



HAL
open science

Spectromètres magnétiques et électriques comme détecteurs de haute résolution et comme filtres sélectifs

W. Mittig

► **To cite this version:**

W. Mittig. Spectromètres magnétiques et électriques comme détecteurs de haute résolution et comme filtres sélectifs. École thématique. Ecole Joliot Curie "Physique nucléaire instrumentale: des éléments pour un bon choix", Maubuisson, (France), du 12-17 septembre 1994: 13ème session, 1994. cel-00648792

HAL Id: cel-00648792

<https://cel.hal.science/cel-00648792>

Submitted on 6 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Spectromètres magnétiques et électriques comme détecteurs de haute résolution et comme filtres sélectifs.

W. Mittig

GANIL, BP 5027, 14021 Caen Cedex

I. Introduction

Dans une réaction nucléaire, des particules sont produites. Ces particules sont caractérisées par

M - la masse

Z - le numéro atomique

Q - l'état de charge

v - la vitesse

Dans une expérience de physique nucléaire, il faut donc déterminer ces quatre grandeurs, avec une précision aussi bonne que nécessaire et possible. Une première tâche de l'équipement expérimental est donc de permettre cette mesure avec la meilleure efficacité possible.

Une autre problématique courante dans une expérience est la recherche d'un événement ou d'une particule rare représentant une partie souvent infime de la section efficace totale de réaction. Ceci implique une grande efficacité de détection pour ce type d'événement, et en même temps une très bonne séparation de tous les autres événements plus probables de beaucoup d'ordres de grandeur. Deux solutions expérimentales existent pour ce problème : une détection de bonne qualité et très segmentée pour avoir un taux de comptage par voie de détection suffisamment faible, ou de disposer d'un filtre avec un pouvoir de sélection très élevé entre la cible et les détecteurs. C'est ici la deuxième solution qui va être discutée en plus de détail : les spectromètres magnétiques et électriques jouent un rôle de premier choix dans ce contexte, associant souvent le rôle de filtre et de détecteur de très haute résolution. En effet, la déflexion des particules dans les champs dépend de leur caractéristiques et permet donc obtenir une séparation spatiale en fonction de ces propriétés.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est peut être utile de rappeler quelques ordres de grandeur de précision possible dans la détermination des différentes grandeurs

citées. Ceci est un peu plus compliqué que souhaitable, parce que en pratique ces grandeurs ne sont pas directement mesurées. Des relations auxiliaires sont nécessaires. Citons les principales, en approximation non-relativiste:

$$E = \frac{M}{2} v^2$$

$$\Delta E \propto MZ^2/E \quad (\text{approximatif})$$

$$B\rho = \frac{p}{Qe} = \frac{Mv}{Q.e}$$

$$t_{vol} = \frac{d}{v} \quad (\text{avec } d = \text{distance entre les 2 mesures})$$

De ces quatre relations, les quatre inconnus peuvent être déterminées. Dans le cas de noyaux complètement strippés, $Q = Z$, le nombre d'inconnus est réduit à trois. Une remarque importante s'impose ici : la seule variable continue est la vitesse v , toutes les autres grandeurs, M , Z , Q sont quantifiées. Si la résolution est suffisante pour bien déterminer M , Z , Q , il suffit d'une seule mesure de très bonne qualité pour déterminer la vitesse. Après ces remarques, un tableau donne des ordres de grandeur de résolution qui peuvent être obtenues avec les détecteurs actuels.

Variable	Détecteur	Résolution typique	Domaine
E	semiconducteur	qq. 10^{-3}	parcours < 1 cm $E \geq$ qq MeV/nucléon parcours < 1 m.atm
	scintillateur	qq. 10^{-2}	
	gaz	qq. 10^{-2}	
ΔE	semiconducteur	qq. 10^{-2}	$E \geq$ qq MeV/nucléon
	scintillateur		
	gaz		
$B\rho$	spectromètres	$10^{-3} - \text{qq.} 10^{-5}$	$E \geq$ qq keV/nucléon
t_{vol}	gallettes	(0.1-0.5) ns $\Delta t/t$ dépendant de d typique : $10^{-2} -$ qq. 10^{-4}	$E \geq$ qq keV/nucléon $E \geq$ qq MeV/nucléon
	scintillateurs		
	gaz		
	semiconducteurs		

Comme on peut voir de ce tableau, les spectromètres ont une résolution de un à trois ordres de grandeur meilleur que les autres détecteurs. Ils ont donc, pour résumer,

deux propriétés principales uniques : la fonction de filtre et de détecteur de très haute résolution.

La discussion des propriétés et de l'utilisation de spectromètres est connecté à un problème plus général, le transport de particules chargées. Dans une expérience classique, le physicien, dans la plupart des cas, se souciait peu des problèmes de transport de faisceau, cette tâche étant assumée, souvent dès la conception de l'accélérateur, par les responsables de l'accélérateur. Actuellement, beaucoup d'expériences se font avec des faisceaux secondaires, qui ont des qualités optiques très inférieures à celles d'un faisceau primaire. Leur utilisation optimale dépend donc nettement plus du but d'une expérience spécifique. Ceci implique, que la division des tâches est moins nette dans ce cas, et un physicien devrait au moins connaître les possibilités (et impossibilités) dans l'optimisation des caractéristiques du faisceau.

C'est dans ce contexte que nous essaierons de donner quelques notions de base de spectromètres et de leur utilisation pour des expériences de physique.

II. Notations de base de transport de particules chargées

a) la trajectoire

Comme dans beaucoup de problèmes, il est utile de commencer par définir une référence, et ensuite toutes les caractéristiques seront discutées par rapport à cette référence à un endroit donné de la trajectoire. Une particule peut être caractérisée par 6 coordonnées :

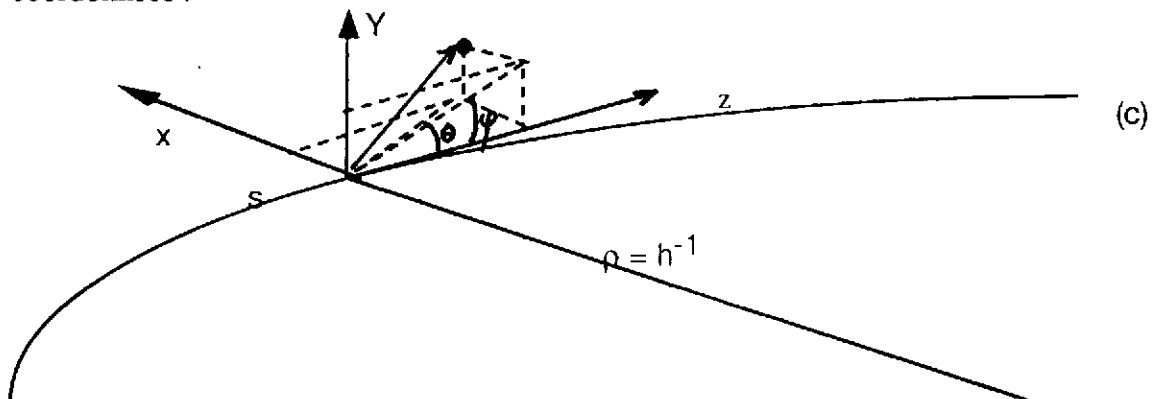


Fig 1) coordonnées d'une particule

x	distance dans le plan horizontal de l'axe z
θ	angle dans le plan x, z
y	distance dans le plan vertical de l'axe z
ϕ	angle dans le plan y, z
l	différence de longueur de la trajectoire considérée et celle de la trajectoire centrale
δ	différence de moment de la particule par rapport à la part. de référence $\delta = (p-p_0)/p_0$.

Ces coordonnées sont prises par rapport à une trajectoire de référence (c), qui peut être en principe quelconque. Mais, bien-sûr, il est judicieux de prendre comme référence ce qui est appelé une trajectoire centrale, celle qui passe par le centre des éléments d'optique avec un rayon de courbure ρ de la particule de référence dans le champ central.

b) le formalisme de transport de particules au premier ordre

Du point de vue formel, nous pouvons considérer qu'une coordonnée finale va être une fonction des coordonnées initiales. Par exemple pour x_f nous pouvons écrire

$$x_f = f_x(x_i, \theta_i, y_i, \varphi_i, l_i, \delta_i)$$

où nous utilisons les index i et f pour initial et final, respectivement. La fonction f_x est déterminé par les caractéristiques des équations de mouvements dans la zone traversée entre z_i et z_f . Puisqu'il s'agit de petites déviations par rapport à une trajectoire centrale, nous pouvons faire une expansion dans une série de Taylor, par exemple pour x, θ au 1er ordre

$$x_f = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{z_f} x_i + \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \theta_i + \frac{\partial f_x}{\partial y} y_i + \frac{\partial f_x}{\partial \varphi} \varphi_i + \frac{\partial f_x}{\partial l} l_i + \frac{\partial f_x}{\partial \delta} \delta$$

$$\theta_f = \frac{\partial f_\theta}{\partial x} x_i + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \theta_i + \dots$$

Ceci peut être écrit en formalisme matriciel

$$\begin{pmatrix} x_f \\ \theta_f \\ y_f \\ \varphi_f \\ l_f \\ \delta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ R_{61} & & & & & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \theta_i \\ y_i \\ \varphi_i \\ l_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$$

$$\text{où } R_{11} = \frac{\partial f_x}{\partial x} \dots$$

On utilise souvent des notations peut-être pas très rigoureuses, mais très parlantes

$$R_{11} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \left(\frac{x}{x}\right) \quad \text{prononcé : } x \text{ sur } x$$

$$R_{12} = \frac{\partial f_x}{\partial \theta} = \left(\frac{x}{\theta}\right) \quad \text{prononcé : } x \text{ sur } \theta \quad \text{etc...}$$

Avant d'aller plus loin, nous allons calculer la matrice R pour un espace libre de longueur L, c'est-à-dire un espace sans champs (voir figure 2).

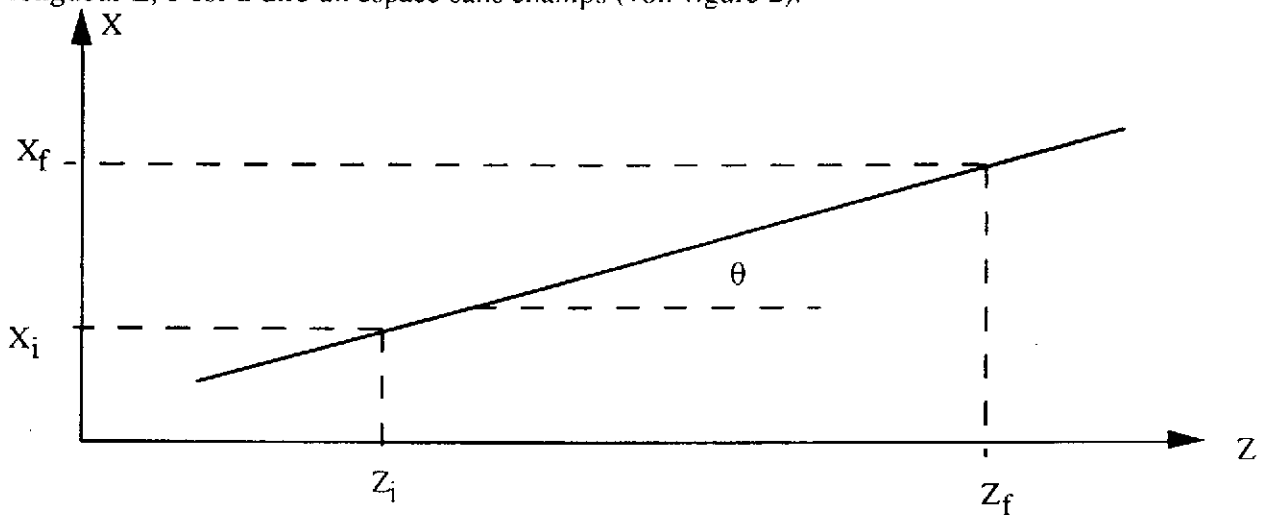


figure 2: trajectoire dans une région sans champs dans le plan x-z

Dans ce cas, les trajectoires sont des droites et nous avons

$$x_f = x_i + L \tan \theta_i \quad \text{avec } L = z_f - z_i$$

$$\theta_f = \theta_i = \theta$$

$$y_f = y_i + L \tan \phi_i$$

$$\phi_f = \phi_i = \phi$$

$$l_f = l_i + L \sqrt{1/\cos^2 \theta + 1/\cos^2 \phi - 1} - L$$

$$\delta_f = \delta_i$$

donc, au 1er ordre

$$R = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quel est l'intérêt de cette écriture, qui semble un peu compliquée pour quelque chose somme toute, assez triviale? Ceci réside essentiellement dans le fait qu'elle permet d'enchaîner facilement des sections d'un système optique même très complexe.

Considérons un vecteur \vec{x}_0 , et deux sections, 1 et 2 décrites par R_1 , et R_2 respectivement. Dans ce cas nous avons

$$\vec{x}_1 = R_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{x}_2 = R_2 \vec{x}_1 = R_2(R_1 \vec{x}_0) = R_1 R_2 \vec{x}_0$$

L'enchaînement des sections est donc décrit par un produit des matrices qui décrivent ces sections.

c) Quelques propriétés de la matrice R pour des systèmes optiques simples

Pour éviter des complications inutiles, nous allons nous restreindre pour le moment à un sous-espace correspondant au mouvement dans le plan horizontal, caractérisé par x, θ . Considérons une lentille mince focalisante:

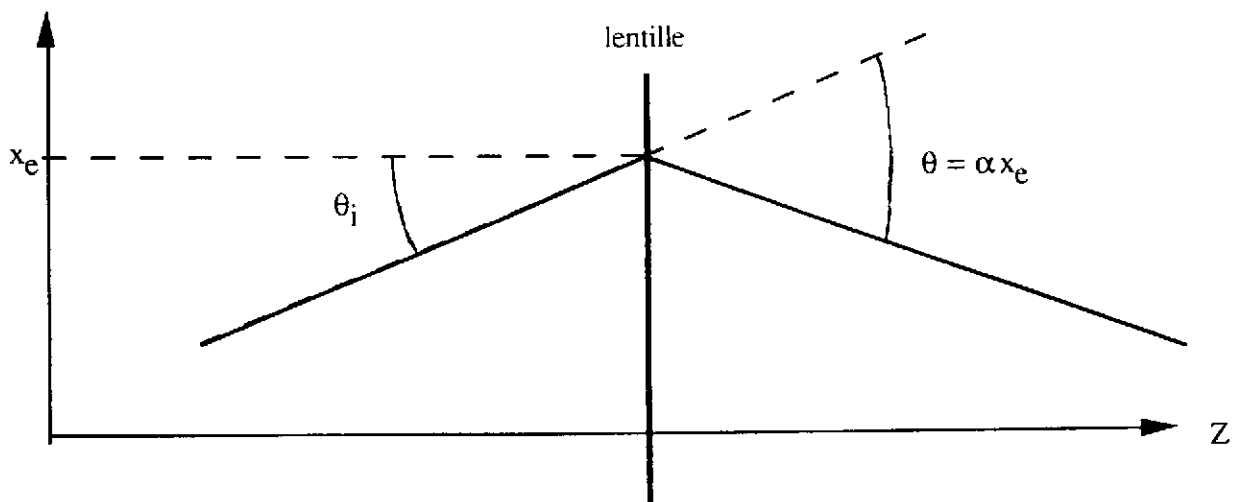


figure 3: trajectoire dans une lentille mince dans le plan x-z

En sortant de la lentille nous avons

$$x_s = x_e$$

$$\theta_s = \theta_e - \alpha x_e \quad \text{donc}$$

$$R_{\text{lentille}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Si on met devant et derrière la lentille des espaces libres de longueur L_1 et L_2 respectivement, la matrice totale du système est obtenue par le produit des matrices et la matrice totale de ce système est

$$R = R_2 R_{\text{lentille}} R_1 = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha L_2) & (1-\alpha L_2)L_1 + L_2 \\ \alpha & (1-\alpha L_1) \end{pmatrix}$$

et nous pouvons écrire

$$\vec{x}_f = R \vec{x}_o$$

Pour définir les propriétés optiques de ce système nous allons maintenant imposer des conditions sur R qui définit la relation entre le vecteur **objet** \vec{x}_o et le vecteur **image** \vec{x}_f .

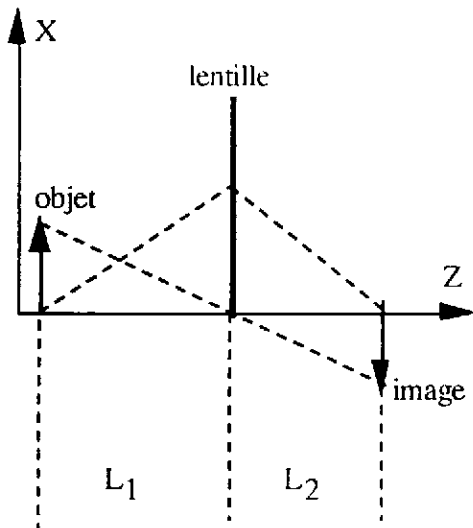


figure a: focalisation point-point

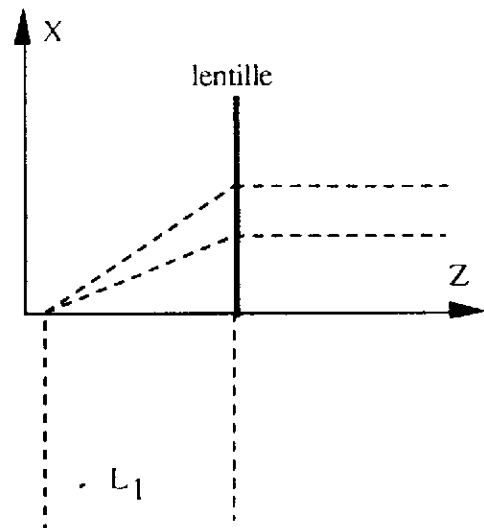


fig b: focalisation point parallèle

Mettons $R_{12} = (x/\theta) = 0$; ceci signifie que nous avons une **focale** à cet endroit: x ne dépend pas de θ (voir fig. 4a). Par conséquent $x_f = (x/x) \cdot x_i$ et nous voyons que (x/x) est le **grandissement**. Exemple (fig 4a): si nous cherchons un grandissement -1 (attention au signe!), nous avons

$$R_{11} = \left(\frac{x}{x}\right) = -1 = 1 - \alpha L_2$$

$$L_2 = \frac{2}{\alpha}$$

$$R_{12} = \left(\frac{x}{\theta}\right) = 0 = L_1(1 - \alpha L_2) + L_2 = -L_1 + L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Un résultat bien connu, bien sûr, avec $f=1/\alpha$ la longueur focale de la lentille. La signification de α peut être encore plus clairement illustré avec une autre condition correspondant à une **focalisation point-parallèle** (fig 4b), $R_{22}=(\theta/\theta)=0=1-\alpha L_1$. c'est à dire que $1/\alpha=f=L_1$.

