



HAL
open science

La chromodynamique quantique

Jean-Paul Blaizot

► **To cite this version:**

Jean-Paul Blaizot. La chromodynamique quantique. École thématique. Ecole Joliot Curie "Matière hadronique ou..aujourd'hui et demain avec des électrons", Maubuisson, (France), du 14-19 septembre 1992: 11ème session, 1992. cel-00648081

HAL Id: cel-00648081

<https://cel.hal.science/cel-00648081>

Submitted on 5 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE

J.P. BLAIZOT*

Service de Physique Théorique[†],
Centre d'Etudes de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette cedex

Ce cours est une introduction élémentaire aux concepts de la chromodynamique quantique, sans doute plus proche d'un article de "vulgarisation" que d'une présentation "technique" de méthodes de calcul. Il existe de nombreux articles de revues ou de livres sur le sujet. Quelques uns sont mentionnés dans la bibliographie à laquelle nous renvoyons le lecteur soucieux d'approfondir les questions discutées ici.

La chromodynamique quantique est la théorie des *interactions fortes*, c'est-à-dire la théorie des interactions entre les *hadrons*, ou à un niveau plus fondamental des interactions entre les *constituants* de ces hadrons que sont les *quarks* et les *gluons*. Le préfixe "chromo" fait référence à la symétrie de couleur, une "symétrie de jauge non abélienne" sur laquelle est basée la théorie.

La chromodynamique quantique présente de grandes similarités avec l'électrodynamique quantique. Le *gluon* de la chromodynamique est l'analogue du *photon* de l'électrodynamique; il joue le rôle de *médiateur* de l'interaction forte entre les *quarks* de même que le photon est le médiateur de l'interaction entre deux électrons. Cependant, à la différence des photons, les gluons interagissent fortement entre eux, et ceci a plusieurs conséquences importantes.

La première de ces conséquences est le phénomène de *liberté asymptotique*, à savoir que l'interaction "forte" s'annule à très courte distance. Les autres conséquences font intervenir la structure non triviale du *vide*, et se rapportent par exemple au phénomène de *confinement* ou à la *brisure spontanée de la symétrie chirale*. Cette structure non triviale du vide est révélée par l'existence (attendue) d'une transition de phase à haute température ou/et haute densité où la symétrie chirale est restaurée et où le confinement disparaît. C'est ce que l'on espère mettre en évidence dans les collisions de noyaux lourds à très haute énergie.

Le plan de ce cours est le suivant. Dans la première partie, nous parlerons des constituants des hadrons. Après une revue rapide du modèle des quarks pour introduire la notion de *symétrie de couleur*, nous discuterons les caractéristiques de l'interaction qui

* CNRS

[†] Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Energie Atomique

résulte de l'échange d'un gluon. Dans la deuxième partie, nous discuterons en détail l'invariance de jauge de l'électrodynamique et ses conséquences en mécanique quantique. Nous montrerons comment on construit la chromodynamique quantique, par analogie avec l'électrodynamique, en s'appuyant sur le principe de symétrie de jauge. Dans la troisième partie, nous expliquerons la notion de *charge effective*, ou de *constante de couplage effective*, et pourquoi elle dépend de l'échelle d'énergie ou de distance à laquelle cette charge est mesurée. A nouveau, nous procéderons par analogie avec l'électrodynamique, et commencerons par rappeler les notions d'effet d'écran dans un diélectrique, pour ensuite aborder la notion de liberté asymptotique. Enfin nous dirons quelques mots des propriétés non perturbatives de la chromodynamique, i.e. du confinement, de la symétrie chirale, des condensats de quarks, et des possibilités expérimentales permettant de mettre en évidence des changements dramatiques dans ces propriétés (e.g. transition de déconfinement).

I. LE MODELE DES QUARKS

I-1. Les hadrons sont des objets composites

Les hadrons sont des objets composites. Il suffit pour s'en convaincre de regarder les spectres des hadrons. Les baryons ou les mésons se groupent naturellement en "familles" d'états de divers moments angulaires *demi-entiers*, qui ne sont pas sans rappeler les spectres des états excités d'atomes, de molécules, ou encore de noyaux atomiques. Ces familles sont caractérisées par divers nombres quantiques associés à des grandeurs conservées dans les collisions entre les hadrons. Parmi ces nombres quantiques, on trouve l'*isospin*. Par exemple le neutron et le proton forment un doublet d'isospin, le neutron ayant isospin (ou plus précisément sa projection I_3) valant $-1/2$, le proton ayant isospin $+1/2$. Il existe aussi des familles d'isospin $3/2$, les résonances "Delta". Un autre nombre quantique est l'*étrangeté*, un nombre quantique additif, qui vaut par exemple -1 pour la particule Λ , -2 pour les Ξ , -3 pour les Ω . Enfin mentionnons également le *charme*, qui est nul pour les particules dont nous venons de parler, mais qui vaut $+1$ pour le Λ_c par exemple.

Ces divers nombres quantiques, à savoir la troisième composante I_3 de l'isospin, l'étrangeté S , le charme C et le nombre baryonique B sont reliés à la charge électrique Q par la relation $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ où l'hypercharge Y est $Y = B + S + C$.

Cette relation, qu'il est facile de vérifier explicitement sur une table des propriétés des baryons, est satisfaite également par les mésons (pour lesquels $B = 0$). Les mésons se groupent aussi en familles d'états de moments angulaires *entiers*, ayant des nombres quantiques d'isospin, d'étrangeté, de charme... Par exemple, les 3 pions π_+ , π_0 , π_- forment un triplet d'isospin, le η est un singulet d'isospin, les kaons ont étrangeté ± 1 , etc... Les mésons faisant intervenir le nombre quantique de charme sont des *mésons lourds*, comme le J/Ψ (qui a charme nul), le méson D qui a charme $+1$ et le \bar{D} qui a charme -1 .

Ces différentes familles peuvent être disposées dans des diagrammes où l'on porte en ordonnée l'hypercharge Y de la particule et en abscisse la troisième composante de son isospin, I_3 . Quelques exemples sont donnés dans la Figure 1. La quasi dégénérescence

son isospin, I_3 . Quelques exemples sont donnés dans la Figure 1. La quasi dégénérescence de masse des différentes particules de chaque famille suggère fortement l'existence d'une symétrie sous-jacente. Il s'agit de la *symétrie SU(3) de saveur*, qui est en fait à l'origine de la découverte des quarks. Ces quarks ont des nombres quantiques qui sont rappelés dans la Table 1 et leur "famille" est représentée dans les diagrammes de la Figure 2. Nous n'entrerons pas dans le détail de la discussion mathématique que nous pourrions avoir à ce niveau pour comprendre comment les régularités observées dans les spectres des particules suggèrent l'existence d'entités plus fondamentales dont ces particules sont constituées. Nous nous contenterons de rappeler que tous les hadrons connus peuvent être "construits" à l'aide des quarks. Comme un quark a une charge baryonique $1/3$, il faut trois quarks pour faire un baryon. Par exemple le neutron contient deux quarks d et un quark u , ce que nous écrivons plus rapidement $n = udd$, alors que le proton est $p = uud$, ou encore $\Lambda = uds$. Mentionnons également la structure en quarks de trois baryons qui vont jouer un rôle plus loin dans la discussion, et qui sont $\Delta^- = ddd$, $\Delta^{++} = uuu$ et $\Omega^- = sss$. Les mésons quant à eux sont formés d'un quark et d'un antiquark (les nombres quantiques additifs d'un antiquark sont opposés à ceux du quark correspondant). Ainsi, par exemple, $\pi^- = \bar{u}d$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $K^- = s\bar{u}$, etc...

