



**HAL**  
open science

## Effets des collisions sur la dynamique nucléaire

C. Gregoire

► **To cite this version:**

C. Gregoire. Effets des collisions sur la dynamique nucléaire. École thématique. Ecole Joliot Curie "Au-delà du champ moyen.", Maubuisson, (France), du 14-18 septembre 1987: 6ème session, 1987. cel-00644481

**HAL Id: cel-00644481**

**<https://cel.hal.science/cel-00644481>**

Submitted on 24 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EFFETS DES COLLISIONS SUR LA DYNAMIQUE NUCLEAIRE

C. Grégoire

RESUME :

Nous présentons ici une approche à la dynamique nucléaire dans le cadre d'une approximation semi-classique. Termes de champ moyen et de collisions nucleon-nucleon gouvernent les phénomènes dynamiques. Nous discutons les limites de validité d'une telle approche et la manière d'obtenir des solutions approchées des équations cinétiques dérivées. Des exemples d'application à l'équilibration dans les collisions d'ions lourds aux énergies intermédiaires sont discutés.

ABSTRACT :

An approach to nuclear dynamics is presented in the framework of a semi-classical approximation. Mean field and collision term govern dynamical processes. We discuss limits of validity of this approach and we describe some methods for getting approximated solutions to the derived kinetic equations. Applications concerning equilibration in heavy ion collisions at intermediate energies are given.

## EFFETS DES COLLISIONS SUR LA DYNAMIQUE NUCLEAIRE

par

Christian GREGOIRE

GANIL

BP 5027 - 14021 CAEN CEDEX, France

INTRODUCTION

La dynamique nucléaire au delà des modes de petite amplitude a pu être abordée depuis le début des années 1970 sous un angle nouveau avec les possibilités offertes par les accélérateurs d'ions lourds auprès desquels on peut provoquer des collisions entre noyaux. Cette branche d'activité de la physique nucléaire est bien l'héritière directe des études menées dès 1939 sur la fission nucléaire avec la question associée à la dynamique du point selle au point de scission. Parmi les premiers outils théoriques se trouvent les théories du transport (Kramers 1940) [1]. Certaines variables macroscopiques (pour lesquelles les temps caractéristiques d'équilibration sont supposés grands par rapport aux temps d'équilibration des degrés de liberté internes du système) sont suivies au cours du temps à l'aide des équations de Fokker-Planck ou de Schlomuchovski. La viscosité (ou friction) résulte du couplage variables collectives - variables intrinsèques. Le théorème de fluctuation-dissipation nous dit quelle est la dispersion autour des valeurs moyennes des observables macroscopiques. Dans ces théories de transport (voir le cours de J. Richert dans les comptes rendus de l'école Joliot Curie 1982) [2], la dynamique résulte de déplacements dans un espace de phase collectif sur la surface de potentiel collectif construite en faisant certaines hypothèses (approximations soudaines ou adiabatiques) sur les variables intrinsèques. En d'autres termes, on renonce ici à mener une théorie autocohérente des processus.

En fait, il a fallu que se développe la théorie Hartree-Fock dépendant du temps (TDHF) pour donner une description microscopique autocohérente de la dynamique nucléaire [3]. Les succès de TDHF ont été nombreux dans l'analyse des résultats expérimentaux obtenus à basse énergie. Néanmoins TDHF repose entièrement sur une approximation de champ moyen où les interactions résiduelles sont ignorées. Cette approximation est d'autant mieux satisfaite que les états quantiques accessibles aux nucléons participants aux collisions dues à l'interaction résiduelle sont déjà occupés. C'est une situation que l'on rencontre quand les noyaux sont peu perturbés, c'est-à-dire dans les processus de basse énergie. Une extension de TDHF qui tient compte des collisions nucléon-nucléon résiduelles (c'est-à-dire la sommation moyenne sur les interactions - champ moyen - étant déjà faite) conduit à un ensemble d'équations portant sur les nombres d'occupation des états. Ces équations, du type équation de Pauli, entraînent le système vers

l'équilibre statistique. En fait, le terme de collision joue ici le rôle de celui de Boltzmann pour l'atteinte de l'équilibre par un gaz dilué [4]. Cette analogie n'est pas fortuite, car se placer au delà du champ moyen revient à prendre en compte une équation supplémentaire dans une hiérarchie d'équations pour les fonctions de distribution à  $n$ -particules ; que ce soit en mécanique classique ou en mécanique quantique. En fait, pour introduire les ingrédients rentrant dans la représentation du terme de collisions, il peut être avantageux de se placer à l'approximation semi-classique, qui est bien justifiée pour de nombreux phénomènes de la physique nucléaire. Ce n'est que lors de ces toutes dernières années que des méthodes de résolution des équations semi-classiques (Vlasov et Landau-Vlasov) régissant la dynamique à un corps du système ont été mises au point. Dans le cadre de la physique nucléaire, le champ d'application naturel est celui des activités liées à la physique des ions lourds et en particulier celles liées au Grand Accélérateur National D'ions Lourds (GANIL) implanté à Caen et en fonctionnement depuis début 1983.

Les deux chapitres de ce cours font appel à des concepts aussi anciens que ceux proposés par Boltzmann mais aussi à des techniques de simulation utilisées depuis deux ans tout au plus. C'est dire qu'il ne peut vraiment s'agir d'un cours académique où toutes les notions sont complètement éprouvées.

Dans le premier chapitre nous allons dériver une équation cinétique décrivant la dynamique nucléaire de manière microscopique et autocohérente. Cette équation constitue une extension de l'équation TDHF. L'approximation semi-classique de TDHF qui est l'équation de Vlasov sera alors indiquée ainsi que les méthodes permettant d'en obtenir des solutions approchées. Dans les cas de systèmes unidimensionnels et de systèmes à symétrie sphérique ces solutions, appliquées aux collisions de dalles de matière et à l'expansion de noyaux sphériques excités, seront discutées. Dans un deuxième chapitre, nous aborderons la phénoménologie des termes de collisions et son application aux collisions entre ions lourds. Nous indiquerons quels sont les rôles respectifs du champ moyen et du terme de collisions dans plusieurs situations. Enfin, un lien avec les théories de transport sera donné par le calcul des dispersions à l'aide des méthodes de résolution de l'équation de Landau-Vlasov.

Chapitre I - Equation cinétique et dynamique nucléaire. Recherche de solutions approchées

I.1. - Opérateurs densité

Considérons un système isolé (S) caractérisé par un vecteur d'état  $|\phi\rangle(t)$  à l'instant  $t$  et dont l'hamiltonien est  $H$  (indépendant de  $t$  puisque (S) est isolé). La solution formelle de l'équation de Schrödinger étant :

$$|\phi\rangle_t = \exp(-i H t) |\phi\rangle_{(t=0)} \quad (1)$$

la valeur moyenne d'une observable  $A$  à l'instant  $t$  n'est autre que :

$$\langle A \rangle (t) = \langle \phi |_t A | \phi \rangle_t \quad (2)$$

soit :  $\langle A \rangle (t) = \langle \phi_0 | A_t | \phi_0 \rangle$

où  $A_t = \exp(i H t) A \exp(-i H t)$  (3)

est la représentation d'Heisenberg de l'opérateur  $A$ .

On a donc :

$$\langle A \rangle (t) = \text{Tr } D_0 A_t \quad (4)$$

où  $D_0$  est un opérateur de projection (c'est-à-dire vérifiant l'identité  $D_0^2 = D_0$ ) défini par :

$$D_0 = | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \quad (5)$$

$D_0$  est l'opérateur densité associé à l'état pur  $|\phi_0\rangle$  du système (S).

Si le système n'est pas dans un état pur, c'est-à-dire que notre connaissance en est incomplète, le vecteur d'état du système n'est pas entièrement fixé. Néanmoins, il est alors possible de décrire le système comme un mélange statistique d'états  $|\phi_\lambda\rangle$ , chacun d'entre eux avec une probabilité  $p_\lambda$ .

L'opérateur densité  $D$  s'écrit alors :

$$D = \sum_{\lambda} |\phi_\lambda\rangle p_\lambda \langle \phi_\lambda| \quad (6)$$

La valeur moyenne de toute observable  $A$  est :

$$\langle A \rangle = \text{Tr } D A \quad (7)$$

Des propriétés de l'opérateur densité sont obtenues du fait que les probabilités  $p_\lambda$  sont réelles, positives et telles que :

$$\sum_{\lambda} p_\lambda = 1 \quad (8)$$

Elles sont respectivement : hermiticité de  $D$  ;  $D$  est semi-défini positif ; la trace de  $D$  est égale à l'unité.

La méthode qui sera développée au paragraphe suivant repose sur une procédure de réduction de l'opérateur densité du système constitué de  $N$  particules :

$$D = D(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (9)$$

Le projecteur, ou opérateur de projection, est défini comme étant la trace portant sur  $(N-k)$  degrés de liberté. Cette procédure est similaire à celle proposée par Nakajima and Zwanzig pour obtenir une densité réduite portant sur un sous espace collectif [5]. Une matrice densité réduite à  $k$ -particules est définie par :

$$\rho^{(k)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} D \quad (10)$$

Le facteur  $N!/(N-k)!$  vient de la propriété de trace unité de l'opérateur  $D$  :

$$\text{Tr}_{(1, \dots, N)} D = 1 \quad (11a)$$

$$\text{Tr}_{(1, \dots, k)} \rho^{(k)} = \frac{N!}{(N-k)!} \quad (11b)$$

Les équations (11) permettent de reformuler l'équation (7) donnant la valeur moyenne de toute observable  $A$  :

$$\text{Tr}_{(1, \dots, N)} A D = \langle A \rangle \quad (12a)$$

$$\text{ou } \frac{1}{k!} \text{Tr}_{(1, \dots, k)} A^{(k)} \rho^{(k)} = \langle A \rangle \quad (12b)$$

si  $A = A^{(k)} \equiv A(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_k)$  est une observable à  $k$ -particules.

## I.2. - La hiérarchie d'équations BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

La hiérarchie BBGKY est obtenue en appliquant la technique de projection du paragraphe précédent à l'équation de la dynamique pour  $D$ , c'est-à-dire l'équation de Von Neumann :

$$i \hbar \frac{d}{dt} D = [H, D] \quad (13)$$

$H$  est l'hamiltonien à  $N$ -particules. La hiérarchie d'équations peut être établie dans le cas d'interactions à deux-corps. Elle décrit la dynamique des corrélations à un nombre quelconque de particules, ce nombre allant de 1 à  $N$ . Ecrivons  $H$  :

$$H = \sum_{i=1}^N K_i + \sum_{i < j=1}^N V_{ij} \quad (14)$$

D'autre part, l'équation (13) s'écrit :

$$i \hbar \frac{d}{dt} D = L D \quad (15)$$

où  $L = [H, \ ]$  est le Liouvillien (16)



Compte tenu de (14), le Liouvillien se décompose de la manière suivante :

$$L D = \left( \sum_{i=1}^N L_i^0 + \sum_{i<j=1}^N L_{ij} \right) D \quad (17)$$

avec  $L_i^0 = [K_i, ]$  and  $L_{ij} = [V_{ij}, ]$  (18)

Lemme : Les relations  $\text{Tr}_{(j)} L_j^0 D = \text{Tr}_{(j,k)} L_{jk} D = 0$  (19)

sont vérifiées pour tout j et k.

En effet, l'équation (11) donne :

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}_{(1,..N)} D = 0 \quad (20)$$

ce qui, porté dans l'équation de la dynamique (15), permet d'écrire :

$$\left( \sum_{j=1}^N \text{Tr}_{(1,..N)} L_j^0 + \sum_{j<k=1}^N \text{Tr}_{(1,..N)} L_{jk} \right) D = 0 \quad (21)$$

Puisque (21) est vérifiée quelque soit N, les relations (19) sont bien vérifiées.

#### La hiérarchie BBGKY :

En utilisant les définitions equ. (10) et l'équation (13), l'équation d'évolution pour les densités  $\rho^{(k)}$  s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(k)} = \frac{N!}{(N-k)!} \text{Tr}_{(k+1,..N)} \left[ \sum_{i=1}^N K_i + \sum_{i<j=1}^N V_{ij}, D \right] \quad (22a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(k)} = \frac{N!}{(N-k)!} \text{Tr}_{(k+1,..N)} \left[ \sum_{i=1}^N L_i^0 + \sum_{i<j=1}^N L_{ij} \right] D \quad (22b)$$

On a utilisé ici les définitions (17) pour les opérateurs de Liouville.

Considérons indépendamment le terme cinétique et le terme d'interaction à deux-corps :

a) Terme d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \sum_{i=1}^N L_i^0 D &= \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \sum_{i=1}^k L_i^0 D \text{ parce que (19) est vérifiée} \\ &= \sum_{i=1}^k L_i^0 \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} D \end{aligned} \quad (23)$$

b) Terme d'interaction :

$$S_2 = \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \sum_{j=1}^N \sum_{i < j} L_{ij} D = \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \left[ \sum_{j=1}^k \sum_{i < j} + \sum_{j=k+1}^N \sum_{i=1}^k \right] L_{ij} D \quad (24)$$

par utilisation de Lemme (19)  $S_2$  peut être transformé :

$$S_2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i < j} L_{ij} \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} D + \sum_{j=k+1}^N \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \sum_{i=1}^k L_{ij} D \quad (25)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i < j} L_{ij} \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} D + (N-k) \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} \sum_{i=1}^k L_{i, k+1} D \quad (26)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i < j} \text{Tr}_{(k+1, \dots, N)} D + \sum_{i=1}^k \text{Tr}_{(k+1)} L_{i, k+1} (N-k) \text{Tr}_{(k+2, \dots, N)} D \quad (27)$$

Le facteur  $(N-k) \text{Tr}_{(k+2, \dots, N)} D$  multiplié par  $\frac{N!}{(N-k)!}$  dans (22a) donne  $\rho^{(k+1)}$ .

c) Conclusion

En regroupant (15) et (19), l'équation (22b) devient :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(k)} &= \sum_{i=1}^k L_i^0 \rho^{(k)} + \sum_{j=1}^k \sum_{i < j} L_{ij} \rho^{(k)} \\ &+ \sum_{i=1}^k \text{Tr}_{(k+1)} L_{i, k+1} \rho^{(k+1)} \end{aligned} \quad (28)$$

où  $\rho^{(k)}$  est couplé à  $\rho^{(k+1)}$  déterminant ainsi une hiérarchie d'équations dont les deux premières s'écrivent :

$$k = 1 : \text{if } \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} L_{12} \rho^{(2)} \quad (29)$$

$$k = 2 : \text{if } \frac{d}{dt} \rho^{(2)} = (L_1^0 + L_2^0) \rho^{(2)} + L_{12} \rho^{(2)} + \text{Tr}_{(3)} (L_{13} + L_{23}) \rho^{(3)} \quad (30)$$

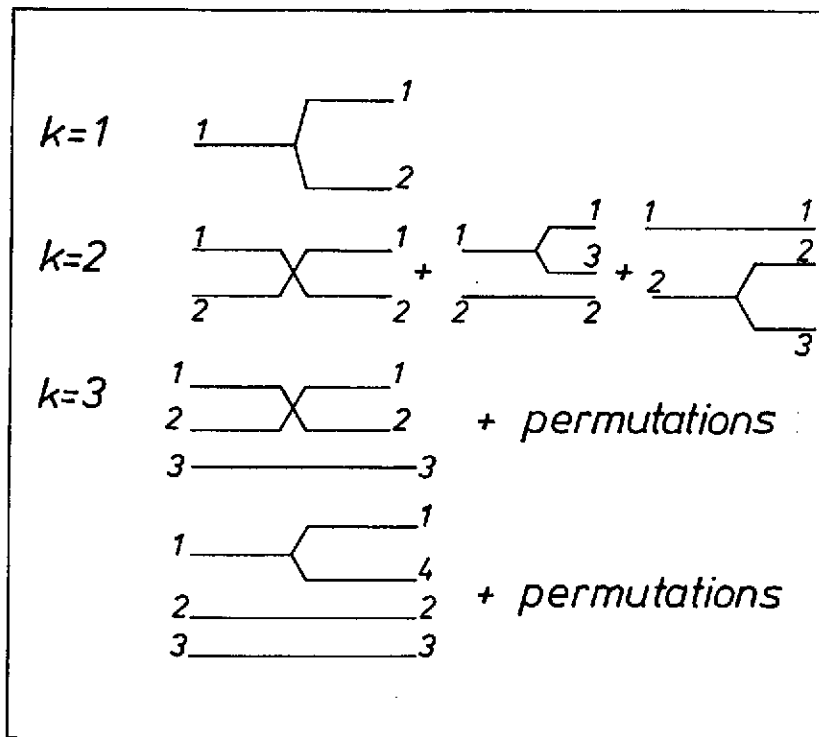


FIGURE 1

LA HIÉRARCHIE D'ÉQUATIONS BBGKY S'OBTIENT PAR SOMMATION DES INTERACTIONS AU POINT D'INTERSECTION ENTRE LIGNES (DE DROITE À GAUCHE), CETTE ILLUSTRATION DIAGRAMMATIQUE EST EXTRAITE DE LA RÉFÉRENCE [6].

Une représentation graphique (réf. [6]) de la hiérarchie BBGKY est dessinée à la figure 1. A partir de l'équation (29), on déduit aisément les équations de Hartree et de Hartree-Fock en supposant que les corrélations à deux particules peuvent être négligées.

A l'approximation de Hartree :

$$\rho^{(2)} = \rho_1 \rho_2 \quad (31)$$

alors que  $\rho^{(2)} = \rho_1 \rho_2 A_{12}$  à l'approximation de Hartree-Fock l'opérateur  $A_{12}$  étant l'opérateur d'antisymétrisation.

En portant (31) dans l'équation (29), on obtient :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} L_{12} \rho_2 \rho_1 \quad (32)$$

L'opérateur  $\text{Tr}_{(2)} L_{12} \rho_2 = [U_1, \quad ]$  décrit le champ moyen dérivé de l'interaction nue  $V_{12}$ .

L'équation (32) s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = [h, \rho^{(1)}] \quad (33)$$

où  $h = K + U_1$  est le hamiltonien de Hartree ou de Hartree-Fock par introduction de termes d'échanges dans  $U_1$ .

Si l'on souhaite étendre les équations Hartree ou Hartree-Fock dépendentes du temps en vue de tenir compte de l'interaction résiduelle, la hiérarchie BBGKY est donc l'outil naturel à utiliser puisque les ordres successifs des corrélations y sont décrits. Aller au delà du champ moyen consiste alors à faire des approximations moins sévères que celle indiquée à l'équation (31), mais en procédant de la même manière c'est-à-dire en découplant les équations d'ordre le plus bas en le nombre de particules. Ces équations forment alors un système d'équations fermé. Dans le contexte de la physique nucléaire, une telle dérivation a été effectuée juste au delà de Hartree ou Hartree-Fock par W. Botermans et R. Malfliet [7] et donne lieu à une équation cinétique du type Boltzmann avec champ moyen.

### I.3. - Méthodes de troncation et dérivation d'une équation cinétique

Nous suivrons dans ce paragraphe la démarche des auteurs de la référence [7] qui nous conduit tout d'abord à une équation de Boltzmann quantique (équation de Waldmann-Snider) puis à l'équation cinétique incluant le champ moyen. Mentionnons que la référence [8] donne pour sa part une dérivation du même type des équations dynamiques par l'étude des fonctions de Green du système.

#### I.3.a) - L'équation de Waldmann et Snider [9,10]

La première extension des équations TDHF peut s'obtenir par une troncation de l'équation (30), le terme en  $\text{Tr}$  étant purement et simplement négligé. Cela revient à négliger les diffusions à deux particules en présence des autres c'est-à-dire à négliger les effets de milieu. L'équation (20) se réduit alors à la description dynamique des corrélations à deux particules libres. Introduite dans l'équation (29), la solution de l'équation (30) fournit alors une extension naturelle des équations Hartree ou Hartree-Fock (33). Cette équation a la forme d'une équation cinétique et a été dérivée par Snider pour des systèmes moléculaires à la limite du gaz dilué avec des interactions à courte portée. L'équation de Waldmann-Snider peut donc être considéré comme un analogue quantique de l'équation de Boltzmann (nous reviendrons sur ce point au chapitre II) pour des systèmes inhomogènes.