Notons que chacune des matrices a un $\det(R) = 1$, et nous avons donc

$$\det(R_1.R_2.R_3) = \det(R_1).\det(R_2).\det(R_3) = 1$$

d) relations entre la matrice R et les équations de mouvement

Les équations de mouvement de particules dans un champs magnétique sont dérivées dans l'annexe. En se limitant au 1er ordre et avec un champs possédant une antisymétrie par rapport au plan x-z (voir annexe) nous avons

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x &= h\delta \\ y'' + k_y^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Cette expression est à comparer à celle obtenue par la matrice R, et en prenant pour simplifier des champs antisymétriques (voir annexe) dans lesquels il n'y a pas de couplage entre les plans x, θ et y, φ :

$$\begin{aligned} x &= R_{11}x_0 + R_{12}\theta_0 + R_{16}\delta_0 \\ \theta &= \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

avec $\theta = x'$.

Par 2 dérivations successives nous obtenons:

$$\begin{aligned} x'' &= R_{11}''x_0 + R_{12}''\theta_0 + R_{16}''\delta_0 \\ &= h\delta - k_x^2 x \\ &= -k_x^2 R_{11}''x_0 - k_x^2 R_{12}''\theta_0 + (h - k_x^2)R_{16}''\delta_0 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\delta = \delta_0$, puisque nous supposons qu'il n'y a pas de gain d'énergie dans l'intervalle considéré. Les grandeurs avec index 0 correspondent aux conditions initiales, et donc ne varient pas. Nous voyons que les éléments de la matrice R obéissent aux équations différentielles:

$$\begin{aligned} R_{11}'' &= -k_x^2 R_{11} \\ R_{12}'' &= -k_x^2 R_{12} \\ R_{16}'' &= -k_x^2 R_{16} + h \end{aligned}$$

La solution de ces équations différentielles sont les fonctions trigonométriques sin, cos, sinh et cosh. Des équations similaires peuvent être facilement obtenues pour les autres éléments de la matrice R.

e) Les lentilles magnétiques

Comme exemple plus proche des applications qui nous intéressent, nous allons maintenant obtenir les formules pour un quadrupole magnétique. Rappelons quelques équations de base des champs magnétiques dans le vide (voir annexe):

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

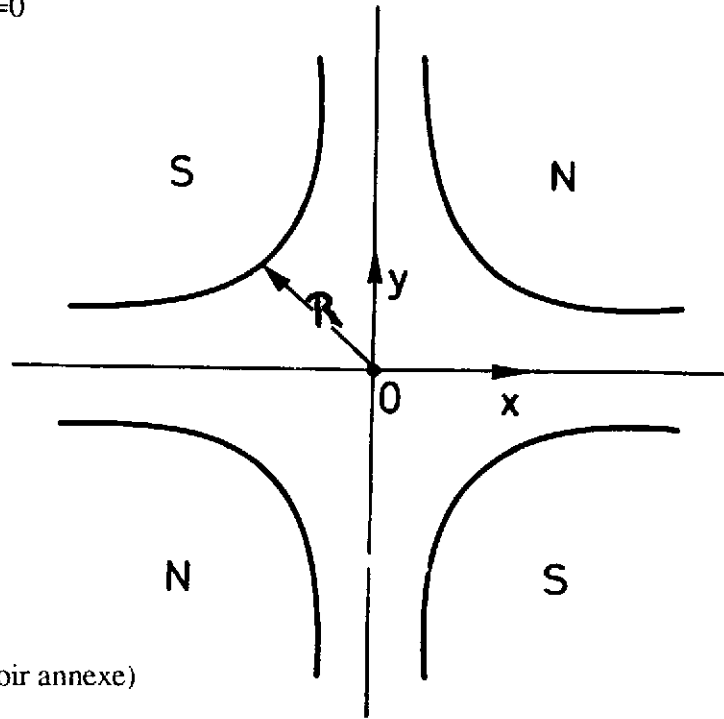
$$\vec{B} = \text{grad} \phi$$

$$\text{rot grad} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\Delta \phi = 0$$

fig. 5



Le champ est décrit par (voir annexe)

$$B_x = \frac{B_Q}{R} \cdot y$$

$$B_y = \frac{B_Q}{R} \cdot x$$

$$B_z = 0$$

QUADRUPOLE

Avec les équations du mouvement

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q e \vec{v} \times \vec{B}$$

et avec $|v_{x,y}| \ll |v_d| = v$ on obtient

$$x'' + \frac{q e B_Q}{m v R} x = 0$$

$$y'' - \frac{q e B_Q}{m v R} y = 0$$

Pour $q e B_Q > 0$, la solution pour x sont les fonctions trigonométriques, et pour y les fonctions hyperboliques. Avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $x'(0) = \theta_0$ on obtient facilement la matrice R d'un quadrupole par comparaison avec les équations différentielles des pages précédentes, avec $k^2 = (q e B_Q) / (p R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \cos kL & \frac{1}{k} \sin kL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k \sin kL & \cos kL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } kL & \frac{1}{k} \text{sh } kL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \text{sh } kL & \frac{1}{k} \text{ch } kL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit ici par comparaison avec l'expression pour une lentille mince, que la longueur focale f_Q d'un Q-pole est

$$\frac{1}{f_Q} = k \sin kL$$

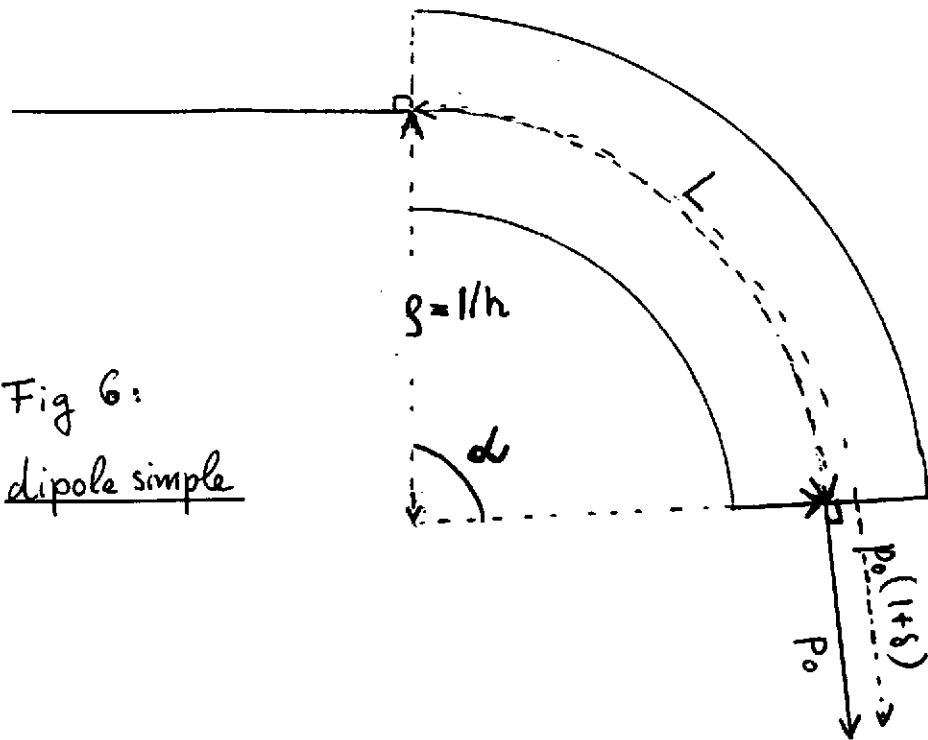
Si $kL \ll 1$, nous avons

$$\frac{1}{f_Q} = k^2 \cdot L = \frac{e q B_Q}{m v R} \cdot L = \frac{B_Q / R}{B \rho} \cdot L$$

où $B \rho$ est la rigidité magnétique de la particule. Une deuxième observation importante : si un Q-pole est focalisant en x , il est défocalisant en y .

En dernier exemple que nous voulons traiter ici un aimant magnétique simple

Fig 6:
dipole simple



En utilisant les équations de l'annexe, nous avons alors $R =$

$\cos k_x L$	$\frac{1}{k_x} \sin k_x L$	0	0	0	$\frac{h}{k_x^2} (1 - \cos k_x L)$
$-k_x \sin k_x L$	$\cos k_x L$	0	0	0	$\frac{h}{k_x} \sin k_x L$
0	0	$\cos k_y L$	$\frac{1}{k_y} \sin k_y L$	0	0
0	0	$-k_y \sin k_y L$	$\cos k_y L$	0	0
$-\frac{h}{k_x} \sin k_x L$	$-\frac{h}{k_x^2} (1 - \cos k_x L)$	0	0	1	$-\frac{h^2}{k_x^3} (k_x L - \sin k_x L)$
0	0	0	0	0	1

avec les définitions

$$h = 1/\rho_0 \quad k_x^2 = (1-n) h^2 \quad k_y^2 = n h^2$$

$\alpha = h L$ angle de déviation

$n =$ indice du champ (voir annexe)

$L =$ longueur de la trajectoire centrale

Nous avons quelques nouveaux termes ici : les termes chromatiques, c'est à dire dépendants de l'énergie. Pour simplifier, mettons $n = 0$ (champ magnétique constant) et nous avons

$$\left(\frac{x}{\delta}\right) = R_{16} = \text{dispersion} = \rho(1 - \cos \alpha)$$

$$\left(\frac{\theta}{\delta}\right) = R_{26} = \text{dispersion angulaire} = \sin \alpha$$

et $\left(\frac{1}{\delta}\right) = R_{56} = -\rho (\alpha \sin \alpha)$

Il est utile d'illustrer ces résultats par quelques cas spécifiques :

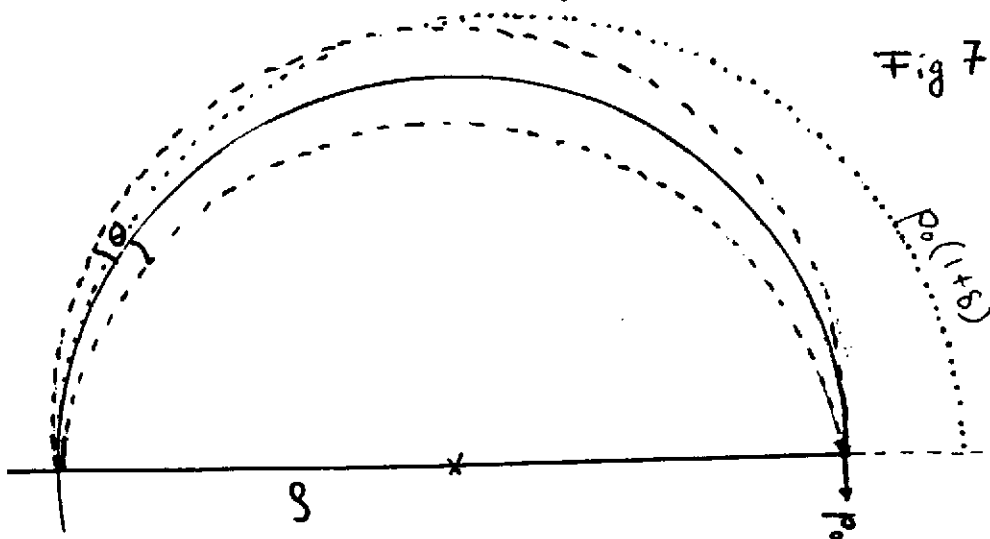
Mettons $\alpha = \pi$; ceci correspond donc à un aimant secteur de 180° . Dans ce cas :

$$R_{16} = \left(\frac{x}{\delta}\right) = 2\rho$$

$$R_{26} = \left(\frac{\theta}{\delta}\right) = 0$$

$$R_{56} = \rho \pi$$

$$R_{51} = 0 \quad R_{52} = \frac{1}{\theta} = -2\rho$$



La figure ci-dessus illustre la signification de ces résultats. Il sera aisé et instructif pour le lecteur de retrouver la forme analytique de la matrice R par des considérations géométriques.

Pour $\alpha = 2\pi$, un aimant de 360° , nous obtenons :

$$R_{16} = \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix} = 0$$

$$R_{26} = \begin{pmatrix} \theta \\ \delta \end{pmatrix} = 0$$

$$R_{56} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} = 2\Pi\rho$$

$$R_{51} = 0$$

$$R_{52} = 0$$

Cet exemple nous permet d'introduire deux notations importantes : $R_{16} = (x/\delta) = 0$: le système est **non dispersif** et si $R_{16} = R_{26} = 0$, le système est **achromatique**. Il est important de réaliser qu'un système peut être achromatique même s'il contient des éléments dispersifs, comme le montre l'exemple ci-dessus.

On peut montrer, soit à partir de $\det R = 1$, soit par l'intégration des équations de mouvement (voir références) que si

$$R_{16} = R_{26} = 0 \rightarrow R_{52} = 0$$

c'est à dire que la longueur des trajectoires ne dépend pas de l'angle. Ceci est appelé **isochronisme**, une notation assez mal choisie, parce qu'elle signifie que toutes les particules mettent le même temps pour aller d'un bout de l'ensemble à l'autre. Ceci est vrai seulement pour des particules ayant la même vitesse : seulement la longueur des trajectoires est identique pour toutes les particules.

Un vrai isochronisme, dans le sens du temps, est obtenu si les particules mettent le même temps.

Avec $v/c \ll 1$, nous avons, au 1er ordre,

$$\Delta t = \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} + \frac{l-l_0}{v_0} \equiv l_0 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) + \left(\frac{l}{\delta} \right) \cdot \frac{\delta}{v_0} \equiv -l_0 \frac{\Delta v}{v_0^2} + \left(\frac{l}{\delta} \right) \cdot \frac{\delta}{v_0}$$

d'où pour $\Delta t = 0$, la condition (attention, plusieurs conventions de signes existent)

$$\left(\frac{l}{\delta} \right) = R_{56} = l_0 = 2\Pi\rho$$

Ceci est le cas pour l'exemple cité ci-dessus, $\alpha = 2\pi$. C'est le cas bien connu de la résonance cyclotron, pour laquelle on a la relation $B/\omega = M/(Qe)$.

f) Eléments magnétiques et contraintes

Considérons une matrice R pour un ensemble d'espaces libres et d'éléments optiques. Ce que nous voulons en general, c'est une forme bien déterminée de cette matrice. Considérons par exemple une ligne où nous voulons obtenir une focale point-point en x et y

$$R_{12} = R_{34} = 0$$

et nous voulons imposer un grandissement en x et y, $R_{11} = (x/x)$ et $R_{33} = (y/y)$.

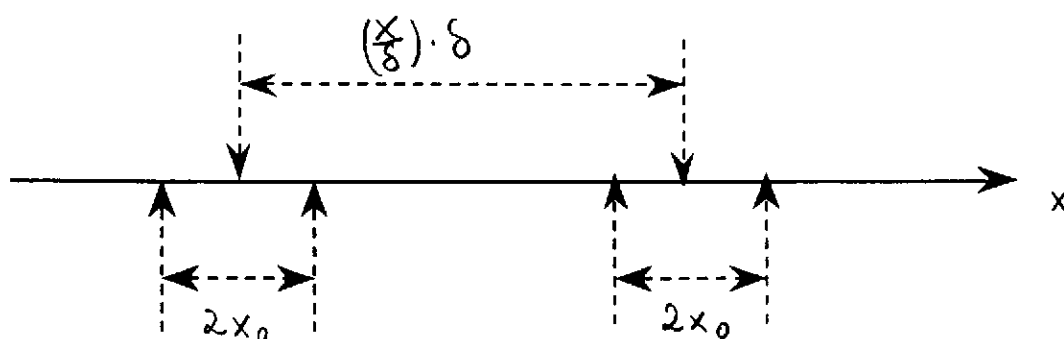
Ceci implique que nous avons besoin au moins de 4 paramètres ajustables pour pouvoir satisfaire ces 4 exigences. Dans cet exemple, avec 1 quadrupole, on a 2 paramètres, le gradient $(B/r)_1$ et l'emplacement. Avec un deuxième Q-pole, on a 2 paramètres supplémentaires, $(B/r)_2$ et l'emplacement relatif de ces deux Q-poles. En principe, il y a assez de paramètres libres pour une solution. Néanmoins, dû au fait que si un quadrupole magnétique est focalisant en x, et défocalisant en y, il n'y a pas de solution avec $R_{11} = R_{22}$. Seulement avec un troisième Q-pole une telle solution peut être obtenue. C'est la raison pour laquelle on trouve très souvent des triplets de Q-poles sur les lignes de transport.

g) Résolution d'un spectromètre

Comme discuté dans l'introduction, un point important que nous voulons obtenir des spectromètres, est leur résolution. Considérons un ensemble optique ayant une dispersion (x/δ) , une image point-point $(x/\theta) = 0$. Dans ce cas nous avons

$$x_f = \left(\frac{x}{\delta}\right) \delta + \left(\frac{x}{x}\right) x_0$$

Pour un ensemble de particules de moment identique $\delta = 0$, nous allons donc avoir une tache image $x_{f0} = (x/x) x_0$, où x_0 est la demi-largeur de la tache objet (figure)



Pour séparer deux moments, il faut que la séparation des taches soit plus grande ou égale à $2x_0$. La différence d'impulsion δ_{\min} minimale que nous pouvons séparer est donc

$$\left(\frac{x}{\delta}\right) |\delta_{\min}| \geq 2 \left(\frac{x}{x}\right) x_0$$

$$\delta_{\min} = \frac{2 R_{11} x_0}{R_{16}} = \text{résolution}$$

Il est utile de mentionner ici les ordres de grandeur : pour $\delta_{\min} \cong 10^{-4}$, et $2 R_{11} x_0 = 1 \text{ mm}$, il faut que $R_{16} = 10 \text{ m}$, ce qui implique toute suite des dimensions de cet ordre de grandeur de ces appareils.

On pourrait penser, qu'il est facile d'ajuster cette résolution à une valeur voulue, en faisant R_{11} petit ou R_{16} grand. Il faut tenir compte d'autres limitations. Pour illustrer ceci, nous allons considérer le système simple sur la figure 8.