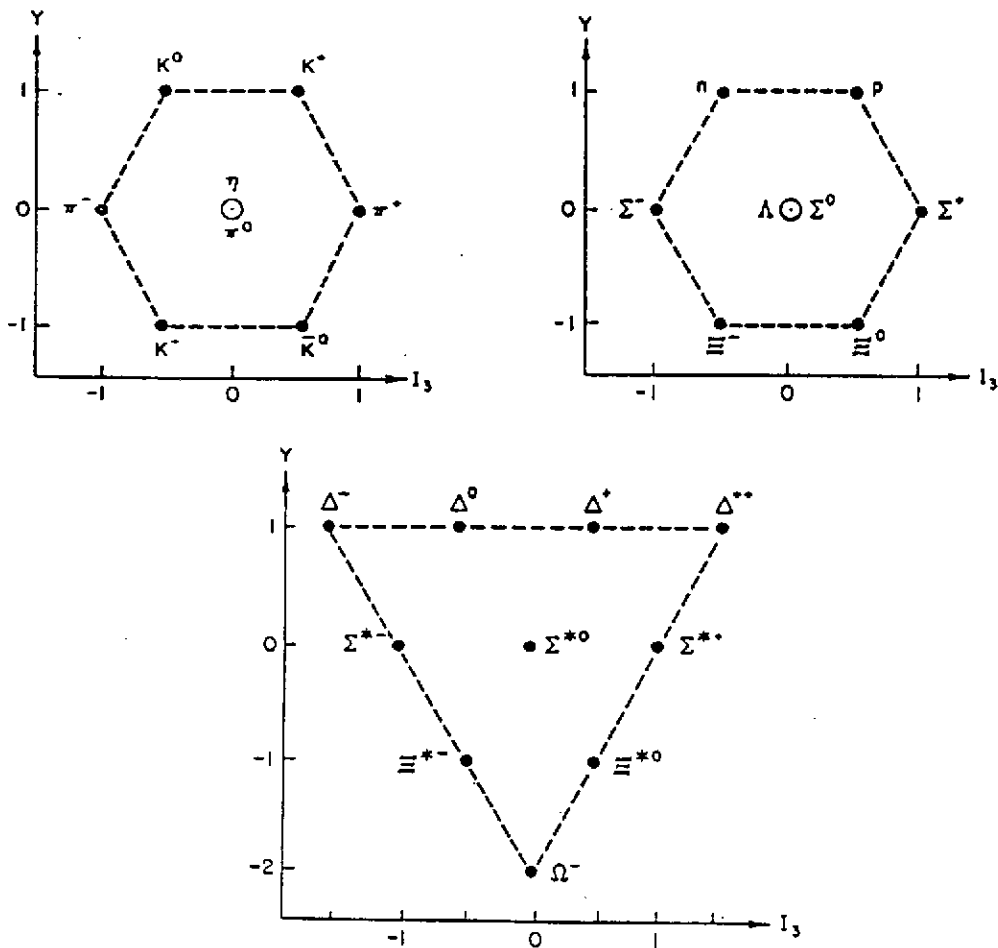


Figure 1

Nous terminerons cette discussion de la nature composite des hadrons en rappelant l'analogie profonde qui existe entre le spectre des mésons lourds, comme le J/Ψ , et le spectre du positronium. Cette analogie traduit la structure particulièrement simple de ces mésons lourds: un quark et un antiquark lourds dont le mouvement relatif est décrit en première approximation par une équation de Schrödinger faisant intervenir un potentiel d'interaction fonction de la séparation quark-antiquark. Il s'agit là d'une "évidence" de la présence des quarks au sein des hadrons, plus directe que celle fournie par la classification $SU(3)$, à laquelle d'ailleurs les mésons lourds n'appartiennent pas.

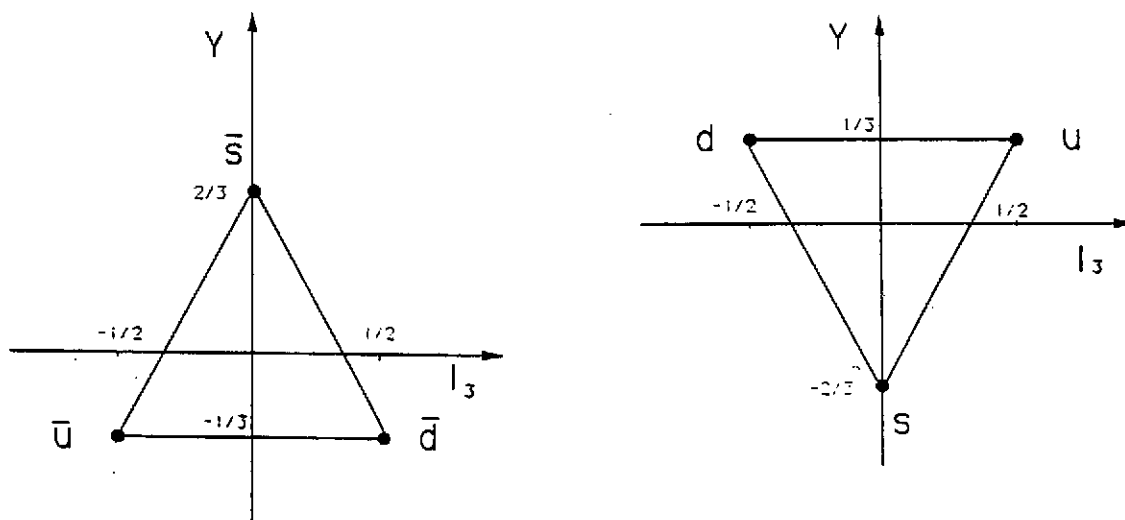


Figure 2

Nom du quark	B	Q	I_3	s	c	b	t
u	1/3	2/3	1/2	0	0	0	0
d	1/3	-1/3	-1/2	0	0	0	0
s	1/3	-1/3	0	-1	0	0	0
c	1/3	2/3	0	0	+1	0	0
b	1/3	-1/3	0	0	0	-1	0
t	1/3	2/3	0	0	0	0	+1

Table 1

I-2. La symétrie de couleur

Dans le cadre du modèle des quarks, l'état quantique d'un hadron est le produit (tensoriel) de plusieurs facteurs, associés respectivement aux variables dynamiques décrivant le mouvement relatif des quarks dans le hadron en question, aux variables de spin, et de saveur (isospin, étrangeté, charme). Par exemple nous écrivons pour le pion:

$$|\pi^+\rangle = |\text{saveur}\rangle \otimes |\text{spin}\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle \quad (1.1)$$

où $|\text{savoir}\rangle = |u\bar{d}\rangle$, $|\text{spin}\rangle = |s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, et $|\text{orbital}\rangle$ est associé à une fonction d'onde décrivant le mouvement relatif des quarks u et \bar{d} . De même

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \otimes |s = 0\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle \quad (1.2)$$

Les baryons sont des systèmes à trois quarks et donc plus compliqués. Il existe cependant trois baryons dont la structure est simple, ce sont le Δ^- ($S = 0, Q = -1, J = 3/2$), le Δ^{++} ($S = 0, Q = 2, J = 3/2$) et le Ω^- ($S = -3, Q = -1, J = 3/2$). Ces trois baryons sont en effet composés chacun de trois quarks identiques. Considérons par exemple le Ω^- . Il est composé de trois quarks s . Par ailleurs, c'est une particule de spin $3/2$, et donc il existe un état particulier où les spins des 3 quarks sont alignés, dans l'état $J_Z = 3/2$ par exemple. Dans cet état, on peut donc écrire:

$$|\Omega^-(J_Z = 3/2)\rangle = |sss\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle \quad (1.3)$$

L'état $|\text{orbital}\rangle$ est associé à une fonction d'onde $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, solution d'une équation d'onde. Or de façon générale, la solution d'énergie minimale d'une telle équation ne s'annule pas; elle ne peut donc être antisymétrique. Il en résulte que l'état du Ω^- ci-dessus ne peut être antisymétrique dans l'échange de deux quelconques des quarks, ce qui constitue une violation inacceptable du principe de Pauli.

