaux sont encore assez petits pour que le paquet d'ondes en position, en angle etc. reste assez étalé pour que d'importantes corrections (quantitatives et qualitatives) restent à faire. La situation est schématiquement représentée sur les figures 3 et 4 où on a un paquet relativement étroit en position et relativement étendu en impulsion.

Pour la rotation ce sera respectivement un paquet en angle et en valeurs (discrètes) du moment cinétique. Pour ce dernier exemple, nous voyons tout de suite un aspect de la problématique : en physique nucléaire, nous nous intéressons souvent à des états avec un bon spin et nous sommes obligés de "filtrer" cette composante du paquet d'ondes (Hartree-Fock déformé) qui nous intéresse; on dit qu'on doit projeter sur un bon spin, isospin etc. Malheureusement, cet aspect là complique souvent énormément la théorie du champ moyen et dans le cas le plus difficile, comme la rotation à trois dimensions, même aujourd'hui, avec les moyens numériques importants, cela reste une tâche extrêmement difficile, sinon impossible à faire. Nous allons y revenir et discuter plus loin les techniques et façons approximatives pour traiter cette projection.

D'autre part, il devient évident que dans la limite macroscopique, c'est à dire lorsque la distribution en centre de masse, angle, etc est devenue une fonction de Dirac, la projection sur un bon spin etc. n'a plus aucun sens.

Par ailleurs, nous invitons le lecteur à vérifier explicitement à l'aide de notre modèle, le point que nous avons discuté dans le chapitre 2, c'est à dire le fait que ces paquets d'ondes, qui ne sont pas états propres des opérateurs de symétrie commutant avec l'Hamiltonien, ne sont



pas des états stationnaires mais que l'étalement du paquet d'ondes devient d'autant plus lent que la masse est grande et que, dans la limite des très grandes masses (c'est à dire macroscopiques), l'étalement devient si lent qu'il est pratiquement négligeable (le temps caractéristique atteignant l'âge de l'univers par exemple). C'est ce qui se passe pour les supraconducteurs, le vide avec symétrie chirale brisée etc.

Avant de passer à la description des techniques de projection, considérons encore un aspect quelque peu négligé dans notre solution Hartree (3.13 - 3.15). C'est le fait que la valeur moyenne de l'impulsion totale est nulle ( $\langle \psi_0^H | \hat{P} | \psi_0^H \rangle = 0$ ) tandis que la valeur moyenne avec la fonction exacte est différente de zéro (voir (3.19''')):  $\langle \psi_0^{ex} | \hat{P} | \psi_0^{ex} \rangle = P$ . Cependant, ce défaut est facile à corriger : il suffit d'imposer dans le calcul variationnel la valeur moyenne correcte par un multiplicateur de Lagrange.

$$\delta \left( \langle \psi_0^H | H | \psi_0^H \rangle - E \langle \psi_0^H | \psi_0^H \rangle - v \langle \psi_0^H | \hat{P} | \psi_0^H \rangle \right) = 0 \quad (3.24)$$

avec

$$\hat{P} = -i \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad (3.25)$$

Ce nouveau principe de variation mène aux équations suivantes :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c x_1^2 - v (-i) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \tilde{\varphi}_{1v} \equiv h_{1v} \tilde{\varphi}_{1v} = \tilde{\varepsilon}_{1v} \tilde{\varphi}_{1v} \quad (3.26a)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c x_2^2 - v (-i) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \tilde{\varphi}_{2v} \equiv h_{2v} \tilde{\varphi}_{2v} = \tilde{\varepsilon}_{2v} \tilde{\varphi}_{2v} \quad (3.26b)$$

Il est facile de vérifier que les solutions sont données par :

$$\tilde{\varphi}_{kv} \propto \exp \left[ -\frac{x_k^2}{2b_k^2} + \frac{i}{\hbar} v m_k x_k \right] \quad (3.27)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{kv} = \varepsilon_k - \frac{m_k}{2} v^2 \quad k = 1, 2 \quad (3.28)$$

Nous pouvons facilement nous convaincre que toutes les considérations ci-dessus restent valables pour ce problème légèrement modifié mais que maintenant la distribution en  $K$  est centrée autour de  $P$  (voir figure 5).

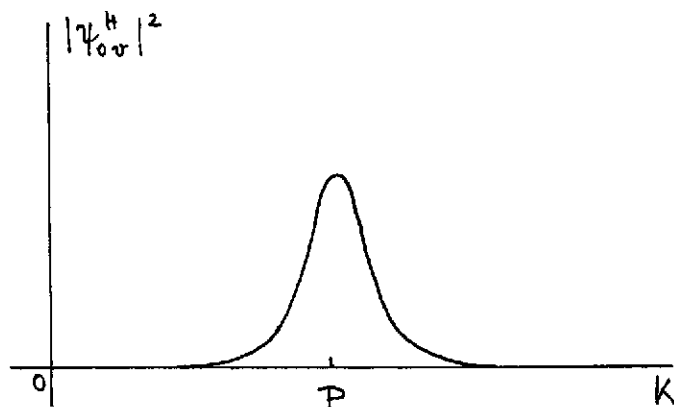


Fig.5 . Distribution en impulsion correspondant au problème variationnel (3.24).

Le nouveau problème variationnel (3.26 a-b) peut être interprété en termes physiques de la manière suivante.

Considérons l'équation de Schrödinger pour un puits de potentiel  $V$  en mouvement uniforme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left( \frac{p^2}{2m} + V(x-vt) \right) \psi(x,t) \equiv h(t) \psi(x,t) \quad (3.29)$$

Le puits de potentiel file de gauche à droite avec la vitesse  $v$  (voir figure 6)) lorsqu'il est observé dans le système du laboratoire

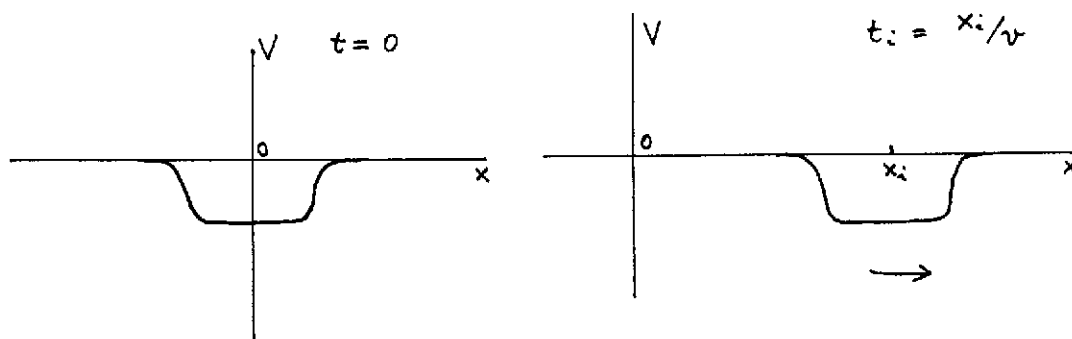


Fig. 6 . Puits de potentiel se déplaçant avec la vitesse  $v$  vue du laboratoire.

Nous pouvons passer à une équation de Schrödinger dans le système intrinsèque par la transformation de coordonnées suivantes :

$$x - vt = x' \quad \text{ou} \quad x = x' + vt \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (3.30)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x' + vt, t) = \left( \frac{p'^2}{2m} + V(x') \right) \psi(x' + vt, t) \quad (3.31)$$

En définissant

$$\psi(x' + vt, t) \equiv \tilde{\psi}(x', t) \quad (3.32)$$

nous arrivons à :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(x', t) + v(-i)\frac{\partial}{\partial x'} \tilde{\psi}(x', t) = h(o) \tilde{\psi}(x', t) \quad (3.33)$$

où le second membre de gauche sert à compenser le fait que la dérivée par rapport au temps agit maintenant sur les deux dépendances en t de  $\tilde{\psi}(x', t)$  (voir eq. (3.32)).

Avec le changement de nomenclature  $x' \rightarrow x$ ,  $p' \rightarrow p$ , nous aboutissons à :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(x, t) = (h(o) - v\hat{p}) \tilde{\psi}(x, t) \quad (3.34)$$

et avec  $\hat{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}(x) \exp i\tilde{\epsilon}t$  nous obtenons

$$(h(o) - v\hat{p}) \tilde{\psi}_{i,v}(x) = \tilde{\epsilon}_{i,v} \tilde{\psi}_{i,v}(x) \quad (3.35)$$

Cette équation est identique aux équations (3.26) qui sont souvent appelées équations de cranking.

Dans le cas de la translation on dit aussi pour des raisons évidentes "modèle du pushing". Les équations (3.26) peuvent donc être interprétées comme étant des équations (indépendantes du temps) dans le système intrinsèque du système c'est à dire l'observateur "voyage" avec le potentiel.

Lorsqu'on a vraiment un potentiel de Hartree-Fock  $h^{H.F.}[\rho]$  on appelle aussi cela modèle du cranking self consistant.

Nous avons choisi l'exemple de la translation pour dériver le modèle du cranking parce qu'il est conceptuellement le plus simple mais le principe reste le même dans tous les autres cas :

par exemple, pour la rotation, nous avons :

$$\left( \hbar^{KF} - \omega j_x \right) \tilde{\Psi}_{i\omega} = \tilde{E}_{i\omega} \tilde{\Psi}_{i\omega} \quad (3.36)$$

où  $\omega$  est la fréquence de rotation. L'interprétation est toujours la même; on a uniquement à échanger les opérateurs de symétrie et leurs conjugués canoniques. Ce qui était le couple  $-i\frac{\partial}{\partial R} \equiv \hat{P}$ ,  $\hat{R}$  pour la translation devient le couple  $-i\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv L_x$ ,  $\varphi$  pour la rotation (voir figure 7).

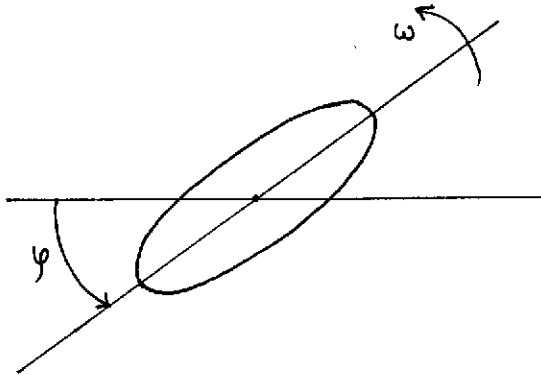


Fig. 7. Rotation d'un noyau déformé (classiquement)

ou encore le couple  $-i\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \frac{\hat{N}}{2}$ ,  $\hat{\varphi}$  pour la rotation dans l'espace de jauge pour le cas de la superfluidité, etc. Dans chaque cas, le déterminant de Slater représentant un noyau est un paquet d'ondes relativement étroit en  $R$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi$  etc (d'autant plus étroit que le noyau est grand) et relativement large dans les variables conjuguées. Ce paquet d'ondes se translate, tourne, etc. sans s'étaler dans le temps comme un corps classique et c'est pour cela qu'on dit souvent que l'approximation du cranking est une approximation classique. Il faut cependant toujours se rappeler que la limite classique n'est atteinte que dans la limite  $\hbar \rightarrow \infty$ .

Parlons, pour être complet, encore d'un petit détail concernant la notion du système intrinsèque. Le lecteur averti aura certainement remarqué que l'équation (3.35) et donc les équations (3.26) ainsi que toutes les équations de type cranking ne représentent qu'une transformation partielle dans le système intrinsèque. En fait, on vérifie aisément que l'hamiltonien  $h(0)$  figurant en (3.35) s'obtient par la transformation unitaire suivante de  $h(t)$  de (3.29) :

$$h(0) = U h(t) U^{-1} \quad (3.35')$$

avec

$$U = e^{\frac{i}{\hbar} v t \hat{p}} \quad (3.37)$$

ce qui signifie que seules les coordonnées sont transformées. Pour avoir une transformation de Galilée complète, il faut aussi transformer les impulsions, à savoir :

$$\tilde{h} = U | h(t) U^{-1} = \frac{(p + mv)^2}{2m} + V(x) \quad (3.38)$$

où

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} m v \hat{r}} e^{\frac{i}{\hbar} v t \hat{p}} \quad (3.39)$$

L'équation de Schrödinger (3.35) complètement transformée s'écrit alors :

$$\left[ \frac{(\hat{p} + mv)^2}{2m} + V(x) - v(\hat{p} + mv) \right] \tilde{\psi}_{iv}(x) = \tilde{\epsilon}_{iv} \tilde{\psi}_{iv}(x) \quad (3.40)$$

Cependant, pour arriver à une équation de Schrödinger indépendante du temps, comme les eqs. (3.26), il suffit généralement d'effectuer uniquement la transformation paire par rapport au temps (3.37), c'est à dire de considérer les équations du cranking. Mais pour des potentiels qui dépendent des impulsions, comme les potentiels non locaux, il faut prendre certaines précautions supplémentaires. En outre, il n'est pas tout à fait évident de savoir comment s'écrirait la partie impaire par rapport au temps de (3.39) dans le cas de la rotation (voir l'article de Winter/Schuck [2] à cet égard).

La différence entre le cas de la translation et celui de la rotation devient aussi évidente lorsqu'on calcule l'énergie dans le système du laboratoire. Pour notre modèle, on a avec (3.27, 3.28) :

$$\begin{aligned} E(v) &= \langle \psi_{0v}^H | H | \psi_{0v}^H \rangle = \langle \psi_{0v}^H | H_v | \psi_{0v}^H \rangle + v \langle \psi_{0v}^H | \hat{P} | \psi_{0v}^H \rangle \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + v^2(m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $H_v = h_{1v} + h_{2v}$

$$E(v) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad (3.42)$$

et en général on a

$$E(v) = E(0) + \frac{M}{2} v^2 = E(0) + \frac{P^2}{2M} \quad (3.43)$$

où M est la masse totale du système. Le cranking donne donc la bonne dépendance (triviale) en vitesse; ceci est dû au fait que le spectre intrinsèque et le mouvement collectif sont découplés. Ceci n'est pas le cas pour la rotation où l'énergie dans le laboratoire est donnée par :

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \langle \phi_\omega^{HF} | H_\omega | \phi_\omega^{HF} \rangle + \omega \langle \phi_\omega^{HF} | J_x | \phi_\omega^{HF} \rangle \\ &= E(0) + \frac{\mathcal{I}}{2} \omega^2 + O(\omega^4) \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\mathcal{I}$  est le moment d'inertie de Thouless-Valatin [3]. La dépendance en  $\omega$  n'est pas prescrite a priori comme dans le cas de la translation et elle peut varier d'une théorie à l'autre.

#### 4. TECHNIQUE DE PROJECTION\*

Comme nous l'avions annoncé à plusieurs reprises, nous allons discuter maintenant les techniques pour extraire du paquet d'ondes la composante avec un bon nombre quantique qui nous intéresse. Nous allons de nouveau traiter explicitement le cas de la translation et utiliser notre modèle pour mener certains calculs jusqu'au bout mais le principe restera toujours le même pour toutes les autres symétries brisées. Rappelons de nouveau que la projection a un sens uniquement pour des systèmes finis. Dès que la distribution dans la "coordonnée" aura atteint une forme de fonction de Dirac, il n'y a plus de raison pour effectuer une projection. Formellement, la projection est très simple. Il suffit de superposer les paquets d'ondes distribués dans tout l'espace de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Psi_P(x_1, x_2, \dots, x_A) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-iPq} \tilde{\Psi}_{ov}^{HF}(x_1+q, x_2+q, \dots, x_A+q) \\ &\equiv \hat{P}_{proj}^P \tilde{\Psi}_{ov}^{HF}(x_1, x_2, \dots, x_A) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'effectivement  $\Psi_P$  est fonction propre de

\* Dans ce chapitre, nous allons être relativement succincts parce que la méthode est décrite d'une manière assez détaillée dans deux livres récents [3, 4]. Par contre, nous invitons le lecteur pour se familiariser avec la méthode et ses différents aspects, d'appliquer la projection à notre modèle où tout peut être calculé analytiquement.

$$\hat{P} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_A} \right) \quad (4.2)$$

et que le projecteur peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\hat{P}_{proj}^P = \delta(P - \hat{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-i(P - \hat{P})q} \quad (4.3)$$

De la même façon, on peut dériver des projecteurs sur un bon nombre de particules (dans le cas de HFB) :

$$\hat{P}_{proj}^N = \delta(N - \hat{N}) \quad (4.4)$$

ou sur un bon spin <sup>\*</sup>)

$$\hat{P}_{proj}^{I,M} = \delta(I - |\hat{J}|) \delta(M - \hat{J}_z) \quad (4.5)$$

etc.

