



La nature de la sonde électromagnétique - Deuxième partie

H. Fontvieille

► To cite this version:

H. Fontvieille. La nature de la sonde électromagnétique - Deuxième partie. École thématique. Ecole Joliot Curie "Matière hadronique ou..aujourd'hui et demain avec des électrons", Maubuisson, (France), du 14-19 septembre 1992 : 11ème session, 1992. cel-00647747

HAL Id: cel-00647747

<https://cel.hal.science/cel-00647747>

Submitted on 2 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA NATURE DE LA SONDE ELECTROMAGNETIQUE

DEUXIEME PARTIE

H. Fonvieille, LPC-Clermont

Abstract

Ce cours est une introduction au formalisme théorique utilisé en diffusion d'électrons à haute énergie: propriétés de l'électron et du photon en ElectroDynamique Quantique, et établissement de la section efficace dans les principaux cas de diffusion d'électron. L'accent est mis sur l'aspect formulaire et les propriétés de la sonde. L'interprétation et les propriétés de la cible font l'objet des autres cours.

This lecture introduces the basic theoretical ingredients used in electron scattering: electron and photon properties (QED) and derivation of the main cross sections. We shall focus on formulaes and characteristics of the probe. The physics interpretation and target properties are the subject of the other lectures.

Nota: les renvois "cf. cours VB §..." font référence à la première partie du cours, écrite par Vincent Breton.

1 L'ELECTRON

1.1 Rappels sur l'équation de Dirac

La théorie de l'électron relativiste est basée sur l'équation de Dirac, qui décrit les états de la particule libre. On rappelle sa forme covariante:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (1)$$

dans laquelle il y a sommation sur $\mu = 0, 1, 2, 3$. x^μ représente le quadrivecteur des coordonnées contravariantes d'espace-temps, et $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. m est la masse de la particule.

On montre que la dimension de γ^μ est celle de matrices 4×4 ; ψ , état solution de l'équation, est un spineur à quatre composantes. Bien que le choix des γ^μ ne soit pas unique, pour développer les calculs on doit choisir une représentation explicite: par exemple celle du formulaire 1. Ces matrices sont intimement connectées aux propriétés de spin de l'électron puisqu'elles sont construites à partir des matrices de Pauli. En fait, c'est en explicitant la covariance de l'équation de Dirac que l'on montre qu'elle s'applique à une particule de spin 1/2, i.e. l'électron (cf. ref. [1]).

formulaire 1 (tiré de [7])

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}),$$

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = i\partial^\mu$$

$$p \cdot x = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x},$$

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

$$(\square^2 + m^2)\phi = 0,$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

In an electromagnetic field, $i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu$ (charge $-e$)

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \text{ (spin 0)} \quad j^\mu = -e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \text{ (spin 1/2)}$$

γ -Matrices

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^0 \gamma^0 = I; \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \quad \gamma^k \gamma^k = -I, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5.$$

Standard representation:

$$\text{(Dirac matrices)} \quad \gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma = \beta \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Pauli matrices)} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Spinors

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u &= 0 & \begin{cases} \bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \\ \not{p} \equiv \gamma_\mu p^\mu \end{cases} \\ \bar{u}(\not{p} - m) &= 0 \end{aligned}$$

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E\delta_{rs}, \quad \bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m\delta_{rs}, \quad \sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \not{p} + m = 2m\Lambda_+$$

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u \equiv u_L, \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u \equiv u_R.$$

If $m = 0$ or $E \gg m$, then u_L has helicity $\lambda = -\frac{1}{2}$, u_R has $\lambda = +\frac{1}{2}$.

1.2 solutions

On cherche des solutions de l'équation sous la forme:

$$\psi(x) = e^{ikx} U(k) \quad (2)$$

$k = (k^0, \vec{k})$ étant le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule. On adopte la notation : U, V pour les spineurs, où l'état est spécifié par l'impulsion $\vec{k}$, le spin s et la nature particule-antiparticule:

$$\begin{array}{ll} U(\vec{k}, s) & \text{pour l'électron (solution d'énergie positive)} \\ V(\vec{k}, s) & \text{pour le positron (solution d'énergie négative)} \end{array} \quad (3)$$

Une représentation utile consiste à grouper les 4 composantes en 2 fois 2 composantes:

$$U = \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \quad (4)$$

L'équation de Dirac se réécrit alors sous forme de deux équations couplées:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} U_b &= (k^0 - m) U_a \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} U_a &= (k^0 + m) U_b \end{aligned} \quad (5)$$

($\vec{\sigma}$ = matrices de Pauli). U_a est notée "grande composante", et U_b "petite", de par sa propriété:

$$U_b = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k^0 + m} U_a \rightarrow 0 \quad \text{quand } \vec{k} \rightarrow 0 \quad (6)$$

(on a la relation inverse pour V : V_b = grande composante; cf. équation 8). On peut prendre comme représentation de U_a, U_b à une normalisation près, les spineurs de Pauli:

$$\chi(\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

c'est-à-dire les états propres de σ_z . On obtient alors la forme suivante pour les spineurs de Dirac:

$$U(\vec{k}, s) = \sqrt{k^0 + m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k^0 + m} \chi \end{pmatrix}, \quad V(\vec{k}, s) = \sqrt{k^0 + m} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k^0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (8)$$

avec $\chi = \chi(\uparrow)$ ou $\chi(\downarrow)$, $k^0 > 0$, et la relation de normalisation:

$$U^\dagger(\vec{k}, s) U(\vec{k}, s) = 2k^0 \quad \text{ou} \quad \bar{U}(\vec{k}, s) U(\vec{k}, s) = 2m \quad (9)$$

$U^\dagger$ est le conjugué hermitique de U . On a introduit $\bar{U} = U^\dagger \gamma^0$, le spineur adjoint de U . L'équation de Dirac pour U et $\bar{U}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot k - m) U(\vec{k}, s) &= 0 \\ \bar{U}(\vec{k}, s) (\gamma \cdot k - m) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

1.3 Spin versus Hélicité

Plutôt que le formalisme de spin, c'est généralement celui d'hélicité qui est adopté en diffusion d'électrons (ainsi que pour tous les processus QED à haute énergie). La raison en est que, si l'on néglige la masse de l'électron, son hélicité est conservée au cours de la diffusion, ce qui simplifie notablement les calculs.

Rappel sur l'hélicité :

Soit une particule de spin $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ (spin 1/2), de moment orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{k}$, de moment cinétique total $\vec{J}$, de vecteur directeur $\hat{k}$ le long de sa quantité de mouvement, et un axe de quantification z . On a:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{L} + \vec{\sigma}/2 \\ \Rightarrow \vec{J} \cdot \hat{k} &= 0 + \vec{\sigma} \cdot \hat{k}/2\end{aligned}\quad (11)$$

$\vec{J} \cdot \hat{k}$ est par définition l'opérateur d'hélicité associé à la particule, et h sa valeur propre ou hélicité. De ceci on déduit 2 représentations équivalentes pour décrire l'état de spin:

- la représentation $(\vec{S}^2, S_z)$.

S_z est égal à J_z dans le repère de repos de la particule (car $\vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{L} = 0$), avec la valeur propre $\sigma/2$. J_z est une observable indépendante du temps, alors que S_z ne l'est pas, dans un repère quelconque. L'état est défini par:

$$\begin{aligned}\vec{P} |\vec{k}, s_z\rangle &= \vec{k} |\vec{k}, s_z\rangle & (\vec{P} = \text{opérateur d'impulsion}) \\ |\vec{k}, s_z\rangle &= \Lambda(\vec{k}) |\vec{0}, s_z\rangle & (\Lambda(\vec{k}) = \text{opérateur de boost}) \\ S_z |\vec{0}, s_z\rangle &= s_z |\vec{0}, s_z\rangle & (s_z = \pm 1/2 = \text{valeur propre de } S_z)\end{aligned}\quad (12)$$

- la représentation $(\vec{S}^2, h)$.

L'hélicité h a l'inconvénient de n'être pas définie dans le repère de repos de la particule (car $\hat{k}$ non défini), mais l'avantage d'être invariante par transformation de Lorentz le long de $\vec{k}$. L'état propre d'hélicité $|\vec{k}, h\rangle$ est défini par:

$$\vec{J} \cdot \hat{k} |\vec{k}, h\rangle = h |\vec{k}, h\rangle, \quad h = \pm 1/2. \quad (13)$$

1.4 Spineurs d'hélicité

En formalisme d'hélicité, les spineurs de Dirac vont être indicés non plus par le spin s mais par l'hélicité h . Pour une particule d'impulsion $\vec{k}$ et d'angles polaire θ , azimuthal ϕ :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \sin \alpha \cos \phi \\ k \sin \alpha \sin \phi \\ k \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (14)$$

une représentation des spineurs est:

$$U(\vec{k}, h) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 + m} \chi(h) \\ \sqrt{k^0 - m} 2h\chi(h) \end{pmatrix}, \quad V(\vec{k}, h) = \begin{pmatrix} -\sqrt{k^0 - m} 2h\chi(h) \\ \sqrt{k^0 + m} \chi(h) \end{pmatrix} \quad (15)$$

avec:

$$\chi(h = +\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ e^{i\phi} \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad \chi(h = -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ces formules expriment un simple changement de base par rapport aux formules (7,8).

1.5 Conservation de l'hélicité de l'électron au cours d'une diffusion à haute énergie

Dans la diffusion illustrée à la figure 2, à l'électron entrant correspond le spineur $U(\vec{k}, h)$ et à l'électron sortant le spineur adjoint $\bar{U}(\vec{k}', h')$. On peut montrer que $h = h'$ dans la limite où l'on néglige la masse m de la particule.

