



HAL
open science

Au-delà du champ moyen

K. Dietrich

► **To cite this version:**

K. Dietrich. Au-delà du champ moyen. École thématique. Ecole Joliot Curie "Au-delà du champ moyen.", Maubuisson, (France), du 14-18 septembre 1987 : 6ème session, 1987. cel-00649641

HAL Id: cel-00649641

<https://cel.hal.science/cel-00649641v1>

Submitted on 8 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AU-DELA DU CHAMP MOYEN

K. Dietrich

Résumé

Ce cours rappelle les fondements et la justification du traitement des effets de corrélation d'appariement en Physique Nucléaire par une fonction d'onde de BCS. L'approximation de Hartree-Fock-Bogolyubov est ensuite discutée et appliquée aux cas de noyaux en rotation et/ou à température finie. Enfin quelques manifestations des effets d'appariement dans les réactions nucléaires sont discutées.

Abstract

These lectures recall the basic formalism and justifications of a BCS treatment of pairing correlations in Nuclear Physics. The Hartree-Fock-Bogolyubov approximation is then discussed and applied to the cases of rotating nuclei, possibly at finite temperature. Finally some consequences of the existence of pairing correlations on reaction cross-sections are reviewed.

Audelà du Champ Moyen

K. Dietrich

Physikdepartment-Technische Universität München

1.) Les corrélations d'appariement, l'état BCS et les quasi-particules

La base de la théorie nucléaire est le modèle en couches. Le nucléon dans un noyau ressent en première approximation un potentiel moyen $\hat{U}(x)$ qui représente l'interaction moyenne avec tous les autres nucléons du noyau.

$$[\hat{T}(x) + \hat{U}(x)] \varphi_{\mu}(x) = \epsilon_{\mu} \varphi_{\mu}(x) \quad (1.1)$$

ϵ_{μ} et $\varphi_{\mu}(x)$ sont l'énergie et la fonction d'onde d'une particule individuelle et l'index μ représente l'ensemble des nombres quantiques qui désignent un état de particule individuelle. x est une abréviation pour toutes les variables du nucléon; c'est à dire pour le vecteur de position \vec{x} et les variables discrètes du spin ($x_s = 1, 2$) et de l'isospin ($x_t = 1, 2$).

Nous supposons qu'il y a une interaction effective $v(x; y; \rho)$ dépendante du spin, de l'isospin et de la densité à un corps

$$\rho(x) := \sum_{\mu} \varphi_{\mu}^{\dagger}(x) \varphi_{\mu}(x) n_{\mu} \quad (1.2)$$

($n_{\mu} = 1$ pour un état occupé; $n_{\mu} = 0$ pour un état vide) qui permet à reproduire grossièrement l'énergie de liaison et les rayons des noyaux comme fonction du nombre N et Z des neutrons et protons en appliquant la méthode de Hartree-Fock (HF). La théorie "HF" ou du "champ moyen" consiste à décrire le noyau (N, Z) par un déterminant de Slater Ψ_B qui contient $N+Z=A$ fonctions $\varphi_{\mu}(x)$ occupées par les N neutrons et Z protons et de minimiser l'énergie moyenne par rapport aux variations des états de particules individuelles φ_{μ} tout en conservant la normalisation de Ψ_B . Ce problème de variation mène aux équations (1.1) où le potentiel Hartree-Fock $\hat{U}(x)$ est relié à l'interaction effective v par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \hat{U}(x) \varphi_{\mu}(x) = & \sum_{\kappa} n_{\kappa} \int dy \varphi_{\kappa}^{\dagger}(y) v(x, y; \rho) \left[\varphi_{\kappa}(y) \varphi_{\mu}(x) - \varphi_{\mu}(y) \varphi_{\kappa}(x) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\kappa, \lambda} n_{\kappa} n_{\lambda} \int dy \int dz \varphi_{\kappa}^{\dagger}(y) \varphi_{\lambda}^{\dagger}(z) \frac{\partial v(y, z; \rho)}{\partial \rho} \\ & \cdot \delta(\vec{x} - \frac{\vec{y} + \vec{z}}{2}) \left[\varphi_{\kappa}(y) \varphi_{\lambda}(z) - \varphi_{\lambda}(y) \varphi_{\kappa}(z) \right] \quad (1.3) \end{aligned}$$

Comme argument de la densité ρ dans le potentiel $v(x, y; \rho)$ on utilise le centre de gravité $(\vec{x} + \vec{y})/2$ des nucléons en interaction.

La première somme dans l'équ. (1.3) représente le terme direct ("Hartree") et d'échange ("Fock") dûs aux interactions v du nucléon dans φ_{μ} avec les autres nucléons. La deuxième somme dans (1.3) est obtenue par la variation de la fonctionnelle $\langle \Psi_B / \hat{H} / \Psi_B \rangle$ par rapport à la densité ρ qui apparaît dans l'interaction effective v . L'origine physique de cette contribution est que l'interaction v elle-même change si l'on ajoute ou enlève un nucléon. Plusieurs interactions effectives ont été déterminées phénoménologiquement. Elles reproduisent plus ou moins bien les énergies des liaisons et les rayons nucléaires^{1,2} dans l'approximation HF. Si l'interaction effective implique un couplage suffisamment fort entre le moment angulaire relative et les spins de deux nucléons (voir ref. 3, p. 175, 177), le potentiel moyen \hat{U} contient un terme spin-orbite qui reproduit les nombres magiques

observés. Pour les noyaux loins des couches fermées la théorie HF prédit des noyaux déformés en bon accord avec l'observation. Les succès du modèle en couches seront discutés en détail dans le cours de Mr. Wagner.

Néanmoins, il y a des propriétés spectaculaires, comme les effets pair-impair et les spectres rotationnels avec un moment angulaire élevé, qui nous obligent d'aller au-delà du champ moyen.

Nous présenterons d'abord les idées de base de la théorie de l'appariement dans ce chapitre en utilisant un modèle simple. Dans le chapitre 2, nous généraliserons d'abord la théorie du chapitre 1, puis nous tiendrons compte de la rotation collective des noyaux déformés et nous étudierons le cas d'une température finie. Dans le chapitre 3 nous traiterons la manifestation de la suprafluidité nucléaire dans les réactions de transfert et nous discuterons quelques problèmes ouverts comme le transfert multiple ("effet Josephson nucléaire") et la phase de Berry ("transfert diabolique").

Un seul déterminant de Slater ne contient que les corrélations dues au principe de Pauli et; à cet effet près, les mouvements des nucléons sont indépendants. Sans doute l'interaction effective entre les nucléons produit des corrélations autres que celles du principe de l'exclusion. Le genre de corrélation dans l'état du système est déterminé par les éléments de matrice de l'interaction v . Si v contient une composante attractive de moyenne portée, la plupart des éléments de matrice du type

$$\langle \nu - \nu | v | \kappa - \kappa \rangle \equiv \int dx dy \varphi_{\nu}^{\dagger}(x) \varphi_{-\nu}^{\dagger}(y) v(x, y) \varphi_{\kappa}(x) \varphi_{-\kappa}(y) \quad (1.4)$$

sont de signe cohérent (négatif) et sont plus grands en valeur absolue que les éléments de matrice $\langle \nu \mu | v | \kappa \lambda \rangle$ entre états différents quelconques. L'état $\varphi_{-\nu}(x)$ est "l'état conjugué" de $\varphi_{\nu}(x)$ et ne peut être défini en toute généralité que dans la théorie générale de Hartree-Bogoliubov (ref. 3 ou 4). Si l'effet Coriolis est négligeable (voir chap. 2) on obtient l'état $\varphi_{-\nu}$ à partir de l'état φ_{ν} par renversement du temps^{3,4}, c'est à dire

$$\varphi_{-\nu} = \hat{T} \varphi_{\nu} \quad (1.5)$$

où \hat{T} est l'opérateur du renversement du temps. Lorsque ν représente les nombres quantiques $n \ l \ j \ m$ d'une "base sphérique"

$$\varphi_{\nu} = \varphi_{n l j m m_t} \quad (1.6)$$

l'état (1.5) est donné par³

$$\varphi_{-\nu} = (-1)^{l+j-m} \varphi_{n l j, -m, m_t} \quad (1.6')$$

l, j, m, m_t étant les nombres quantiques du moment angulaire orbital, du moment angulaire total, de la projection du moment angulaire total, et de la projection de l'isospin. Un élément de matrice du type (1.4) est grand et négatif pour une interaction attractive de courte portée puisque les états conjugués $\varphi_{\nu}, \varphi_{-\nu}$ ont un large recouvrement du fait de leurs distributions semblables dans l'espace. Considérons une "interaction d'appariement" V_p , c'est à dire une interaction qui ne contient que des éléments de matrice du type (1.4) dans la base "autoconsistante" définie par les équations (1.1). En 2^{de} quantification elle a pour forme

$$V^P := \frac{1}{2} \sum_{\nu, \kappa} \langle \nu, -\nu | v^P | \kappa, -\kappa \rangle c_{\nu}^{\dagger} c_{-\nu}^{\dagger} c_{-\kappa} c_{\kappa} \quad (1.7)$$

$$= 2 \sum_{\nu > 0; \kappa > 0} \langle \nu, -\nu | v^P | \kappa, -\kappa \rangle c_{\nu}^{\dagger} c_{-\nu}^{\dagger} c_{-\kappa} c_{\kappa} \quad (1.7')$$

où $c_\nu^\dagger(c_\nu)$ crée (annihile) un nucléon dans l'état φ_ν . La notation $\nu > 0$, $\kappa > 0$ signifie que les projections du moment angulaire des états φ_ν , φ_κ doivent être positives. Pour étudier l'effet dynamique d'une telle interaction d'appariement considérons l'Hamiltonien suivant:

$$\hat{H}^P = \sum_{\nu > 0} \epsilon_\nu (c_\nu^\dagger c_\nu + c_{-\nu}^\dagger c_{-\nu}) + 2 \sum_{\substack{\nu > 0 \\ \kappa > 0}} \langle \nu, -\nu | \nu^P | \kappa, -\kappa \rangle c_\nu^\dagger c_{-\nu}^\dagger c_{-\kappa} c_\kappa \quad (1.8)$$

Dans le premier terme de (1.8) nous avons supposé que $\epsilon_\nu = \epsilon_{-\nu}$.

L'idée physique dans (1.8) est que seuls les éléments de matrice du type "appariement" créent des corrélations dynamiques importantes au-delà du champ moyen qui est contenu dans le premier terme de l'Hamiltonien (1.8). Dans la théorie HF le fondamental du système est "la mer de Fermi", c'est à dire le déterminant contenant les N plus bas états individuels des neutrons et les Z plus bas états des protons. En 2nd quantification cet état s'écrit simplement sous la forme

$$| \Psi_S \rangle = \prod_{\nu=1}^N c_{\nu, m_t = -\frac{1}{2}}^\dagger \prod_{\kappa=1}^Z c_{\kappa, m_t = +\frac{1}{2}}^\dagger | 0 \rangle \quad (1.9)$$

où $| 0 \rangle$ est le vide défini par

$$c_{\nu, m_t} | 0 \rangle = 0 \quad (1.10)$$

Pour simplifier, nous avons choisi un Hamiltonien \hat{H}^P pour une seule sorte de particules. L'Hamiltonien \hat{H}^P n'a un sens physique que dans le cas où les sommations sur les nombres quantiques ν , κ sont restreintes au voisinage de l'énergie de Fermi. Nous supposons donc que les sommes en (1.8) s'étendent sur un nombre fini N d'états $\nu > 0$. En effet c'est près de l'énergie de Fermi ϵ_F que l'interaction d'appariement modifiera l'état (1.9): Le principe de Pauli réduit l'interaction à des énergies qui sont beaucoup plus bas que ϵ_F . De l'autre côté, à des énergies ϵ_ν qui sont bien plus hautes que ϵ_F ($\epsilon_\nu - \epsilon_F \gg |\langle \nu, -\nu | \nu | \kappa, -\kappa \rangle|$), les corrélations seront négligeables par un argument fondé sur la théorie de perturbations. On se rend compte facilement que l'énergie potentielle contenue dans $\sum \epsilon_\nu c_\nu^\dagger c_\nu$ est le double de ce qu'elle devrait être. Nous justifierons plus tard que cette erreur peut être facilement corrigée et ne falsifiera pas nos conclusions physiques, dans la mesure où nous ne chercherons pas à calculer l'énergie totale du système à partir de (1.8).

Soit A le nombre de particules. Du fait de la forme particulière de l'interaction dans (1.8), les états propres de l'Hamiltonien \hat{H}^P sont une superposition de produits de A opérateurs de création où les états de paires $(\nu, -\nu)$ sont toujours occupés *ensemble. La sommation s'étend sur toutes les possibilités de sélectionner A/2 paires d'états individuels $(\nu, -\nu)$ de l'ensemble de N paires $(\nu, -\nu)$. Désignons un ensemble de A/2 paires d'états par

$$\left\{ \nu, -\nu \right\}_A := \left\{ \nu_1, -\nu_1; \nu_2, -\nu_2; \dots; \frac{\nu_A}{2}, -\frac{\nu_A}{2} \right\}$$

* Un produit $\prod_{\kappa \in (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_A)} c_{\kappa}^\dagger | 0 \rangle$ où l'ensemble ν_1, \dots, ν_A d'états ne contient pas de paire d'états conjugués

$(\kappa, -\kappa)$ est aussi un état propre de H_p avec énergie propre $E_n = \sum_{\kappa \in (\nu_1, \dots, \nu_A)} \epsilon_\kappa$. Les interactions n'y contri-

bueraient pas. Comme ces états correspondraient à des énergies très élevées non-physiques nous ne les discutons pas.

