HAL open science

Le nucléon et l'interaction nucléon-nucléon dans un modèle de symétrie chirale

Benoît Loiseau

▶ To cite this version:

Benoît Loiseau. Le nucléon et l'interaction nucléon-nucléon dans un modèle de symétrie chirale. École thématique. Ecole Joliot Curie "Symétries et physique nucléaire", Maubuisson, (France), du 15-19 septembre 1986 : 5ème session, 1986, 27 p. cel-00644406

HAL Id: cel-00644406

https://cel.hal.science/cel-00644406v1

Submitted on 24 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE NUCLEON ET L'INTERACTION NUCLEON-NUCLEON DANS UN MODELE DE SYMETRIE CHIRALE

B. LOISEAU

Division de Physique Théorique, IPN Orsay
et
LPTPE, Université P. et M. Curie, Paris

RESUME

Nous montrons comment à partir du modèle de Skyrme, modèlisation à basse énergie de QCD, possédant la symétrie chirale, on peut décrire le nucléon et l'interaction nucléon-nucléon. Nous indiquons succintement les récents développements pour construire la physique hadronique à basse énergie à partir de lagrangiens effectifs.

ABSTRACT

We show how from the Skyrme model, which is modelling QCD at low energy and which is chiral symmetric, one can describe the nucleon and the nucleon-nucleon interaction. We briefly outline the lastest extensions to build low energy hadron physics from effective lagrangians.

I) INTRODUCTION

La physique des hautes énergies nous a démontré que les hadrons étaient composés de quarks et que la théorie des champs de quarks et de gluons, la chromodynamique quantique (QCD), était un très bon candidat comme théorie des interactions fortes[1]. Rappelons très brièvement quelques propriétés de base de QCD :

1) C'est une théorie quantique des champs cohérente et renormalisable

2) QCD possède la liberté asymptotique : la constante de couplage quark-gluon devient petite à grand moment de transfert ou à petite distance (quarks libres). Des calculs perturbatifs sont alors possibles. Ainsi QCD, dans la diffusion profondément inélastique de leptons permet de dériver les règles de somme du modèle des partons et de calculer des corrections. QCD prédit également la distribution en énergie des hadrons produits dans l'annihilation e^+e^- à haute énergie. Enfin les désintégrations des quarkonium lourds sont compatibles avec les prédictions de QCD.

3) A des distances de l'ordre de la taille des hadrons, les quarks et les gluons interagissent fortement, la constante de couplage quark-gluon devient grande et les calculs perturbatifs ne sont plus valables. Il faut donc à basse énergie (petit moment de transfert) modèliser QCD.

Les aspects non perturbatifs de QCD ont été étudiés par différentes approches. Citons i) les calculs sur réseau[2] qui permettent de comprendre qualitativement le confinement ii) le développement en terme de produit d'opérateurs de Wilson[3] (règles de somme) qui conduit à une évaluation des propriétés des hadrons. Citons également le modèle du sac de MIT[4] et le modèle des cordes[5] où les effets non perturbatifs sont respectivement inclus dans la pression qui maintient les quarks dans le sac et dans la tension qui s'exerce entre les quarks.

D'autre part, de façon à contourner l'obstacle de l'absence d'un petit paramètre de développement dans la résolution de QCD, t'Hooft[6] proposa d'étudier QCD dans la limite d'un très grand nombre de couleur N_c. L'espoir est alors que les propriétés essentielles d'une telle théorie sont conservées dans le cas réel actuel $N_c = 3$. E. Witten[7] a ensuite montré qu'à basse énergie dans un développement en $1/N_c$ et lorsque $N_c \to \infty$. les diagrammes planaires avec des lignes $q\bar{q}$ sont dominants. QCD se réduit effectivement à une théorie de champ de "mésons". La dynamique est décrite par un lagrangien effectif local et non linéaire et les baryons émergent comme solitons topologiques dans cette théorie.

En plus de la couleur QCD possède différentes saveurs de quarks, u, d, s, c, b, t... Les propriétés de QCD à basse énergie sont dominées par les trois quarks de plus basse masse u, d et s. Les masses des quarks u et d sont petites par rapport au cut-off de QCD et si on les néglige, le lagrangien de QCD devient invariant par transformation chirale $SU_L(2) \times SU_R(2)$[1,8]. De plus tout laisse à penser que cette symétrie est spontanément brisée via le méchanisme de Nambu-Goldstone avec la création de pions de masse nulle. Cette propriété importante de QCD, d'invariance par sy-

métrie chirale, doit être préservée dans le modèle de champ effectif correspondant. Le modèle σ non linéaire, bien que non renormalisable, constitue un très bon point de départ d'une description chirale effective de la dynamique des hadrons à basse énergie. Le caractère non linéaire conduit à des configurations de champ non triviales (solitons) comme préconisé dans l'étude $N_c \to \infty$.

Il y a vingt cinq ans, avant l'avènement de QCD et de la symétrie chirale, Skyrme[9] a proposé une extension du modèle σ non linéaire. Il a été le premier à fournir, grâce aux solitons, un mécanisme pour générer les baryons comme états liés de mésons en interaction. Le modèle de Skyrme est une "modèlisation" à basse énergie de QCD. C'est une réalisation, sans doute la plus simple possible, de la limite $N_c \to \infty$. C'est une théorie d'interaction de mésons hautement non linéaire dont le lagrangien effectif possède la symétrie chirale et satisfait à l'algèbre des courants et aux théorèmes des pions mous.

Nous allons montrer ici comment à partir du modèle de Skyrme on peut décrire le nucléon et l'interaction nucléon-nucléon. Signalons par ailleurs au lecteur intéressé par une étude approfondie du modèle de Skyrme la récente revue de Zahed et Brown[10].

Dans la deuxième partie de notre exposé nous rappellerons comment Skyrme[9] a stabilisé le modèle σ non linéaire construit à partir du pion et du σ et comment, en faisant l'hypothèse d'orienter le champ du pion selon la direction radiale dans l'espace de configuration, il a obtenu une solution de type soliton possédant un courant baryonique. Suivant Adkins, Nappi et Witten[11] (ANW) nous montrerons la quantification, par l'introduction de coordonnées collectives, de ce modèle et donnerons les résultats obtenus pour les propriétés statiques du Nucléon et du Delta (1232).

Dans la troisième partie nous dériverons, en utilisant une approximation pour la solution du champ de 2 baryons, l'interaction Soliton-Soliton et calculerons, en quantifiant à la manière ANW, l'interaction statique Baryon-Baryon (NN, NΔ ...)[12]. Nous examinerons le problème de l'absence d'attraction et indiquerons comment on peut y remédier en introduisant de nouveaux termes dans le lagrangien[13].

Enfin nous indiquerons succintement quels sont les développements récents pour construire la physique hadronique à basse énergie à partir de lagrangiens effectifs[14]. Nous décrirons brièvement les conséquences de l'introduction des mésons vecteurs[15]. Nous mentionnerons également les travaux poursuivis dans la construction d'un modèle de symétrie chirale à 2 phases : une région centrale constituée de quarks (modèle des sacs) entourée par une région externe où se trouvent les mésons solitons (modèle de Skyrme)[16].

Nous ne parlerons pas ici ni des modèles de sac chiraux, ni du modèle du soliton de Lee-Friedberg, ni du modèle de Nambu et Jona-Lasinio... nous renvoyons le lecteur à la réf. 17.

II) LE NUCLEON COMME SOLITON TOPOLOGIQUE DANS UN MODELE DE SYMETRIE CHIRALE

a) Le modèle σ non linéaire

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction le modèle σ non linéaire fournit un moule adéquat pour modéliser QCD. Si nous dénotons par $\sigma(x)$ le champ scalaire et isoscalaire du méson σ et par $\vec{\pi}(x)$ le champ pseudoscalaire et isovectoriel du pion la dynamique correspondante est donnée par[18]

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \vec{\pi}(x)\right)^2 \tag{1}$$

avec la condition non linéaire

$$\sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x) = f_\pi^2 \, . \tag{2}$$

Ici f_π est la constante de désintégration du pion (expérimentalement f_π = 93 MeV)

Si l'on introduit le champ matriciel, U(x), 2 x 2, dans l'espace d'isospin, tel que

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi}\left(\sigma(x)\mathbb{1} + i\vec{\tau}.\vec{\pi}(x)\right), \tag{3}$$

on voit qu'avec la condition (2) U(x) est unitaire, en effet

$$U(x)U^+(x) = \frac{1}{f_\pi^2}\left(\sigma\mathbb{1} + i\vec{\tau}.\vec{\pi}\right)\left(\sigma\mathbb{1} - i\vec{\tau}.\vec{\pi}\right) = \frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{f_\pi^2} = 1 \, . \tag{4}$$