On sauve la situation en attribuant aux quarks un nouveau nombre quantique, la *couleur*, chaque quark pouvant alors exister dans trois états de couleurs distinctes, $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$. Il convient dans ces conditions d'ajouter un quatrième facteur dans l'écriture des états hadroniques en terme de quarks:

$$|\text{hadron}\rangle = |\text{couleur}\rangle \otimes |\text{savoir}\rangle \otimes |\text{spin}\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle \quad (1.4)$$

Il est alors facile de construire un état anti-symétrique pour le Ω^- . Il suffit pour cela de choisir $|\text{orbital}\rangle$ symétrique et $|\text{couleur}\rangle$ antisymétrique, c'est-à-dire:

$$|\text{couleur}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\{|abc\rangle + |bca\rangle + |cab\rangle - |cba\rangle - |acb\rangle - |bac\rangle\} \quad (1.5)$$

Nous voyons ainsi que l'existence du nombre quantique de couleur est fortement suggéré par l'existence d'états qui sans lui seraient incompatibles avec le principe de Pauli. Cela étant, en introduisant ce nouveau degré de liberté de couleur, nous avons multiplié le nombre d'"espèces" de quarks: chaque espèce devient dégénérée trois fois, chaque quark pouvant se trouver dans l'un quelconque des trois états de couleurs $|a\rangle$, $|b\rangle$ ou $|c\rangle$. On peut interpréter cette nouvelle dégénérescence des états de quarks comme traduisant une symétrie, la *symétrie de couleur*, de la même façon que la symétrie d'isospin traduit la (quasi) dégénérescence des deux états du nucléon, i.e. le neutron et le proton. Rappelons que ces deux états du nucléon peuvent être représentés par des vecteurs à deux composantes,

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

On passe de l'état $|n\rangle$ (resp. $|p\rangle$) à l'état $|p\rangle$ (resp. $|n\rangle$) par l'action de l'opérateur t_+ (resp. t_-) :

$$t_+|n\rangle = |p\rangle \quad t_-|p\rangle = |n\rangle \quad (1.7)$$

et t_+ et t_- peuvent être représentées par les matrices 2×2

$$t_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

De façon plus générale, on peut considérer les états obtenus à partir de $|n\rangle$ ou $|p\rangle$ par une rotation d'isospin représentée par l'opérateur:

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}/2} \quad (1.9)$$

où $\hat{\alpha}$ spécifie la direction de l'axe de rotation, et α est l'angle de rotation. Les trois matrices τ_x , τ_y et τ_z sont les trois matrices de Pauli. Elles satisfont les relations de commutation du groupe $SU(2)$

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k \quad (1.10)$$

dont elles constituent un ensemble de générateurs. L'invariance des interactions fortes dans les transformations d'isospin peut s'exprimer par la relation:

$$[H, T] = 0 \quad (1.11)$$

où T est un générateur quelconque des rotations d'isospin et H est l'hamiltonien des interactions fortes.

La même structure peut, dans un premier temps, être appliquée à la symétrie de couleur. On peut représenter les trois états de couleur $|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$ par trois vecteurs dans un espace de dimension 3, l'espace de couleur:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |c\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Les transformations unitaires correspondant à des "rotations" de couleurs sont alors représentées par des opérateurs de la forme:

$$U = \exp \left\{ i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2} \right\} \quad (1.13)$$

où $\vec{\alpha}$ est un vecteur de dimension 8, et les 8 matrices de Gell-Mann λ_i sont des matrices 3×3 , hermitiques et de trace nulle qui jouent un rôle analogue à celui des matrices de Pauli dans le cas de l'isospin. Ces matrices satisfont les règles de commutation

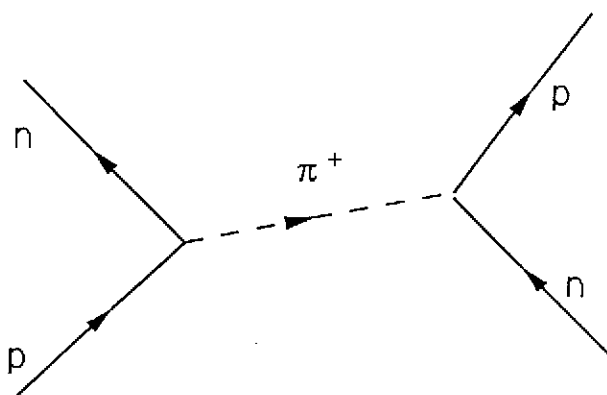
$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k \quad (1.14)$$

caractéristiques du groupe SU(3).

Nous admettrons que la symétrie de couleur ainsi définie est une symétrie de l'interaction forte, c'est-à-dire, en termes formels, que l'hamiltonien des interactions fortes commute avec toutes les rotations dans l'espace de couleur (cf. Eq.(1.11) pour l'isospin). Il en résulte que les états propres peuvent être classés suivant les représentations du groupe SU(3) de couleur. En fait, dans le cas du Ω^- , nous avons vu que l'état de couleur devait être choisi antisymétrique. Un tel état est *invariant* dans toutes les rotations de couleur. C'est l'analogie d'un état à couches complètes dont le moment angulaire total est nul, et qui est donc invariant dans toutes les rotations d'espace. Nous admettrons que les seuls états réalisés physiquement ont cette propriété d'être invariant dans les rotations de couleur. On les appelle *neutres* ou encore *singulets de couleur*. Sans cette restriction, l'introduction du nombre quantique de couleur conduirait à une multiplicité d'états qui n'est pas observée dans la nature. Cette restriction supprime en particulier la possibilité de considérer comme états physiques possibles des états *colorés*, notamment des quarks libres.

I-3. L'échange de gluons

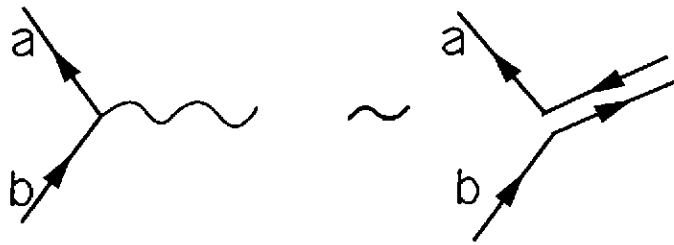
La notion de symétrie de couleur permet de comprendre la structure des états hadroniques en terme de quarks, et de lever la difficulté associée à la violation apparente du principe de Pauli dans certains états hadroniques. Voyons maintenant comment cette symétrie peut nous permettre de mieux comprendre comment "fonctionne" l'interaction entre quarks. Pour cela, nous allons nous appuyer sur une analogie, imparfaite comme beaucoup d'analogies, mais utile, qui est celle de l'échange de mésons π entre deux nucléons. Un exemple d'un tel échange est représenté par le diagramme suivant:



À l'extrémité gauche du vertex, un proton est transformé en un neutron; à cet endroit agit un opérateur $t_- = |n\rangle\langle p| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur l'état du nucléon. De même, à l'extrémité gauche du vertex agit une matrice $t_+ = |p\rangle\langle n| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui change un neutron en un proton. On peut aussi envisager une interaction dans laquelle l'état de charge des nucléons ne change pas. Une telle interaction fera intervenir à chaque extrémité du vertex une matrice $t_z =$

$|p\rangle\langle p| - |n\rangle\langle n| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ces trois matrices t_+ , t_- , t_z sont associées aux trois "échanges" possibles, de π_+ , π_- et π_0 . Notons que la structure en isospin de l'interaction entre deux nucléons i et j résultant de l'échange d'un pion, c'est-à-dire ignorant la dépendance spatio-temporelle liée à la propagation du pion, est de la forme $V = c \vec{t}_i \cdot \vec{t}_j$. Le produit scalaire traduit l'invariance de l'interaction dans les rotations d'isospin.