Alors les états propres Ψ_n de \hat{H}_p ont la forme générale

$$\hat{H}_p \Psi_n = \mathcal{E}_n \Psi_n \quad (1.11)$$

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{\{v, -v\}_A} C_{\{v, -v\}_A}^n \prod_{\kappa, -\kappa \in \{v, -v\}_A} c_{\kappa}^{\dagger} c_{-\kappa}^{\dagger} |0\rangle \quad (1.12)$$

où les coefficients $C_{\{v, -v\}_A}^n$ représentent l'amplitude de probabilité pour qu'un ensemble spécifique $\{v, -v\}$ de $A/2$ paires soit occupé et le reste de $(N-A/2)$ paires soit vide dans l'état $|\Psi_n\rangle$.

Nous cherchons à trouver l'approximation de (1.12) où la probabilité que la paire spécifique $(\kappa, -\kappa)$ soit occupée (v_{κ}^2) ou vide (u_{κ}^2) soit indépendante de la distribution des autres $(A/2-1)$ paires. Essayons donc l'Ansatz suivant:

$$C_{\{v, -v\}_A}^n = v_{v_1} v_{v_2} \dots v_{v_{\frac{A}{2}}} u_{\kappa_1} u_{\kappa_2} \dots u_{\kappa_{N-\frac{A}{2}}} \quad (1.13)$$

où $\kappa_1 \dots \kappa_{N-\frac{A}{2}}$ sont les $(N-\frac{A}{2})$ nombres quantiques $\kappa_i > 0$ qui n'apparaissent pas

dans l'ensemble d'états $\{v, -v\}$ et où nous posons

$$v_{\kappa}^2 + u_{\kappa}^2 = 1 \quad (1.14)$$

N est le nombre d'états φ_{ν} , admis dans notre modèle. Dorénavant nous supprimons l'indice n de l'état Ψ_n puisque nous nous intéressons seulement au fondamental. On se rend facilement compte de ce que la factorisation (1.13) seule n'entraîne pas encore le résultat souhaité i. e. que v_{λ}^2 et u_{λ}^2 sont les probabilités d'occupation ou de non-occupation de la paire $(\lambda, -\lambda)$. Pour cela il suffit d'évaluer la moyenne de l'opérateur $c_{\lambda}^{\dagger} c_{\lambda}$ qui compte le nombre de particules dans l'état φ_{λ} . On obtient en utilisant (1.13) dans l'état (1.12)

$$\langle \Psi | c_{\kappa}^{\dagger} c_{\kappa} | \Psi \rangle = v_{\kappa}^2 \cdot f(v_1 \dots v_N, u_1 \dots u_N) \quad (1.15)$$

où f est une fonction de tous les paramètres $v_1 \dots v_N$. La probabilité d'occupation de l'état φ_{κ} n'est donc pas v_{κ}^2 , mais dépend de toutes les autres amplitudes $v_1 \dots v_N$ et $u_1 \dots u_N$. Cette dépendance indésirable est due au fait que le nombre A des particules est toujours conservé. Si l'on lâche la conservation du nombre de particules dans l'état (1.12), c'est à dire si l'on somme aussi sur le nombre A des opérateurs de création dans (1.12), tout en gardant la factorisation (1.13) l'état du système

$$|\Psi\rangle = \sum_{A=0}^{2N} \sum_{\{v, -v\}_A} \prod_{\kappa > 0, \kappa \notin \{v, -v\}_A} u_{\kappa} \prod_{\kappa' > 0, \kappa' \in \{v, -v\}_A} v_{\kappa'}^{\dagger} c_{\kappa'}^{\dagger} c_{-\kappa'}^{\dagger} |0\rangle$$

peut être écrit sous la forme d'un produit

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\nu > 0} (u_{\nu} + v_{\nu} c_{\nu}^{\dagger} c_{-\nu}^{\dagger}) |0\rangle \quad (1.16)$$

C'est le fameux état de Bardeen, Cooper et Schrieffer⁵ qui a été introduit par ces auteurs pour décrire un système supraconducteur, où les particules en jeu sont les électrons libres d'un métal et les nombres quantiques sont l'impulsion \vec{k} , et la projection m_s du spin $(\nu; -\nu) = (\vec{k}, m_s; -\vec{k}, -m_s)$. L'interaction d'appariement dans un supraconducteur métallique est une force attractive entre deux électrons qui est produite par l'intermédiaire d'une polarisation du réseau ionique.

On vérifie facilement qu'avec l'état BCS on obtient pour la probabilité d'occupation

$$\langle \Psi_{BCS} | c_k^\dagger c_k | \Psi_{BCS} \rangle = \langle \Psi_{BCS} | c_{-k}^\dagger c_{-k} | \Psi_{BCS} \rangle = v_k^2 \quad (1.17)$$

ce qui veut dire que v_k^2 est la probabilité d'occupation de la paire d'états (ψ_k, ψ_{-k}) et $u_k^2 = 1 - v_k^2$ la probabilité de ce qu'elle soit inoccupée.

L'état BCS contient tous les nombres pairs de particules entre 0 et $2N$, si N est le nombre d'états individuels admis. Pour que cet état puisse approcher le vrai fondamental de \hat{H}_p pour A particules, les paramètres u_ν, v_ν doivent être soumis à la condition supplémentaire que la moyenne du nombre de particules soit égale à A :

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{A} | \Psi_{BCS} \rangle = A \quad (1.17')$$

$$\hat{A} = \sum_{\nu > 0} (c_\nu^\dagger c_\nu + c_{-\nu}^\dagger c_{-\nu}) \quad (1.17'')$$

Nous déterminons le choix optimal des paramètres v_ν, u_ν dans (1.16) par le principe variationnel suivant: L'énergie

$$E_{BCS} = \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p | \Psi_{BCS} \rangle \quad (1.18)$$

doit être stationnaire par rapport aux variations des paramètres v_ν, u_ν tout en conservant la normalisation

$$\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle = 1 \quad (1.19)$$

les conditions (1.14), et la moyenne du nombre de particules (1.16). La normalisation (1.19) est automatiquement garantie par les conditions (1.14) car l'équation (1.19) a la forme explicite

$$\prod_{k > 0} (u_k^2 + v_k^2) = 1 \quad (1.19')$$

Nous tenons compte des conditions (1.14) directement en introduisant la dérivée variationnelle

$$\frac{\delta}{\delta v_\lambda} := \frac{\partial}{\partial v_\lambda} + \frac{\partial \mu_\lambda}{\partial v_\lambda} \frac{\partial}{\partial \mu_\lambda} = \frac{\partial}{\partial v_\lambda} - \frac{v_\lambda}{\mu_\lambda} \frac{\partial}{\partial \mu_\lambda} \quad (1.20)$$

La contrainte (1.19') est prise en considération par la méthode de Lagrange: Nous varions d'abord l'expression

$$I := \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p - \mu \hat{A} | \Psi_{BCS} \rangle = : \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}' | \Psi_{BCS} \rangle \quad (1.21)$$

comme si la contrainte (1.17) n'existait pas. Les amplitudes v_ν, u_ν dépendront ainsi du paramètre de Lagrange μ . Ensuite on choisit μ tel que la condition (1.17) soit remplie. Le principe variationnel prend donc la forme suivante:

$$\frac{\delta I}{\delta v_\lambda} = 0 \quad (1.22)$$

où $\lambda = 1, \dots, N$.

Par un calcul simple où l'on n'utilise que les règles d'anticommuation

$$\{c_\nu, c_\mu^\dagger\} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.23)$$

$$\{c_\nu, c_\mu\} = \{c_\nu^\dagger, c_\mu^\dagger\} = 0 \quad (1.23')$$

et la propriété (1.10) du vide on trouve

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_P - \mu \hat{A} | \Psi_{BCS} \rangle &= \\
 &= \sum_{\nu > 0} \prod_{\mu > 0; \mu \neq \nu} (\mu_\mu^2 + \nu_\mu^2) \langle 0 | (\mu_\nu + \nu_\nu c_{-\nu} c_\nu) (c_\nu^\dagger c_\nu + c_{-\nu}^\dagger c_{-\nu}) \cdot \\
 &\quad \cdot (\mu_\nu + \nu_\nu c_\nu^\dagger c_\nu^\dagger) | 0 \rangle \cdot (\epsilon_\nu - \mu) + \\
 &+ 2 \sum_{\nu > 0, \kappa > 0} \prod_{\mu > 0; \mu \neq \nu, \kappa} (\mu_\mu^2 + \nu_\mu^2) \langle 0 | (\mu_\kappa + \nu_\kappa c_{-\kappa} c_\kappa) (\mu_\nu + \nu_\nu c_{-\nu} c_\nu) \cdot \\
 &\quad \cdot c_\nu^\dagger c_{-\nu}^\dagger c_{-\kappa} c_\kappa (\mu_\nu + \nu_\nu c_\nu^\dagger c_\nu^\dagger) (\mu_\kappa + \nu_\kappa c_\kappa^\dagger c_\kappa^\dagger) | 0 \rangle \langle \nu - \nu | \nu^P | \kappa - \kappa \rangle \\
 &= 2 \sum_{\nu > 0} (\epsilon_\nu - \mu) \nu_\nu^2 + 2 \sum_{\nu > 0, \kappa > 0, \nu \neq \kappa} \langle \nu - \nu | \nu^P | \kappa - \kappa \rangle \mu_\nu \nu_\nu \mu_\kappa \nu_\kappa + \\
 &\quad + 2 \sum_{\nu > 0} \langle \nu - \nu | \nu^P | \nu - \nu \rangle \nu_\nu^2 \nu_\nu^2 \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

Introduisons le "potentiel d'appariement" par la définition

$$\Delta_\nu := -2 \sum_{\kappa > 0} \langle \nu - \nu | \nu^P | \kappa - \kappa \rangle \mu_\kappa \nu_\kappa \quad (1.25)$$

Les éléments de matrice $\langle \nu - \nu | \nu^P | \kappa - \kappa \rangle$ sont des nombres réels si les états conjugués sont reliés entre eux par inversement du temps. On a donc aussi

$$\Delta_\nu = -2 \sum_{\kappa > 0} \langle \kappa - \kappa | \nu^P | \nu - \nu \rangle \mu_\kappa \nu_\kappa \quad (1.25')$$

On montre facilement que les équations variationnelles (1.22) prennent la forme

$$2 \tilde{\epsilon}_\lambda \mu_\lambda \nu_\lambda - \Delta_\lambda \cdot (\mu_\lambda^2 - \nu_\lambda^2) = \sigma \quad (1.26)$$

où

$$\tilde{\epsilon}_\lambda := \epsilon_\lambda - \mu + 2 \langle \lambda - \lambda | \nu^P | \lambda - \lambda \rangle \nu_\lambda^2 \quad (1.27)$$

Le dernier terme dans (1.27) représente la contribution de l'interaction d'appariement au potentiel qui est contenu dans ϵ_λ . L'effet important de ces interactions s'exprime par le potentiel d'appariement Δ_λ . Les équations (1.26) doivent être résolues avec les équations (1.14). En plus le "potentiel chimique" μ doit être déterminé tel que la contrainte (1.16); c'est à dire

$$2 \sum_{\nu > 0} \nu_\nu^2 = A \quad (1.28)$$

soit remplie. Pour Δ_λ et $\tilde{\epsilon}_\lambda$ donnés, la solution de (1.26) et (1.14) est

$$\nu_\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tilde{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2}} \right] \quad (1.29)$$

$$\mu_\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\tilde{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2}} \right] \quad (1.29')$$

Comme les probabilités d'occupation v_λ^2 et d'inoccupation u_λ^2 doivent converger vers la distribution HF ($\Theta_0 = \text{fct. de Heaviside}$)

$$v_\lambda^2 = \Theta_0 (\mu - \epsilon_\lambda) \quad (1.30)$$

$$u_\lambda^2 = \Theta_0 (\epsilon_\lambda - \mu) \quad (1.30')$$

$$\mu = \epsilon_F = \text{énergie de Fermi} \quad (1.30'')$$

si l'interaction d'appariement tend vers zéro, la solution avec les signes entre parenthèses peut être exclue. Le produit de (1.29) et (1.29') est

$$u_\lambda^2 v_\lambda^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}_\lambda^2}{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta_\lambda^2}{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2}$$

Pour que le "gap" soit $\Delta_\nu > 0$ pour une interaction d'appariement attractive ($(\nu - \nu' | \nu - \nu') < 0$), nous choisissons le signe de $u_\lambda v_\lambda$ comme positif

$$u_\lambda v_\lambda = \frac{1}{2} \frac{\Delta_\lambda}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2}} \quad (1.31)$$

La substitution de (1.31) dans (1.25) fournit un système d'équations non-linéaire pour le potentiel d'appariement

$$\Delta_\nu = - \sum_{\kappa > 0} \langle \kappa - \kappa' | \nu - \nu' \rangle \frac{\Delta_\kappa}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\kappa^2 + \Delta_\kappa^2}} \quad (1.32)$$

Pour se faire une idée du comportement de la solution de (1.32), on considère une interaction d'appariement constante définie par

$$-2 \langle \kappa - \kappa' | \nu - \nu' \rangle = G = \text{const} \quad (1.33)$$

si ϵ_ν et ϵ_κ sont dans un intervalle d'énergie autour de l'énergie de Fermi ϵ_F

$$\epsilon_\nu, \epsilon_\lambda \in (\epsilon_F - \Delta_\epsilon, \epsilon_F + \Delta_\epsilon)$$

et zéro en dehors de cette couche d'énergie. Pour un noyau, Δ_ϵ doit être de l'ordre de la distance entre couches majeures voisines. Dans ce cas, le potentiel d'appariement Δ_ν ne dépend plus de l'état ν et est appelé "paramètre du gap" Δ . Nous allons voir que Δ mesure le "trou" dans le spectre des excitations des noyaux pairs.