Les étapes de la dérivation ont donc pour point de départ l'équation (30) tronquée de son dernier terme soit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(2)} = (L_1^0 + L_2^0) \rho^{(2)} + L_{12} \rho^{(2)} \quad (34)$$

dont la solution est :

$$\rho^{(2)}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} (L_1^0 + L_2^0 + L_{12}) (t-t_0)} \rho^{(2)}(t_0) \quad (35)$$

La relation (35) est équivalente à l'expression :

$$\rho^{(2)}(t) = \Omega_{12} \rho^{(2)}(t_0) \Omega_{12}^+ \quad (36)$$

où  $\Omega_{12}$  est l'opérateur de Møller

$$\text{et } \rho^{(2)}(t_0) = \rho_1 \rho_2 \text{ (antisymétrisé pour un système de fermions)} \quad (37)$$

Cette hypothèse portant sur  $\rho^{(2)}(t_0)$  est connue dans la littérature [6] sous le nom d'hypothèse du chaos moléculaire ou de stosszahlansatz [4].

L'opérateur de Møller est solution de l'équation :

$$\Omega = 1 + gV\Omega \quad (38)$$

où  $g$  la fonction de Green définie par :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (E_a - K + i\epsilon)^{-1} = g_a$

En théorie des collisions [11], la matrice  $T$  est liée à l'opérateur de Møller par :  $T = V\Omega$

ce qui indique le lien à la section efficace nucléon-nucléon libre.

Portant (36) dans l'équation de la dynamique à un corps (29), on a :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} L_{12} \Omega_{12} \rho_1 \rho_2 \Omega_{12}^+ \quad (39)$$

$$= L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} \{V_{12} \Omega_{12} \rho_1 \rho_2 \Omega_{12}^+ - \Omega_{12} \rho_1 \rho_2 \Omega_{12}^+ V_{12}\} \quad (40)$$

En utilisant la relation (38) et la définition de la matrice  $T$  :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} \{T_{12} \rho_1 \rho_2 (1+g V_{12} \Omega_{12})^+ - (1+g V_{12} \Omega_{12}) \rho_1 \rho_2 T_{12}^+\} \quad (41)$$

ce qui permet d'écrire :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} \{ T_{12} \rho_1 \rho_2 - \rho_1 \rho_2 T_{12}^+ \} \quad (42)$$

$$+ \text{Tr}_{(2)} \{ T_{12} \rho_1 \rho_2 T_{12}^+ g^+ - g T_{12} \rho_1 \rho_2 T_{12}^+ \}$$

Le produit  $\rho_1 \rho_2$  peut être remplacé par  $\rho_1 \rho_2 A_{12}$  si l'on souhaite une extension des équations de Hartree Fock. L'équation (42) est appelée l'équation de Waldmann-Snider.

Elle peut être transformée en une équation de Boltzmann en supposant tous les opérateurs diagonaux en énergie. Dans cette représentation, ils commutent donc tous. Comme d'autre part, les fonctions de Green et la matrice T vérifient :

$$g^+ - g = 2\pi i \delta(E-K_1-K_2) \quad (43a)$$

$$\text{et } T_{12}^+ - T_{12} = 2\pi i \delta(E-K_1-K_2) T_{12}^+ T_{12} \quad (43b)$$

on obtient un terme de gain et un terme de perte associés à la section efficace nucléon-nucléon donnée par la matrice T :

$$\sigma(a \rightarrow b) = (2\pi)^4 \mu^2 h^2 \left( \frac{k_b}{k_a} \right) |T_{ab}|^2 \quad (44)$$

où  $k_a$  et  $k_b$  sont les nombres d'onde associés aux états a et b des deux nucléons en interaction avant et après collision.

### I.3.b. - L'équation de Botermans-Malfliet [7]

Une équation cinétique plus générale que celle de Waldmann-Snider est obtenue ici en prenant en compte le terme en  $\text{Tr}_{(3)}$  dans l'équation (30). Comme nous l'avons déjà dit, ce terme correspond au mouvement des deux particules en interaction en présence du champ moyen (puisque sommé sur les particules 3) crée par toutes les particules constituant le système. En d'autres termes, cette extension

repose sur la même sommation que celle présente dans l'équation de Bethe-Goldstone dans la théorie de Brueckner [12,13]. Cette remarque est celle qui a conduit les auteurs de [7] à une équation cinétique où champ moyen et termes de collisions sont présents. Cela apporte une réponse à la question de savoir s'il n'y a pas double comptage entre les deux composantes (champ moyen et collisions). En effet le terme cinétique de Waldmann Snider étant une extension de l'approximation de champ moyen, il est légitime de se demander si une équation comportant ce terme de collisions n'exclut pas de fait le champ moyen qui serait alors comptabilisé deux fois. La réponse apportée par Botermans et Malfliet est que non si les sections efficaces nucléon-nucléon sont calculées dans le milieu (et non pas prises libres) et si le champ moyen est dérivé de la partie réelle de la matrice G de Brueckner.

Adoptons la même méthode qu'en 1.3.a :

a) La matrice densité à trois particules  $\rho^{(3)}(1,2,3)$  s'écrit :

$$\rho^{(3)}(1,2,3) = \Omega_{13} \rho^{(2)}(1,2) \rho^{(1)}(3) A_{13} \Omega_{13}^+ + \Omega_{23} \rho^{(2)}(1,2) \rho^{(1)}(3) A_{23} \Omega_{23}^+ \quad (45)$$

où  $\Omega$  est l'opérateur de Moller pour la diffusion à deux particules et  $A_{ij} = 1 - P_{ij}$  est l'opérateur d'antisymétrisation.

b) La trace  $\text{Tr}_{(3)}$  de l'équation (30) devient, en utilisant (45) :

$$\text{Tr}_{(3)} (L_{13} + L_{23}) \rho^{(3)} = \{U_1 + U_2, \rho^{(2)}\}_+ \quad (46)$$

$$\text{où } U_i = \text{Tr}_{(3)} V_{i3} \Omega_{i3} A_{i3} \rho_3$$

$$\text{et } \{A,B\}_+ = AB - BA^+$$

Le signe  $=$  signifie que seuls les termes linéaires en  $\Omega$  ont été gardées en appliquant la relation (38).

c) Le terme  $\text{Tr}_{(2)}$  de l'équation (29) devient, avec les relations (36) et (38) :

$$\text{Tr}_{(2)} L_{12} \rho^{(2)} = \{U_1, \rho^{(1)}\}_+ \quad (47)$$



ce qui donne  $\rho_{12}(t_0)$  à partir de  $\rho_1(t)$   $\rho_2(t)$

L'opérateur de Moller  $\Omega_{12}$  est estimé dans le milieu. Il est solution de l'équation (38) où  $g$  est multiplié par un opérateur de Pauli.

$$(1-\rho_1) (1-\rho_2).$$

$$\text{Si } H_{12}^0(t) = K_1 + K_2 + U_1(t) + U_2(t) \quad (48)$$

$$\text{et } H_{12}(t) = H_{12}^0(t) + V_{12} \quad (49)$$

L'équation de Botermans-Malfliet est formellement identique à l'équation (42) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = L_1^0 \rho^{(1)} + \text{Tr}_{(2)} \{G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 - \rho_1 \rho_2 A_{12} G_{12}^+\} \quad (50)$$

$$+ \text{Tr}_{(2)} \{G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 G_{12}^+ Q g^+ - g Q G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 G_{12}^+\}$$

$$\text{où } Q_{12} = (1-\rho_1) (1-\rho_2)$$

$G_{12}$  est la matrice  $G$  de  $V_{12} \Omega_{12}(t)$

$$g = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (E - H^{(0)} + i\epsilon)^{-1} \quad (51)$$

Les mêmes propriétés de  $g$  et de  $G$  que celles indiquées en [43] pour  $g$  et  $T$  prouvent le caractère cinétique de l'équation (50).

En utilisant les mêmes notations que celles de la référence [7] soient :

$$\Sigma_{12} = G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 G_{12}^+ (1-\rho_1) (1-\rho_2) \quad (52)$$

$$g_{12} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [(E_{12} - H_{12}^0) + i\epsilon]^{-1} \quad (53)$$

L'équation Botermans-Malfliet s'écrit :

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = & L_1^0 \rho_1 + [\text{Tr}_{(2)} \text{Re } G_{12} A_{12} \rho_2, \rho_1] - \text{Tr}_{(2)} [\text{Reg}_{12} \sum_{12}^+ \sum_{12} \text{Reg}_{12}] \\
 & + \text{Tr}_{(2)} [\text{Im } G_{12} A_{12} \rho_2 \rho_1 + \rho_1 \rho_2 A_{12} \text{Im } G_{12}] \\
 & - \text{Tr}_{(2)} [\sum_{12} \text{Im} g_{12} + \text{Im} g_{12} \sum_{12}^+] \quad (54)
 \end{aligned}$$

Les termes sont successivement :

- un terme de champ moyen (partie réelle de G)
- terme en  $\sum$  qui tiennent compte des effets hors-couches
- un terme de collision (partie imaginaire de G)

Dans le cas où la matrice G est prise sur couches et où  $\rho$  est diagonal en impulsion le terme de collisions devient :

$$\begin{aligned}
 2\pi i \text{Tr}_{(2)} [G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 G_{12}^+ (1-\rho_1) (1-\rho_2) \delta(E_{12}-H_{12}^0) \\
 - G_{12}^+ A_{12} (1-\rho_1) (1-\rho_2) G_{12} \rho_1 \rho_2 \delta(E_{12}-H_{12}^0)] \quad (55)
 \end{aligned}$$

avec un terme de gain et un terme de perte.

Cette équation montre que, pourvu que terme de collisions et champ moyen soient obtenus à partir de la matrice G, l'évolution dynamique du système est régi par la balance entre ces deux composantes. En principe, les effets hors-couches (les spectres en énergie ayant une largeur du fait des collisions) sont inclus dans l'équation (54). Néanmoins nous verrons plus loin, qu'en pratique, cette équation n'a jamais été résolu au niveau de Brueckner. En revanche, en passant à la limite semi-classique, la signification des termes champ moyen et interaction résiduelle (collisions) est suffisamment transparente pour que des expressions phénoménologiques aient permis une résolution. Les ingrédients s'appellent alors forces effectives et sections efficaces nucléon-nucléon effectives.

#### 1.4. - Transformation de Wigner et approximation semi-classique

La transformation de Wigner permet d'écrire des opérateurs  $A$  exprimés dans une représentation  $|\vec{r}\rangle$  ou  $|\vec{p}\rangle$  en une représentation mixte. Elle revient à faire une transformation de Fourier :

$$A(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i \vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} \langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} | A | \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \rangle \quad (56)$$

L'intégration s'opère ici sur la non-localité  $\vec{s}$ . Les avantages d'une telle représentation est qu'elle permet une identification immédiate des propriétés classiques des opérateurs à travers leur extension dans l'espace des phases  $(\vec{r}, \vec{p})$  position-impulsion. Par exemple, une onde plane  $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}$  admet pour transformée de Wigner de sa matrice densité une fonction, appelée fonction de distribution qui est :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i \vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} e^{-\frac{i \vec{k} \cdot \vec{s}}{2}} e^{\frac{i \vec{k} \cdot \vec{s}}{2}} \quad (57a)$$

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \delta(\vec{p} - \hbar \vec{k}) \quad (57b)$$

c'est-à-dire que  $\vec{p}$  peut s'identifier à  $\hbar \vec{k}$  où  $\vec{k}$  caractérise l'onde plane.

Plus généralement, la fonction de distribution à une particule s'écrit :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i \vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} \rho(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}, \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}) \quad (58)$$

où  $\rho$  est la matrice densité à un corps.

L'équation Botermans-Malfliet s'écrit :

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} \rho^{(1)} = & L_1^0 \rho_1 + \left[ \text{Tr}_{(2)} \text{Re } G_{12} A_{12} \rho_2, \rho_1 \right] - \text{Tr}_{(2)} \left[ \text{Re } G_{12} \sum_{12}^+ - \sum_{12} \text{Re } G_{12} \right] \\
 & + \text{Tr}_{(2)} \left[ \text{Im } G_{12} A_{12} \rho_2 \rho_1 + \rho_1 \rho_2 A_{12} \text{Im } G_{12} \right] \\
 & - \text{Tr}_{(2)} \left[ \sum_{12} \text{Im } G_{12} + \text{Im } G_{12} \sum_{12}^+ \right] \quad (54)
 \end{aligned}$$

Les termes sont successivement :

- un terme de champ moyen (partie réelle de G)
- terme en  $\sum$  qui tiennent compte des effets hors-couches
- un terme de collision (partie imaginaire de G)

Dans le cas où la matrice G est prise sur couches et où  $\rho$  est diagonal en impulsion le terme de collisions devient :

$$\begin{aligned}
 2\pi i \text{Tr}_{(2)} \left[ G_{12} A_{12} \rho_1 \rho_2 G_{12}^+ (1-\rho_1) (1-\rho_2) \delta(E_{12} - H_{12}^0) \right. \\
 \left. - G_{12}^+ A_{12} (1-\rho_1) (1-\rho_2) G_{12} \rho_1 \rho_2 \delta(E_{12} - H_{12}^0) \right] \quad (55)
 \end{aligned}$$

avec un terme de gain et un terme de perte.

Cette équation montre que, pourvu que terme de collisions et champ moyen soient obtenus à partir de la matrice G, l'évolution dynamique du système est régi par la balance entre ces deux composantes. En principe, les effets hors-couches (les spectres en énergie ayant une largeur du fait des collisions) sont inclus dans l'équation (54). Néanmoins nous verrons plus loin, qu'en pratique, cette équation n'a jamais été résolu au niveau de Brueckner. En revanche, en passant à la limite semi-classique, la signification des termes champ moyen et interaction résiduelle (collisions) est suffisamment transparente pour que des expressions phénoménologiques aient permis une résolution. Les ingrédients s'appellent alors forces effectives et sections efficaces nucléon-nucléon effectives.

#### I.4. - Transformation de Wigner et approximation semi-classique

La transformation de Wigner permet d'écrire des opérateurs  $A$  exprimés dans une représentation  $|\vec{r}\rangle$  ou  $|\vec{p}\rangle$  en une représentation mixte. Elle revient à faire une transformation de Fourier :

$$A(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{s}} \langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} | A | \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \rangle \quad (56)$$

L'intégration s'opère ici sur la non-localité  $\vec{s}$ . Les avantages d'une telle représentation est qu'elle permet une identification immédiate des propriétés classiques des opérateurs à travers leur extension dans l'espace des phases  $(\vec{r}, \vec{p})$  position-impulsion. Par exemple, une onde plane  $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}$  admet pour transformée de Wigner de sa matrice densité une fonction, appelée fonction de distribution qui est :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{s}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{k} \cdot \vec{s}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{k} \cdot \vec{s}} \quad (57a)$$

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \delta(\vec{p} - \hbar \vec{k}) \quad (57b)$$

c'est-à-dire que  $\vec{p}$  peut s'identifier à  $\hbar \vec{k}$  où  $\vec{k}$  caractérise l'onde plane.

Plus généralement, la fonction de distribution à une particule s'écrit :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{s} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{s}} \rho(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}, \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}) \quad (58)$$

où  $\rho$  est la matrice densité à un corps.

Pour les opérateurs densités à k-particules, la transformée de Wigner à k-dimensions permet, de même, d'obtenir les fonctions de distributions à k-particules. Puisque la transformation de Wigner fait intervenir  $\hbar$  dans l'exponentielle, on voit qu'elle peut permettre de faire des développements et des approximations semi-classiques.

La transformée de Wigner de l'équation TDHF (equ. (33)) nécessite le calcul de transformée de produits d'opérateurs du type  $h\rho$ . Pour cela on utilise les propriétés suivantes des transformées de Wigner (démonstration en ref. [14] ; si  $A_W$  et  $B_W$  sont les transformées de A et B on a :

$$a) \quad (AB)_W = A_W e^{(i\hbar/2) \overleftrightarrow{\Delta}} B_W \quad (59a)$$

$$b) \quad [A, B]_W = 2i A_W \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \overleftrightarrow{\Delta} \right] B_W \quad (59b)$$

où l'opérateur  $\overleftrightarrow{\Delta}$  est défini par :  $\overleftrightarrow{\Delta} = \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}} - \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}}$

La relation (59b) permet d'obtenir la transformée de l'équation (34) ;

$$\frac{d}{dt} f = \frac{2}{\hbar} h_W \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \overleftrightarrow{\Delta} \right] f \quad (60)$$

où  $h_W = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}, \vec{p}, t)$  est la transformée de Wigner de l'hamiltonien de Hartree-Fock et où f est la fonction de distribution à une particule.

Le développement en puissance de  $\hbar$  dans (60) peut être tronqué pour donner l'approximation semi-classique à l'ordre le plus bas :

$$\frac{d}{dt} f = \{h_W, f\} \quad (61)$$

où  $\{ \}$  désigne le crochet de Poisson, c'est-à-dire si U dépend de f :

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\vec{p}}{m} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}} f + \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}} U \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}} f - \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}} U \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}} f = 0 \quad (62)$$

où termes cinétiques et potentiels sont apparents.

L'équation (62) est appelée l'équation de Vlasov. Afin de rendre possible sa résolution, des interactions effectives pour  $U$  sont utilisés comme nous le verrons en I.5. L'équation (62) permet de vérifier que l'approximation semi-classique préserve les mêmes lois de conservation que celles vérifiées par TDHF : conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Comme TDHF, l'équation de Vlasov est invariante par renversement du temps (réversibilité).

En fait la notion d'irréversibilité n'apparaît qu'aux ordres supérieurs de la troncation quand on suppose qu'à un instant initial la densité à deux particules se factorise comme un produit de densités à une particule et ceci entre chaque diffusion nucléon-nucléon. Cette hypothèse du chaos moléculaire faite pour l'équation de Waldmann-Snyder et pour l'équation Botermans-Malfliet est celle fait par Boltzmann pour les gaz dilués [4]. Elle conduit à un terme de collision libre pour Waldmann-Snyder et dans-le-milieu pour Botermans-Snyder. Dans le premier cas il s'écrit :

$$I_{coll} = \frac{2\pi}{\hbar} \text{Tr} \left\{ T_{12} \rho_1 \rho_2 T_{12}^+ \delta(E-K_1-K_2) - T_{12} T_{12}^+ \rho_1 \rho_2 \delta(E-K_1-K_2) \right\} \quad (63)$$

La matrice  $G$  remplace la matrice  $T$  pour Botermans-Malfliet.

En passant à la représentation de Wigner, l'opérateur  $\text{Tr}$  devenant  $\int \frac{d\vec{r}}{h^3} \frac{d\vec{p}}{h^3}$  on peut voir que l'équation (63) est un terme à la Boltzmann où les états finaux sont bloqués par des facteurs de Pauli.  $I_{coll}$  s'écrit :

$$I_{coll} = \frac{g}{2\pi^3} \frac{h^3}{m^2} \int d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \frac{d\sigma}{d\Omega} [(1-f_1)(1-f_2)f_3 f_4 - (1-f_3)(1-f_4)f_1 f_2] \quad (64)$$

où  $\hbar \vec{k}_i = \vec{p}_i$  et  $f \equiv f(\vec{r}, k)$

$g$  est le facteur de dégénérescence (égale à 4 pour spin-sisopin).

L'expression (64) avait été dérivé par des arguments heuristiques par Nordheim [15] et Uehling-Uhlenbeck [16] au début des années 1930.

L'équation Botermans-Malfliet à la limite semi-classique donne alors pour  $\rho$  diagonal en impulsion et en négligeant les effets hors couches, une extension de l'équation de Vlasov qui s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{h_w, f\} + I_{coll} \quad (65)$$

Cette équation est l'équation de Landau-Vlasov.

Dans le cas où l'expression (64) est introduite, certains auteurs font référence à cette équation sous le nom de VUU (Vlasov-Uehling-Uhlenbeck) [17] ou de BUU (Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck) [18]. Cette équation est l'équation cinétique la plus simple possible au delà de l'approximation de champ moyen. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la section efficace nucléon-nucléon et le champ moyen peuvent, en principe, être dérivés des parties imaginaires et réelles de la matrice  $G$ . Néanmoins, à ce jour, seuls des approches phénoménologiques où le champ moyen est simulé par une interaction effective et le terme de collision par une paramétrisation des résultats expérimentaux pour la diffusion libre éventuellement renormalisée pour tenir compte des effets de milieux. Avant de discuter ces approches (chapitre II), indiquons quelles méthodes peuvent être utilisés pour résoudre l'équation de Vlasov. Les simulations du terme de collisions seront abordés au chapitre II avec une discussion des exemples d'application à la physique des collisions noyau-noyau dans le domaine non-relativiste.