L'angle final de la trajectoire centrale est

$$\theta = \theta_d = \frac{L_d}{\rho_0}$$

Un autre moment à un angle final $\theta = \theta_\alpha(1-\delta)$. Maintenant, à la sortie du dipole, seulement θ contient une information sur δ . Alors on voit, que la taille finie du point objet implique une incertitude angulaire

$$\Delta \theta_0 = \frac{\pm x_e}{d}$$

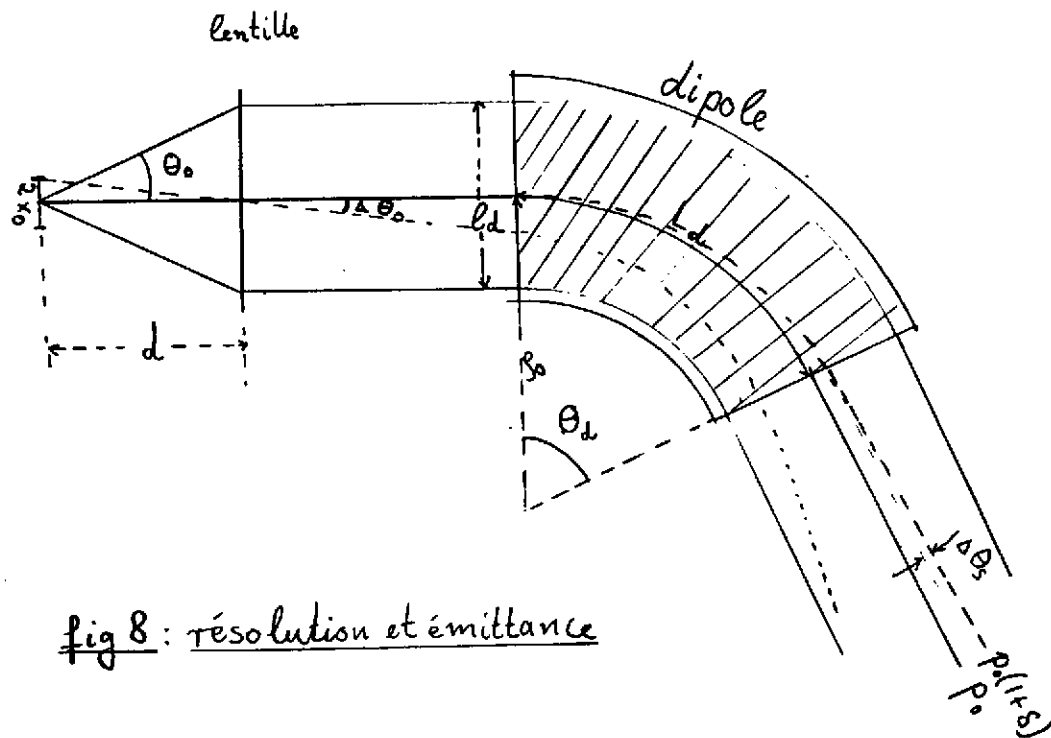


fig 8 : résolution et émittance

Avec les relations $l_d = 2\rho_0\theta_d$, $\Delta\theta_s = \theta_d \delta$ et la condition pour pouvoir distinguer deux moments différents s'écrit

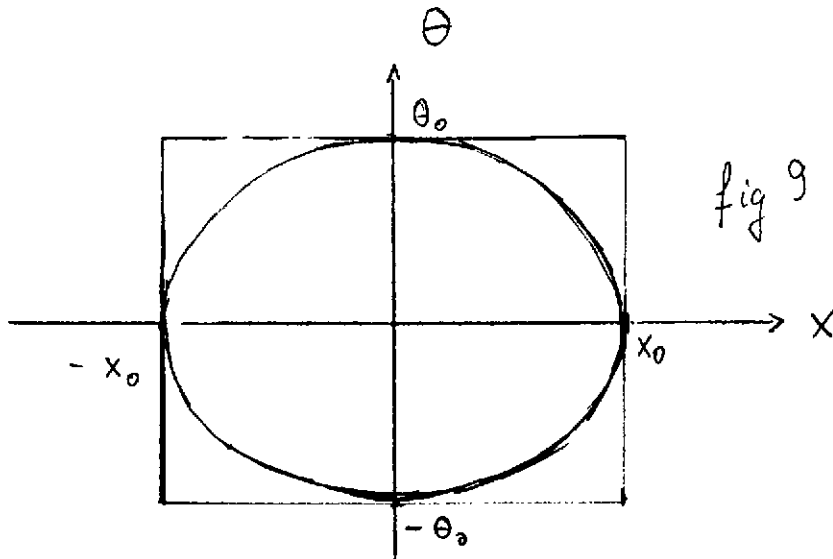
$$\delta_{\min} \cdot \theta_d \geq 2\Delta\theta_0 = 2 \frac{x_0}{d} = 2 \frac{x_0 2\theta_0}{l_d}$$

$$\delta_{\min} = \frac{4 x_0 \theta_0}{l_d \theta_d} = \frac{4 x_0 \theta_0}{l_d L_d} \rho_0$$

Ceci est un résultat important, puisqu'il illustre plusieurs aspects. Pour une taille du point objet et une acceptation angulaire donné et un rayon de courbure donné, la résolution est inversement proportionnelle à la surface du dipole. Un exemple numérique: pour le spectromètre SPEG au Ganil, nous avons $x_0 = 0.5 \text{ mm}$, $\theta_0 = 35 \text{ mrad}$, $\rho_0 = 2.4 \text{ m}$, $\theta_d = 85^\circ$, $l_d = 50 \text{ cm}$

$$\delta_{\min} = \frac{4 \times 0.5 \text{ mm} \times 35 \text{ mrad}}{0.5 \text{ m} \cdot 85 \times 17 \text{ mrad}} = 1.10^{-4}$$

C'est effectivement la résolution nominale et celle observée. Le produit $4 x_0 \theta_0$ est appelé **l'émittance** horizontale \mathcal{E}_h du faisceau, illustré sur la figure 9.



Les particules peuvent venir de n'importe quel point de cette figure d'émittance, délimité par $\pm x_0$ et $\pm \theta_0$. Souvent ce rectangle est remplacé par une ellipse, avec la surface $\mathcal{E}_h = \pi x_0 \theta_0$.

Le théorème de Liouville a comme conséquence, que **l'émittance est conservée** dans des systèmes sans accélération. Pour une émittance et un rayon de courbure (et donc un champ maximal) donné, la résolution s'améliore donc proportionnellement à la surface des dipôles, donc avec le coût de l'appareil.

h) Résumé de quelques notations

A ce stade, il est utile de résumer quelques notations introduites. Nous avons discuté la matrice R , qui détermine les relations entre **l'objet et l'image** au premier ordre. De cette matrice, 6×6 , quelques éléments sont particulièrement importants :

la dispersion $R_{16} = \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}$

le grandissement $R_{11} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}; R_{22} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$

D'autres coefficients caractérisent bien le type de relation objet-image réalisé : nous avons en particulier :

$$R_{12} = \left(\frac{x}{\theta} \right) = 0 \quad \text{une focalisation point-point}$$

$$R_{22} = \left(\frac{\theta}{\theta} \right) = 0 \quad \text{une focalisation point-parallèle}$$

Le faisceau (ou l'ensemble des particules) est caractérisée par l'émittance, qui, dans le cas d'un ellipsoïde, s'écrit :

$$\varepsilon_h = \Pi \Delta x \Delta \theta$$

$$\varepsilon_v = \Pi \Delta y \Delta \phi$$

où Δx , Δy est la taille de l'objet, et $\Delta \theta$, $\Delta \phi$ la divergence angulaire du faisceau dans le plan horizontal et vertical respectivement. Le théorème de Liouville montre que cette émittance est conservée.

Une caractéristique importante de l'ensemble de transport de particules est l'acceptance, c'est l'émittance maximale transmise dans l'espace de 6 dimensions.

Pour réaliser les relations objet-image, nous avons discuté des éléments de premier ordre :

l'espace libre

le quadrupole

le dipole

Avec ces notations et ces quelques éléments, on peut déjà réaliser des ensembles assez complexes. Beaucoup des propriétés de ces ensembles peuvent s'illustrer avec des dessins d'optique géométrique, et sont donc en général assez intuitifs.

Avant de donner des exemples, il semble utile de discuter plus la notion d'émittance, qui n'est pas très évidente et intuitive.

i) Émittance d'un faisceau

Regardons de nouveau la figure de l'émittance. Nous allons maintenant illustrer, avec une émittance rectangulaire pour simplicité, l'évolution de cette figure 10a) d'émittance dans une configuration très simple, comprenant le point objet, un espace libre et une lentille mince. Pour simplicité, nous nous limitons à l'espace x , θ .

fig 10

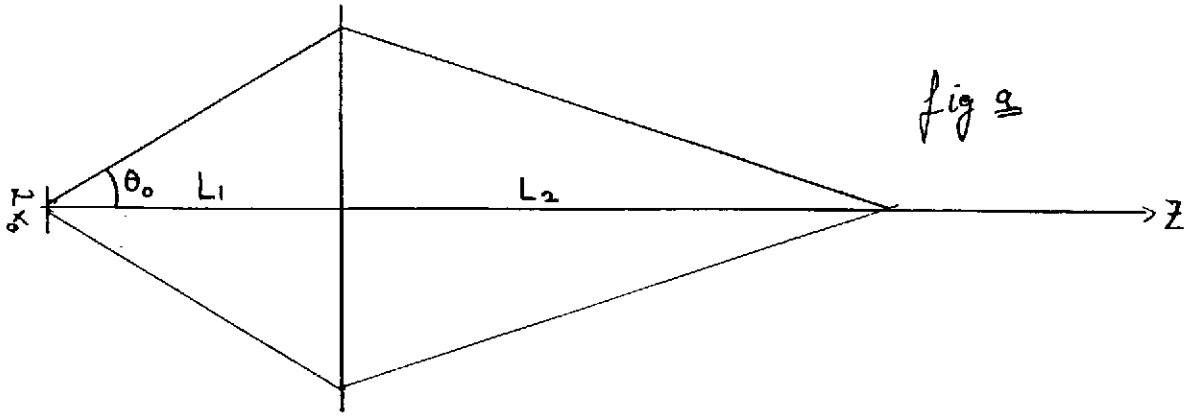
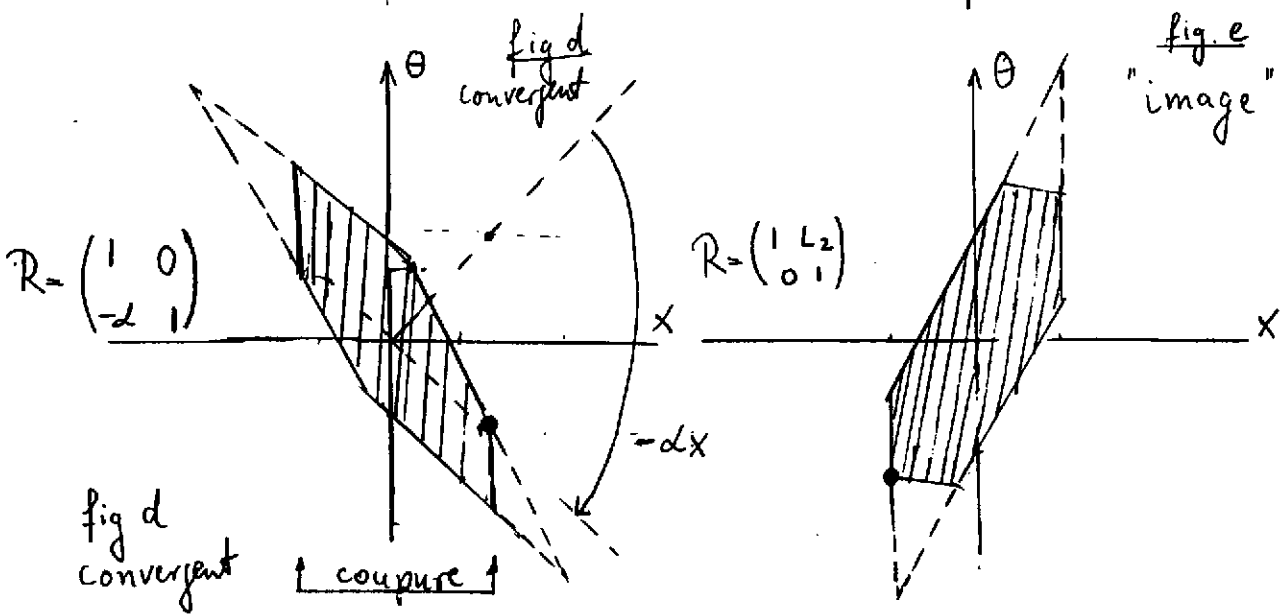
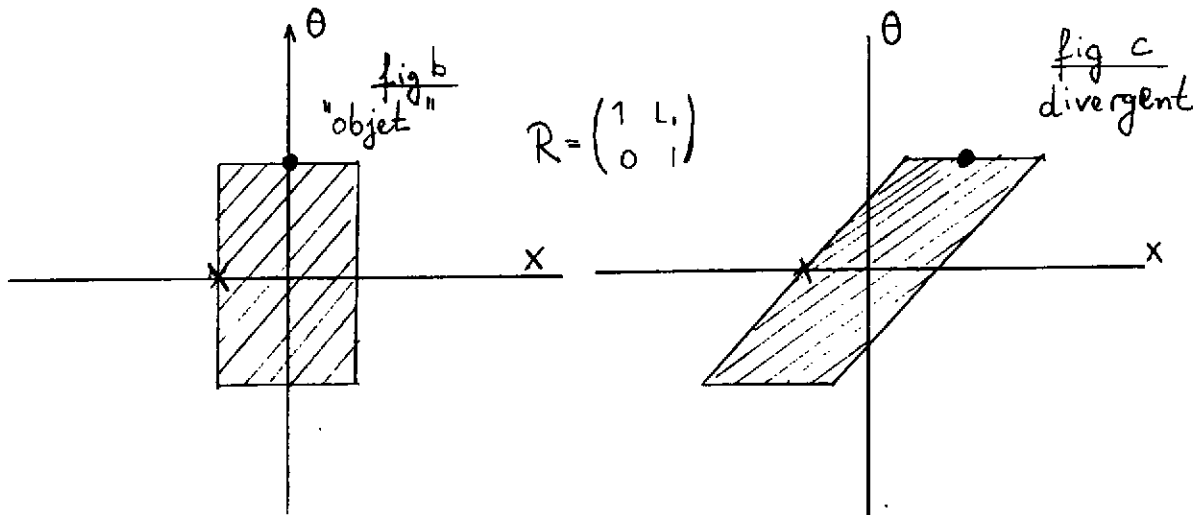


fig 9



Au point objet, nous avons, par construction un rectangle délimité par $\pm x_0$ et $\pm \theta_0$ (Fig. 10b) : la distribution des coordonnées initiales des particules est uniformément distribué sur cette surface. Après un espace libre (Fig. 10 c), le rectangle est déformé dans un parallélogramme. Le plus simple, pour voir ça, et de se fixer un point, (ici $x = 0$, $\theta = +\theta_0$), et voir où il se trouve dans ce diagramme par application de la matrice R de l'espace libre. Cette image caractérise un faisceau divergent. L'image de la figure d'émission, figure 10d) peut être obtenue par application de la matrice R de la lentille mince à celle avant la lentille.

L'image obtenue correspond à un faisceau convergent. Après un autre espace libre, et avec $R_{12} = 0$ pour l'ensemble, nous obtenons la figure 10e) : Nous avons de nouveau un parallélogramme, dû aux termes non-diagonaux de la matrice R. Il est instructif maintenant de considérer une coupure géométrique au niveau de la lentille : le diamètre de la lentille n'est pas assez grand pour laisser passer toutes ces particules (voir Fig. 10 c, d). Cette coupure se répercute par une coupure inclinée dans l'image finale (Fig. 10 e).

Pour fixer les ordres de grandeur, prenons deux exemples :

Exemple 1 : un détecteur (spectromètre) a une acceptation angulaire définie par un diaphragme de ± 1 degré = ± 17 mrad ; les particules sont produites sur une cible avec $\Delta x = \pm 1$ mm ; l'émission du faisceau est donc de $\epsilon_h = \pi \cdot 1 \text{ mm} \cdot 17 \text{ mrad}$.

Exemple 2 : une source d'ions a un trou d'extraction de ± 2 mm, les ions sont accélérés à un moment p et énergie E ; si l'agitation thermique des ions dans le sens transversal est $\pm p_t$, une considération simple montre que $\Delta\theta = p_t/p$.

En approximation non-relativiste nous avons $\Delta\theta = \pm \sqrt{E_t/E}$. L'énergie thermique est $E_t = 1/2 KT$, et elle est de l'ordre de 5 eV. Pour une accélération à une énergie de 10 keV, nous avons $\epsilon_h = \pi \cdot 2 \times \sqrt{5}/10^{-2} \text{ radian} = 44 \pi \cdot \text{mm.mrad}$.

Des considérations similaires sont valables pour les autres coordonnées; il est assez facile à voir sur la figure 8, que des coupures dans les sections dispersives vont introduire des coupures corrélées dans l'espace x, θ, δ .

III. Les ensembles de détection magnétiques et électriques

a) les achromates

La figure 11 montre schématiquement un ensemble optique. Nous supposons qu'il y a une focale intermédiaire, et une focale finale.

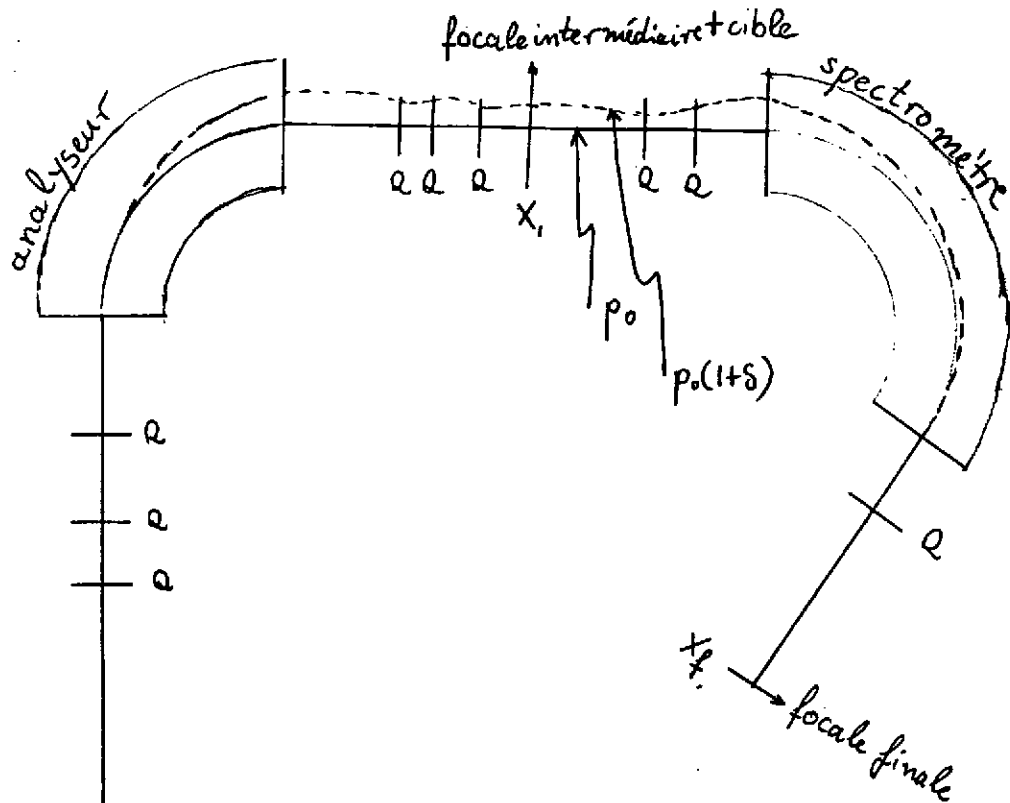


fig 11: un ensemble achromatique

Nous avons donc les relations

$$X_1 = \left(\frac{X}{X}\right)_A X_0 + \left(\frac{X}{\theta}\right)_A^0 \theta + \left(\frac{X}{\delta}\right)_A \delta \quad \text{analyseur}$$

$$X_f = \left(\frac{X}{X}\right)_S X_1 + \left(\frac{X}{\theta}\right)_S^0 \theta + \left(\frac{X}{\delta}\right)_S \delta \quad \text{spectrom.}$$

$$= \left(\frac{X}{X}\right)_S \left[\left(\frac{X}{X}\right)_A X_0 + \left(\frac{X}{\delta}\right)_A \delta \right] + \left(\frac{X}{\delta}\right)_S \delta$$

Nous pouvons maintenant imposer $\partial X_f / \partial \delta = 0$, la position finale ne dépend pas de δ : l'ensemble est non-dispersif

et on obtient la relation:

$$\frac{\partial x_f}{\partial \delta} = 0 = \left(\frac{x}{x}\right)_S \left(\frac{x}{\delta}\right)_A + \left(\frac{x}{\delta}\right)_S$$

Notons l'importance du signe de $(x/x)_S$. Pour avoir un ensemble achromatique, il faut satisfaire en plus la condition $R_{26} = 0$. Dans ce cas, comme déjà mentionné, nous avons en conséquence une propriété importante : $R_{52} = 0$, la longueur des trajectoires ne dépend pas de θ .