Ici les matrices d'isospin $\vec{\tau}$ correspondent aux matrices de Pauli, $\mathbb{1}$ étant la matrice unité. U(x) est un élément de SU(2). La condition (2) suggère la paramétrisation des champs σ et $\vec{\pi}$ en terme d'une fonction $\theta(x)$ telle que

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= f_\pi \cos\theta(x) \, , \\ \vec{\pi}(x) &= \hat{\pi} f_\pi \sin\theta(x) \end{aligned} \tag{5}$$

et le champ U(x) s'écrit

$$U(x) = \cos\theta(x)\mathbb{1} + i\vec{\tau}.\hat{\pi}\sin\theta(x) = e^{i\vec{\tau}.\hat{\pi}\,\theta(x)} \, . \tag{6}$$

Il est intéressant de remarquer que dans le cas d'un champ de pion faible

$$|\vec{\pi}(x)| \ll f_\pi \, , \quad U(x) = 1 + i\vec{\tau}.\vec{\pi}/f_\pi \, . \tag{7}$$

Le lagrangien (1) peut s'écrire en fonction de la matrice U(x) comme

$$\mathcal{L}_2(U(x)) = \frac{f_\pi^2}{4} \, Tr\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^+\right] . \tag{8}$$

Le symbole Tr signifie que l'on doit prendre la trace dans l'espace d'isospin (voir appendice A). Le lagrangien $\mathcal{L}_2(x)$ est invariant par une transformation globale (indépendante de x) chirale,

$$U(x) \longrightarrow e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}} U(x) e^{i\vec{\beta}.\vec{\tau}} , \tag{9}$$

où $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs constants. On dit alors que $\mathcal{L}_2(x)$ est invariant par symétrie chirale* (gauche-droite) $SU_L(2) \times SU_R(2)$ (L pour "Left" : gauche, R pour "Right" : droite)

Pour un champ statique, solution des équations d'Euler Lagrange associées avec $\mathcal{L}_2(x)$ l'énergie correspondante est

$$E_2 = -\int d^3x \, \mathcal{L}_2(\vec{x}) = \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \, Tr\left[\partial_i U \partial_i U^+\right] . \tag{10}$$

Si l'on fait un changement d'échelle

$$\vec{x} = R \, \tilde{\vec{x}} \tag{11}$$

où R représente la taille du système (soliton***),

$$E_2 = -R \int d^3\tilde{x} \, \mathcal{L}_2(\tilde{\vec{x}}) . \tag{12}$$

L'énergie minimum ($E_2 = 0$) est obtenue pour un soliton de taille nulle ($R = 0$). Pour remédier à cette instabilité Skyrme[9] a rajouté à $\mathcal{L}_2$ un terme antisymétrique et d'ordre 4 en dérivée du champ U(x) (terme de Skyrme) que nous allons étudier.

b) <u>Stabilisation du modèle σ non linéaire : modèle de Skyrme</u>

Le lagrangien considéré par Skyrme s'écrit

$$\mathcal{L}\left[U(x)\right] = \mathcal{L}_2\left[U(x)\right] + \mathcal{L}_{4A}\left[U(x)\right] \tag{13}$$

avec

$$\mathcal{L}_{4A}\left[U(x)\right] = \frac{1}{32e^2} \, Tr\left\{\left[(\partial_\mu U)U^+, (\partial_\nu U)U^+\right]^2\right\} \tag{14}$$

---

* chir(o) : du grec "kheir" : main

*** soliton : solution stable d'une équation différentielle non linéaire.

où $[A,B] = AB - BA$. On peut voir par le changement d'échelle (11) que ce terme stabilise le soliton, en effet l'énergie totale du système est

$$E = E_2 + E_4 = aR + \frac{b}{R} \tag{15}$$

qui a un minimum $\left(\frac{dE}{dR} = 0,\ \frac{d^2E}{dR^2} > 0\right)$ pour $R = \sqrt{\frac{b}{a}}$ avec $E_2 = E_4 = \sqrt{ab}$.

Les équations d'Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}(x)$ sont difficiles à résoudre sauf si on fait l'ansatz statique de Skyrme[9] :

$$U_0(\vec{x}) = e^{i\vec{\tau}.\hat{r}\,\theta(r=|\vec{x}|)} = \cos\theta(r)\,\mathbb{1} + i\vec{\tau}.\hat{r}\,\sin\theta(r)\ . \tag{16}$$

Cela correspond à la configuration "hérisson" ("hedgehog") où le champ du pion est radial à la fois dans l'espace et l'isoespace $(\hat{\pi} = \hat{r})$. L'énergie du système est alors

$$M = -\int d^3x \left\{ -\frac{f_\pi^2}{4} \mathrm{Tr}\left[\partial_i U_0 \partial_i U_0^\dagger\right] + \frac{1}{32e^2} \mathrm{Tr}\left\{\left[(\partial_i U_0)U_0^\dagger, (\partial_j U_0)U_0^\dagger\right]^2\right\}\right\} \tag{17}$$

ce qui avec l'équ. (16) se réduit à (voir l'appendice A pour le calcul du terme en $\frac{\rho^2}{f_\pi}$)

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr\ \mathcal{H}(\theta(r)) \tag{18}$$

avec

$$\mathcal{H}(\theta(r)) = r^2\left[\frac{f_\pi^2}{2}\left(\theta'^2 + \frac{2}{r^2}\sin^2\theta\right) + \frac{\sin^2\theta}{2e^2r^2}\left(2\theta'^2 + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\right] . \tag{19}$$

L'équation classique du mouvement (Euler-Lagrange) est obtenue en minimisant M :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta'}\right) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = 0 \tag{20}$$

ce qui donne

$$\theta'' + \frac{2}{r}\theta' - \frac{\sin 2\theta}{r^2} + \frac{1}{e^2 f_\pi^2}\left(-\frac{\sin 2\theta \sin^2\theta}{r^4} + \frac{\theta'^2 \sin 2\theta}{r^2} + \frac{2\theta'' \sin^2\theta}{r^2}\right) = 0 \tag{21}$$

En imposant les conditions aux limites,

$$\begin{aligned} &\theta(0) = n\pi \\ &\theta(\infty) \longrightarrow 0\ , \end{aligned} \tag{21'}$$

on obtient des solutions de type soliton. Les propriétés géométriques associées au modèle σ non linéaire conduisent à des propriétés topologiques de ces solitons[10]. Nous verrons (c)) que n , dit nombre d'enroulement (" winding number"), a une interprétation physique. La figure 1 représente la solution[11] $\theta(r)$ pour n = 1, e = 5,45 et f_π = 64,5 MeV.

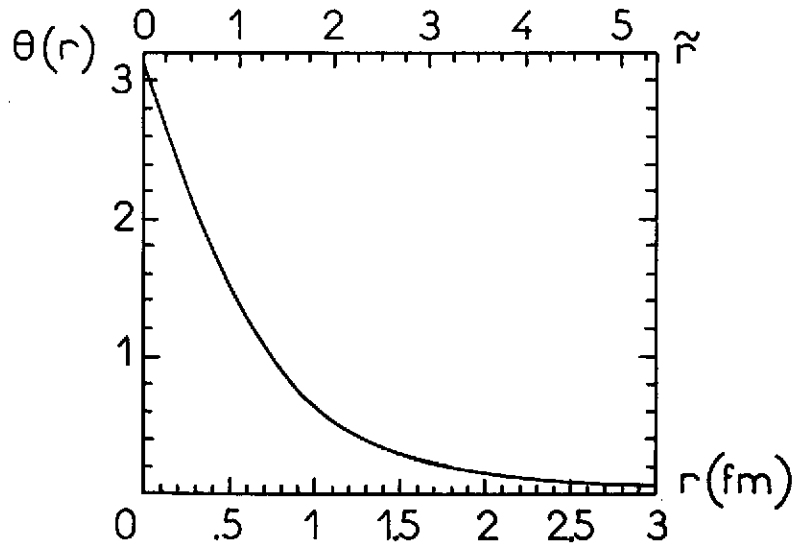

Fig 1 : Solution de l'équation (21) satisfaisant aux conditions (22) avec n = 1, e = 5,45, f_π = 64,5 et $\tilde{r} = e\, f_\pi\, r$ (ref. 11).

Le terme de Skyrme (14) peut être considéré comme une correction, d'ordre p^4, au terme σ non linéaire, d'ordre p^2, dans une description chirale effective[19]. Alors que le terme en p^2 est unique celui en p^4 ne l'est pas[10] (voir également section III c)).A l'ordre le plus bas en moment du pion (cf. eq.(7))

$$\partial_i U \sim i\vec{\tau}.\partial_i\vec{\pi}/f_\pi \tag{22}$$

et

$$\frac{1}{32e^2}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_i U U^+, \partial_j U U^+\right]^2 \sim \frac{1}{8e^2 f_\pi^4}\left(\partial_i\vec{\pi}\wedge\partial_j\vec{\pi}\right)^2 \tag{23}$$

ce qui a les nombres quantiques de l'échange d'un ρ massif dans l'onde D de la voie $\pi\pi$. Cela suggère que le paramètre e^2 peut être relié aux données $\pi\pi$ [10] (voir aussi sect. IV a)eqs. 98 et 99). L'addition du terme de Skyrme n'altère pas les théorèmes des pion mous (algèbre des courants) auxquels satisfait déjà le modèle σ non linéaire[10].