Nous pouvons maintenant utiliser notre fonction projetée (4.1) comme nouvelle fonction d'essai. Ceci nous amène au problème variationnel suivant :

$$\delta E_{proj}^P \equiv \delta \frac{\langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | H \hat{P}_{proj}^P | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | \hat{P}_{proj}^P | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle} \quad (4.6)$$

Malheureusement, c'est un problème qui est loin d'être trivial de résoudre. Le projecteur détruit toutes les propriétés agréables des déterminants de Slater et induit une fonction d'ondes hautement corréllée. Pour aboutir à des schémas systématiques d'approximation, étudions les recouvrements qui entrent (4.6) :

$$\langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | \hat{P}_{proj}^P | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-iqP} n(q) \quad ; \quad n(q) = \langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | e^{iq\hat{P}} | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle \quad (4.7a)$$

$$\langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | H \hat{P}_{proj}^P | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-iqP} h(q) \quad ; \quad h(q) = \langle \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} | H e^{iq\hat{P}} | \tilde{\Psi}_{ov}^{HF} \rangle \quad (4.7b)$$

\* En général, le projecteur dans le cas de la rotation est plus compliqué [3] mais nous ne voulons pas rentrer dans ces détails ici.

Les fonctions  $n(q)$  et  $h(q)$  sont appelées recouvrement de norme et de hamiltonien respectivement. Plus explicitement, on a pour  $n(q)$  :

$$n(q) = \int dx_1 dx_2 \dots \tilde{\Psi}_{0v}^{HF}(x_1, x_2, \dots) \tilde{\Psi}_{0v}^{HF}(x_1+q, x_2+q, \dots) \quad (4.8)$$

Le recouvrement de deux déterminants de Slater qui sont légèrement décalés l'un par rapport à l'autre est une fonction fortement décroissante en fonction de  $q$ . Souvent on fait en conséquence l'approximation gaussienne du recouvrement :

$$n(q) \simeq e^{i \langle \hat{P} \rangle q} e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle q^2} \quad (4.9)$$

$$\langle \hat{P} \rangle \equiv \langle \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} | \hat{P} | \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} \rangle ; \quad \Delta \hat{P} = \hat{P} - \langle \hat{P} \rangle$$

On vérifie facilement que (4.9) est exact pour notre modèle. En effet, avec (3.27, 3.28) on a :

$$\langle \hat{P} \rangle = v(m_1 + m_2) ; \quad \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) = \sqrt{\frac{c}{2}} (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) \quad (4.10)$$

On voit donc que le recouvrement est d'autant plus étroit que la variance de l'opérateur de symétrie est grande, c'est-à-dire que la masse est grande.

Pour trouver un schéma d'approximation dans notre problème variationnel, il est peut-être utile de traiter d'abord explicitement notre modèle pour lequel on peut également calculer le recouvrement de l'Hamiltonien :

$$\left. \begin{aligned} h(q) &= h^{kin}(q) + h^{pot}(q) \\ h^{kin}(q) &= (\alpha + i\beta q + \gamma q^2) n(q) \\ h^{pot}(q) &= \frac{c}{2} (b_1^2 + b_2^2 - q^2) n(q) \end{aligned} \right| \begin{aligned} \alpha &= \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_1 b_1^2} + \frac{1}{m_2 b_2^2} \right) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \\ \beta &= \frac{\hbar v}{2} \left( \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) \\ \gamma &= \frac{\hbar^2}{8} \left( \frac{1}{m_1 b_1^4} + \frac{1}{m_2 b_2^4} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$



Dans notre modèle, le recouvrement de l'Hamiltonien est donc un polynôme d'ordre deux en  $q$  que multiplie le recouvrement de la norme :

$$h(q) = (a_0 + a_1 q + a_2 q^2) n(q) \quad (4.12)$$

Il reste vrai dans le cas général que  $h(q)$  n'est pas très différent de  $n(q)$  et on suppose généralement que  $h(q)/n(q)$  est une fonction lentement variable en  $q$ . Ainsi, un développement en série de Taylor est possible :

$$\frac{h(q)}{n(q)} = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots \quad (4.13)$$

On a donc l'égalité :

$$\langle \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} | H e^{i q \hat{P}} | \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} \rangle = (a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots) e^{i \langle \hat{P} \rangle q} e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle q^2} \quad (4.14)$$

Le développement de deux côtés en puissances de  $q$  et comparant les coefficients de  $q^n$  permet de calculer les  $a_i$ . Pour aboutir à la formule finale, nous utilisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} q n(q) &= - \left( \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle^{-1} \frac{\partial}{\partial q} - i \langle \hat{P} \rangle \right) n(q) \\ q^2 n(q) &= \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Insérant (4.15) dans l'expression (4.6) pour  $E_{proj}^P$  et intégrant par partie permet d'annuler le dénominateur et nous obtenons :

$$E_{proj}^P(M) = \sum_{m=0}^M h_m(M) (P - \langle \hat{P} \rangle)^m \quad (4.16)$$

Les coefficients  $h_n(M)$  sont directement liés aux  $a_i$  et dépendent de l'ordre auquel on pousse le développement (4.16). Ce développement va converger d'autant plus rapidement que les fluctuations en  $\hat{P}$ , c'est à dire  $\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle$ , sont grandes. Supposons qu'elles soient très grandes, alors  $M = 1$  va être suffisant et nous obtenons dans ce cas

$$\underline{M=1} \quad h_0(1) = \langle H \rangle ; \quad h_1(1) = \frac{\langle H \Delta \hat{P} \rangle}{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} \quad (4.17)$$

$$E_{proj}^P(1) = \langle \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} | H - h_1(1) \hat{P} | \tilde{\Psi}_{0v}^{HF} \rangle + h_1(1) P \quad (4.18)$$

Le calcul variationnel nous amène à :

$$\delta E_{proj}^P(1) = \frac{\delta}{\delta \tilde{\psi}} \langle H \rangle - h_1 \frac{\delta}{\delta \tilde{\psi}} \langle \hat{P} \rangle + (P - \langle \hat{P} \rangle) \frac{\delta h_1}{\delta \tilde{\psi}} = 0 \quad (4.19)$$

Ce problème est résolu par l'équation du cranking

$$\delta E_{proj}^P(1) = \delta \langle \tilde{\psi}_{ov}^{HF} | H - v \hat{P} | \tilde{\psi}_{ov}^{HF} \rangle \quad (4.20)$$

avec

$$\langle \hat{P} \rangle = P \quad (4.21)$$

et

$$h_1(1) = v \quad (4.22)$$

La relation (4.22) peut être démontrée en toute généralité [3,4] mais le lecteur est invité à la vérifier directement dans le cadre de notre modèle.

Nous avons donc abouti au résultat très important suivant, que pour les cas de forte brisure de symétrie, c'est à dire  $\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle$  grand, les équations du cranking sont équivalentes, pour l'énergie du fondamental, à une théorie avec projection. Ceci peut se comprendre dans la limite où nous avons vu plus haut que pour  $m_1 \rightarrow \infty$  l'énergie de Hartree est l'énergie exacte deviennent égales dans notre modèle.

Malheureusement, l'ordre le plus bas n'est pas toujours suffisant en physique nucléaire et il faut pousser le calcul plus loin. Cependant ici (comme souvent ailleurs) l'expérience a montré que si l'ordre le plus bas n'est pas suffisant, les choses commencent à se compliquer sérieusement. Certes, en principe, on pourrait pousser (4.16) à l'ordre deux - et nous allons le faire dans un instant - mais souvent il s'est avéré dans des cas réalistes que les surfaces d'énergie sous-jacentes ne possèdent pas un minimum très prononcé ou qu'elles possèdent même un maximum, c'est à dire que la théorie n'est plus limitée inférieurement au cas où on devrait aller à un ordre encore plus élevé, etc. Dans la pratique, on a donc souvent le choix entre deux extrêmes c'est à dire ou bien l'ordre le plus bas, à savoir le cranking, est suffisant ou on doit faire une projection exacte. Le dernier est possible numériquement dans le cas de la superfluidité et de la rotation à une dimension (symétrie axiale) mais semble être pratiquement impossible dans le cas de la rotation à trois dimensions. Il est possible que la nouvelle

méthode de projectoin que nous allons présenter à la fin de ce cours y portera secours mais ceci reste à être démontré dans le futur.

Pour être complet, nous allons néanmoins brièvement traiter le cas  $M = 2$ . Dans le cadre de notre modèle, ceci est particulièrement intéressant parce qu'il contient la réponse exacte. Nous avons donc :

$$M = 2$$

$$h_0(2) = \langle H \rangle - \frac{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle}{2 M_Y} ; h_1(2) = \frac{\langle \hat{P} \rangle}{M_{sc}} ; h_2(2) = \frac{1}{2 M_Y} ; \quad (4.23)$$

avec

$$\frac{1}{M_{sc}} = \frac{\langle H \Delta \hat{P} \rangle}{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle \langle \hat{P} \rangle} ; \quad \frac{1}{M_Y} = \frac{\langle H (\Delta \hat{P})^2 \rangle - \langle H \rangle \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle}{\langle (\Delta \hat{P})^4 \rangle - \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle^2} \quad (4.24)$$

Pour une norme gaussienne, nous avons  $\langle (\Delta \hat{P})^4 \rangle = 3 \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle^2$  et par conséquent

$$\frac{1}{M_Y} = \frac{\langle (H - \langle H \rangle) (\Delta \hat{P})^2 \rangle}{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} \quad (4.25)$$

Le paramètre de masse  $M_Y$  est souvent appelé masse de Yoccoz tandis que  $M_{sc} (v = 0)$  est connu sous le nom de Thouless-Valatin. On peut montrer que  $M_{sc}$  est égal à la masse totale du système, ce qui n'est pas le cas pour  $M_Y$ . L'énergie projetée à l'ordre deux s'écrit maintenant :

$$E_{proj}^P(2) = \langle H \rangle - \frac{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle}{2 M_Y} + h_1(2) (P - \langle \hat{P} \rangle) + \frac{1}{2 M_Y} (P - \langle \hat{P} \rangle)^2 \quad (4.26)$$

et le problème variationnel devient

$$\frac{\delta}{\delta \Psi} \left[ \langle H \rangle - \frac{\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle}{2 M_Y} \right] - v \frac{\delta}{\delta \Psi} \langle \hat{P} \rangle = 0 \quad (4.27)$$

avec

$$\langle \hat{P} \rangle = P$$

Nous voyons que l'énergie est abaissée par rapport au cas  $M = 1$  par un terme qui représente quelque chose comme la fluctuation de l'énergie cinétique due au mouvement du point de zéro. Cependant  $M_Y$  n'est pas la masse physique, ce qui est un désavantage de la théorie où on

travaille avec des déterminants de Slater comme fonction d'ondes de base. Si on avait travaillé avec un fondamental contenant des corrélations RPA, nous aurions obtenu la vraie masse à la place de  $M_Y$ . Quelques éléments de la restauration de symétrie en utilisant la théorie RPA seront abordés dans le prochain cours.

Pour se familiariser avec le formalisme, il est vivement conseillé au lecteur de pousser le calcul jusqu'au bout en utilisant notre modèle où tous les calculs peuvent se faire analytiquement et où l'ordre  $M = 2$  contient le résultat exact. Notamment, on vérifiera les relations suivantes :

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{\hbar^2}{4m_1 b_1^2} + \frac{\hbar^2}{4m_2 b_2^2} + \frac{C}{2} (b_1^2 + b_2^2) \quad (4.28)$$

$$\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) ; \quad h_1^{(2)} = v \quad (4.29)$$

$$\langle (H - \langle H \rangle) (\Delta \hat{P})^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_1 b_1^4} + \frac{1}{m_2 b_2^4} \right) + C \quad (4.30)$$

Pour faciliter le calcul, nous posons  $m_1 = m_2 = m_0$ ;  $b_1 = b_2 = b_0$  et la variation de l'énergie par rapport à  $b_0$  donne :

$$b_0^2 = b^2 / 2 \quad (4.31)$$

où  $b$  est le paramètre de l'oscillateur dans le cas exact (3.5).

L'énergie projetée est égale à l'énergie exacte, ce qui n'est pas étonnant en observant que la fonction d'ondes projetée (4.1) est donnée par

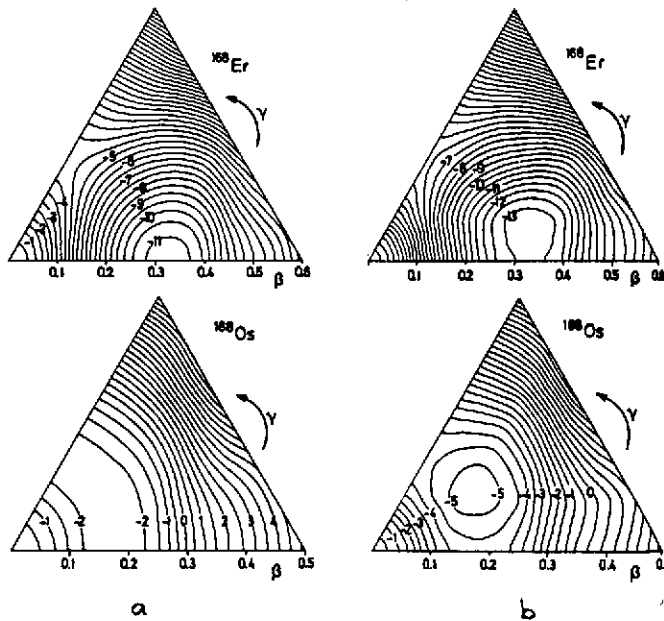
$$\Psi_P(R, s) \propto e^{iPR} e^{-\frac{s^2}{4b_0^2}} \quad (4.32)$$

Avec la relation (4.31) ceci redonne bien la fonction d'ondes exacte (3.5).

A la fin de ce chapitre, nous voudrions présenter quelques résultats tirés de calculs réalistes pour faire une démonstration de l'importance que peuvent prendre les fluctuations quantiques dans certains cas.

Sur la figure 8, sont montrées des surfaces d'énergie dans le plan  $\beta - \gamma$  pour les noyaux déformés  $^{168}\text{Er}$  et  $^{188}\text{Os}$  (Hayashi, Hara, Ring [5]). A gauche, se trouvent les surfaces sans projection tandis qu'à droite une projection à trois dimensions a été effectuée. Nous voyons que la projection a peu d'effet dans le cas où déjà sans projection un minimum prononcé

Fig. 8 Surfaces d'énergies sans (a) et avec (b) projection [5].



existe ( $^{168}\text{Er}$ ). Par contre, dans le cas d'une surface plate comme pour  $^{188}\text{Os}$  la projection a un effet dramatique; elle creuse un minimum prononcé dans le plan  $\beta - \gamma$  ce qui démontre clairement la triaxialité de ce noyau. Il est compréhensible que la projection a plus d'effet dans le cas d'une surface plate par apport à une surface avec un minimum bien prononcé car les fluctuations quantiques sont bien plus importantes dans une surface douce.

Un deuxième exemple concerne la transition de phases superfluide  $\leftrightarrow$  fluide normal en fonction de la fréquence de rotation. Il est bien connu qu'il existe dans les systèmes infinis des transitions de ce type. Par exemple, le gap qui est le paramètre d'ordre représentant la superfluidité disparaît brutalement à une valeur critique d'un champ magnétique. Le même résultat est obtenu en théorie du cranking, qui justement, comme nous l'avons vu, imite ce qui se passe dans les systèmes macroscopiques, pour les noyaux en fonction de la fréquence de rotation. Seulement lorsqu'on tient compte des fluctuations quantiques c'est à dire lorsqu'on effectue un calcul projeté la transition de phase peut être totalement lavée. Ceci est démontré sur la figure 9 où le gap est tracé en fonction du spin pour  $^{168}\text{Yb}$  avec et sans projection.