Une application importante des achromates est leur utilisation comme spectromètre à perte d'énergie. Mettons à l'endroit de la focale intermédiaire une cible, dans laquelle nous avons une réaction nucléaire résultant dans un changement du moment Δp réaction avec $\delta_r = \Delta p_{\text{réaction}}/p$.

Le δ_{total} après la cible est donc

$$\delta_t = \delta_0 + \delta_r$$

où δ_0 est la dispersion du faisceau incident. Après le spectromètre nous avons

$$\begin{aligned} x_f &= \left(\frac{x}{\delta}\right)_S \delta_r + \left[\left(\frac{x}{\delta}\right)_S + \left(\frac{x}{x}\right)_S \left(\frac{x}{\delta}\right)_A \right] \delta_0 \\ &= \left(\frac{x}{\delta}\right)_S \delta_r \end{aligned}$$

La position finale, et donc la résolution, est indépendante de l'énergie du faisceau, elle dépend seulement de la perte d'énergie dans la cible, d'où le nom. Les spectromètres du laboratoire Saturne (SPES = Spectromètre à Perte d'Énergie Saturne), le SPEG (Spectromètre à Perte d'Énergie Ganil) à Ganil, et la plupart des spectromètres modernes à haute résolution sont de ce type.

A titre d'exemple pour un ensemble optique existant la figure 12 montre l'enveloppe d'un faisceau dans un ensemble achromatique.

ARETE + salle G3 z jusqu a la cible SPEG
 CAS reglage achr sur cible spg
 EM-H= 5.00 V= 5.00 PI MM*MRD DW/W= 2.000 PM ← émittance
 02/02/93 14.44.56

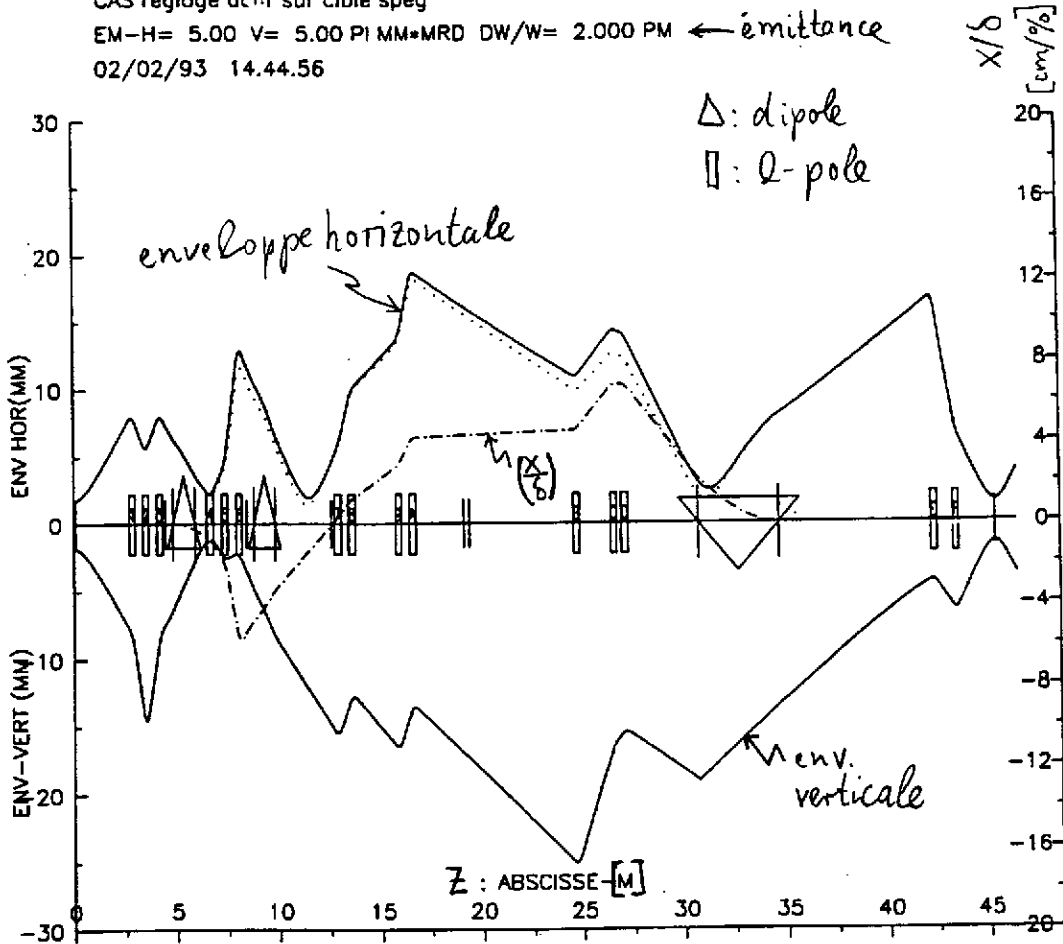


fig 12

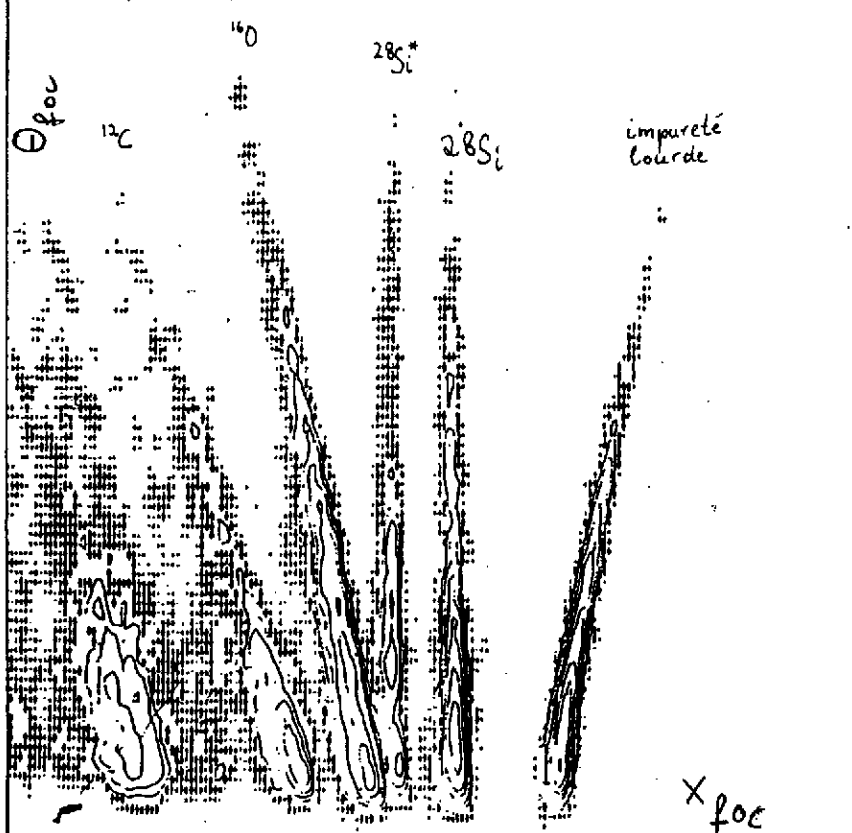


fig 13: diffusion élastique de ¹⁶O à 95 MeV/nucléon

La figure 13 montre une matrice $x_{\text{foc}} \cdot \theta_{\text{foc}}$ pour une diffusion élastique de ^{16}O à 95A.MeV. On observe la bonne résolution ($\delta_n = \Delta p/p \sim 10^{-4}$) ; un effet cinématique différent pour les différents constituants de la cible est clairement visible. Il est possible de corriger la perte de résolution due à l'ouverture angulaire du faisceau incident et l'effet de la cinématique au premier ordre. Ceci est obtenu en focalisant le faisceau incident derrière la cible ("recul de la focale"). Il est facile d'obtenir les équations correspondantes, très similaires à celles de l'achromate:

avec $\delta_r = \delta_{r_0} + k \theta_{\text{diff}}$ k : constante dépendante de la cinématique

$$\theta_{\text{diff}} = \theta_i + \theta_c \quad \left(\frac{x}{x}\right)_s \left(\frac{x}{\theta}\right)_A = \left(\frac{x}{\delta}\right)_s \cdot k$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial \theta_i} = 0$$

Avec une détermination de l'angle des particules après la diffusion il n'est pas nécessaire de compenser le recul de la focale au niveau du spectromètre, puisqu'il est possible de la reconstituer à n'importe quel endroit à partir de la mesure de x, θ . Par contre l'information sur l'angle de la particule incidente est perdue après la diffusion, et si l'effet cinématique n'est pas corrigé à ce niveau, il se traduit par une perte de résolution.

La séparation spatiale des différentes réactions permet d'en sélectionner par un système de fentes, et seulement les particules correspondant au domaine sélectionné vont atteindre les détecteurs. Ceci est fréquemment utilisé pour l'étude de résonances géantes, pour supprimer la diffusion élastique, largement dominante par rapport à la diffusion inélastique. Notons que la haute résolution dans ce contexte est importante pour avoir une coupure propre.

Une deuxième application des achromates est leur rôle comme filtre. Ceci est illustré sur la figure 14.

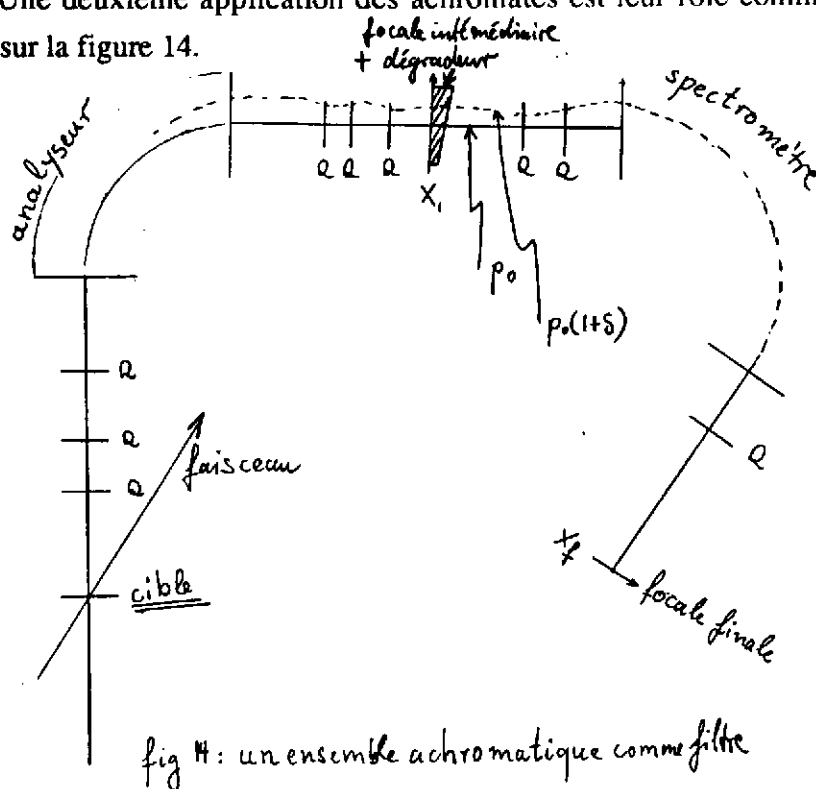
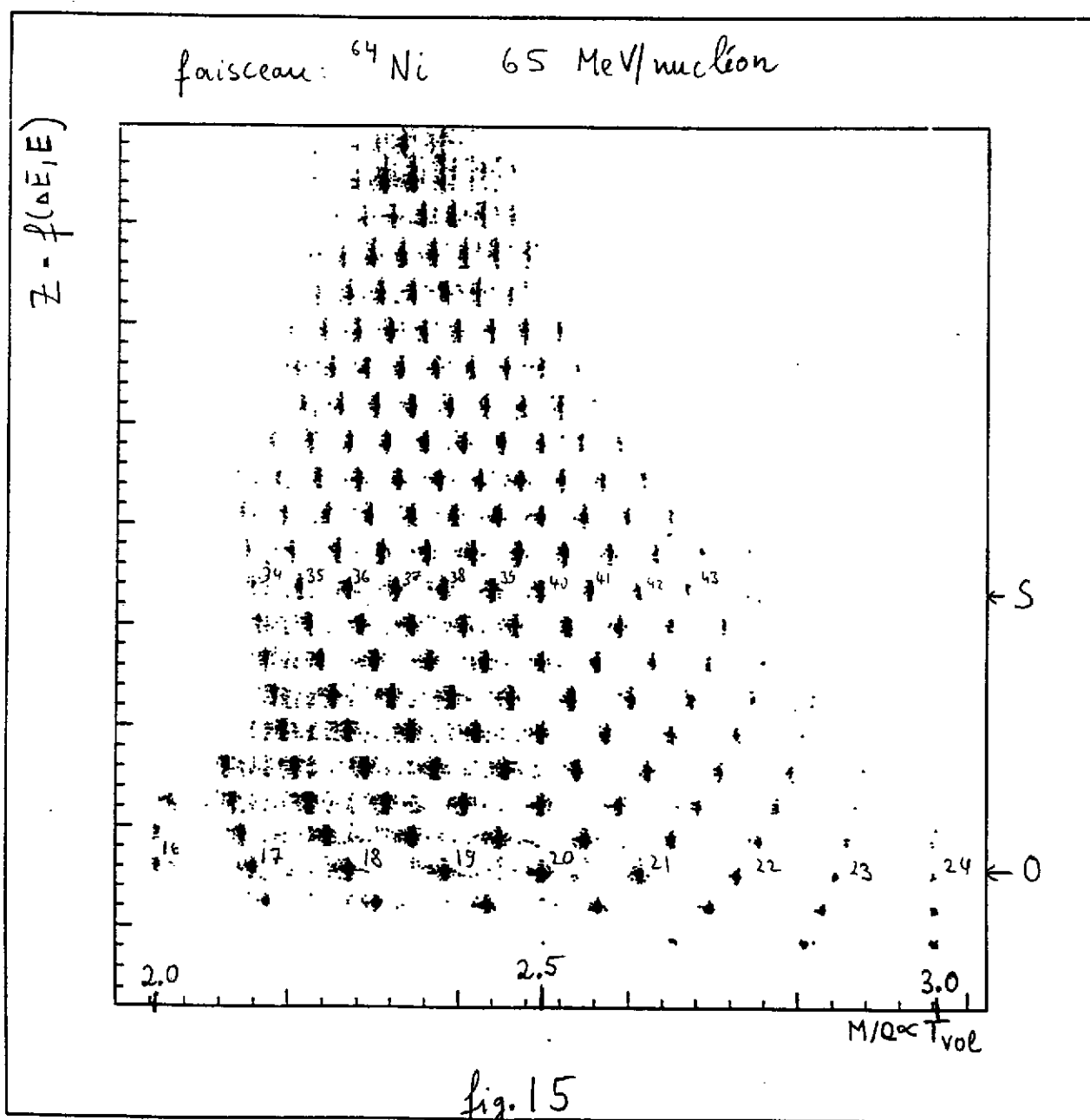


fig 14: un ensemble achromatique comme filtre

Par rapport au dispositif précédent, essentiellement la position de la cible est changée: elle se trouve maintenant avant l'analyseur. Les produits de réaction sont focalisés à la sortie du spectromètre. Dans cette configuration on peut sélectionner une rigidité magnétique et un angle optimisés pour la réaction d'intérêt. Les produits de réaction sont concentrés dans une petite région ($qq\text{ cm}^2$) et une détection de qualité peut être utilisée. Un exemple d'identification de noyaux loin de la stabilité obtenu avec SPEG avec la cible en amont de l'analyseur est montré sur la fig. 15.



Comme montre cette figure, la transmission des noyaux riches en neutrons a été favorisée. Souvent on souhaite parmi tous ces noyaux une sélection supplémentaire qui peut être obtenue par un dégradeur achromatique. Pour obtenir cette sélection supplémentaire, on met au niveau de la focale intermédiaire d'un achromate une feuille d'une épaisseur appropriée pour ralentir le faisceau secondaire (voir fig 14).

Mettons que $B\rho_2 = B\rho_1 - \Delta B\rho$, où $\Delta B\rho$ est le changement de la rigidité magnétique dans le ralentisseur. Nous avons donc

$$S = \frac{B\rho_2}{B\rho_1} = 1 - \frac{\Delta B\rho}{B\rho_1}$$

et avec une épaisseur variable $d = f(x)$ et $d(0) = f(0)$

$$S = 1 - \frac{\Delta B\rho}{B\rho_1} \cdot \frac{f(x)}{d_0}$$

en supposant une dépendance linéaire de $\Delta B\rho$ de l'épaisseur.

Avec les relations non relativistes pour la rigidité magnétique

$$B\rho = \frac{Mv}{Q \cdot e} \quad \Delta B\rho = \frac{M\Delta v}{Q \cdot e}$$

et la formule approximative pour la perte d'énergie dans un ralentisseur

$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{2} \mathcal{L} \frac{Mz^2}{E} = \mathcal{L} \frac{z^2}{v^2}$$

on obtient

$$S = \frac{\mathcal{L}}{M(1+\delta)^4 v_0^4} z^2 f(x)/d_0$$

Pour que l'ensemble soit achromatique, c'est à dire des ions du même type arrivent au même point à la sortie du spectromètre indépendamment de leur énergie, il faut que

$$\frac{\partial S}{\partial \delta} = 0$$

Ceci donne une équation différentielle pour $f(x)$, $f'/f = 4(x/\delta)^{-1}/(1+\delta)$
avec la solution:

$$f(x) = d_0 \left(1 + \left(\frac{x}{\delta} \right)^{-1} \cdot x \right)^4$$

où d_0 est l'épaisseur pour $x = 0$. Cette équation a la propriété agréable de ne pas dépendre du type d'ion, mais seulement de l'inverse du coefficient de dispersion. Au lieu de varier l'épaisseur du dégradeur, ce qui est assez difficile en pratique, on obtient cette dépendance par une courbure appropriée du dégradeur.

Une fois une épaisseur et un rapport $B\rho_1/B\rho_2$ choisis, tous les ions ayant la même valeur de S seront focalisés au même endroit à la sortie du spectromètre.

On obtient pour des ions complètement strippés, $Q = Z$.

$$S = \text{const.} \cdot M^3 / Z^2$$

Avec des fentes à la sortie de l'achromat, on sélectionne donc dans la charte nucléaire des noyaux $(N+Z)^3/Z^2 = \text{const}$, avec $N =$ nombre de neutrons. Ceci est illustré sur la figure 16 ci-dessous.