D'abord le potentiel d'appariement (1.25) et l'équation du gap (1.32) prennent la forme

$$\Delta = G \sum_{\kappa > 0} u_\kappa v_\kappa \quad (1.34)$$

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{\kappa > 0} \frac{\Delta}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\kappa^2 + \Delta^2}} \quad (1.35)$$

Comme déjà pour l'équation plus générale (1.32) on reconnaît l'existence d'une "solution triviale"

$$\Delta_\nu = \Delta = 0 \quad (1.36)$$

qui correspond à

$$u_\lambda v_\lambda = 0 \quad (1.37)$$

c'est à dire à la solution HF (1.30), (1.30') (voir fig. 1a). En général l'équation (1.32) ou (1.35) a

aussi une solution non-triviale

$$\Delta_V = \Delta \neq 0 \quad (1.38)$$

qui est celle qui nous intéresse. A partir de la version simple (1.35) de l'équation du gap

$$1 = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2}} \quad (1.35')$$

nous nous rendons compte qu'une solution non-triviale existe seulement si l'interaction constante G est plus grande qu'une valeur critique G_{cr}

$$G > G_{cr} \quad (1.39)$$

où G_{cr} satisfait à l'équ. (1.35') pour $\Delta = 0$

$$1 = \frac{G_{cr}}{2} \sum_{k>0} \frac{1}{|\tilde{\epsilon}_k|} \quad (1.39')$$

C'est aussi vrai pour le cas plus général (1.32). Sur la fig. 1a et fig. 1b nous montrons les probabilités d'occupation v_V^2 comme fonction des énergies de particules individuelles dans le cas des deux solutions. Notons que le potentiel chimique μ (même à température nulle que nous considérons ici) n'est généralement pas égale à l'énergie de Fermi ϵ_F qui est définie comme la plus haute énergie occupée dans le cas de la théorie HF.

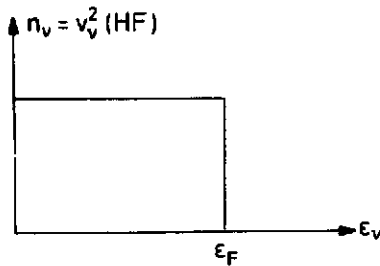


Fig. 1a: Distribution HF
("solution triviale")

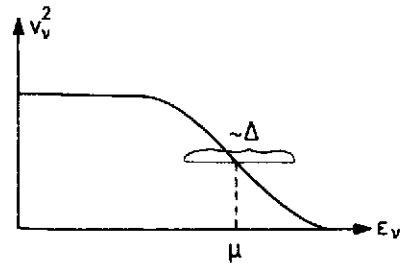


Fig. 1b: Distribution BCS
("solution non-triviale")

On voit à partir de la forme (1.29) des probabilités d'occupation

$$v_\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\tilde{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta^2}} \right]$$

que le paramètre Δ mesure la largeur dans l'espace des énergies ϵ_λ autour de μ où les probabilités d'occupation diffèrent essentiellement de 1 et de 0. C'est pour les états dans cet intervalle que les produits $u_k v_k$ sont essentiellement non-nuls. De (1.34) on voit que le nombre de ces états détermine la grandeur du gap. Pourtant le gap Δ a encore une importance physique plus éminente puisqu'il détermine l'énergie d'excitation minimale d'un noyau pair. Pour déduire ce fait nous devons généraliser notre théorie aux états excités du système. Dans ce but nous retournons à la forme (1.12) des états excités tout en gardant la factorisation (1.13) et la sommation sur tous les nombres de particules. Dans cet état toutes les particules sont arrangées en "paires de Cooper" $c_k^\dagger c_{-k}^\dagger$ et, considérant l'énergie (1.24) du système

$$\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_P' | \Psi_{BCS} \rangle = 2 \sum_{\nu > 0} (\tilde{\epsilon}_\nu v_\nu^2 - 2 \langle \nu - \nu | v^\dagger | \nu - \nu \rangle v_\nu^4) - \sum_{\nu > 0} \Delta_\nu \mu_\nu v_\nu =: E_{BCS} \quad (1.40)$$

nous voyons que cet appariement fournit un gain d'énergie de liaison de $\Delta_k u_k v_k$ par paire de Cooper. On peut donc exciter le système en brisant des paires de Cooper et en distribuant les nucléons des paires brisées différemment. Définissons les états

$$|\Psi_{\lambda_1 \lambda_2}\rangle := c_{\lambda_1}^\dagger c_{\lambda_2}^\dagger \prod_{\substack{\kappa > 0 \\ \pm \kappa \neq \lambda_1, \lambda_2}} (\mu_\kappa + v_\kappa c_{\kappa}^\dagger c_{-\kappa}^\dagger) |0\rangle \quad (1.41)$$

où $\lambda_2 \neq -\lambda_1$.

On voit facilement que ces états sont orthogonaux à l'état Ψ_{BCS} et entre eux ($\lambda_1 \neq -\lambda_2$) et normalisés à 1 : $\langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \Psi_{\lambda_1' \lambda_2'} \rangle = \langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \Psi_{BCS} \rangle = 0$ (1.42)

On obtient comme différence des énergies moyennes des états $\Psi_{\lambda_1 \lambda_2}$ et Ψ_{BCS}

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1 \lambda_2} &:= \langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \hat{H}_P' | \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} \rangle - \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_P' | \Psi_{BCS} \rangle = \\ &= \tilde{\epsilon}_{\lambda_1} + \tilde{\epsilon}_{\lambda_2} - 2 \tilde{\epsilon}_{\lambda_1} v_{\lambda_1}^2 - 2 \tilde{\epsilon}_{\lambda_2} v_{\lambda_2}^2 + 2 \Delta_{\lambda_1} \mu_{\lambda_1} v_{\lambda_1} + 2 \Delta_{\lambda_2} \mu_{\lambda_2} v_{\lambda_2} \end{aligned} \quad (1.43)$$

ou bien, utilisant (1.29) et (1.31)

$$E_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\tilde{\epsilon}_{\lambda_1}^2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\lambda_1}^2 + \Delta_{\lambda_1}^2}} + \frac{\tilde{\epsilon}_{\lambda_2}^2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\lambda_2}^2 + \Delta_{\lambda_2}^2}} + \frac{\Delta_{\lambda_1}^2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\lambda_1}^2 + \Delta_{\lambda_1}^2}} + \frac{\Delta_{\lambda_2}^2}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\lambda_2}^2 + \Delta_{\lambda_2}^2}} \quad (1.44)$$

où

$$E_\lambda := \sqrt{\tilde{\epsilon}_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2} \quad (1.45)$$

On peut interpréter l'état (1.41) et le résultat (1.44) de la façon suivante: Dans l'état $\Psi_{\lambda_1 \lambda_2}$ deux nucléons "célibataires" se trouvent dans les états individuels non-conjugués φ_{λ_1} et φ_{λ_2} et au même temps les paires d'états $(\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{-\lambda_1})$ et $(\varphi_{\lambda_2}, \varphi_{-\lambda_2})$ sont exclues pour les paires de Cooper. L'énergie (1.44) de cette excitation est la somme de deux "excitations élémentaires". On appelle E_λ "l'énergie de quasi-particule". Si le potentiel d'appariement est nul, l'énergie de quasi-particule devient égale à l'énergie $\tilde{\epsilon}_\lambda$ et $E_{\lambda_1 \lambda_2}$ devient

$$E_{\lambda_1 \lambda_2} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}_{\lambda_1} + \tilde{\epsilon}_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} - E_{\lambda_2} \quad (1.46)$$

si $\epsilon_{\lambda_1} > \epsilon_f$ et $\epsilon_{\lambda_2} < \epsilon_f$. (1.46) représente une excitation particule-trou dans la mer de Fermi, ce qui est l'excitation élémentaire dans la théorie HF. Si le potentiel d'appariement est non-nul l'énergie d'excitation est toujours plus grande que dans le cas du champ moyen:

$$E_{\lambda_1 \lambda_2} = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} > |\tilde{\epsilon}_{\lambda_1}| + |\tilde{\epsilon}_{\lambda_2}| \quad (1.47)$$

Ceci est dû au fait que la brisure d'une paire demande une énergie supplémentaire. Généralement on a $|\tilde{\epsilon}_{\lambda_1}|, |\tilde{\epsilon}_{\lambda_2}| < \Delta$ pour l'excitation minimale $\text{Min } E_{\lambda_1 \lambda_2}$ et donc

$$\text{Min } E_{\lambda_1 \lambda_2} = 2\Delta \quad (1.47')$$

Reste à discuter le cas spécial $\lambda_2 = -\lambda_1$ où nous pouvons supposer $\lambda_1 > 0$. On pourrait envisager d'abord l'Ansatz

$$|\Psi_{\lambda_1, -\lambda_1}\rangle = c_{\lambda_1}^+ c_{-\lambda_1}^+ \prod_{\kappa > 0; \kappa \neq \lambda_1} (\mu_{\kappa} + \nu_{\kappa} c_{\kappa}^+ c_{-\kappa}^+) |0\rangle$$

Ces états seraient normalisés mais ni orthogonaux entre eux ni orthogonaux par rapport à Ψ_{BCS} . Ils n'ont donc pas une signification physique. Cependant les états

$$|\Psi_{\lambda_1, -\lambda_1}\rangle := (-\nu_{\lambda_1} + \mu_{\lambda_1} c_{\lambda_1}^+ c_{-\lambda_1}^+) \prod_{\kappa > 0; \kappa \neq \lambda_1} (\mu_{\kappa} + \nu_{\kappa} c_{\kappa}^+ c_{-\kappa}^+) |0\rangle \quad (1.48)$$

ont toutes les propriétés désirées que nous avons trouvées pour les états (1.41):

$$\langle \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} | \Psi_{BCS} \rangle = \langle \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} | \Psi_{\lambda_2, \lambda_2} \rangle = 0 \quad (1.49)$$

$$\langle \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} | \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} \rangle = 1 \quad (1.49')$$

$$\langle \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} | \hat{H}_p | \Psi_{\lambda_1, -\lambda_1} \rangle - \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p | \Psi_{BCS} \rangle = 2 E_{\lambda_1} \quad (1.50)$$

Jusqu'à maintenant nous n'avons étudié que des systèmes avec un nombre pair de particules. Si le nombre des particules est impair, un nucléon est nécessairement sans partenaire conjugué même dans le "fondamental".* La forme naturelle des états d'un système impair est

$$|\Psi_{\lambda}\rangle := c_{\lambda}^+ \prod_{\kappa > 0; \pm \kappa \neq \lambda} (\mu_{\kappa} + \nu_{\kappa} c_{\kappa}^+ c_{-\kappa}^+) |0\rangle \quad (1.51)$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes:

$$\langle \Psi_{\lambda_1} | \Psi_{\lambda_2} \rangle = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (1.52)$$

$$\langle \Psi_{\lambda_1} | \hat{H}_p | \Psi_{\lambda_1} \rangle - \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p | \Psi_{BCS} \rangle = E_{\lambda_1} > 0 \quad (1.53)$$

Soit E_{λ_0} l'énergie la plus basse

$$E_{\lambda_0} := \text{Min } E_{\lambda} \quad (1.54)$$

Alors $|\Psi_{\lambda_0}\rangle$ représente le fondamental du noyau impair et E_{λ_0} est la différence d'énergie par rapport au noyau pair voisin.

Comme

$$E_{\lambda_0} = \sqrt{\bar{E}_{\lambda_0}^2 + \Delta_{\lambda_0}^2} \approx \Delta_{\lambda_0} \approx \Delta \quad (1.55)$$

Nous trouvons ainsi une explication simple pour l'observation de l'énergie de liaison des noyaux impairs qui est de façon systématique moins grande que celle des noyaux pairs voisins. La comparaison avec cette différence pair-impair empirique donne

$$\Delta \approx 1 \text{ MeV} \quad (1.56)$$

* Nous utilisons le terme "fondamental" pour l'état avec la plus basse énergie moyenne bien qu'il ne soit pas un état propre de l'Hamiltonien.