### I.5. - Solutions approchées de l'équation de Vlasov nucléaire

Nous pouvons distinguer deux types de méthodes : les méthodes eulériennes où la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{k})$  est définie en un ensemble régulier de points  $\{(\vec{r}_j, \vec{k}_j)\}$  de l'espace de phase, la valeur de  $f$  est évaluée en ces points à chaque instant ; les méthodes lagrangiennes où  $f(\vec{r}, \vec{k})$  est décomposée sur une base dont les éléments en mouvement déterminent l'évolution dynamique de la fonction de distribution.

#### 1.5.1. - Méthode des éléments finis [19]

Afin d'exposer la méthode nous nous limiterons au cas d'un espace de phase à deux dimensions, une dimension d'espace  $z$  et une dimension d'impulsion  $p$ . Il s'agit d'une méthode eulérienne qui donne des solutions au sens de la convergence faible c'est-à-dire que si, pour toute fonction  $v(z,p)$  définie dans le domaine  $\Omega = \Omega_z \times \Omega_p$  de l'espace de phase considéré, on vérifie l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial U(f)}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p} \right\} v \, d\Omega = 0 \quad (66)$$

alors la fonction de distribution  $f(z,p)$  vérifie l'équation de Vlasov (61) au sens de la convergence faible. On a supposé que  $U$  ne dépend pas de  $p$  mais seulement de  $z$ .

Une solution approchée est obtenue en décomposant  $v(z,p)$  et  $f(z,p)$  sur une base discrète d'éléments finis :

$$v(z,p) = \sum_k v_k w_k(z,p) \quad (67a)$$

$$f(z,p) = \sum_k f_k w_k(z,p) \quad (67b)$$

Par exemple si les éléments finis sont construits sur des rectangles constituant un maillage régulier en  $(z,p)$  on a :

$$w_k(z_1, p_1) = \delta_{k1} \quad (68)$$

où  $(z_1, p_1)$  est un point de maillage et tel que :

$$w_k(z, p) = a_0 + a_1 z + a_2 p + a_z zp \quad (69)$$

dans le domaine défini par les rectangles.

L'équation (66) se transforme alors en une équation matricielle, la dépendance en temps de  $f$  étant contenue dans les coefficients  $f_k(t)$  de l'équation (67b) :

$$M \frac{dF}{dt} + A(F) F = 0 \quad (70)$$

où  $F = (f_1 \dots f_k \dots f_N)$

$$M_{k1} = \int_{\Omega} w_k w_1 \quad (71a)$$

$$A_{k1} = \int_{\Omega} p \frac{\partial w_1}{\partial p} w_k + \sum_{m=1}^N T_{k1m} U_m \quad (71b)$$

avec  $U_m$  et  $T_{k1m}$  définis par :

$$U(f) = \sum_{m=1}^N U_m(t) w_m \quad (71c)$$

$$T_{k1m} = \int_{\Omega} \frac{\partial w_m}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial p} w_k \quad (71d)$$

La dépendance en temps dans (70) peut être résolue numériquement par des méthodes du type Gauss-Seidel (voir la référence [20] pour cet aspect d'analyse numérique).

### 1.5.2. - Méthode particulière

L'idée de cette méthode est de résoudre l'équation de Vlasov en prenant des particules test [21] qui se propagent dans l'espace de phase. Cela revient à approximer la fonction de distribution en une somme de fonctions delta :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{k=1}^N f_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \delta(\vec{p} - \vec{p}_k) \quad (72)$$

N est aussi grand que la précision l'impose, la dépendance en temps de f apparaissant à travers les positions  $\vec{r}_k(t)$  et les impulsions  $\vec{p}_k(t)$  des particules test. Remarquons que si l'on impose  $f_k = f_0$  quel que soit k, la condition :

$$A = \int f(\vec{r}, \vec{p}) \frac{d\vec{r} d\vec{p}}{h^3} \quad (73)$$

conduit à :

$$f_0 = h^3 \frac{A}{N} \quad (74)$$

où A est le nombre de nucléons.

Reportant (72) dans l'équation de Vlasov et en intégrant par parties on a, si U ne dépend pas des impulsions :

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\vec{p}_k}{m} \quad (75a)$$

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = - \vec{\nabla}_r U(f) \quad (75b)$$

Ces équations sont couplées non-linéairement puisque U, le champ moyen, dépend de f (auto-cohérente). Cette méthode requiert un grand nombre de particules test sans pour autant paver l'espace de phase suffisamment. En particulier à la surface de noyaux, il faudrait un nombre presque infini de particules test pour décrire le système. C'est pourquoi, nous avons développé une méthode pseudoparticulaire [22] dont certains aspects se trouvent en [23,24].

### 1.5.3. - Méthode pseudoparticulaire [22,23,24]

Cette méthode se fonde sur la recherche des symmétries approchées de l'équation de Vlasov. Pour un champ harmonique dépendant du temps, correspondant à l'approximation harmonique locale du champ

moyen, un invariant (constante du mouvement autre que l'énergie) est la forme quadratique :

$$I(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2\hbar} \{ \chi p^2 + \phi r^2 - 2\sigma rp \} \quad (76)$$

Les coefficients  $\chi$ ,  $\phi$  et  $\sigma$  étant les trois valeurs du tenseur des covariances (en  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$  et terme croisé). Un état obtenu comme puissances de  $I$  sera donc un invariant ce qui est le cas pour les gaussiennes centrées au point où l'on fait l'approximation harmonique locale :

$$d(\vec{r}, \vec{p}, t) = N \exp \{ - I(\vec{r}, \vec{p}, t)/\lambda \} \quad (77)$$

L'ensemble des fonctions  $d$  sont des états cohérents qui forment une base surcomplète de l'espace des fonctions de distribution. La méthode pseudoparticulaire revient alors à effectuer une troncation de cette base et d'écrire :

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_{k=1}^N w_k d(\vec{r}-\vec{r}_k, \vec{p}-\vec{p}_k, \alpha_k) \quad (78)$$

où  $\alpha_k \equiv (\chi_k, \phi_k, \sigma_k)$

Si chaque gaussienne  $d$  est normalisée à l'unité et si l'on impose  $w_k = w_0$ , l'on obtient :

$$w_0 = h^3 \frac{A}{N} \quad (79)$$

comme en (74) dans le domaine où  $f$  n'est pas nul.

L'évolution au cours du temps de  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  est alors donnée par les équations du mouvement pour les  $(\vec{r}_k, \vec{p}_k, \alpha_k)$  c'est à dire :

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_k = \vec{p}_k \quad (80a)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_k = - \langle \vec{\nabla}_r U(f) \rangle_k \quad (80b)$$

où  $\langle \rangle$  représente la moyenne prise sur la gaussienne  $k$ . Ces équations sont les équations d'Ehrenfest pour un paquet d'onde gaussien.

Les seconds moments en  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \chi = \frac{2\sigma}{m} \end{array} \right. \quad (81a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \phi = -2m \Omega^2 \sigma \end{array} \right. \quad (81b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \sigma = \frac{\phi}{2m} - m \Omega^2 \chi \end{array} \right. \quad (81c)$$

avec  $\Omega^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{z_k}$  pour les cas à une dimension d'espace  $z$  où

l'espace des phases est  $(z,p)$ . L'extension à trois dimensions d'espace est immédiate.

Une approximation supplémentaire consiste à geler ces seconds moments et à ne déduire la dynamique que des équations (80), les largeurs des gaussiennes restant les largeurs initiales, dont nous verrons au paragraphe I.7. qu'elles peuvent être déterminées afin d'obtenir certaines propriétés statiques des noyaux. En pratique les équations (80) peuvent être résolues par la méthode du saut de grenouille (leap-frog) qui est du deuxième ordre en  $\Delta t$  (l'intervalle de temps élémentaire) tout en gardant la simplicité d'une méthode du deuxième ordre [25]. L'évolution entre  $(v-1) \Delta t$  et  $v \Delta t$  est obtenue en décalant positions et impulsion d'un demi-intervalle  $\Delta t/2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \left( (v + \frac{1}{2}) \Delta t \right) = - \langle \vec{\nabla} U \rangle (v \Delta t) \times \Delta t + \vec{p} \left( (v - \frac{1}{2}) \Delta t \right) \end{array} \right. \quad (82a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} (v \Delta t) = \vec{p} \left( (v - \frac{1}{2}) \Delta t \right) \Delta t + \vec{r} \left( (v - 1) \Delta t \right) \end{array} \right. \quad (82b)$$

Avec des forces dérivées d'interaction effectives soit locales, soit de portée finie, soit dépendante de vitesses, on peut vérifier la validité de la méthode en s'assurant que conservations de l'énergie et de l'impulsion sont vérifiées ainsi que la réversibilité de l'équation de Vlasov. Dans le cas de forces dépendantes des vitesses, un terme en  $\vec{\nabla}_p U$  doit s'ajouter à l'équation (82b).

#### 1.5.4. - Ecriture des interactions effectives

Ce n'est pas l'objet de ce paragraphe de justifier et de dériver d'interactions nues des interactions effectives, mais plutôt de donner leur forme fonctionnelle puisque c'est elle qui est nécessaire pour déterminer les solutions de l'équation de Vlasov et, plus loin, de Landau-Vlasov.

a) Interaction locale du type Skyrme [26] :

$$U(f) = U(\rho(r)) = a \rho + b \rho^{1+\sigma} \quad (83)$$

a, b et  $\sigma$  étant déterminés pour satisfaire les trois propriétés de la matière nucléaire à l'équilibre (énergie de liaison, densité de saturation et compressibilité).

b) Interaction non-locale [27] :

$$U(f) = U(\rho(\vec{r})) = \frac{3}{4} t_0 \rho + \frac{3}{16} t_3 \rho^2 + V_0 \int \rho(\vec{r}') e^{-\left| \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{a} \right|} \left| \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{a} \right| d\vec{r}' \quad (84)$$

cette interaction est connue sous le nom de BKN.

C'est elle que nous utiliserons pour comparer TDHF et Vlasov pour des collisions de dalles de matière.

c) Interaction dépendante des vitesses [28] (interaction de Gogny).

Elle est obtenue grâce à des termes d'échanges dominant ; l'interaction nue peut se décomposer en une partie répulsive et une partie attractive. La transformée de Wigner du potentiel Hartree-Fock s'écrit, pour les systèmes  $N = Z$  :

$$U(f) = \frac{3}{4} t_3 \rho^{4/3} + \sum_{i=1}^2 A_i \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{\mu_i^2}} - \sum_{i=1}^2 \frac{4B_i}{(2\pi)^3} (\sqrt{\pi} \mu_i)^3 \int d\vec{k}' f(\vec{r}, \vec{k}') e^{-\frac{\mu_i^2 (\vec{k}-\vec{k}')^2}{4}} \quad (85)$$

les deux termes de chaque somme correspondent respectivement aux parties attractive et répulsive.

Les coefficients ont été déterminés pour obtenir, outre les propriétés de compressibilité, d'énergie de liaison et densité de saturation, la stabilité de la matière nucléaire déterminée par les paramètres de Landau (reliés en outre à la masse effective  $m^* \neq m$ ).

Une discussion de ces trois types de forces peut être trouvée dans la référence [29].

#### 1.6. - Comparaison TDHF versus Vlasov pour la dynamique des dalles de matière nucléaire semi-infinie [22, 31]

L'intérêt d'une telle comparaison réside dans le fait qu'elle permet d'évaluer de combien l'approximation semi-classique s'écarte de la solution quantique dans des situations dynamiques allant des petites amplitudes d'oscillation à des mouvements collectifs de grande amplitude. Elle constitue, en outre, un cas simple où les méthodes de résolution peuvent être testées ; c'est dans ce cadre qu'ont été obtenus les premiers résultats TDHF [27] et Vlasov [21, 22, 23, 30].

Une dalle de matière semi-infinie est un système à une dimension d'espace  $z$  et deux dimensions d'impulsion ( $k_{\parallel}$  le long de l'axe  $z$  et  $k_{\perp}$  dans le plan perpendiculaire). Si l'énergie à une particule elle s'écrit :

$$\epsilon(z, \vec{k}) = U(z) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \epsilon(z, k_{\parallel}) + \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m} \quad (86)$$

alors l'énergie de Fermi  $\epsilon_F$  s'obtient en fixant le nombre de nucléons  $A$  par unité de surface  $S$  :

$$\frac{A}{S} = \frac{4m}{\hbar^2} \int \theta(\epsilon_F - \epsilon(z, k_{\parallel}) - \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m}) 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel} dz \quad (87)$$

Dans la méthode pseudoparticulaire, l'expression (78) peut s'écrire comme un produit de convolution des gaussiennes  $d$  avec une fonction de poids  $w(\vec{r}, \vec{p})$  :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \int d\vec{r}' d\vec{p}' w(\vec{r}', \vec{p}') d(\vec{r}-\vec{r}', \vec{p}-\vec{p}') \quad (88)$$

Dans le cas des dalles on a :

$$f(z, k_{\parallel}, t) = \frac{m}{\pi^2 \hbar^2} \int dz_0 dk_0 (\epsilon_F - \langle \epsilon(z_0, k_0) \rangle) \Theta(\epsilon_F - \langle \epsilon(z_0, k_0) \rangle) \times d(z-z_0(t), k-k_0(t)) \quad (89)$$

où l'intégration sur  $k_{\perp}$  a été effectuée et où  $k$  remplace  $k_{\parallel}$  dans les intégrales. Les valeurs moyennes  $\langle \rangle$  sont prises sur l'extension des gaussiennes. Les largeurs en  $z$  et  $k$  de ces dernières ont été déterminées en [31, 32] pour obtenir des profils de densité initiaux et des énergies de Fermi correspondant aux équivalents quantiques après lissage des effets de couche. Une dalle isolée est obtenue par recherche du minimum d'énergie à l'aide d'une itération auto-cohérente, comme dans le cas de Hartree-Fock statique.

### 1.6.1. - Petites oscillations

Une dalle isolée étant préparée avec une taille de 1.4 nucléons/Fm<sup>2</sup>, un mode de compression est excité par application d'un champ de vitesse :

$$v(z) = \alpha \frac{2\hbar}{m} z \quad (90)$$

où  $\alpha$  est le paramètre réglant la compression.

La variation de l'épaisseur carrée moyenne de la dalle en fonction du temps est alors obtenue en résolvant l'équation de Vlasov. Elle peut être comparée aux résultats de TDHF (réf. [27]) pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Dans le régime linéaire (petites valeurs  $\alpha$ , Vlasov et TDHF conduisent à des oscillations presque identiques en fréquence et en amplitude (figure 2). Au delà de  $\alpha = 0.04$  fm<sup>2</sup> des différences substantielles apparaissent, l'amortissement du mode étant beaucoup plus marqué dans le cas de TDHF. Cet amortissement est lié au couplage au continuum qui est beaucoup plus fort dans le cas quantique. Dans le cas



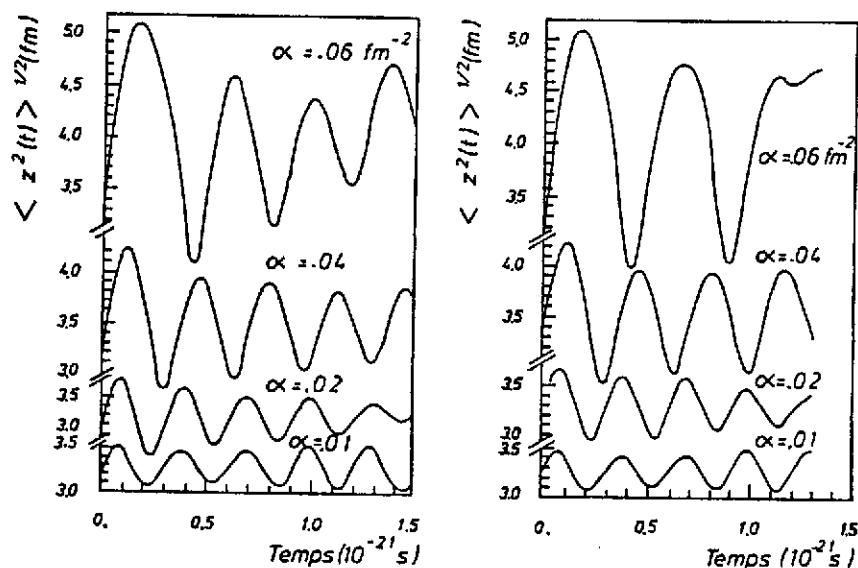


FIGURE 2

ÉVOLUTION DYNAMIQUE DE L'ÉPAISSEUR CARRÉE MOYENNE D'UNE DALLE DE MATIÈRE DE TAILLE  $1.6 \text{ fm}^2$  SOUMISE INITIALEMENT À UN CHAMP DE VITESSE LONGITUDINAL D'AMPLITUDE  $\alpha$ .  
 À GAUCHE : SOLUTION DE L'ÉQUATION DE VLASOV,  
 À DROITE : SOLUTION DE TDHF POUR LA MÊME INTERACTION BKW.

de Vlasov, ce couplage ne s'opère guère en dessous de grandes énergies d'excitation puisque les énergies moyennes  $\langle \epsilon(z, k) \rangle$  sont inférieures à  $\epsilon_F$  et que la dynamique est approximée par les équations (80), les largeurs des gaussiennes étant gelées. Le même phénomène peut être observé dans la vibration monopolaire de noyaux sphériques (paragraphe suivant). Nous retiendrons ici la similarité des comportements semi-classiques et quantiques quand le couplage au continuum est faible.

#### 1.6.2. - Traversée d'une barrière de potentiel par une dalle

L'effet tunnel étant une propriété purement quantique, la traversée d'une barrière de potentiel en semi-classique devrait s'opérer de manière très différente en comparaison avec TDHF. Néanmoins, l'approximation BKW [33] donne une description raisonnable du franchis-

sement des barrières, ce qui pourrait fort se retrouver au niveau de l'équation de Vlasov. Une barrière de potentiel parabolique étant choisie :

$$V(z) = V_0 \exp \left\{ - z^2/2a^2 \right\} \quad (91)$$

les solutions de TDHF et Vlasov ont été obtenues en [27] et [31] pour des dalles abordant la barrière à 10 MeV par nucléon (figure 3). La largeur "a" a été choisie égale à 2 fm.

Dans le cas où cette barrière a une hauteur  $V_0 = 10$  MeV la transmission se produit de la même manière dans les deux calculs, si ce n'est une rupture de la dalle en deux parties après son passage pour Vlasov. Dans le cas où  $V_0 = 20$  MeV, parties transmises et réfléchies sont de même taille dans les deux calculs. Cela montre que, à la demi-hauteur de la barrière et au dessus, le calcul semi-classique donne des comportements similaires à ceux de TDHF. La partie de la dalle qui se trouve avec une énergie cinétique supérieure à la barrière entraîne, par la force à courte portée, la partie dont le franchissement devrait être interdit classiquement. Cet effet est important, car c'est selon le même mécanisme que peut s'opérer les échanges de nucléons entre noyaux dans les collisions d'ions lourds. Un accord Vlasov-TDHF sur ce point permet donc d'aborder les phénomènes de dissipation à un corps, d'équilibration de modes collectifs à l'aide de Vlasov, sans craindre une prédominance des effets quantiques de TDHF.