Dans l'hypothèse hérisson le nombre quantique

$$\vec{K} = \vec{J} + \vec{I} = (\vec{L} + \vec{S}) + \vec{I} \tag{24}$$

est tel que[10]

$$\left[\vec{K}, U_0(\vec{x})\right] = 0 \tag{25}$$

Ceci suggère que les skyrmions hérissons sont des scalaires dans l'espace $\vec{K}$ ($\vec{K}$ = 0). De plus $U_0(\vec{x})$ étant invariant par parité, les skyrmions hérissons peuvent être considérés comme des mélanges d'états $\vec{I} = \vec{J}$ et de parité positive. Nous allons maintenant décrire la propriété topologique remarquable du modèle σ non linéaire, à savoir l'existence d'un courant topologique conservé.

c) Courant topologique baryonique

Les propriétés géométriques spatiales non triviales auxquelles obéit le modèle σ non linéaire font qu'il existe, en plus des courants de Noether, un courant topologique conservé[10] :

$$B_\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr}\left[(U^+\partial_\nu U)(U^+\partial_\alpha U)(U^+\partial_\beta U)\right] \tag{26}$$

où $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ représente le tenseur totalement antisymétrique, $\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1 \ldots$

Ce courant est conservé :

$$\partial^\mu B_\mu = 0 . \tag{27}$$

On montre que

$$\int B_0 \, d^3x = n \tag{28}$$

Dans le cas de la solution hérisson (éq. 16)

$$B_0 = \frac{1}{4\pi^2} (\cos 2\theta - 1) \frac{1}{r^2} \frac{d\theta}{dr} , \tag{29}$$

alors avec les conditions (21') on obtient

$$B = \int B_0 \, d^3x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\theta \left[\cos 2\theta - 1\right] ,$$

$$B = \frac{1}{\pi} \left[\theta(0) - \theta(\infty) - \frac{1}{2}\left(\sin 2\theta(0) - \sin 2\theta(\infty)\right)\right] ,$$

$$B = n . \tag{29'}$$

Skyrme a proposé d'interpréter n comme le nombre baryonique et B_μ comme le courant baryonique, B_0 représentant alors la densité baryonique. Les baryons émergent comme solitons topologiques. La solution dessinée dans la fig. 1 correspond à un baryon classique, mélange d'états de même spin et isospin. Pour décrire les états physiques du nucléon et du delta il faut quantifier. Nous allons montrer comment cette quantification a été réalisée par A.N.W.[11] .

d) Quantification par l'introduction de coordonnées collectives

Si $U_0 = e^{i\vec{\tau}.\hat{r}\theta(r)}$ est une solution soliton, alors $U = AU_0A^+$ où A est une matrice constante de SU(2) est aussi une solution, $\mathcal{L}(x)$ étant invariant dans cette rotation globale. Une solution avec n'importe quel A n'est pas un état propre du spin et de l'isospin. Pour construire de bons états il faut traiter A comme variable quantique, comme coordonnée collective. Suivant ANW[11] ceci peut être réalisé en considérant A comme étant dépendant du temps,

$$A(t) = a_0(t)\mathbb{1} + i\vec{\tau}.\vec{a}(t), \tag{30}$$

et $A \in SU(2) \Rightarrow$

$$AA^{+} = 1 \iff \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu^2 = 1 . \tag{31}$$

Le lagrangien, obtenu en intégrant la densité donnée par l'éq. (13) et avec la substitution

$$U(x) = A(t)\, U_0(\vec{x})\, A^{+}(t), \tag{32}$$

s'écrit

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L}(x) = -M + \lambda\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\, \frac{\partial A^{+}}{\partial t}\right), \tag{33}$$

et avec (30)

$$L = -M + 2\lambda \sum_{\mu=0}^{3} (\dot{a}_\mu)^2 . \tag{34}$$

Le moment d'inertie λ est donné par :

$$\lambda = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty r^2 dr \left[f_\pi^2 \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{e^2} \left(\theta'^2 + \frac{\sin^2\theta}{r^2} \right) \right] . \tag{35}$$

Le moment conjugué à a_μ est

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_\mu} = 4\lambda\, \dot{a}_\mu . \tag{36}$$

L'hamiltonien est

$$H = \pi_\mu \dot{a}_\mu - L = M + \frac{1}{8\lambda} \sum_{\mu=0}^{3} \pi_\mu^2 . \tag{37}$$

On peut alors exécuter la quantification canonique usuelle

$$\pi_\mu = -i \frac{\partial}{\partial a_\mu} . \tag{38}$$

L'hamiltonien (37) devient

$$H = M + \frac{1}{8\lambda} \sum_{\mu=0}^{3} \left(-\frac{\partial^2}{\partial a_\mu^2} \right) . \tag{39}$$

Avec la contrainte (31), $\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial a_\mu^2}$ correspond au laplacien sur la sphère à 4 dimensions de rayon unité (S^3). On peut montrer que les fonctions propres correspondent à des polynomes en a_μ Par exemple le polynome $(a_0 + i a_1)^\ell$ est une fonction d'onde de spin et d'isospin égaux à $\ell/2$ La quantification des Skyrmions de SU(2) comme fermions demande des ℓ impairs . Dans le cas de Skyrmions de SU(3) on montre[20] que le skyrmion est un fermion (boson) si N_c est impair (pair). Si l'on accomplit des rotations infinitésimales dans l'espace et l'isoespace on obtient pour les opérateurs de spin et d'isospin les expressions suivantes[14]

$$\vec{J} = -\frac{i}{2}\left[a_0 \vec{\nabla}_a - \vec{a}\frac{\partial}{\partial a_0} + \vec{a} \wedge \vec{\nabla} a\right] , \tag{40}$$

$$\vec{I} = -\frac{i}{2}\left[-a_0 \vec{\nabla}_a + \vec{a}\frac{\partial}{\partial a_0} + \vec{a} \wedge \vec{\nabla} a\right] , \tag{41}$$

$$J^2 = I^2 = \frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^{3}\left(-\frac{\partial^2}{\partial a_\mu^2}\right) \tag{42}$$

et

$$H = M + \frac{J(J+1)}{2\lambda} . \tag{43}$$

Les fonctions des nucléons sont des polynomes du 1er degré, celles des Δ des polynomes du 3eme degré, par exemple en normalisant sur S^3 on obtient[11]

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1}{\pi}(a_1 + i a_2) , \quad |n\uparrow\rangle = \frac{i}{\pi}(a_0 - i a_3) \tag{44}$$

$$|\Delta^{++}, J_z = \tfrac{3}{2}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(a_1 + i a_2)^3 \quad \text{etc...} \tag{45}$$

Apartir de (43) on obtient pour J = 1/2

$$M_{proton} = M + \frac{3}{8\lambda} \tag{46}$$

et pour J = 3/2

$$M_\Delta = M + \frac{15}{8\lambda} \tag{47}$$

On peut alors calculer les propriétés statiques du nucléon et du delta dans un tel modèle.

e) Propriétés statiques du Nucléon et du Delta

Pour calculer les couplages faibles et électromagnétiques des baryons il faut calculer les courants de Noether, courants vectoriels et axiaux. Pour ce faire il faut considérer des transformations locales et infinitésimales de $SU_L(2)$ et $SU_R(2)$. Nous renvoyons le lecteur interessé aux références 10) et 11). Nous nous contenterons ici d'illustrer, par quelques formules simples, comment ont été calculées quelques propriétés statiques du nucléon. Ainsi la densité de charge isoscalaire est donnée par*

$$\rho(r) = \frac{e}{2} B_0(r) , \tag{48}$$

la charge isoscalaire est alors (cf.(29) et (29') avec n = 1)

$$\int \rho(r)\, d^3r = \frac{e}{2} . \tag{49}$$

* Rappelons que la charge électrique du nucléon est $Q = \frac{1}{2} B + I_3$.