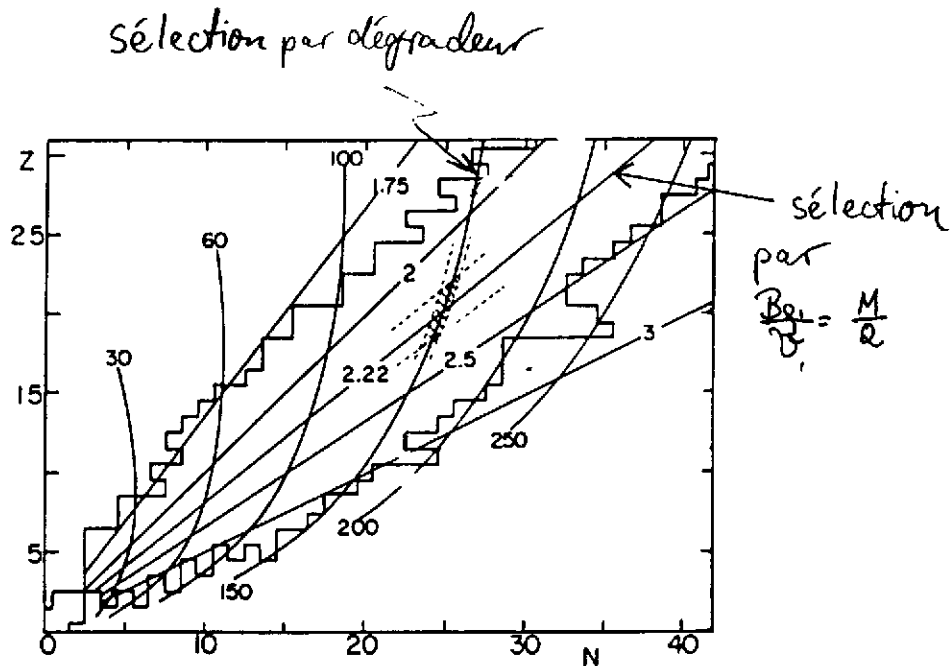


fig 16: Superposé à la charte nucléaire, les lignes de sélection pour différentes valeurs de S . Une sélection par la valeur de $B\rho_1$ des produits ayant une vitesse assez bien déterminée (produits de fragmentation, noyau de recul,...) implique une sélection de M/Q , qui est indiqué aussi. Chaque sélection a sa résolution, indiquée schématiquement.

L'avantage de cette méthode est sa simplicité, avec un coût proche de zéro, avec une bonne efficacité de sélection. Le désavantage de cette méthode est l'augmentation de l'émission due au straggling d'énergie et angulaire. Pour minimiser cette augmentation il faut mettre le dégradeur à un endroit de double focale, avec un grandissement angulaire

aussi fort que possible. Effectivement, la divergence angulaire après le ralentisseur pour des distributions gaussiennes est la racine de la somme de carrés

$$\theta = \sqrt{\theta_i^2 + \theta_{\text{strag}}^2}$$

où θ_i est la divergence angulaire avant le ralentisseur, et θ_{strag} le straggling angulaire. L'émittance étant le produit $x \cdot \theta$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \epsilon_n &= \left(\frac{x}{x_0}\right) x_0 \cdot \theta = \left(\frac{x}{x_0}\right) x_0 \sqrt{\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 \theta_0^2 + \theta_{\text{strag}}^2} \\ &= \left(\frac{x}{x_0}\right) x_0 \cdot \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) \theta_0 \sqrt{1 + \theta_{\text{strag}}^2 / \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 \theta_0^2} \\ &= x_0 \theta_0 \sqrt{1 + \theta_{\text{strag}}^2 / \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 \theta_0^2} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $(x/\theta) = R_{12} = 0$ et $\det R = 1$.

Pour des ions pas complètement épluchées, nous pouvons utiliser une autre méthode. A la place du dégradeur, nous pouvons mettre une feuille mince (10 - 1000 $\mu\text{g}/\text{cm}^2$) et elle va provoquer un changement d'état de charge et nous avons

$$B_{\beta_1} = \frac{M v_1}{e q_1} \quad B_{\beta_2} = \frac{M v_1}{e q_2}$$

Pour une feuille mince nous avons $v_2 = v_1$, et donc $B_{\beta_1}/B_{\beta_2} = q_2/q_1$. Pour une augmentation de l'état de charge d'une unité, on a $q_2 = q_1 + 1$ et $B_{\beta_1}/B_{\beta_2} = 1 + 1/q_1$; Un rapport donné B_{β_1}/B_{β_2} sélectionne alors un état de charge q_1 , et ceci sans augmentation de l'émittance.

b) Le filtre de vitesse

Nous avons vu, que le spectromètre magnétique avec un dégradeur achromatique sélectionne des noyaux suivant des lignes $S = \text{const } M^3/Z^2$ dans la charte nucléaire. Une réaction nucléaire peut fournir un autre critère de sélection. Dans un domaine de fragmentation du projectile à haute énergie, il y a $v \approx v_{\text{incident}}$, et avec $B\rho = Mv/(Ze)$ pour une valeur donnée de $B\rho$, on sélectionne un rapport M/Z . Ceci définit une droite dans la charte nucléaire (voir fig 16). L'intersection de cette droite avec $S = \text{const } M^3/Z^2$ est donc unique, à la résolution près. C'est un moyen de sélection très puissant, surtout à très haute énergie. La figure 17 montre un exemple de séparation obtenu avec le FRS à GSI-SIS.

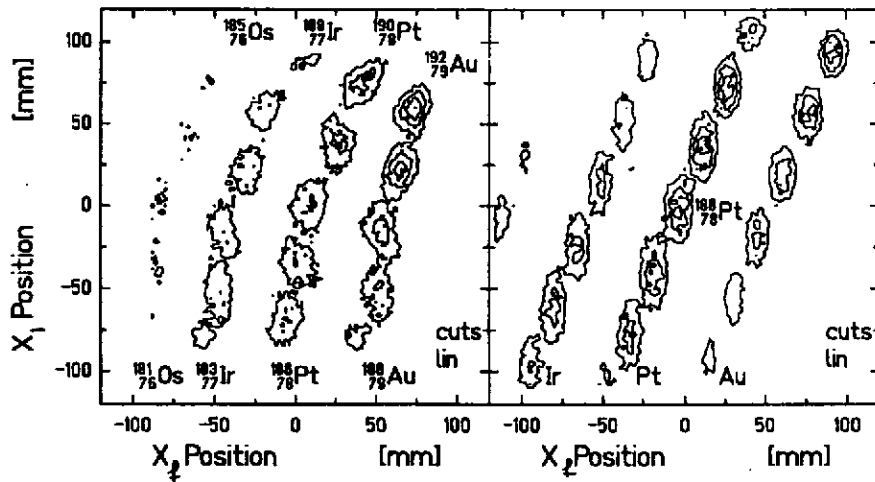


Fig 17: séparation mesurée (à gauche) et calculée (à droite) de fragments au FRS_GSI produits avec un faisceau ¹⁹⁷Au de 1GeV/nucléon. Le dégradeur était Al (1.4g/cm²).

Avec des fentes au niveau de la focale intermédiaire et finale un noyau unique peut être choisi. Au Ganil, à environ 50 MeV/nucléon, la dispersion est typiquement de $dv/v=0.05$, et surtout des noyaux d'une forte abondance vont être transmis ensemble avec les noyaux qu'on veut étudier. Un filtre de vitesse peut fournir un critère de sélection supplémentaire. Prenons une configuration simple, un filtre de Wien. Dans ce dispositif, les champs magnétique et électrique sont croisés (fig 18).

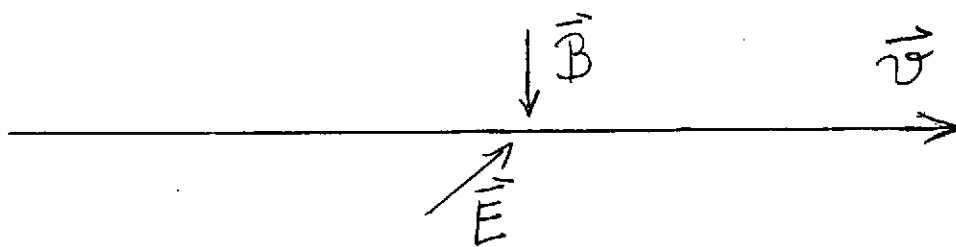


fig 18: filtre de Wien

Nous avons les équations suivantes:

$$m \ddot{\vec{x}} = Qe \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{force magnétique}$$

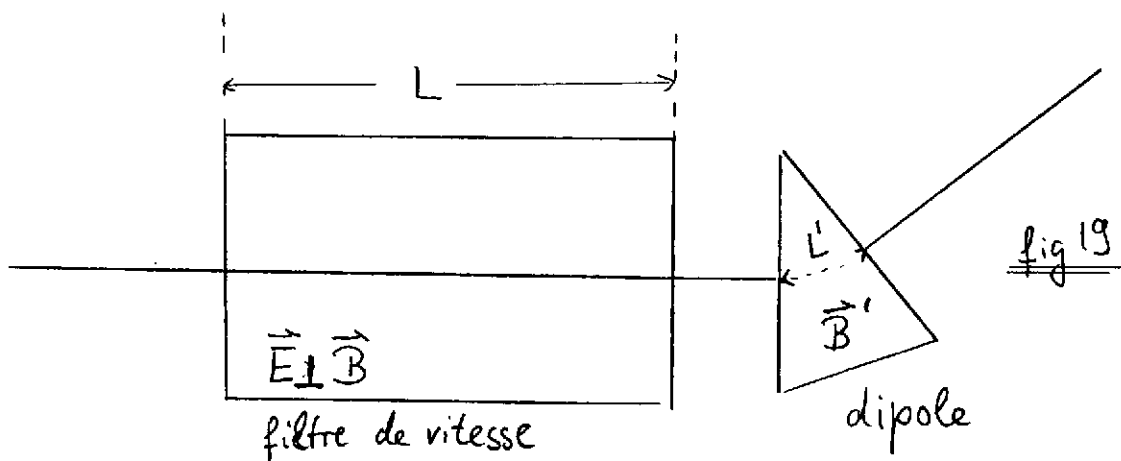
$$m \ddot{\vec{x}} = Qe \vec{E} \quad \text{" électrique}$$

$$m \ddot{\vec{x}} = Qe(\vec{v} B + E) \quad \left| \vec{B} \perp \vec{E} \right.$$

$$= Qe((v_0 B + E) + \Delta v B)$$

avec: $v = v_0 + \Delta v = v_0(1 + \delta)$

On peut imposer $v_0 B + E = 0$, donc les particules avec $\Delta v = 0$ ne subissent pas de force, et ne sont pas déviées. La résolution de ce filtre est limitée par la dispersion de vitesse de la réaction et/ou d'une sélection magnétique précédente. Pour améliorer la résolution, on peut transformer ce filtre de vitesse en spectromètre de masse (fig 19)



Avec: $\dot{x} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \Delta \theta \cdot v \quad \dot{x} \ll v$

$$m\ddot{x} = Qe \Delta v B$$

$$m\dot{x} = Qe \Delta v B \cdot t \quad \text{où } t = L/v \approx L/v_0$$

$$\delta = \Delta v/v$$

nous avons $\Delta \theta_{\text{Wien}} = \frac{Qe}{m v_0} \cdot B \cdot L \cdot \delta$

L'angle de déflexion dans l'aimant suivant le filtre est:

$$\theta_m = \frac{B' L' Qe}{m v_0} (1 - \delta)$$

L'angle total de déflexion θ_t est donc

$$\theta_t = \Delta \theta_{\text{Wien}} + \theta_m$$

$$= \left[\frac{Qe}{m v_0} B L - \frac{B' L' Qe}{m v_0} \right] \delta + \frac{B' L' Qe}{m v_0}$$

et si $BL = B'L'$, θ_t est indépendant de δ . Avec cette condition et avec $v_0 = -E/B$, on obtient

$$\theta_t = - \frac{B^2 L}{E} \frac{Qe}{m}$$

Après refocalisation, la coordonnée finale dépendra uniquement de Q/M . Quelques remarques sur les champs électriques: la formulation et solution mathématique des équations de mouvement est plus difficile que pour les champs magnétiques, parce qu'il y a gain d'énergie. Il est important de faire une estimation d'ordre de grandeur pour voir qu'il est plus difficile de réaliser un champ électrique qu'un champ magnétique comparable, dès que des vitesses importantes sont atteintes. Avec $v = E/B$, $v/c = E/(Bc)$ et $v/c = 0.3$, $B = 1\text{T}$, on aurait $E = 100\text{MV/m}$. La valeur de $B = 1\text{T}$ est très facile à réaliser avec des technologies classiques, et avec des supraconducteurs il est possible de dépasser 10T . Par contre le champ maximal possible actuellement est de l'ordre de 5MV/m . C'est pourquoi on trouve des lentilles électrostatiques essentiellement à basse énergie.

Un exemple de purification successive est montré sur les figures 20,21,22.

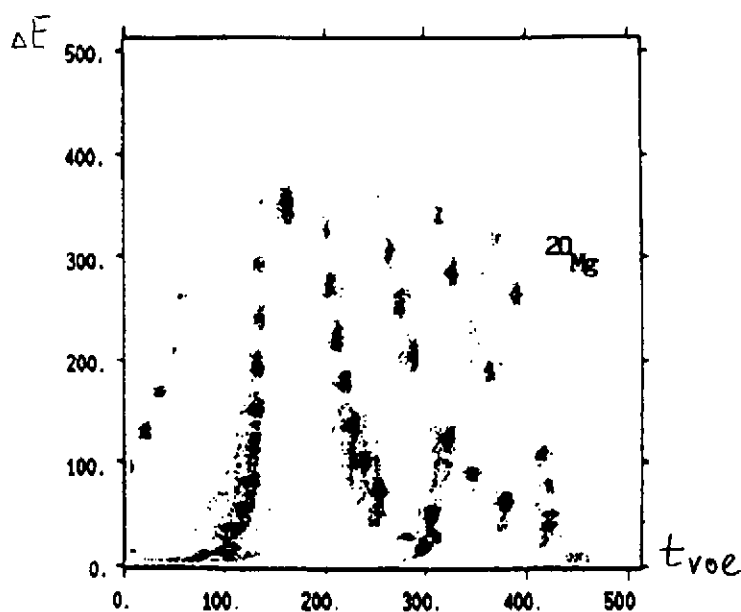


fig 20: sélection par un dipole magnétique des produits de réaction d'un faisceau de ^{24}Mg de 90MeV/nucléon sur une cible de Ni observée sur le spectromètre LISE au Ganil

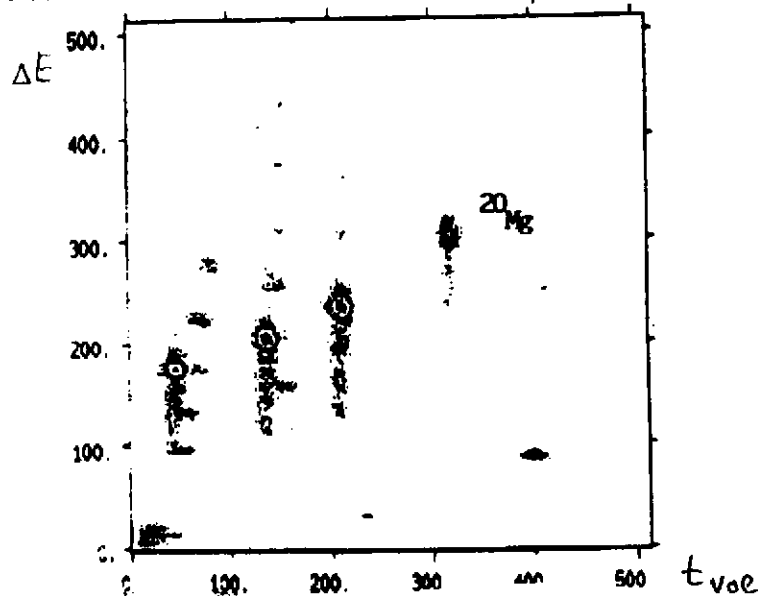


fig 21: idem, avec dégradeur achromatique en plus

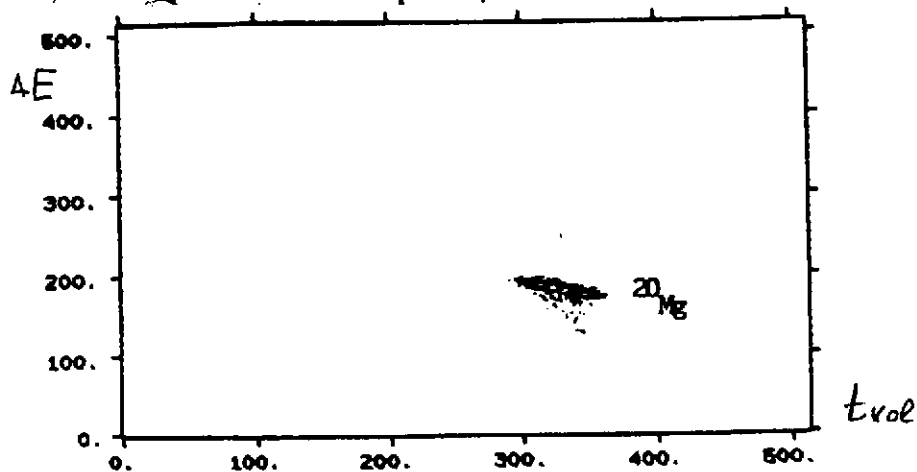
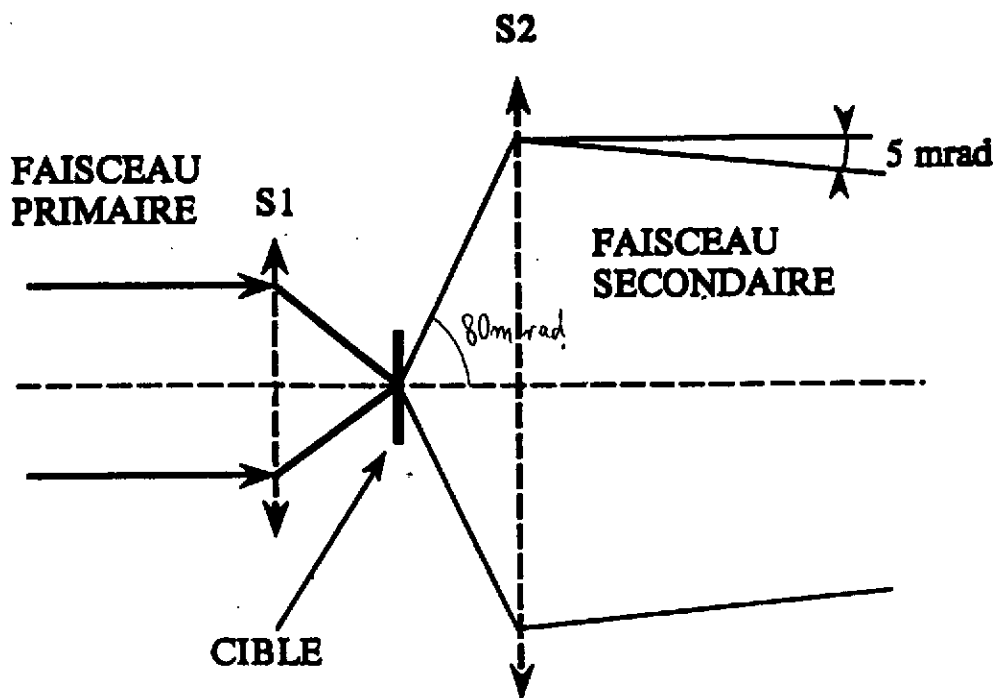


fig. 22: idem, avec dégradeur achromatique et filtre de Wien en plus

Comme autre exemple, nous allons montrer des spectres obtenus par un ensemble assez complexe de spectromètres.