Nous pouvons généraliser ces considérations au cas de la symétrie de couleur. De même que l'interaction entre deux particules d'isospin 1/2 est réalisée par l'échange de pions étroitement associés aux générateurs des rotations d'isospin, de même ici nous allons considérer l'interaction entre deux quarks qui résulte de l'échange d'un gluon, une particule que l'on associe à un générateur des rotations de couleur. Il y a huit tels générateurs et par conséquent huit gluons distincts. Pour construire les générateurs associés, on peut, comme pour l'isospin, procéder à un examen des processus physiques mettant en jeu le changement de l'état de couleur d'un quark lors de son interaction avec un gluon. Par exemple le vertex suivant:



met en jeu le gluon $a\bar{b}$ associé à la matrice

$$|a\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

On peut construire ainsi les huit matrices indépendantes $a\bar{b}$, $b\bar{a}$, $c\bar{a}$, $a\bar{c}$, $c\bar{b}$, $b\bar{c}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{b} - c\bar{c})$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c})$ correspondant aux générateurs de SU(3). En fait ces huit matrices sont des combinaisons linéaires simples des matrices de Gell-Mann mentionnées plus haut. Notons que la combinaison $\frac{1}{\sqrt{3}}(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c})$ est invariante dans toutes les rotations de couleur et n'intervient pas dans notre discussion.

Nous terminerons cette section en montrant que l'interaction due à l'échange d'un gluon est attractive dans les états singulets de couleur. Ce résultat ne fait appel qu'à la structure de l'interaction dans l'espace de couleur. Notons tout d'abord que le potentiel d'interaction entre deux quarks i et j qui résulte de l'échange d'un gluon a une forme analogue au potentiel d'interaction électromagnétique, le produit des charges étant remplacé par

$$V_{ij} = \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \sum_{a=1}^8 \lambda_i^a \lambda_j^a \quad (1.16)$$

où les λ_i^a sont les matrices de Gell-Mann. Si l'on a N quarks présents dans le système, leur énergie d'interaction totale est la valeur moyenne de l'opérateur symétrique:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N V_{ij}. \quad (1.17)$$

Nous nous proposons de montrer que pour un baryon ($N = 3$), on a $\langle V \rangle = -8$ alors que pour un méson ($N = 2$) $\langle V \rangle = -16/3$. Pour cela définissons $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\lambda}_i$. \vec{L} peut être considéré comme le générateur des rotations de couleur du système de N quarks. Appelons $|v\rangle$ l'état de ce système. Par hypothèse $|\psi\rangle$ est un singulet de couleur, donc $\vec{L}^2|\psi\rangle = 0$. Or $\vec{L}^2 = \sum_i \vec{\lambda}_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j$, et par conséquent

$$\langle \psi | \sum_{i \neq j} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j | \psi \rangle = -\langle \psi | \sum_i \vec{\lambda}_i^2 | \psi \rangle. \quad (1.18)$$

Les matrices $\vec{\lambda}_i$ jouissent de propriétés analogues à celles des matrices de Pauli $\vec{\sigma}$. On sait en particulier que $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3$. On a de même $\sum_{a=1}^8 (\lambda^a)^2 = 16/3$. Utilisant ce résultat, on trouve, à partir de l'équation (1.18),

$$\langle \psi | \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j | \psi \rangle = -16N/3. \quad (1.19)$$

d'où le résultat annoncé. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que dans tout état autre que l'état singulet de couleur, l'interaction est moins attractive, voire répulsive.

Ainsi l'échange de gluons, l'interaction qui résulte "naturellement" de l'hypothèse de la symétrie de couleur, "favorise" les états singulets. Elle n'explique pas cependant pourquoi seuls ces états sont observés. Pour comprendre ce phénomène, et aussi la nature des gluons que nous avons introduits sans justification ici, il nous faut considérer la symétrie de couleur comme une "symétrie de jauge", ce à quoi nous nous employons dans la section suivante.

II. INVARIANCE DE JAUGE

II-1. Equations de Maxwell. Potentiels vecteurs et invariance de jauge

Les équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

relient les champs électriques \vec{E} , et magnétique \vec{B} , aux sources qui les produisent, la densité de charge ρ et le courant \vec{j} . Il est commode d'exprimer les grandeurs physiques \vec{E} et \vec{B} en termes de potentiels vecteurs $\vec{A}_\mu(x)$ tels que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.3)$$

On remarque que les charges électriques et magnétiques ne dépendent que des dérivées des potentiels $A_\mu(x)$, qui ne sont donc pas uniques. En particulier, dans le changement

$$A_0 \longrightarrow A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad (2.4)$$

ou en notation quadridimensionnelle $A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi$, \vec{E} et \vec{B} restent invariants:

$$\begin{aligned} \delta \vec{E} &= \vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \chi = 0, \\ \delta \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De telles transformations des potentiels vecteurs sont appelées *transformations de jauge*. Pour résoudre les équations de Maxwell en termes des potentiels vecteurs, il faut lever l'arbitraire, c'est-à-dire *fixer la jauge* en imposant une condition particulière aux potentiels vecteurs, par exemple $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb).

Les équations de l'électrodynamique peuvent être écrites de façon plus compacte en utilisant des notations quadridimensionnelles. On peut regrouper le champ électrique et le champ magnétique en un tenseur

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (2.6)$$

qui est antisymétrique et invariant de jauge. On a $E^i = F^{i0}$, $B^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$. La densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (2.7)$$

permet de retrouver les équations de Maxwell en appliquant le principe variationnel habituel $\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0$.

On remarque que l'action $\int d^4x \mathcal{L}(x)$ est invariante de jauge si le courant j^μ est conservé, i.e. si $\partial_\mu j^\mu = 0$. En effet, dans une transformation de jauge, le dernier terme de l'action, $\int j^\mu A_\mu d^4x$ est modifié par la quantité $\int d^4x j^\mu \partial_\mu \chi = -\int d^4x (\partial_\mu j^\mu) \chi$ qui est nul si $\partial_\mu j^\mu = 0$. L'équation $\partial_\mu j^\mu = 0$, encore appelée équation de continuité, reflète la conservation de la charge électrique. On voit apparaître ici une relation entre une symétrie, la symétrie de jauge des équations de Maxwell, et une grandeur conservée, la charge électrique. Cette remarque sera exploitée ultérieurement. Notons que la conservation de la charge est implicite dans l'écriture des équations de Maxwell en termes de \vec{E} et \vec{B} ; c'est même l'origine de l'introduction par Maxwell du terme $\partial \vec{E} / \partial t$ dans la dernière équation donnant $\vec{\nabla} \times \vec{B}$. De fait, prenant la divergence de cette dernière équation on obtient:

$$\begin{aligned} 0 = \text{div} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \text{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} \\ &= \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

II-2. Invariance de jauge et mécanique quantique.

L'Hamiltonien d'une particule classique dans un champ électromagnétique est

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e A_0 . \quad (2.8)$$

Il nous sera utile un peu plus loin de nous souvenir de l'origine de ce résultat. Rappelons donc que la fonction de Lagrange pour une particule dans un champ électromagnétique décrit par le potentiel vecteur $A_\mu(x)$ est

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 + e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A} - e A_0 , \quad (2.9)$$

où le terme d'interaction est identique au terme $j^\mu A_\mu$ dans (2.7). L'impulsion conjuguée à la coordonnée \vec{q} , que nous appellerons *impulsion canonique*, est

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = m\dot{\vec{q}} + e\vec{A} . \quad (2.10)$$

On en déduit la fonction de Hamilton, $H = \vec{p}\dot{\vec{q}} - L$, et l'expression (2.8). Il est également instructif d'écrire explicitement l'équation de mouvement:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} , \quad (2.11)$$

ce qui donne

$$m\ddot{\vec{q}} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -e \frac{\partial A_0}{\partial \vec{q}} + e\dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{q}} + e\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) , \quad (2.12)$$

soit

$$m\ddot{\vec{q}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} , \quad (2.13)$$

où l'on a utilisé les expressions (2.3) de \vec{E} et \vec{B} et le fait que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{\vec{q}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{q}}$.

Comme il se doit, les équations de mouvement ne dépendent que des champs physiques \vec{E} et \vec{B} et sont donc indépendantes du choix de jauge fait pour les potentiels vecteurs.