Le rayon carré isoscalaire moyen est

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = \frac{2}{e}\int_0^\infty r^2 \rho(r)\, d^3r = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty r^2 \sin^2\theta\, \theta' dr \quad . \tag{50}$$

Le courant isoscalaire, $\vec{j}$, est égal à la moitié du courant baryonique, $\vec{B}$ (éq. 26),

$$\vec{j} = \frac{e}{2}\vec{B} \quad . \tag{51}$$

Le moment magnétique isoscalaire s'écrit

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\ \vec{r} \wedge \vec{j} \quad . \tag{52}$$

Si $\vec{\sigma}$ est l'opérateur de spin du nucléon on a

$$\vec{\mu} = \left[(\mu_n + \mu_p)/2\right]\vec{\sigma}\,\frac{e}{2M_N} \quad , \tag{53}$$

ce qui donne

$$\mu_n + \mu_p = -\frac{M_N}{3\pi\lambda}\int_0^\infty r^2 \sin^2\theta\ \theta' dr \quad . \tag{54}$$

quantité	Prédiction	Expérience	Modèle sac MIT
e	5,45		
F_π (MeV)	54,5	93	
M_N (MeV)	939*	939	939*
M_Δ (MeV)	1232*	1232	1232*
$\langle r_E^2 \rangle_0^{1/2}$ (fm)	0,59	0,72	0,76
$\langle r_E^2 \rangle_1^{1/2}$ (fm)	$\infty\ (m_\pi = 0)$	0,88	0,76
$\langle r_M^2 \rangle_0^{1/2}$ (fm)	0,92	0,81	0,62
$\langle r_M^2 \rangle_1^{1/2}$ (fm)	$\infty\ (m_\pi = 0)$	0,80	0
μ_p (nm)	1,87	2,79	1,90
μ_n (nm)	-1,31	-1,91	-1,27
μ_p/μ_n	1,43	1,46	1,45
g_A	0,61(1,02)	1,26	1,09
$g_{\pi NN}$	8,9	13,5	
$g_{\pi N\Delta}$	13,2	20,3	
$\mu_{N\Delta}$	2,3	3,3	

Table 1 : Propriétés statiques du nucléon et du delta (1232). Comparaison des prédictions du modèle de Skyrme, ANW[11], avec les valeurs expérimentales et les prédictions du modèle du sac du MIT[4]. Les étoiles signifient que les paramètres des modèles ont été ajustés pour reproduire les masses du nucléon et du delta.

Les expressions des autres observables peuvent être trouvées dans les réf. 10) et 11). Nous montrons dans la table 1 les résultats obtenus par ANW qui ont choisi de reproduire M_N et M_Δ (cf. eqs. 18,19,35,46 et 47) en ajustant e et f_π. Nous comparons leurs prédictions aux valeurs expérimentales et aux résultats du modèle du sac de MIT[4].

Les rayons carré électriques et magnétiques isovectoriels sont infinis comme attendus dans la limite chirale ($m_\pi = 0$). L'introduction d'un terme de masse du pion dans le lagrangien (brisure de la symétrie chirale) permet de calculer ces quantités[21]. La valeur de g_A entre parenthèses correspond à la valeur obtenue en introduisant de possibles corrections dues à la valeur finie de N_c[22]. On peut également[23] utiliser la valeur expérimentale de f_π et ajuster e de façon à reproduire la différence de masse $M_\Delta - M_N$. La valeur prédite pour g_A est beaucoup plus proche de la valeur expérimentale, mais la masse du nucléon est trop grande ($\sim$1,4 GeV). les prédictions ANW du modèle de Skyrme sont environ à 30% des valeurs expérimentales. Ceci pourrait âtre amélioré si on introduisait par exemple les autres mésons et interactions (voir section IV) présents dans la limite $N_c \longrightarrow \infty$ de QCD. Un autre champ d'application où l'on peut tester le modèle est l'étude de l'interaction Baryon-Baryon ce que nous allons considérer dans le chapitre suivant.

III) L' INTERACTION BARYON-BARYON A PARTIR DE L'INTERACTION SOLITON-SOLITON

a) Interaction Soliton Soliton

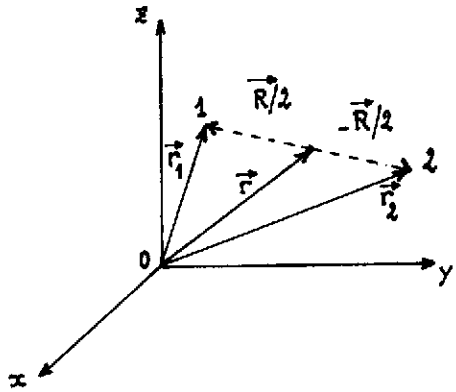

Fig. 2 : Représentation graphique des vecteurs donnant la position des solitons 1 et 2.

Considérons deux solitons 1 et 2 dont les positions sont définies comme sur la fig. 2 :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{R}/2 \\ \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{R}/2 \end{cases} \tag{55}$$

et

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{R} \tag{56}$$

Ils sont respectivement décrits par les champs $U_0(\vec{r}_1)$ et $U_0(\vec{r}_2)$ où $U_0(\vec{r})$ correspond à l'ansatz statique de Skyrme (éq. 16). On peut, suivant la méthode dérivée par ANW[11] et exposée dans la section II d), exécuter des rotations dans SU(2) en introduisant des coordonnées collectives pour obtenir de bons états de spin et d'isospin et quantifier. Le champ $U_0(\vec{r}_1)$ est transformé en

$$U_1(\vec{r},t) = A(t)\, U_0(\vec{r}_1)\, A^+(t) \tag{57}$$

et $U_0(\vec{r}_2)$ en

$$U_2(\vec{r}, t) = B(t)\, U_0(\vec{r}_2)\, B^+(t) \,. \tag{58}$$

Les matrices A et B sont des matrices de SU(2), telles que l'on ait les éqs. (30) et (31) pour A(t) et des expression analogues pour B(t) en termes de $b_\mu(t)$. Les opérateurs de spin et d'isospin sont donnés par les expressions (40) et (41) pour le soliton 1 et par des expressions analogues pour le soliton 2 avec a_μ remplacé par b_μ. Le spin et l'isospin total sont alors $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ et $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$.

On ne sait pas comment calculer le champ correspondant à une configuration à 2 solitons. Suivant Skyrme[9] on peut faire l'hypothèse que ce champ est donné par le produit* des 2 champs (57) et (58) des solitons 1 et 2,

$$U(\vec{r}, t) = U_1(\vec{r}_1, t)\, U_2(\vec{r}_2, t) \,, \tag{59}$$

$$U(\vec{r}, t) = A\, U_{01}\, C\, U_{02}\, B^+ \tag{60}$$

où

$$C = A^+ B \tag{61}$$

représente la rotation relative entre les deux solitons. On peut voir que $CC^+ = 1$ et si l'on écrit

$$C = c_0 \mathbb{1} + i\vec{\tau}\cdot\vec{c} \tag{62}$$

on a

$$c_0^2 + \vec{c}^{\,2} = 1 \tag{63}$$

Les c_μ s'expriment à partir de l'équation (61) en fonction des a_μ et b_μ. Si l'on porte le champ $U(\vec{r},t)$ dans le lagrangien $\mathcal{L}(U(x))$ de l'éq. 13, on obtient, pour la densité d'énergie de la configuration à 2 solitons (éq. 60),

$$\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U_1 U_2) = \mathcal{L}(U_1) + \mathcal{L}(U_2) - \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{R}, C) \tag{64}$$

on peut interpréter $\mathcal{V}$ comme étant la densité de l'interaction (potentiel) entre les 2 skyrmions**. Dans l'appendice B nous démontrons l'équation (64) pour le terme σ non linéaire, $\mathcal{L}_2(U(x))$ de l'éq. 8, et nous donnons l'expression de $\mathcal{V}$ pour ce même terme.

Pour 2 solitons très éloignés ($\vec{R} \to \infty$), $\mathcal{V}(\vec{r}, \vec{R}, C) \to 0$ et l'ansatz $U = U_1 U_2$ correspond à la solution exacte. Si les deux solitons sont superposés ($\vec{R} = 0$) et s'ils tournent ensemble (A = B)

* On peut vérifier que le nombre baryonique d'une telle configuration est égal à 2 (cf. éqs. 26 et 28).

** On négligera par la suite les termes provenant des dérivées temporelles. La rotation du soliton étant lente ces termes donnent une faible contribution.

alors $U_1 = U_2$, $U = U_1^2$ et

$$\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U_1^2) = \mathcal{L}\left[e^{i\vec{\tau}.\hat{r}\,2\theta(r)}\right] \tag{65}$$

On peut résoudre l'éq. (21) avec n=2 et obtenir la fonction θ pour une configuration de nombre baryonique 2, θ (r, B=2). Si

$$2\theta(r, B=1) \simeq \theta(r, B=2) \tag{66}$$

alors la solution produit sera proche de la solution exacte. L'équation (66) est assez bien vérifiée. On s'attend à ce que l'approximation du produit (59) soit une assez bonne approximation à courte et à grande distance, il pourrait y avoir des corrections dans la région intermédiaire.