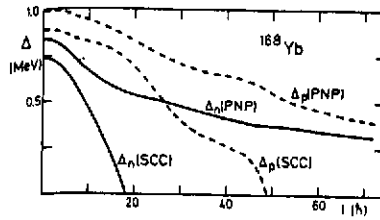


Fig. 9 . Le gap  $\Delta$  en fonction du spin pour protons (p ----) et neutrons (n —) dans le modèle du cranking self-consistant (SCC) et de la projection avant variation (PNP) [6]

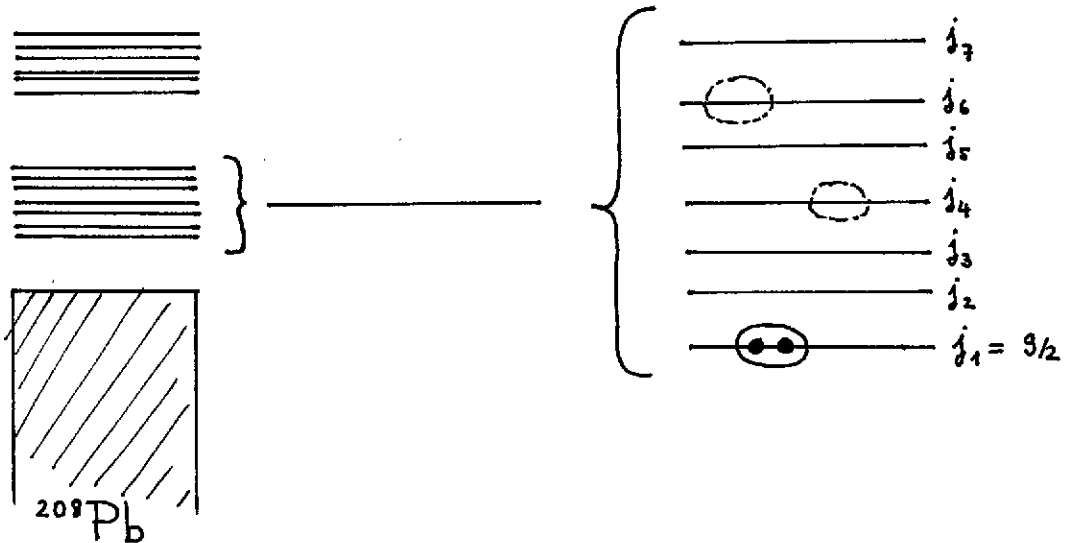
Concluant ce chapitre, nous pouvons dire qu'en partant d'une théorie projetée avant la variation, nous avons dérivé le modèle du cranking et trouvé qu'il est d'autant plus valable que les fluctuations de l'opérateur de symétrie ( $\hat{P}$ ,  $\hat{J}^2$ ,  $\hat{N}$ ,  $\gamma^5 \vec{c}$ , etc) sont grandes. Nous avons également trouvé que la projection c'est à dire les effets quantiques dus à la petitesse des noyaux peuvent être extrêmement importants au voisinage des transitions de phases.

#### 5. SUPERFLUIDITE ET BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE. RESTAURATION DE LA SYMETRIE DANS LE CAS DYNAMIQUE . MODE DE GOLDSTONE.

Avant d'aborder les questions de brisure de symétrie dans le cas dynamique, nous voulons traiter un autre cas de brisure de symétrie fréquemment rencontré en physique nucléaire : c'est le cas de la brisure spontanée de la symétrie du nombre de particules ( $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$ ). Il s'agit de la superfluidité dans les noyaux mais aussi dans  $\text{He}^3$  liquide ou de la superconductivité dans les solides, etc. La brisure de symétrie du bon nombre de particules pose habituellement quelques problèmes de compréhension. Pourtant il y a une très grande analogie avec le cas de la brisure de symétrie de translation ce que nous venons d'expliquer en détail et qui ne devrait plus poser de problèmes. Nous commençons par expliquer la superfluidité dans les noyaux. Nous

avons vu que la transition gaz liquide est engendrée par des ondes de densité. Les ondes de densité sont des corrélations particule-trou; rappelez-vous que l'opérateur de densité est  $\rho = a^\dagger a$ ; ce sont ces corrélations là qui deviennent de plus en plus fortes pendant la transition et qui créent finalement le paquet d'ondes permanent qui brise la symétrie. Dans le cas de la superfluidité c'est un autre type de corrélations qui est responsable pour la brisure de symétrie : ce sont les corrélations particule-particule. Plus précisément, dans les noyaux, ce sont les corrélations proton-proton ou neutron-neutron dans les couches ouvertes. En effet, dans les noyaux, à cause du milieu nucléaire, deux protons ou deux neutrons peuvent former un état lié, ce qui n'est pas le cas pour deux neutrons (protons) libres. En fait, cet état lié a le spin zéro. Commençons par prendre un exemple concret et remplissons la couche ouverte au-dessus du  $^{208}\text{Pb}$  avec des paires de neutrons, voir figure 10.

Fig. 10. Distribution d'une paire de neutrons dans la couche au-dessus du  $^{208}\text{Pb}$   
(schématique)



La paire peut occuper toutes les sous-couches (en pointillés) mais généralement la corrélation entre deux neutrons qui se trouvent dans différentes sous-couches est plus faible. L'opérateur de création d'une paire peut ainsi s'écrire comme

$$A_{00}^+ = \sum_{j\tilde{m}} z_j a_{j\tilde{m}}^+ a_{j\tilde{m}}^+ \quad (5.1)$$

où les indices 00 indiquent le spin  $I = 0$ ,  $M = 0$ , et  $\tilde{m}$  est l'état renversé par rapport au temps (nous supposons que les éléments de base de la théorie BCS sont connus et nous sommes donc relativement brefs ici en ce qui concerne le formalisme, insistant surtout sur les aspects physiques). Si les coefficients  $z_j$  ne diffèrent pas beaucoup l'un de l'autre et si la dégénérescence de la couche est grande, l'opérateur  $A^+$  est presque un boson :

$$[A^+, A] \simeq 1 \quad (5.2)$$

Continuons à mettre des paires dans la couche (voir figure 11).

La fonction d'ondes est approximativement donnée par une répétition des opérateurs  $A^+$  :

$$|^{208}\text{Pb} + 14n\rangle \propto A^+ A^+ A^+ A^+ A^+ A^+ A^+ |^{208}\rangle \quad (5.3)$$

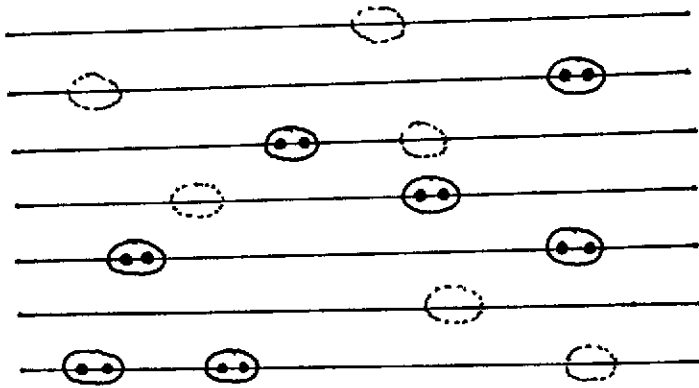


Fig. 11. Distribution de plusieurs paires de neutrons dans la couche.

où les coefficients  $z_j$  pourraient être déterminés par un calcul variationnel et  $|208\rangle$  est le déterminant de Slater correspondant à  $^{208}\text{Pb}$ . Avec (5.2) on peut appeler cela un condensat de Bose. C'est une fonction qui possède un bon nombre de particules mais une petite réflexion montre que c'est une fonction hautement corréllée et que le calcul variationnel correspondant n'est pas du tout trivial. En fait (5.3) peut être considéré comme la composante avec un nombre de particules bien déterminé d'un paquet d'ondes qui est donné par une superposition d'états avec un nombre de particules différent :

$$\begin{aligned}
 |BCS\rangle &\propto |0\rangle + A^\dagger |0\rangle + \frac{1}{2!} A^\dagger A^\dagger |0\rangle + \frac{1}{3!} A^\dagger A^\dagger A^\dagger |0\rangle + \dots \\
 &= e^{A^\dagger} |0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

$$\propto \prod_{j,m>0} (u_j + v_j a_{jm}^\dagger a_{j\bar{m}}^\dagger) |0\rangle$$

où  $|0\rangle$  est le "cœur" du noyau, c'est à dire  $|208\rangle$  de l'exemple du haut et  $z_j = v_j/u_j$ . Cet état est l'analogie au paquet d'ondes (2.3) que nous avons considéré dans le cas de la brisure de translation. Dans un solide, où dans un sous domaine le nombre de particules fluctue, ce paquet d'ondes en nombre de particules peut être énergétiquement favorisé (comme la fluctuation de densité dans l'exemple de translation) et en conséquence envahir des domaines macroscopiques, à savoir tout le solide : c'est la transition à la superfluidité. A l'incertitude du nombre de particules dans la fonction d'ondes (5.4) on peut formellement associer une incertitude dans une variable conjuguée qu'on appelle habituellement l'angle de jauge  $\varphi$ . Le nombre de particules correspond ici à l'impulsion totale du cas de la translation et l'opérateur  $\hat{N}$  du nombre de particules correspond à l'opérateur de l'impulsion totale :

$$[N, H] = 0; \quad [\hat{\varphi}, H] = 0;
 \tag{5.5}$$



Comme la brisure de la symétrie de translation se traduit en un paquet d'ondes en R (c'est-à-dire  $\delta(R)$  pour  $A \rightarrow \infty$ ) ici la brisure du bon nombre de particules se traduit en un paquet d'ondes en  $\varphi$  (c'est à dire  $\delta(\varphi)$  pour  $A \rightarrow \infty$ ). Pour voir cela facilement et explicitement, simplifions encore notre modèle de la figure 10 et considérons le cas où toutes les sous-couches dégénèrent en une seule couche (modèle de la séniorité [3]). A ce moment, nous avons :

$$\begin{aligned} |BCS(\varphi)\rangle &= \prod_{m>0} (|u| + |v| e^{i\varphi} a_m^+ a_m^+) |0\rangle \\ &= e^{i\varphi \hat{N}/2} |BCS(0)\rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

ce qui est à voir en analogie avec le déterminant de Slater centré autour de la position

$$\begin{aligned} \bar{R} \text{ (4.1) : } \quad \psi_{\bar{R}}^{HF}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) &= A \prod_i \varphi_i(\vec{r}_i + \bar{R}) \\ &= e^{i\bar{R} \hat{P}} \psi_{\bar{R}=0}^{HF}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'équation (5.6) nous montre aussi que l'opérateur  $\hat{N}$  peut être représenté par :

$$\frac{\hat{N}}{2} = i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \text{const.} \quad (5.8)$$

Le paquet d'ondes (5.4) avec un écart de deux particules entre les différentes composantes ressemble formellement beaucoup au cas de la rotation à une dimension d'un noyau pair où le paquet d'ondes serait constitué d'états de la bande de rotation du fondamental dont les spins  $I = 0, 2, 4, \dots$  sont écartés de deux unités et c'est pour cela qu'on appelle  $|BCS\rangle$  de (5.4) aussi un état qui "tourne" avec une fréquence de "rotation"

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{dE}{dN} = 2\lambda \quad (5.9)$$

dans l'espace de jauge ( $\lambda$  est le potentiel chimique et E l'énergie correspondant à (5.4), voir plus loin).

Pour l'instant, nous n'avons pas parlé du caractère très spécial du paquet d'ondes (5.4) qui est dû au choix approximatif des fonctions de base (en fait tout le raisonnement du haut aurait pu se faire en employant des fondamentaux exacts comme fonctions de base). En effet, il s'agit de nouveau d'un déterminant de Slater (approximation toujours très valable pour des systèmes fermioniques) avec les propriétés suivantes

$$\alpha_k |BCS\rangle = 0$$

$$\alpha_k^+ = u_k a_k^+ - v_k a_k^- ; \quad \alpha_k = u_k a_k - v_k a_k^+ ; \quad u_k^2 + v_k^2 = 1 ; \quad (5.10)$$

$$|BCS\rangle \propto \prod_{jm} \alpha_k |0\rangle \quad (5.11)$$

Le lecteur a évidemment reconnu le formalisme BCS bien connu de quasiparticules (5.10) et nous conseillons de vérifier explicitement que  $|BCS\rangle$  peut s'écrire sous la forme (5.11). Nous invitons également à vérifier que la distribution en  $\psi$  correspondant à (5.6) tend vers la fonction de Dirac  $\delta(\psi)$  lorsque la dégénérescence de la couche tend vers l'infini et elle est à moitié remplie, par exemple.

Pour progresser dans l'étude de la transition à l'état superfluide introduisons l'interaction d'appariement :

$$\sum_{kk'} \bar{v}_{kk', k'k} a_k^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_k \simeq -G \sum_{kk'} a_k^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_k \quad (5.12)$$

ce qui est approximativement valable lorsqu'on regarde une seule couche comme indiqué sur la figure 10. L'Hamiltonien dit de l'appariement s'écrit alors :

$$H = \sum_{jm} \epsilon_j a_{jm}^+ a_{jm} - G \sum_{jj'} P_j^+ P_{j'} \quad (5.13)$$

$$P_j^+ = \sum_{m>0} a_{jm}^+ a_{j\bar{m}}^+$$

Le calcul variationnel en utilisant (5.4) et en fixant le nombre de particules par un paramètre de Lagrange nous amène à [3] :

$$\delta \langle BCS | H - \lambda \hat{N} | BCS \rangle = 0 \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_j - \lambda & \Delta \\ \Delta & -(\epsilon_j - \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = E_j \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

avec le "paramètre d'ordre" (le gap)

$$\Delta = G \sum_{jm>0} u_j v_j \quad (5.15)$$

La solution est donnée par :

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{e_k - \lambda}{E_k} \right] ; \quad u_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{e_k - \lambda}{E_k} \right] \quad (5.16a)$$

$$E_k = \sqrt{(e_k - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (5.16b)$$

$$\Delta_0 = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta_0}{E_k} \quad (5.16c)$$

Les équations (5.14) - (5.16) nous indiquent que  $|BCS\rangle$  ne dépend en fait que du seul paramètre  $\Delta$ . Il aurait donc suffi de varier

$$E'(\Delta) = \langle BCS(\Delta) | H - \lambda \hat{N} | BCS(\Delta) \rangle \quad (5.17)$$

par rapport à  $\Delta$  où le potentiel chimique est fixé par la condition

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = A \quad (5.18)$$

Le minimum de  $E'(\Delta)$  détermine la solution  $\Delta = \Delta_0$ . La fonction  $E'(\Delta)$  peut avoir deux comportements différents selon que la valeur de  $G$  est en-dessous ou en-dessus d'une certaine valeur critique (figure 12). (Tout ceci est bien expliqué dans les livres [3,4], voir aussi l'exemple plus loin)

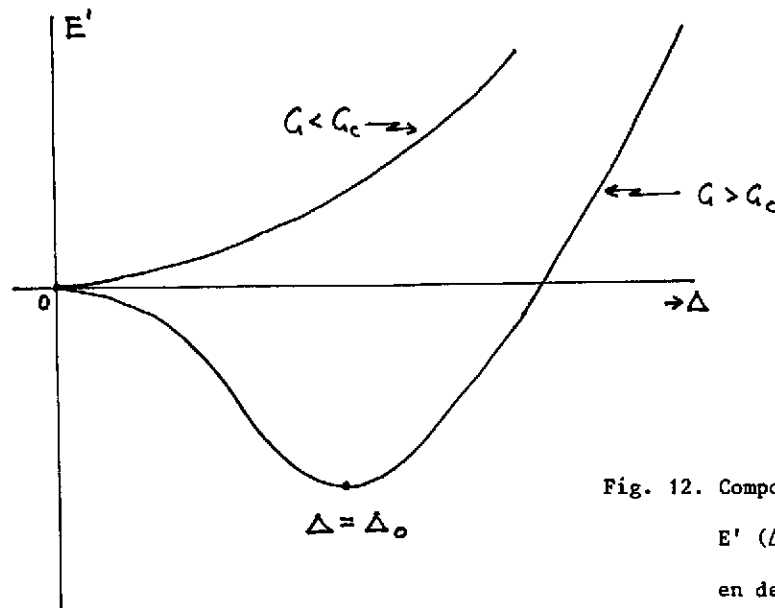


Fig. 12. Comportement qualitatif de  $E'(\Delta)$  pour  $G$  en dessus et en dessous de la valeur critique.