### 1.6.3. - Collisions de dalles

Une comparaison Vlasov-TDHF est faite en figure 4 dans le cas de collisions entre deux dalles identiques de taille 1.4 nucléon/fm<sup>2</sup> à une énergie de bombardement égale à 3.5 MeV/u dans le référentiel du centre de masse d'une part et 25 MeV/u d'autre part. Les profils de densité sont dessinés pour un ensemble d'intervalles de temps en unités de 10<sup>-22</sup>s. Les comportements sont très proches dans les deux calculs

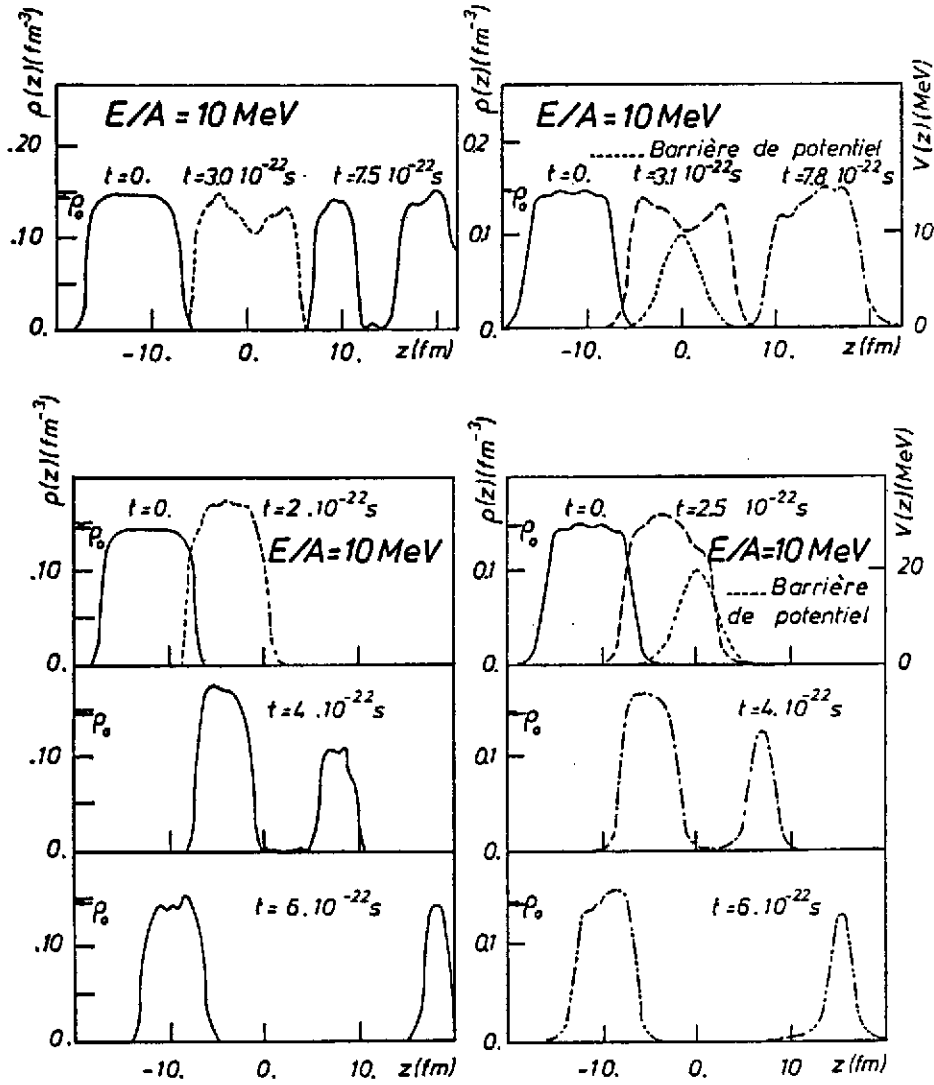


FIGURE 3

COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS VLASOV ET TDHF POUR LE FRANCHISSEMENT D'UNE BARRIÈRE DE POTENTIEL GAUSSIENNE DE HAUTEUR 10 MeV (HAUT) ET 20 MeV (BAS) PAR UNE DALLE DE MATIÈRE DE MASSE  $1,4 \text{ fm}^{-2}$  À 10 MeV/u. LES PROFILS DE DENSITÉ À DIFFÉRENTS INSTANTS MONTRENT L'ÉVOLUTION DYNAMIQUE DU SYSTÈME.

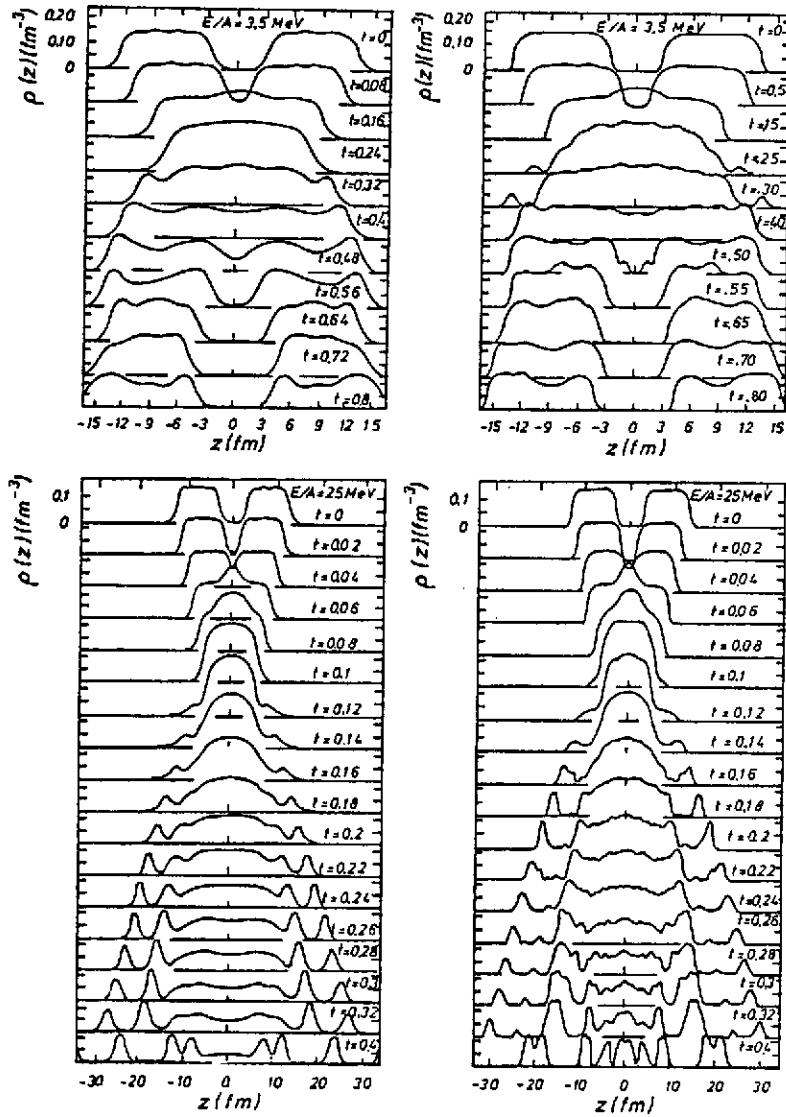


FIGURE 4

COMPARAISON DES DYNAMIQUES TDHF (GAUCHE) ET VLASOV (DROITE) POUR DES COLLISIONS DE DALLES IDENTIQUES DE MASSE  $1,4 \text{ fm}^{-2}$  À  $3,5 \text{ MeV/u}$  (HAUT) ET  $25 \text{ MeV/u}$  (BAS) D'ÉNERGIE CINÉTIQUE DANS LE SYSTÈME DU CENTRE DE MASSE.

avec, à basse énergie, une collision très inélastique et une réaction de fragmentation à haute énergie. Dans ce dernier cas, la solution trouvée pour l'équation de Vlasov semble plus instable que celle de TDHF, donnant lieu à plus de fragments. Cela indique que l'extension quantique de TDHF tend à stabiliser le système à basse densité. En d'autres termes, le seuil d'instabilité en deçà duquel le paramètre de Landau  $F_0$  devient inférieur à  $-1$  correspond à une croissance plus rapide d'instabilités dynamiques dans le cas semi-classique que dans le cas quantique.

Une manière complémentaire de comparer les calculs est de regarder les isodensités dans l'espace de phase  $(z,k)$ . La figure 5,

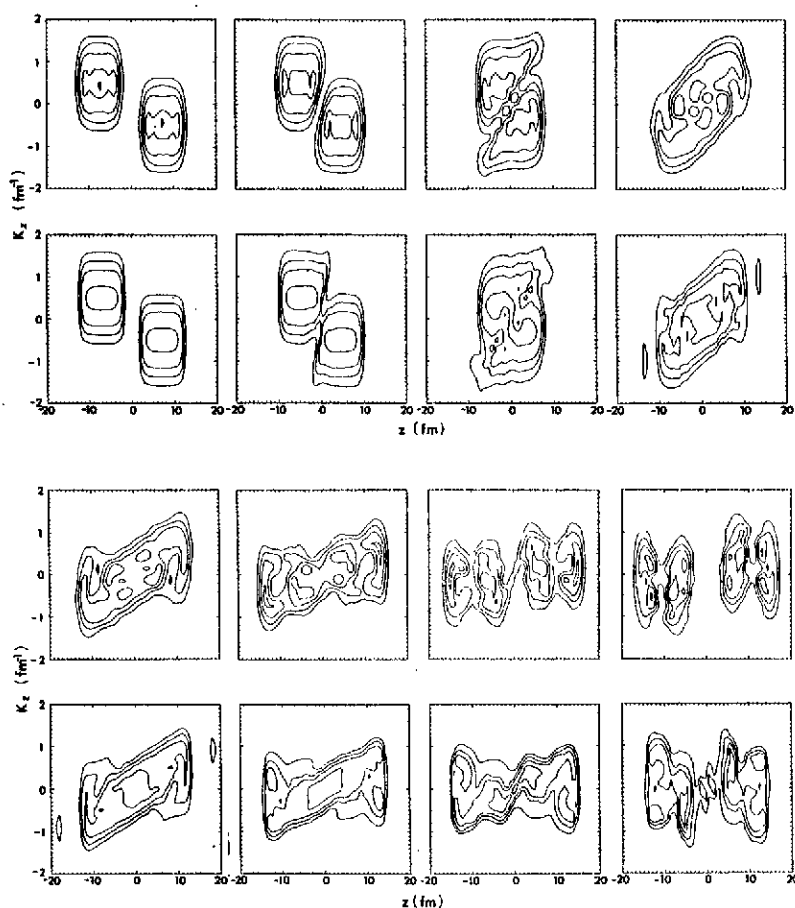
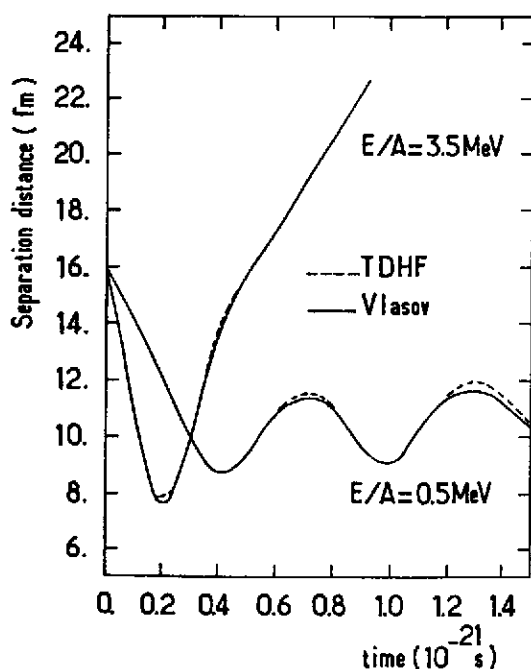


FIGURE 5  
COMPARAISON TDHF (HAUT) ET VLASOV (BAS) POUR L'ÉVOLUTION  
DANS L'ESPACE DES PHASES DE DEUX DALLES DE MASSE  $1,4 \text{ fm}^{-2}$   
À UNE ÉNERGIE DE  $5,2 \text{ MeV/u}$ .

extraite de la référence [30], correspond à une énergie de bombardement de 5.2 MeV/u i.e. à une réaction très inélastique. La reséparation des dalles est plus lente à s'effectuer dans le cas de Vlasov en raison d'une émission à 24 fm/c qui doit contribuer à ralentir le mouvement relatif. La méthode numérique employée dans cette réf. [30] est peut être responsable de cet effet à propos duquel nous ne tirerons pas ici de conclusion.

L'évolution d'observables telles que la distance relative définie par :

$$d(t) = \frac{2S}{A} \int dz \rho(z,t) |z| \quad (92)$$



montre, qu'en fait, Vlasov et TDHF conduisent à des résultats identiques quand aux mouvements de grande amplitude, ainsi qu'en atteste la figure 6. Sur une échelle de  $1.4 \cdot 10^{-21}$ s et pour des collisions à 0.5 MeV/u et 3.5 MeV/u, les processus de fusion et de réaction très inélastiques sont décrits sans différence notable.

FIGURE 6

ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA DISTANCE RELATIVE ENTRE DEUX DALLES DE MASSE  $1.4 \text{ fm}^{-2}$  DANS DES COLLISIONS À 3,5 MeV/u ET 0,5 MeV/u. LES CALCULS TDHF (TRAIT PLEIN) SONT COMPARÉS À CEUX DE VLASOV (TRAIT POINTILLÉ) POUR L'INTERACTION EFFECTIVE DE BKN,

I.7. - Expansion d'un système à symétrie sphérique [34, 35, 36]

La détermination d'un noyau dans son état fondamental requiert la recherche de la solution de :

$$\{ h_w, f \} = 0 \quad (93)$$

par itérations Hartree-Fock. Ces itérations sont effectuées dans le contexte des équations dynamiques, puisque cette solution statique doit être, par construction, solution stationnaire de l'équation de Vlasov (61). En d'autres termes, la convolution (88) permet, en restreignant l'espace de fonctions, de construire une telle solution, pourvu que les variances  $\sigma_r^2$  et  $\sigma_k^2$  en espace et impulsions soient fixées. Dans la suite de ce cours, nous nous placerons à l'approximation Thomas-Fermi pour le poids  $w$  et l'équation (88) c'est-à-dire :

$$w(\vec{r}, \vec{k}) = \theta \left( \epsilon_F - \frac{\vec{k}^2}{2m} - \epsilon(\vec{r}, \vec{k}) \right) \quad (94)$$

Dans ces conditions  $\sigma_r^2$  et  $\sigma_k^2$  peuvent être obtenus en minimisant l'écart des rayons carrés moyens et des énergies de liaison calculés d'avec les valeurs expérimentales. Pour la force locale (83) avec  $\sigma = \frac{1}{6}$  (module d'incompressibilité  $K = 200$  MeV), et l'inclusion de la force coulombienne, on trouve :

$$\sigma_r^2 = 0.376 \text{ fm}^2 \text{ et } \sigma_k^2 = 0.0216 \text{ fm}^2$$

pour des noyaux du  $^{40}\text{Ca}$  au  $^{208}\text{Pb}$ .

Une étude comparative HF équ. (88) et (89) a pu être menée à bien pour la force  $S_{KM}^*$  [37] et la figure 7 montre les profils neutron et proton calculés pour le  $^{40}\text{Ca}$  et le  $^{208}\text{Pb}$ . On voit que la convolution permet d'obtenir un comportement de la surface satisfaisant avec les approximations (équ. (88)).

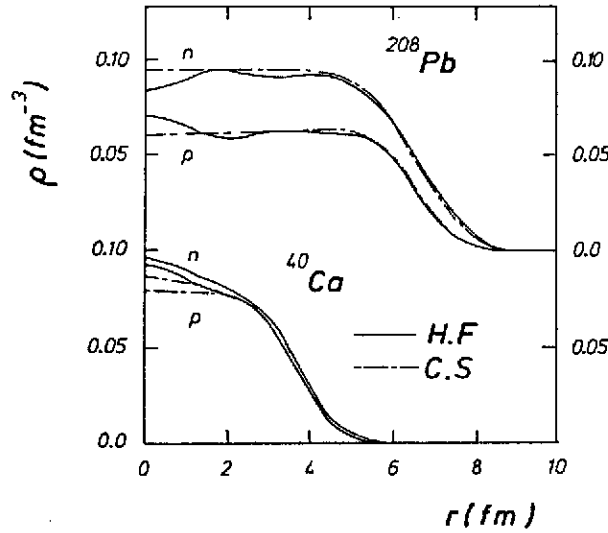


FIGURE 7

PROFILS DE DENSITÉ DES NEUTRONS ET DES PROTONS DU  $^{208}\text{Pb}$  ET DU  $^{40}\text{Ca}$  OBTENUS PAR LA SOLUTION HARTREE-FOCK (TRAIT PLEIN) ET PAR LA MÉTHODE DE CONVOLUTION DANS VLASOV STATIQUE (TRAIT POINTILLÉ).

En fait, à la symétrie sphérique, on peut effectuer une décomposition en ondes partielles, l'espace de phase  $(r, p_r, p_\perp)$  se transformant en  $(r, p_r, L)$  où  $L^2 = r^2 p_\perp^2$ . La fonction de distribution  $f(r, p_r)$  s'écrit :

$$f(r, p_r) = \int L f(r, p_r, L) dL \quad (95)$$

où  $f(r, p_r, L) \equiv f_L(r, p_r)$  satisfait à :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_L + \frac{p_r}{m} \frac{\partial f_L}{\partial r} - \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} \right\} \frac{\partial f_L}{\partial p_r} = 0 \quad (96)$$

Un mode de compression s'obtient en imposant dans l'itération initiale une contrainte sur le rayon carré moyen :

$$h_w \rightarrow h_w + \lambda A \langle r^2 \rangle \quad (97)$$

Le noyau ainsi comprimé au temps initial évolue pour les temps ultérieurs suivant l'équation de Vlasov. L'exemple de la figure 8 montre l'oscillation monopolaire de  $\langle r^2 \rangle$  pour un noyau de  $^{40}\text{Ca}$  dans le régime linéaire où  $\lambda$  est inférieur à  $1 \text{ MeV fm}^{-2}$ . La pulsation correspond à une énergie de 21.3 MeV, compatible avec la rigidité de la force effective



( $K = 200$  MeV). La courbe en pointillé correspond au calcul de  $\langle r^2 \rangle$  dans tout l'espace, alors que le trait plein est obtenu par intégration dans une sphère centrée au milieu du noyau et de rayon 8 fm. Le décalage croissant avec  $\lambda$  entre les deux courbes indique le couplage au continuum pour les grandes amplitudes. Remarquons toutefois que l'amortissement du mode est négligeable en comparaison d'avec le calcul quantique [38] où seules une à deux oscillations survivent au couplage au continuum. Il s'agit là d'une différence essentielle entre les deux approches, la dynamique de Vlasov étant essentiellement classique avec une "strength" en forme de fonction delta.

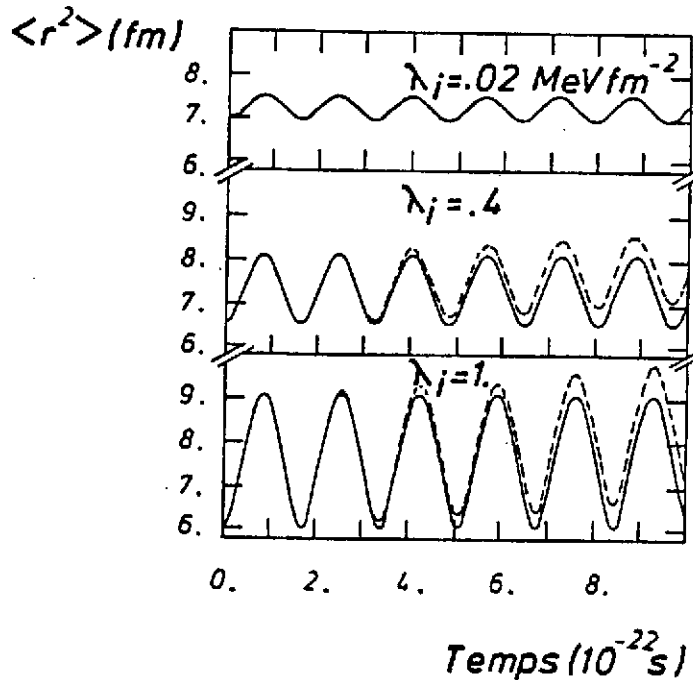


FIGURE 8  
ÉVOLUTION DU RAYON CARRÉ MOYEN D'UN NOYAU DE  $^{40}\text{Ca}$  SOUMIS À  
UNE COMPRESSION INITIALE PAR UN CALCUL VLASOV STATIQUE  
SOUS CONTRAINTE, LA CONSTANCE  $\lambda_j$  RÉGLANT L'INTENSITÉ DE LA  
COMPRESSION.