A partir des équations (60) et (64) on obtient pour l'interaction statique soliton-soliton[12, 14] (voir également appendice B)

$$v(\vec{R},C) = \int d^3r\, V(\vec{r},\vec{R},C) = \int d^3r\left[\frac{f_\pi^2}{2}\, Tr\left(U_{01}^+(\vec{\nabla}U_{01})C\,U_{02}(\vec{\nabla}U_{02}^+)C^+\right) + \cdots\right]. \tag{67}$$

L'expression du potentiel provenant du terme de Skyrme est donnée dans les réf. 12) ou 14). On peut réécrire (67) comme

$$v(R,C) = \alpha_1 + \alpha_2 c_0^2 + \alpha_3 \frac{(\vec{c}.\vec{R})^2}{\vec{R}^2} + \alpha_4 c_0^4 + \alpha_5 c_0^2 \frac{(\vec{c}.\vec{R})^2}{\vec{R}^2} + \alpha_6 \frac{(\vec{c}.\vec{R})^4}{\vec{R}^4} \tag{68}$$

Les coefficients $\alpha_j (j=1,6)$ peuvent être calculés numériquement par intégrations de fonctions obtenues en développant (67) et dépendant des $\theta(r_i)$ (i = 1,2) (et de leurs dérivées) solutions de l'équation (21). On peut alors calculer un potentiel statique nucléon-nucléon.

b) Potentiel statique nucléon-nucléon

On peut décomposer en isospin le potentiel statique NN de la manière suivante,

$$V(\vec{R}) = V^+(\vec{R}) + \vec{\tau}_1.\vec{\tau}_2\, V^-(\vec{R}) . \tag{69}$$

Chaque composante d'isospin a une composante centrale, spin-spin et tenseur et avec $R = |\vec{R}|$,

$$V^\pm(\vec{R}) = V_C^\pm(R) + \vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2\, V_{SS}^\pm(R) + \left(\frac{3\vec{\sigma}_1.\vec{R}\,\vec{\sigma}_2.\vec{R}}{R^2} - \vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2\right)V_T^\pm(R) . \tag{70}$$

On peut calculer la valeur moyenne de $V(\vec{R})$ entre, par exemple, 2 états de 2 protons de spin +1/2, on trouve

$$\langle p_1\uparrow p_2\uparrow|V(R)|p_1\uparrow p_2\uparrow\rangle = V_C^+ + V_C^- + V_{SS}^+ + 2(V_T^+ + V_T^-) . \tag{71}$$

En utilisant les fonctions des nucléons skyrmions (éq. 44), on peut également calculer la valeur moyenne du potentiel soliton-soliton (éq. 68) entre 2 états de 2 protons de spin + 1/2, on a :

$$\langle p_1\uparrow p_2\uparrow|v(R,C)|p_1\uparrow p_2\uparrow\rangle = \int d^4a\, d^4b\, \delta\left(\sum a_\mu^2 - 1\right)$$
$$\delta\left(\sum b_\mu^2 - 1\right)\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) v(\vec{R}, C)$$
$$= \alpha_1 + \frac{5}{18}(\alpha_2+\alpha_3) + \frac{7}{48}\left(\alpha_4 + \frac{\alpha_5}{3} + \alpha_6\right). \qquad (72)$$

L'égalité de ces deux éléments (éqs. 71 et 72) donne une relation entre les $V^{\pm}_{c,ss,T}$ et les $\alpha_j\ (j=1,6)$. On peut construire cinq autres relations en moyennant les potentiels par d'autres états, on obtient ainsi les expressions des $V^{\pm}_{c,ss,T}$ en fonction des $\alpha_j\ (j=1,6)$. On trouve

$$V_C^- = V_{SS}^+ = V_T^+ = 0, \qquad (73)$$

$$V_C^+ = \alpha_1 + (\alpha_2+\alpha_3)/4 + (\alpha_4+\alpha_6)/8 + \alpha_5/24,$$
$$V_{SS}^- = \alpha_2/36 - \alpha_3/108 + \alpha_4/48 + \alpha_5/432 - \alpha_6/144, \qquad (74)$$

et

$$V_T^- = \alpha_3/54 + \alpha_5/432 + \alpha_6/72.$$

Les résultats de l'éq.(73) sont en accord avec la signature de l'échange d'un pion qui n'a comme composante que les termes V_{SS}^- et V_T^-.

Les potentiels correspondant aux éqs.(74) sont tracés sur la figure 3. Pour les grandes valeurs de R on peut montrer que

$$V_T^- = \frac{25,6}{4 f_\pi^2 e^4}\ \frac{1}{R^3}. \qquad (75)$$

D'autre part pour un pion de masse nulle

$$V_T^{OPE}(m_\pi = 0) = \frac{g_{\pi NN}^2}{16\pi M_N^2 R^3}, \qquad (76)$$

en identifiant ces deux dernières équations, on trouve

$$\frac{g_{\pi NN}}{2M} = \frac{9}{f_\pi e^2}. \qquad (77)$$

Ceci est la même relation que celle trouvée par ANW à partir de la valeur moyenne du champ du pion à grande distance. Les courbes tracées sur la fig. 3 correspondent à f_π = 93 MeV (valeur expérimentale) et à e = 3.6, valeur pour laquelle $g_{\pi NN}$ (éq. 77) est proche de la valeur expérimentale.

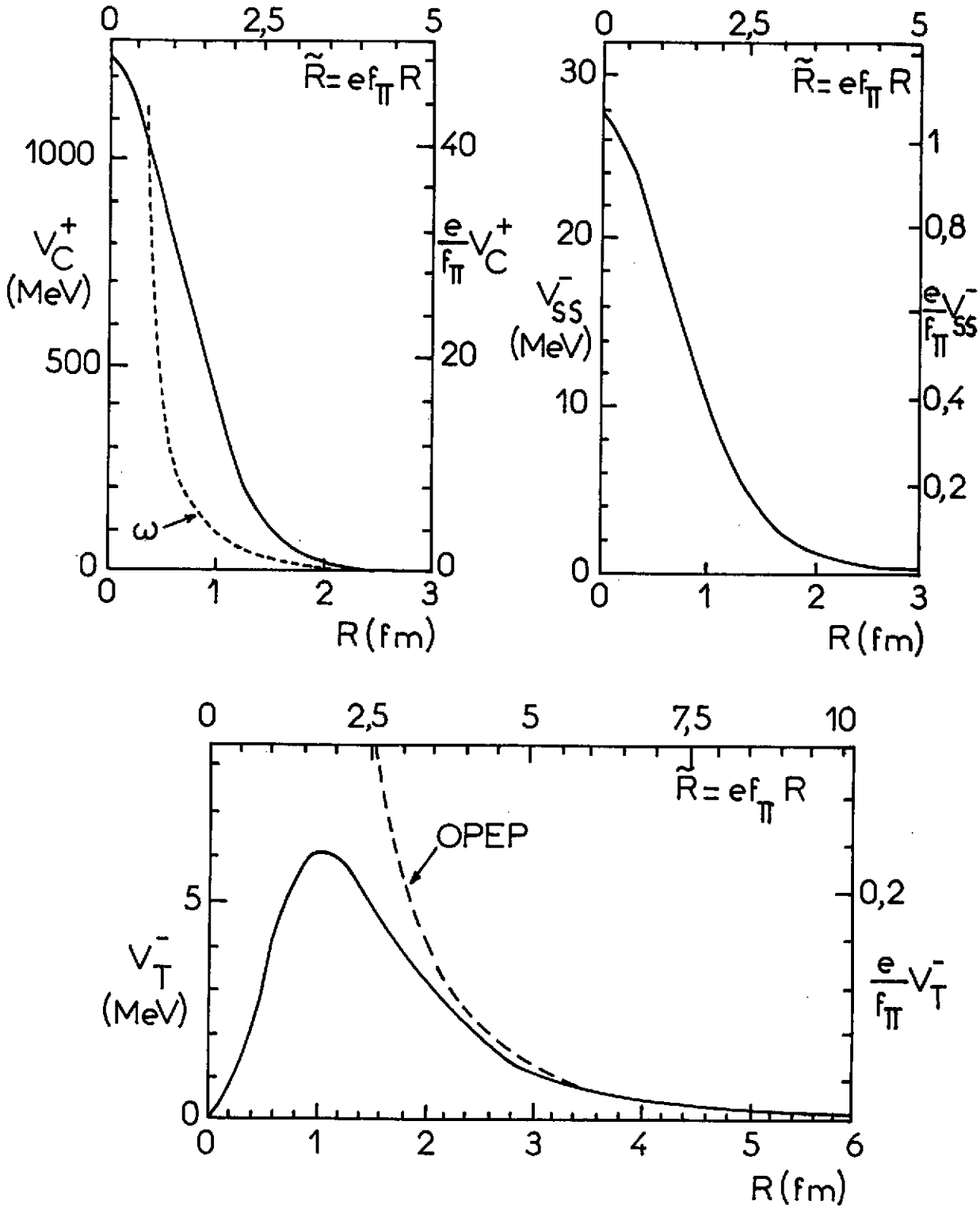

Fig. 3 : Potentiels NN calculés (réf.12) dans le cadre du modèle de Skyrme (voir texte)

Si l'on fait la tranformation d'échelle

$$\tilde{R} = e f_\pi R , \tag{78}$$

où $\tilde{R}$ est sans dimension, alors l'équation (21) devient une équation différentielle pour $\theta(\tilde{R})$ et le potentiel (cf. éq. 67) s'écrit

$$V(R) = \frac{f_\pi}{e} \tilde{V}(\tilde{R}) , \tag{79}$$

où $\tilde{V}(\tilde{R})$ est sans dimension. Nous avons également porté les échelles, indépendantes des paramètres, de $\tilde{V}$ en donction de $\tilde{R}$ sur la fig. 3.