Cela dit, revenons maintenant à l'Hamiltonien (2.8). Suivant la procédure habituelle, on obtient l'Hamiltonien quantique en remplaçant l'impulsion canonique \vec{p} par l'opérateur $-i\vec{\nabla}$. L'équation de Schrödinger pour une particule quantique dans un champ électromagnétique s'écrit donc:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A} \right)^2 + e A_0 \right] \psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) . \quad (2.14)$$

Effectuons une transformation de jauge, $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $A_0 \longrightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ et appelons $\psi'(x, t)$ la solution de l'équation contenant les nouveaux potentiels vecteurs A'_0 et \vec{A}' , i.e.

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\vec{\nabla}' - e\vec{A}' \right)^2 + e A'_0 \right] \psi'(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi'(x, t) . \quad (2.15)$$

Il est facile de vérifier que la relation entre $\psi(x, t)$ et $\psi'(x, t)$ est

$$\psi'(x, t) = e^{ie\chi(x, t)}\psi(x, t) . \quad (2.16)$$

Ainsi, a une transformation de jauge, c'est-à-dire à un changement des potentiels vecteurs, correspond un changement de phase de la fonction d'onde, la nouvelle phase étant égale à la fonction scalaire qui intervient dans la transformation des potentiels vecteurs.

Dans un tel changement de phase, la densité de particules, $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, n'est pas modifiée. Par contre, si l'on adopte la définition naive du courant

$$\vec{j} = \frac{1}{2im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) , \quad (2.17)$$

on constate que le courant n'est pas invariant. En effet

$$\vec{j}' = \vec{j} + \frac{e}{m}(\vec{\nabla}\chi)|\psi|^2 , \quad (2.18)$$

où \vec{j}' est le courant (2.17) calculé avec la fonction d'onde ψ' . En fait, \vec{j} donné par (2.17) n'est pas l'opérateur courant électrique, car $\frac{\vec{\nabla}}{m}$ n'est pas l'opérateur vitesse. Pour comprendre ce qui se passe, il est bon de revenir à la discussion du début de cette section. Nous avons introduit une impulsion "canonique" \vec{p} , plus tard reliée à l'opérateur $-i\vec{\nabla}$, et qui est reliée à la vitesse par la relation (2.10). La quantité $m\vec{q} = \vec{p} - e\vec{A}$ est quelquefois appelée *impulsion cinétique*; c'est la *quantité de mouvement*, dont la dérivée temporelle égale la force appliquée (voir l'équation de mouvement (2.12)). Le courant de particules est bien entendu relié à la vitesse et sa définition quantique correcte est donc:

$$\vec{j} = \frac{1}{2im} \left\{ \psi^*(\vec{\nabla} - ie\vec{A})\psi - \psi(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\psi^* \right\} . \quad (2.19)$$

La combinaison $\vec{\nabla} - ie\vec{A}$ joue un très grand rôle dans les théories de jauge. Elle porte le nom de *dérivée covariante* et on la désignera par le symbole $\vec{D} \equiv \vec{\nabla} - ie\vec{A}$. (Plus généralement $D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$). On voit son rôle dans la définition du courant. Pour connaître la vitesse d'une particule au point x , il faut connaître la phase de la fonction d'onde en ce point. Cette phase dépend du champ de jauge $A_\mu(x)$ et souffre donc de l'ambiguïté qui résulte de l'arbitraire dans le choix de $A_\mu(x)$. Cependant la dérivée covariante permet de donner de la vitesse une définition indépendante de ce choix.

La distinction entre impulsion canonique et impulsion cinétique et l'association de l'opérateur $-i\vec{\nabla}$ à l'impulsion canonique peuvent paraître artificielles. On peut se convaincre des rôles physiques différents de ces deux grandeurs à l'aide de l'exemple suivant dû à Feynman. Considérons un long solénoïde parcouru par un courant dont on peut varier l'intensité. On peut ainsi contrôler le flux de \vec{B} à l'intérieur du solénoïde, i.e. l'intensité du potentiel vecteur à l'extérieur ($\int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$). Une variation temporelle de \vec{A} engendre une variation du champ électrique $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$, et donc de la force agissant sur une charge test e placée à l'extérieur du solénoïde. Faisons donc passer rapidement, durant

un temps Δt , le potentiel vecteur de la valeur 0 à la valeur \vec{A} . La variation de la quantité de mouvement de la charge test est alors:

$$m \Delta \vec{v} = \int_{\Delta t} e \vec{E} dt = -e \vec{A} \quad (2.20)$$

Cependant, durant Δt , $\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}$ ne change pas, la variation de la quantité de mouvement compensant celle du potentiel vecteur. En mécanique quantique, une variation brusque du potentiel n'entraîne pas de changement immédiat de la fonction d'onde, ni de son gradient. Il est donc bien naturel que ce soit l'impulsion canonique \vec{p} qui soit associée à l'opérateur gradient $-i\vec{\nabla}$, alors que la vitesse elle est donnée par $\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}$ et change proportionnellement à la force appliquée pendant le temps Δt .

II-3. Invariance de jauge et interaction électromagnétique

Nous avons jusqu'à présent étudié certaines conséquences de l'utilisation de potentiels vecteurs pour décrire l'interaction d'une particule classique ou quantique avec un champ électromagnétique. Nous avons en particulier remarqué que, comme il se doit, les équations de mouvement sont indépendantes du choix de jauge; nous avons vu qu'invariance de jauge et conservation de la charge étaient reliées, qu'un changement de jauge entraînait un changement de phase des fonctions d'onde, que cela nécessitait l'utilisation d'une dérivée covariante pour calculer certaines grandeurs physiques comme le courant. Nous allons dans cette section changer de point de vue et montrer comment, en imposant à une équation de mouvement d'être invariante de jauge, on fixe l'interaction entre le champ de jauge et les particules.

L'équation de Schrödinger pour une particule libre

$$\frac{1}{2m}(-\nabla^2)\psi(x, t) = i\partial_t\psi(x, t), \quad (2.21)$$

est invariante dans un changement de phase globale, $\psi(x, t) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x, t)$ où α est une constante. Par contre un changement de phase locale, où $\alpha = \alpha(x, t)$, ne laisse pas l'équation invariante, à cause des opérateurs de dérivation qu'elle contient. Mais on sait maintenant comment rendre l'équation invariante: il suffit pour cela d'introduire un champ de jauge $A_\mu(x)$ dont les variations $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha$ permettent de compenser dans les dérivées covariantes les changements de phase. Autrement dit, il est possible de choisir en chaque point la phase des fonctions d'onde, moyennant l'introduction de champs de jauge et de dérivées covariantes correspondantes. L'équation de Schrödinger invariante de jauge est donc:

$$\frac{1}{2m} \left[-(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 \right] \psi(x, t) = (\partial_t + ieA_0)\psi(x, t). \quad (2.22)$$

Nous retrouvons bien entendu l'équation de Schrödinger (2.14) pour une particule dans un champ électromagnétique. Nous voyons également que la forme de l'interaction entre le champ de jauge et la particule chargée décrite par la fonction d'onde ψ est entièrement déterminée par l'invariance de jauge.

Ce que nous venons de faire pour l'équation de Schrödinger peut bien entendu être répété pour toute autre équation décrivant le mouvement d'une particule, comme l'équation de Dirac par exemple. Pour rendre cette équation de Dirac, $(i\partial - m)\psi = 0$, indépendante du choix de phase locale, il suffit de remplacer ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, et le couplage entre le champ de jauge A_μ et le courant $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ est déterminé.

II-4. Théorie de jauge non abélienne

Nous allons maintenant généraliser les considérations précédentes à des changements de "phase" plus complexes. Considérons pour cela une particule comme le nucléon, qui possède un degré de liberté associé à une symétrie "interne", l'isospin. L'état du nucléon peut être représenté par une "fonction d'onde" à deux composantes, i.e. un isospineur de la forme

$$\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.23)$$

Comme nous l'avons vu précédemment les rotations d'isospin, réalisées par les opérateurs de la forme

$$U = \exp \left\{ i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right\} , \quad (2.24)$$

où les matrices $\vec{\tau}$ sont les trois matrices de Pauli, laissent l'Hamiltonien des interactions fortes invariant. Dans (2.24) les "paramètres de la rotation", $\vec{\alpha}$, sont des constantes, i.e. indépendantes de x et t .