Fig. 2a: Spectre d'un noyau impair
(et N ou en Z ou en N et Z)

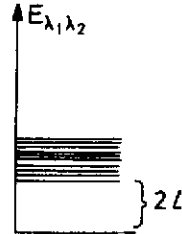


Fig. 2b: Spectre d'un noyau pair
(et N et en Z)

Les excitations élémentaires d'un noyau impair correspondent à des états (1.51) avec $\lambda \neq \lambda_0$ et aux énergies d'excitation

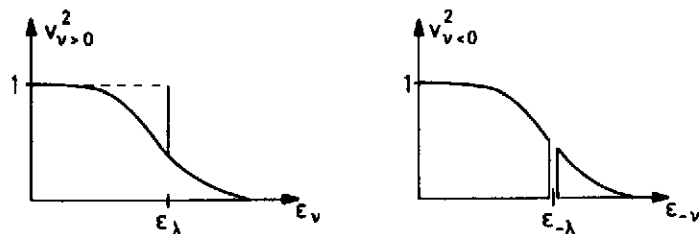
$$\langle \Psi_\lambda | \hat{H}'_p | \Psi_\lambda \rangle - \langle \Psi_{\lambda_0} | \hat{H}'_p | \Psi_{\lambda_0} \rangle = E_\lambda - E_{\lambda_0} \quad (1.57)$$

Pour un paramètre du gap $\Delta \neq 0$ l'excitation la plus basse (1.44) est toujours plus grande que 2Δ

$$E_{\lambda_1, \lambda_2} \geq 2\Delta \approx 2\text{MeV} \quad (1.58)$$

tandis que les énergies d'excitation (1.57) des noyaux impairs peuvent être bien plus petites que 2Δ . Ceci explique une différence spectaculaire et bien connue entre les spectres des noyaux pairs et impairs: Pour un noyau pair les excitations intrinsèques ne commencent qu'au-dessus d'un "gap" de $2\Delta \approx 2\text{MeV}$ contrairement aux noyaux impairs. Ceci est montré schématiquement sur les fig. 2a et 2b. Dans la physique de la matière condensée le gap dans le spectre des excitations électroniques d'un métal a comme conséquence le phénomène de la supraconductivité qui apparaît si la température de système est si basse que des états au-dessus du gap ne peuvent pas être peuplés. Nous y reviendrons brièvement au chapitre 2.

Fig. 3: Représentation schématique des probabilités d'occupation v_{λ}^2 et $v_{-\lambda}^2$ pour l'état Ψ_{λ_0} où le nucléon célibataire se trouve dans l'état de particule individuelle φ_{λ_0} et un trou se trouve dans l'état conjugué $\varphi_{-\lambda}$.



Dans la physique nucléaire l'interaction d'appariement a plusieurs conséquences remarquables: le gap dans les spectres des excitations intrinsèques des noyaux pairs, l'effet pair-impair dans les énergies de liaison, le renforcement du transfert des paires de Cooper dans les réactions

périphériques entre noyaux supraconducteurs, la possibilité de la réaction en chaîne, la réduction des moments d'inertie des noyaux pairs par rapport aux valeurs prédites par la théorie du champ moyen et le phénomène du back-bending dans les spectres rotationnels des noyaux. Les deux derniers sujets seront discutés en partie dans le chapitre 2 et surtout dans le cours du Prof. F. Haas.

Nous nous sommes inspirés du travail original de Bardeen, Cooper et Schrieffer⁵ pour présenter la théorie d'appariement. Il est intéressant et même indispensable pour la discussion de certains sujets au chapitre 2 et 3 d'introduire maintenant la version de N. N. Bogoliubov⁶ qui utilise la méthode des transformations canoniques. Dans sa version la plus simple, qui est suffisante pour traiter l'Hamiltonien \hat{H}_p de l'équ. (1.8), on introduit les opérateurs $\alpha_{\pm\nu}^\dagger, \alpha_{\pm\nu}$ par la transformation (ν sans signe est égal à $\nu > 0$)

$$a_\nu^\dagger = u_\nu c_\nu^\dagger - v_\nu c_{-\nu} \quad (1.59a)$$

$$a_{-\nu}^\dagger = u_\nu c_{-\nu}^\dagger + v_\nu c_\nu \quad (1.59b)$$

$$a_\nu = u_\nu c_\nu - v_\nu c_{-\nu}^\dagger \quad (1.60a)$$

$$a_{-\nu} = u_\nu c_{-\nu} + v_\nu c_\nu^\dagger \quad (1.60b)$$

en exigeant que ces opérateurs remplissent les règles d'anticommutation

$$\{a_\nu, a_\mu^\dagger\} = \{a_{-\nu}, a_{-\mu}^\dagger\} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.61a)$$

$$\text{tous les autres anticommuteurs} = 0 \quad (1.61b)$$

On en obtient la condition

$$u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1 \quad (1.62)$$

Les relations (1.59a) - (1.60b) peuvent être inversées:

$$c_\nu^\dagger = u_\nu a_\nu^\dagger + v_\nu a_{-\nu} \quad (1.63a)$$

$$c_{-\nu}^\dagger = u_\nu a_{-\nu}^\dagger - v_\nu a_\nu \quad (1.63b)$$

$$c_\nu = u_\nu a_\nu + v_\nu a_{-\nu}^\dagger \quad (1.64a)$$

$$c_{-\nu} = u_\nu a_{-\nu} - v_\nu a_\nu^\dagger \quad (1.64b)$$

L'idée de la méthode de Bogoliubov est d'exprimer l'Hamiltonien (1.8) comme fonction des nouveaux opérateurs a^\dagger, a de sorte que les opérateurs de création $\alpha_{\pm\nu}^\dagger$ soient du côté gauche des opérateurs d'annihilation $\alpha_{\pm\nu}$ ("ordre normal") et de choisir les coefficients u_ν, v_ν tels que l'Hamiltonien prenne une forme simple qui laisse apercevoir les excitations élémentaires du système. Il s'avère que le "vide" des nouveaux opérateurs, c'est à dire l'état défini par la propriété

$$\alpha_{\pm\nu} |\omega\rangle = 0 \quad (1.65)$$

est identique à l'état $|\Psi_{BCS}\rangle$: En effet, si $|\omega\rangle$ est proportionnel au produit de tous les opérateurs d'annihilation $\alpha_{\pm\nu}$ agissant sur le "vrai" vide $|0\rangle$

$$|\omega\rangle \propto \prod_{k>0} a_k a_{-k} |0\rangle \quad (1.66)$$

il a la propriété (1.65) due aux règles d'anticommutation (1.61b). En substituant (1.60a), (1.60b) dans (1.66) on trouve

$$\prod_{k>0} a_k a_{-k} |0\rangle = \prod_{k>0} (u_k v_k + v_k^2 c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0\rangle = \prod_{k'>0} v_{k'} |\Psi_{BCS}\rangle$$

ou alors

$$|\omega\rangle = \prod_{k>0} \frac{1}{v_k} a_k a_{-k} |0\rangle = |\Psi_{BCS}\rangle \quad (1.67)$$

Agissant avec α_λ^\dagger et $\alpha_{\lambda_1}^\dagger \alpha_{\lambda_2}^\dagger$ sur $|\omega\rangle$ on obtient par un calcul très simple les états (1.51) du noyau impair et les excitations (1.41) et (1.48) du noyau pair

$$\alpha_\lambda^\dagger |\omega\rangle = c_\lambda^\dagger \prod_{k>0; \pm k \neq \lambda} (\mu_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0\rangle \quad (1.68)$$

$$\text{pour } \lambda_2 = -\lambda_1 \quad \alpha_{\lambda_1}^\dagger \alpha_{\lambda_2}^\dagger |\omega\rangle = c_{\lambda_1}^\dagger c_{\lambda_2}^\dagger \prod_{k>0; \pm k \neq \lambda_1, \lambda_2} (\mu_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0\rangle \quad (1.69)$$

$$\alpha_\lambda^\dagger \alpha_{-\lambda}^\dagger |\omega\rangle = (-v_\lambda + \mu_\lambda c_\lambda^\dagger c_{-\lambda}^\dagger) \prod_{k>0; \pm k \neq \lambda} (\mu_k + v_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0\rangle \quad (1.70)$$

On appelle $\alpha^\dagger(\alpha)$ des opérateurs de création (annihilation) d'une "quasi-particule" et les états (1.68) - (1.70) des états à 1 et à 2 quasiparticules.

Nous substituons (1.63a) - (1.64b) dans l'Hamiltonien (1.8) et nous établissons l'ordre normal en utilisant les règles d'anticommuation (1.61a), (1.61b). Après un calcul simple et long nous arrivons à la forme suivante de l'Hamiltonien \hat{H}_p (pour le cas de l'appariement constant)

$$\hat{H}_p' = H_p^{(0)} + \hat{H}_p^{(1)} + \hat{H}_p^{(2)} + \hat{H}_p^{(4)} \quad (1.71)$$

$$H_p^{(0)} = 2 \sum_{v>0} (\tilde{E}_v + \frac{G}{2} v_v^2) - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.72)$$

$$\hat{H}_p^{(1)} = \sum_{v>0} [\tilde{E}_v (\mu_v^2 - v_v^2) + 2 \Delta \mu_v v_v] (a_v^\dagger a_v + a_{-v}^\dagger a_{-v}) \quad (1.73)$$

$$\hat{H}_p^{(2)} = \sum_{v>0} [2 \tilde{E}_v \mu_v v_v - \Delta (\mu_v^2 - v_v^2)] (a_v^\dagger a_{-v}^\dagger + a_{-v} a_v) \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_p^{(4)} = -G \sum_{v>0; k>0} & \left\{ (\mu_v^2 \mu_k^2 + v_v^2 v_k^2) a_v^\dagger a_{-v}^\dagger a_{-k} a_k + \mu_v v_v \mu_k v_k \cdot \right. \\ & (a_k^\dagger a_v^\dagger a_v a_k + a_{-k}^\dagger a_{-v}^\dagger a_{-v} a_{-k} + 2 a_k^\dagger a_v^\dagger a_{-v} a_k) + \\ & + \mu_v^2 v_k^2 (a_v^\dagger a_{-v}^\dagger a_{-k} a_k^\dagger + a_{-k} a_k a_v a_{-v}) + \mu_k v_k (\mu_v^2 - v_v^2) \cdot \\ & \cdot (a_k^\dagger a_k a_v a_{-v} + a_{-k}^\dagger a_{-k} a_v a_{-v} + a_{-v}^\dagger a_v^\dagger a_k^\dagger a_k + \\ & \left. + a_{-v}^\dagger a_v^\dagger a_{-v} a_{-k}) \right\} \quad (1.75) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les définitions (1.25) et (1.27) spécialisées au cas (1.33) d'une interaction d'appariement constante

$$\tilde{\epsilon}_v = \epsilon_v - \mu - G v_v^2 \quad (1.76)$$

$$\Delta = G \cdot \sum_{v>0} u_v v_v \quad (1.77)$$

Si nous choisissons les paramètres u_v et v_v de manière à ce que la partie $\hat{H}_p^{(2)}$ de l'Hamiltonien s'annule,

$$\hat{H}_p^{(2)} = 0 \quad (1.78)$$

nous trouvons les conditions

$$2\tilde{c}_\nu u_\nu v_\nu - \Delta \cdot (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0$$

qui doivent être remplies avec (1.62). Ce sont les équations (1.26) que nous avons trouvées par la variation de l'énergie $\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p' | \Psi_{BCS} \rangle$. Les paramètres u_ν, v_ν seront donc les mêmes que dans la théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer. En plus nous voyons que le nombre commun $\hat{H}_p^{(0)}$ est égal à la moyenne (1.40) de \hat{H}_p' .

Utilisant (1.29), (1.29') et (1.31) nous trouvons facilement que la partie "opérateur à un corps" $\hat{H}_p^{(1)}$ de l'Hamiltonien ((équ. (1.73)) peut être écrite sous la forme

$$\hat{H}_p^{(1)} = \sum_{\nu > 0} E_\nu (\alpha_\nu^\dagger \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}^\dagger \alpha_{-\nu}) \quad (1.79)$$

où E_ν est l'énergie de la quasi-particule (1.45).

La partie "opérateur à 2 corps" $\hat{H}_p^{(2)}$ peut être interprétée comme une "interaction entre les quasi-particules". Nous notons que les états Ψ_λ (équ. (1.51), (1.68)) d'un système impair et les états $\Psi_{\lambda_1 \lambda_2}$ (équ. (1.41), (1.48), (1.69), (1.70)) d'un système pair sont des états propres de l'Hamiltonien ($\hat{H}_p^{(0)} + \hat{H}_p^{(1)}$). Cette partie de l'Hamiltonien décrit donc des quasi-particules indépendantes.