Pour  $G < G_c$ , nous avons :

$$\Delta = 0 ; \quad v_k^2 = 1 ; \quad u_k^2 = 0 \quad (5.19)$$

$$|BCS\rangle \Rightarrow \prod_i a_i^\dagger |0\rangle$$

c'est à dire que la solution avec la symétrie conservée minimise l'énergie.

Dans le cas  $G > G_c$  la solution  $\Delta = 0$  est instable et un nouveau minimum à  $\Delta = \Delta_0$  se développe : c'est la solution avec symétrie spontanément brisée. On vérifie aisément que le "paramètre d'ordre"  $\Delta$  peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\Delta = G \langle BCS | \sum_k a_k^\dagger a_k | BCS \rangle \quad (5.20)$$

ce qui veut dire que la valeur moyenne d'une paire prend une valeur non nulle pour  $G > G_c$  ce qui n'est évidemment pas le cas pour la solution "non déformée".

Nous voulons à nouveau insister sur le fait que la transition de phases à la superfluidité ( $\Delta \neq 0$ ) est tout à fait analogue à la brisure de symétrie de translation ou de rotation, etc. Les paramètres d'ordre correspondants sont donnés par (pour la rotation)

$$q = \langle HF(\epsilon) | \hat{Q} | HF(\epsilon) \rangle \quad (5.21)$$

où  $|HF(\epsilon)\rangle$  est la solution HF à la déformation  $\epsilon$  et  $\hat{Q}$  est l'opérateur quadrupolaire. Pour la brisure de la symétrie de translation une définition possible d'un paramètre d'ordre serait :

$$d = \langle HF(\epsilon) | \left( \sum_{k,k'} a_{k'}^\dagger a_k - \sum_{k'} a_{k'}^\dagger a_{k'} \right) | HF(\epsilon) \rangle \quad (5.22)$$

où les indices  $k, k'$  réfèrent à la base des ondes planes; il est de nouveau évident que le paramètre d'ordre  $d$  est nul lorsque  $|HF(1)\rangle$  ( $1 = \text{localisation}$ ) est complètement délocalisé c'est à dire invariant par translation ( $|HF\rangle$  est alors construit avec des ondes planes) et que  $d \neq 0$  pour un déterminant du modèle en couches, par exemple. (Le fait que nous sommes un peu hésitants à donner une forme bien définie du paramètre d'ordre dans le cas de la translation est dû à ce que en physique nucléaire, la transition de phases qui est sous-jacente à la brisure de symétrie de translation est très peu discutée et plusieurs définitions, déviant légèrement les unes des autres, sont possibles pour le paramètre d'ordre).

#### Considérations dynamiques

Il est clair que le paquet d'ondes qui brise la symétrie et dont nous avons maintenant parlé si souvent peut aussi dépendre du temps lorsqu'il ne se trouve pas à l'équilibre. Pensons

à la gouttelette : outre le mouvement trivial de la translation du centre de masse, la gouttelette qui dépend de toutes les coordonnées correspondant aux particules qui la constituent, peut par exemple vibrer de toutes les façons possibles. Comme la gouttelette dépend des  $3A$  coordonnées des  $A$  particules qui la composent, une description dynamique va nécessairement inclure toutes les formes de mouvement possibles. Surtout elle va inclure aussi le mouvement spécial qui correspond à une simple translation du paquet d'ondes. Une bonne théorie de la dynamique doit avoir comme réponse une description correcte du mouvement collectif qui correspond à l'opérateur de symétrie. Par exemple, il est clair que dans le cas de la brisure de symétrie de la translation une branche du spectre d'excitation de la gouttelette doit être donnée par  $P^2/2M$  où  $P$  est l'impulsion totale et  $M$  la masse totale de la gouttelette, ce qui correspond à l'énergie cinétique du mouvement uniforme de la gouttelette.

Dans le cas où les surfaces d'énergie, comme celle de la figure 12 (qui peut être prise comme représentatif pour tous les cas de figures de brisure spontanée de symétrie) montrent un minimum fortement creusé l'approximation quadratique pour des mouvements de petites amplitudes est valable. En fait, pour la description de la dynamique (quantifiée) la figure 12 n'est pas complète. Généralement, le paramètre d'ordre peut être complexe (voir aussi eq. (5.6)) :

$$\Delta = |\Delta| e^{i\varphi} \tag{5.23}$$

Seulement on constate que l'énergie  $E'$  (5.17) ne dépend que de  $|\Delta|^2$  même pour une transformation de Bogoliubov où les coefficients  $u, v$  peuvent être complexes. C'est pour cela que d'habitude on pose  $\varphi = 0$  et le degré de liberté qui est représenté par la phase n'entre plus en jeu. Par contre, pour les considérations de la dynamique, cette omission n'est plus possible et il est important de considérer toute la surface  $E'(|\Delta|, \varphi)$ . Comme  $E'$  en fait ne dépend pas de  $\varphi$  il suffit de pivoter la figure 12 autour de l'axe  $E'$  pour créer la surface bidimensionnelle. Ceci nous amène au fameux "chapeau mexicain" représenté sur la figure 13

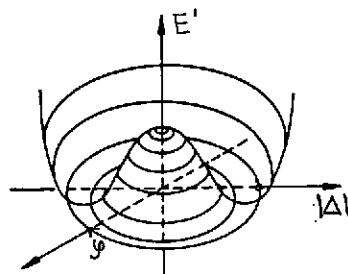


Fig. 13. Surface d'énergie bidimensionnelle pour un système avec symétrie continuellement brisée.

L'angle  $\psi$  sur la figure 13 est représentatif pour la position du paquet d'ondes (c'est à dire centre de masse R, les angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ , l'angle de jauge  $\psi$  etc). Une analyse harmonique autour du minimum donne les fréquences propres habituelles :

$$\omega_i = \left( \frac{C_i}{B_i} \right)^{1/2} ; \quad C_1 = \left. \frac{\partial^2 E'}{\partial |\Delta|^2} \right|_{\Delta = \Delta_0}$$

$$C_2 = \left. \frac{\partial^2 E'}{\partial \varphi^2} \right|_{\Delta = \Delta_0} \quad (5.24)$$

Sans connaître le paramètre de masse, nous savons que  $\omega_2 = 0$  parce qu'il n'y a pas de force de rappel dans la direction qui correspond à un déplacement collectif du paquet d'ondes. Cette excitation particulière est appelée mode de Goldstone.

Nous allons par la suite traiter ce mode en détail. Remarquons d'abord que la situation présentée en figure 13 est caractéristique pour une symétrie continuellement brisée. Il y a aussi des cas, comme par exemple pour la parité, où la symétrie est spontanément brisée d'une manière discrète (paire et impaire pour la parité). La surface d'énergie correspondante développe alors deux minima discrets tels que c'est montré sur la figure 14.

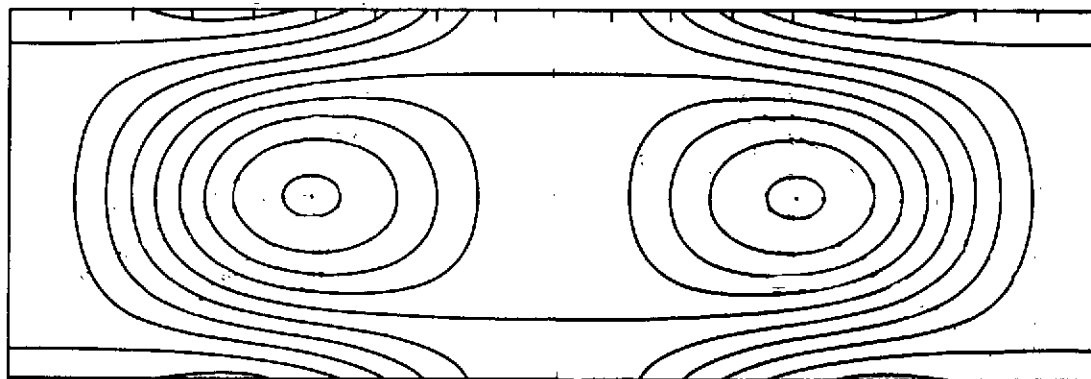


Fig. 14. Surface d'énergie dans le cas d'une brisure de symétrie discrète.

Il y a en effet des spéculations selon lesquelles les brisures de parités qu'on trouve dans la nature (expérience de Mme Wu, voir cours de P. Depommier) seraient aussi des brisures spontanées de symétrie analogues à celles qu'on vient de discuter. Les brisures discrètes de symétries ne sont pas accompagnées d'un mode de Goldstone; ceci se manifeste uniquement dans les cas où l'analogue classique de l'opérateur de symétrie permet un mouvement uniforme. Nous donnons quelques exemples ici :

$$\begin{array}{cccc}
 [h^{HF}, \hat{p}] \neq 0 & [h^{HF}, \hat{J}_z] \neq 0 & [h^{BCS}, \hat{N}] \neq 0 & [h^D, \gamma^5 \vec{c}] \neq 0 \\
 \text{translation} & \text{rotation} & \text{rotation des paires} & \text{pion}
 \end{array} \quad (5.25)$$

Les sous-titres de (5.25) donnent la désignation du mode (collectif) qui représente le mode de Goldstone, au-dessus sont indiqués les champs moyens qui brisent les symétries et les opérateurs de symétrie correspondants;  $h^D$  signifie ici un Hamiltonien de Dirac qui brise la symétrie chirale dont nous allons encore parler un peu plus loin (voir aussi le cours de P.A.M. Guichon) Le mode de Goldstone correspondant est le pion qui idéalement aurait la masse nulle comme tous les autres modes de Goldstone. Dans un effort de jeter un pont entre le langage des physiciens des particules élémentaires et celui des physiciens nucléaires, notons que  $h^D$  a, à la relativité près, la même structure que l'Hamiltonien BCS

$$\begin{pmatrix} e_a - \lambda & \Delta \\ \Delta & -(e_a - \lambda) \end{pmatrix} \rightarrow E_a = \sqrt{(e_a - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (5.26)$$

$$\simeq \Delta$$

et que dans  $h^D$  figure un terme analogue au  $\Delta$  représentant la masse constituante des quarks (la masse des quarks dans le Lagrangien du départ est nulle, ou quasiment nulle). On dit que la brisure spontanée de la chiralité a créé une masse ( $\Delta \leftrightarrow m$ ) pour les quarks; nous allons y revenir brièvement dans la description du modèle de Nambu-Jona-Lasinio.

Essayons maintenant de concrétiser par des formules ce que nous venons de décrire avec des mots. Lorsque la symétrie est spontanément brisée les équations Hartree-Fock dépendant du temps restent autant une approximation valable pour décrire la dynamique des systèmes fermioniques que lorsqu'il s'agit d'un système (infini par exemple) sans brisure de symétrie. Pour un noyau (ou mieux encore, pour une gouttelette macroscopique de  $He^3$ ) nous avons donc (dans une base qui brise explicitement au moins la symétrie de translation) pour l'opérateur de densité :

$$i \dot{\rho}(t) = [h^{HF}(t), \rho(t)] \quad (5.27)$$

Pour l'analyse harmonique dont nous avons parlé plus haut, il suffit de linéariser cette équation :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad \text{avec} \quad [h_0^{HF}, \rho_0] = 0 \quad (5.28)$$

La densité  $\rho_0$  correspond donc à la solution H.F. du problème statique. L'équation (5.27) devient :

$$i\dot{\rho}_1 = [h_0^{HF}, \rho_1] + [h_1, \rho_0]; \quad h_1 = \left. \frac{\delta h^{HF}}{\delta \rho} \right|_0 \cdot \rho_1 \quad (5.29)$$

Une analyse de Fourier :  $\rho_1(t) = \rho_1 e^{i\Omega t} + \rho_1^\dagger e^{-i\Omega t}$  nous amène aux équations bien connues [3,4] de RPA :

$$-\Omega \rho_1 = [h_0^{HF}, \rho_1] + \left[ \left. \frac{\delta h^{HF}}{\delta \rho} \right|_0, \rho_1, \rho_0 \right] \quad (\text{RPA}) \quad (5.30)$$

Comme  $\rho_0$  correspond à une densité qui brise au moins la symétrie de translation (une situation analogue aux figures 12 et 13), nous devrions retrouver le mode de Goldstone qui correspond à la translation. Pour prouver que c'est effectivement le cas, nous considérons la densité déplacée :

$$\tilde{\rho} = e^{i q \hat{P}} \rho_0 e^{-i q \hat{P}} \quad (5.31)$$

(Rappelons, voir les remarques dans le chapitre 3 que (5.31) agit uniquement sur les coordonnées et ne représentant donc pas une transformation de Galilée complète; c'est un déplacement sans donner de la vitesse). Les équations de H.F. peuvent alors être transformées de la manière suivante :

$$e^{i q \hat{P}} \left[ h_0^{HF} e^{-i q \hat{P}} e^{i q \hat{P}} \rho_0 - \rho_0 e^{-i q \hat{P}} e^{i q \hat{P}} h_0^{HF} \right] \cdot e^{-i q \hat{P}} = 0 \quad (5.32)$$

Il est facile de se convaincre que, lorsqu'on a  $[H, \hat{P}] = 0$ , le champ moyen et donc l'équation H.F. se transforme comme ceci :

$$e^{i q \hat{P}} h^{HF}[\rho_0] e^{-i q \hat{P}} = h^{HF}[\tilde{\rho}] \rightarrow [h^{HF}[\tilde{\rho}], \tilde{\rho}] = 0. \quad (5.33)$$

Nous avons donc le résultat suivant (qui est presque évident) que les équations de H.F. statiques sont valables à n'importe quel point au fond de la vallée (de la figure 13). Effectuons une translation infinitésimale :



$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho_1 \equiv \rho_0 + i\eta [\hat{P}, \rho_0] \quad (5.34)$$

L'équation (5.33) s'écrit alors :

$$[h^{HF}[\rho_0], \rho_1] + \left[ \frac{\delta h^{HF}}{\delta \tilde{\rho}} \Big|_{\tilde{\rho}=\rho_0} \cdot \rho_1, \rho_0 \right] = 0 \quad (5.35)$$

sous la condition que  $[h^{HF}, \rho_0] = 0$ .

L'équation (5.35) est égale à (5.30) pour  $\Omega = 0$  et nous avons donc bien le résultat désiré que, sous condition qu'on travaille dans la base H.F., les équations RPA dégagent un mode de Goldstone à l'énergie nulle qui représente un déplacement infinitésimal de la position de la gouttelette. Sans rentrer dans plus de détails, nous pouvons écrire l'eq. (5.35) avec la définition de  $\rho_1$  (5.34) de la manière habituelle en RPA [3] :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ -P^* \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

où P représente les éléments particule-trou de l'opérateur de symétrie (l'impulsion totale). Comme P est un vecteur ce mode de Goldstone que les physiciens nucléaires appellent aussi mode spurieux ne se manifeste que dans la voie des spins  $I = 1, T = 0$ . Rappelons de nouveau que le mode de Goldstone (5.36) n'apparaît que lorsque la symétrie est effectivement et spontanément brisée; à ce moment là, toutes les considérations que nous venons de faire pour la translation se font de la même manière dans les autres cas (de l'éq. (5.25) par exemple).