Supposons maintenant que l'on veuille choisir en chaque point de l'espace-temps l'orientation des axes d'isospin. Alors la notation $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour les spineurs représentant respectivement l'état proton et l'état neutron devient ambiguë puisqu'elle se réfère à un système d'axes qui change de place en place. Pour avoir une définition cohérente de l'état proton par exemple, il faut garder l'information qui permet de relier les repères en différents points de l'espace-temps, c'est-à-dire les "angles de rotation" $\vec{\alpha}(x, t)$. C'est cette information qui est contenue dans les champs de jauge qu'il faut introduire pour rendre la théorie invariante dans les changements de repère d'isospin locaux. En particulier ces champs de jauge interviennent dans la construction de la dérivée covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu , \quad (2.25)$$

où $A_\mu(x)$ est une matrice 2×2 agissant sur les isospineurs, de la forme $A_\mu(x) = A_\mu^i(x)\tau_i$.

Dans cet exemple, les transformations de jauge correspondent à des rotations dans l'espace d'isospin. De telles opérations ne commutent pas, d'où la dénomination de théorie de jauge *non abélienne*. En fait, la construction d'une théorie de jauge mettant en jeu la symétrie d'isospin, ce qui était la motivation originelle de Yang et Mills, s'est avérée présenter peu d'intérêt physique: il n'existe pas dans la nature de particule de masse nulle que l'on puisse associer au champ de jauge correspondant. Par contre la construction mathématique demeure et est à la base de la chromodynamique quantique.

Dans le cas de la chromodynamique, les transformations locales sont des rotations dans l'espace de couleur. Les champs de jauge sont donc des matrices 3×3 de la forme $A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \lambda_a$ où les 8 matrices λ_a sont les matrices de Gell-Mann. Dans une transformation de jauge, les "fonctions d'onde" des quarks, que l'on peut représenter par des vecteurs ψ à 3 composantes dans l'espace de couleur, se transforment en $U\psi$ où $U = \exp(-ig\omega)$ avec $\omega \equiv \sum_{a=1}^8 \omega_a \frac{\lambda_a}{2}$, les paramètres de la rotation de couleur, i.e. les ω_a , étant des fonctions de x et t , i.e. $\omega_a = \omega_a(x, t)$ et g dénote la charge de couleur, ou encore la constante de couplage. Il est facile de vérifier que dans la même transformation, $D_\mu\psi$ se change en $UD_\mu\psi$ (avec $D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu$) et A_μ devient $UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}U(\partial_\mu U^{-1})$. En particulier, dans une transformation infinitésimale, $\delta A_\mu = \partial_\mu\omega + ig[A_\mu, \omega] = [D_\mu, \omega]$. Notons que le champ de jauge subit une transformation, même si ω est indépendant de x et de t . Ceci traduit le fait que les gluons, quanta des champs de jauge, portent une charge de couleur. Les quanta du champ électromagnétique, i.e. les photons, ne portent pas de charge électrique et les potentiels vecteurs correspondants sont invariants dans des transformations qui affectent la phase globale des fonctions d'onde.

Le tenseur $F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$ a une expression plus compliquée qu'en électrodynamique:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.26)$$

En particulier, il n'est pas invariant de jauge. Dans une transformation de jauge, $F_{\mu\nu} \rightarrow UF_{\mu\nu}U^{-1}$, soit pour une transformation infinitésimale, $\delta F_{\mu\nu} = ig[F_{\mu\nu}, \omega]$. Ainsi $F_{\mu\nu}$ se transforme comme un "vecteur", et le "produit scalaire" $\text{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ qui intervient dans le lagrangien est, lui, invariant.

Le lagrangien qui décrit l'interaction entre quarks et champs de jauge est de la forme:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\not{D}\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Nous pouvons lire sur cette expression les différents termes d'interaction. Tout d'abord le terme d'interaction entre les quarks et les champs de jauge, de la forme $-g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a \lambda_a \psi$, une structure analogue à celle rencontrée en électrodynamique avec ici en plus la matrice λ_a qui opère les changements de couleur des quarks lors de l'interaction. Le terme $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ contient des termes en A^2 , A^3 et A^4 . Le terme quadratique n'est rien d'autre que l'énergie cinétique des modes normaux, ou gluons, du champ de jauge. Les termes cubique et quartique décrivent les interactions que peuvent subir ces gluons. Notons que cette séparation des différents termes n'a de sens que dans le cadre de la théorie des perturbations où la constante de couplage g est petite.

III. CHARGE EFFECTIVE ET ECHELLE D'ENERGIE

Dans cette section nous introduisons la notion de charge effective dépendant de l'échelle d'énergie ou de distance à laquelle on la mesure. Cette discussion nous amènera progressivement au concept de "liberté asymptotique".

III-1. Effet d'écran dans un diélectrique

L'image simple que l'on peut donner d'un milieu diélectrique est celle d'une collection de petits dipôles électriques permanents qui, en l'absence de champ électrique extérieur sont orientés de façon aléatoire. Il en résulte que la densité de moment dipolaire, mesurée par le vecteur polarisation \vec{P} , est nulle, i.e. $\vec{P} = 0$. Si l'on place dans ce milieu une charge test positive de densité ρ_0 , on provoque un alignement des dipôles dans le champ électrique créé par la charge test. Il en résulte un excès de charges négatives dans le voisinage de la charge qui tend à "neutraliser" celle-ci. La densité de ces charges de polarisation, ρ_{pol} , est relié à \vec{P} par $\rho_{\text{pol}} = -\text{div}\vec{P}$. La divergence du champ électrique total au voisinage de la charge test est relié à la densité de charge totale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 - \text{div}\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (3.1)$$

Si l'on suppose que \vec{P} varie linéairement avec \vec{E} , $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$, alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0(1 + \chi)} \equiv \frac{\rho_0}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

où la constante diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$ est en général plus grande que ε_0 car $\chi > 0$ en général (les dipôles s'alignent dans le sens de \vec{E}). Il est parfois commode d'introduire un champ de "déplacement" $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Alors $\text{div}\vec{D} = \rho_0$, i.e. \vec{D} peut être calculé à partir de la densité de charge extérieure ρ_0 uniquement.

Le traitement que nous venons de donner est un traitement *macroscopique* où l'on suppose que les phénomènes observés mettent en jeu des échelles de longueur grandes devant la taille des dipôles permanents. Dans un traitement plus *microscopique*, on trouve que la "constante" diélectrique est une fonction non locale $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(\vec{r}, \vec{r}')$ de telle sorte que l'équation $\text{div}\vec{D} = \rho_0$ s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \int d^3 r' \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') = \rho_0(\vec{r}), \quad (3.2\text{bis})$$

Il est commode d'introduire la transformée de Fourier de $\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}') = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \varepsilon(\vec{q}). \quad (3.3)$$

Considérons maintenant l'interaction de deux charges placées en 2 points \vec{r}_1 et \vec{r}_2 et décrites par les densités de charge $\rho_0(\vec{r}_1)$ et $\rho_0(\vec{r}_2)$. En l'absence du milieu diélectrique, l'interaction est le potentiel de Coulomb

$$U_0(\vec{R}) = \int d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 \frac{\rho_0(\vec{r}_1) \rho_0(\vec{r}_2)}{\varepsilon_0 R}, \quad (3.4)$$

où $\vec{R} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Prenant la transformée de Fourier de cette expression, on obtient

$$U_0(\vec{q}) = \frac{\rho_0^2(\vec{q})}{\varepsilon_0 \vec{q}^2} . \quad (3.5)$$

En présence du milieu diélectrique, ε_0 est chargée en $\varepsilon(\vec{q})$, de telle sorte que le potentiel d'interaction devient

$$U(\vec{q}) = \frac{\rho_0^2(\vec{q})}{\varepsilon(q) \vec{q}^2} . \quad (3.6)$$

Si $\varepsilon(q)$ dépend faiblement de q , on peut considérer que l'on a encore un potentiel coulombien avec une charge effective

$$\frac{\rho_0^2(q)}{\varepsilon(q)} = \rho^2(q) \equiv e^2(q) . \quad (3.7)$$

III-2. Charge effective en électrodynamique quantique.