Même des états à un nombre arbitraire de quasi-particules sont des états propres:

$$[\hat{H}_p^{(0)} + \hat{H}_p^{(1)}] \prod_{\kappa \in (\nu_1, \dots, \nu_M)} \alpha_\kappa^\dagger | \Psi_{BCS} \rangle = \left\{ E_{BCS} - \mu A + \sum_{\kappa \in (\nu_1, \dots, \nu_M)} E_\kappa \right\} \prod_{\kappa \in (\nu_1, \dots, \nu_M)} \alpha_\kappa^\dagger | \Psi_{BCS} \rangle \quad (1.80)$$

Le nombre commun $H_p^{(0)}$ qui est égal à la moyenne $\langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_p' | \Psi_{BCS} \rangle = E_{BCS} - \mu A$ pourrait être omis si l'on utilise cette énergie comme zéro de l'échelle. L'indépendance approximative des quasi-particules est une propriété très importante de la théorie grâce à laquelle la généralisation à température finie sera très simple. Remarquons qu'il faut remplir la condition (1.78) pour que les quasi-particules deviennent indépendantes dans l'approximation où $\hat{H}_p^{(2)}$ est négligé. Etant donné que les énergies E_ν contiennent l'effet du champ moyen il est justifié de considérer $\hat{H}_p^{(2)}$ comme une interaction qui est moins grande que l'interaction V^p de (1.7).

Il est important de se rendre compte de ce que notre théorie se réfère à un ensemble de noyaux de différents nombres de particules, car l'état Ψ_{BCS} est une superposition de tous les nombres pairs de particules.

Cet abandon de la conservation du nombre des particules était une condition nécessaire à ce que les amplitudes v_ν, u_ν dans (1.13) signifient l'amplitude d'occupation ou d'inoccupation de la paire de Cooper $(\varphi_\nu, \varphi_{-\nu})$. Seul le nombre moyen de particules est conservé par la condition supplémentaire (1.16). Cette condition se rapporte à l'état Ψ_{BCS} . Pour les états excités $|\Psi_{\lambda_1 \lambda_2}\rangle$ d'un noyau pair, il est commode de calculer $\langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \hat{A} | \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} \rangle$ dans la base des quasi-particules, c'est à dire, en exprimant l'opérateur \hat{A} par les opérateurs α^\dagger, α :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{\nu > 0} (c_\nu^\dagger c_\nu + c_{-\nu}^\dagger c_{-\nu}) = \sum_{\nu > 0} \left[(\mu_\nu \alpha_\nu^\dagger + v_\nu^\dagger \alpha_{-\nu}) (\mu_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{-\nu}^\dagger) + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_\nu \alpha_{-\nu}^\dagger - v_\nu^\dagger \alpha_\nu) (\mu_\nu \alpha_{-\nu} - v_\nu \alpha_\nu^\dagger) \right] \\ \hat{A} &= \sum_{\nu > 0} \left\{ 2v_\nu^2 + (\mu_\nu^2 - v_\nu^2) (\alpha_\nu^\dagger \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}^\dagger \alpha_{-\nu}) + 2\mu_\nu v_\nu (\alpha_\nu^\dagger \alpha_{-\nu}^\dagger + \alpha_{-\nu} \alpha_\nu) \right\} \quad (1.81) \end{aligned}$$

A l'aide de (1.81) on trouve facilement le résultat

$$\langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \hat{A} | \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} \rangle = 2 \sum_{\nu > 0} v_\nu^2 + (\mu_{\lambda_1}^2 - v_{\lambda_1}^2) + (\mu_{\lambda_2}^2 - v_{\lambda_2}^2) \quad (1.82)$$

qui est vrai pour tous les nombres quantiques λ_1, λ_2 (sauf $\lambda_1 = \lambda_2$ où $\Psi_{\lambda_1 \lambda_2} = 0$) si l'on utilise les relations

$$u_{-v} = u_v \quad (1.83)$$

$$v_{-v} = -v_v \quad (1.83')$$

qui proviennent des équations (1.63a) - (1.64b). Comme on a généralement $u_{\lambda_1}^2 \neq v_{\lambda_1}^2$ et $u_{\lambda_2}^2 \neq v_{\lambda_2}^2$, le côté droit de l'équ. (1.82) n'est généralement pas égal au nombre des particules A du noyau considéré. Si les états φ_{λ_1} et φ_{λ_2} sont remplis à demi, $\langle \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} | \hat{A} | \Psi_{\lambda_1 \lambda_2} \rangle \approx A$, mais si les deux états sont presque remplis ou presque vides, le côté droit de (1.82) est $(A \pm 2)$. Le nombre moyen des particules dans un système impair décrit par l'état Ψ_λ ((1.51), (1.68)) est

$$\langle \Psi_\lambda | \hat{A} | \Psi_\lambda \rangle = 2 \sum_{v>0} v_v^2 + \mu_v^2 - v_v^2 \quad (1.84)$$

On aimerait que cette expression soit $A \pm 1$ selon le noyau voisin qu'on veut considérer. C'est le cas si φ_v est un état presque vide ($A+1$) ou presque occupé ($A-1$). Pourtant, pour φ_v proche du potentiel chimique on a $u_v^2 \approx v_v^2$ et donc $\langle \Psi_\lambda | \hat{A} | \Psi_\lambda \rangle \approx A$. Pour évaluer l'erreur due à la violation du nombre conservé de particules on peut évaluer la fluctuation relative du nombre de particules dans l'état Ψ_{BCS}

$$\frac{\sqrt{(\Delta A)^2}}{A} = \langle \Psi_{BCS} | (\hat{A} - A)^2 | \Psi_{BCS} \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot A^{-1} \quad (1.85)$$

On obtient par un calcul simple

$$(\Delta A)^2 = 4 \sum_{v>0} \mu_v^2 v_v^2 \quad (1.85')$$

$$\frac{\sqrt{(\Delta A)^2}}{A} = \frac{\sqrt{\sum_{v>0} \mu_v^2 v_v^2}}{\sum_{v>0} v_v^2} \quad (1.85'')$$

Ce nombre devrait être nettement plus petit que 1 si A est le nombre de particules au voisinage de l'énergie de Fermi où v_v^2 n'est ni 0 ni 1. Dans des cas réalistes en physique nucléaire on obtient $\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{1}{10}$ ou même plus, ce qui n'est pas très satisfaisant. On ne devrait donc pas espérer que la théorie incluant la violation du nombre conservé de particules reproduise les propriétés nucléaires avec une grande précision.

On peut faire mieux en ce qui concerne la conservation du nombre de particules:

a) Pour trouver une meilleure approximation du fondamental d'un noyau impair de $(A \pm 1)$ particules on peut varier l'énergie $\langle \Psi_\lambda | \hat{H}_p | \Psi_\lambda \rangle$ sous la contrainte

$$\langle \Psi_\lambda | \hat{A} | \Psi_\lambda \rangle = A \pm 1 \quad (1.86)$$

On trouve les mêmes équations variationnelles (1.26) avec la seule différence que l'état φ_λ bloqué par le nucléon célibataire n'apparaît pas dans le potentiel d'appariement (1.25).

$$\Delta_v = -2 \sum_{\kappa>0; \pm \kappa \neq \lambda} \langle v-v | v^p | \kappa - \kappa \rangle \mu_\kappa v_\kappa \quad (1.87)$$

L'ensemble des amplitudes v_κ , u_κ dépend ainsi de l'état bloqué φ_λ . Si Ψ_{λ_0} correspond à la plus basse énergie moyenne

$$\langle \Psi_{\lambda_0} | \hat{H}_p | \Psi_{\lambda_0} \rangle < \langle \Psi_\lambda | \hat{H}_p | \Psi_\lambda \rangle$$

cet état Ψ_{λ_0} serait l'approximation du fondamental du noyau impair. Cette approximation de blocage (blocking approximation) améliore l'accord entre les différences de masse paire-impair calculées et

empiriques. Notons cependant que dans la théorie avec blocage les différents états Ψ_λ ne sont plus orthogonaux

$$\langle \Psi_{\lambda_1} | \Psi_{\lambda_2} \rangle \neq \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \quad (1.88)$$

b) Une théorie plus rigoureuse peut être obtenue si l'on projette l'état Ψ_{BCS} . Nous obtenons ainsi un état $|\Psi_A\rangle$ qui correspond à un nombre donné A de particules

$$|\Psi_{\text{BCS}}^A\rangle = N \cdot \hat{P}^A |\Psi_{\text{BCS}}\rangle \quad (1.89)$$

$$\hat{A} |\Psi_A\rangle = A |\Psi_A\rangle \quad (1.90)$$

\hat{P}^A est un opérateur de projection défini par

$$\hat{P}^A := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi(\hat{A}-A)} \quad (1.91)$$

et la constante de normalisation N est choisie telle que

$$\langle \Psi_{\text{BCS}}^A | \Psi_{\text{BCS}}^A \rangle = 1 \quad (1.92)$$

Plus explicitement l'état $|\Psi_A\rangle$ d'un noyau pair de A nucléons a la forme

$$|\Psi_{\text{BCS}}^A\rangle = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iA\varphi} \prod_{\kappa>0} (u_\kappa + v_\kappa e^{2i\varphi} c_\kappa^+ c_{-\kappa}^+) |0\rangle \quad (1.93)$$

et l'état Ψ_λ du noyau impair voisin avec $(A+1)$ nucléons et un blocage du niveau φ_λ a la forme

$$|\Psi_\lambda^{A+1}\rangle = \frac{N}{2\pi} c_\lambda^+ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iA\varphi} \prod_{\kappa>0; \kappa \neq \lambda} (u_\kappa + v_\kappa e^{2i\varphi} c_\kappa^+ c_{-\kappa}^+) |0\rangle \quad (1.94)$$

On peut effectuer la projection après avoir déterminé les paramètres u_ν, v_ν dans la théorie avec violation du nombre conservé ("projection après variation"). Ceci rend une approximation supérieure à celle de la théorie avec ou sans blocage que nous avons discutée. On peut aussi effectuer la projection avant la variation, c.à.d. se fonder sur une variation de l'énergie moyenne

$$\langle \Psi_{\text{BCS}}^A | \hat{H}_p | \Psi_{\text{BCS}}^A \rangle \text{ ou } \langle \Psi_\lambda^{A+1} | \hat{H}_p | \Psi_\lambda^{A+1} \rangle.$$

Les équations variationnelles qui en résultent ont été dérivées et résolues numériquement dans la réf. 7.

Evidemment cette théorie est identique à l'utilisation de la forme factorisée (1.13) de l'amplitude $C_{\{v, -v\}_A}$ dans l'état (1.12). Les résultats de la théorie avec conservation du nombre de particules ("FBCS") diffèrent d'autant plus de la théorie de BCS-Bogoliubov que l'appariement est faible et la densité des niveaux ϵ_ν autour de l'énergie de Fermi est petite. Une différence remarquable est qu'il y a toujours une solution non-triviale dans la théorie avec conservation du nombre de particules et que le potentiel chimique μ devient une quantité dépendante de l'état $|\nu\rangle$: $\mu \rightarrow \mu_\nu$. Le potentiel chimique μ représente le changement de l'énergie moyenne du système si l'on ajoute une particule

$$\mu = \frac{d}{dA} \langle \Psi_{\text{BCS}} | \hat{H}_p | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \quad (1.95)$$

Dans la théorie incluant la conservation du nombre de particules cette quantité dépend de l'état ψ_λ dans lequel on ajoute le nucléon.

La relation (1.95) qui élucide la signification physique du potentiel chimique est obtenue de la variation de la moyenne $\langle \psi_{BCS} | \hat{H}_p | \psi_{BCS} \rangle$ par rapport au paramètre μ . Etant donné qu'une variation arbitraire de l'état ψ_{BCS} doit laisser cette quantité invariante, on a

$$\frac{d}{d\mu} \langle \psi_{BCS} | \hat{H}_p | \psi_{BCS} \rangle = 0 = \frac{d}{d\mu} \langle \psi_{BCS} | \hat{H}_p | \psi_{BCS} \rangle - \mu \frac{dA(\mu)}{d\mu}$$

donc, supposant une relation univoque entre μ et A ,

$$\mu = \left(\frac{d}{d\mu} \langle \psi_{BCS} | \hat{H}_p | \psi_{BCS} \rangle \right) \frac{d\mu(A)}{dA} = \frac{d}{dA} \langle \psi_{BCS} | \hat{H}_p | \psi_{BCS} \rangle$$

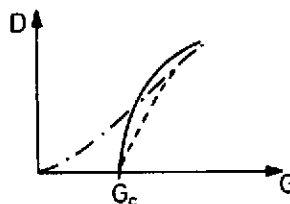
L'effet du blocage sur la distribution des probabilités d'occupation $v_{\pm\nu}^2$ est schématiquement montré dans la figure 3 pour l'état $\psi_{\lambda>0}$.

Une mesure des corrélations d'appariement est fournie par la moyenne suivante (ref.3,p. 465)

$$D^2 := \sum_{\nu, \kappa > 0} \langle C_\nu^\dagger C_{-\nu}^\dagger C_{-\kappa} C_\kappa \rangle \quad (1.96)$$

qui peut être calculée dans la théorie BCS et dans la théorie où une projection sur le nombre de particules est effectuée après la variation ("PBCS") et avant la variation ("FBCS"). Dans la fig. 4 nous montrons qualitativement le comportement de D comme fonction de la constante de l'appariement G dans les trois cas. Les différences sont importantes pour $G \approx G_c$.

Fig. 4: La mesure D des corrélations d'appariement comme fonction de la constante d'appariement G dans la théorie BCS (—) et dans le cas de projection après (---) et avant (-.-.-) variation (ref. 3,p. 465)



2.) Compte rendu bref de la théorie Hartree-Bogoliubov, noyaux en rotation, noyaux à une température finie.