Pour acquérir encore davantage de familiarité avec la physique des brisures spontanées de symétries, je propose d'étudier dans le cas de la superfluidité un modèle exactement soluble: c'est le modèle symétrique à deux niveaux représenté sur la figure 15.

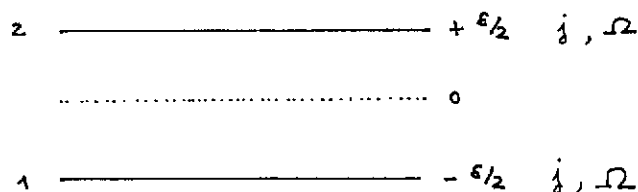


Fig. 15. Modèle symétrique à deux niveaux avec  $N = \Omega = 2j + 1$  particules

Nous supposons que nous avons  $N = 2j+1$  neutrons dans le système c'est à dire en approximation HF la couche inférieure est pleine. Avec la force d'appariement pure, le Hamiltonien (5.13) se réduit à :

$$H = \sum_{\substack{j=1,2 \\ m}} e_j a_{jm}^{\dagger} a_{jm} - G \sum_{i,j=1,2} P_i^{\dagger} P_j \quad (5.37)$$

D'abord, nous nous plaçons dans le cas  $G < G_c$  c'est à dire le minimum (figure 12) est à  $\Delta = 0$ . L'analyse harmonique consiste à étudier les équations RPA dans la base non "déformée". C'est une RPA particule-particule (pp) [3,4] dont la fonction d'essai s'écrit :

$$|N+2\rangle = (X P_2^{\dagger} |N\rangle - Y P_1^{\dagger}) |N\rangle \quad (5.38)$$

et l'équation RPA devient :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} A &= \varepsilon - \frac{(N-1)G}{2} \\ B &= -\frac{(N-1)G}{2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

La signification des valeurs propres de la RPA pp est la suivante [3,4]

$$\Omega_{\pm\mu} = \pm \left( \varepsilon_{\mu}^{N\pm 2} - E_0^N \right); \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

Dans notre modèle simple, il n'y a que la possibilité  $\mu = 0$  et à cause de la symétrie du modèle, nous avons :

$$\Omega_{\pm 0} = \pm \varepsilon \sqrt{1 - \chi}; \quad \chi = \frac{(N-1)G}{\varepsilon} \quad (5.41)$$

La dépendance des valeurs propres en fonction de l'intensité effective  $\chi$  de la force est tracée en figure 16; elles s'annulent à la valeur  $\chi = \chi_c = 1$  c'est à dire

$$G_c = \frac{\varepsilon}{N-1} \quad (5.42)$$

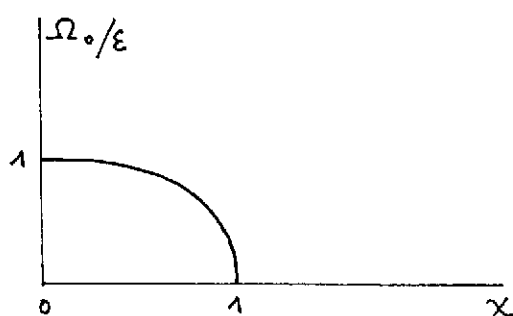


Fig. 16. Dépendance de la solution RPA en fonction de l'intensité de la force dans la base "sphérique".

et c'est précisément la même valeur en-dessous de laquelle il n'y a pas de solution superfluide comme le montre un petit calcul en employant l'équation du gap correspondant à notre modèle. Le point  $\chi = 1$  est la valeur où l'attraction, c'est à dire l'énergie de liaison entre les deux particules rajoutées au fondamental  $|N\rangle$ , compense exactement l'augmentation de l'énergie qui est donnée par l'addition au fondamental de deux particules libres ( $2 \cdot \epsilon / 2 = \epsilon$ ). A ce moment, deux fondamentaux voisins deviennent donc dégénérés :

$$E_0^N = E_0^{N+2} ; \quad G = G_c \quad (5.43)$$

Dans un espace où on inclut le nombre de particules comme degré de liberté supplémentaire la suite des énergies des fondamentaux peut être considérée comme un spectre d'excitation. L'équation (5.43) nous dit alors qu'il peut y avoir une telle collectivité (un tel degré de corrélation) dans le premier état excité que son énergie devient dégénérée avec le fondamental : c'est le seuil de la transition de phase à la superfluidité . Ce scénario est à peu de chose près propre à toutes les transitions de phases qui correspondent à une brisure spontanée de symétrie : en fonction d'un paramètre physique un état excité devient de plus en plus corrélé (il devient de plus en plus "mou") jusqu'au point où son énergie sera dégénérée avec celle du fondamental. Si on suit ce processus sur la figure 12 en employant notre modèle on constate que la parabole pour  $G < G_c$  s'ouvre de plus en plus et qu'elle est complètement plate pour  $G = G_c$  et il devient clair qu'à ce moment l'énergie d'excitation est nulle car il n'y a plus de force de rappel. En outre, nous comprenons aussi que pour  $G > G_c$  les états excités c'est à dire ceux qui sont obtenus à partir d'un mouvement autour du nouvel équilibre  $\Delta = \Delta_0$  sont à calculer dans la base avec la symétrie brisée. Avant d'entamer explicitement ce calcul dans notre modèle, discutons quelques cas physiques qui sont analogues à la transition à la superfluidité.

Il est bien connu que dans les noyaux à couches ouvertes en ajoutant de plus en plus des neutrons et des protons, le premier état excité qui est généralement un  $2^+$ , c'est à dire une corrélation particule-trou (ph) descend de plus en plus en énergie pour passer par un minimum au milieu de la

couche, l'énergie d'oscillation est alors de l'ordre de 100 Kev, ce qui est une énergie d'excitation très faible sur l'échelle nucléaire. La situation est schématiquement représentée sur la figure 17. Le fait que le niveau  $2^+$  le plus bas ne devient pas dégénéré avec le fondamental tient

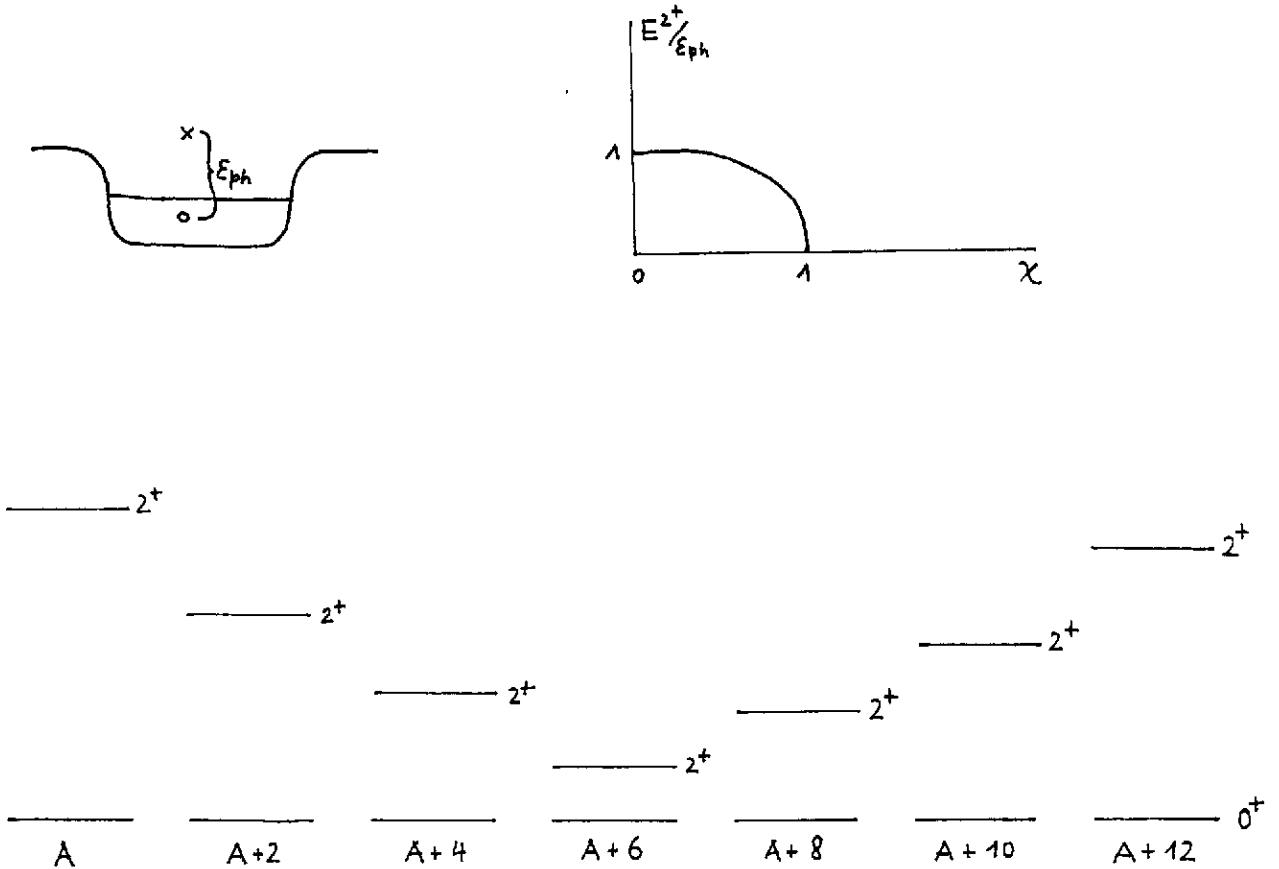


Fig. 17 . Position de la vibration quadrupolaire en fonction du taux de remplissage de la couche (schématique).

à ce qu'il s'agit d'un système fini et nous avons vu que les vraies transitions de phases se produisent uniquement pour des systèmes macroscopiques. Néanmoins, il est surprenant de voir à quel degré même pour un système aussi petit qu'un noyau la transition sphérique-déformé est réalisée.

Pour certaines discussions, il est utile de représenter l'équation RPA par des graphes de Feynman. Notamment, on peut réécrire la RPA sous forme d'une équation intégrale pour la fonction de Green ph. Cette équation est appelée équation de Bether-Salpeter [3, A.É] qui permet la réalisation graphique suivante :

$$\begin{array}{l}
 I=2^+ \\
 T=0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 p \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\
 \text{ph} \\
 h \leftarrow \leftarrow \leftarrow
 \end{array} \right. = \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} + \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \text{ph} \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array}$$

(5.44)



$$\begin{pmatrix} \gamma_{1m}^+ \\ \gamma_{1\tilde{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & -c_1 \\ c_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j_1 m}^+ \\ a_{j_1 \tilde{m}} \end{pmatrix}$$

$$s_i = \sin \phi_i / 2$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{2m}^+ \\ \gamma_{2\tilde{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j_2 m}^+ \\ a_{j_2 \tilde{m}} \end{pmatrix}$$

$$c_i = \cos \phi_i / 2$$

(5.47)

Ce choix de la matrice de transformation assure automatiquement la normalisation et l'unitarité.

L'inversion nous donne :

$$\begin{pmatrix} a_{j_1 m}^+ \\ a_{j_1 \tilde{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & c_1 \\ -c_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1m}^+ \\ \gamma_{1\tilde{m}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j_2 m}^+ \\ a_{j_2 \tilde{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{2m}^+ \\ \gamma_{2\tilde{m}} \end{pmatrix}$$

(5.48)

Il faut insérer cette transformation dans le Hamiltonien (5.37) et ordonner les opérateurs  $\gamma^+, \gamma$  en produit normal. C'est un calcul assez fastidieux. Cependant, la valeur du terme constant est obtenue assez facilement

$$\langle H' \rangle \equiv \langle \text{BCS} | H - \lambda \hat{N} | \text{BCS} \rangle =$$

(5.49)

$$= N \left( \frac{\epsilon}{2} - \lambda \right) s_2^2 - N \left( \frac{\epsilon}{2} + \lambda \right) c_1^2 - \frac{GN}{2} (c_1^4 + s_2^4) - \frac{N}{2} \frac{GN}{2} (s_1 c_1 + s_2 c_2)^2$$

La variation de cette expression par rapport à  $c_1$  et  $c_2$  nous donne deux équations dont nous pouvons prendre la différence et insérer le résultat dans la première équation; ceci montre que :

$$\phi_1 = \phi_2.$$

(5.50)

Le potentiel chimique est maintenant calculé facilement avec la condition du nombre de particules  $N = \langle \hat{N} \rangle$  :

$$\lambda = -G/2 \quad (5.51)$$

Après ces préliminaires, nous arrivons à l'expression de l'Hamiltonien transformé en quasiparticules

$$\begin{aligned} H' = & E_0^{\text{BCS}} - \lambda N \\ & + 2E_1 \mathcal{Y}_2 + 2E_2 \mathcal{Z}_2 \\ & - \frac{G}{2} s \left[ (N-1)c + 1 - \frac{\varepsilon - 2\lambda}{G} \right] (\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Z}_-) \\ & - \frac{G}{2} s \left[ -(N-1)c + 1 + \frac{\varepsilon + 2\lambda}{G} \right] (\mathcal{Y}_+ + \mathcal{Y}_-) \\ & - G \left[ s^2 \left( (\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Y}_+)^2 - \frac{1}{2} (\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Y}_+) \right) + \frac{1}{2} (1+c^2) (\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- + \mathcal{Y}_+ \mathcal{Y}_-) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} s^2 (\mathcal{Z}_+ \mathcal{Y}_- + \mathcal{Y}_+ \mathcal{Z}_-) \right] \\ & + G \left[ \frac{s^2}{4} (\mathcal{Z}_+^2 + \mathcal{Z}_-^2 + \mathcal{Y}_+^2 + \mathcal{Y}_-^2) + \frac{1}{2} (1+c^2) (\mathcal{Z}_+ \mathcal{Y}_+ + \mathcal{Z}_- \mathcal{Y}_-) \right] \\ & + G s c \left[ \mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_2 \mathcal{Z}_- - \mathcal{Y}_+ \mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_2 \mathcal{Y}_- + \mathcal{Y}_2 (\mathcal{Z}_+ + \mathcal{Z}_-) - \mathcal{Z}_2 (\mathcal{Y}_+ + \mathcal{Y}_-) \right] \end{aligned}$$

(5.52)

où nous avons introduit les abréviations suivantes

$$E_0^{\text{BCS}} = -\frac{G}{4} N(N+1) - N \frac{\varepsilon}{2} c \left( 1 - \frac{\chi}{2} c \right)$$

$$c = \cos \phi, \quad s = \sin \phi, \quad \chi = \frac{(N-1)G}{\varepsilon};$$

$$\mathcal{Y}_+ = \mathcal{Y}_-^+ = \sum_{m>0} \gamma_{1m}^+ \gamma_{1m}^+ ; \quad \mathcal{Y}_\mp = \frac{1}{2} \sum_m \gamma_{1m}^+ \gamma_{1m}$$

$$\mathcal{Y}_+ = \mathcal{Y}_-^+ = \sum_{m>0} \gamma_{2m}^+ \gamma_{2m}^+ ; \quad \mathcal{Y}_\pm = \frac{1}{2} \sum_m \gamma_{2m}^+ \gamma_{2m}$$

$$2E_1 = (\varepsilon - G)c + GNs^2 + \frac{G}{2}(1+c)^2 - \frac{G}{2}s^2$$

$$2E_2 = (\varepsilon + G)c + GNs^2 + \frac{G}{2}(1-c)^2 - \frac{G}{2}s^2$$

(5.53)

Dans (5.52) on reconnaît successivement [3] : l'énergie BCS, le terme  $H^{11}$ , les termes  $H^{20}$ ,  $H^{22}$ ,  $H^{40}$ ,  $H^{31}$ . Comme d'habitude, la solution BCS s'obtient en annulant le terme  $H^{20}$ . Ceci nous amène avec (5.51) à

$$\cos \phi_0 = \frac{1}{\chi} \quad (5.54)$$

A l'équilibre l'expression des énergies de quasiparticules se simplifie grandement :

$$E_1 = E_2 = \frac{GN}{2} \quad (5.55)$$

Montrons brièvement que ce résultat est en accord avec la définition habituelle :

$$E_1 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1^2 + \Delta^2} ; \quad E_2 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \Delta^2} \quad (5.56)$$

Le gap est donné par

$$\Delta = G \frac{N}{2} (s_1 c_1 + s_2 c_2) = \frac{GN}{2} \sin \phi \quad (5.57)$$

et les énergies H.F. (renormalisées par le terme  $v^4$ ) s'écrivent :

$$\tilde{\varepsilon}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} - \lambda - G c_1^2 ; \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon}{2} - \lambda - G s_2^2 \quad (5.58)$$



A l'équilibre (5.54) et avec (5.50, 5.51, 5.53) nous retrouvons bien le résultat (5.55).