γ^5 est dit opérateur de chiralité, de valeur propre $2h$ (cf. référence [4]) :

$$\begin{aligned} \gamma^5 U(\vec{k}, h) &= 2h U(\vec{k}, h) \\ U^\dagger(\vec{k}, h) \gamma^5 &= 2h U^\dagger(\vec{k}, h) \end{aligned} \quad (17)$$

Alors :

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{U}(h') \gamma^\mu U(h) \\ &= U^\dagger(h') \gamma^0 \gamma^\mu U(h) \\ &= U^\dagger(h') \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu U(h) \end{aligned}$$

$$[\gamma^5, \gamma^0 \gamma^\mu] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} j^\mu &= -U^\dagger(h') \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 U(h) \\ &= (-2h) U^\dagger(h') \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu U(h) \\ &= (+2h) U^\dagger(h') \gamma^5 \gamma^0 \gamma^\mu U(h) \\ &= (+2h)(+2h') U^\dagger(h') \gamma^0 \gamma^\mu U(h) \\ &= (4hh') \bar{U}(h') \gamma^\mu U(h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4hh' = \delta(h, h'); \quad h = h' = \pm 1/2. \quad (18)$$

c'est-à-dire que le courant d'électrons j^μ , défini au paragraphe 2.2, est diagonal dans le formalisme d'hélicité.

En terme de chiralité, on désigne par Left et Right les spineurs d'hélicité : $U_L = U(h = -1/2)$, $U_R = U(h = +1/2)$. En conclusion, en diffusion d'électrons ou de positrons, le courant leptonique est de la forme:

$$e(\bar{U}_L \gamma^\mu U_L + \bar{U}_R \gamma^\mu U_R) \quad (\text{électron})$$

ou:

$$e(\bar{V}_L \gamma^\mu V_L + \bar{V}_R \gamma^\mu V_R) \quad (\text{positron}) \quad (19)$$

sans terme croisé en $\bar{U}_L \gamma^\mu U_R$, etc (cf. figure 2). De la même manière [7], en collision e^+e^- le courant leptonique formé par l'électron et le positron entrants est de la forme:

$$e(\bar{V}_L \gamma^\mu U_R + \bar{V}_R \gamma^\mu U_L) \quad (20)$$

Figure 1: hélicité de l'électron.

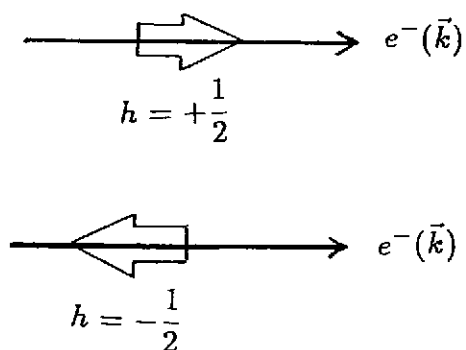


Figure 2: courant en diffusion d'électrons et en annihilation e^+e^- .

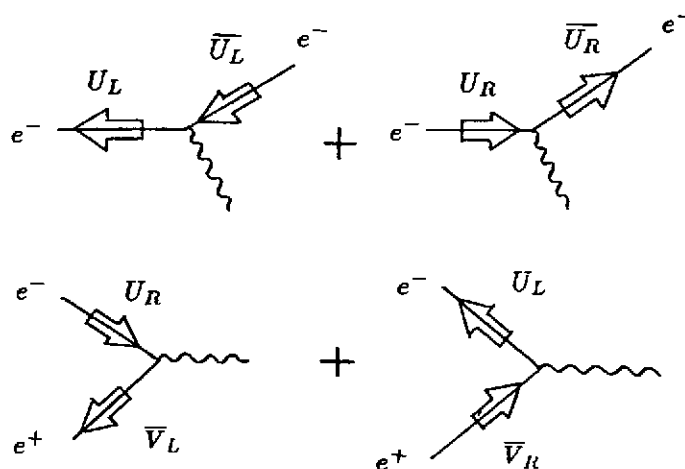
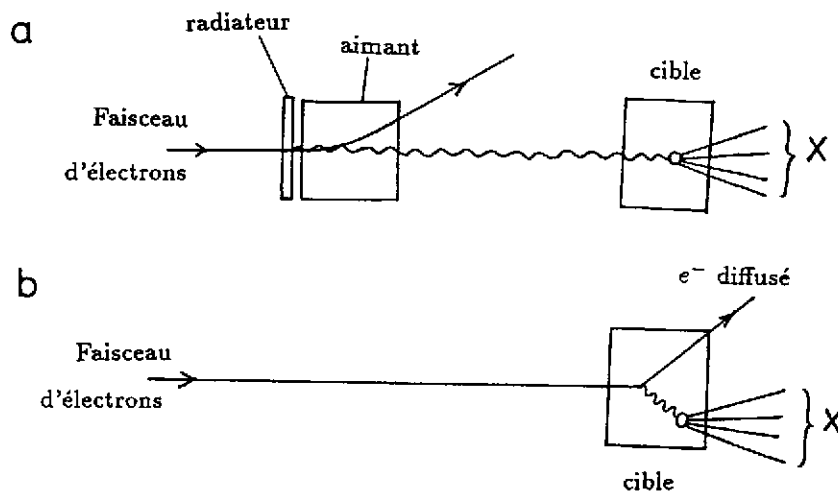


Figure 3: photon réel (a) et virtuel (b).



2 LE PHOTON

2.1 Distinction expérimentale entre photon réel et virtuel

Le photon est la particule qui porte l'interaction électromagnétique, l'électron incident servant essentiellement à produire ce photon.

Tous les photons avec lesquels on fait des expériences ont donc été émis en un point de l'espace-temps, puis réabsorbés dans une interaction en un autre point de l'espace-temps. En ce sens, ils sont tous "virtuels". Expérimentalement, on considérera comme réel un photon qui se propage sur une distance dont l'ordre de grandeur est macroscopique : cf. figures 3-a, 3-b.

2.2 Le photon: boson de jauge

Dans la théorie de jauge électrofaible, le photon est le boson de jauge de l'interaction électromagnétique. Je renvoie au cours de J.P.Blaizot sur ce sujet, et rappelle seulement quelques points importants ici.

- c'est en imposant au lagrangien de QED de posséder l'invariance de jauge locale que l'on introduit le champ du photon: $A^\mu(x)$, et que l'on déduit la forme de l'interaction électromagnétique dans le lagrangien. Elle est de la forme $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$, et décrit l'interaction entre le champ A_μ et le courant j^μ :

$$j^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (21)$$

dans lequel on a par convention inclus la constante de couplage électromagnétique e ($\alpha = e^2/4\pi = 1/137$). Ce courant correspond à la notion habituelle de courant de probabilité en mécanique ondulatoire, qui satisfait toujours à une équation de continuité. Dans notre cas, le courant d'électrons j^μ , dérivé de l'équation de Dirac, satisfait à :

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (22)$$

C'est donc un quadrivecteur $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ dont la conservation exprime simplement la conservation de la charge électrique. De manière plus générale, tous les courants de type électromagnétique (i.e. décrivant le couplage à une charge électrique ou à un moment magnétique) sont conservés, c'est-à-dire satisfont à : $\partial_\mu j^\mu = 0$.

- souvent, on se place explicitement dans une jauge pour développer les calculs (le résultat physique étant indépendant de la jauge choisie). Classiquement, cela revient à imposer des conditions sur le champ $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, c'est-à-dire fixer les potentiels scalaire et vecteur des équations de Maxwell.
- la condition: $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ (somme sur $\mu = 0, 1, 2, 3$) définit la (famille de) jauge(s) de Lorentz, couramment adoptée, dans laquelle les équations de Maxwell prennent une forme particulièrement simple: cf. tableau 1.
- Le tableau 1 résume les principales caractéristiques du photon en QED, et permet de comparer les photons réel et virtuel, notamment en ce qui concerne leur polarisation.

TABLEAU 1
CARACTERISTIQUES DU PHOTON VIRTUEL ET REEL

	photon réel	photon virtuel (de type espace)
Jauge de Lorentz	$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$	$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$
Equ. de Maxwell	$\square^2 A^\mu(x) = 0$	$\square^2 A^\mu(x) = j^\mu(x)$
masse	$q_\mu q^\mu = 0$	$q_\mu q^\mu \neq 0$
champ $A^\mu = (A^0, \vec{A})$	$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-iqx}$	$A^\mu(x) = \int d^4x' j^\mu(x') G(x - x')$
Polarisation ϵ^μ	$\epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon})$	$\epsilon^\mu = \langle k' A^\mu(0) k \rangle$ $\epsilon^\mu = \bar{U}(k') \gamma^\mu U(k) \times \frac{e}{Q^2}$
nb. de comp. indép. de polarisation	$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow q_\mu \epsilon^\mu = 0$ $\Rightarrow 3$ comp. indép.	$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow q_\mu \epsilon^\mu = 0$ $\Rightarrow 3$ comp. indép.
réduction de ce nb.	$\vec{q} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \Rightarrow$ 2 comp. transverses	pas de réduction. 2 comp. transverses + 1 longitudinale
valeurs propres d'hélicité	+1 , -1	+1 , -1 , 0

Notations:

k et k' sont les quadrvecteurs énergie-impulsion des électrons entrant et sortant.

$q^\mu = (k - k')^\mu$ est le quadrvecteur énergie-impulsion du photon virtuel.