Nous avons présenté les idées de base de la théorie d'appariement dans un modèle simple fondé sur l'Hamiltonien (1.8) qui est restreint au voisinage de l'énergie de Fermi.

Dans ce modèle simple les effets du champ moyen et de l'appariement sont essentiellement découplés. En réalité ils sont fortement corrélés et cette corrélation est particulièrement importante dans le cas d'un noyau déformé tournant avec un moment angulaire élevé.

Nous nous fondons sur l'Hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{\kappa, \nu} \langle \kappa | T | \nu \rangle a_{\kappa}^{\dagger} a_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa \lambda \mu \nu} \langle \kappa \lambda | v | \mu \nu \rangle a_{\kappa}^{\dagger} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\nu} a_{\mu} \quad (2.1)$$

où T est l'opérateur de l'énergie cinétique, v est une interaction effective générale, et a^{\dagger} , a sont les opérateurs de création et annihilation pour des nucléons dans des états de particules individuelles quelconques formant une base complète. Pour simplifier nous supposons que v ne dépend pas de la densité ρ . Dans la théorie du champ moyen (HF) les opérateurs c^{\dagger} , c qui créent et annihilent des nucléons dans les états selfconsistants sont reliés à la base arbitraire initiale par une transformation unitaire

$$c_{\nu}^{\dagger} = \sum_{\kappa} D_{\kappa \nu} a_{\kappa}^{\dagger} \quad (2.2)$$

$$c_{\nu} = \sum_{\kappa} D_{\kappa \nu}^* a_{\kappa} \quad (2.2')$$

Au chapitre 1 nous avons vu que l'effet d'une interaction d'appariement peut être prise en considération par la transformation (1.59a) - (1.60b) qui ne fait intervenir que les opérateurs de création et d'annihilation d'une paire d'états conjugués. Cela peut nous suggérer de considérer la transformation linéaire la plus générale des opérateurs a et a^{\dagger}

$$\beta_{\nu}^{\dagger} = \sum_{\kappa} (U_{\kappa \nu} a_{\kappa}^{\dagger} + V_{\kappa \nu} a_{\kappa}) \quad (2.3)$$

$$\beta_{\nu} = \sum_{\kappa} (U_{\kappa \nu}^* a_{\kappa} + V_{\kappa \nu}^* a_{\kappa}^{\dagger}) \quad (2.3')$$

telles que les opérateurs β , β^{\dagger} vérifient les règles d'anticommutation

$$\{\beta_{\nu}, \beta_{\mu}^{\dagger}\} = \delta_{\nu \mu} \quad (2.4)$$

$$\text{tous les autres anticommuteurs} = 0 \quad (2.4')$$

Ceci implique que la matrice

$$W = \begin{pmatrix} U & V^* \\ V & U^* \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

définie telle que les équ. (2.3), (2.3') puissent être écrites comme

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \beta^{\dagger} \end{pmatrix} = W^{\dagger} \begin{pmatrix} c \\ c^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (2.3'')$$

soit unitaire.

$$W^{\dagger} W = W W^{\dagger} = 1 \quad (2.6)$$

Grâce à la propriété (2.6) on peut invertir les relations (2.3), (2.3'):

$$a_{\nu}^{\dagger} = \sum_{\kappa} (U_{\nu \kappa}^* \beta_{\kappa}^{\dagger} + V_{\nu \kappa} \beta_{\kappa}) \quad (2.7)$$

$$a_{\nu} = \sum_{\kappa} (U_{\nu \kappa} \beta_{\kappa} + V_{\nu \kappa}^* \beta_{\kappa}^{\dagger}) \quad (2.7')$$

La relation de la transformation générale de Bogoliubov avec la transformation (1.59a) - (1.60b) se clarifie par le théorème de Bloch-Messiah⁶ qui dit que la transformation de Bogoliubov peut être décomposée en trois transformations.

$$W^{\dagger} = CVD \quad (2.8)$$

où D est la transformation HF (équ. (2.2), (2.2')), V est la transformation spéciale (1.59a) - (1.60b), et C est une transformation des opérateurs a^{\dagger} entre eux

$$\beta_{\lambda}^{\dagger} = \sum_{\kappa} C_{\kappa\lambda} \alpha_{\kappa}^{\dagger} \quad (2.9)$$

En définissant la densité

$$\rho_{\nu\nu'} : = \langle \Psi | a_{\nu'}^{\dagger} \cdot a_{\nu} | \Psi \rangle = (V^* V^T)_{\nu'\nu} \quad (2.10)$$

et le tenseur d'appariement

$$\kappa_{\nu\nu'} : = \langle \Psi | a_{\nu'} \cdot a_{\nu} | \Psi \rangle = (V^* U^T)_{\nu'\nu} \quad (2.11)$$

où Ψ est le "vide des quasi-particules" défini par

$$\beta_{\nu} | \Psi \rangle = 0 \quad (2.12)$$

on peut décrire la base c^{\dagger}, c comme celle qui génère la "forme canonique" de la densité ρ et du tenseur d'appariement κ . La forme canonique est celle où ρ est diagonal et κ a des éléments nuls sauf ceux contenus dans les deux premières sous-diagonales de la diagonale principale.

La forme canonique de κ définit aussi les paires d'états conjugués $(\varphi_{\nu'}, \varphi_{\nu}) = (\varphi_{-\nu}, \varphi_{\nu})$ comme étant ceux qui correspondent aux éléments non-nuls de κ

$$\kappa_{\nu, -\nu} = * u_{\nu} v_{\nu} \quad (2.13)$$

Pour trouver un choix optimal de la transformation de Bogoliubov on peut procéder comme au premier chapitre:

On remplace les opérateurs (a^{\dagger}, a) dans l'Hamiltonien

$$\hat{H}' : = \hat{H} - \mu \hat{A} \quad (2.14)$$

par les opérateurs (β^{\dagger}, β) à l'aide de (2.7), (2.7') et on établit l'ordre normal de ces opérateurs en utilisant les règles d'anticommuation (2.4), (2.4'). Le calcul est facilité par le théorème de Wick^{3,4}. L'Hamiltonien \hat{H} a alors une forme analogue à l'équ. (1.71)

$$\hat{H}' = H^{(0)} + \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} + \hat{H}^{(4)} \quad (2.15)$$

Si l'on demande l'annihilation de la partie $\hat{H}^{(2)}$ (contenant les termes avec 2 opérateurs β^{\dagger} ou 2 opérateurs β) et une forme diagonale pour $\hat{H}^{(1)}$ (qui contient les termes avec les produits $\beta^{\dagger} \beta$)

$$\hat{H}^{(1)} = \sum_{\nu} E_{\nu} \beta_{\nu}^{\dagger} \beta_{\nu} \quad (2.16)$$

alors les coefficients $U_{\kappa\nu}$ et $V_{\kappa\nu}$ de la transformation (2.3) et les énergies de quasi-particules E_{ν} peuvent être déterminés. On déduit l'équation matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} h & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\nu} \\ V_{\nu} \end{pmatrix} = E_{\nu} \begin{pmatrix} U_{\nu} \\ V_{\nu} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Dans cette équation $\begin{pmatrix} U_{\nu} \\ V_{\nu} \end{pmatrix}$ représente les éléments de la ν -ième colonne des matrices $\{U_{\kappa\nu}\}$ et $\{V_{\kappa\nu}\}$ et h et Δ sont des matrices avec les éléments

$$h_{\lambda\lambda'} : = \langle \Psi | \{ [a_{\lambda}, \hat{H}'], a_{\lambda'}^{\dagger} \} | \Psi \rangle = \langle \lambda | T | \lambda' \rangle + \Gamma_{\lambda\lambda'} - \mu \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.18)$$

$$\Delta_{\lambda\lambda'} := \sum_{\kappa\kappa'} \langle \lambda\lambda' | \nu | \mu\mu' \rangle \kappa_{\mu\mu'} \quad (2.19)$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda'} := 2 \sum_{\mu\mu'} \langle \lambda\mu' | \nu | \lambda'\mu \rangle \rho_{\mu\mu'} \quad (2.20)$$

{ } dans (2.18) est l'anticommutateur et Γ et Δ sont des généralisations du potentiel HF (1.3) et du potentiel d'appariement (1.25). Le potentiel chimique doit être choisi pour que la contrainte suivante

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = A \quad (2.21)$$

soit remplie. Notons que les énergies de quasi-particules E_ν qui correspondent aux états $|\Psi_\lambda\rangle = \beta_\lambda^\dagger |\Psi\rangle$ ne sont plus données par une simple formule comme (1.45) mais seulement définies comme valeurs propres des équations (2.17). Les équ. (2.17) sont un système non-linéaire pour les coefficients U et V puisque les matrices ρ et κ elles-mêmes dépendent de U et V :

$$\rho = V^* V^\dagger \quad (2.22)$$

$$\kappa = V^* U^\dagger \quad (2.23)$$

À l'exception des noyaux magiques la solution des équ. HB correspond à un noyau déformé. L'état Ψ qui est une approximation du fondamental d'un noyau pair et les excitations à une ou plusieurs quasi-particules que l'on peut générer à partir de Ψ ne sont donc pas des états propres du moment angulaire. Nous devons interpréter ces états comme étant donnés dans un référentiel intrinsèque.

Si l'on développe le fondamental Ψ ou les excitations

$$|\Psi_{\{\nu\}}\rangle := \prod_{\kappa \in \{\nu\}} \beta_\kappa^\dagger |\Psi\rangle \quad (2.24)$$

où $\{\nu\}$ est un nombre fini d'états quantiques, sur une base complète d'états propres Ψ_{IM} du moment angulaire I et de sa projection M

$$\Psi = \sum_{IM} c_{IM} \Psi_{IM} \quad (2.25)$$

les coefficients c_{IM} diffèrent de zéro pour un grand nombre d'états Ψ_{IM} . Evidemment cette propriété est analogue au fait que Ψ ainsi que $\Psi_{\{\nu\}}$ sont des superpositions d'états qui correspondent à des différents nombres de particules. Cette analogie nous suggère l'idée de contraindre la variation de l'énergie totale $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ par la condition supplémentaire que la moyenne du moment angulaire soit égale à un nombre désiré. On arriverait ainsi à la contrainte

$$\langle \Psi | \hat{I}^2 | \Psi \rangle = I(I+1) \quad (2.26)$$

où \hat{I} est l'opérateur du moment angulaire total divisé par \hbar . Cette contrainte, bien qu'elle soit utilisée par quelques auteurs pour les moments angulaires élevés, a plusieurs désavantages:

(i) L'opérateur \hat{I}^2 étant positif, la contrainte (2.26) oblige Ψ à être un état propre de \hat{I}^2 dans le cas $I = 0$, qui est celui du fondamental d'un noyau pair-pair. Étant donné les limitations de l'Ansatz pour Ψ , cela signifie que le potentiel moyen selfconsistent ainsi que la densité nucléaire dans l'espace \vec{r} doivent être sphérique. En général, on ne trouve pas une telle solution des équations variationnelles, qui en outre ne serait pas réaliste pour un noyau non-magique.

(ii) La contrainte (2.26) n'est pas obtenue comme première approximation dans un calcul fondé sur des états projetés (vr. ref. 3, p. 466).