La cible de production est montée dans SISSI, pour préparer un faisceau secondaire de faible émittance mais avec une grande acceptance, permettant d'obtenir une bonne résolution dans la suite tout en ayant une bonne transmission.

Le principe de ce dispositif est illustré sur la fig 23. Les considérations sont très similaires à celles discutées auparavant concernant l'influence du straggling angulaire. Une lentille de focale courte focalise le faisceau primaire sur une très petite tache, environ 0.2mm de rayon. La deuxième lentille, de très courte focale aussi, possède une très grande acceptance angulaire, 80 mrad. La divergence angulaire du faisceau secondaire est essentiellement déterminée par la réaction nucléaire. Dû à la petite dimension de la tache, le produit $\Delta x \Delta \theta = \pi \cdot 0.2 \text{ mm} \cdot 80 \text{ mrad} = 16\pi \text{ mm mrad}$ n'est pas très supérieure à celle d'un faisceau primaire, et le faisceau secondaire peut être transmis par une ligne de transport standard. Les lentilles sont des solénoïdes supraconducteurs.



Ce faisceau est transmis jusqu'au spectromètre LISE, où un stripping permet de purifier le faisceau. Une sélection supplémentaire est obtenue par le spectromètre de masse LISE III. L'ensemble de la ligne de transport est montré sur la fig 24

Les spectres d'identification finaux sont montrés sur la figure 25, quelques événements de ^{100}Sn ont pu être mis en évidence par M. Lewitowicz et al.

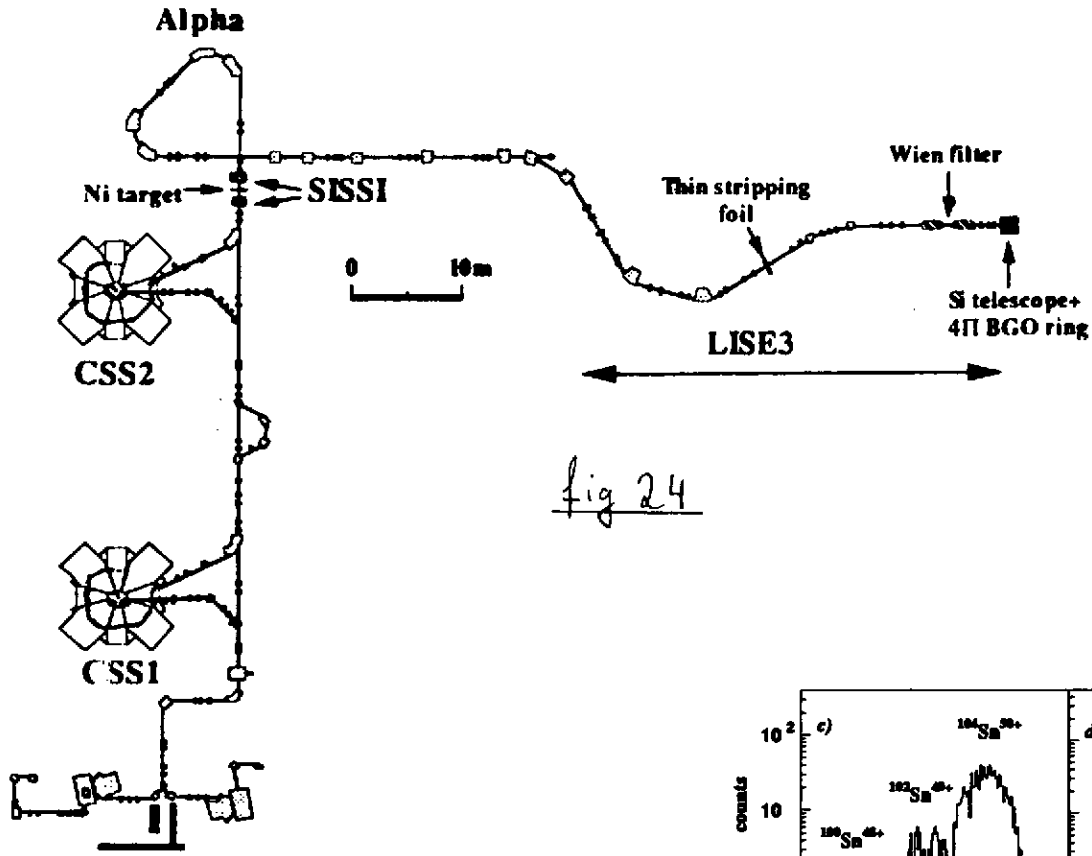
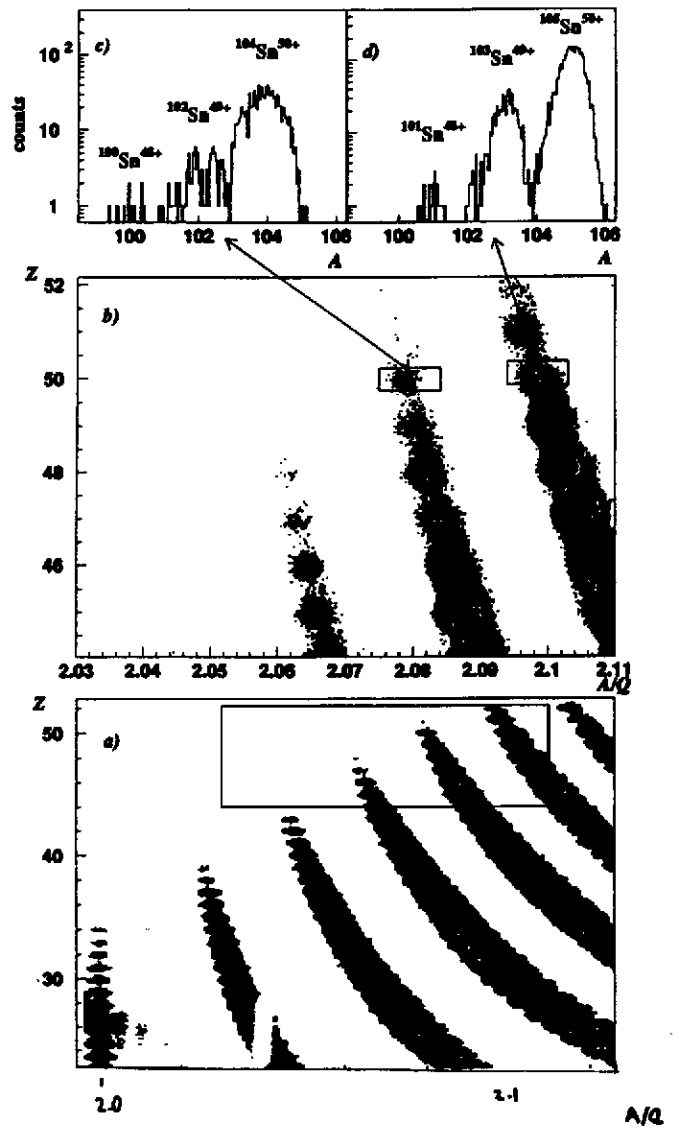


fig 24

fig 25: spectres d'identification au bout de LISE III



Pour conclure ce paragraphe, la table ci-dessous résume les caractéristiques de quelques spectromètres en service actuellement.

	LISE	SPEG	SPEG	RIKEN	GSI	MSCS	LNR	Sissi + α
	FR.	FR.	FR.	JAP.	FRG	USA	DUBNA	FR
	1984	1985	1986	1989	1990	1991	1991	1994
CONFIGURATION	2QD2Q Fd2QD 2QFa(2Q)	2QS2D QFa	L-CHANNEL + SPEG	3QSDSQ Fd2QSD S3QFa3 QFa	3QD2QFa 2QD3QFa 3QD2QFa 2QD3QFa	3QSD2Q Fd3QFa2 QSDSD 3QFa	2D2Ca Fd2Ca 2DFa(2Q)	~ 250 ~ 80
$\Delta\Omega$ (msr)	1.0	4.9	0.1	5.0	0.7-2.5	0.3-4.3	6.4	25
$\Delta p/p$ (%)	± 2.5	± 3.0	± 1.0	± 3.0	± 1.0	± 1.5	± 10	± 0.6
R p/Δp	800	10000	2000	2000	8000	3400	4360 (8720)	1000
B·p(T.M)	3.2	2.8	2.8	5.76	5-18	5.4-7.2	4.5	2.88
TAG. (g/cm ²)	~ 0.2	~ 0.2	~ 0.2	≤ 1.0	0.1-10	≤ 1.5	≤ 1.0	~ 0.2
LENGTH	18(24) M.40	13.8	116	21(27)	74	19(22)	14.5(18)	~ 120
MODE	achrom.	DISP.	achr.	achrom.	achrom.	achrom.	achrom.	achrom.

d) autres spectromètres de haute résolution

D'autres méthodes d'analyse et de sélection existent. Nous allons citer ici 3 exemples, tous basés sur la relation simple :

$$\frac{B}{\omega} = \frac{M}{Qe}$$

1) Le cyclotron

Le cyclotron a un champ magnétique de telle forme que, correction relativiste comprise, le temps par tour est indépendant de la vitesse. Pour des petites vitesses, où la correction relativiste est négligeable, ceci serait réalisé par un champ constant. Les nécessités de focalisation impliquent une forme plus complexe des champs. Sans entrer dans les détails, quelques ordres de grandeur. Le temps total de transit t_t est :

$$t_t = n_{\text{tour}} \cdot t_{\text{tour}}$$

n_{tour} : nombre de tours
 t_{tour} : temps/tour

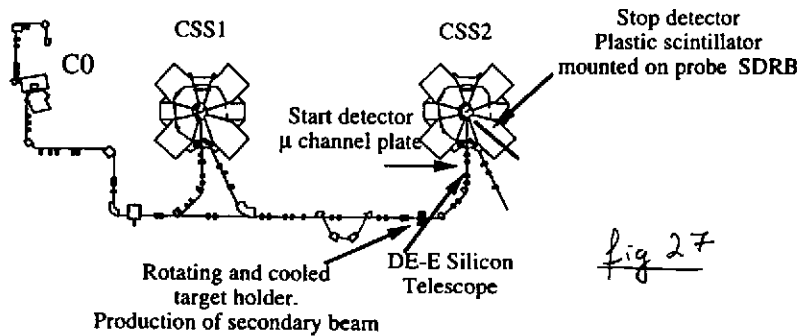
Des ordres de grandeur typiques sont

$$n_{\text{tour}} \sim 400, \quad t_{\text{tour}} \sim 500 \text{ ns}$$

avec une résolution en temps 1 ns, nous avons alors : $\Delta t/t \sim 1 \text{ ns} / 2 \times 10^5 \text{ ns} = 5 \cdot 10^{-6}$.

On peut alors séparer des isobares (même A/Q) en se rappelant que $\Delta t/t = \Delta M/M$.

Le dispositif expérimental schématisé est montré sur la figure 27, et un exemple de purification sur les figures 28 et 29.



Schematic diagram of the three cyclotron complex of GANIL. Indicated are the locations of the target and various detectors used in the present work.

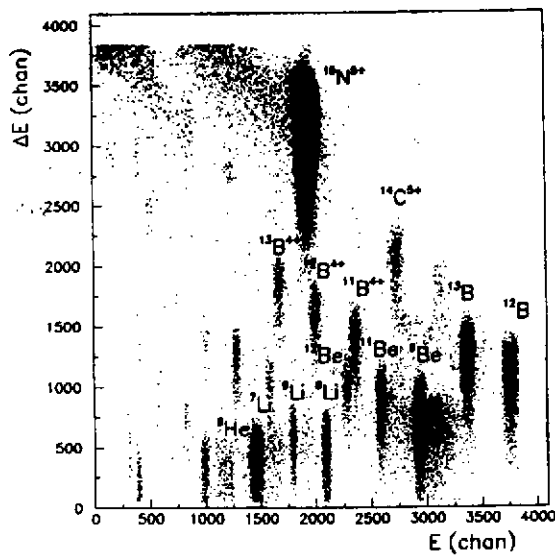


fig 28: identification du faisceau secondaire injecté dans CSS2; noter la dominance de ^{15}N

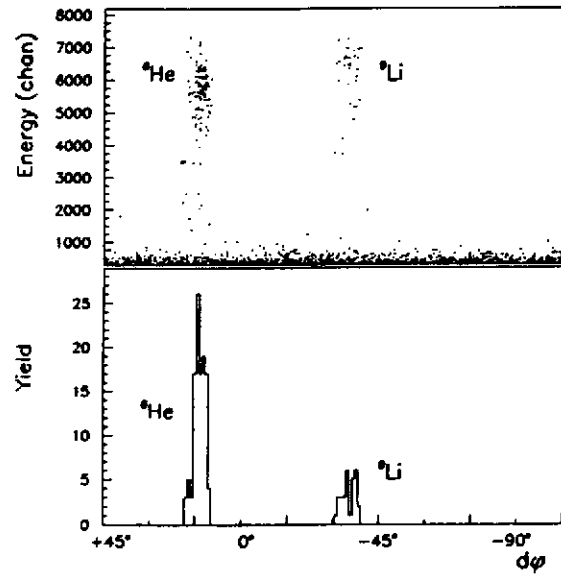


fig 29: identification après accélération à un rayon de 3m. Noter la disparition complète de ^{15}N . La différence de phase entre ^6He et ^9Li est une mesure directe de leur différence de masse.

2) les pièges ioniques

Les pièges ioniques sont un peu des anneaux de stockage des ions à des énergies de l'ordre de quelques eV ou moins, et leur taille se réduit en conséquence à quelques cm^3 . Les ions sont piégés par une combinaison de champs électrique et magnétique (fig 30). Leur mouvement dans un piège Penning obéit de nouveau à la relation $B/\omega = M/(Qe)$, et grâce au petit volume, leur fréquence peut être mesurée avec une très grande précision. Des résolutions supérieures à 10^{-6} ont été obtenues (fig 31)

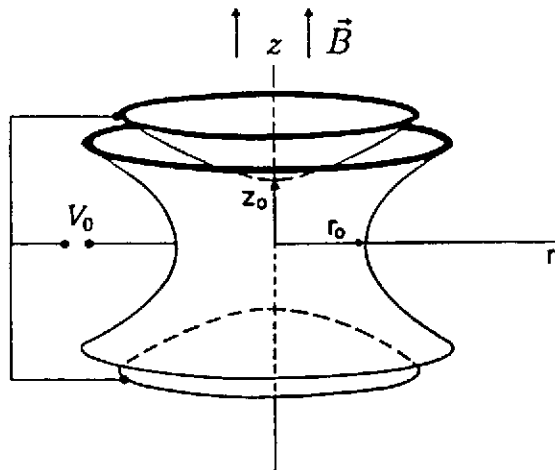


Fig. 30 Quadrupole ion trap. A dc voltage V is applied between the ring electrode and endcap electrodes for axial confinement of the ions. A homogeneous magnetic field in the direction of the symmetry axis (z -direction) serves for radial confinement in the case of a Penning trap and a radio-frequency quadrupole field in the case of the Paul trap.

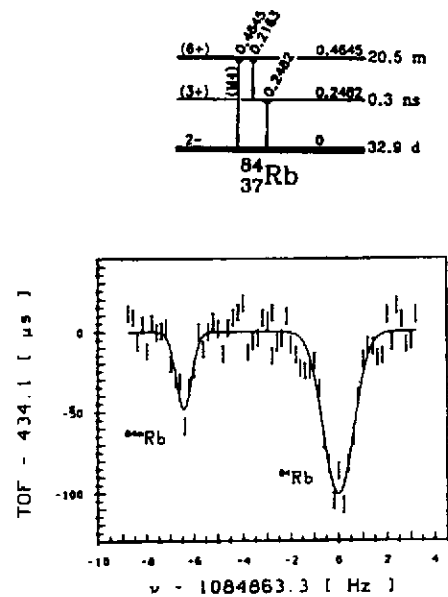


Fig 31 Cyclotron resonances and nuclear level scheme for ^{84}Rb and ^{84m}Rb .

The mass difference determined to be 463(7) keV is in full agreement with the known energy of the isomeric transition.

3) l'anneau de stockage

Un autre dispositif basé sur la même relation $B/\omega = M/(Qe)$ est l'anneau de stockage : les ions d'un faisceau primaire ou secondaire sont injectés dans un anneau. La figure 32 montre l'ensemble accélérateur-spectromètre-anneau de GSI. L'injection est limitée par l'acceptance de l'anneau (ϵ_{anneau}) et chaque tour ne peut coïncider avec l'espace déjà occupé par un autre tour. Ceci est une autre manifestation du théorème de Liouville. Donc le nombre de tours maximal d'une **injection multitour** n_i est donné par le rapport $n_i = \epsilon_{\text{anneau}}/\epsilon_{\text{injecté}}$. Une fois l'espace de phase rempli on arrête l'injection, et avec un vide

très poussé, les ions peuvent circuler en principe pour toujours dans cet anneau. On peut les "refroidir" soit par refroidissement "stochastique" (une déviation du moment longitudinal ou transversal du moment nominal d'un ensemble de particules est détectée et corrigée plus loin sur l'anneau par une petite accélération ou décélération) ou par électrons (un faisceau intense d'électrons de la vitesse nominale des ions "voyage" avec les ions sur un bout de l'anneau, qui diffusent sur les électrons si leur vitesse longitudinale ou transversale est différente de celle des électrons et transfèrent par diffusion coulombienne la différence de moment aux électrons, qui sont renouvelés continuellement). De cette façon, l'émittance du faisceau peut être réduite de plusieurs ordres de grandeur (10^{-2} - 10^{-3} par exemple). Après refroidissement, on peut injecter de nouveau dans l'espace de phase devenu disponible ("stacking"). Le refroidissement permet aussi d'allonger le temps de vie du faisceau dont l'émittance augmenterait avec le temps dû à la diffusion sur le gaz résiduel dans l'anneau. Un spectre de "Schottky", correspondant à l'analyse Fourier du signal induit dans un capteur par les ions qui circulent dans l'anneau, est montré sur la figure 33.