$Q^2 = -\underline{q}^2 = -q^\mu q_\mu = \vec{q}^2 - q_0^2$ ($Q^2 > 0$).

j^μ = courant d'électron.

$G(x - x')$ = fonction de Green.

1. pour un photon libre, définir le champ A^μ équivaut à se donner sa polarisation ϵ^μ , et son impulsion $\vec{q}$. Le vecteur polarisation $\vec{\epsilon}$ est perpendiculaire à la direction de spin du photon. On peut montrer que la polarisation $\vec{\epsilon}$ d'un photon réel est uniquement transverse ([8], p.40) ; le nombre de composantes indépendantes de polarisation est alors égal à deux. (cf. tableau 1 : une manière de les dénombrer consiste à appliquer la condition de jauge de Lorentz : $q_\mu \epsilon^\mu = 0$ puis se placer dans la "jauge de Coulomb", où : $\vec{q} \cdot \vec{\epsilon} = 0$). A partir de ces deux composantes (ϵ_1, ϵ_2) projetées sur le repère orthonormé de la figure 4-a, on définit par changement de base les deux états de polarisation circulaire Left et Right, ou états propres d'hélicité pour le photon réel:

$$\begin{aligned}\epsilon_{Left} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2) \quad (\text{hélicité} = -1) \\ \epsilon_{Right} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \quad (\text{hélicité} = +1)\end{aligned}\tag{23}$$

2. pour un photon virtuel la situation est plus complexe. Le quadrivecteur polarisation ϵ^μ est construit à partir du courant d'électron j^μ (cf. tableau 1), et comporte cette fois trois composantes indépendantes au lieu de deux. En effet la condition de Lorentz $q_\mu \epsilon^\mu = 0$ s'applique toujours, mais il existe des états tels que $\vec{\epsilon} \cdot \vec{q} \neq 0$, correspondant à une polarisation longitudinale du photon et donc à une hélicité nulle; cf. figure 4-b.

Nous nous intéresserons à partir de maintenant exclusivement au photon virtuel.

2.3 Référentiels et transversalité du photon virtuel

Le degré de transversalité de la polarisation du photon virtuel est variable avec le repère, car le spin est un vecteur qui se transforme avec le boost de Lorentz. Plaçons-nous d'abord dans un repère d'école, le plus simple.

1. *diffusion (e, e') dans le repère de Breit des électrons*

Dans ce repère, les trois vecteurs $\vec{k}, \vec{k}'$ et $\vec{q}$ sont colinéaires, avec:

$$\begin{aligned}\vec{k}' &= -\vec{k} \\ k_0 &= k'_0 \\ q_0 &= 0\end{aligned}\tag{24}$$

comme indiqué à la figure 5-a. Compte-tenu de la conservation de l'hélicité de l'électron expliquée au paragraphe 1.5, sur l'axe des impulsions (noté z) le photon virtuel doit emporter une unité de moment cinétique: $J_z = \pm 1$. Son hélicité vaut donc ± 1 , et sa polarisation est purement transverse.

2. *annihilation (e^+, e^-) dans le centre de masse*

La situation est strictement analogue en collision (e^+e^-) dans le centre de masse des deux particules (= le labo). Pour la même raison que précédemment le photon virtuel produit par l'annihilation est purement transverse; cf. figure 5-b.

Figure 4: (a) composantes de polarisation du photon réel; (b) du photon virtuel.

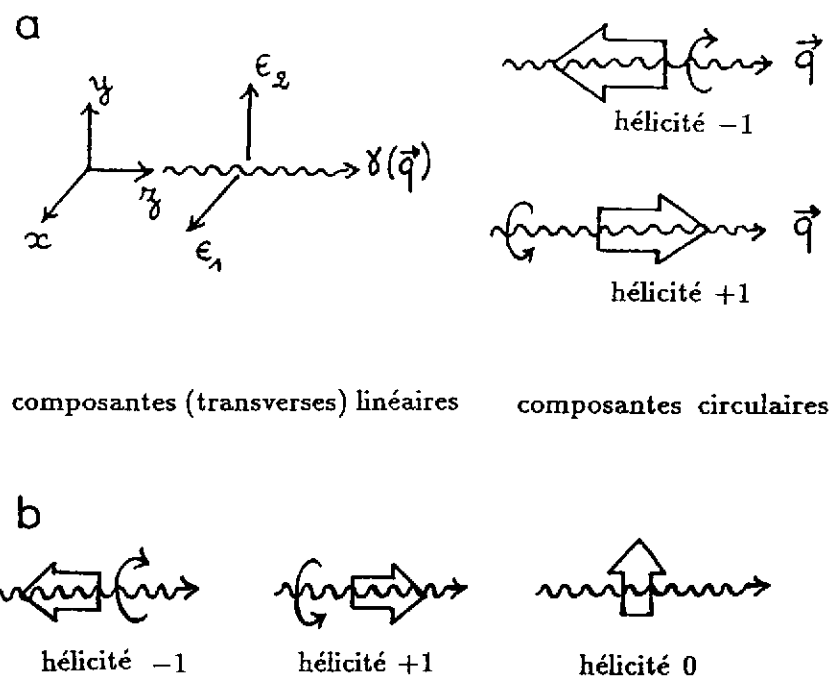
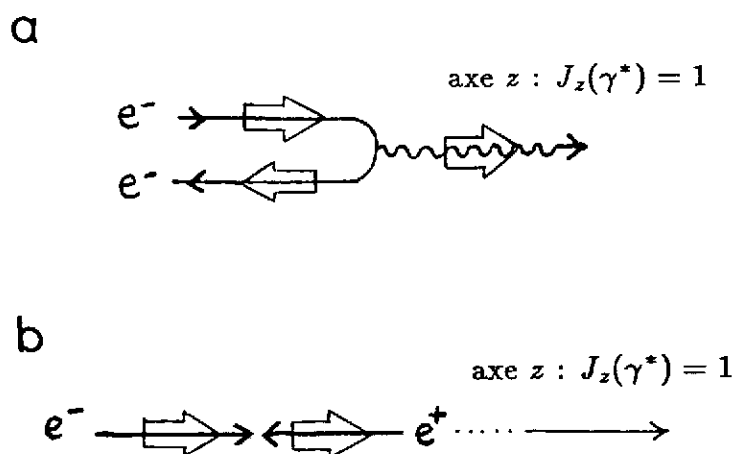


Figure 5 : (a) diffusion (e, e') dans le repère de Breit des électrons. (b) : annihilation e^+e^- dans le centre de masse.



3. diffusion (e, e') dans le laboratoire

Le passage du repère de Breit au système du laboratoire se fait le long d'une direction non parallèle à l'axe z précédent, c'est pourquoi il apparaît une composante longitudinale de polarisation du photon virtuel dans le laboratoire.

On passe également communément du laboratoire au centre de masse $\gamma^* - \text{cible}$. Ce changement de référentiel se fait le long de $\vec{q}$; en conséquence, il conserve les composantes de polarisation transverse du γ^* , alors que la composante longitudinale est modifiée.

Remarque:

En diffusion (e, e') il n'existe pas de transformation de Lorentz amenant dans le repère propre du photon virtuel, car dans tout repère celui-ci transporte plus d'impulsion que d'énergie (c'est un photon du genre "espace", de vitesse $v > 1$).

3 SECTIONS EFFICACES DE DIFFUSION D'ELECTRONS . FORMALISME GENERAL

La figure 6 représente le graphe de Feynman de la diffusion d'électrons à l'ordre le plus bas, i.e. avec échange d'un seul photon virtuel, et dans le cas général d'un état final quelconque non spécifié, noté P' . La figure 6 définit les notations pour toute la suite du cours.

On prendra comme formule de départ donnant la section efficace différentielle de ce processus général [13] :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \left[\frac{1}{4\sqrt{(p \cdot k)^2 - m_e^2 M^2}} \right] \times \left[\delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3 \vec{k}'}{n(k')} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_j}{n(p_j)} \right] \times \left[|T_{fi}|^2 \right] \quad (25)$$

Le premier crochet est le facteur de flux ($M =$ masse de la cible). Le deuxième est le facteur d'espace de phase; le troisième le carré de l'amplitude de transition $\langle f | T | i \rangle$.

L'écriture (25) est invariante (il y a invariance pour les crochets 1, 2, et aussi pour le 3^e quand on moyenne sur les spins). Par la suite on se placera dans le laboratoire, où l'on écrira:

$$d\sigma = (2\pi)^{10} \left[\frac{1}{n(p)n(k)} \right] \times \left[\delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3 \vec{k}'}{n(k')} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_j}{n(p_j)} \right] \times \left[|T_{fi}|^2 \right] \quad (26)$$

Dans le facteur de flux, on a négligé m_e (ce qui revient à faire l'approximation $v = 1$, v étant la vitesse relative électron-cible) et fait apparaître la normalisation des états: $n(k) = (2\pi)^3 k_0$, etc.

L'espace de phase et $|T_{fi}|^2$ sont à calculer dans chaque cas particulier.

3.1 Structure de T_{fi}

De même que les électrons entrant et sortant forment le courant leptonique j^μ , le hadron initial et l'ensemble P' des hadrons finals forment un courant électromagnétique "hadro-

nique" J^μ . Comme expliqué au paragraphe 2.2, ces courants sont conservés:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad \partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (27)$$

ou, pour les éléments de matrice : $q_\mu j^\mu = 0$, $q_\mu J^\mu = 0$. L'amplitude T_{fi} décrit alors l'interaction entre ces deux courants par l'intermédiaire d'un photon virtuel (cf. figure 7) :

$$T_{fi} = \langle k' | j^\mu(0) | k \rangle \times \frac{1}{Q^2} \times \langle p' | J_\mu(0) | p \rangle \quad (28)$$

(somme sur $\mu = 0, 1, 2, 3$). La forme du courant j^μ est parfaitement connue; cf. équation (21). La structure du courant hadronique J^μ est connue dans les cas les plus simples; on en verra des exemples.