Une condition supplémentaire plus utile est la suivante:

$$\langle \Psi | \hat{I}_x | \Psi \rangle = 0 \quad (2.27)$$

qui peut être motivée par la réflexion suivante:

Supposons que Ψ décrive un état (fortement) déformé du noyau. L'énergie moyenne $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$ qui correspond à cet état déformé ne dépend pas de l'orientation de cet état dans l'espace. Soient $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ les 3 angles d'Euler, un état Ψ_Ω avec l'orientation Ω par rapport à celle de Ψ est donné par

$$\Psi_\Omega = \hat{R}(\Omega) \Psi \quad (2.28)$$

où

$$\hat{R}(\Omega) = e^{i\alpha \hat{I}_z} e^{i\beta \hat{I}_y} e^{i\gamma \hat{I}_z} \quad (2.29)$$

est l'opérateur unitaire qui effectue une rotation d'angles $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$. Etant donné que les composantes $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ du moment angulaire total commutent avec l'Hamiltonien \hat{H} , on obtient

$$\langle \Psi_\Omega | \hat{H} | \Psi_\Omega \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (2.30)$$

On devrait donc obtenir un état variationnel amélioré en superposant des états Ψ_Ω de toutes les orientations

$$\Phi = \int d\Omega f(\Omega) \Psi_\Omega \quad (2.31)$$

Dans (2.31) la mesure $d\Omega$ et les limites d'intégration sont définies par ^{9,9}

$$\int d\Omega \dots = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \dots \quad (2.32)$$

On a intérêt à choisir les coefficients $f(\Omega)$ de cette superposition pour que l'état Φ devienne un état propre du moment angulaire carré \hat{I}^2 et de la composante \hat{I}_z :

$$\hat{I}^2 \Phi_{IM} = I(I+1) \Phi_{IM} \quad (2.33)$$

$$\hat{I}_z \Phi_{IM} = M \Phi_{IM} \quad (2.34)$$

c'est facile si l'on se sert des fonctions propres $D_{MK}^I(\Omega)$ de la toupie, qui ont les propriétés suivantes^{9,10}

$$\hat{I}^2 D_{MK}^I(\Omega) = I(I+1) D_{MK}^I(\Omega) \quad (2.35)$$

$$\hat{I}_z D_{MK}^I(\Omega) = M D_{MK}^I(\Omega) \quad (2.36)$$

$$\hat{I}_z' D_{MK}^I(\Omega) = K D_{MK}^I(\Omega) \quad (2.37)$$

Dans l'équ. (2.37), \hat{I}_z' est la composante du moment angulaire total par rapport à l'axe z d'un référentiel qui est au repos par rapport au noyau déformé. Les composantes "sphériques"

$$\hat{I}_\mu = (\hat{I}_{-1}, \hat{I}_0, \hat{I}_{+1}) = \left(\frac{\hat{I}_x - i\hat{I}_y}{\sqrt{2}}, \hat{I}_z, \frac{-(\hat{I}_x + i\hat{I}_y)}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.38)$$

dans le référentiel du laboratoire et les composantes \hat{I}_μ' dans le référentiel du noyau déformé sont reliées par ^{3,10}

$$\hat{I}_\mu = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^I(\Omega) \hat{I}_{\mu'} = \sum_{\mu'} \hat{I}_{\mu'} D_{\mu'\mu}^I(\Omega) \quad (2.39)$$

La relation (2.39) est due au fait que les fonctions $D_{MK}^I(\Omega)$ constituent la représentation matricielles de l'opérateur de rotation $\hat{R}(\Omega)$

$$D_{M'M}^I(\Omega) = \langle IM' | \hat{R}(\Omega) | IM \rangle \quad (2.40)$$

où $|IM\rangle$ et $|IM'\rangle$ sont des états propres normalisés de \hat{I}^2 et de \hat{I}_z .

$$\langle IM | IM' \rangle = \delta_{II'} \delta_{MM'} \quad (2.41)$$

Nous notons que les fonctions de la toupie remplissent la relation

$$\int d\Omega D_{M'K'}^{I'*}(\Omega) D_{MK}^I(\Omega) = \frac{8\pi^2}{2I+1} \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{KK'} \quad (2.42)$$

et que nous avons utilisé la convention de phases des références 10,3.

En raison des équ.(2.35) et (2.36) on voit que le choix suivant de la fonction $f(\Omega)$ remplit les conditions (2.33) et (2.34):

$$\begin{aligned} \phi_{IM} &= \sum_K \frac{2I+1}{8\pi^2} f_K \int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) \hat{R}(\Omega) \Psi & (2.43) \\ &= \sum_K f_K \hat{P}_{MK}^I \Psi & (2.43') \end{aligned}$$

Les paramètres f_K devraient être déterminés par une minimisation de l'énergie moyenne

$$E_I' = \frac{\langle \phi_{IM} | \hat{H}' | \phi_{IM} \rangle}{\langle \phi_{IM} | \phi_{IM} \rangle} \quad (2.44)$$

Dans (2.44), l'Hamiltonien \hat{H} est remplacé par l'opérateur

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{A}$$

puisque le nombre des particules n'est pas conservé par l'état de Bogoliubov Ψ . Cependant, si l'on conserve le nombre des particules en remplaçant l'état de Bogoliubov par l'état (1.93) (où les opérateurs $c_K^+ c_K$ se rapportent à la base canonique), on doit varier la moyenne de l'Hamiltonien \hat{H} .

On parle de la méthode "PBV" ("projection before variation") si l'on varie l'énergie $\langle \phi_{IM} | \hat{H}' | \phi_{IM} \rangle / \langle \phi_{IM} | \phi_{IM} \rangle$, par rapport à ϕ_{IM} (c.a.d. ψ et les f_K) ϕ_{IM} étant un état propre de \hat{I}^2 , \hat{I}_z et du nombre des particules \hat{A} . Par contre, on utilise la terminologie "PAV" ("projection after variation") si l'on effectue d'abord une variation par rapport à l'état Ψ de Bogoliubov qui ne conserve ni le moment angulaire ni le nombre des particules et ensuite on projette sur le moment angulaire et le nombre des particules. Bien sûr, la méthode PBV est supérieure à la méthode PAV. Les résultats des deux méthodes sont d'autant plus différents que les brisures de symétrie, qui s'expriment dans l'état de Ψ de Bogoliubov, sont peu marquées. Ils sont semblables si les brisures sont grandes et nettes (noyau fortement déformé et superfluide).^{7,8} Jusqu'à présent la méthode PBV n'est pas encore maîtrisée numériquement en ce qui concerne le moment angulaire, mais elle a été effectuée avec succès pour le problème du nombre des particules^{7,8}.

Nous devrions nous rattacher à la chaîne des idées qui devrait motiver la contrainte (2.27): On peut effectuer la projection (2.43) d'une façon approchée,^{11,3} si la déformation est grande, ce qui implique

$$\langle \Psi | \hat{I}_y^2 | \Psi \rangle \gg 1 \quad (2.45)$$

si elle a une "signature" bien définie

$$e^{i\pi \hat{I}_x} \Psi \propto \Psi$$

et si pour les petites valeurs de I la forme du noyau est presque à symétrie axiale ce qui implique le critère

$$\langle \Psi | \hat{I}_z^2 | \Psi \rangle \ll I(I+1) \quad (2.47)$$

Dans ces conditions qui sont souvent réalisées pour les noyaux fortement déformés, on démontre^{9,11} que la variation après la projection sur le moment angulaire peut être remplacée par la variation de l'énergie avant projection sous la contrainte

$$\langle \Psi | \hat{I}_x | \Psi \rangle = \sqrt{I(I+1) - \langle \hat{I}_z^2 \rangle} \quad (2.48)$$

Dans la littérature en langue anglaise on appelle cette théorie "selfconsistent cranking method" ("SCM").

Si nous prenons en considération la condition (2.48) par le choix d'un paramètre de Lagrange ω , qui signifie une vitesse angulaire, et si nous remplissons la condition

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = A \quad (2.49)$$

par le choix du potentiel chimique μ , nous arrivons au principe variationnel

$$\delta \langle \Psi | \hat{H}' | \Psi \rangle = \delta \langle \Psi | \hat{H} - \mu \hat{A} - \omega \hat{I}_x | \Psi \rangle = 0 \quad (2.50)$$

Ce principe variationnel peut être remplacé par une transformation de Bogoliubov soumise à la condition que $\hat{H}^{(2)}$ soit nul et $\hat{H}^{(1)}$ soit diagonal (vr. équ. (2.15), (2.16)) ce qui nous fournit en plus la bonne représentation des excitations élémentaires du système. Les équations (2.17) - (2.20) continuent à être valables avec la seule différence que la matrice $h_{\lambda\lambda'}$ est modifiée par le terme $-\omega \hat{I}_x$ dans l'Hamiltonien \hat{H}' :

$$h_{\lambda\lambda'} = \langle \lambda | T | \lambda' \rangle + \Gamma_{\lambda\lambda'} - \mu \delta_{\lambda\lambda'} - \omega \langle \lambda | I_x | \lambda' \rangle \quad (2.51)$$

La contrainte (2.48) diffère de celle de l'équ. (2.27). La différence est sans importance pour la bande rotationnelle construite sur le fondamental d'un noyau pair-pair qui est à symétrie axiale ($\langle \Psi | \hat{I}_z^2 | \Psi \rangle = 0$) pour des petites valeurs du moment angulaire I. Pour $I \gg 1$, les conditions (2.48) et (2.27) sont toujours équivalentes. La différence entre les deux conditions est importante si on traite des bandes rotationnelles avec $K \neq 0$, surtout dans les noyaux impairs.¹²

L'influence du terme supplémentaire $-\omega \hat{I}_x$ sur la solution des équ. (2.17), c.a.d. sur l'état Ψ , est d'autant plus profond que le moment angulaire I est élevé. Comme nous avons déjà insinué, le terme $-\omega \hat{I}_x$ en combinaison avec la condition (2.27) ou (2.48) produit un spectre rotationnel comme fonction de I, c.a.d. il contient les effets de la force de Coriolis et la force centrifuge. On peut donc interpréter l'Hamiltonien \hat{H}' de l'équation (2.50) comme celui agissant dans un référentiel au

repos par rapport au noyau déformé.

Cette interprétation s'avère justifiée par la considération suivante:

Supposons que nous voulions décrire un noyau déformé en rotation dans une image dépendante du temps, c.a.d. par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\hat{H} \phi(t) = i\hbar \dot{\phi}(t) \quad (2.52)$$

où \hat{H} est l'Hamiltonien total du noyau. L'équ. (2.52) est équivalente au principe variationnel

$$\delta \langle \phi(t) | (\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) | \phi(t) \rangle = 0 \quad (2.53)$$

ou la variation est soumise à la condition de normalisation

$$\langle \phi(t) | \phi(t) \rangle = 1 \quad (2.54)$$

Pour que $\phi(t)$ représente un "paquet d'ondes" qui tourne autour de l'axe x avec la vitesse angulaire ω nous faisons l'Ansatz

$$\phi(t) = e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}} \Psi \quad (2.55)$$

où l'état "intrinsèque" Ψ est normalisé et indépendant du temps.

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (2.56)$$

Substituant (2.55) dans (2.53) et utilisant le fait que \hat{H} commute avec \hat{I}_x on trouve

$$\delta \langle \Psi | (\hat{H} - \omega \hat{I}_x) | \Psi \rangle = 0 \quad (2.57)$$

Si on choisit la vitesse angulaire ω telle que la condition (2.27) ou (2.48) soit remplie, on obtient notre principe variationnel. Il est clair, par cette dérivation, qu'il nous faut interpréter Ψ comme l'état "intrinsèque" du noyau dans un référentiel qui tourne dans le laboratoire avec la vitesse angulaire ω et qui est au repos par rapport au noyau déformé, et que $(\hat{H} - \omega \hat{I}_x)$ est l'Hamiltonien dans ce référentiel intrinsèque. Nous notons qu'on peut faire une réflexion analogue par rapport au nombre de particules: Si on substitue l'état

$$\phi(t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar} \hat{A}} \cdot e^{-i\omega t \hat{I}_x} \Psi \quad (2.58)$$

dans (2.53), on obtient le principe variationnel (2.50) pour l'état Ψ . De ce point de vue on peut interpréter l'opérateur \hat{A} comme le générateur d'une rotation dans un espace de jauge et le potentiel chimique μ/\hbar comme la vitesse angulaire de cette rotation.

Si l'état intrinsèque Ψ est un état propre de \hat{A} et de \hat{I}_x , il ne diffère de $\phi(t)$ que par une phase

dépendante du temps, mais si Ψ brise les symétries reliées aux générateurs de rotations \hat{A} et \hat{I}_x , $\Phi(t)$ dépend du temps de façon non-triviale. L'état ψ que l'on obtient du principe variationnel (2.50) dépend des paramètres ω et μ :

$$\underline{\Psi} = \underline{\Psi}(\mu, \omega) \quad (2.59)$$

La moyenne $\langle \underline{\Psi}(\mu, \omega) | \hat{H} | \underline{\Psi}(\mu, \omega) \rangle$ est stationnaire par rapport à une variation arbitraire de $\underline{\Psi}(\mu, \omega)$ qui conserve la normalisation. Regardons une variation de $\underline{\Psi}$ qui est produite par un changement du paramètre μ dans $\underline{\Psi}(\mu, \omega)$

$$\delta \underline{\Psi} = \left(\frac{\partial \underline{\Psi}(\mu', \omega)}{\partial \mu'} \right)_{\mu'=\mu} \cdot \delta \mu \quad (2.60)$$

On obtient ainsi de l'équ. (2.50)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu'} (E(\mu', \omega) - \mu A(\mu', \omega) - \omega I(\mu', \omega)) \right]_{\mu'=\mu} = 0 \quad (2.61)$$

ou

$$\frac{\partial E(\mu, \omega)}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial A(\mu, \omega)}{\partial \mu} - \omega \frac{\partial I(\mu, \omega)}{\partial \mu} = 0 \quad (2.61')$$

Les quantités E, A et I sont définies par

$$E(\mu, \omega) = \langle \underline{\Psi}(\mu, \omega) | \hat{H} | \underline{\Psi}(\mu, \omega) \rangle / \langle \underline{\Psi} | \underline{\Psi} \rangle \quad (2.62)$$

$$A(\mu, \omega) = \langle \underline{\Psi}(\mu, \omega) | \hat{A} | \underline{\Psi}(\mu, \omega) \rangle / \langle \underline{\Psi} | \underline{\Psi} \rangle \quad (2.62')$$

$$I(\mu, \omega) = \langle \underline{\Psi}(\mu, \omega) | \hat{I}_x | \underline{\Psi}(\mu, \omega) \rangle / \langle \underline{\Psi} | \underline{\Psi} \rangle \quad (2.62'')$$

D'une façon analogue on obtient l'équation (2.63) par une variation de $\underline{\Psi}$ par rapport à ω :

$$\frac{\partial E(\mu, \omega)}{\partial \omega} - \mu \frac{\partial A(\mu, \omega)}{\partial \omega} - \omega \frac{\partial I(\mu, \omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (2.63)$$

Utilisant les équ. (2.61') et (2.63) on trouve la relation suivante entre les différentielles totales des fonctions

$$dE = \mu dA + \omega dI \quad (2.64)$$

On en déduit que le potentiel chimique μ et la vitesse rotationnelle ω sont donnés par les dérivées partielles suivantes

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial A} \right)_I \quad (2.65)$$

$$\omega = \left(\frac{\partial E}{\partial I} \right)_A \quad (2.66)$$

ou l'indice I ou A signifie que cette quantité doit être tenue constante. Les relations (2.65) et (2.66) élucident la signification physique des paramètres μ et ω . L'énergie $E(\mu, \omega)$ doit être une fonction paire de ω et le moment angulaire $I(\mu, \omega)$ doit être nul pour $\omega=0$. Pour des petites valeurs de ω on a donc

$$E(\mu, \omega) = E(\mu, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} \omega^2 + \dots \quad (2.67)$$

$$I(\mu, \omega) = \left(\frac{\partial I}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} \cdot \omega + \dots \quad (2.68)$$

On peut démontrer¹³ la validité de la relation

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} = \left(\frac{\partial I}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = \Theta \quad (2.69)$$

Le nombre moyen des particules $A(\mu, \omega)$ ne peut pas dépendre du signe de la vitesse angulaire ω . Pour de petites valeurs de ω , on a donc

$$A(\mu, \omega) = A(\mu, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A(\mu, \omega)}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} \omega^2 + \dots \quad (2.70)$$

Si l'on substitue les relations (2.67), (2.68) et (2.70) dans l'équation (2.63), on obtient en 1^{er} ordre de ω

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} \cdot \omega = \left(\frac{\partial I}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} \cdot \omega$$

c.a.d. la relation (2.69).