Une autre forme d'excitation s'obtient aussi bien par un chauffage soudain du système. Les densités à température nulle étant déterminées, il s'agit de modifier les distributions d'impulsions, les densités restant gelées :

$$f(\vec{r}_0, \vec{k}) \rightarrow \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{\epsilon(\vec{r}_0) - \epsilon_F(\vec{r}_0, T_i)}{T_i} \right] \right\} \quad (98)$$

où  $T_i$  est une température initiale.

$\epsilon_F(\vec{r}_0, T)$  est déterminé par la relation :

$$\rho(\vec{r}_0) = \int d\vec{k} f(\vec{r}_0, \vec{k}, T_i) \quad (99)$$

Selon la valeur de  $T_i$ , tel un tel système va évoluer au cours du temps (puisque'il est loin de l'équilibre) de manière différente. Pour  $T_i = 8$  MeV, une oscillation monopolaire avec des minima de densité jusqu'à  $\rho_0/3$  se développe. Pour  $T_i = 15$  MeV, des noyaux bulles (particularité de la symétrie sphérique) se forment. Pour  $T_i = 18$  MeV, le système tout entier se désintègre pour former un gaz de nucléons (figure 9). Ces comportements sont également les mêmes dans les calculs hydrodynamiques [39] ainsi que dans la dynamique TDHF [40]. Leur étude à l'aide de l'équation de Vlasov permet ici d'illustrer le fait que les solutions dérivées des méthodes de ce chapitre permettent d'étudier des situations dynamiques très diverses. Comme l'introduction d'un terme de collision est aisé dans la dynamique semi-classique nous allons voir au chapitre II, que ces méthodes sont très fructueuses pour étudier des situations où ni l'approximation TDHF, ni l'approximation hydrodynamique ne sont valables.

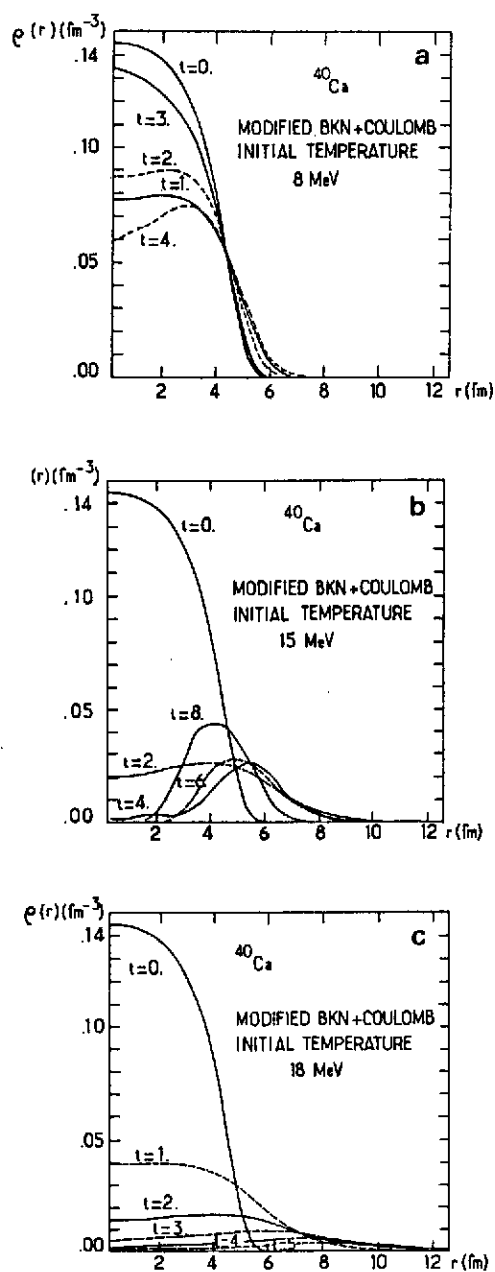


FIGURE 9

ÉVOLUTION TEMPORIELLE DES PROFILS DE DENSITÉ D'UN NOYAU DE  $^{40}\text{Ca}$  SOUMIS INITIALEMENT À UN CHAUFFAGE SOUDAIN AVEC UNE TEMPÉRATURE ASSOCIÉE DE 8 MeV (HAUT), 15 MeV (MILIEU), 18 MeV (BAS).

Chapitre II - Phénoménologie des termes de collisions. Rôle des interactions effectives et résiduelles dans les réactions entre ions lourds

Les deux comportements asymptotiques de la dynamique nucléaire étant d'une part l'élasticité dont les propriétés sont obtenus via le champ moyen relatif aux densités à un-corps et d'autre part l'hydrodynamique (libre parcours moyen nul), nous avons vu qu'à basse énergie une interaction résiduelle conduit à étendre la théorie de champ moyen alors qu'à haute énergie la cascade intranucléaire décrit l'approche à l'équilibre supposé par l'hydrodynamique. Dans toute la gamme des énergies où la dynamique est celle de la densité à un corps des nucléons, on a alors équivalence entre champ moyen plus collisions (basses énergies) et cascade plus champ (hautes énergies). Le double comptage est évité si on estime les sections efficaces dans le milieu, ainsi que nous l'apprend l'équation de Botermans-Malfliet. A l'approximation semi-classique, l'équation de Landau-Vlasov (ou Vlasov avec collisions) permet donc de décrire l'ensemble de la dynamique nucléaire à un corps. Au chapitre I, nous avons, avec l'équation de Vlasov, décrit le champ moyen effectif ; nous allons examiner ici le terme de collision ainsi que les applications à la physique des ions lourds aux énergies intermédiaires définies par une énergie de bombardement entre 10 et 100 MeV/u.

II.1. - Termes de collisions : le chaos moléculaire

Les termes de collisions dans l'équation Waldmann-Snider ou dans l'équation Botermans-Malfliet conduisent, avec les approximations décrites au chapitre I, à l'expression (64). Elle correspond à la collision de deux nucléons dans le milieu. Chaque collision dépeuple la densité à un corps (perte) ou y contribue (gain). Les états finaux accessibles sont décrits par les facteurs de blocage de Pauli. Les états intermédiaires dans le milieu ne sont aussi accessibles que si l'opérateur de Pauli de l'équation Bethe-Goldstone le permet : la section efficace nucléon-nucléon effective dans (68) est donc réduite dans le milieu en comparaison d'avec la section efficace libre.

L'expression (64) - intégrale de Uehling et Uhlenbeck [16] - résulte de l'hypothèse du chaos moléculaire : destruction des corrélations à deux particules entre deux collisions successives. Cela suppose donc que l'intervalle de temps  $\tau_c$  entre deux collisions est grand devant  $\tau_i$ , le temps d'interaction. L'hypothèse rend le processus irréversible puisque l'on perd, en la faisant, l'information sur les corrélations pendant le temps  $\tau_c$ .

Les avantages de (64) résident dans :

- sa structure fonctionnelle, avec, en particulier, la non-linéarité du terme de gain ;
- la conservation à l'échelle microscopique de l'énergie et de l'impulsion ;
- le fait qu'à l'équilibre, la fonction de distribution tende vers une fonction de Fermi (du fait des facteurs  $(1-f)$  dans (64)).

Ses limites résident dans l'absence des effets hors-couches et dans l'absence des corrélations.

L'atteinte vers l'équilibre est illustrée par la figure 10 (réf. [41]). La situation hors d'équilibre est la suivante : une sphère de Fermi de rayon unité entourée d'une couche d'occupation distante de 0.1 du moment de Fermi et d'épaisseur 0.1 unités est préparée à l'instant  $t = 0$ . L'évolution des nombres d'occupation de ce système à symétrie sphérique dont le terme de collision est celui de l'expression (64) est tel qu'à chaque intervalle de temps (de 0.2 à 0.8 unités de temps) l'espace séparant sphère et "coquille" tend à se combler. Pour des valeurs ultérieures du temps, la fonction de distribution pourra être décrite par une répartition de Fermi à température finie : l'équilibre microcanique est alors atteint. En fait, le processus de relaxation s'opère d'autant plus vite que l'espace de phase est accessible. Dans le cas de collisions nucléon-noyau, où seul le terme de perte est présent dans l'intégrale de collision, cela se traduit par une

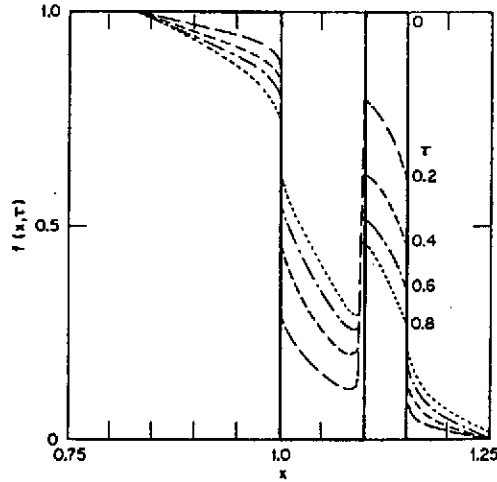


FIGURE 10  
ÉVOLUTION D'UNE CONFIGURATION D'IMPULSION HORS D'ÉQUILIBRE POUR UN SYSTÈME SPHÉRIQUE DONT LA DYNAMIQUE EST RÉGIE PAR UN TERME DE COLLISION À LA UEHLING-UHLENBECK. LE TEMPS  $\tau$  CORRESPONDANT À CHAQUE DISTRIBUTION EST EXPRIMÉE EN UNITÉS ÉGALES À 64 FM/C (RÉF. [41]).

diminution du libre parcours moyen  $\lambda$  avec la température ( $\lambda$  étant inversement proportionnel à l'intégrale de collisions ne contenant que le terme de perte) [42]. Au voisinage de l'énergie de Fermi, la divergence de  $\lambda$  à température nulle est levée et pour  $T = 10$  MeV les facteurs de blocage de Pauli dans l'état final ne jouent plus de rôle (figure 11).

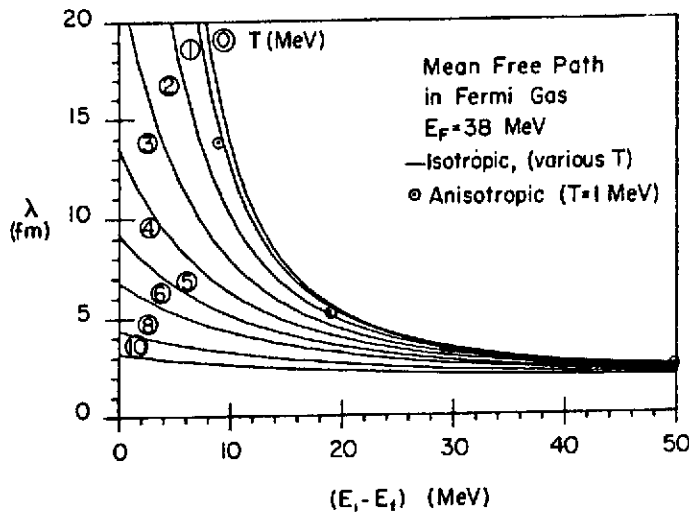


FIGURE 11  
LIBRE PARCOURS MOYEN DANS UNE COLLISION NUCLÉON-NOYAU AU DESSUS DE L'ÉNERGIE DE FERMÍ. LES VALEURS DE TEMPERATURES  $T$  SONT CELLES DU NOYAU DIFFUSEUR (RÉF. [42]).

Dans tous les cas, la valeur asymptotique correspond à  $\lambda \sim 3$  fm à haute énergie. Il faut noter ici que dans les collisions noyau-noyau, la situation diffère puisque le terme de gain intervient et seul un libre parcours moyen effectif peut être défini ; dans ce cas, il croît avec l'énergie comme l'indique de son côté les estimations des parties imaginaires des potentiels optiques [43, 44]. L'atteinte de l'équilibre dans ces collisions aux énergies intermédiaires n'est, en général, que partiellement réalisé. Par exemple, dans la simulation de la réaction  $^{12}\text{C}$  (84 MeV/u) +  $^{12}\text{C}$  à un paramètre d'impact  $b = 1$  fm, les auteurs de la référence [45] qui y emploient une méthode particulière (cf. chapitre I.5.2) ont examiné en fin de collision (c'est-à-dire pour  $t = 120$  fm/c) les particules ayant subi au moins une interaction nucléon-nucléon ( $N_c > 0$ ) et celles n'en ayant pas subi ( $N_c = 0$ ) (figure 12). La distribution d'impulsion n'est que déformée par la propagation dans le champ noyau-noyau moyen pour  $N_c = 0$ , la structure en "bi-sphère" initiale étant préservée pour l'essentiel. Pour  $N_c > 0$ , une configuration proche de celle d'une sphère de Fermi diffuse est atteinte. Les particules associées sont réparties dans une grande région de l'espace car l'entropie du système croît au cours de la relaxation.

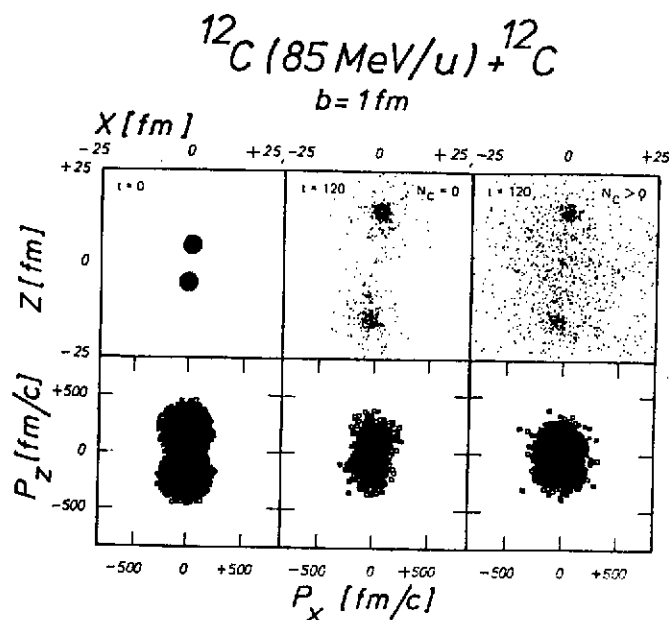


FIGURE 12

DISTRIBUTIONS SPATIALES (HAUT) ET DANS L'ESPACE DES IMPULSIONS (BAS) DES NUCLÉONS DU SYSTÈME  $^{12}\text{C}$  (85 MeV/u) +  $^{12}\text{C}$  AVEC  $b = 1$  FM À L'INSTANT INITIAL (GAUCHE) ; DE CEUX N'AYANT PAS SUBIS D'INTERACTION NUCLÉON-NUCLÉON (CENTRE) ET DE CEUX EN AYANT SUBI AU MOINS UNE (DROITE) À L'INSTANT FINAL ( $t = 120$  FM/c) (RÉF. [45]).

## I.2. - Effet des collisions sur l'évolution dynamique

L'expression de Uehling-Uhlenbeck (equ. (64)) doit être entendue, si l'on souhaite éviter le double comptage avec le terme de champ moyen, avec des sections efficaces nucléon-nucléon effectives dans le milieu (cf. chap. I.3b). Ces sections efficaces dépendent donc de l'énergie, de l'isospin et de la densité. Faute d'une dérivation à la Brueckner au long de la dynamique et en vue de demeurer réaliste nous avons décomposé cette section efficace en :

$$\sigma = \sigma^{\text{libre}}(E, Y) \times \phi(\rho) \quad (100)$$

où  $E$ ,  $Y$ ,  $\phi$ , désignent, respectivement, l'énergie relative nucléon-nucléon, l'isospin (nn, np ou pp) et une fonction de la densité baryonique  $\rho$  [22]. Dans la voie élastique aux énergies considérées (inférieures à 100 MeV), il est aussi raisonnable de supposer l'isotropie. La dépendance en  $E$  et  $Y$  est prise identique à la dépendance de la diffusion libre telle qu'elle se trouve décrite en [46] et paramétrisée en [47] : double pour np en comparaison de pp et nn, elle décroît de 180 mb à 50 MeV à 30 mb à 500 MeV. Ces valeurs sont, bien sûr, réduites dans l'expression (64) de part le blocage dans les états finaux. La fonction  $\phi$  a été estimée dans des situations à l'équilibre thermique en [48, 49]. Dans les résultats de calculs présentés dans la suite, cette fonction a été simplement approchée par une fonction de Fermi valant l'unité pour  $\rho < \rho_0/2$  et 1/2 pour  $\rho = \rho_0$ . La décroissance au delà de  $\rho_0$  est négligée ici, compte tenu du fait que relativement peu de compression est présente dans les collisions considérées.

L'intégrale (64) est calculée en utilisant la méthode pseudo-particulaire du chap. I.5.3 : les pseudo-particules sont groupées par paires. On analyse alors leur énergie relative, leur isospin et la densité moyenne ; si la section efficace est plus grande que  $\pi d^2$  où  $d$  est leur distance relative, une diffusion élastique est simulée par modification des impulsions de pseudo-particules. Cette modification



n'est alors "validée" dans la suite du calcul que si la densité dans l'espace de phase aux points finaux de la diffusion est inférieure à la dégénérescence divisée par  $h^3$ .

L'effet principal de l'ajout de ce terme de collision à la dynamique de Vlasov est d'introduire une viscosité (viscosité à deux corps) qui amortit les mouvements collectifs. En suivant les profils de densité dans la réaction  $^{12}\text{C}(84 \text{ MeV/u}) + ^{12}\text{C}$  avec  $b = 1 \text{ fm}$  au cours du temps (20-40-60-80 fm/c), on peut comparer les descriptions TDHF, Vlasov (réf. [45] : méthode particulière), Landau-Vlasov (baptisé BUU en réf. [45] : méthode particulière), Vlasov (réf. [22, 31] : méthode pseudo-particulaire) et Landau-Vlasov (même méthode) (figure 13). Pour les cinq calculs, la même force effective a été utilisée (force (83) avec  $\sigma = \frac{1}{6}$ ). Le terme de collisions BUU diffère de Landau-Vlasov de par son évaluation moins précise et de par la constance de  $\sigma$  prise égale à 30 mb. Dans les deux cas, il conduit à un fort amortissement du mouvement relatif avec une dilution des densités. Les calculs TDHF et Vlasov (1) et (2) indiquent un effet de transparence identique dans les trois cas ; cet effet est largement réduit par les interactions résiduelles même s'il demeure en partie. Pour sa part, la description Landau-Vlasov semble correspondre à un régime plus visqueux que celui de BUU ; une étude de ces différences est en cours [50] : elles proviennent sans doute de l'accroissement des sections efficaces en surface dans le cas de Landau-Vlasov.