En se reportant à l'équation (21) et l'expression de ϵ^μ dans le tableau 1, on voit apparaître le quadrivecteur polarisation du photon virtuel dans la formule (28) :

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \epsilon^\mu \langle p' | J_\mu(0) | p \rangle \Rightarrow \\ |T_{fi}|^2 &= \epsilon^\mu \epsilon^{\nu*} \langle p' | J_\mu(0) | p \rangle \langle p' | J_\nu(0) | p \rangle^* \end{aligned} \quad (29)$$

(double somme sur $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). Ceci est la formule générale dont on part pour traiter tous les cas particuliers. Elle exprime $|T_{fi}|^2$ comme fonction du produit du tenseur leptonique :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{spin} \langle k' | j^\mu(0) | k \rangle \langle k' | j^\nu(0) | k \rangle^*$$

par le tenseur hadronique :

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{spin} \langle p' | J_\mu(0) | p \rangle \langle p' | J_\nu(0) | p \rangle^* \quad (30)$$

3.2 décomposition transverse-longitudinale de la section efficace (e, e')

On montre ici comment la section efficace générale de diffusion d'électrons se décompose classiquement en ses composantes transverse, longitudinale, ... correspondant aux différents états de polarisation du photon virtuel.

3.2.1 états de polarisation du photon virtuel

Rappelons que le quadrivecteur polarisation du photon virtuel ϵ^μ est spécifié entièrement par les quadrimoments k, k' des électrons entrant et sortant, et leur hélicité $h = h'$.

$$\epsilon^\mu = \bar{U}(\vec{k}', h) \gamma^\mu U(\vec{k}, h) \times \frac{e}{Q^2} \quad (31)$$

Trois de ses composantes seulement sont indépendantes, car $q_\mu \epsilon^\mu = 0$. On peut donc décomposer ϵ^μ sur trois quadrivecteurs indépendants : $e^\mu(1)$, $e^\mu(2)$, $e^\mu(3)$, chacun de norme 1, et vérifiant : $q_\mu e^\mu(i) = 0$. Il suffit, pour spécifier entièrement le problème, de se donner la partie spatiale de ces 3 quadrivecteurs, soit : $\vec{e}(1)$, $\vec{e}(2)$, $\vec{e}(3)$ dans un

repère quelconque. Le choix est explicité sur la figure 8: les vecteurs $\vec{e}(1), \vec{e}(2)$ portent les composantes transverses de polarisation, et le vecteur $\vec{e}(3)$ la composante longitudinale.

Alors, on peut mener le calcul détaillé de ϵ^μ pour chaque état d'hélicité d'électron: $h = \pm 1/2$. On trouve:

$$\epsilon^\mu(h = +1/2) = \frac{e \times 2\sqrt{k^0 k'^0}}{Q^2} \times$$

$$\left[\frac{k^0 + k'^0}{|\vec{q}|} \sin \frac{\theta}{2} e^\mu(1) + i \sin \frac{\theta}{2} e^\mu(2) + \frac{\sqrt{Q^2}}{|\vec{q}|} \cos \frac{\theta}{2} e^\mu(3) \right]$$

(32)

où θ est l'angle de diffusion $(\vec{k}, \vec{k}')$ dans ce repère, et Q^2 le quadritransfert du photon échangé.

3.2.2 taux de polarisation ϵ du photon virtuel

On désigne sous cette appellation simplifiée la notion plus exacte de taux de polarisation linéaire dans le plan transverse, défini à partir des composantes transverses de polarisation de la formule (32) par:

$$\epsilon = \frac{|\epsilon^\mu e_\mu(1)|^2 - |\epsilon^\mu e_\mu(2)|^2}{|\epsilon^\mu e_\mu(1)|^2 + |\epsilon^\mu e_\mu(2)|^2} = \dots = \frac{2\vec{k}^2 \vec{k}'^2 \sin^2 \theta}{2\vec{k}^2 \vec{k}'^2 \sin^2 \theta + \vec{q}^2 Q^2} \quad (33)$$

et, à la limite $m_e \rightarrow 0$:

$$\epsilon = \frac{1}{1 + \frac{2\vec{q}^2}{Q^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (34)$$

C'est cette dernière formule qu'utilise l'expérimentateur. A retenir:

- le taux de polarisation ϵ est compris entre 0 et 1.
- il dépend, dans un référentiel donné, de la cinématique; c'est-à-dire par exemple de la donnée de θ et Q^2 .
- il dépend, pour une cinématique donnée, du référentiel. Par exemple on rappelle que dans le repère de Breit du paragraphe 2.3, on a $\theta = \pi$, $\Rightarrow \epsilon = 0$: la polarisation est purement transverse et le taux de polarisation linéaire est nul.
- on peut définir un taux de polarisation longitudinale par:

$$\epsilon_{long} = \frac{|\epsilon^\mu e_\mu(3)|^2}{|\epsilon^\mu e_\mu(1)|^2 + |\epsilon^\mu e_\mu(2)|^2} = \dots = \frac{2\vec{q}^2}{q_0^2} \epsilon \quad (35)$$

- les formules 33 à 35 s'appliquent dans tout repère, puisque le référentiel de travail a été choisi quelconque.

Figure 6 : graphe général de diffusion d'électrons.

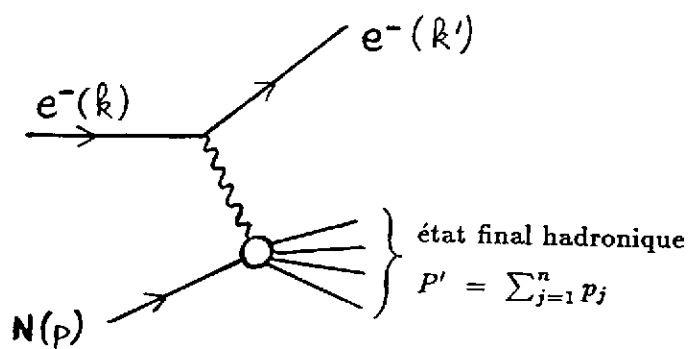


Figure 7 : structure de l'amplitude de diffusion.

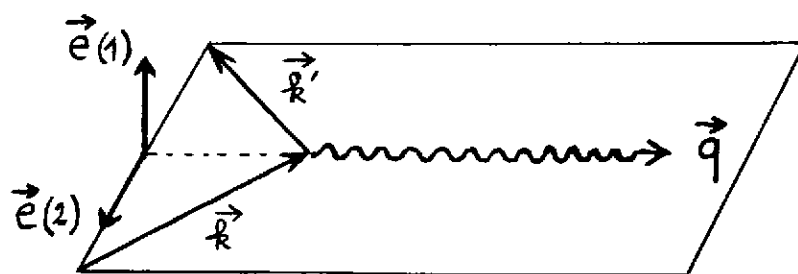
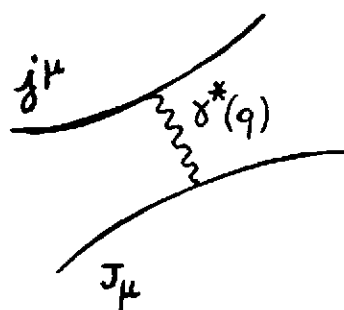


Figure 8 : choix des composantes de ϵ^μ

$$\vec{e}(2) = \frac{\hat{k} \times \hat{k}'}{|\hat{k} \times \hat{k}'|} \quad , \quad \vec{e}(1) = \vec{e}(2) \times \hat{q}$$

$$e^\mu(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}(1) \end{pmatrix} \quad e^\mu(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}(2) \end{pmatrix} \quad e^\mu(3) = \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \begin{pmatrix} |\vec{q}| \\ q_0 \cdot \hat{q} \end{pmatrix}$$

- la valeur du taux de polarisation ϵ est inchangée entre deux repères déduits par boost de Lorentz le long de $\vec{q}$, parce que cette transformation laisse les composantes transverses $\vec{e}(1), \vec{e}(2)$ inchangées. Par contre la valeur de ϵ_{long} est modifiée dans cette transformation.

3.2.3 taux de polarisation circulaire, linéaire, etc.

L'expression (33) donnant ϵ est indépendante de h , hélicité de l'électron. La formule (32) indique que, pour un état donné de h , la polarisation du photon dans le plan transverse est généralement elliptique, avec un sens de rotation fixé par l'hélicité de l'électron. Cette polarisation, intermédiaire entre linéaire et circulaire, provient du déphasage entre les composantes le long de $e^\mu(1)$ et $e^\mu(2)$. Pour un faisceau d'électrons non polarisé, i.e. pour une combinaison à égale proportion de $\epsilon^\mu(h = +1/2)$ et $\epsilon^\mu(h = -1/2)$, le photon virtuel n'a donc en moyenne pas de polarisation circulaire.