Le potentiel V_C^+ montre une répulsion de l'ordre de 1 GeV à courte portée ce qui est en accord avec ce que nous connaissons de l'interaction NN. Pour comparaison nous donnons la répulsion provenant de l'échange conventionnel d'un méson ω de couplage $g_\omega^2/4\pi = 10$. Le potentiel $V_{SS}^- \sim 0$ pour $r > 3$ fm, ce qu'on attend de l'échange d'un pion de masse nulle dont le potentiel spin-spin est nul. Le potentiel V_T^- tend bien pour $R \gtrsim 3$ fm vers celui de l'échange d'un pion de masse nulle que nous avons également tracé sur la fig. 3.

Connaissant les fonctions d'onde du Δ (éq. 45) on peut calculer les potentiels[12] de transition $NN \to N\Delta$, $NN \to \Delta\Delta$ et également les potentiels $N\Delta \to N\Delta$ et $\Delta\Delta \to \Delta\Delta$. Par exemple

$$\langle \Delta, N, S = 2, S_z = 0 | v | N, N, S = 0, S_z = 0 \rangle = -6\sqrt{2}\, V_T^- , \tag{80}$$

ce potentiel est donc attractif ce qui est en accord avec le calcul de l'échange d'un pion.

En postulant l'ansatz du produit pour la configuration à 3 solitons on pourrait également évaluer une force à 3 corps entre 3 nucléons. Une estimation de la valeur du potentiel à 3 corps à l'origine a été donnée dans la réf. 24. On a

$$V_2(0) = M(B=2) - 2M(B=1) \simeq 1{,}4 \text{ GeV} , \tag{81}$$

$$V_3(0,0) = M(B=3) - 3M(B=1) - 3V_2(0) \simeq -58 \text{ MeV}, \tag{82}$$

chiffres obtenus avec M(B = 1) = 1,4 GeV, M(B = 2) = 4,2 GeV et M(B = 3) = 8,4 GeV. Alors que la répulsion à l'origine du potentiel à 2 corps est grande, cette évaluation donne un faible potentiel 3 corps à l'origine.

On peut voir enfin sur la fig. 3 que le potentiel $^1S_0$, $V(^1S_0) = V_c^+ - 3V_{SS}^-$, est partout répulsif alors que pour les potentiels réalistes, comme celui de Paris[25], ce potentiel est attractif ($\sim$ -50 MeV) à moyenne portée ($\sim$ .8 fm) et est responsable de la liaison nucléaire. Dans le cadre du modèle de Skyrme ceci pose un problème que nous allons considérer maintenant.

c) Problème de la liaison nucléaire

En plus du terme de Skyrme il existe un terme symétrique d'ordre 4 en dérivée du champ U(x)[26],

$$\mathcal{L}_{4S} = \frac{\gamma}{8e^2}\left[\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^+\right]\right]^2 \quad . \tag{83}$$

Nous avons ajouté ce terme au lagrangien (13) et considéré le lagrangien[13,14]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{4A} + \mathcal{L}_{4S} \tag{84}$$

Le terme $\mathcal{L}_{4S}$ contribue de manière négative à la masse du soliton, il déstabilise le soliton. Pour une valeur de e donnée, il existe une valeur maximale critique de γ. La valeur de γ pourrait être déterminée à partir de l'onde $S\pi\pi$. En plus d'un terme quadratique en dérivée temporelle contribuant au λ, $\mathcal{L}_{4S}$ donne un terme quartic petit que nous avons négligé. Le potentiel $V_{c,4S}^+$ est attractif mais pas suffisamment pour contrebalancer la répulsion provenant de $\mathcal{L}_{4A}$.

Nous avons alors introduit le méson vecteur ω dont le potentiel $V_{c,\omega}^+$ est répulsif mais de portée plus courte que $V_{c,4A}^+$. Le lagrangien s'écrit[27]

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu \omega_\nu(r) - \partial_\nu \omega_\mu(r)\right)^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu(r)\omega^\mu(r) + \beta\, \omega_\mu(r) B^\mu(r) \tag{85}$$

Le méson vecteur ω stabilise le soliton. Si l'on considère m_ω grand alors on montre que $\mathcal{L}_\omega$ est équivalent à un terme, $\mathcal{L}_\omega^{App}$, du 6ème ordre en dérivée du champ U et nous avons[28]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{4A} + \mathcal{L}_{4S} + \mathcal{L}_\omega^{App} \tag{86}$$

On montre de plus que $\mathcal{L}_{4S}$ (éq. 83) est l'approximation de grande masse d'un méson scalaire singulet chiral $\varepsilon(r)$ (interaction $\pi\pi$ dans l'onde S),

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varepsilon(r)\right)^2 - \frac{1}{2} m_\varepsilon^2 \varepsilon^2(r) - m_\varepsilon^2 \frac{\gamma}{4e^2}\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^+\right] \tag{87}$$

Une alternative au lagrangien de l'équation (86) est alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{4A} + \mathcal{L}_\varepsilon + \mathcal{L}_\omega \tag{88}$$

A partir des lagrangiens (86) et (88) nous avons reproduit les masses du nucléon et du delta et obtenu un potentiel V_c^+ attractif à longue portée[28]. Suivant que l'on considère l'éq.(86) ou l'éq.(88) les va-

leurs de f_π, e, γ et β sont différentes ce qui nous montre que les effets non locaux de masse finie des mésons peuvent être importants. Ceci nous a amené à étudier un lagrangien où $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{4A}$ sont remplacés par des termes construits à partir des autres mésons vecteurs ρ et A_1[29]. Nous allons, dans la section suivante décrire brièvement ce travail.

IV) DEVELOPPEMENTS RECENTS DE CONSTRUCTION DE LA PHYSIQUE HADRONIQUE A BASSE ENERGIE A PARTIR DE LAGRANGIENS EFFECTIFS

a) Introduction des mésons vecteurs ρ et A_1

Nous avons considéré un lagrangien où les mésons vecteurs ρ et A_1 sont des particules de jauge associées à la symétrie $SU_L(2) \times SU_R(2)$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\pi,\rho,A_1} + \mathcal{L}_\varepsilon + \mathcal{L}_\omega . \tag{89}$$

On a[14,29]

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,A_1} = f\,\mathrm{Tr}\left[D_\mu U D^\mu U^+\right] - \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left[X^2_{\mu\nu} + Y^2_{\mu\nu}\right] + \frac{m_\rho^2}{4}\mathrm{Tr}\left[X^2_\mu + Y^2_\mu\right], \tag{90}$$

avec pour la dérivée covariante

$$D_\mu U = \partial_\mu U + ig\left(X_\mu U - U Y_\mu\right) \tag{91}$$

et pour les termes d'énergie cinétique

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu + ig\left[X_\mu, X_\nu\right], \\ Y_{\mu\nu} &= \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu + ig\left[Y_\mu, Y_\nu\right]. \end{aligned} \tag{92}$$

U est donné par l'éq.(6), $X_\mu = \vec{X}_\mu . \vec{\tau}$ et $Y_\mu = \vec{Y}_\mu . \vec{\tau}$. Les vecteurs matrice $\vec{X}_\mu$ et $\vec{Y}_\mu$ sont les champs isovecteurs gauche et droit. Le lagrangien (90) est invariant par la transformation globale chirale (9) avec en plus

$$\begin{aligned} X_\mu &\longrightarrow e^{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}} X_\mu e^{-i\vec{\alpha}.\vec{\tau}}, \\ Y_\mu &\longrightarrow e^{-i\vec{\beta}.\vec{\tau}} Y_\mu e^{i\vec{\beta}.\vec{\tau}}. \end{aligned} \tag{93}$$

Le développement du lagrangien (90) à l'ordre quadratique en champ du pion (cf. éq.(7)) et sa diagonalisation permettent d'identifier son contenu en particules physiques[14], on obtient pour le méson ρ

$$\vec{\rho}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{X}_\mu + \vec{Y}_\mu\right) \tag{94}$$

et pour le méson A_1

$$\vec{A}_{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{X}_\mu - \vec{Y}_\mu\right) + \frac{\left(m_A^2 - m_\rho^2\right)^{1/2}}{m_A\, m_\rho}\,\partial_\mu \vec{\pi}\ , \tag{95}$$

avec

$$m_A^2 = m_\rho^2 + 8 f g^2 \quad . \tag{96}$$

La normalisation au terme cinétique du pion (1) donne

$$f = \frac{f_\pi^2}{4} \frac{m_A^2}{m_\rho^2} \quad . \tag{97}$$

On peut voir que les paramètres sont fixés par la physique des mésons. D'autre part les propriétés électromagnétiques peuvent être calculées à partir de l'hypothèse de dominance vectorielle où le photon se couple au nucléon via les mésons ρ , A_1 et ω .