### II.3. - Mécanismes microscopiques et macroscopiques aux énergies intermédiaires

Afin d'aborder la dernière partie de ce cours consacré aux applications à la physique des ions lourds, nous avons reporté dans le Tableau 1 les grands thèmes d'activité propres à cette physique. Compte tenu du caractère très évolutif des développements expérimentaux, nous renvoyons le lecteur aux revues les plus récentes sur le sujet. Mentionnons juste un article de revue de l'année 1986 [51] et un cours donné pendant l'été 1987 [52]. Les situations hors d'équilibre où l'interaction résiduelle commence à jouer un rôle sont celles de ce

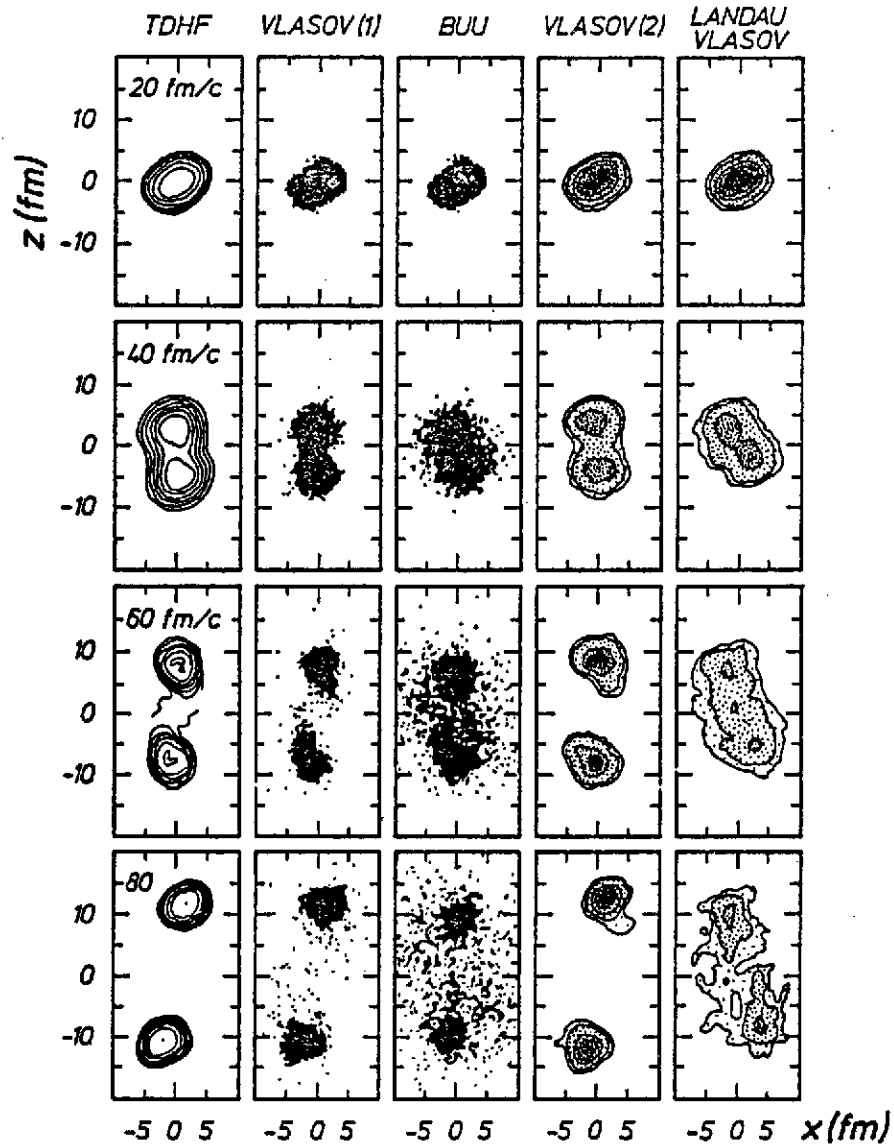
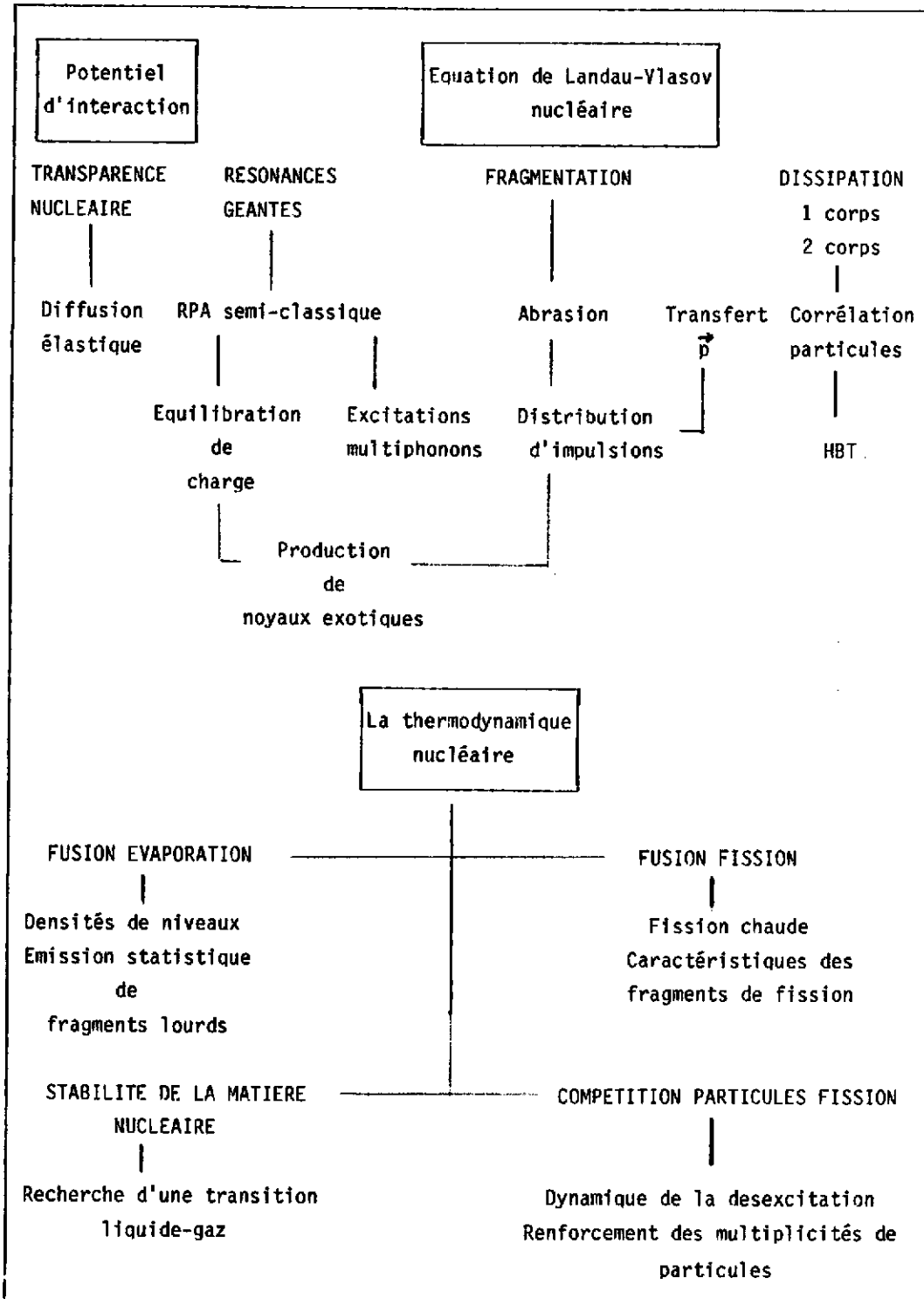


FIGURE 13

COMPARAISON DES SIMULATIONS TDHF, VLASOV (RÉF. [45]),  
 BUU (RÉF. [45]), VLASOV (RÉF. [22]) POUR LA RÉACTION  
 $^{12}\text{C}$  (85 MeV/u) +  $^{12}\text{C}$  AVEC  $B = 1$  FM. LES DENSITÉS SONT  
 REPRÉSENTÉES POUR DES TEMPS DE 20 FM/C À 80 FM/C APRÈS LE  
 DÉBUT DE L'INTERACTION, C'EST-À-DIRE AU DELÀ DU MOMENT OÙ  
 LES NOYAUX SE RECOUVRENT.

TABLE 1



domaine d'énergie. On y perturbe très fortement le noyau afin de sonder sa réponse à des excitations de forte amplitude. La complexité des processus est alors très grande et seule une analyse microscopique du type Landau-Vlasov permet de discerner les différents mécanismes mis en jeu et la nature des excitations apportées au noyau. Il ne s'agit là que d'une partie du chemin à parcourir car une étude de la réponse nucléaire suppose d'isoler alors chacun des modes dans la voie d'entrée et dans la décroissance en voie de sortie. Les sections II.4 à II.7 seront consacrées à une analyse de certains résultats obtenus au cours de ces dernières années. Dans les sections II.8 et II.9, nous indiquerons certaines perspectives rendues possibles par cette analyse préalable.

#### II.4. - Des collisions très inélastiques au processus de fragmentation

Des collisions très inélastiques se caractérisent [53, 54] comme étant un processus binaire où les degrés de liberté collectifs sont en grande partie relaxés, l'équilibration en énergie dans le système composite ayant lieu lors des premiers instants de la collision. Ces degrés de liberté sont, par ordre de temps de relaxation croissant, l'équilibration des charges, le moment angulaire, l'assymétrie de masse, les paramètres de forme (col entre les noyaux). Ces différentes propriétés sont associées au développement du champ moyen ; dans la théorie Hartree-Fock, il s'agit du mélange d'orbitales des deux noyaux initialement décrit comme des déterminants de Slater : le système total reste un déterminant de Slater dont l'évolution au cours du temps permet l'étude de variables collectives définies a priori. Une approche complémentaire est de définir ces modes et de suivre l'évolution dynamique des degrés de liberté collectifs à l'aide de projections sur le sous espace collectif de la matrice densité à N particules (cf [54]) ; en fait ce n'est possible qu'en raison du caractère binaire des collisions et de l'insignifiance des fluctuations du champ. L'équation de Landau-Vlasov est dans ce contexte, une extension naturelle de TDHF à l'approximation semi-classique afin d'introduire l'interaction résiduelle. Cette dernière a pour effet d'amortir les modes collectifs par dissipation à deux corps. A basse énergie, les collisions très inélastiques sont obtenues avec des propriétés dont l'étude est en cours [55]. Nous retiendrons ici le fait

que la simulation Landau-Vlasov pour des paramètres d'impact intermédiaires (i.e. en deça de l'effleurement) conduit à des réactions binaires jusqu'à 20 MeV/u. Le nombre de nucléons manquant aux deux noyaux dans la voie finale reste inférieur à 3 u.m.a. dans l'exemple choisi à la figure 14 (système  $^{40}\text{Ar} + ^{27}\text{Al}$  avec  $b = 7$  fm) : la dynamique est régie par la prédominance du champ moyen.

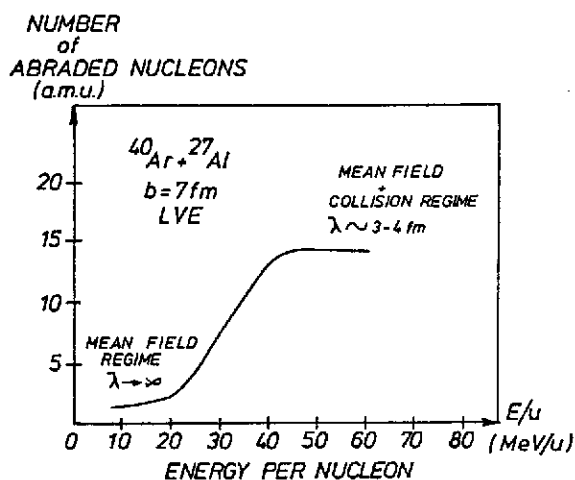


FIGURE 14

VARIATION DU NOMBRE DE NUCLÉONS ABRADÉS DANS LA COLLISION  $^{40}\text{Ar} + ^{27}\text{Al}$  À UN PARAMÈTRE D'IMPACT  $b = 7$  FM EN FONCTION DE L'ÉNERGIE INCIDENTE PAR NUCLÉON. (SIMULATION LANDAU-VLASOV).

Les réactions de fragmentation, pour leur part, sont schématiquement décrites par une abrasion géométrique où le champ moyen n'a pas le temps de se réarranger. Mécanisme des collisions à grande vitesse, il conduit à deux fragments "spectateurs" et à une zone "participante" au sein de laquelle les collisions nucléon-nucléon réalisent

un équilibre partiel ou total [51]. L'approche à la Landau-Vlasov contient également, en raison de son terme de collisions les ingrédients nécessaires à la simulation de ces réactions [56, 57]. Au delà de 50 MeV/u, environ 13 nucléons sont trouvés dans une zone participante dans le calcul précédent. Ce chiffre, parce que constant pour des énergies de bombardement supérieures, atteste l'atteinte de l'abrasion géométrique au delà de cette valeur. On peut dire que le régime collisionnel devient dominant, en dépit du fait que de nombreuses contributions potentielles à l'intégrale de Uehling et Uhlenbeck sont réduites par les facteurs de blocage dans l'état final.

Le passage d'un régime à l'autre (champ moyen à collisionnel) est donc identifié par la transition des collisions très inélastiques aux réactions de fragmentation. Dans l'intervalle de cette transition ( $20 \text{ MeV/u} < E/u < 50 \text{ MeV/u}$ ), aucun des deux mécanismes n'est pur. Les figures 15 à 17 comparent résultats de la simulation Landau-Vlasov et quelques données expérimentales obtenus au Ganil avec le système  $^{40}\text{Ar}$  ( $35 \text{ MeV/u}$ ) +  $^{27}\text{Al}$  [58]. Ces comparaisons portent sur les corrélations moyennes entre masse du quasi-projectile et masse de la quasi-cible (figure 15), les énergies moyennes par nucléon des quasi-projectiles (figure 16), la valeur absolue de la déflexion de la quasi-cible en fonction de la profondeur de la collision exprimée par la masse du quasi-projectile émergeant (figure 17). En figure 15, l'abrasion géométrique avec un rayon réduit  $r_0 = 1.36$ , dont la grande valeur par rapport à celle des énergies relativistes reflète les effets de champ, décrit convenablement les résultats expérimentaux [58]. La figure 16 fait apparaître un écart significatif entre simulation et expérience pour des masses de quasi-projectile inférieure à 27 u.m.a. Le fait que les détecteurs de particules ne sont placés qu'à certains angles dans l'expérience pourrait être à l'origine de cette déviation. Néanmoins, dans une région où le nombre de collisions nucléon-nucléon devient important, il pourrait s'agir d'une surestimation de la viscosité à deux corps dans la simulation. Un désaccord similaire apparaît dans la fonction de déflexion de la figure 17. Les ambiguïtés expérimentales liées à une exploration restreinte de la corrélation angulaire mériteraient donc d'être levées car une information significative pourrait alors être apportée en ce qui concerne le terme de collisions. Cela devrait constituer une deuxième génération d'expériences dans le domaine de transition entre réactions très inélastiques et fragmentation du projectile. En ce qui concerne l'aspect théorique, mentionnons que des modèles phénoménologiques tenant compte des propriétés moyennes de l'extension dans l'espace des phases du système rendent compte avec une bonne approximation de la transition : ils peuvent être utilisés à titre prédictifs pour déterminer le choix des systèmes à étudier (cible, projectile, énergie de bombardement, angles de détection) [58, 59].

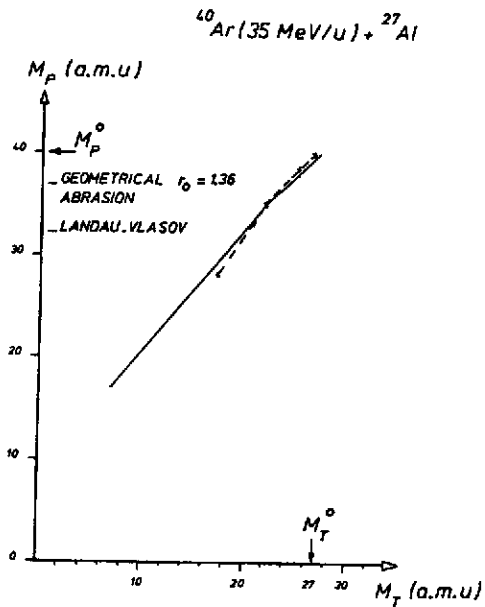


FIGURE 15  
CORRÉLATIONS CALCULÉES PAR UN MODÈLE D'ABRASION GÉOMÉTRIQUE (TRAIT PLEIN) ET PAR LA SIMULATION LANDAU-VLASOV (TRAIT POINTILLÉS) ENTRE LES MASSES  $M_P$  DU QUASI-PROJECTILE ET  $M_T$  DE LA QUASI-CIBLE DANS LA RÉACTION  $^{40}\text{Ar}$  (35 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$ .

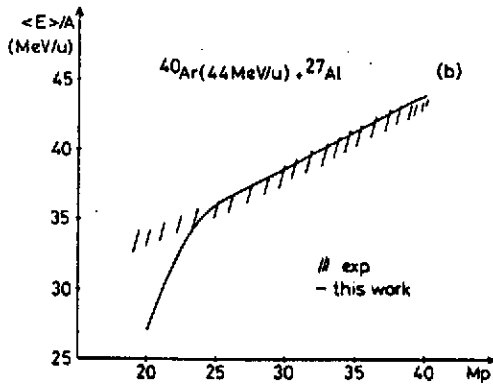


FIGURE 16  
ÉNERGIES PAR NUCLÉON DES QUASI-PROJECTILES DE LA RÉACTION  $^{40}\text{Ar}$  (44 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  TELLES QU'ELLES SONT CALCULÉES EN RÉSOUVANT L'ÉQUATION DE LANDAU-VLASOV (TRAIT PLEIN) ET TELLES QU'ELLES ONT ÉTÉ MESURÉES EN RÉF. [58] (ZONE HACHURÉE).

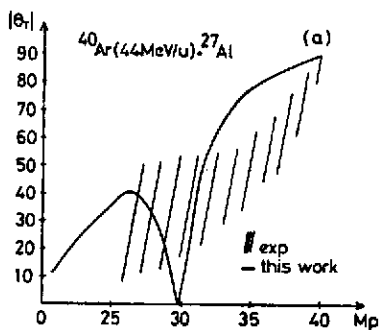


FIGURE 17  
FONCTION DE DÉFLECTION DES QUASI-CIBLES, POUR CHAQUE VALEUR DE MASSE DES QUASI-PROJECTILES ASSOCIÉS, MESURÉE POUR LA RÉACTION  $^{40}\text{Ar}$  (44 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  (RÉF. [58]) ; ZONE HACHURÉE) ET CALCULÉE PAR LANDAU-VLASOV (TRAIT PLEIN).

## II.5. - Deux classes de collision : centrales et périphériques

Poursuivons à titre d'illustration, l'étude de la réaction  $^{40}\text{Ar}$  (35 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  à l'aide de la simulation Landau-Vlasov. Le degré de relaxation du mouvement relatif entre les noyaux met en jeu deux processus distincts : d'une part l'échange de nucléons de part et d'autre, à l'intérieur du champ moyen associé au système composite (un corps), et d'autre part l'interaction nucléon-nucléon résiduelle (deux corps). Une quantité résultante de ces deux contributions est la diminution de l'impulsion relative entre les noyaux. Cette décroissance est plus prononcée pour les collisions les plus centrales (petits paramètres d'impact) car aussi bien les échanges nucléoniques que les collisions résiduelles y sont plus nombreux. Elle s'opère pendant les quelques  $2-3 \cdot 10^{-22}$ s après le point de contact (figure 18a). D'emblée on peut distinguer deux répartitions des paramètres d'impact : ceux allant de 0 à 4 fm où l'amortissement du mouvement relatif est presque total et ceux de 5 à 10 fm (effleurement) avec un écart de quelques  $5 \text{ fm}^{-1}$  dans l'impulsion relative asymptotique quand on passe d'une onde partielle calculée à l'autre (figure 18a). Cette constatation se retrouve dans la relaxation de la distribution d'impulsion (figure 18b) caractérisée par son moment quadrupolaire :

$$\eta = 2 k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (101)$$

L'interaction résiduelle corrèle les deux décroissances (figure 18a et b).

Le résultat de ces évolutions permet finalement de justifier, par la simulation Landau-Vlasov, le classement des collisions en deux catégories : les collisions centrales avec une distribution en transfert d'impulsion (figure 18c) déterminée par les paramètres d'impact faibles ( $< 5$  fm dans l'exemple) i.e. par un fort amortissement du mouvement relatif ; d'autre part, les collisions périphériques bien distinctes avec une large distribution répartie sur les paramètres d'impact supérieurs et donc certaines des propriétés ont été décrites au paragraphe précédent. Cette distinction est maintenant une donnée de base à toutes les études expérimentales et théoriques [51, 52].



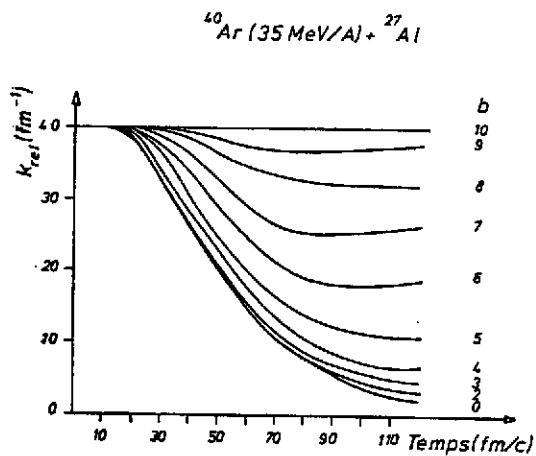


FIGURE 18A  
 COURBES DE DÉCROISSANCE DE L'IMPULSION RELATIVE ENTRE LES NOYAUX POUR DIFFÉRENTS PARAMÈTRES D'IMPACT DE  $b = 0$  FM À  $b = 10$  FM DANS LA RÉACTION  $^{40}\text{Ar} (35 \text{ MeV}/u) + ^{27}\text{Al}$  SIMULÉE EN RÉSOUVANT L'ÉQUATION LANDAU-VLASOV.