Au lieu d'utiliser la décomposition $e^\mu(1), (2), (3)$, on a intérêt à décomposer la polarisation ϵ^μ sur les états propres d'hélicité du photon virtuel : circulaires Right et Left, et longitudinal. On fait pour cela un changement de base identique à celui des équations (23) :

$$\begin{aligned} e_{Left}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^\mu(1) - ie^\mu(2)] \\ e_{Right}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^\mu(1) + ie^\mu(2)] \\ e_{long}^\mu &= e^\mu(3) \end{aligned} \quad (36)$$

On obtient alors la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(h = +\frac{1}{2}) &= \frac{e}{\sqrt{Q^2(1-\epsilon)}} \left[\alpha(+)e_{Right}^\mu + \alpha(-)e_{Left}^\mu + \frac{\sqrt{Q^2}}{|\vec{q}|} \cos \frac{\theta}{2} e_{long}^\mu \right] \\ \epsilon^\mu(h = -\frac{1}{2}) &= \frac{e}{\sqrt{Q^2(1-\epsilon)}} \left[\alpha(-)e_{Right}^\mu + \alpha(+)e_{Left}^\mu + \frac{\sqrt{Q^2}}{|\vec{q}|} \cos \frac{\theta}{2} e_{long}^\mu \right] \end{aligned} \quad (37)$$

avec:

$$\alpha(\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1+\epsilon} \pm \sqrt{1-\epsilon} \right] \quad (38)$$

On peut définir le taux de polarisation circulaire ϵ_c par:

$$\epsilon_c = \frac{|\epsilon_\mu e_{Right}^\mu|^2 - |\epsilon_\mu e_{Left}^\mu|^2}{|\epsilon_\mu e_{Right}^\mu|^2 + |\epsilon_\mu e_{Left}^\mu|^2} \quad (39)$$

3.2.4 décomposition Transverse-Longitudinale de la section efficace . Flux de photons virtuels et section efficace d'absorption de photon virtuel.

On rappelle que $|T_{fi}|^2$ est de la forme : $\epsilon^\mu \epsilon^{\nu*} W_{\mu\nu}$, avec ϵ^μ donné par l'équation (37). Dans cette double sommation vont donc apparaître des termes produits portant sur des

polarisations de photon différentes, ce que l'on indique par un double label sur le tenseur hadronique: R,L,l (= Right, Left, longitudinal).

- W_{RR}, W_{LL}, W_{ll} = termes purs.
- W_{RL}, W_{Rl}, W_{Ll} = termes croisés.

On traite le cas d'un faisceau d'électrons non polarisé. La quantité à calculer est :

$$|T_{fi}|_{\text{non polarisé}}^2 = \frac{1}{2} \left[|T_{fi}(h = +\frac{1}{2})|^2 + |T_{fi}(h = -\frac{1}{2})|^2 \right] \quad (40)$$

pour laquelle on obtient l'expression suivante:

$$|T_{fi}|^2 = \frac{e^2}{Q^2(1-\epsilon)} \times \left[W_{RR} + W_{LL} + 2\epsilon W_{ll} + \epsilon W_{RL} + \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}(W_{Rl} + W_{Ll}) \right] \quad (41)$$

On peut alors mettre l'équation (26) sous la forme :

$$d\sigma = \left[v_{pq} \frac{n(q)}{n(k)} \frac{d^3\vec{k}'}{n(k')} \frac{2e^2}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon} \right] \times \left[\frac{(2\pi)^{10}}{n(p)n(q)} \frac{1}{v_{pq}} \delta^4(q+p-p') \prod_j \frac{d^3\vec{p}_j}{n(p_j)} \left(\frac{W_{RR} + W_{LL}}{2} + \epsilon W_{ll} + \dots \right) \right] \quad (42)$$

L'intérêt de cette écriture est de factoriser le sous-processus d'interaction photon-cible:

- le 2^{ème} crochet = la section efficace différentielle d'absorption de photon virtuel, correspondant au sous-processus : $\gamma^* + \text{cible} \rightarrow \text{hadrons}$.
- le 1^{er} crochet = "facteur de flux" associé; c'est ainsi qu'apparaît la notion de flux de photons virtuels.

On a introduit v_{pq} , la vitesse relative de q (photon virtuel) et p (cible) dans le labo, pour la raison suivante. La quantité $n(p)n(q)v_{pq}$ du 2^e crochet étant invariante par boost le long de $\vec{q}$, on peut donc calculer tout le 2^e crochet dans le c.m. $\gamma^* - \text{cible}$; et calculer le 1^{er} crochet dans le labo, où $v_{pq} = |\vec{q}|/q_0$.

En utilisant : $\alpha = e^2/4\pi$, et $d^3\vec{k}' = (k'_0)^2 dk'_0 d\Omega$, le premier crochet de l'équation (42) se réécrit:

$$\left[v_{pq} \frac{n(q)}{n(k)} \frac{d^3\vec{k}'}{n(k')} \frac{2e^2}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon} \right] = (dk'_0 d\Omega) \times \Gamma_v \quad (43)$$

Γ_v est appelé flux de photons virtuels, et vaut:

$$\Gamma_v = \left[\frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{k'_0}{k_0} \frac{|\vec{q}|}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon} \right] \quad (44)$$

Cette écriture correspond à la convention de Gilman (cf. réf. [9]). Il reste néanmoins un arbitraire dans l'écriture de ce flux, dû à la façon dont on identifie le 2^e crochet de (42) à une section efficace quand on passe à la limite du photon réel. Une autre écriture correspond à la convention de Hand [9]) :

$$\Gamma_v = \left[\frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{k'_0}{k_0} \frac{\tilde{q}_0}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon} \right] \quad (44-b)$$

où $\tilde{q}_0$ vaut l'énergie du photon réel qui donnerait le même état final hadronique P' que celui de la figure 6. Les relations cinématiques donnent : $\tilde{q}_0 = q_0 - (Q^2/2M)$, où M est la masse de la cible.

Dans le deuxième crochet de l'équation (42), on notera que :

- le terme en $(W_{RR} + W_{LL})$ donne la section efficace σ_T d'absorption de photons virtuels de polarisation transverse;
- le terme en W_{ll} donne la section efficace σ_l d'absorption de photons longitudinaux;
- les termes en W_{RL}, W_{RI}, W_{LI} donnent les "sections efficaces" d'interférence transverse-transverse σ_{TT} et longitudinale-transverse σ_{Tl} , qui peuvent être négatives.

L'équation (42) se réécrit alors sous la forme usuelle :

$$\frac{d^2\sigma}{dk'_0 d\Omega} = \Gamma_v \times \left[\sigma_T + \epsilon\sigma_l + (\text{termes d'interf.}) \right] \quad (45)$$

3.3 Cas du photon réel

Le formalisme précédent a l'avantage d'établir le parallèle naturel entre les sections efficaces d'absorption de photon virtuel et de photon réel. En effet, à la limite du photon réel ($Q^2 \rightarrow 0$) on aura :

$$\begin{aligned} \sigma_T &\rightarrow \sigma_{tot}(\gamma + cible) = \text{sect. eff. totale d'absorption de photon réel} \\ \sigma_l &\rightarrow 0 \\ \sigma_{interf.} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (46)$$

3.4 Différents cas de diffusion d'électrons

Le formalisme introduit est très général, valable quel que soit le type de diffusion à condition que le faisceau ne soit pas polarisé (sinon il faut reprendre le calcul à partir de l'équation 40). On examine ci-dessous les conséquences dans des cas particuliers.

3.4.1 électroproduction d'une particule

On se place dans le cas où l'on détecte l'électron diffusé et au moins une autre particule. On suppose de plus que toutes les particules de l'état final hadronique ($\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ de la figure 6) sont coplanaires. Elles définissent ainsi le plan hadronique, qui fait l'angle Φ

avec le plan $(\vec{k}, \vec{k}')$ des électrons. Un exemple typique est la réaction d'électroproduction de pion dans la voie exclusive: $ep \rightarrow en\pi^+$ (pour $n = 2$). Dans l'équation (45) on peut montrer que la dépendance en Φ devient alors explicite, sous la forme:

$$\frac{d^3\sigma}{dk'_0 d\Omega d\Omega_\pi} = \Gamma_v \times \left[d\sigma_T + \epsilon d\sigma_l + \epsilon \cos(2\Phi) d\sigma_{TT} + \sqrt{2\epsilon(\epsilon+1)} \cos \Phi d\sigma_{Tl} \right] \quad (47)$$

(cf. par exemple référence [3]). Cette formule s'étend aussi au cas plus général de production semi-inclusive (i.e. $n > 2$) d'une particule H. Même si tous les hadrons finals ne sont pas émis dans un seul plan, on définit le plan hadronique $(\vec{q}, \vec{p}_H)$, et l'angle azimuthal de production de H. La section efficace $d\sigma/dE' d\Omega_e d^3\vec{p}_H d\Omega_H$ se décompose de manière identique à (47) (cf. cours VB §2.3).

3.4.2 Cas sans dépendance azimuthale

Dans de nombreux cas de diffusion d'électrons, l'angle Φ précédemment défini à partir des hadrons finals n'existe pas:

- soit aucun hadron n'est détecté: il s'agit de la diffusion inclusive (e, e').
- soit un seul hadron est produit: il s'agit de la diffusion élastique électron-nucléon ou électron-noyau.
- soit on produit une particule strictement au seuil; elle est alors émise dans la direction du photon virtuel.