Ceci termine la transcription de l'Hamiltonien en opérateurs de quasiparticules et nous pouvons commencer notre calcul RPA dans la base déformée. Comme les opérateurs de quasiparticules mélangent particules et trous, nous avons maintenant à la place de (5.38) un vecteur à quatre composantes :

$$|\widetilde{\text{RPA}}\rangle = (X_1 \mathcal{Y}_+ + X_2 \mathcal{Z}_+ - Y_1 \mathcal{Y}_- - Y_2 \mathcal{Z}_-) |0\rangle \quad (5.59)$$

Les opérateurs  $\mathcal{Y}_\pm, \mathcal{Z}_\pm$  n'interviennent pas parce qu'ils découplent du reste dans la matrice RPA comme on peut l'observer rapidement. La matrice RPA se calcule comme d'habitude [3] et nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{11} = a &= \frac{2}{N} \langle \text{BCS} | [\mathcal{Y}_-, [H', \mathcal{Y}_+]] | \text{BCS} \rangle = \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Z}_-, [H', \mathcal{Z}_+]] \rangle = A_{22} \\ &= NG - \frac{G}{2} s^2 - \frac{GN}{4} (1+c^2) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = a' &= \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Y}_-, [H', \mathcal{Z}_+]] \rangle = \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Z}_-, [H', \mathcal{Y}_+]] \rangle = A_{21} \\ &= -\frac{GN}{4} s^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} B_{11} = b &= \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Y}_-, [H', \mathcal{Y}_-]] \rangle = \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Z}_-, [H', \mathcal{Z}_-]] \rangle = B_{22} \\ &= -\frac{G}{2} s^2 (1 - \frac{N}{2}) \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} B_{12} = b' &= \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Y}_-, [H', \mathcal{Z}_-]] \rangle = \frac{2}{N} \langle [\mathcal{Z}_-, [H', \mathcal{Y}_-]] \rangle = B_{21} \\ &= \frac{GN}{4} (1+c^2) \end{aligned} \quad (5.63)$$

La matrice RPA s'écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} a & a' & b & b' \\ a' & a & b' & b \\ b & b' & a & a' \\ b' & b & a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -Y_1 \\ -Y_2 \end{pmatrix} ; \quad (5.64)$$

A cause de la propriété  $a + a' = b + b'$  et en additionnant dans le déterminant correspondant à (5.64) la deuxième ligne à la première et la quatrième à la troisième, nous voyons tout de suite que la RPA possède une valeur propre qui est nulle : c'est le mode de Goldstone. Nous obtenons donc le résultat attendu parce que nous avons travaillé dans la base self-consistante en annulant le terme  $H^{20}$ . Il est peut-être utile de remarquer que le résultat (5.64) aurait pu être obtenue directement en utilisant la formule (8.201) de la ref. [3] mais nous avons préféré donner une déviation cohérente dans le cadre de notre modèle afin que le lecteur puisse se familiariser avec tous les détails du formalisme.

Le problème (5.64) possède aussi une racine non spurieuse qui correspond à une vraie excitation du système intrinsèque qui s'obtient assez facilement en réarrangeant le déterminant correspondant à (5.64) :

$$\begin{aligned} -\Omega^2 &= 4(a-b)(a-b') \\ &= \frac{N}{(N-1)G} \varepsilon^2 (\chi^2 - 1) \\ \frac{\Omega}{\varepsilon} &= (\pm) \sqrt{\frac{N}{\varepsilon \cdot \chi}} \cdot \sqrt{\chi^2 - 1} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Nous avons donc une solution RPA du premier état "excité" c'est à dire pour  $\Omega = E_0^{N+2} - E_0^N$  pour toutes les valeurs  $\chi \geq 1$ . Il est extrêmement instructif de comparer ce résultat au résultat exact pour différents nombres de particules  $N = 2j + 1$  (Fig. 18).

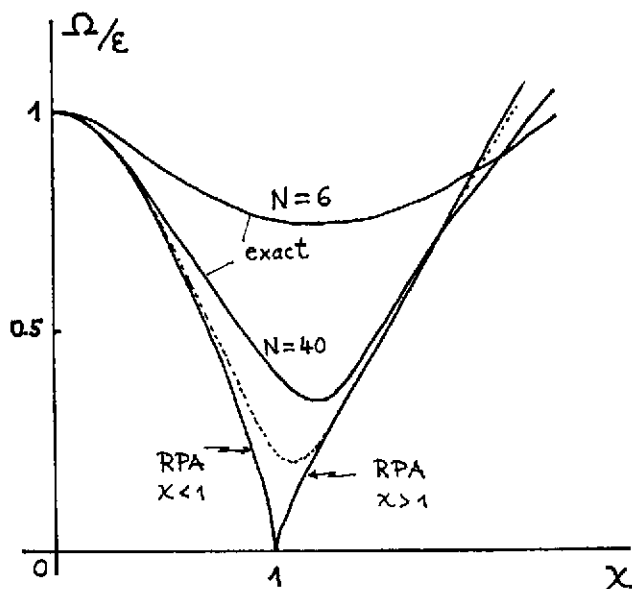


Fig. 18. Energie "d'excitation" en théorie RPA comparée au résultat exact pour différents nombres de particules en fonction de l'intensité de la force.

Nous voyons que la solution RPA devient d'autant meilleure que le nombre de particules (la dégénérescence) du modèle est grande et dans la limite  $N \rightarrow \infty$  nous avons :

$$\Omega^{RPA} = \Omega^{exact} \quad (N = \infty) \quad \chi \geq 1 \quad (5.66)$$

Notre modèle contient donc un deuxième exemple où la théorie du champ moyen (TDHF, c'est à dire RPA) avec symétrie spontanément brisée coïncide avec la solution exacte du problème. Rappelons nous toujours que c'est un résultat non trivial dans la mesure où la théorie est basée sur une fonction d'ondes qui est un paquet d'ondes (dans l'angle de jauge) et qui donc, en principe, est un état non stationnaire. Seulement pour  $N \rightarrow \infty$  l'étalement du paquet d'ondes se réduit à zéro et la solution avec symétrie brisée coïncide avec la solution exacte. Ceci termine le traitement explicite de notre modèle.

Faisons un bref inventaire des différentes brisures de symétrie que nous avons abordées :

i) Translation

Sans dérivation, mais le résultat est assez éloquent pour être compris (voir chapitre 8.4.7 de [3]), nous donnons l'Hamiltonien qui correspond à la RPA quantifiée :

$$H_B = E_0^{RPA} + \sum_{\mu > 0} \Omega_{\mu} O_{\mu}^{+} O_{\mu} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \quad (5.67)$$

où les opérateurs  $O_{\mu}^{+}, O_{\mu}$  représentent les modes RPA mis à part le mode de Goldstone qui est représenté par le dernier terme en (5.67) c'est à dire par l'énergie cinétique du mouvement uniforme; on peut montrer que la masse  $M$  est égale à la masse totale du noyau [3]. L'énergie du fondamental, qui est abaissée par rapport à H.F. à cause du mouvement de point zéro des modes RPA, est donnée par :

$$E_0^{RPA} = E_0^{HF} - \sum_{\mu > 0} \Omega_{\mu} \sum_{ph} |Y_{ph}^{\mu}|^2 - \frac{\langle HF | \hat{p}^2 | HF \rangle}{2M} \quad (5.68)$$

Si on néglige la contribution  $\mu \neq 0$ , nous voyons que  $E_0^{H.F.}$  est essentiellement corrigée par l'énergie (spuriuse) du point zéro de translation qui est contenue dans la fonction d'ondes H.F. brisant la symétrie de translation. Nous avons déjà rencontré un terme similaire lorsque nous avons traité la projection dans le chapitre 4 seulement le paramètre de masse n'était pas égal à la masse physique du noyau ( $M_y \neq M$ ) ce qui peut être considéré comme un désavantage.

Le mode instable qui enclenche la brisure de symétrie est une onde de densité

Mode de Goldstone : translation;  $I = 1^-$ ;  $T = 0$

ii) Rotation (perpendiculaire à un axe de symétrie)

Le mouvement collectif associé au mode de Goldstone dans la brisure de l'invariance par rotation (déformation) est donné par les rotations; contrairement au cas de la translation ce mode représente une excitation non triviale du noyau car le mouvement collectif n'est pas découplé du mouvement intrinsèque. En RPA qui est valable pour des petites fréquences de rotation, nous avons :

$$H_B = \dots - \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}_{rv}} \hat{J}_x^2 \quad (5.69)$$

où  $\mathcal{I}_{rv}$  représente le moment d'inertie de Thouless-Valatin (voir [3]).

Mode instable : vibration de surface  $I = 2^+$ ,  $T = 0$

Mode de Goldstone : bande de rotations :  $I = 0^+, 2^+, 4^+ \dots$  ;  $T = 0$

iii) Superfluidité nucléaire

Comme nous l'avons déjà dit, la superfluidité nucléaire peut être considérée comme une rotation dans l'espace d'isospin; on obtient en théorie BCS un terme qui peut être interprété comme l'énergie cinétique de rotation dans cet espace :

$$H_B = \dots - \frac{\hbar^2}{2 \Theta_N} (\hat{N} - N_0)^2 \quad (5.70)$$

En effet, des bandes de rotations dans l'espace d'isospin ont été observées (voir [3] p. 448)

Mode instable : paire de Cooper  $I = 0^+$ ,  $T = 1$

Mode de Goldstone :  $I = 0^+$ ,  $T = T_0$ ,  $T = T_0 \pm 2$ ,  $T = T_0 \pm 4, \dots$

iv) Brisure de la symétrie chirale (voir cours de P.A.M. Guichon)

Le Lagrangien du modèle non linéaire  $\sigma, \pi$  ou de Nambu-Jona-Lasinio contient aussi un angle qui est lié au mouvement au fond du creux du chapeau mexicain, ce qui est représenté par la transformation  $U = \exp [i \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}]$  qui, elle, est analogue aux transformations  $U = e^{i \gamma^5 \hat{N}}$  et  $U = e^{i R \hat{P}}$  dans le cas de la superfluidité et de la translation (voir eqs. (5.6) et (5.7)). Il apparaît donc dans le Lagrangien un terme qui doit être l'analogue aux

termes cinétiques dans les exemples précédents

$$\mathcal{L} = \dots + \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} D^\mu \vec{\phi} \quad (5.71)$$

(Pour plus de détails, voir le cours de P.A.M. Guichon)

Le mode instable : excitation  $q\bar{q}$   $I = 0^+$   $T = 0$

Mode de Goldstone : pion  $I = 0^-$   $T = 1$

Avant de conclure ce chapitre, insistons encore sur un détail important concernant la compréhension des transitions de phases en approximation du champ moyen. Il s'agit du fait que l'équation pour le paramètre d'ordre ( $\Delta$ ,  $q$ , etc) c'est à dire :

l'équation du gap est une équation RPA atrophiée.

Regardons pour cela l'équation de Bethe-Salpeter pour la fonction de Green pp (à comparer avec eqs (5.44) )

$$\text{Diagram (5.72)} \quad (5.72)$$

Ceci donne explicitement (voir [3 , Appendice F] ou d'autres livres sur les fonctions de Green [10] ) en employant la force d'appariement (5.12) :

$$G_{kk', k''k'''}^{t-t'} = G_k^0 G_{k'}^{t-t'} S_{kk'}^{BCS(t-t')} + \frac{i}{2} \int dt_1 G_k^0 G_{k'}^{t-t_1} G_{k''k'''}^{BCS(t-t_1)} \sum_{k_1} V_{kk', k_1 k_1'} G_{k_1 k_1'}^{t_1-t'} \quad (5.73)$$

En représentation énergie les fonctions de Green sont données par

$$G_k^0 = \frac{1}{\omega - \epsilon_k} ; \quad G_k^{BCS, \omega} = \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \frac{\Delta^2}{\omega + \epsilon_k}} ; \quad \text{avec } \epsilon_k = \epsilon_{k-\lambda} \quad (5.74)$$

Le fait que nous avons pris deux fonctions de Green différentes (5.74) dans l'équation de Bethe-Salpeter (5.73) deviendra clair dans un instant. L'expression pour  $G^{BCS}$  se dérive en éliminant une des deux équations couplées (5.14) et en inversant l'équation obtenue. Il faut savoir que la représentation spectrale de la fonction de Green pp contient des pôles aux énergies  $\Omega_{\pm, \mu} = \pm (E_\mu^{N\pm 1} - \epsilon_0^N)$

(voir aussi les énergies propres de l'équation RPA pp (5.38)) :

$$G_{k\tilde{k}, k\tilde{k}}^{\omega} = \sum_{\pm\mu} \frac{\langle 0 | a_{\tilde{k}} a_k | \mu \rangle \langle \mu | a_{\tilde{k}}^{\dagger} a_k^{\dagger} | 0 \rangle}{\omega - \Omega_{\pm\mu} + i\gamma} - \frac{\langle 0 | a_{\tilde{k}}^{\dagger} a_k^{\dagger} | \mu \rangle \langle \mu | a_{\tilde{k}} a_k | 0 \rangle}{\omega + \Omega_{\pm\mu} - i\gamma} \quad (5.75)$$

Prenons maintenant la transformée de Fourier par rapport au temps de l'eq. (5.73) et plaçons nous au pôle  $\omega = E_0^{N+2} - E_0^N \approx 2\lambda$ . Comme dans (5.73) toutes les énergies sont comptées à partir de l'énergie de Fermi, nous obtenons donc :

$$\langle 0 | a_{\tilde{k}} a_k | +0 \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' G_k^{BCS, 0-\omega'} G_k^{0, \omega'} \frac{1}{2} \sum_{k_1} v_{k\tilde{k}, k_1\tilde{k}_1} \langle 0 | a_{\tilde{k}_1} a_{k_1} | +0 \rangle \quad (5.76)$$

Avec

$$G_k^{BCS, -\omega'} G_k^{0, \omega'} = -\frac{\omega' - \epsilon_k}{\omega'^2 - \epsilon_k^2 - \Delta^2} \cdot \frac{1}{\omega' - \epsilon_k}$$

et

$$\frac{1}{\omega^2 - \epsilon^2 - \Delta^2} = \left[ \frac{1}{\omega - \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - i\gamma} \right] \frac{1}{2\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}$$

nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 - \epsilon^2 - \Delta^2} = -\frac{2\pi i}{2\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}$$

et avec la définition

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} v_{k\tilde{k}, k'\tilde{k}'} \langle 0 | a_{\tilde{k}'} a_{k'} | 0 \rangle$$

nous aboutissons à l'équation habituelle du gap :

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} v_{k\tilde{k}, k'\tilde{k}'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} ; \quad (5.77)$$

Nous avons donc démontré que l'équation du gap est équivalente à une solution particulière de l'équation Bethe-Salpeter (5.72) qui elle même est équivalente à la RPA.

Pour comprendre l'asymétrie du traitement de deux propagateurs (5.74) dans (5.73) nous réécrivons d'abord l'expression pour  $G^{BCS}$  de la manière suivante :

$$G_k^{BCS} = G_k^0 + G_k^0 \cdot \Delta \cdot F_k \quad (5.78)$$

$$F_k = \frac{1}{\omega + \epsilon_k} \Delta \cdot G_k^{BCS} \quad (5.79)$$

Nous constatons que l'expression (5.79) figure sous l'intégrale dans (5.76) et le propagateur  $G^{BCS}$  contient donc un couplage au mode le plus bas de la RPA pp. Graphiquement, on peut interpréter l'eq. (5.78) comme ceci :

$$G^{BCS} = G^0 + \underbrace{\text{loop}}_F G^{BCS} \quad (5.80)$$

où le point représente l'interaction et l'amplitude  $\langle 0 | a a | 0 \rangle$  est donnée par  ~~$\rightarrow$~~ .