Le lagrangien (90) se résoud avec la transformation hérisson (16) et donne d'assez bons résultats pour les propriétés du nucléon et du delta et pour l'interaction NN[29]. Remarquons que dans la limite de grande masse pour les mésons ρ et A_1.

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,A_1} \longrightarrow \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{4A} \tag{98}$$

avec

$$m_{A_1} = \sqrt{3}\, m_\rho$$

et

$$e^2 = 2g^2\left[1 - \frac{m_\rho^4}{m_A^4}\right]^{-2} = \frac{81}{32}\, g^2 \quad . \tag{99}$$

Comme annoncé dans la section II b) le paramètre e est relié aux paramètres du méson ρ . Avant de faire quelques conclusions nous voulons exposer brièvement des recherches sur la construction d'un modèle de symétrie chirale à 2 phases.

b) Modèle de symétrie chirale à 2 phases

Dans la description du nucléon comme Skyrmion le degré de liberté des quarks et des gluons ont été éliminés au profit de ceux des pions et des mésons vecteurs. D'autre part le nucléon a aussi été décrit comme un sac de quarks (et de gluons) dans le modèle du sac de MIT (voir table 1). Si l'on savait calculer toutes les corrections, par exemple termes en dérivée d'ordre supérieur ou introduction de mésons plus lourds pour le skyrmion..., effets d'échanges multigluoniques pour le modèle des sacs..., les deux approches devraient être équivalentes et pouvoir décrire la physique hadronique à basse énergie. Alternativement on pourrait imaginer un modèle hybride où un sac de quarks (et gluons) serait entouré de mésons. L'idée est d'introduire une "bulle" de quarks (et gluons) à l'intérieur du Skyrmion[16] comme schématisé sur la figure 4.

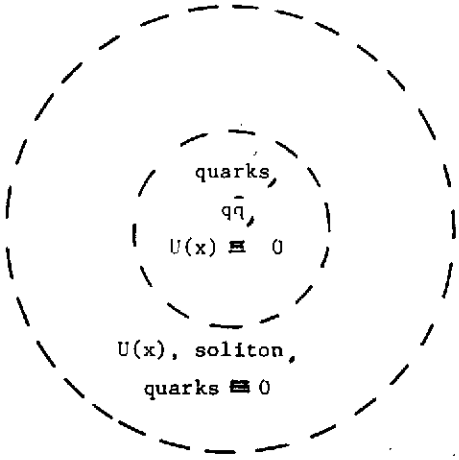

Fig. 4 : Schéma d'un modèle de symétrie chirale à 2 phases.

La théorie des quarks dans la bulle est régie par QCD et les quarks, via le mécanisme de Nambu-Goldstone[8b], sont la source du champ U(x). A l'extérieur la topologie joue un rôle important, la bulle est un défaut dans le champ chiral du soliton. La réalisation du modèle doit assurer la répartition des charges baryoniques, électriques et axiales, répartition dans laquelle les paires $q\bar{q}$ de la mer jouent un rôle essentiel. Une première estimation des propriétés statiques semble montrer l'indépendance des résultats par rapport à la taille de la bulle[16a]. Enfin le lecteur intéressé par les possibilités de ce modèle pourra lire la réf.(16b). Dans ce travail[16b], la reproduction des facteurs de forme du nucléon et du pion est obtenue d'une manière empirique en considérant qu'environ 50% du couplage du photon se fait directement sur les quarks du nucléon ou du pion et que le reste se fait indirectement au travers de la dominance vectorielle.

V) QUELQUES REMARQUES ET CONCLUSIONS

Tout d'abord nous ferons quelques remarques complémentaires à notre exposé. Nous n'avons pas mentionné le fait important que tout lagrangien effectif réaliste doit satisfaire aux identités de Ward qui sont une conséquence des symétries globales auxquelles satisfait QCD. Il doit satisfaire également aux identités "anormales" de Ward provenant des "anomalies" de QCD. Witten[20] a montré comment on pouvait tenir compte des anomalies chirales de QCD en introduisant dans SU(3) (trois saveurs de quarks, u, d et s) l'action de Wess-Zumino[10,11]. Cette action est nulle dans le cas de SU(2) quand le méson ω est absent, c'est à dire pour le lagrangien (13) mais est présente pour le lagrangien (89) et doit être introduite[30,31]. A un niveau phénoménologique elle permet de tenir compte, par exemple, des désintégrations $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$ et $\omega \longrightarrow \pi\rho$.

En principe le lagrangien effectif mésique devrait pouvoir être déduit de QCD en intégrant sur les degrés de liberté des quarks et des gluons. Cette "bosonisation" est une tâche difficile et très compliquée dans l'espace à 4 dimensions[6]. Signalons cependant la bosonisation, par la méthode d'intégrale de chemin, d'un modèle de quark superconducteur de type Nambu-Jona-Lasinio[32].

La symétrie chirale, dans le cas du secteur étrange (3 saveurs) est, à cause de la grande masse du quark s ($\sim$ 200 MeV), une moins bonne symétrie de la nature. On devrait s'attendre à une moins bonne phénoménologie dans le cas de la généralisation du modèle de Skyrme à $SU_L(3) \times SU_R(3)$[33].

Nous n'avons considéré que la force statique Skyrmion-Skyrmion. En introduisant une dépendance temporelle dans la distance relatice entre les solitons, R(t), (éq. 56) on pourra générer un potentiel spin-orbit et un potentiel dépendant de la vélocité. Il y a aussi des termes supplémentaires provenant des dérivées temporelles que nous avons négligés en dérivant (67). Ces termes sont petits et contribuent attractivement à V_C^+. Une autre contribution attractive, à l'interaction soliton-soliton vient de l'introduction du potentiel de transition $NN \rightarrow N\Delta$ [34] (voir également éq. 80). Jusqu'à présent l'interaction NN est qualitativement assez bien décrite dans le cadre du modèle de Skyrme cependant une étude plus quantitative reste encore à faire.

Le modèle de Skyrme peut être utilisé non seulement pour décrire le nucléon et le delta et l'interaction nucléon-nucléon mais aussi pour étudier l'interaction Méson-Méson en particulier $\pi\pi$ [26,35] et Méson-baryon en particulier πN , KN et $\bar{K}N$[36]. La diffusion pion-nucléon est produite en considérant des fluctuations quadratiques autour de la configuration classique[10,36].

Enfin, en conclusion, nous allons résumer quelques points forts du modèle de Skyrme. Dans ce modèle d'interaction de mésons hautement non linéaire, la géométrie conspire avec la dynamique pour donner naissance à une configuration de champ étendu et stable dont les propriétés sont semblables à celles des hadrons. C'est un schéma approximant QCD non perturbatif. Le modèle de Skyrme possède la symétrie chirale, issue capitale dans l'algèbre des courants et il satisfait aux théorèmes et à la physique des pions mous. Il permet de relier les propriétés des mésons à celles hadrons. Il donne une assez bonne description de la physique hadronique à basse énergie.

Remerciements

Je tiens à remercier mes collègues, W.N. Cottingham, M. Lacombe et R. Vinh Mau avec lesquels une partie du travail présenté ici a été réalisée. J'ai beaucoup appris avec leur collaboration. C'est grâce à leur concours fructueux que j'ai été à même d'apprécier l'apport du modèle de Skyrme à la physique hadronique de basse énergie.