En électrodynamique, les paires e^+e^- virtuelles jouent un rôle similaire à celui des dipôles du milieu diélectrique. Ces paires virtuelles modifient la charge électrique effective d'une particule comme l'électron par exemple. Le calcul détaillé de $e^2(q)$ peut se faire à l'aide de la théorie de perturbation. On trouve, après avoir éliminé les divergences provenant des modes de très courte longueur d'onde,

$$\alpha(q^2) = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + \dots \right) \quad |q^2| \ll m^2 , \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha(q^2) &= \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|q|^2}{m^2} \right) \\ &\approx \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|q|^2}{m^2}} \quad |q^2| \gg m^2 , \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$ est la constante de structure fine habituelle ($\alpha = 1/137$). Le vecteur d'onde q est ici le quadrivecteur du photon virtuel échangé dans l'interaction. Si l'on se limite à l'interaction coulombienne $q_0 = 0$ et $q^2 = -\vec{q}^2$.

La première équation montre qu'à des distances grandes devant la longueur d'onde Compton de l'électron, i.e. $\vec{q}^2 \ll m^2$, la charge tend vers une constante. Cette propriété peut être utilisée pour mesurer la constante α et c'est ainsi que l'on obtient la valeur $\alpha = 1/137$. Par contre à des distances de l'ordre de, ou inférieure à, la longueur d'onde Compton de l'électron, i.e. pour $\vec{q}^2 \gg m^2$, la charge effective augmente comme le montre la deuxième équation.

Pour interpréter plus facilement cette deuxième équation, posons $|\vec{q}| = 1/R$, et $m = 1/a$ où a est la longueur d'onde Compton de l'électron. On peut alors écrire

$$e^2(R) = \frac{e_0^2}{1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{R^2}{a^2}} . \quad (3.10)$$

On peut regarder $e(R)$ comme la charge contenue approximativement dans une sphère de rayon R entourant la "charge nue" e_0 . Dans ce régime "logarithmique" l'approximation

permettant d'écrire la relation (3.10) a un sens tant que $\frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{R^2}{a^2} \lesssim 1$. La variation de la charge effective avec R possède une propriété remarquable. Par définition, la charge e_0 correspond à la charge contenue dans une sphère ayant pour rayon la longueur d'onde Compton de l'électron. On peut choisir une autre configuration de référence pour étalonner les charges, par exemple la charge e_1 , contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon $R_1 < a$. Il est facile de vérifier que

$$e^2(R) = \frac{e_1^2}{1 + \frac{e_1^2}{12\pi^2} \ln \frac{R^2}{R_1^2}}, \quad (3.11)$$

une relation qui a la même structure que (3.10). Notons également que $e^2(R) > e^2(R')$ si $R < R'$, une propriété caractéristique de l'effet d'écran en électrodynamique: la densité de charges de polarisation qui résultent de la "polarisation du vide" est de signe opposé à celui de la charge nue.

Cet effet de l'augmentation de la charge électrique effective à courte distance est faible mais néanmoins mesurable. Il conduit en particulier à une correction à l'espacement des niveaux $2S1/2 - 2P1/2$ de l'atome d'hydrogène. Par ailleurs l'analyse des récentes expériences du L.E.P. suggère que pour $Q^2 \sim 100 \text{ Gev}^2$, $\alpha \sim 1/128$ et non plus $1/137$ (voir le cours de G. Smadja).

III-3. Liberté asymptotique de la chromodynamique

En chromodynamique, la polarisation du vide fait intervenir deux effets qui ont tendance à se compenser, mettant en jeu respectivement les quarks et les gluons. Les quarks donnent une contribution à la charge effective qui peut s'interpréter, comme dans le cas de l'électrodynamique, comme un effet d'écran. Par contre les gluons donnent une contribution de signe opposé. L'interprétation physique en termes simples que l'on pourrait donner de ce phénomène est compliquée par le fait que cette interprétation dépend fortement de la façon dont on mène le calcul, qui repose en particulier sur un choix de jauge (le résultat du calcul est bien entendu indépendant de ce choix). On peut néanmoins mentionner l'interprétation de ce résultat en termes d'effets magnétiques. Quoi qu'il en soit, le résultat du calcul de la constante de couplage conduit à:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2N_f) \log \frac{Q^2}{\mu^2}}, \quad (3.12)$$

où N_f est le nombre de saveurs de quarks. Le facteur $-2N_f$ au dénominateur est la contribution des quarks alors que le 33 provient des gluons, et comme annoncé plus haut, il a le signe opposé. On voit que les gluons l'emportent, ce qui a pour conséquence de changer le sens de variation de α avec Q^2 . Ainsi $\alpha(Q^2) \rightarrow 0$ lorsque $Q^2 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que l'interaction entre deux particules devient de plus en plus petite à mesure que leur distance décroît.

Notons également que contrairement à ce qui pouvait être fait en électrodynamique, nous ne pouvons calculer en chromodynamique que dans le régime logarithmique. En fait

$\alpha(Q^2)$ diverge si Q^2 devient trop petit et le calcul perturbatif cesse d'avoir un sens. Il nous faut donc "mesurer" α par rapport à un point de référence arbitrairement choisi dans ce régime. Telle que la formule (3.12) est écrite, ce point de référence est $Q^2 = \mu^2$. En fait, dans la pratique, on préfère introduire le paramètre Λ tel que:

$$\alpha(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \quad (3.13)$$

ce qui permet d'éliminer μ^2 :

$$\alpha(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}. \quad (3.14)$$

Notons que Λ est l'échelle à laquelle $\alpha(Q^2 = \Lambda^2)$ diverge, i.e. en terme de μ , telle que

$$1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2N_f)\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0. \quad (3.15)$$

Les variations de α_{QCD} avec Q^2 se manifestent en particulier dans les corrections au modèle naïf des partons (violation des lois d'échelles) observées dans la diffusion d'électrons (voir le cours de G. Smadja).

IV. QUELQUES PROPRIETES "NON PERTURBATIVES"

Dans cette dernière partie du cours nous allons présenter quelques remarques concernant des propriétés de la chromodynamique qui ne peuvent être étudiées à l'aide de la théorie des perturbations et qui, d'une façon ou d'une autre, font intervenir le *vide*. Ce *vide* est le *milieu* dans lequel les particules se déplacent, et beaucoup des propriétés de ces particules ne peuvent être comprises sans faire référence à celles de ce milieu. Ce milieu a des propriétés physiques que l'on peut en principe modifier expérimentalement. Notons que la chromodynamique donne au *vide* une structure beaucoup plus riche que l'électrodynamique. Dans le cadre de l'électrodynamique on peut concevoir le *vide* comme l'état fondamental d'une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants. Le *vide* n'est "occupé" que par les fluctuations indépendantes du champ électromagnétique. L'existence d'électrons et de positons (et d'autres particules chargées) complique un peu les choses, mais ces "complications" peuvent être calculées perturbativement. Dans la chromodynamique rien n'est aussi simple car, comme nous l'avons vu, les gluons interagissent fortement et ces interactions modifient profondément la structure du *vide*.