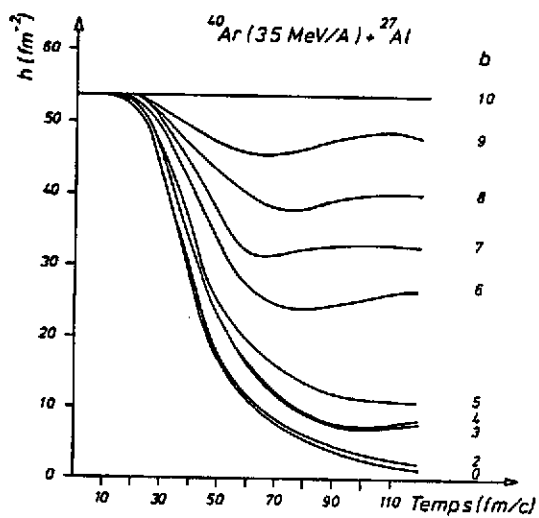


FIGURE 18B  
 MÊME COURBE QUE 18A MAIS POUR LE MOMENT QUADRUPOLAIRE DE LA DISTRIBUTION D'IMPULSIONS.

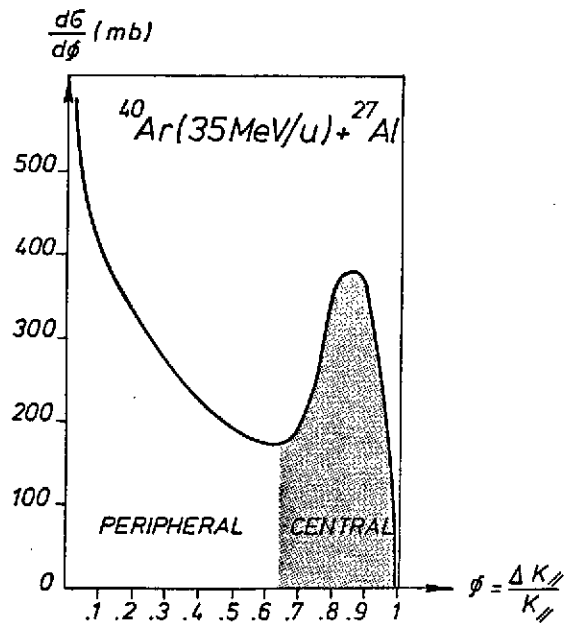


FIGURE 18c  
 DISTRIBUTION D'IMPULSIONS TRANSFÉRÉES EXTRAITE DE LA FIGURE 18A.

## II.6. - Caractéristiques des collisions centrales

Pour les collisions les plus centrales (c'est à dire pour des réactions presque frontales), TDHF prédit que pour les systèmes légers, un effet de transparence des noyaux doit être observé pour des énergies de bombardement de quelques MeV par nucléon au-dessus de la barrière coulombienne [3]. Il en est de même pour les solutions de l'équation de Vlasov : l'angle d'incidence des pseudoparticules du projectile (resp. de la cible) sur le bord opposé du potentiel moyen de la cible (resp. du projectile) est trop faible dans les collisions frontales pour permettre une réflexion sur ce potentiel, c'est à dire une capture et par voie de conséquence la formation d'un système composé. On a donc un domaine en deça des ondes de fusion où la transparence apparaît dans les calculs et ce, dès les basses énergies incidentes. Seule une indication expérimentale récente pour le système  $^{28}\text{Si}$  (122 MeV/u) +  $^{28}\text{Si}$  permet de supporter cette transparence à petits paramètres d'impacts [62]. Néanmoins, cet effet disparaît dans les simulations Landau-Vlasov à basse énergie [61] ainsi que dans les calculs TDHF étendus pour inclure un terme de collision [62]. L'interaction résiduelle quand bien même se trouve-t-elle réduite du fait du principe d'exclusion de Pauli suffit à modifier les angles d'incidence des pseudo-particules et à conduire à la capture.

Il faut accroître considérablement l'impulsion relative en voie d'entrée (c'est à dire l'énergie de bombardement) pour voir cette transparence des systèmes légers réapparaître [63, 64]. Pour le système  $^{40}\text{Ar}$  (35 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$ , les collisions centrales correspondent en fait à un phénomène de transparence qui peut se décomposer avec le temps de la manière suivante : émission de particules de prééquilibre et tentative de fusion incomplète, atteinte des extrêmes géométriques des deux partenaires avec ralentissement du mouvement relatif, passage des barrières mutuelles, l'énergie de chacun restant suffisante et l'angle d'incidence faible. Le libre parcours moyen effectif des nucléons est alors de l'ordre du diamètre du partenaire. En voie de sortie, les simulations prédisent donc deux fragments très excités se séparant avec une focalisation avant-arrière et une énergie cinétique déterminée par la répulsion coulombienne.

Pour des énergies incidentes plus faibles, le prééquilibre précède la fusion (incomplète), ce qui est le cas dans la simulation du système  $^{40}\text{Ar}$  (27 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  (réf. [63]).

Pour des systèmes plus massifs tels que  $^{40}\text{Ar}$  +  $^{58}\text{Ni}$  ou  $^{40}\text{Ar}$  +  $^{109}\text{Ag}$ , la transparence n'est pas possible, le pouvoir d'arrêt devenant trop grand [64]. On a alors affaire dans tous les cas de figure à la fusion incomplète. Celle-ci répartit l'énergie disponible dans l'excitation thermique et dans les modes de compression. Cette répartition est une des questions essentielles auxquelles les études de ces collisions doit pouvoir répondre : elle est, en effet, étroitement corrélée à l'équation d'état de la matière nucléaire directement liée, dans notre formalisme, à la force effective utilisée. Pour évaluer les modes thermiques et la compression, il s'agit (et c'est ce que permet les calculs esquissés ici) d'abord de comprendre et d'interpréter les autres modes : recul du noyau résiduel et énergie emportée par les particules de prééquilibre, déformation, rotation. Des résultats expérimentaux commencent à voir le jour aux énergies intermédiaires [51, 65, 66]. Par exemple, la table 2, extraite de la thèse de D. Jacquet [66] compare recul, déformation et spin du système composite formé dans la réaction  $^{40}\text{Ar}$  (27 MeV/u) +  $^{238}\text{U}$  et détecté par les produits de fission de sa décroissance.

TABLE 2

Système $^{40}\text{Ar}$ (27 MeV/u) + $^{238}\text{U}$ : collisions centrales		
	Expérience	Simulation Landau-Vlasov
Angle de corrélation des fragments de fission	115 degrés	118 degrés
Déformation (rapport des axes)	2.4	1.9 (b = 0 fm)
Spin (unités h)	100 - 120	120 (erreur < 5 %)

Ces résultats ont été obtenus avec une force effective de module d'incompressibilité associé  $K = 200$  MeV. Il serait intéressant de regarder comment ces valeurs d'observables calculées varient avec la valeur de  $K$  et selon les types de force effective : locale, dépendance des vitesses, de portée finie avec termes d'échanges. Ces études sont entreprises mais encore trop préliminaires pour être reportées dans ce cours.

En ce qui concerne la compression elle-même, ou mode monopolaire, les calculs montrent que des amplitudes pouvant atteindre  $1.5 \rho_0$ , où  $\rho_0$  est la densité normale, pouvaient être obtenues [65, 67]. Les conséquences qui en résultent dans une région très en dessous du seuil de production de pions pourraient bien être un thème majeur des études des prochaines années avec des ions lourds aux énergies intermédiaires.

#### II.7. - Emission de particules de prééquilibre et d'évaporation

Le long du chemin conduisant à la relaxation de la distribution des impulsions (figure 18b), c'est à dire à l'isotropie du tenseur des pressions, un couplage au continuum s'opère. Deux échelles de temps,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , pour l'émission de particules peuvent être distinguées :

- $\tau_1$  est le temps caractéristique de la relaxation globale de la distribution d'impulsion. Il dépend du système et de l'énergie ainsi que des ingrédients introduits dans le terme de collision. Un ordre de grandeur est 90 fm/c soit  $3 \cdot 10^{-22}$ s.
- $\tau_2$  est le temps de vie du système composite par rapport à l'émission statistique de fragments. Il dépend exponentiellement de la température  $T$  ; il vaut  $\sim 10^{-19}$ s pour  $T = 1$  MeV et  $\sim 10^{-22}$ s pour  $T = 5$  MeV dans un noyau de  $^{208}\text{Pb}$ , comme l'indique aussi bien un calcul "balance détaillée" ou un calcul Hartree-Fock à température finie [68, 69]. Au cours de la chaîne de désexcitation, le flux de particules émises croît logarithmiquement.

Dans une simulation Landau-Vlasov ces deux échelles de temps sont obtenues en considérant la partie de la fonction de distribution dont la composante spatiale se trouve à l'extérieur d'une sphère de rayon 10 fm et centrée autour du centre de masse du système ( $^{40}\text{Ar}$  (27 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  en collision frontale à la figure 19). Entre 40 fm/c (temps du contact entre les noyaux) et 100 fm/c, un flux important de particules est émis (figure 19a) avec une grande anisotropie d'impulsions (figure 19b) typique du prééquilibre et de grandes énergies

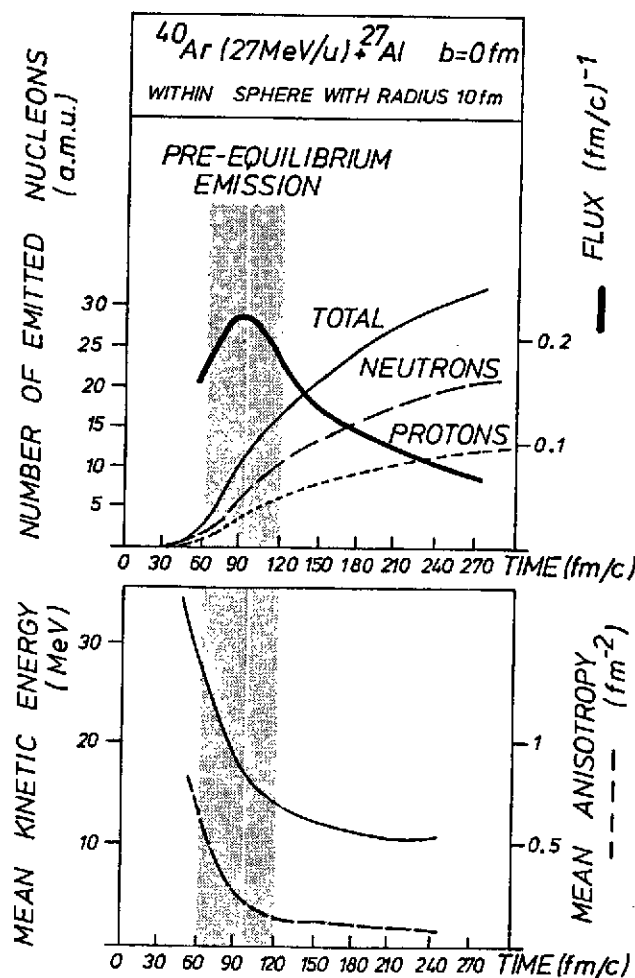


FIGURE 19

PARTICULES ÉMISES EN DEHORS D'UN VOLUME SPHÉRIQUE DE RAYON 10 FM CENTRÉ AU CENTRE DE MASSE DU SYSTÈME  $^{40}\text{Ar}$  (27 MeV/u) +  $^{27}\text{Al}$  DANS UNE SIMULATION DE COLLISIONS FRONTALES. EN HAUT, FLUX DE NUCLÉONS (ÉCHELLE DE DROITE) ET NOMBRE DE NUCLÉONS ÉMIS (ÉCHELLE DE GAUCHE) EN FONCTION DU TEMPS. EN BAS, ANISOTROPIE (ÉCHELLE DE DROITE) ET ÉNERGIES CINÉTIQUES (ÉCHELLE DE GAUCHE) ASSOCIÉES.

cinétiques. Ces particules trouvent leur origine d'une part dans la composition des vitesses d'entraînement et intrinsèques (Fermi jets) [70] et d'autre part dans un effet de catapulte du au ralentissement des partenaires en voie d'entrée (émission inertielle) [71]. Le temps  $\tau_1$  étant écoulé, le terme de collision a eu le temps nécessaire pour conduire à une répartition de l'énergie disponible (c'est à dire les énergies collectives : vibrations, rotation etc ... étant soustraites) sur les degrés de liberté internes. Le flux de particules décroît alors : son interprétation en termes de flux de neutrons et protons doit être considérée avec prudence car les corrélations sont absentes du calcul ; il ne peut s'agir que d'une surestimation du flux neutron-proton, le flux calculé étant celui de la distribution à un-corps contenant les voies d'émission de clusters. Néanmoins les énergies cinétiques moyennes sont égales à environ  $2T$  où  $T$  est la température du système ainsi qu'on l'attend d'une émission de Maxwell. L'isotropie (figure 19b) confirme la nature statistique de cette émission secondaire ; notons que le résultat de calcul présenté dans la figure 18 s'interrompt pour des temps supérieurs à  $10^{-21}$ s (i.e. 300 fm/c). Le noyau résiduel pourra encore se refroidir dans des échelles de temps supérieures avant d'atteindre les détecteurs.

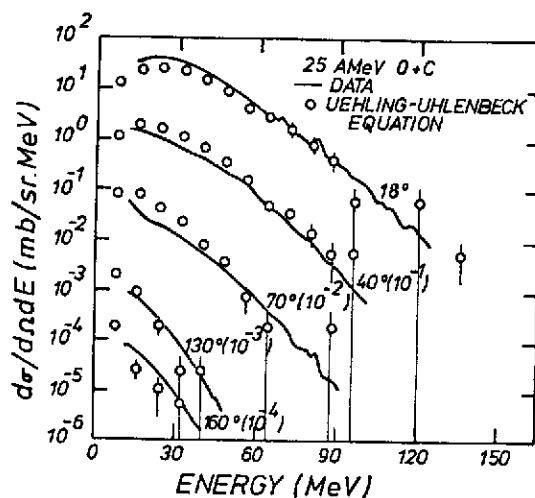


FIGURE 20

SPECTRES EN ÉNERGIE DES NUCLÉONS ÉMIS À DIFFÉRENTS ANGLES DANS LA RÉACTION  $^{16}\text{O}$  (25 MeV/u) +  $^{12}\text{C}$ . LES DONNÉES EXPÉRIMENTALES (TRAITS PLEINS) SONT COMPARÉES AUX RÉSULTATS DES CALCULS (POINTS) DE LA RÉF. [18].

Les spectres en énergie de l'ensemble des particules émises tels qu'ils sont calculés pour le système  $^{16}\text{O}$  (25 MeV/u) +  $^{12}\text{C}$  par les auteurs de la référence [18] sont compatibles avec les spectres inclusifs expérimentaux obtenus à des angles de détection allant de  $18^\circ$  à  $160^\circ$ . A l'angle le plus avant  $18^\circ$ , la composante de prééquilibre conduit à un maximum du spectre à la vitesse du faisceau. La décroissance exponentielle exprime, pour des énergies ou des angles supérieurs, la phase évaporative du processus d'émission.

En dépit de l'absence de corrélations dans les calculs dynamiques, les propriétés globales des processus d'émission peuvent donc être estimées au cours de la dynamique Landau-Vlasov. Ceci constitue un outil précieux dans l'analyse des expériences puisque les différentes parties des spectres peuvent être associées à des étapes du mécanisme, en constituant, de ce fait, une horloge.

#### II.8. - Angles d'écoulement et moments transverses

Le rôle respectif du champ moyen et des collisions à deux corps a permis, aux paragraphes précédents, de tracer les grandes lignes des processus mis en jeu dans les collisions noyau-noyau. Cela permet, sans doute, d'asseoir notre compréhension et l'identification des propriétés physiques des noyaux formés : masse, charge, excitation thermique ou collective, recul. Nous nous sommes placés dans un cadre phénoménologique qui nous paraissait adapté, compte tenu de ce que l'on connaît déjà de la compressibilité à la densité normale ( $K \approx 200$  MeV) [72] et des effets de milieu sur les collisions [48, 49]. Néanmoins loin de l'équilibre cette phénoménologie se devrait d'être modifiée. Une manière d'entreprendre cette étude, qui revient, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe II.6, à celle de l'équation d'état de la matière nucléaire, est de modifier les ingrédients des simulations Landau-Vlasov et d'examiner les variations sur certaines observables sensibles. C'est la méthode adoptée en réf. [73, 74] avec pour choix d'observables celles mesurées dans des collisions au delà de 200 MeV par nucléon (pour des revues expérimentale et théorique voir réf. [75] et [76]) :

à savoir l'angle d'écoulement et le moment transverse.

Une approche similaire dans le cadre d'une modélisation des collisions dite "Quantum Molecular Dynamics" a été également entreprise en réf. [77].

L'angle d'écoulement  $\theta$  est défini par son cosinus :

$$\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{z} \quad (102)$$

où  $\vec{z}$  est un vecteur unitaire le long de l'axe Oz du faisceau

$\vec{u}$  est vecteur propre associé à la plus grande valeur propre du tenseur de sphéricité  $Q_{ij}$

Le tenseur de sphéricité est défini par :

$$Q_{ij} = \sum_{\nu} \frac{1}{2m} p_i^{\nu} p_j^{\nu} \quad (103)$$

où  $i$  et  $j$  sont des indices de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

$p_i^{\nu}$  sont les composantes des impulsions des particules de type  $\nu$  ; la sommation dans (103) porte sur tous les types  $\nu$  de particules de masse  $m_{\nu}$ .

Ce qui détermine l'écoulement est double :

- d'une part une contribution provenant du terme de collisions qui génère, dans la zone de recouvrement des noyaux où il y a surdensité, une pression interne s'exerçant sur les parties externes de cette zone [78]. Cette contribution reste toujours petite ainsi que le montrent les calculs de cascade [79].

- d'autre part un effet de rebond dû à la détente du système après compression, cette dernière étant prise en compte par la composante champ moyen dont la dépendance en densité est celle de l'équation d'état pour la matière nucléaire.



Pour les forces locales, une variation du module d'incompressibilité  $K_{\infty}$  conduit à une variation dans le même sens de l'angle d'écoulement. C'est ce que montre les deux courbes du bas de la figure 21 où soft indique  $K_{\infty} = 200$  MeV et stiff  $K_{\infty} = 400$  MeV, l'interaction effective locale étant celle de Zamick [26].

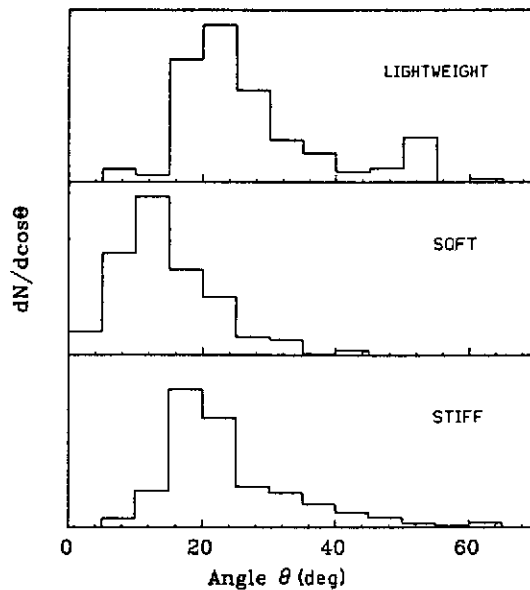


FIGURE 21

CALCULS DE L'ANGLE D'ÉCOULEMENT DANS LA RÉACTION  $^{93}\text{Nb}$  (400 MeV/u) +  $^{93}\text{Nb}$  POUR LES FORCES EFFECTIVES DÉPENDENT DES IMPULSIONS (HAUT), LOCALES À FORT (RESP. FAIBLE) MODULE D'INCOMPRESSIBILITÉ (BAS, RESP. HAUT) (RÉF. [73]).

calaire conduit à une valeur égale à  $210 \pm 30$  MeV [72].