APPENDICE A : CALCUL DE LA MASSE DUE AU TERME σ NON LINEAIRE

Rappelons que

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{A1}$$

$$Tr(AB) = Tr(BA) \tag{A2}$$

et que (permutation circulaire)

$$Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB) \ldots \tag{A3}$$

Les matrices (d'isospin) de Pauli sont

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A4}$$

On voit que

$$Tr(\tau_{i,\, i=1,2,3}) = 0 \tag{A5}$$

Rappelons

$$\tau_i \tau_j = \varepsilon_{ijk}\, i\, \tau_k \tag{A6}$$

où ε_{ijk} est le tenseur totalement antisymétrique. La matrice U_0 (éq. 16) étant unitaire,

$$U_0 U_0^+ = 1 \tag{A7}$$

et

$$U_0(\partial_i U_0^+) + (\partial_i U_0) U_0^+ = 0 \tag{A8}$$

La contribution du terme σ non linéaire à la densité de masse du soliton est proportionnelle à (éq. 17)

$$\begin{aligned} Tr\left[\partial_i U_0 \partial_i U_0^+\right] &= Tr\left[(\partial_i U_0) U_0^+ U_0 (\partial_i U_0^+)\right] \\ &= -Tr\left[(\partial_i U_0) U_0^+ (\partial_i U_0) U_0^+\right] \\ &= Tr\left[\vec{V}.\vec{V}\right], \end{aligned} \tag{A9}$$

avec

$$\vec{V} = -i(\vec{\nabla} U_0) U_0^+ \quad . \tag{A10}$$

A partir de (16) on obtient

$$\vec{V} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,\vec{a} + \frac{d\theta}{dr}\,\vec{b} - \frac{\sin\theta}{r}\,\vec{c}\,, \tag{A11}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{\tau} - \hat{r}(\vec{\tau}.\hat{r}) \\ \vec{b} = \hat{r}(\vec{\tau}.\hat{r}) \\ \vec{c} = \vec{\tau} \wedge \hat{r} \end{cases} \tag{A12}$$

On a

$$\begin{cases} \vec{a}^2 = \vec{c}^2 = 2 \\ \vec{b}^2 = 1 \\ \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{b} = 0 \\ \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = 0 \end{cases} \tag{A13}$$

Si l'on a un vecteur matrice tel que

$$\vec{k} = k_a \vec{a} + k_b \vec{b} + k_c \vec{c} \ , \tag{A14}$$

alors (A13) entraîne

$$\vec{k}^2 = (2k_a^2 + k_b^2 + 2k_c^2)\,\mathbb{1} \ , \tag{A15}$$

d'où

$$\mathrm{Tr}\left[\partial_i U_0 \partial_i U_0^+\right] = \mathrm{Tr}\left[\vec{V}^2\right] = 2\left[\theta'^2 + \frac{2}{r^2}\sin^2\theta\right] , \tag{A16}$$

ce qui donne bien le résultat de l'éq.(19).

APPENDICE B : CALCUL DU POTENTIEL DÛ AU σ NON LINEAIRE

Nous avons pour le terme σ non linéaire

$$\partial_\mu U \partial^\mu U^+ = \partial_0 U \partial_0 U^+ - \vec{\nabla} U . \vec{\nabla} U^+ \tag{B1}$$

où ∂_0 désigne la dérivée par rapport à t, cependant comme indiqué dans la section IIIa), nous négligeons ce terme en dérivées temporelles. $\mathcal{L}_2(U)$ de l'éq.(8) avec l'ansatz (60) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(U) = -\frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\left[\vec{\nabla}U.\vec{\nabla}U^+\right] &= -\frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\Big\{\big[A(\vec{\nabla}U_{01})C\,U_{02}B^+ \\ &\quad + A\,U_{01}C(\vec{\nabla}U_{02})B^+\big]\big[B\,U_{02}^+C^+(\vec{\nabla}U_{01}^+)A^+ + B(\vec{\nabla}U_{02}^+)C^+U_{01}^+A^+\big]\Big\} \\ &= -\frac{f_\pi^2}{4}\Big\{\mathrm{Tr}\left[\vec{\nabla}U_{01}\vec{\nabla}U_{01}^+\right] + \mathrm{Tr}\left[\vec{\nabla}U_{02}\vec{\nabla}U_{02}^+\right] \\ &\quad + \mathrm{Tr}\left[A(\vec{\nabla}U_{01})C\,U_{02}(\vec{\nabla}U_{02}^+)C^+U_{01}^+A^+\right] \\ &\quad + \mathrm{Tr}\left[A\,U_{01}C(\vec{\nabla}U_{02})U_{02}^+C^+(\vec{\nabla}U_{01}^+)A^+\right]\Big\} \end{aligned} \tag{B2}$$

$$= \mathcal{L}_2(U_1) + \mathcal{L}_2(U_2) - \mathcal{V}_2(\vec{r},\vec{R},C) \tag{B3}$$

ce qui correspond bien à l'éq.(64), avec

$$V_2 = \frac{f_\pi^2}{2} \mathrm{Tr}\left[U_{01}^{+}(\vec{\nabla}U_{01})CU_{02}(\vec{\nabla}U_{02})^{+}C^{+}\right] \tag{B4}$$

ce qui donne bien l'éq.(67). Nous avons utilisé les propriétés (A3) et (A8) pour obtenir (B4) à partir de (B2).

REFERENCES

1. W. Marciano and H. Pagels, Phys. Reports 36C (1976) 137.
   F. Wilczek. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 32 (1982) 177.
2. B. Svetitsky, Proceeding of "Quark matter 86", Nucl. Phys. A in press.
3. M.A. Shifman, A.J. Vainstein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B147 (1979) 385, 448, 519.
4. A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson and C.B. Thorn, Phys. Rev. D10 (1974) 2599.
5. J. Carlson, J. Kogut and V.R. Pandharipande, Phys. Rev. D27 (1983) 233.
   N. Isgur and J. Paton, Phys. Rev. D31 (1985) 2910.
6. G. t'Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461 ; Ibid B75 (1974) 461.
7. E. Witten, Nucl. Phys. B160 (1979) 57.
8. Voir également dans ce même volume les cours a) de P. Depommier et b) de P. Guichon, Ecole Joliot-Curie 1986.
9. T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London A260 (1961) 127 ; Nucl. Phys. 31 (1962) 556.
10. I. Zahed and G.E. Brown, Phys. Report 142 (1986) 1.
11. G.S. Adkins, C.R. Naopi and E. Witten, Nucl. Phys. B228 (1983) 552.
12. R. Vinh Mau. M. Lacombe, B. Loiseau, W.N. Cottingham and P. Lisboa, Phys. Lett. 150B (1985) 259.
13. M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau and W.N. Cottingham, Phys. Lett. 161B (1985) 31.
14. R. Vinh Mau, Skyrme solitons and low energy hadronic physics, in Nucleon-Nucleon and Nucleon-Antinucleon Interactions, edited by H. Mitter and W. Plessas, Springer-Verlag Wien-New York 1985, pp. 91-127.
15. M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau and W.N. Cottingham, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 170.
16. a) G.E. Brown, A.D. Jackson, M. Rho and V. Vento, Phys. Lett. 140B (1984) 285.
    b) G.E. Brown, M. Rho and W. Weise, Nucl. Phys. A454 (1986) 669.
    c) D. Klabucar and G.E. Brown, Nucl. Phys. A454 (1986) 589.
17. Voir par exemple les revues de W. Weise, G. Miller and F. Myhrer dans, Quarks and Nuclei, Ed. by W. Weise, International Review of Nuclear Physics, Vol. I, 1984, World Scientific.
18. Voir par exemple la revue de B.W. Lee, Chiral Dynamics (Gordon and Breach, New York, 1972).
19. S. Weinberg, Physica 96 (1979) 325.
20. E. Witten, Nucl. Phys. B223 (1983) 422 ; ibid 433.
21. G.S. Adkins and C.R. Nappi, Nucl. Phys. B233 (1984) 109.
22. G. Karl and J.E. Paton, Phys. Rev. D30 (1984) 238.
23. A.D. Jackson and M. Rho, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 751.
24. M. Rho, Lectures given at the International School of Nuclear Physics, Erice (Sicily), Italy, 6-18 April (1983). Progress in Particle and Nuclear Physics, V.11, Ed. by D. Wilkinson.

25. M. Lacombe, B. Loiseau, J-M. Richard, R. Vinh Mau. J. Côté, P. Pires and R. de Tourreil, Phys. Rev. C21 (1980) 860.

26. J.F. Donoghue, E. Golowich and B.R. Holstein, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 747.

27. G. Adkins, C.R. Nappi, Phys. Lett. 137B (1984) 251.

28. M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau and W.N. Cottingham, Phys. Lett. 169B (1986) 121.

29. M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau and W.N. Cottingham, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 170.

30. U.G. Meissner and I. Zahed, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 1035.

31. M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau and W.N. Cottingham en préparation.

32. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B271 (1986) 188.

33. C. Nappi, Nuclear Chromodynamics : Quarks and Gluons in Particles and Nuclei, proceeding of the ITP Workshop, Santa Barbara (1985) et. by S. Brodsky and E. Moniz (World Scientific Singapore 1986).

34. A. de Pace, H. Müther and A. Faessler, Nucl. Phys. A457 (1986) 541.

35. T.N. Pham and T.N. Truong, Phys. Rev. D31 (1985) 3027.

36. M. Karliner and M.P. Mattis, Phys. Rev. D34 (1986) 1991.