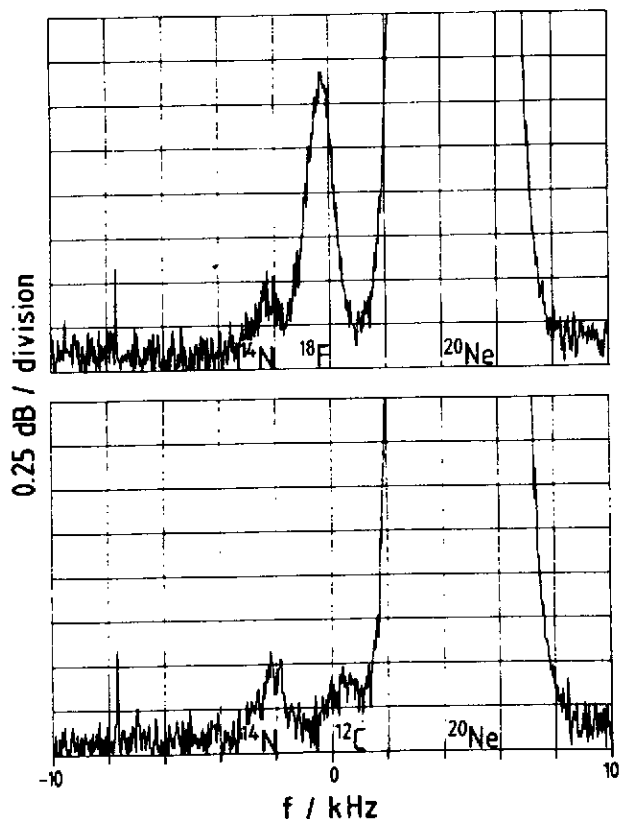
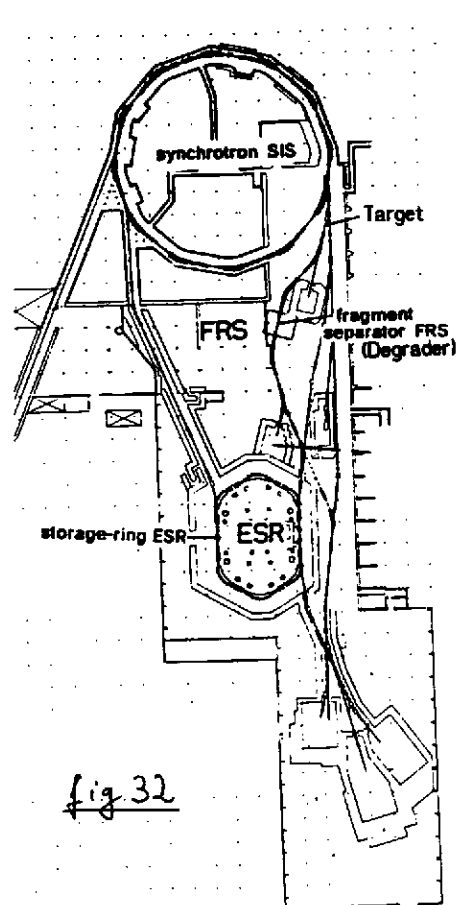


FIG. 33 Schottky spectrum at the 49th harmonic of the revolution frequency of 250 MeV/nucleon ^{18}F fragments measured directly after injection and cooling (top) and 12 h later (bottom). The maximum of the ^{18}F frequency distribution was at 83 293 kHz.

IV.Limitation de résolution par des aberrations

Jusqu'à maintenant, nous avons discuté seulement les effets du 1er ordre. Quand on veut des grandes acceptances et une haute résolution, des **aberrations** d'ordre supérieur deviennent importantes. Du point de vue formel, ceci correspond au terme d'ordre supérieur dans la série de Taylor avec au deuxième ordre des termes croisés dépendant de $\theta^2, \theta\delta, \theta\phi$, etc...et similaire pour les ordres plus élevés. On voit tout de suite que la complexité augmente, au lieu d'avoir une matrice 6×6 au 1er ordre, il y a 6 matrices 6×6 pour le 2ème ordre, 36 matrices 6×6 au 3ème ordre, etc.. A titre d'exemple, nous allons illustrer **une aberration géométrique** dans l'exemple du spectromètre π (voir chapitre , fig7).

Pour $x_0=0, \delta=0$ un calcul simple montre (voir figure 7)

$$x_f = 2g(\cos\theta - 1) = -g\theta^2$$

Dans la matrice x_f, θ_f cette dépendance produit une forme parabolique (figure 34) caractéristique pour ce terme $(x/\theta^2) = -\rho$.

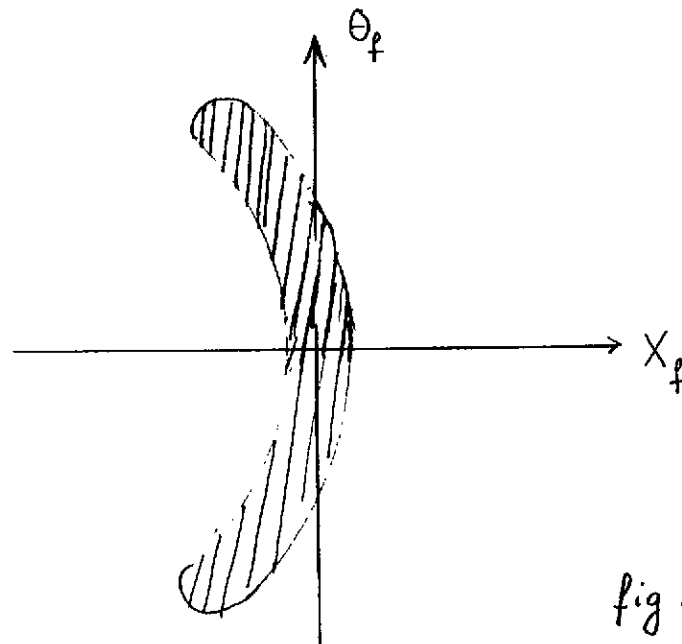


fig 34

fig 34:aberration géométrique

Un élargissement de la tache en x résulte si l'angle θ n'est pas mesuré. A titre d'exemple, prenons $\theta_{\max} = \pm 35$ mrad, la dispersion étant $(x/\delta) = 2\rho$, on trouve que la résolution est limitée à :

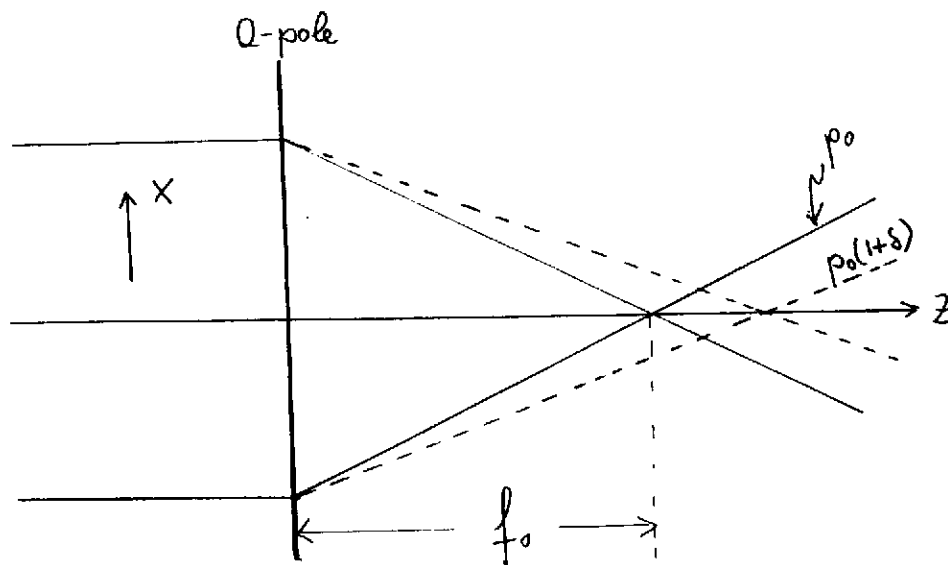
$$r = dx/(x/\delta) = (35 \cdot 10^{-3})^2 / 2 = 0.6 \cdot 10^{-3}$$

Un autre exemple est l'aberration chromatique d'un Q-pôle. Dans le chapitre II, nous avons obtenu pour la longueur focale f d'un Q-pôle:

$$f = \frac{MvR}{eQBL} = \frac{m v_0 R}{eQBL} (1+\delta) \stackrel{\text{def}}{=} f_0 (1+\delta)$$

La longueur focale est proportionnelle au moment, plus l'énergie augmente, plus la focale s'éloigne. Considérons une focale pour $\delta=0$; dans ce cas nous avons (voir figure 35), pour un faisceau parfaitement parallèle avant la lentille

$$x = -(f - f_0) \theta_f = -f_0 \cdot \theta_f \cdot \delta = \left(\frac{x}{\theta \delta}\right) \theta \delta$$



La focale pour des moments plus grands est plus loin. Ce terme $x/\theta\delta$ est assez grand : pour avoir un ordre de grandeur mettons

$$\delta = 5 \times 10^{-2}$$

$$\theta_f = 35 \text{ mrad}$$

$$f_0 = 2 \text{ m}$$

$$\rightarrow |x| = \left| \left(\frac{x}{\theta \delta}\right) \cdot \theta \delta \right| = 2 \text{ m} \cdot 35 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 3.5 \text{ mm}$$

Dans une région dispersive (après un spectromètre, $\frac{x}{\delta} \neq 0$) ce terme implique une inclinaison de la focale.

Deux méthodes peuvent être adoptées pour éliminer ou diminuer l'effet de ces aberrations :

1) Correction par des éléments électromagnétiques d'ordres plus élevés. Il s'agit ici de sextupoles, faces courbes des aimants, etc.... Notons qu'il faut partir d'un ensemble qui au 1er ordre a déjà des petites aberrations. La symétrie de l'ensemble joue un rôle important: un spectromètre en "S" comme le FRS-GSI est antisymétrique, un spectromètre comme SPEG-Ganil symétrique, ce qui a des conséquences très différentes pour les aberrations. Dû au grand nombre des termes, en général une correction d'un terme va en introduire un autre. Ceci est appelé la solution "**hardware**".

2) Comme montré sur la figure 34 pour le terme $\frac{x}{\theta}$, si nous mesurons l'angle θ nous pouvons éliminer les aberrations en fonction de θ^2 de la mesure de x . Ceci est appelé la solution "**software**". Ce qui nous intéresse dans l'étude d'une réaction nucléaire, sont les paramètres décrivant les particules avant l'appareil \vec{x}_i . Formellement nous pouvons écrire :

$$\vec{x}_f = M(\vec{x}_i) \vec{x}_i$$

où M est la matrice exacte à tous les ordres qui donne la relation entre l'objet et l'image. Nous pouvons faire une série de Taylor de cette matrice M

$$M = R + M_1 + \dots$$

et obtenir par itération $\vec{x}_i^{(0)} = R^{-1} \vec{x}_f$

$$\vec{x}_i^{(1)} = R^{-1} \vec{x}_f - R^{-1} M_1(\vec{x}_i^{(0)}) \vec{x}_i^{(0)}$$

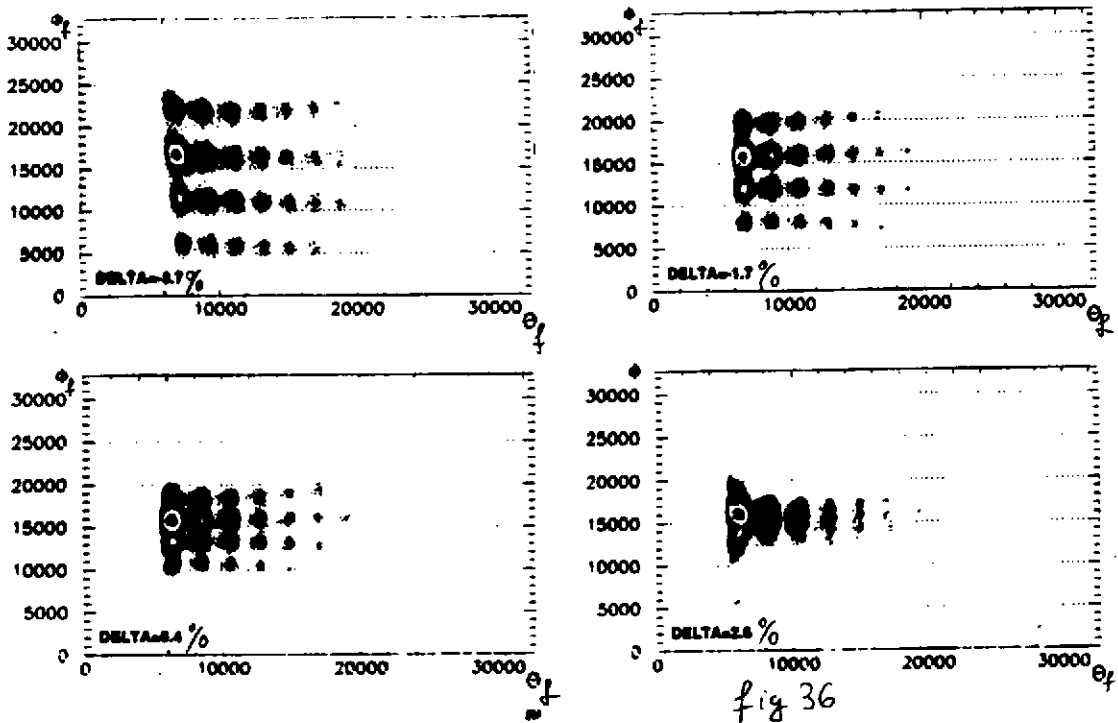
M_1 , par construction, dépend seulement linéairement de \vec{x}_i , etc.

Deux observations par rapport à cette solution "soft".

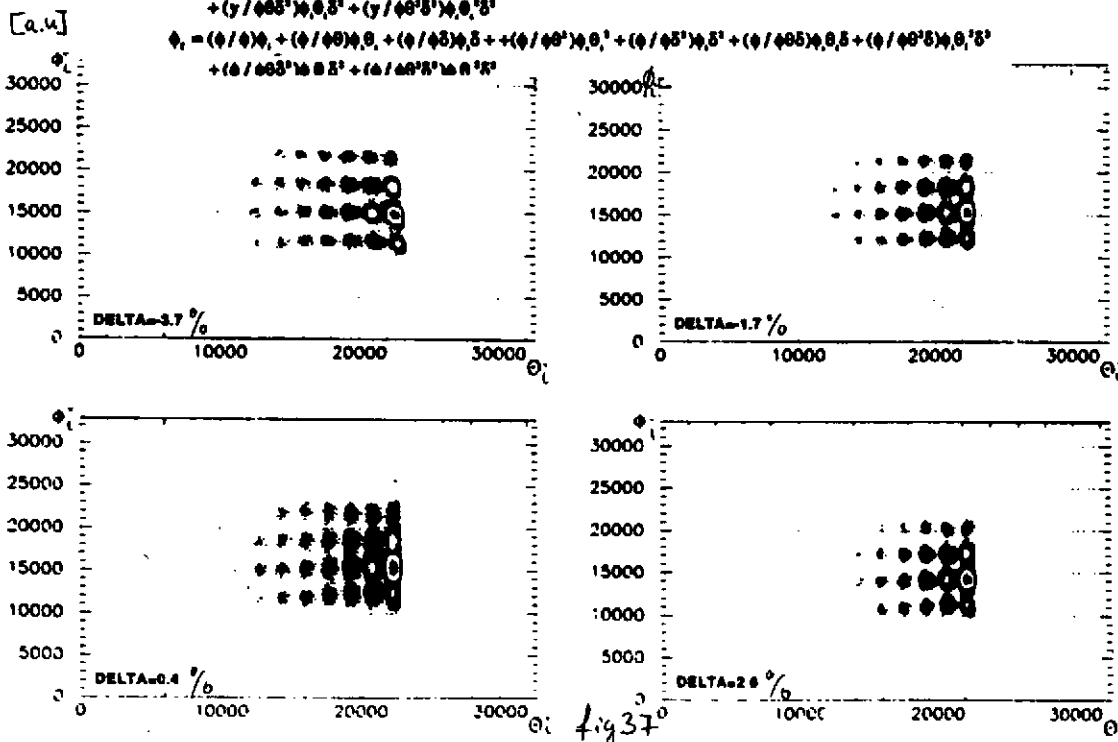
a) Il faut des mesures précises de tous les paramètres intervenant d'une façon couplée dans l'inversion. Notons ici aussi un autre point important: nous avons vu que la résolution des spectromètres est limitée par l'émittance du faisceau. Une mesure des coordonnées au début (par exemple avant la cible) et à la fin (par exemple sur la focale) de l'appareillage permet de réduire éventuellement cette émittance: elle ne dépendra que de la résolution des détecteurs. Supposons par exemple une mesure de la position et de l'angle avec une résolution (demi-largeur) de 0.1mm et 1mrad respectivement. L'émittance définie ainsi est donc $\epsilon = 0.1 \pi$ mm mrad, très bonne par rapport à celle d'un faisceau standard. Mais il faut que la perturbation introduite par les détecteurs sur les trajectoires des particules soient inférieures à cette valeur, ce qui est souvent difficile ou impossible.

b) Une correction "soft" ne résoud pas la fonction de filtre de l'appareillage (exemple : suppression de la diffusion élastique par rapport à la diffusion inélastique).

Les figures 36,37 qui suivent montrent un exemple de correction "soft" obtenue par le programme ABER (J.M. Casandjian) pour SPEG. Une écumeoire au voisinage de la cible définit une grille régulière en θ_x, ϕ_z . Les images de cette écumeoire sont observées sur la focale de SPEG pour différents moments et sont montrés sur la figure 36. Après une correction "soft" dont les termes sont sur la figure 37, la grille initiale est presque parfaitement restituée. Notons que de termes jusqu'au 5ème ordre interviennent.



$$\begin{aligned}
 x_i &= (x/\theta)_0 + (x/\theta)_1 + (x/\theta^2)_0 + (x/\theta^2)_1 + (x/\theta^2)_2 + (x/\theta^2)_3 + (x/\theta^2)_4 + (x/\theta^2)_5 \\
 \theta_i &= (\theta/\theta)_0 + (\theta/\theta)_1 + (\theta/\theta^2)_0 + (\theta/\theta^2)_1 + (\theta/\theta^2)_2 + (\theta/\theta^2)_3 + (\theta/\theta^2)_4 + (\theta/\theta^2)_5 \\
 y_i &= (y/\phi)_0 + (y/\phi)_1 + (y/\phi)_2 + (y/\phi)_3 + (y/\phi)_4 + (y/\phi)_5 + (y/\phi^2)_0 + (y/\phi^2)_1 + (y/\phi^2)_2 + (y/\phi^2)_3 + (y/\phi^2)_4 + (y/\phi^2)_5 \\
 &\quad + (y/\phi^2)_6 + (y/\phi^2)_7 + (y/\phi^2)_8 + (y/\phi^2)_9 \\
 \phi_i &= (\phi/\phi)_0 + (\phi/\phi)_1 + (\phi/\phi)_2 + (\phi/\phi)_3 + (\phi/\phi)_4 + (\phi/\phi)_5 + (\phi/\phi^2)_0 + (\phi/\phi^2)_1 + (\phi/\phi^2)_2 + (\phi/\phi^2)_3 + (\phi/\phi^2)_4 + (\phi/\phi^2)_5 \\
 &\quad + (\phi/\phi^2)_6 + (\phi/\phi^2)_7 + (\phi/\phi^2)_8 + (\phi/\phi^2)_9
 \end{aligned}$$



V. Références

À la place d'une conclusion, voici quelques références pour ceux qui veulent approfondir les sujets abordés dans les pages précédentes.

En ce qui concerne le **formalisme de calcul de transport de particules chargées** il n'y a pas (à ma connaissance) une référence de base facile d'accès. Une bonne introduction au sujet est contenue dans: Ensembles de détection magnétique du Laboratoire National Saturne, cycle de séminaires, Saclay 1980, LNS.