Les équations BCS peuvent donc être interprétées comme un couplage simultané de la solution RPA la plus basse (le mode mou) à la propagation d'une particule. Le mode mou est représenté par l'amplitude RPA  $\langle 0 | a a | 0 \rangle$  qui elle même peut être considérée comme une densité à un corps (la densité anormale de la superconductivité). C'est la raison pour laquelle, en couplant seulement un mode RPA (le plus collectif ou le plus bas) au mouvement des particules individuelles nous obtenons à nouveau une théorie à un corps. Nous avons ici traité la transition à la superfluidité mais les considérations sont tout à fait analogues pour la transition sphérique déformée ou le mode mou est donné par la vibration quadrupolaire à basse énergie. Dans ce cas, le coupla-

ge particule-vibration peut être représenté de la façon suivante :

(5.72')

(5.80')

Les deux équations (5.72') et (5.80') sont équivalentes aux équations Hartree-Fock déformées et représente une amplitude RPA  $\langle 0 | a^+ a | 2^+ \rangle$ .

Dans le prochain chapitre, nous allons revenir plus en détail sur tous ces aspects mais il m'a semblé bon de donner les grandes lignes déjà ici parce qu'il est important de connaître l'interprétation microscopique lorsqu'on travaille dans la base "déformée".

Ceci conclut à peu près tout ce qu'il y avait à dire sur les brisures (spontanées) de symétrie et leur restauration dans le cadre de la théorie conventionnelle. Dans le prochain chapitre, nous allons esquisser quelques développements récents.

Rajoutons simplement quelques remarques sur la restauration de symétrie en fonction de l'énergie d'excitation. En effet, il est bien connu que le paramètre d'ordre disparaît à une

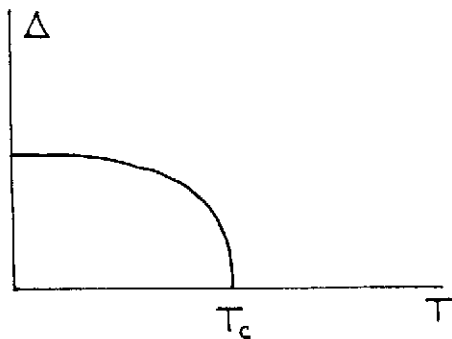


Fig. 19. Dépendance du gap de la température en théorie du champ moyen.

température critique (dans le système infini) comme c'est indiqué sur la figure 19 ). Un exemple est donné par la superconductivité mais il existe aussi des spéculations que la symétrie chirale est rétablie dans des plasmas quark gluons. Egalement, en cosmologie lorsqu'on parle de la supersymétrie qui est successivement brisée en sous-groupes en abaissant l'énergie d'excitation le même mécanisme est encore à

l'oeuvre.

Dans les systèmes finis et chauds, lorsqu'une projection sur une bonne symétrie est nécessaire (par exemple pour décrire correctement la transition déformée ↔ sphérique dans les noyaux chauds) aucune théorie, à ma connaissance, est actuellement mise sur pied qui pourrait traiter ce problème



(voir cependant le chapitre suivant). On s'imagine facilement que le formalisme de projection qui a été développé au chapitre 4 pour un état pur (le fondamental) n'est pas praticable lorsqu'on travaille avec un ensemble statistique d'états. Il est certainement impossible de projeter chaque état d'une distribution de Boltzmann, par exemple, sur un bon nombre de particules, spin etc... De gros efforts sont donc encore à entreprendre de ce côté-là.

## 6. DEVELOPPEMENTS RECENTS

Nous avons vu à la fin du chapitre précédent que la théorie du champ moyen dans la base "sphérique" est applicable en deça du point de transition de phases ( en fait il ne faut pas trop se rapprocher de ce point) et qu'au-delà, on doit travailler avec la base "déformée". Cette base déformée consiste en réalité en un couplage particule-vibration (RPA) et une théorie RPA dans une base qui tient compte de ce couplage (voir eqs. (5.72, 5.80)). On peut se demander si on n'améliore pas beaucoup la théorie en incluant proprement un couplage dynamique particule vibration (self consistant) aussi bien avant qu'après la transition de phases. On aurait en quelque sorte une seule théorie qui passerait continuellement à travers le point de transition en tenant compte des fluctuations quantiques. J'ai présenté récemment l'amorce d'une telle approche [11] que je voudrais brièvement expliquer.

La théorie Hartree-Fock consiste à prendre comme fonction d'essai un déterminant de Slater :

$$|\phi'\rangle \propto \exp \left[ \sum_{ph} z_{ph} a_p^\dagger a_h \right] |\phi\rangle \quad (6.1)$$

On pourrait essayer de développer une théorie qui inclut les corrélations RPA dans le fondamental en prenant comme fonction d'essai généralisée :

$$|\text{SCRPA}\rangle \propto e^{\sum_{ph} z_{ph} a_p^\dagger a_h} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_{\mu\mu'} Z_{\mu\mu'} B_\mu^\dagger B_{\mu'}^\dagger} |\phi\rangle \quad (6.2)$$

où les  $B^\dagger$  sont des opérateurs de bose avec

$$B_\mu |\phi\rangle = 0 \quad (6.3)$$

et qui commutent avec les opérateurs des Fermions.

En variant dans (6.2) simultanément par rapport aux  $Z_{ph}$  et aux  $Z_{\mu\mu'}$ , on aboutira à des équations couplées HF-RPA. En prenant uniquement l'état le plus bas (c'est à dire celui qui est le plus collectif) des équations RPA on arrivera à la théorie recherchée. Plus de détails de cette

approche sont donnés dans l'appendice F de la ref. [3].

Simplifions encore davantage et adoptons un développement bosonique complet de l'Hamiltonien des Fermions [3]. A ce moment, nous pouvons écrire pour (6.2)

$$|SCRPA\rangle \propto e^{\sum_{\mu} z_{\mu} B_{\mu}^{\dagger} + \sum_{\mu\mu'} Z_{\mu\mu'} B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu'}^{\dagger}} |\phi\rangle \quad (6.4)$$

Appliquons cela au modèle de Lipkin [3] qui est aussi un modèle à deux niveaux comme celui de la Fig. 15 mais avec un terme d'interaction différent :

$$H = \varepsilon K_0 - \frac{1}{2} V (K_+ K_+ + K_- K_-) \quad (6.5)$$

avec

$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\Omega=2j+1} (a_{2m}^{\dagger} a_{2m} - a_{1m}^{\dagger} a_{1m}); \quad K_+ = (K_-)^{\dagger} = \sum_{m=1}^{\Omega} a_{2m}^{\dagger} a_{1m} \quad (6.6)$$

A l'ordre quatre, le développement bosonique à la Marumori [3] (6.5) s'écrit (il n'y a qu'un seul boson dans le modèle) :

$$H_B = -\frac{\varepsilon}{2} \Omega + \varepsilon B^{\dagger} B - \frac{V}{2} \Omega [a_0 B^{\dagger} B^{\dagger} - a_1 B^{\dagger} B^{\dagger} B + h.c.] + \dots \quad (6.7)$$

$$a_0 = 1 - 1/\Omega; \quad a_1 = 1 - 1/\Omega - (1 - 1/\Omega)(1 - 2/\Omega)$$

La fonction d'onde (6.4) prend la forme suivante :

$$|SCRPA\rangle \propto \exp \left\{ z B^{\dagger} + \frac{Y}{X} B^{\dagger} B^{\dagger} \right\} |\phi\rangle \quad (6.8)$$

On peut vérifier que cet état est le vide à l'opérateur

$$\begin{aligned} \sigma^{\dagger} &= X B^{\dagger} - Y B - X \cdot z \\ \sigma |SCRPA\rangle &= 0; \end{aligned} \quad (6.9)$$

En inversant (6.9) nous pouvons exprimer (6.7) par les opérateurs  $\sigma^{\dagger}$ ,  $\sigma$  et après un arrangement en ordre normal on obtient

$$H_B = C_0 + C_1 (\sigma^{\dagger} + \sigma) + C_2 (\sigma^{\dagger} \sigma^{\dagger} + \sigma \sigma) + C_3 \sigma^{\dagger} \sigma \quad (6.10)$$

Les constantes  $c_1$  sont fonctions des paramètres  $X, Y, z$ . Annuler  $c_1$  et  $c_2$  équivaut à la recherche du minimum de  $\langle S C R P A | H_B | S C R P A \rangle$  et avec  $X^2 - Y^2 = 1$  ceci donne deux équations pour deux inconnues qui sont faciles à résoudre.

Sur la figure 20 nous montrons l'énergie du fondamental en fonction de l'interaction. Nous voyons que cette théorie est en très bon accord avec le résultat exact pour toutes les valeurs de  $\chi = \frac{(\Omega-1)V}{\epsilon}$  (ce modèle possède également une "transition de phases" pour  $\chi = 1$ ). C'est donc une théorie qui, comme nous l'avons annoncé, passe continuellement de la région "sphérique" ( $\chi < 1$ ) à la région "déformée" ( $\chi > 1$ ). Sur la figure 20 nous avons également reporté les valeurs qui sont obtenues en découplant le champ moyen de la RPA c'est à dire en posant  $Z_\mu = 0$  dans (6.8). Nous voyons que le couplage particule - vibration, à savoir le maintien du boson linéaire en (6.8), qui simule le champ moyen, est essentiel pour obtenir un bon résultat. En abandonnant ce couplage l'accord est rapidement détruit pour  $\chi > 1$ .

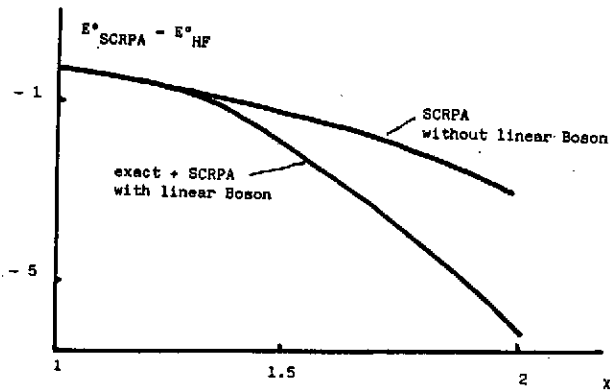


Fig 20 . L'énergie du fondamental correspondant au problème variationnel (6.7, 6.8) en fonction de l'interaction

$$\chi = (\Omega-1)V/\epsilon$$

L'énergie du fondamental pour  $\chi = 0$  est retranchée;  $N = 40$ ; l'énergie exacte et l'énergie SCRPA sont indiscernables sur la figure.

Nous voyons donc qu'un couplage champ-moyen-RPA est primordial pour passer continuellement de la "sphéricité" à la "déformation" pour des systèmes finis. Nous ne voulons pas discuter ici comment la présence des fluctuations RPA joue pour la conservation de la symétrie car la symétrie brisée qui est en jeu dans le modèle de Lipkin est une symétrie discrète (parité) et cette étude nous amènerait un peu loin. Rajoutons simplement que cette théorie peut se généraliser à des cas plus réalistes et qu'elle permet surtout un traitement pour les températures finies, ce qui n'était pas le cas pour la théorie des fluctuations quantiques en employant le formalisme de la projection du chapitre 4.

A la fin, je voudrais présenter des éléments d'une généralisation des considérations que nous venons de voir ci-dessus. C'est une théorie sur laquelle je travaille avec D. Janssen et qui est directement applicable dans l'espace des Fermions. Nous avons traité à présent la superfluidité nucléaire [42] et la translation; c'est ce dernier cas de figure que je vais détailler quelque peu ici.

Je dérive la théorie dans le cadre des fonctions de Green [3, Appendice F] et il est d'abord important de se rappeler comment on aboutit aux équations H.F. ordinaires (qui brisent, je le rappelle, pour les noyaux finis toujours au moins la symétrie de translation) dans ce formalisme. Définissons la fonction de Green (GF) à un corps (nous travaillons désormais dans la base des moments)

$$G_{kk'}^{t-t'} = -i \langle 0 | T \{ a_k(t) a_{k'}^\dagger(t') \} | 0 \rangle$$

$$= -i \theta(t-t') \langle 0 | a_k(t) a_{k'}^\dagger(t') | 0 \rangle + i \theta(t'-t) \langle 0 | a_{k'}^\dagger(t') a_k(t) | 0 \rangle$$
(6.11)

Les opérateurs  $a^\dagger(t)$ ,  $a(t)$  tournent avec l'Hamiltonien exact et  $|0\rangle$  est en principe le fondamental exact du noyau. Pour être précis, il faudrait expliciter les nombres quantiques de  $|0\rangle$  et surtout, dans notre cas, celui de l'impulsion totale; nous allons le faire plus loin mais pour l'instant, nous préférons rester vagues là-dessus. Appliquons l'équation du mouvement à (6.11) :

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k^2}{2m} \right) G_{kk'} = S_{kk'} \delta(t-t') + G_{j_{kk'}, k'}$$
(6.12)

où

$$G_{j_{kk'}, k'} = -i \langle 0 | T \{ j_k(t) a_{k'}^\dagger(t') \} | 0 \rangle$$

$$j_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_2, k_3, k_4} \bar{v}_{k k_2 k_3 k_4} a_{k_2}^\dagger(t) a_{k_4}(t) a_{k_3}(t)$$
(6.13)

Nous introduisons formellement un champ moyen effectif (l'opérateur de masse) de la manière suivante:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k^2}{2m} \right) G_{kk'}^{t-t'} = S_{kk'} \delta(t-t') + \sum_{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M_{kk_1}^{t-t_1} G_{k_1 k'}^{t_1-t'}$$
(6.14)

$$M_{kk'}^{t-t'} = \sum_{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 G_{j_{kk_1}, k'}^{t-t_1} (G_{k_1 k'}^{t_1-t'})$$
(6.15)

L'opérateur de masse contient une partie statique (proportionnelle à  $\delta(t-t')$ ) et une partie dynamique qui contient les corrélations comme les états 2p-1h etc. Pour dégager la partie statique, il suffit de remplacer dans (6.15)  $G^{-1}$  par son expression à l'ordre zéro :

$$(G^{-1})_{k_i k'}^{t_i - t'} \approx \left( -i \frac{\partial}{\partial t_i} - \frac{k_i^2}{2m} \right) \delta_{k_i k'} \delta(t_i - t') \quad (6.16)$$

et après application de l'équation du mouvement en ne retenant que le terme statique, nous obtenons

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k^2}{2m} \right) G_{kk'}^{t-t'} = \delta_{kk'} \delta(t-t') + \sum_{k_2} V_{kk_2}^{HF} G_{k_2 k'}^{t-t'} \quad (6.17)$$

avec

$$V_{kk'}^{HF} = \sum_{k_2 k_4} \bar{v}_{k_2 k_4} \langle 0 | a_{k_2}^+ a_{k_4} | 0 \rangle \quad (6.18)$$

Nous reconnaissons en (6.17) et (6.18) les équations H.F. habituelles. Seulement en cours de route, nous avons perdu quelque part l'invariance par translation parce que  $\bar{v}_{kk'} = \langle 0 | a_k^+ a_{k'} | 0 \rangle$  est basé sur un déterminant de Slater qui brise explicitement l'invariance de translation c'est à dire  $|0\rangle$  est un paquet d'ondes en impulsion pour les noyaux finis.

Essayons maintenant d'être plus soigneux dans notre dérivation surtout en ce qui concerne le traitement explicite de l'impulsion. Nous caractérisons le fondamental par  $|K\rangle$  ce qui veut dire que le fondamental se meut avec la quantité de mouvement total K. Pour la fonction de Green (6.11), nous avons donc :

$$G_{kk'}^{K, t, t'} = -i \langle K - k + k' | T \{ a_k(t) a_{k'}^+(t') \} | K \rangle \quad (6.19)$$

Nous voyons tout de suite qu'il n'est plus possible de définir une GF avec conservation des impulsions qui soit symétrique. En effet, nous allons obtenir plus loin des équations pour (6.19) qui ne sont pas symétriques non plus.