Néanmoins, cette conclusion n'est pas correcte car elle se fonde sur des simulations avec une force locale, alors que la dépendance en énergie de la profondeur de la partie réelle des potentiels optiques nucléon-noyau fait apparaître une forte dépendance en vitesse de l'interaction effective, le champ moyen s'annulant pour des énergies de l'ordre de 300 MeV [82,83]. Il est clair qu'une telle dépendance implique, en particulier dans la voie d'entrée, une modification

comparaison des valeurs calculées avec les résultats expérimentaux obtenus à Berkeley avec la boule de plastique [80] qui a conduit certains auteurs à affirmer que  $K_{\infty}$  était de l'ordre 400 MeV aux densités doubles de la densité normale. Rappelons qu'à densité normale, une analyse de l'énergie de phonon associée à la résonance géante monopolaire isos-

substantielle de la dynamique : dès le recouvrement des queues de densité, les pseudo particules sont accélérés dans la direction transverse, l'interaction effective étant répulsive au delà de 300 MeV/u. La densité centrale maximale est donc plus faible réduisant la pression interne décrite dans cascade. Le bilan net de ces deux effets (dont le second est faible) est un accroissement de l'angle d'écoulement (partie supérieure de la figure 20 où  $K_{\infty} = 200$  MeV, mais où la force effective dépend des impulsions quadratiquement [73]). Une étude complète des dépendances en masse et énergie est sans doute nécessaire (elle est actuellement entreprise [84] avec la force de Gogny [28] afin d'extraire des résultats sur l'angle d'écoulement des informations sur l'équation d'état à haute densité. Cette étude se doit de s'appuyer sur d'autres observables qui permettent de séparer les contributions cascade et champ moyen. Une tentative dans ce sens est proposée en réf. [74]. Les auteurs ont montré que la dépendance du moment transverse  $p_x$  ( $Oz$  étant l'axe du faisceau) des particules émises avec le paramètre d'impact est directement corrélée à la section efficace nucléon-nucléon effective entrant dans l'intégrale de collisions et non pas (ou très peu) du champ moyen considéré (figure 22).

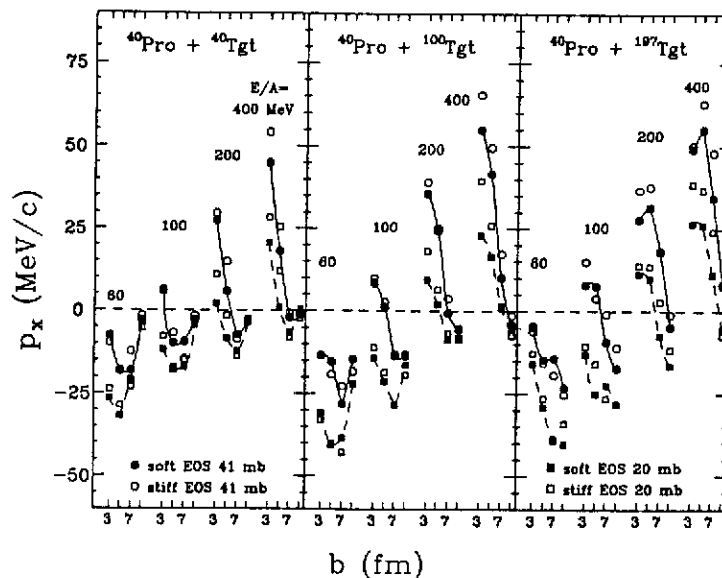


FIGURE 22

DÉPENDANCE EN PARAMÈTRE D'IMPACT DES IMPULSIONS TRANSVERSES DES PARTICULES ÉMISES DANS LA SIMULATION DE COLLISIONS  $^{40}\text{PRO} + ^{40}\text{TGT}$ ,  $^{40}\text{PRO} + ^{100}\text{TGT}$  ET  $^{40}\text{PRO} + ^{197}\text{TGT}$  AVEC DIFFÉRENTES RIGIDITÉS DE L'ÉQUATION D'ÉTAT ET DIFFÉRENTES INTENSITÉS DE L'INTERACTION RÉSIDUELLE (RÉF. [74]).

## II.9. - Fluctuations et dispersions

Comme nous l'avons vu au chapitre I, pour obtenir une approche de la dynamique nucléaire au delà des observables à un corps il faudrait résoudre explicitement les deux premières équations de la hiérarchie BBGKY c'est à dire ne pas faire le stosszahlansatz de Boltzmann. Néanmoins Landau-Vlasov corrèle les particules via le champ moyen et génère aussi des fluctuations statistiques autour des valeurs moyennes via le terme de collisions. Par conséquent, il est apparu intéressant, dans la limite où les fluctuations de champ sont faibles, d'estimer les dispersions (observables à deux corps) autour des valeurs moyennes que l'on peut déduire de la dynamique Landau-Vlasov. Une seconde étape pourrait être l'inclusion de fluctuations de champ : c'est ce que s'attachent à faire un certain nombre de modèles nucléaires : percolation et multifragmentation [85], dynamique moléculaire [86], interaction résiduelle modifiée pour contenir de grandes fluctuations [87]. Il est aujourd'hui trop tôt pour pouvoir extraire de quelconques informations quantitatives de ces modèles car tous sont fortement dépendant des paramètres et procédures utilisées.

Au niveau des corrélations de champ moyen, c'est à dire à la limite des petites fluctuations du champ, une dispersion caractéristique est la dispersion en masse des fragments dans les réactions binaires. Dans une théorie TDHF, la dispersion en masse est due au fait que chaque fragment en voie de sortie n'est pas un déterminant de Slater ( $\rho_1^2 \neq \rho_1$  et  $\rho_2^2 \neq \rho_2$  si  $\rho_j$  est la matrice densité à un corps de chaque fragment) alors que l'on a toujours  $\rho^2 = \rho$  (avec  $\rho = \rho_1 \times \rho_2$ ). Cette dispersion est très petite [3] et très inférieure à celle trouvée expérimentalement dans les collisions très inélastiques. Il en est de même avec les solutions de l'équation de Vlasov (Table 3) où les valeurs sont encore inférieures du fait de l'approximation semi-classique. Dans cette région de basse énergie, l'inclusion de fluctuations statistiques par le terme de collision est aussi négligeable car le blocage de Pauli est très important. Néanmoins en partant des solutions de l'équation Landau-Vlasov, il est possible de calculer des corrélations classiques de champ moyen. L'évolution temporelle de la fonction de distribution

$f(\vec{r}, \vec{R})$  n'est autre que celle d'un nombre infini de degrés de liberté (ceux des pseudo particules, qui sont en nombre, en principe, infini). Pour obtenir les corrélations classiques, il suffit donc d'extraire de cet ensemble le nombre de degrés de liberté correspondant aux nucléons du projectile ( $A_p$ ) et de la cible ( $A_T$ ). Chaque ensemble de  $A_p + A_T$  pseudo particules (choisi parmi  $(A_p + A_T) \times \nu$  où  $\nu \rightarrow \infty$ ) est soumis au même champ qui est obtenu comme une moyenne statistique sur un nombre infini d'ensembles de  $A_p + A_T$  pseudo particules. La valeur moyenne d'une observable  $Q$  est obtenue aussi comme la moyenne statistique sur ces ensembles de  $A_p + A_T$  pseudo particules. On obtient aussi la variance en construisant le spectre de l'observable, chaque "événement" correspondant à chaque "ensemble" de  $(A_p + A_T)$  pseudo particules. La dispersion est due à ces corrélations à longue portée pour lesquelles un principe variationnel (Balian-Vénéroni) permet d'établir une manière de dériver les variances en utilisant les trajectoires TDHF [88,89]. Dans le cadre de Landau-Vlasov, les dispersions dues aux corrélations de champ moyen classiques se comparent à celles attendues pour un processus de marche au hasard décrivant les échanges de nucléons entre les noyaux (Table 3).

TABLE 3 (extraite de [90])

Ecart quadratique moyen Système $^{46}\text{O}(10\text{MeV}) + ^{46}\text{O}$ $l = 36$	Vlasov	Dispersion semi-classiques	Marche au hasard
Masse (a.m.u)	< 0.2	1.9	2.0
Charge	-	1.2	1.5
Impulsion ( $\text{fm}^{-1}$ )	-	2.0	-

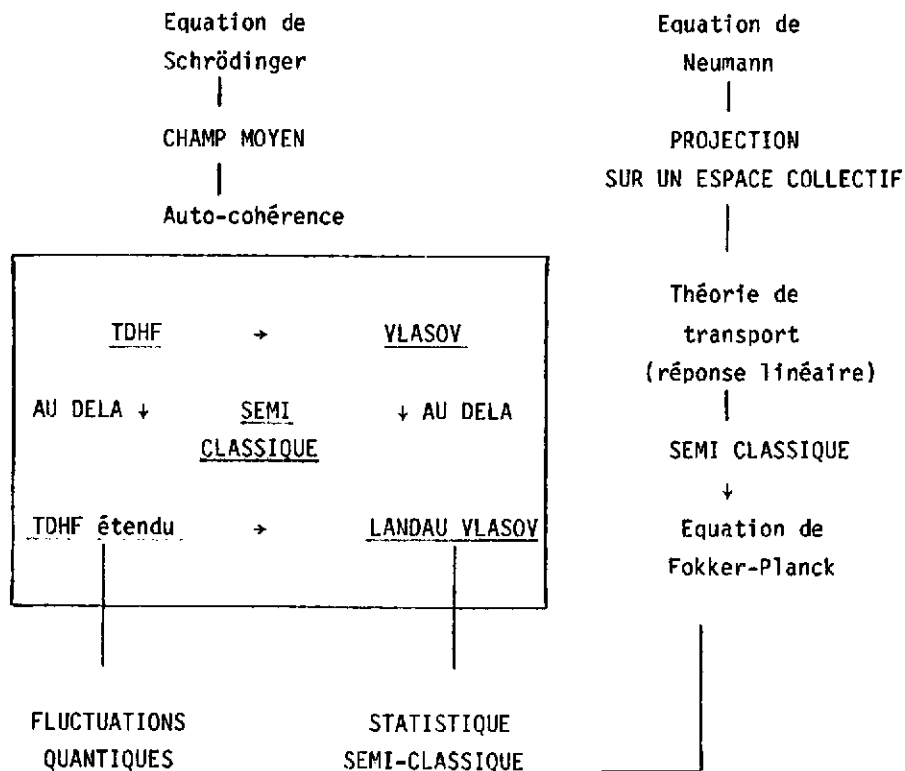
Dans ce cas les variances sont égales exactement au nombre de particules échangées [91]. On voit que l'on obtient des dispersions en masse un

ordre de grandeur supérieures à celle dérivées simplement de l'équation de Vlasov, ce qui est conforme à l'observation expérimentale pour de très nombreux systèmes [3, 53, 54].

CONCLUSION

En considérant la dynamique nucléaire dans une description allant au delà du champ moyen, nous avons pu, dans le cadre d'une phénoménologie des forces effectives et de l'interaction résiduelle, voir que ces collisions affectent de nombreux comportements d'observables accessibles dans des réactions noyau-noyau. L'approche semi-classique s'insère dans les tentatives aux ordres les plus bas de résoudre le problème de N-corps de manière auto-cohérente. Les perspectives ouvertes par l'étude des fluctuations et des dispersions devraient permettre dans le futur d'éclaircir le lien avec les théories du transport pour des modes collectifs (Table 4).

TABLE 4



REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ici B. Remaud et P. Schuck pour les quelques années de travail en commun sur le sujet exposé au long de ce cours : leur collaboration a été pour moi un réel plaisir. Que F. Scheuter, P. Bertrand, L. Vinet, D. Jacquet, F. Sébille, E. Suraud, M. Pi et M. Zielinska-Pfabé trouvent ici l'expression de ma gratitude pour les nombreux échanges que nous avons eu. A mes collègues du Ganil, à ceux qui ont participé aux réunions théoriciens du Ganil depuis cinq ans, je voudrais adresser également mes remerciements. Le soutien permanent de la direction du Ganil (c'est à dire C. Détraz et R. Joly, qui ont permis à une activité théorique de voir le jour dans notre laboratoire) a été déterminant pour le développement de nombreuses idées exposées au long de ce cours ; ce soutien témoigne de l'importance qu'ils ont apporté à l'accompagnement théorique et conceptuel de l'activité expérimentale : je leur en suis très reconnaissant. Enfin mes remerciements, et non les moindres, vont à S. Geswend qui, avec beaucoup de patience et de gentillesse, a effectué la frappe et la mise en forme du manuscrit dans des délais très brefs.

## REFERENCES

- [1] H.A. Kramers, *Physica* VII, n° 4 (1940) 284.
- [2] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.* 15 (1943) 1.  
et J. Richert, *Ecole Joliot Curie* 1982.
- [3] J.N. Negele, *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982) 913.
- [4] L. Boltzmann, *Wien, Ber.* 66 (1872) 275.
- [5] Voir F. Haake, *Springer Tracts in Modern Physics* 66 (1973) 98.
- [6] R. Balescu, *Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics*, J. Wiley (1975) chapitre 3.
- [7] W. Botermans et R. Malfliet, *Phys. Lett.* 171B (1986) 22.
- [8] L. Kadanoff et G. Baym, *Quantum statistical mechanics*, W.A. Benjamin (1962) New-York.
- [9] R.F. Snider, *J. Chem. Phys.* 32 (1960) 1051.
- [10] R.F. Snider et B.C. Sanctuary, *J. Chem. Phys.* 55 (1971) 1555.
- [11] R.G. Newton, *Scattering theory of waves and particles* (Springer-Verlag 1982).
- [12] K.A. Brueckner, *Phys. Rev.* 97 (1955) 1353.
- [13] P. Grangé, *cette école*.
- [14] P. Ring et P. Schuck, *The nuclear many-body problem* (Springer-Verlag 1980) Berlin.
- [15] L.W. Nordheim, *Proc. Roy. Soc.* A119 (1928) 689.
- [16] E.A. Uehling et G.E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* 43 (1933) 552.
- [17] H. Kruse et coll., *Phys. Rev.* C31 (1985) 1770.
- [18] J. Aichelin et G. Bertsch, *Phys. Rev.* C31 (1985) 1730.
- [19] P.A. Raviart et J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles* (Masson 1983) Paris.
- [20] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* (Masson).
- [21] C.Y. Wong, *Phys. Rev.* C25 (1982) 1460.
- [22] C. Grégoire et coll., *Nucl. Phys.* A465 (1987) 317.
- [23] G.P. Maddison et D.M. Brink, *Nucl. Phys.* A378 (1982) 566.
- [24] E.J. Heller, *J. Chem. Phys.* 75 (1981) 2923.
- [25] W.H. Press et coll., *Numerical recipes* (Cambridge Univ. Press 1986).
- [26] L. Zamick, *Phys. Lett.* 45B (1973) 313.

- [27] P. Bonche et coll., Phys. Rev. C13 (1976) 1226.
- [28] D. Gogny, Proc. Int. Conf. Nuclear self-consistent fields, Trieste (1975), édité par G. Ripka et M. Porneuf, North-Holland ; P. Schuck, communication privée.
- [29] J.P. Blaizot et G. Ripka, Note CEA-N 2019 (1978).
- [30] H.H.K. Tang et coll., Phys. Lett. 101B (1981) 10.
- [31] L. Vinet, Thèse d'Université, Orsay (1986).
- [32] F. Sébille et B. Remaud, 8ème session d'études biennale de physique nucléaire, Aussois (1985) S.17.1.
- [33] A. Messiah, Mécanique quantique Tome 1 (Dunod 1959) Paris.
- [34] C. Grégoire et coll., dans Phase space approach to nuclear dynamics (World Scientific 1986) p. 120.
- [35] L. Vinet et coll., Phys. Lett. 172B (1986) 17.
- [36] L. Vinet et coll., Nucl. Phys. A468 (1987) 321.
- [37] M. Brack et coll., Phys. Rep. 123 (1985) 275.
- [38] S. Stringari et D. Vautherin, Phys. Lett. 88B (1979) 1.
- [39] M. Pi et coll., Phys. Lett. 166B (1986) 17.
- [40] D. Vautherin et coll., Phys. Lett. 191B (1987) 6.
- [41] C. Toepffer et C.Y. Wong, Phys. Rev. C25 (1982) 1018.
- [42] M.T. Collins et J.J. Griffin, Nucl. Phys. A348 (1980) 63.
- [43] F. Scheuter et C. Grégoire, Phys. Lett. 146B (1984) 21.
- [44] A. Bohr et B. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. I (Benjamin 1969).
- [45] J. Aichelin et H. Stöcker, Phys. Lett. 163B (1985) 59.
- [46] K. Kikuchi, M. Kawai, Nuclear matter and nuclear reactions (North Holland 1968).
- [47] K. Chen et coll., Phys. rev. 166 (1968) 949.
- [48] J. Cugnon et coll., Phys. Rev. C35 (1987) 861.
- [49] B. Ter Haar et R. Malfliet, Phys. Lett. 172B (1986) 10.
- [50] J. Aichelin et C. Grégoire, Progress in particle and nuclear physics, en préparation.
- [51] C. Grégoire et B. Tamain, Ann. Phys. Fr. 11 (1986) 323.
- [52] C. Détraz, Trends in Nuclear Physics (Varenna 1987), preprint Ganil P 87-22.
- [53] M. Lefort, C. Ngô, Ann. Phys. Fr. 3 (1978) 5.
- [54] C. Grégoire, dans Winter college in fundamental nuclear physics, (World Scientific 1985) p. 497.
- [55] M. Zielinska-Pfabé et C. Grégoire, en préparation.



- [56] C. Grégoire, Proc. Bormio Conf. (1986) p. 1.
- [57] C. Grégoire et coll., Phys. Lett. 186B (1987) 14.
- [58] R. Dayras et coll., Nucl. Phys. A460 (1986) 299.
- [59] A. Bonasera et coll., Nucl. Phys. A463 (1987) 653.
- [60] P. Decowski et coll., Z. Phys. A327 (1987) 235.
- [61] C. Grégoire et coll., J. Phys. Paris (1987) C2-203.
- [62] M. Tohyama, Nucl. Phys. A437 (1985) 447.
- [63] B. Remaud et coll., Phys. Lett. 180B (1986) 198.
- [64] J. Aichelin, Phys. Rev. C33 (1986) 537.
- [65] C. Grégoire et coll., Nucl. Phys. A471 (1987) 399c.
- [66] D. Jacquet, Thèse d'Université Orsay (1987).
- [67] M. Pi et coll., J. Phys. Paris (1987) C2-181.
- [68] H. Delagrange et coll., Z. Phys. A323 (1986) 437.
- [69] P. Bonche et coll., Nucl. Phys. A427 (1984) 278.
- [70] K. Möhring et coll., Nucl. Phys. A440 (1985) 89 et references  
incluses.
- [71] C. Grégoire et coll., Nucl. Phys. A436 (1985) 365.
- [72] J.P. Blaizot, Phys. Rep. 64 (1980) 171.
- [73] C. Gale et coll., Phys. Rev. C35 (1987) 1666.
- [74] G.F. Bertsch et coll., Phys. Lett. B189 (1987) 384.
- [75] R. Babinet, Ann. Phys. Fr. 2 (1986) 113.
- [76] J. Cugnon, même ouvrage que [75].
- [77] J. Aichelin et coll., Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 1926.
- [78] J. Cugnon et L'Hote, Nucl. Phys. A452 (1986) 738.
- [79] J. Cugnon et D. L'Hote, Nucl. Phys. A447 (1985) 27c.
- [80] R. Stock, Phys. Rep. 135 (1986) 259.
- [81] H. Stöcker et W. Greiner, Phys. Rep. 137 (1986) 277.
- [82] G.E. Brown, paper dedicaced to H. Bethe for his 80th Birthday,  
Stony-Brook (1986).
- [83] P.E. Hodgson, Rep. Prog. Phys. 47 (1984) 613.
- [84] F. Sébille et coll., en préparation.
- [85] X. Campi, cette école.
- [86] J. Aichelin et H. Stöcker, Phys. Lett. 176B (1986) 14.
- [87] W. Bauer et coll., Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 863.

- [88] H. Flocart, Ecole Joliot Curie 1982.
- [89] R. Balian et al., Nucl. Phys. **A409** (1983) 225c.
- [90] M. Zielinska-Pfabé et C. Grégoire, preprint Ganil P 87-20 soumis à publication dans Phys. Rev. C.
- [91] F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, Mc. Graw-Hill 1965).