IV-1. Confinement (qualitatif)

Considérons, comme dans la section 3.1 un milieu diélectrique, mais dont la constante diélectrique ϵ , contrairement à ce qui arrive dans les milieux usuels, est plus petite que dans le *vide*. Nous poserons dans cette section $\epsilon_0 = 1$, et donc $\epsilon < 1$. Nous avons vu que $\epsilon > 1$ traduit l'effet d'écran. Lorsque $\epsilon < 1$, on a l'effet inverse, qui n'est pas sans

rappeler l'effet responsable de la liberté asymptotique. Nous allons assimiler le vide de la chromodynamique à un milieu où $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cela dit, imaginons une cavité sphérique (de rayon R) où $\varepsilon = 1$, entourée du vide où $\varepsilon \rightarrow 0$, et plaçons une charge q au centre de cette cavité. L'énergie électrostatique de cette configuration est donnée par

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \int d^3r (\vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{E}_0^2), \quad (4.1)$$

où nous avons soustrait, par commodité, l'énergie (infinie) de la particule dans une cavité infiniment grande. Utilisant $\text{div } \vec{D} = q$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, on obtient facilement

$$\mathcal{E}_1 = \frac{q^2}{2R} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right). \quad (4.2)$$

Pour faire le bilan énergétique complet, il nous faut ajouter à \mathcal{E}_1 , l'énergie \mathcal{E}_2 qu'il faut fournir pour créer la cavité. Admettons que cette énergie est proportionnelle au volume

$$\mathcal{E}_2 = \frac{4\pi}{3} R^3 B, \quad (4.3)$$

où B est une constante (la fameuse "constante du sac"). L'énergie totale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ est donc de la forme

$$\mathcal{E}(R) = \frac{a}{R} + bR^3 \quad (4.4)$$

et possède un minimum pour $R = R_{\text{eq}} = \left(\frac{a}{3b} \right)^{1/4}$ correspondant à une énergie $\mathcal{E}(R_{\text{eq}}) = 4b \left(\frac{a}{3b} \right)^{3/4}$. Cela étant, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$ et R_{eq} , comme $\mathcal{E}(R_{\text{eq}})$, deviennent infiniment grands. Autrement dit, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il faut fournir une énergie infiniment grande pour fabriquer une telle configuration.

Par contre, il est possible de fabriquer des configurations d'énergie finie. Plaçons en effet un dipôle à l'intérieur de la cavité. On peut dans ce cas s'arranger pour que les lignes de champ à l'intérieur de la cavité soient tangentes, et dans ce cas $\vec{D} = 0$ à l'extérieur de la cavité (comme on peut s'en convaincre à l'aide de considérations électrostatiques élémentaires). Autrement dit, il est possible, en plaçant un dipôle à l'intérieur de la cavité, de construire une configuration telle que l'énergie électrostatique soit nulle à l'extérieur de la cavité. Une telle configuration peut servir de modèle à un hadron et "explique" pourquoi un tel hadron ne peut se scinder en deux parties contenant chacune une charge (un quark): le coût énergétique de l'opération est infini.

Ces considérations, ou des considérations analogues, sont à la base des "modèles de sac" qui reproduisent assez bien la spectroscopie des hadrons. Notons que les situations où $\varepsilon < 1$ sont exceptionnelles dans la nature. Par contre, en échangeant le rôle des charges électriques et magnétiques, on a avec l'effet Meissner dans les supraconducteurs un phénomène semblable à celui que nous venons de décrire.

IV-2. Symétrie chirale

La symétrie chirale est associée à une transformation des états de quarks. On peut définir des états "droit" (noté R) et "gauche" (noté L), états propres de γ_5 avec les valeurs propres ± 1 :

$$q_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q, \quad \bar{q}_{R,L} = \bar{q} \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (4.5)$$

Dans la limite où la masse des quarks est nulle ces spineurs droit et gauche sont aussi états propres de l'hélicité $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$, les particules ayant une hélicité égale à leur chiralité, les antiparticules une hélicité opposée à leur chiralité (la chiralité est la valeur propre de γ_5) i.e. $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} q_R = q_R$, $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} q_L = -q_L$

Lorsque la masse des quarks est nulle, le lagrangien de la chromodynamique

$$\mathcal{L} = i\bar{q}Dq = i\bar{q}_R Dq_R + i\bar{q}_L Dq_L \quad (4.6)$$

est invariant dans les transformations d'isospin indépendantes pour les quarks droits et gauches, i.e. lorsque $q_R \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})q_R$, $q_L \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}' \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})q_L$. On peut aussi regrouper ces transformations en transformation "vectorielle" de la forme $\exp(-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})$, c'est-à-dire qui affectent q_R et q_L de la même façon, et en transformations "axiales" $\exp(-i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5)$ où les spineurs droit et gauche se transforment en sens inverse. Le groupe $SU(2) \times SU(2)$ de ces transformations est le groupe de symétrie chirale.

Lorsque l'on a une telle symétrie du lagrangien, on s'attend en général à observer dans le spectre des particules une dégénérescence. Par exemple, dans un système invariant par rotation, un état de moment angulaire $L = 2$ est dégénéré 5 fois. Considérons alors un état qui a les nombres quantiques du pion, et qui peut être engendré en faisant agir sur le vide $|0\rangle$ l'opérateur $\vec{\pi} = \bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q$ (qui est bien un opérateur pseudoscalaire et isovectoriel). Effectuons une transformation chirale engendrée par l'opérateur unitaire U . L'état $\vec{\pi}|0\rangle$ devient $U\vec{\pi}U^+|0\rangle$. Pour calculer $U\vec{\pi}U^+$, choisissons le cas particulier $\pi_0 = \bar{q}\gamma_5\tau_3q$ et effectuons la rotation axiale $U = \exp\{i\frac{\pi}{4}\gamma_5\tau_3\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_5\tau_3)$. Alors un calcul simple montre que $U\pi_0U^+ = i\bar{q}q$, qui est un scalaire d'isospin 0. Si le vide est invariant, i.e. $U|0\rangle = |0\rangle$, alors le pion est dégénéré (puisqu'obtenu à partir de lui par une opération qui commute avec l'hamiltonien) avec un scalaire d'isospin 0. Or il n'existe pas de telle particule dans la nature. Par conséquent, l'hypothèse $U|0\rangle = |0\rangle$ est fautive: le vide n'est pas invariant dans les transformations chirales. Il existe en particulier des valeurs moyennes non nulles comme les "condensats" $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$.

Les pions peuvent être interprétés comme les fluctuations de ces condensats. La dégénérescence des états $U|0\rangle$, implique que les modes de grande longueur d'onde ont une très petite énergie: c'est là l'origine de la faible masse du pion, très difficile à expliquer dans les modèles de quarks.

Ainsi que je l'indiquais dans l'introduction, les propriétés du vide peuvent être modifiées profondément par des conditions extérieures particulières. En particulier, on s'attend lorsque la température et/ou la densité de baryons sont très élevées, à ce que le condensat

$\langle \bar{q}q \rangle$ disparaisse. Dans les mêmes conditions les propriétés de confinement disparaissent également. En fait la chromodynamique quantique prévoit qu'à très haute température, la matière hadronique a un comportement très simple: celui d'un gaz de quarks et de gluons interagissant faiblement. Cette propriété remarquable, d'abord déduite de considérations basées sur la liberté asymptotique a été depuis une dizaine d'années amplement vérifiée par les calculs "sur réseau". C'est en grande partie pour mettre en évidence cet état particulier de la matière hadronique que sont entreprises les expériences de collision de noyaux lourds à très haute énergie.

BIBLIOGRAPHIE

- F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons*, Academic Press, London (1979).
- F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Son (1984).
- Y. Nambu, *The Confinement of Quarks*, Scientific American, Nov. 76, p.48.
- G. 't Hooft, *Gauge Theories of the Forces between Elementary Particles*, Scientific American, Juin 1980, p.90.
- A. Morel, Cours donné à l'Ecole d'Eté de Physique des Particules, Gif-sur-Yvette, 8-12 Septembre 1986.
- I.J. Aitchison and A.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger, 1989.
- C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1980.
- T.D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers, 1981.
- I.J. Aitchison, *Nothing's Plenty: The Vacuum in Modern Quantum Field Theory*, Contemp. Phys. **26** (1985) 333.
- E.V. Shuryak, *The QCD Vacuum, Hadrons and Super Dense Matter*, World Scientific, 1988.