Dans ces différents cas la section efficace ne peut pas dépendre de Φ (il y a symétrie autour de l'axe $\vec{q}$), ce qui impose que les termes d'interférence soient nuls: $d\sigma_{TT} = d\sigma_{Tl} = 0$. Seulent restent les contributions transverse et longitudinale:

$$d\sigma = \Gamma_v \times \left[d\sigma_T + \epsilon d\sigma_l \right] \quad (48)$$

3.4.3 formule de Rosenbluth. séparation transverse-longitudinale

Compte-tenu de l'expression (34) donnant le taux de polarisation ϵ , on peut réécrire (48) sous la forme:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left[\Gamma_v \epsilon \right] \times \left[(d\sigma_l + d\sigma_T) + \left(2 \frac{\vec{q}^2}{Q^2} d\sigma_T \right) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ \Rightarrow d\sigma &= \left[\Gamma_v \epsilon \right] \times \left[A + B \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Les équations (48) et (49) sont deux versions équivalentes de la formule dite de Rosenbluth, exprimant que la section efficace ne contient que deux inconnues physiques: $d\sigma_T$ et $d\sigma_l$, ou A et B . Ces inconnues sont:

- les sections efficaces d'absorption de photon virtuel dans le cas d'électroproduction d'une particule;

- les facteurs de forme dans le cas élastique;
- les fonctions de structure dans le cas inélastique inclusif.

Le but d'une séparation transverse-longitudinale (ou "de Rosenbluth") est de déterminer ces deux inconnues physiques, à même transfert ($\vec{q}, q^0$), c'est-à-dire pour la même cinématique de l'interaction entre le photon virtuel et la cible.

La procédure expérimentale est la suivante: on mesure $d\sigma$ pour deux cinématiques différentes, pour lesquelles ϵ varie (ou l'angle de diffusion θ varie) mais pas le transfert ($\vec{q}, q^0$). On joue pour cela sur la cinématique des électrons incident et diffusé. Un fit linéaire d'après la formule (48) ou (49) permet alors d'extraire les 2 inconnues.

Voici par exemple un choix de deux cinématiques de diffusion permettant d'effectuer une telle séparation:

	cinématique I	cinématique II
énergie incidente	15 GeV	6 GeV
énergie diffusée	10 GeV	1 GeV
angle de diffusion	5°	25°
taux de polarisation ϵ	0.92	0.30
transfert d'énergie q_0	5 GeV	5 GeV
transfert d'impulsion $\vec{q}$	5.1 GeV/c	5.1 GeV/c
quadransfert Q^2	1.1 GeV ²	1.1 GeV ²

4 SECTIONS EFFICACES DE DIFFUSION D'ELECTRONS: FACTEURS DE FORME ET FONCTIONS DE STRUCTURE

Dans cette partie du cours on traite :

- de la diffusion élastique $e - \mu$;
- de la diffusion élastique d'électrons sur le nucléon et le noyau;
- de la diffusion inclusive inélastique et profondément inélastique (DIS ou Deep Inelastic Scattering). A haute énergie, les formules seront utilisables aussi pour un faisceau de muons (notamment paragraphes 4.4 à 4.6).

Cette physique -DIS notamment- est devenue un domaine de recherche majeur depuis une vingtaine d'années, révélant la structure partonique du nucléon. En conséquence, le sujet est très bien traité dans nombre d'ouvrages de physique des hautes énergies ([9], [7]) auxquels je renvoie, en particulier pour tout ce qui concerne l'interprétation physique des résultats.

Le présent chapitre est plutôt conçu comme un résumé-formulaire (non exhaustif) et suit l'organisation traditionnelle par niveau de complexité croissant. On se place toujours dans le cas non-polarisé, sauf au paragraphe 4.6.

4.1 Diffusion élastique $e\mu \rightarrow e\mu$

Il s'agit d'un cas d'école, le plus simple: la diffusion entre deux particules de Dirac, i.e. ponctuelles et de spin 1/2. Le processus est entièrement calculable par l'ElectroDynamique Quantique. Reprenant la formule (30), nous sommes dans le cas où les courants j^μ et J^μ ont exactement la même forme, d'où l'écriture des deux tenseurs, avec les notations de la figure 9:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(\text{électron}) &= e^2 \frac{1}{2} \sum_{h_e} (\bar{U}(\vec{k}', h_e) \gamma^\mu U(\vec{k}, h_e)) (\bar{U}(\vec{k}', h_e) \gamma^\nu U(\vec{k}, h_e))^* \\ W_{\mu\nu}(\text{muon}) &= e^2 \frac{1}{2} \sum_{h_\mu} (\bar{U}(\vec{p}', h_\mu) \gamma_\mu U(\vec{p}, h_\mu)) (\bar{U}(\vec{p}', h_\mu) \gamma_\nu U(\vec{p}, h_\mu))^* \end{aligned} \quad (50)$$

(on a utilisé la conservation de l'hélicité du muon à haute énergie, comme pour l'électron). Le calcul utilise les propriétés des matrices γ et de leurs traces. On trouve:

$$L^{\mu\nu}(\text{électron}) = 2e^2 [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k.k' - m_e^2)] \quad (51)$$

$$\Rightarrow |T_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{Q^4} [(k'.p')(k.p) + (k'.p)(k.p') - m_\mu^2 k.k'] \quad (52)$$

(en négligeant m_e). On adopte les notations habituelles dans le système du laboratoire: $k_0 = E$, $k'_0 = E'$, θ = angle de diffusion. L'état final est décrit par une seule variable indépendante, par exemple θ (ou Q^2 , ou E' , ...; cf. cours VB §2.1). On intègre donc l'espace de phase de l'équation (26) de manière à ne garder qu'une variable. On trouve:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{labo}} = \left(\frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \times \frac{E'}{E} \times \left(1 + \frac{Q^2}{2m_\mu^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (53)$$

La première parenthèse est la section efficace de Mott, correspondant à la diffusion d'une particule ponctuelle de spin 1/2 sur une cible ponctuelle sans spin et de masse infinie. Le terme en E'/E prend en compte le recul de la cible, ou encore sa masse finie. Le terme en $\tan^2(\theta/2)$ prend en compte le spin 1/2 de la cible, ou plus exactement est le terme d'interaction avec le moment magnétique de spin de la cible ($\vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{\sigma}$).

Deux remarques:

- la section efficace est extrêmement piquée à petit angle, à cause de $\sigma_{Mott} \sim \theta^{-4}$. C'est une caractéristique générale de toutes les sections efficaces de diffusion d'électrons.
- on retrouve le comportement, également général, en $A + B \tan^2(\theta/2)$ de l'équation (49), dû à l'hypothèse d'échange d'un seul photon virtuel. Nous y reviendrons encore par la suite.

4.2 Diffusion élastique électron-nucléon

Ce cas ne diffère du précédent que par:

- le caractère non ponctuel de la cible, cf figure 10. D'où l'introduction des facteurs de forme (élastiques) F_1 , F_2 du nucléon au couplage γ^* -cible, traduisant l'extension spatiale de la distribution de charge électromagnétique à l'intérieur de l'objet sondé. Ces quantités ne dépendent que d'une variable, Q^2 , pour la même raison qu'au paragraphe précédent.
- la masse de la cible, $M_N \sim 1$ GeV, non négligeable sauf à très haute énergie. La conservation de l'hélicité (cf. paragraphe 1.5) ne s'applique donc pas en général au nucléon.

Le courant hadronique J^μ a la structure d'un "courant de Dirac", aux différences près mentionnées ci-dessus. En utilisant des propriétés générales d'invariance, il s'écrit :

$$J^\mu = e\bar{U}(\vec{p}', h') \left[F_1(Q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M_N}F_2(Q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] U(\vec{p}, h) \quad (54)$$

Seul le premier terme, en F_1 , conserve l'hélicité du nucléon. κ est le moment magnétique anormal du nucléon. La contraction des tenseurs $L^{\mu\nu}$ et $W_{\mu\nu}$ mène alors à la forme classique de Rosenbluth pour la section efficace:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{labo}} = \sigma_{Mott} \times \frac{E'}{E} \times \left[(F_1^2 + \frac{\kappa^2 Q^2}{4M_N^2} F_2^2) + \frac{Q^2}{2M_N^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (55)$$

On rappelle les normalisations: pour le proton, $F_1(0) = F_2(0) = 1$, $\kappa = 1.79$; pour le neutron, $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 1$, $\kappa = -1.91$. On introduit les facteurs de forme électrique et magnétique G_E, G_M :

$$\begin{aligned} F_1(Q^2) + \kappa F_2(Q^2) &= G_M(Q^2) \\ F_1(Q^2) - \kappa \tau F_2(Q^2) &= G_E(Q^2) \\ \tau &= \frac{Q^2}{4M_N^2} \end{aligned} \quad (56)$$

La section efficace s'écrit alors:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{labo}} = \sigma_{Mott} \times \frac{E'}{E} \times \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (57)$$

Les facteurs de forme ont été mesurés, par la méthode de la droite de Rosenbluth comme expliqué au paragraphe 3.4.3. Leur dépendance en Q^2 est bien paramétrisée par une forme dipolaire (cf. figure 11; comportement en Q^{-4} à grand Q^2).

4.3 Diffusion élastique électron-noyau

Comme au paragraphe précédent, la section efficace est de la forme:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{labo}} = \sigma_{Mott} \times \frac{E'}{E} \times \left[A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (58)$$

Figure 9: diffusion élastique $e - \mu$.

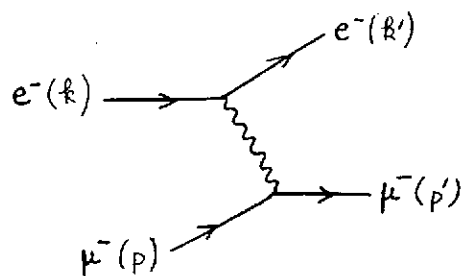


Figure 10: diffusion élastique e -nucléon.