Plus facile à se procurer, et en même temps indispensable pour tous ceux qui veulent effectuer eux-mêmes des calculs est le mode d'emploi du programme TRANSPORT, note CERN 80-04 (K.L.Brown, D.C.Carey, Ch.Iselin et F.Rothacker). Il contient des chapitres d'introduction. Pour ceux possédant des calculateurs VAX, il existe INTRAN, " a userfriendly interface to transport", développé à TRIUMF(C.Kost). Ces programmes traitent le transport de particules avec des termes jusqu'au 3ème ordre.

Pour une solution numérique des équations de mouvement dans des champs, sans passer par les approximations de l'approche matricielle, on calcule les **trajectoires** dans les champs construits analytiquement ou mesurés. Ce type d'étude vient en général après une étude matricielle, et le but est souvent de vérifier les aberrations à tous les ordres dans des champs aussi réalistes que possible. Le programme le plus facilement accessible et très performant est ZGOUBI. On peut contacter F.Méot au LNS-Saclay pour des plus amples renseignements.

Les spectromètres de haute résolution sont traités par exemple dans: " Workshop on High-Resolution, Large Acceptance Spectrometers.", Argonne National Laboratory, 1981, note ANL/PHY-81-2; Proceedings of the International Symposium on Heavy Ion Research with Magnetic Spectrometers, East Lansing 1989, NSCL, MSU, ed. N.Anantaraman et B.Sherrill.

La méthode du dégradeur achromatique est traitée en détail dans J.P.Dufour et al., NIM A248(1986)267. La méthode du remplissage de spectromètres par un gaz comme moyen de séparation, essentiellement applicable à basse énergie, qui n' a pas été exposée ici, est décrite par C.B.Fulmer et al, Phys.Rev.109(1958)94.

Des articles sur les pièges ioniques se trouvent dans "Proceedings of the 12th International Conference on Electromagnetic Isotope Separators and Techniques Related to their Applications (EMIS-12), Sendai, Japon, 1991, NIM in Physics Research B70(1992)1-602, et en particulier les contributions de K.J. Kluge et al, page 473, et de R.B.Moore et al, page 482. Ce volume contient beaucoup d'autres renseignements sur des équipements et évolutions récents, en particulier sur le FRS-GSI, LISE-Ganil, le RIPS-Riken etc. Des renseignements sur l'anneau de stockage de GSI et son utilisation avec refroidissement se trouvent dans H.Geissel et al, Phys.Rev. Lett.68(1992)3412.

Une revue récente sur les techniques de refroidissement peut être trouvée dans "Workshop on Beam Cooling and Related Topics", Montreux, Suisse, ed.J.Bosser, note CERN 94-03.

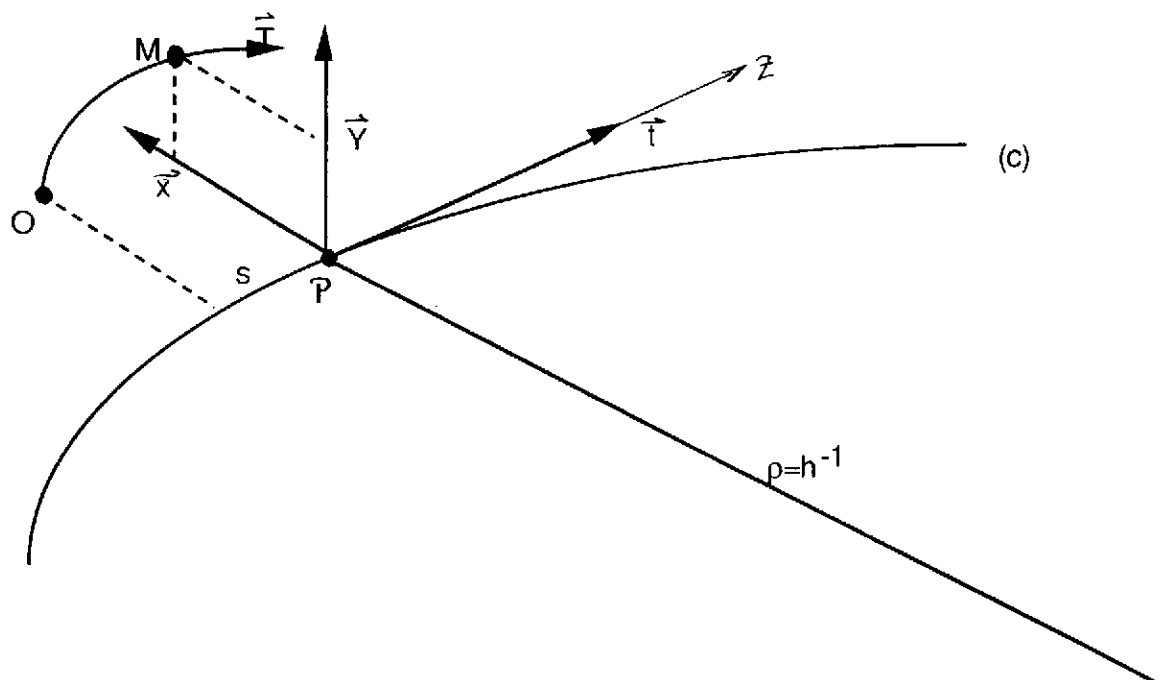
Un article récent sur le problème de correction des aberrations par "software" est M.Berz et al.,Phys.Rev. C 47(1993)537, et par "hardware" W.Mittig et al.,NIM A 334(1993)557. Dans la plupart des descriptions de spectromètres cette problématique est traitée et les comptes rendues des conférences EMIS sont une bonne source d'information.

Annexe : Optique au second ordre dans les prismes magnétiques

(extrait du cours de R.A.Beck à l'INSTN-Saclay 1970)

A1. Equation du mouvement

soit une courbe de référence (c) pour l'instant quelconque et un point O fixe par rapport à (c). Soit (voir fig A1) :



$\vec{M} = \vec{OM}$ = vecteur de position d'une particule ponctuelle M de charge e
et de quantité de mouvement p,

$S = \vec{OM}$ = longueur de l'arc de trajectoire décrit depuis le point O,

$d\vec{M}/dS = \vec{T}$ = vecteur limité tangent en M à la trajectoire.

En désignant le temps par τ on a :

$\vec{v} = d\vec{M}/d\tau = \vec{T} dS/d\tau = v\vec{T}$ = vitesse de M

$\vec{p} = p\vec{T}$ = quantité de mouvement de la particule.

L'équation fondamentale de la dynamique *

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

s'écrit en faisant le changement de variable $dS = v d\tau$

$$\frac{d}{dS} (p\vec{T}) = e\vec{T} \wedge \vec{B}$$

Cette équation montre que $dp/dS = 0$ puisque $\vec{T} (d\vec{T}/dS) = 0$. Donc $p = \text{cte}$.

c'est-à-dire un champ magnétique statique ne travaille pas. Il reste donc

$$p \frac{d\vec{T}}{dS} = e (\vec{T} \wedge \vec{B})$$

Soit P la projection de M sur (C) et s l'abscisse curviligne de P sur (e) comptée à partir de la projection de O sur (C). Calculons \vec{T} et $d\vec{T}/dS$ en fonction de \vec{M} , S et de leurs dérivées par rapport à s.

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{dS} = \frac{d\vec{M}}{ds} \frac{ds}{dS} = \frac{\vec{M}'}{S'}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{1}{S'} \frac{d}{ds} \frac{\vec{M}'}{S'} = \frac{1}{(S')^2} (\vec{M}'' - \frac{S'' \vec{M}'}{S'}) = \frac{1}{(S')^2} \left[\vec{M}'' - \frac{1}{2} \frac{\vec{M}'}{(S')^2} \frac{d}{ds} (S')^2 \right]$$

Ainsi l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\vec{M}'' - \frac{1}{2} \frac{\vec{M}'}{(S')^2} \frac{d}{ds} (S')^2 = \frac{e}{p} S' (\vec{M}' \wedge \vec{B})$$

Considérons le trièdre orthonomé direct $P\vec{x}\vec{y}\vec{t}$ tel que $\vec{t} = d\vec{P}/ds$ et \vec{x} = normale unité dirigée vers le côté convexe de (c)

Supposons que le référence (c) soit une courbe plane. Dans ce cas on a :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = -\frac{\vec{x}}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{t}}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{y}}{ds} = 0$$

où ρ = rayon de courbure de (c). On pose $h = \rho^{-1}$.

Le vecteur de position de M s'écrit alors :

$$\vec{M} = P \vec{x} + y \vec{y}$$

d'où

* Par un abus de langage l'induction magnétique \vec{B} est généralement appelé champ magnétique par les opticiens corpusculaires.

$$d\vec{M} = x d\vec{x} + \vec{y} dy + \dot{t} (1+hx) ds$$

Calculons les termes \vec{M}' , \vec{M}'' , $(S')^2$ et $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (S')^2$ qui interviennent dans l'équation du mouvement ; on a d'une part :

$$(S')^2 = x'^2 + y'^2 + (1+hx)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (S')^2 = x' x'' + y' y'' + (1+hx) (hx' + h'x)$$

et d'autre part

$$\vec{M}' = x' \vec{x} + y' \vec{y} + (1+hx) \dot{t}$$

$$\vec{M}'' = [x'' - (1+hx) h] \vec{x} + y'' \vec{y} + (2h x' + h' x) \dot{t}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\left\{ [x'' - h(1+hx)] - \frac{x'}{(S')^2} [x'x'' + y'y'' + (1+hx)(hx' + h'x)] \right\} \vec{x}$$

$$+ \left\{ y'' - \frac{y'}{(S')^2} [x'x'' + y'y'' + (1+hx)(hx' + h'x)] \right\} \vec{y}$$

$$+ \left\{ [2hx' + h'x] - \frac{1+hx}{(S')^2} [x'x'' + y'y'' + (1+hx)(hx' + h'x)] \right\} \dot{t}$$

$$= \frac{e}{p} S' \left\{ [y' B_s - (1+hx) B_y] \vec{x} + [(1+hx) B_x - x' B_s] \vec{y} + [x' B_y - y' B_x] \dot{t} \right\}$$

Cette forme est valable à tous les ordres : elle suppose seulement que la référence (c) est ferme. D'après l'équation ci-dessus, cette référence $x = 0$, $y = 0$ est d'ailleurs trajectoire pour une particule de quantité de mouvement p_0 si :

$$h(s) = \frac{e}{p_0} B_y(0,0,s) = h_0(s)$$

$$B_x(0,0,s) = 0^*$$

En effet, seule la composante B_s ne sollicite pas une particule se déplaçant sur la référence.

Au second ordre en x et y et leurs dérivées on obtient en projection sur \vec{x} et \vec{y} :

$$x'' - h(1+hx) - x'(hx' + h'x) = \frac{e}{p} S' [y' B_1 - (1+hx) B_y]$$

$$y'' - z'(hx' + h'x) = \frac{e}{p} S' [(1+hx) B_x - x' B_1]$$

A2. Développement du champ magnétique statique à plan d'antisymétrie

* D'après ce qui suit, cette condition est réalisée lorsque le champ possède un plan d'antisymétrie.

Un champ magnétique statique dérive d'un potentiel scalaire ϕ qui vérifie $\Delta\phi = 0$ dans toute région de l'espace qui n'est pas parcourue par un courant, en particulier par le faisceau ($j=0$). En effet :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\text{grad}} \phi \quad \text{puisque } \vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0 \quad \text{puisque } \Delta = \text{div grad}$$

Dans la pratique on suppose que cette hypothèse est réalisée, étant donné que le champ de charge d'espace est très petit par rapport au champ principal. Aussi les considérations sur le champ qui suivent ne concernent-elles que le champ principal

Nous supposons que le plan $y = 0$ contenant la courbe de référence (c) est un plan d'antisymétrie pour le champ, c'est à dire :

$$B_x(x, y, s) = -B_x(x, y, s)$$

$$B_y(\quad) = B_y(\quad)$$

$$B_s(\quad) = -B_s(\quad)$$

Il en résulte en particulier que le champ $\vec{B}(x, 0, s)$ dans le plan d'antisymétrie est normal à ce plan, de sorte que toute trajectoire, dont les conditions initiales sont dans ce plan, y reste ultérieurement.

Posons donc :

$$\phi(x, y, s) = \left(A_{10} + A_{11}x + A_{12} \frac{x^2}{2!} + A_{13} \frac{x^3}{3!} + \dots \right) y + \left(A_{30} + A_{31}x + A_{32} \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\alpha} A_{2n+1, n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

En écrivant que cette expression est solution de :

$$\Delta\phi = \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+hx) \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1+hx} \frac{\partial\phi}{\partial s} \right] = 0$$

On obtient la formule de récurrence sur les coefficients :

$$\begin{aligned} -A_{2m+3, n} &= A''_{2m+1, n} + nhA''_{2m+1, n-1} - nh'A'_{2m+1, n-1} + A_{2m+1, n+2} \\ &+ (3n+1)hA_{2m+1, n+1} + n(3n-1)h^2 A_{2m+1, n} + n(n-1)^2 h^3 A_{2m+1, n-1} \end{aligned}$$

$$+ 3nhA_{2m+3,n-1} + 3n(n-1)h^3 A_{2m+3,n-2} + n(n-1)(n-2)h^3 A_{2m+3,n-3}$$

où les coefficients ayant un ou les deux indices négatifs sont nuls.

Il est ainsi possible d'exprimer tous les coefficients $A_{2m+1,n}$ en fonction des $A_{1,n}$ qui caractérisent le champ dans le plan d'antisymétrie :

$$B_x(x,0,s) = 0$$

$$B_y(x,0,s) = A_{10} + A_{11}x + A_{12}\frac{x^2}{2!} + \dots = (B_y)_0 + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$B_s(x,0,s) = 0$$

puisque :

$$A_{1,n}(s) = \left(\frac{\partial^n B_y}{\partial x^n}\right)_0$$

L'indice 0 signifie : $x = 0$, $y = 0$. Les composantes successives sont respectivement appelées composants dipolaire, quadripolaire, hexapolaire, octupolaire, etc.

La connaissance du champ $\vec{B}(x,0,s)$ dans le plan d'antisymétrie suffit donc pour déterminer le champ dans tout l'espace :

$$B_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n+1} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$B_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

$$B_s = \frac{1}{1+hx} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{1+hx} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A'_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Explicitons les coefficients jusqu'au 4ème degré en x et y :

$$A_{30} = A''_{10} - A_{12} - h A_{11}$$

$$A_{31} = -A''_{11} + 2h A''_{10} + h' A'_{10} - A_{13} - h A_{12} + h^2 A_{11}$$

$$A_{32} = -A''_{12} + 4h A''_{11} + 2h' A'_{11} - 6h^2 A''_{10} - 6hh' A'_{10} - A_{14} - h A_{13} + 2h^2 A_{22} - 2h^3 A_{11}$$

$$A_{33} = -A''_{13} + 6h A''_{12} + 3h' A'_{12} - 18h^2 A''_{11} - 18hh' A'_{11} + 24h^3 A''_{10} + 36h^2 h' A'_{10} \\ - A_{15} - h A_{14} + 3h^2 A_{13} - 6h^3 A_{12} + 6h^4 A_{11}$$

Dans le cas particulier d'un champ à symétrie de révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan d'antisymétrie on peut choisir une courbe de référence circulaire centrée sur cet axe. Dans ce cas, par rapport à la variable s :

$$h(s) = \text{cte} \quad \text{et} \quad A_{1,n}(s) = \text{cte}$$

de sorte que :

$$A_{2m+1,n}(s) = \text{cte}$$

2.1. Développement au second ordre du champ magnétique statique à plan d'antisymétrie

Au second ordre on a donc :

$$\phi(x,y,s) = \left(A_{10} + A_{11}x + \frac{1}{2!} A_{12}x^2 + \dots \right) y + \frac{1}{3!} (A_{30} + \dots) y^3 + \dots$$

avec

$$A_{30}(s) = - (A_{10}'' + h A_{11} + A_{12})$$

et :

$$B_x = A_{11}y + A_{12}xy + \dots$$

$$B_y = A_{10} + A_{11}x + \frac{1}{2!} A_{12}x^2 + \frac{1}{2!} A_{30}y^2 + \dots$$

$$B_s = \frac{1}{1+hx} [A_{10}'y + A_{11}'xy + \dots]$$

En introduisant des quantités sans dimension pour caractériser les composantes du champ dans le plan d'antisymétrie, il vient :

$$B_y(x,0,s) = B_y(0,0,1) [1 - n(s)h(s)x + \beta(s)h^2(s)x^2 + \gamma(s)h^3(s)x^3 + \dots]$$

avec

$$n(s) = - \left[\frac{1}{h B_y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right]_0$$

$$\beta(s) = \left[\frac{1}{2! h^2 B_y} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) \right]_0$$

$$\gamma(s) = \left[\frac{1}{3! h^3 B_y} \left(\frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \right) \right]_0$$

et en supposant que la référence est trajectoire pour une particule de quantité de mouvement P_0

$$B_x = h^{-1} B_y(0,0,s) \left[-nh^2 y + 2\beta h^3 xy + \dots \right]$$

$$B_y = h^{-1} B_y(0,0,s) \left[h - nh^2 x + \beta h^3 x^2 - \frac{1}{2} (h'' - nh^3 + 2\beta h^3) y^2 + \dots \right]$$

$$B_s = h^{-1} B_y(0,0,s) \left[h' y - (nh^2 + 2nhh' + hh') xy + \dots \right]$$

Cas particulier d'un champ quadrupolaire pur

Le potentiel scalaire du champ est donné par :

$$\varphi = \frac{B_0 r^2}{2a} \sin 2\alpha = \frac{B_0}{a} xy$$

où $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $B_0 =$ champ sur le pôle. $a =$ rayon du cercle de gorge. Les composantes du champ s'écrivent :

$$B_x = \frac{B_0}{a} y$$

$$B_y = \frac{B_0}{a} x$$

$$B_s = 0$$

On a :

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right)_0 = \frac{B_0}{a}$$

et on appelle force d'un quadrupôle en quantité :

$$k_q^2 = \frac{(\partial B_y / \partial x)_0}{p_0/e}$$

L'équivalence avec le développement général du champ s'obtient en posant :

$$h^{-1}(s) B_y(0,0,s) = \frac{p_0}{e}$$

$$k_q^2 = -nh^2$$

et en faisant tendre $h \rightarrow 0$, ainsi que toutes ses dérivées.

Cas particulier d'un champ hexapolaire pur

Le potentiel scalaire du champ est donné par :

$$\varphi = \frac{B_0 r^3}{3a^2} \sin 3\alpha = \frac{B_0}{3a^2} (3x^2y - y^3)$$

avec les mêmes notations que pour le champ quadrupolaire. Les composantes du champ s'écrivent :

$$B_x = \frac{B_0}{a^2} 2xy$$

$$B_y = \frac{B_0}{a^2} (x^2 - y^2)$$

$$B_s = 0$$

On a :

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{B_0}{a^2}$$

et on appelle force d'un hexapôle la quantité :

$$k_s^2 = \frac{\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)_0}{\frac{p_0}{e}}$$

L'équivalence avec le développement général du champ s'obtient en posant :

$$h^{-1} B_y(0,0,s) = \frac{p_0}{e}$$

$$k_s^2 = \beta h^3$$

et en faisant tendre $h \rightarrow 0$, ainsi que toutes ses dérivées.