Nous voulons dériver des équations du type H.F. pour  $G_{kk'}^K$  (6.19) mais en

respectant les relations d'impulsions à chaque étape. Avant de commencer, il faut se souvenir (voir chapitres précédents) que l'approximation de H.F. n'a un sens que lorsqu'on se place dans le système intrinsèque. Regardons ce que cela veut dire dans notre cas et étudions la représentation spectrale de (6.19) :

$$G_{kk'}^{k, t, t'} = -i \theta(t-t') e^{i E_{k-k+k'}^{A,0} t} \sum_{\nu, A+1} \langle k-k+k' | a_k | k+k', \nu \rangle e^{-i E_{k+k'}^{A+1, \nu} (t-t')} \times \\ \times \langle \nu, k+k' | a_k^+ | k \rangle e^{-i E_k^{A,0} t'} \\ + i \theta(t'-t) \dots \dots \dots$$

(6.20)

où les énergies sont données par la somme des énergies cinétiques plus les énergies intrinsèques. Par exemple, pour un noyau de masse  $A m$  :

$$E_k^{A,0} = \frac{k^2}{2 A m} + E_0^A ; E_{k+k'}^{A+1, \nu} = \frac{(k+k')^2}{2(A+1)m} + E_\nu^{A+1} ; \text{ etc.}$$

(6.21)

Les énergies  $E_0^A, E_\nu^{A+1}$  sont des énergies du système intrinsèque c'est à dire après séparation du centre de masse.

Nous constatons donc que (6.19) n'est pas la bonne définition d'une GF dans le système intrinsèque parce que nous voudrions qu'elle ne contienne que des énergies intrinsèques du système. Nous redéfinissons alors

$$\tilde{G}_{kk'}^{k, t-t'} = -i \theta(t-t') \sum_{\nu, A+1} \langle k-k+k' | a_k | k+k', \nu \rangle e^{-i (E_\nu^{A+1} - E_0^A) (t-t')} \times \\ \times \langle k+k', \nu | a_k^+ | k \rangle \\ + i \theta(t'-t) \sum_{\nu, A-1} \langle k-k+k' | a_k^+ | k-k, \nu \rangle e^{-i (E_0^A - E_\nu^{A-1}) (t-t')} \times \\ \times \langle k-k, \nu | a_k | k \rangle$$

(6.22)

Il est possible d'écrire ceci sous une forme très élégante .

$$\tilde{G}_{kk'}^{k, t-t'} = -i \langle k-k+k' | T \{ \tilde{a}_k(t) \tilde{a}_{k'}^+(t') \} | K \rangle \quad (6.23)$$

avec

$$\tilde{a}_k(t) = e^{iH't} a_k(0) e^{-iH't}$$

où  $H'$  est un Hamiltonien intrinsèque

$$H' = H - h(\hat{p}^2) \quad (6.24)$$

avec les propriétés suivantes

$$h(\hat{p}^2) |K\rangle = \frac{k^2}{2Am} |K\rangle; \quad h a_k^+ |K\rangle = \frac{(k+k)^2}{2(A+1)m}; \quad h a_k |K\rangle = \frac{(k-k)^2}{2(A-1)m}, \text{ etc.} \quad (6.25)$$

Il est facile de vérifier que les éqs. (6.23 - 6.25) sont équivalentes à (6.22).

Avec (6.23) nous pouvons maintenant procéder exactement comme avant (6.12 - 6.18) pour dériver des éqs. du type H.F. Après transformation de Fourier dans le temps, nous obtenons

$$\left( E - \frac{k^2}{2m} \right) \tilde{G}_{kk'}^{k, E} = \delta_{kk'} + \sum_{k''} M_{kk''}^k \tilde{G}_{k''k'}^{k, E} \quad (6.26)$$

où

$$\frac{k^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{kk'}^k = \langle k-k+k' | \left[ a_k, H' \right], a_{k'}^+ | K \rangle \quad (6.27)$$

L'élaboration de cette expression donne :

$$M_{kk'}^K = V_{kk'}^{HF,K} - \frac{(K+k')^2}{2(A+1)m} \bar{S}_{kk'}^K - \frac{(K-k+k')^2}{2Am} \bar{S}_{kk'}^K + \frac{K^2}{2Am} S_{kk'}^K + \frac{(K-k)^2}{2(A-1)m} S_{kk'}^K \quad (6.28)$$

avec

$$S_{kk'}^K = \langle K-k+k' | a_{k'}^+ a_k | k \rangle \quad (6.29)$$

$$\bar{S}_{kk'}^K = \langle K-k+k' | a_k a_{k'}^+ | k \rangle$$

$$V_{kk'}^{HF,K} = \sum_{k_2, k_4} \bar{v}_{k, k_2, k', k_4} S_{k_4 k_2}^K \quad (6.30)$$

Nous voyons, comme nous l'avions annoncé, que le champ (6.28) n'est pas symétrique. L'équation aux valeurs propres qui correspond à (6.26) possède donc des vecteurs propres de gauche et des vecteurs propres de droite :

$$\begin{aligned} (\epsilon + M^K) \chi^{k,i} &= e_i^K \chi^{k,i} \\ (\epsilon + M^{K\dagger}) \tilde{\chi}^{k,i} &= e_i^K \tilde{\chi}^{k,i} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ce qui est équivalent à la représentation spectrale suivante de la fonction de Green

$$G_{kk'}^{K,E} = \sum_i \frac{\chi_k^{k,i} \tilde{\chi}_{k'}^{k,i}}{E - e_i^K} \quad (6.32)$$

L'équation (6.26) nous permet avec (6.32) d'arriver à la relation de fermeture

$$\sum_i \chi_k^{k,i} \tilde{\chi}_{k'}^{k,i} = \delta_{kk'} \quad (6.33)$$



En inversant cette relation nous obtenons la condition de normalisation

$$\sum_k \tilde{\chi}_k^{K,i} \chi_k^{K,j} = \delta_{ij} \quad (6.34)$$

A partir de là, nous montrons comme d'habitude que la matrice de densité obéit à la relation de la "idempotency"

$$\sum_{k_1} \rho_{kk_1}^K \rho_{k_1 k'}^K = \rho_{kk'}^K \quad (6.35)$$

avec

$$\rho_{kk'}^K = \sum_{i=1}^A \chi_k^{K,i} \tilde{\chi}_{k'}^{K,i} \quad (6.36)$$

Nous avons donc un formalisme complet et cohérent qui est constitué par les équations (6.28)-(6.36) et il nous reste à démontrer que c'est une théorie qui conserve la symétrie.

Pour ce faire, nous écrivons d'abord (6.28) pour le cas  $K = 0$  c'est à dire que le système est au repos. Après un petit réarrangement, nous obtenons

$$\frac{k^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{kk'}^0 = V_{kk'}^{HF,0} + \frac{k^2}{2m} \frac{A^2-2}{A^2-1} \delta_{kk'} + \frac{1}{4m} \left[ \frac{k^2}{A(A-1)} - \frac{k'^2}{A(A+1)} + \frac{2kk'}{A} \right] \times$$

$$\times (\bar{\rho}_{kk'} - \rho_{kk'}) \quad (6.37)$$

Dans une première étape, nous arrivons donc au résultat important suivant :

$$\frac{(k - k/A)^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{k-k/A, k'-k/A}^0 = \frac{k^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{kk'}^K \quad (6.38)$$

ou en d'autres termes :

$$\sum_{k'} \left( \frac{k^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{kk'}^K \right) \chi_{k'}^{K,i} = e_i^K \chi_k^{K,i}$$

$$= \sum_{k'} \left[ \frac{(k - k/A)^2}{2m} \delta_{kk'} + M_{k-k/A, k'-k/A}^0 \right] \chi_{k'-k/A}^{0,i} \quad (6.39)$$

Avec l'invariance par rapport au renversement du temps, ceci signifie :

$$\langle \hat{P} \rangle = \sum_k k \rho_{kk}^k = \sum_k k \rho_{k-K/A, k-K/A}^0 = K \quad (6.40)$$

Nous avons donc bien le résultat que la valeur moyenne de l'opérateur de l'impulsion totale  $\hat{P}$  est égale à la quantité de mouvement totale  $K$  du système.

La condition nécessaire et suffisante que la théorie conserve la symétrie de translation est que la variance de  $\hat{P}$  est nulle (toute fonction qui donne une variance nulle d'un opérateur est fonction propre de cet opérateur [13]). La valeur moyenne de  $\hat{P}^2$  est donnée par

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \sum_{k, k'} k k' \langle k | a_k^+ a_k a_{k'}^+ a_{k'} | k \rangle \quad (6.41)$$

Le calcul de la densité à deux corps qui intervient dans (6.41) sortirait du cadre de ce cours et nous référons le lecteur à la réf. [12] pour la démonstration  $\langle \hat{P}^2 - \langle \hat{P} \rangle^2 \rangle = 0$  qui peut se faire exactement selon les mêmes lignes que dans le cas de la superfluidité.

Cependant, nous voudrions présenter l'expression de l'énergie du fondamental qu'on dérive dans le cadre de notre formalisme. On vérifie facilement la relation suivante

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \lim_{t' \rightarrow t} \sum_k \left( \frac{k^2}{2m} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{G}_{kk}^{k, t-t'} &= \sum_k \langle k | \frac{k^2}{2m} a_k^+ a_k | k \rangle \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \tilde{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \langle k | a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_3} a_{k_4} | k \rangle \\ &- \frac{1}{2} \frac{K^2}{2Am} \sum_k \langle k | a_k^+ a_k | k \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \frac{(k-k)^2}{2(A-1)m} \langle k | a_k^+ a_k | k \rangle \end{aligned} \quad (6.42)$$

En insérant dans (6.42) l'équation de Dyson (6.26) nous arrivons à l'expression suivante pour l'énergie du fondamental :

$$\begin{aligned} \langle k | H | k \rangle &= E_0^{HF, K} + \\ &\frac{1}{2} \sum_{k, k'} \left[ \frac{(k-k+k')^2}{2Am} - \frac{(k-k)^2}{2(A-1)m} - \frac{(k+k')^2}{2(A+1)m} + \frac{K^2}{2Am} \right] (\delta_{kk'} \rho_{k'k}^k - \rho_{kk'}^k \rho_{k'k}^k) \end{aligned} \quad (6.43)$$

où

$$E_0^{HF,K} = \sum_{kk'} \left( \frac{k^2}{2m} \delta_{kk'} + \frac{1}{2} V_{kk'}^{HF,K} \right) \rho_{kk}^K \quad (6.44)$$

Nous utilisons la relation  $\rho_{kk}^K = \rho_{k'-k/A, k-k/A}^0$  (6.40)

et obtenons :

$$E_0^{HF,K} = E_0^{HF,K=0} + \frac{K^2}{2Am} \quad (6.45)$$

En procédant de la même manière avec le restant de l'expression (6.43) nous arrivons à

$$\begin{aligned} \langle k | H | k \rangle &= E_0^{HF,K=0} + \frac{K^2}{2Am} \\ &\quad - \frac{1}{2m} \frac{A}{A^2-1} \sum_k k^2 \rho_{kk}^0 + \frac{1}{2Am} \sum_{kk'} k k' \rho_{kk'}^0 \rho_{k'k}^0 \\ &\quad + \frac{1}{2Am} \frac{1}{A^2-1} \sum_{kk'} k^2 \rho_{kk'}^0 \rho_{k'k}^0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

En négligeant des termes d'ordre  $1/A$  nous obtenons donc :

$$\langle k | H | k \rangle = E_0^{HF,K=0} - \frac{\langle k=0 | (\Delta \hat{P})^2 | k=0 \rangle}{2Am} + \frac{K^2}{2Am} \quad (6.47)$$

ce qui est égal à l'expression RPA du fondamental (5.68). Nous observons que nous avons obtenu la bonne dépendance en  $K$  dans (6.46), (6.47) et que surtout la masse totale du système figure dans le terme de fluctuation du moment total ce qui n'était pas le cas dans la méthode de projection du chapitre 4.

Ceci termine notre excursion dans les développements récents dans la restauration des symétries. Rajoutons simplement qu'il est tout à fait clair pour savoir généraliser les formalismes exposés dans ce chapitre pour des systèmes à température finie. Nous avons uniquement à remplacer l'état fondamental par un ensemble statistique dans les fonctions de Green. Il me semble

clair aussi que cette dernière théorie possède de grands avantages par rapport à la technique de projection habituelle (chapitre 4) car nous ne sortons pratiquement pas du cadre Hartree-Fock.

## 7. RESUME ET CONCLUSIONS

Nous avons développé dans les chapitres précédents la notion de la brisure spontanée de symétrie dans les systèmes infinis. La relation avec les transitions de phases a été discutée. L'approximation du champ moyen c'est à dire du cranking a été introduite et son caractère classique a été démontré. Ceci entraîne la nécessité de rajouter d'importantes corrections quantiques pour des systèmes finis et petits comme les noyaux. Nous avons vu comment cela peut se faire dans le cas statique et dynamique. Nous avons présenté et longuement discuté la notion du mode de Goldstone. Deux modèles explicitement solubles pour le cas de la translation et la superfluidité ont illustré les considérations théoriques. La méthode de projection a été expliquée et les grandes difficultés que cela entraîne ont été détaillées.

A la fin, j'ai rajouté un chapitre sur les perspectives et les développements récents dans le domaine du traitement des symétries et des fluctuations quantiques dans les systèmes finis. Il me semble que ce chapitre est loin d'être clos et que les noyaux atomiques constituent un domaine propice à la mise en évidence des fluctuations quantiques. Des expériences qui essaient de mesurer les paramètres d'ordre en fonction de la vitesse de rotation ou de la température sont en cours avec la physique des ions lourds et c'est certainement là un des aspects de la physique nucléaire des plus excitants.

## REMERCIEMENTS

Ma compréhension des phénomènes liés aux symétries et leur brisure a été influencée par de multiples discussions avec D. Janssen et P. Ring. Je tiens à les remercier. J'ai eu également des discussions avec J. Knoll qui ont clarifié certains aspects.

REFERENCES

J'ai été volontairement très sommaire dans les citations. Je me suis, dans mon cours, surtout basé sur la présentation de la réf. [3] dans laquelle on trouvera aussi toutes les références aux articles originaux.

- [1] A.H. Blin, B. Hiller, H. Reinhardt, P. Schuck, à paraître dans Nucl. Phys.
- [2] J. Winter, P. Schuck, Z. Phys. A321 (1985) 507
- [3] P. Ring, P. Schuck, The Nuclear Many Body Problem, Springer Verlag 1980
- [4] J.P. Blaizot, G. Ripka, Quantum Theory of Finite Systems MIT Press 1985
- [5] A. Hayashi, K. Hara, P. Ring, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 337
- [6] J.L. Egido, P. Ring, S. Iwasaki, H.J Mang, Phys. Lett. (1985) 1
- [7] Y. Nambu, G. Jonà-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345
- [8] A. Le Yaouanc, L. Olivier, S. Ono, O. Pène, J.C. Raynal, Phys. Rev. D (1985) 137 et Phys. Rev. D (1986) 3098
- [9] D. Ebert, H. Reinhardt, Nucl. Phys. B271 (1986) 188
- [10] A. L. Fetter, J.D. Walecka, Quantum Theory of Many Particle Systems, Mc-Graw Hill 1971
- [11] P. Schuck, contribution to Proceedings of the Winter College on Fundamental Nuclear Physics, Vol. 1, K. Dietrich, M. Di Toro, H.J. Mang, editors, World Scientific 1985  
et P. Chomaz, P. Ring, P. Schuck in preparation
- [12] D. Janssen, P. Schuck, Z. Phys. A301 (1981) 255  
et Proceedings of 1st International Springer Seminar on Nuclear Physics, Sorrento, 1986,  
A. Covello, editor, à paraître
- [13] A. Messiah, Mécanique Quantique, Dunod.