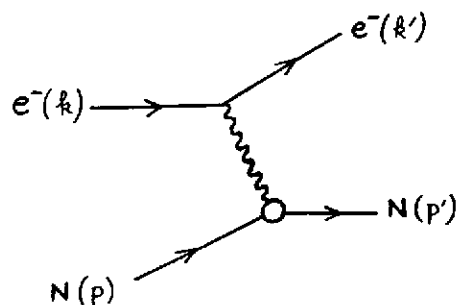


Figure 11: facteurs de forme élastiques du proton (tiré de [7]) ($\mu = 1 + \kappa$).

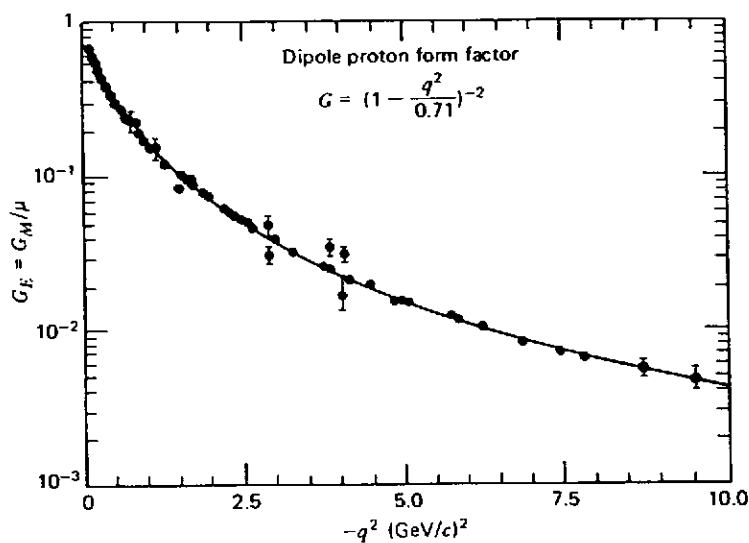
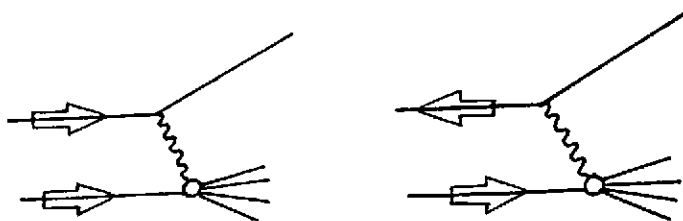


Figure 13: diffusion inélastique avec faisceau et cible polarisés.



où on a remplacé α par $Z\alpha$ dans σ_{Mott} , et les facteurs de forme élastiques du nucléon par ceux du noyau.

Pour un noyau de spin 1/2, il y a deux facteurs de forme G_E, G_M , et l'expression (57) est valable. Pour un noyau de spin 1 (tel que le deutérium) il y a trois facteurs de forme: de charge G_C , dipolaire magnétique G_M , et quadrupolaire électrique G_Q , dont la combinaison dans $A(Q^2), B(Q^2)$ est donnée par exemple dans la référence [6]. Dans ce cas il faut faire des expériences avec polarisation pour extraire les trois facteurs de forme.

4.4 Diffusion inélastique inclusive sur le nucléon $N(e, e')X$ (D.I.S.)

Dans ce cas, la forme du courant hadronique J^μ est inconnue, l'état $|X\rangle$ correspondant à de multiples états finals, non observés (cf. figure 6). Le tenseur hadronique $W_{\mu\nu}$ est construit de manière à satisfaire aux principes généraux, et ne contient finalement que deux inconnues, comme dans le cas élastique. Ce sont les fonctions de structure du nucléon W_1, W_2 , équivalent inélastique des facteurs de forme F_1, F_2 ; mais elles dépendent cette fois de deux variables, par exemple Q^2 et $q_0 = E - E' = \nu$. En effet, dans le cas élastique le transfert d'impulsion et le transfert d'énergie portés par le photon virtuel sont liés (ce qui revient à imposer $x_{Bjorken} = 1$), alors que dans le cas inélastique ils sont découplés ($x_{Bjorken} < 1$), et l'interaction γ^* -cible dépend à la fois de ν et Q^2 .

On obtient la forme de Rosenbluth pour la section efficace:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'_{labo}} = \sigma_{Mott} \left[W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (59)$$

ou encore la décomposition équivalente en contributions transverse et longitudinale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'_{labo}} = \Gamma_\nu \times \left[\sigma_T + \epsilon \sigma_L \right] \quad (60)$$

en ayant posé:

$$W_1 = \frac{\tilde{q}_0}{4\pi^2\alpha} \sigma_T, \quad W_2 = \frac{\tilde{q}_0}{4\pi^2\alpha} \frac{Q^2}{\tilde{q}^2} (\sigma_T + \sigma_L)$$

et en utilisant la relation existant entre σ_{Mott} et le flux de photons virtuels de l'équation (44-b) :

$$\Gamma_\nu = \sigma_{Mott} \frac{\tilde{q}_0}{4\pi^2\alpha} \frac{Q^2}{\tilde{q}^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (61)$$

Pour résumer en quelques mots les acquis de ce domaine de physique:

Expérimentalement, on a observé que les fonctions de structure $W_1, \nu W_2$ ne décroissent pratiquement pas avec Q^2 (à x fixé; cf. figure 12). Bjorken avait prédit ce comportement (notion de "scaling") et ce fut le point de départ pour l'interprétation du processus en termes de diffusion sur des partons ponctuels à l'intérieur du nucléon. Enfin, Feynman a établi dans la limite du scaling les relations qui lient les observables (les W) aux fonctions de distribution des quarks. La variable x de Bjorken joue un rôle central dans cette physique (cf. cours VB §2.5).

Figure 12: Fonctions de structure du proton en D.I.S.
(tiré de [9])

Fig. 12.11. Scaling behaviour of electromagnetic structure function νW_2 at various ω values. There is virtually no variation with Q^2 . (From Panofsky, 1968.)

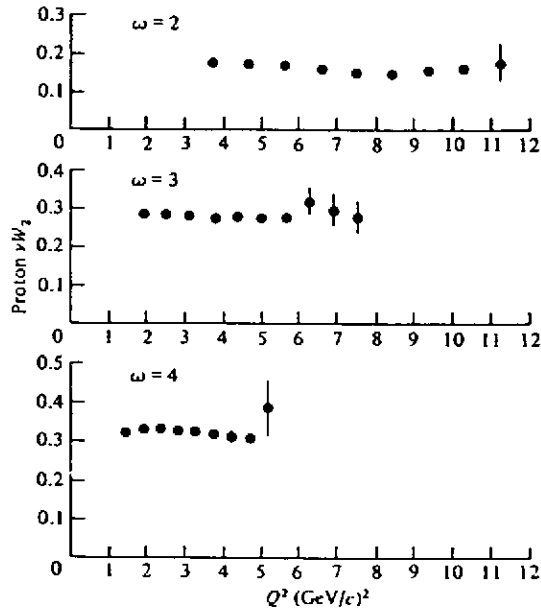
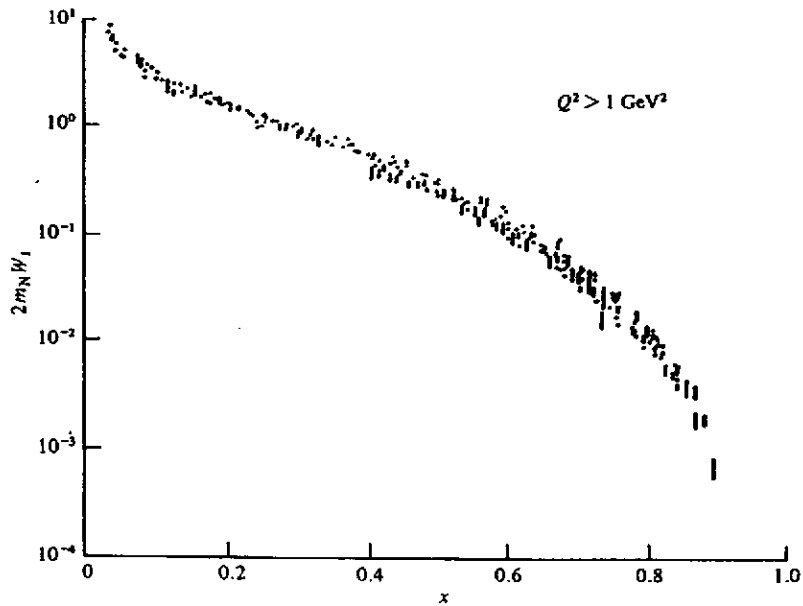


Fig. 12.12. Scaling behaviour of electromagnetic structure function $2m_N W_1$. Almost no Q^2 dependence is visible. (From Panofsky, 1968.)



Enfin, en opérant le changement de variables suivant:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad , \quad y = \frac{E - E'}{E} \quad (\nu = E - E')$$

et en adoptant la notation des fonctions de structure à la limite de Bjorken ($Q^2 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty, x$ fixé) :

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \mapsto F_2(x) \quad , \quad MW_1(\nu, Q^2) \mapsto F_1(x)$$

la formule (59) se réécrit:

$$\frac{d\sigma}{dx dy_{labo}} = \frac{1}{ME} \frac{2\pi\alpha^2}{x^2 y^2} \left[(xy^2)F_1 + \left(1 - y - \frac{Mxy}{2E}\right)F_2 \right] \quad (62)$$

(cf. cours de G.Smadja).

4.5 Sections efficaces inélastiques sur le noyau

4.5.1 Diffusion inclusive $A(e, e')X$

Le formalisme est le même qu'au paragraphe précédent (avec $\alpha \rightarrow Z\alpha$ dans σ_{Mott}); mais la terminologie peut varier suivant les régions étudiées en énergie.

- dans la région en énergie diffusée correspondant au pic quasi-élastique ou à la résonance delta (cf. cours VB §2.6) on utilise les fonctions de réponse nucléaires transverse et longitudinale R_T, R_L qui sont proportionnelles à σ_T, σ_L ([11]).
- dans la région du "deep inelastic" on utilise les fonctions de structure nucléaires $W_{1,2}^A(\nu, Q^2)$ (ou $F_{1,2}^A(x)$ qui en sont la limite dans l'approximation de scaling). On en tire les fonctions de structure du nucléon dans un noyau :

$$F_{1,2}^N(A) = \frac{1}{A} F_{1,2}^A \quad (63)$$

pour chaque valeur de $x_{Bjorken}$. Notamment, l'étude du rapport : $F_2^N(\text{Fe})/F_2^N(\text{D})$ a mis en évidence les effets du milieu nucléaire ("effet EMC").

4.5.2 Sections efficaces semi-inclusives sur un noyau

L'exemple le plus étudié est la diffusion $A(e, e')A-1$ dans la région quasi-élastique, avec détection du proton (cf. cours VB §2.3). On ne donne ici que l'expression la plus simple de la section efficace:

$$\frac{d^6\sigma}{d^3\vec{k}' d^3\vec{p}'} = [K] \times \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(ep \rightarrow ep) \right] \times [S(E_m, \vec{p}_m)] \quad (64)$$

où K est un facteur purement cinématique. Cette écriture a l'avantage de factoriser la partie de diffusion élastique sur le proton -hors couche- (2^e crochet), de l'interaction proton-noyau (3^e crochet) caractérisée par la fonction spectrale $S(E_m, \vec{p}_m)$. Cette dernière représente la probabilité d'extraire du noyau A un proton d'impulsion initiale $\vec{p}_m$ en laissant le noyau résiduel $A-1$ dans un état d'excitation E_m .

Cette factorisation n'est qu'une approximation; on trouvera plus de développements dans les références [12], [14], [2] .

4.6 Fonctions de structure polarisées

On introduit ici le formalisme de la diffusion profondément inélastique inclusive lorsqu'on dispose d'un faisceau d'électrons polarisés et d'une cible polarisée. Ce formalisme est utilisé pour extraire les fonctions de structure du nucléon dans des expériences du type $\vec{N}(\vec{e}, e')X$, entreprises depuis une dizaine d'années (cf. le cours de J. Martino, consacré entièrement à ce sujet).

Lorsque l'on calcule le tenseur leptonique $L^{\mu\nu}$ en sommant sur les états de spin, cf. équation (50), le résultat est symétrique en μ, ν , cf. équation (51); idem pour $W_{\mu\nu}$. Lorsqu'on ne somme plus sur les spins, ce n'est plus vrai. Chaque tenseur possède une partie antisymétrique :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \dot{L}^{\mu\nu}(S) + iL^{\mu\nu}(A) \\ W_{\mu\nu} &= W_{\mu\nu}(S) + iW_{\mu\nu}(A) \end{aligned} \quad (65)$$

On renvoie p.ex. à la référence [9] pour les expressions détaillées dans le cas le plus courant: électrons polarisés longitudinalement, et orientation longitudinale ou transverse du spin de la cible. Dans la contraction des deux tenseurs on aura alors, en plus du terme non-polarisé habituel, un terme en $L^{\mu\nu}(A)W_{\mu\nu}(A)$. Cette partie contient deux nouvelles fonctions de structure G_1, G_2 appelées fonctions de structure polarisées, ou fonctions de structure en spin du nucléon, objet de l'étude.

Remarque:

G_1 et G_2 n'apparaissent que si cible et faisceau sont simultanément polarisés. Si seul le faisceau est polarisé, dans les équations (65) seul $L^{\mu\nu}$ possède une partie antisymétrique. Celle-ci n'a donc pas de contribution dans la contraction des deux tenseurs -pour ce qui est de l'interaction purement électromagnétique- et on se retrouve dans le cas du paragraphe 4.4. Par contre, si seul le faisceau est polarisé, on peut mesurer une asymétrie due à l'échange d'un Z^0 . En effet le terme antisymétrique dans $L^{\mu\nu}$ trouvera un analogue dans $W_{\mu\nu}$ de par la nature du couplage $V - A$ de l'interaction faible. Il s'agit d'expériences (e, e') de violation de parité.

Revenons au cas électromagnétique, p.ex. celui de la figure 13 : polarisations longitudinales de la cible et du faisceau. La section efficace s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\vec{e}\vec{N} \rightarrow e'X)}{d\Omega dE'} \Big|_{\text{labo}} &= \sigma_{Mott} \left[W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} (E + E' \cos \theta) M G_1(\nu, Q^2) - 2Q^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} G_2(\nu, Q^2) \right] \end{aligned} \quad (66)$$

Les deux derniers termes changent de signe lorsque la polarisation de la cible passe de la direction parallèle ($\rightarrow$) à antiparallèle ($\leftarrow$) au faisceau. On extrait donc G_1, G_2 typiquement par une mesure d'asymétrie:

$$A = \frac{d\sigma(\rightarrow) - d\sigma(\leftarrow)}{d\sigma(\rightarrow) + d\sigma(\leftarrow)} \quad (67)$$

5 ANNEXES

Dans le cadre de ce cours, deux sujets ont été abordés de manière annexe durant l'Ecole. Il s'agit: 1) du modèle à dominance vectorielle [16], et 2) des corrections radiatives [15].

Le modèle à dominance vectorielle (VDM) traite du comportement "hadronique" du photon. Cette approche phénoménologique décrit bien l'interaction de photons réels de haute énergie avec un noyau. On peut se poser la question de savoir si une telle approche "interfère" ou non avec la description QED du photon virtuel de diffusion d'électrons, telle qu'elle a été donnée dans ce cours. Le principal élément de réponse consiste à dire qu'à grand Q^2 , ce photon virtuel est cinématiquement très loin d'un état de méson vecteur sur couche de masse, ce qui ne lui laisse qu'une très faible probabilité d'interagir avec le noyau par un mécanisme du genre VDM.

Le traitement des corrections radiatives à la diffusion d'électrons mériterait un cours entier pour être utilisable efficacement. Néanmoins un aperçu à la fois synthétique et complet a été donné par Seon-Ho Choi dans le cadre des "séminaires Jeunes"; ses transparents sont joints intégralement.

Enfin, ce cours ne prétend pas être exhaustif. On trouvera des informations et formules complémentaires dans un autre cours récent sur la diffusion d'électrons: celui de la référence [10]. Un autre cours complet sur le sujet est également en préparation [5].

Je tiens à remercier deux collègues qui ont aidé à maintenir à un niveau tolérable le nombre d'inexactitudes contenues dans ce document. Merci d'abord à Pierre Guichon pour son aide irremplaçable dans la préparation de ce cours (et les corrections!). Merci aussi à Xavier Artru pour ses remarques attentives durant l'Ecole.

References

- [1] J.Bjorken, S.Drell: Relativistic Quantum Mechanics, Mc-Graw-Hill, New York (1964)
- [2] C.Ciofi degli Atti: High energy electron scattering and the structure of hadronic systems, in: Proceedings of the Workshop 'Hadronic Physics with MultiGeV Electrons', Les Houches (1990), 1991 Nova Science Publ.
- [3] G.Cochard, Modèle isobarique pour l'électroproduction d'un pion, Thèse d'Etat, Univ. Paris VI (1974)

- [4] P.Guichon: Symétrie Chirale, cours de l'Ecole Joliot-Curie (1986)
- [5] P.Guichon, communication privée.
- [6] M.Gourdin, Nuovo Cim. 28 (1963) 533; 32 (1964) 493.
- [7] F.Halzen, A.Martin: Quarks and Leptons, J.Wiley & Sons, New York (1984)
- [8] L.Landau, E.Lifchitz: Théorie Quantique Relativiste (1972) Editions Mir, Moscou.
- [9] E.Leader, E.Predazzi: Gauge Theories and the 'New Physics', Cambridge Univ. Press (1982)
- [10] J.Martino: An Introduction to Electron Scattering, in: Proceedings of the Workshop 'Hadronic Physics with MultiGeV Electrons', Les Houches (1990), 1991 Nova Science Publ.
- [11] Z.E.Meziani: Fonctions de réponse T et L en diffusion profondément inélastique d'électrons sur les noyaux ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{56}Fe , Thèse d'Etat, Univ. Paris-Sud/Orsay n°2939 (1984)
- [12] J.Mougey: Réactions $(e, e'p)$ sur ^{12}C et ^{28}Si , Thèse d'Etat, Univ. Paris-Sud/Orsay n°1684 (1976)
- [13] Particle Properties Data Booklet (1990) North-Holland
- [14] S.Turck: Electrodésintégration du deutérium $^2\text{H}(e, e'p)n$, Thèse d'Etat, Univ. Paris-Sud/Orsay n°2960 (1985)
- [15] bibliographie sommaire sur corrections radiatives: // C.de Calan, H.Navelet, J.Picard, Note CEA N-2624 (1990) // J.Haissinsky, Rapport LAL 87-19 (1987) // L.Mo, Y.Tsai : Rev.Mod.Phys 41(1969) 205 // Y.Tsai: SLAC-PUB 848 (1971).
- [16] bibliographie sur VDM: // T.Bauer et al, Rev.Mod.Phys. 50 (1978) 261. // Ecole de Gif 1974.