La quantité Θ qui est définie par l'équ. (2.69) représente un moment d'inertie. Pour de petites valeurs de ω ou de I on a donc

$$E(\mu, \omega) \approx E(\mu, 0) + \frac{\Theta}{2} \omega^2 \approx E(\mu, 0) + \frac{I^2}{2\Theta} \quad (2.71)$$

En remplaçant I par la valeur semiclassique $\sqrt{I(I+1)}$ dans la relation (2.27) on obtiendrait

$$E(\mu, \omega) \approx E(\mu, 0) + \frac{I(I+1)}{2\Theta} \quad (2.71')$$

Si ω est grand, on ne peut plus utiliser les développements (2.67), (2.68) et (2.70) autour de $\omega=0$. Il est d'usage de définir un moment d'inertie par l'équation classique

$$\Theta := \frac{I}{\omega} \quad (2.72)$$

La vitesse angulaire ω peut être déterminée selon l'équation (2.66) à partir d'un spectre rotationnel. On en déduit ω comme fonction de I

$$\omega = \omega(I) \quad (2.73)$$

et ainsi, utilisant (2.72), un moment d'inertie dépendant de I . Par inversion de la fonction (2.73)

$$I = I(\omega) \quad (2.73')$$

et substitution de (2.73') dans (2.72) on obtient le moment d'inertie comme fonction de ω . C'est dans cette dernière représentation que l'on discute le phénomène de "backbending" qui se produit par l'alignement des moments angulaires d'une paire de Cooper avec l'axe de rotation. Comme le "backbending" sera discuté par Mr. B. Haas, nous n'entrons pas dans ces détails.

Si le terme $-\omega \hat{I}_x$ dans l'Hamiltonien \hat{H} peut être traité comme perturbation et si Ψ_{BCS} est l'état Ψ pour $\omega=0$ on obtient

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{BCS}\rangle + \frac{\omega}{2} \sum_{\kappa, \kappa'} |\Psi_{\kappa\kappa'}\rangle \frac{\langle \Psi_{\kappa\kappa'} | \hat{I}_x | \Psi_{BCS} \rangle}{E_{\kappa} + E_{\kappa'}} \quad (2.74)$$

où

$$|\Psi_{\kappa\kappa'}\rangle = \beta_{\kappa}^{\dagger} \beta_{\kappa'}^{\dagger} |\Psi_{BCS}\rangle \quad (2.74')$$

sont des états à 2 quasi-particules (vr. équ. (2.24)) et E_{κ} , $E_{\kappa'}$ sont les énergies des quasi-particules correspondantes. Elles sont obtenues comme valeurs propres des équ. (2.17). Dans le modèle simple du chapitre 1 elles sont données par la formule (1.55), i.e. par

$$E_{\kappa} = \sqrt{(\epsilon_{\kappa} - \mu)^2 + \Delta_{\kappa}^2} \quad (2.75)$$

Calculant la valeur moyenne du moment angulaire $\langle \Psi | \hat{I}_x | \Psi \rangle$ avec l'état (2.74) et utilisant la définition (2.74) on obtient la fameuse formule du cranking pour le moment d'inertie d'un noyau (ref. 3, p. 131):

$$\Theta = 2 \sum_{\kappa, \kappa' > 0} \frac{|\langle \kappa | I_x | \kappa' \rangle|^2}{E_{\kappa} + E_{\kappa'}} (\mu_{\kappa} v_{\kappa'} - \mu_{\kappa'} v_{\kappa})^2 \quad (2.76)$$

où $\langle \kappa | I_x | \kappa' \rangle$ est l'élément de matrice de I_x entre les fonctions de particules individuelles φ_{κ} et $\varphi_{\kappa'}$.

Dans la limite HF

$$v_{\kappa} = \theta_0 (\mu - \epsilon_{\kappa}) \quad (2.77)$$

$$\mu_{\kappa} = \theta_0 (\epsilon_{\kappa} - \mu) \quad (2.77')$$

la formule (2.76) donne la formule d'Inglis (ref. 3, p. 131)

$$\Theta_{\text{Inglis}} = 2 \sum_{\kappa, \kappa'} \frac{|\langle \kappa | I_x | \kappa' \rangle|^2}{|\epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\kappa'}|} \theta_0 (\epsilon_{\kappa} - \mu) \theta_0 (\mu - \epsilon_{\kappa'}) \quad (2.78)$$

En général, le moment d'inertie Θ est plus petit que Θ_{Inglis} puisque les dénominateurs $(E_{\kappa} + E_{\kappa'})$ sont plus grands que $(\epsilon_{\kappa} - \epsilon_{\kappa'})$ et les facteurs $(\mu_{\kappa} v_{\kappa'} - \mu_{\kappa'} v_{\kappa})^2$ sont plus petits que 1. On peut interpréter ce résultat en disant qu'une partie du noyau suprafluide ne participe pas à la rotation collective.

Néanmoins, il y a des cas où le gap disparaît, le moment d'inertie n'est donc plus réduit essentiellement par rapport à sa valeur HF et toutefois l'état Ψ est composé par une somme cohérente de paires de Cooper ("gapless superconductivity"). Une telle situation est réalisée dans le phénomène du "backbending".

Nous arrivons au dernier sujet de ce chapitre: les noyaux à température finie.

Nous considérons un ensemble de noyaux dans différents états d'excitation, avec différents nombres de nucléons, et dans différents états du moment angulaire. Nous supposons que nous ne connaissons que le nombre moyen A des nucléons dans un noyau, le moment angulaire moyen I et

l'énergie moyenne E d'un noyau. Soit $\hat{\rho}$ l'opérateur statistique normalisé de l'ensemble

$$\text{Tr } \hat{\rho} = 1 \quad (2.79)$$

Il doit donc remplir les conditions suivantes

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = A \quad (2.80)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{I}_x) = I \quad (2.81)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{H}) = E \quad (2.82)$$

Définissons l'entropie S par

$$S = - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \quad (2.83)$$

Elle nous fournit une mesure pour le manque d'information concernant le système. L'opérateur $\hat{\rho}$ qui maximise l'entropie sous les contraintes (2.79) - (2.82) est donné par

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Y} e^{-\frac{1}{T}(\hat{H} - \mu\hat{A} - \omega\hat{I}_x)} \quad (2.84)$$

où

$$Y = \text{Tr} e^{-\frac{1}{T}(\hat{H} - \mu\hat{A} - \omega\hat{I}_x)} \quad (2.85)$$

Les paramètres de Lagrange μ , ω et T doivent être choisis tels que les conditions (2.80), (2.81) et (2.82) soient remplies. La démonstration du résultat (2.84) est très simple:

Nous exigeons que l'expression

$$\text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left[-\ln \hat{\rho} - \frac{1}{T}(\hat{H} - \mu\hat{A} - \omega\hat{I}_x) + \lambda \right] \right\} \quad (2.86)$$

soit stationnaire par rapport à une variation $\delta\hat{\rho}$ de l'opérateur $\hat{\rho}$. Le paramètre λ dans (2.86) doit tenir compte de la condition (2.79). On a donc la condition de stationnarité

$$\text{Tr} \left\{ (\hat{\rho} + \delta\hat{\rho}) \left[-\ln(\hat{\rho} + \delta\hat{\rho}) - \frac{1}{T}(\hat{H}' + \lambda) \right] \right\} - \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left[-\ln \hat{\rho} - \frac{1}{T}(\hat{H}' + \lambda) \right] \right\} = 0 \quad (2.87)$$

où

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{A} - \omega\hat{I}_x \quad (2.87')$$

En utilisant la relation

$$\ln(\hat{\rho} + \delta\hat{\rho}) \approx \ln \hat{\rho} + \hat{\rho}^{-1} \delta\hat{\rho} \quad (2.88)$$

on peut reformuler l'équ. (2.87) sous la forme suivante

$$\text{Tr} \left\{ \delta\hat{\rho} \left[-\ln \hat{\rho} + \tilde{\lambda} - \frac{\hat{H}'}{T} \right] \right\} = 0 \quad (2.89)$$

où $\tilde{\lambda} := \lambda^{-1}$ et où $\delta\hat{\rho}$ est une variation arbitraire (hermitique) de $\hat{\rho}$. Il en suit

$$\ln \hat{\rho} = -\frac{\hat{H}'}{T} + \tilde{\lambda}$$

ce qui est équivalent à la forme (2.84) de $\hat{\rho}$ si le paramètre $\tilde{\lambda}$ est déterminé par la normalisation (2.79).

Cette déduction bien connue de "l'ensemble micro-canonique" devrait nous faire comprendre que la forme (2.84) de l'opérateur statistique n'implique pas que les noyaux soient en contact avec un réservoir.

On démontre facilement que "l'énergie libre"

$$F := \text{Tr} \{ \hat{\rho} (\hat{H}' + T \ln \hat{\rho}) \} = E' - TS \quad (2.90)$$

est minimale pour la distribution (2.84). Pour généraliser notre théorie à une température T finie, il nous faut donc remplacer le principe variationnel (2.50) par la minimalisation de l'énergie libre

$$\delta F = 0 \quad (2.91)$$

fondée sur l'opérateur statistique (2.84). Le calcul est profondément simplifié par l'utilisation du théorème de Wick pour des moyennes statistiques⁴. On en déduit que les équations (2.17) continuent à être valables avec les mêmes définitions (2.51), (2.19) et (2.20) des matrices h , Δ et Γ mais avec la seule différence que la densité $\rho_{\mu\mu'}$ et le tenseur d'appariement $\kappa_{\mu\mu'}$ ne sont plus définis par les équations (2.10) et (2.11) mais par les moyennes statistiques

$$\rho_{\mu\mu'} := \text{Tr} (\hat{\rho} a_{\mu'}^\dagger a_{\mu}) \quad (2.92)$$

$$\kappa_{\mu\mu'} := \text{Tr} (\hat{\rho} a_{\mu'} a_{\mu}) \quad (2.93)$$

Si on utilise la transformation de Bogoliubov (2.7), (2.7'), la forme micro-canonique de $\hat{\rho}$ (équ. (2.84)) tout en négligeant $\hat{H}^{(*)}$ dans l'Hamiltonien \hat{H} , on trouve le résultat

$$\rho_{\mu\mu'} = (U n U^\dagger)_{\mu\mu'} + (V^* (1-n) V^T)_{\mu\mu'} \quad (2.94)$$

$$\kappa_{\mu\mu'} = (U n V^\dagger)_{\mu\mu'} + (V^* (1-n) U^T)_{\mu\mu'} \quad (2.95)$$

où n représente les nombres d'occupation des énergies E_κ des quasi-particules

$$n_{\kappa\kappa'} = \delta_{\kappa\kappa'} \frac{1}{1 + \exp(E_\kappa/T)} \quad (2.96)$$

Si la température tend vers zéro, les relations (2.94) et (2.95) deviennent identiques aux côtés droits des équations (2.10) et (2.11). Nous attirons l'attention sur le fait que les énergies propres E_ν des équations (2.17) ainsi que les matrices U et V dépendent d'une façon non-triviale des paramètres μ , ω et T :

$$E_V = E_V(\mu, \omega, T) \quad (2.96)$$

Comme les équations sont non-linéaires, leur solution est assez compliquée et bien sûr ne peut être trouvée que numériquement. Plusieurs auteurs ont étudié la théorie de Hartree-Fock à température finie¹⁴⁻²⁰

Un problème non-trivial dans ces calculs est dû au fait qu'à une température donnée et un potentiel chimique donné il y a deux solutions des équations, une qui représente le noyau entouré par la vapeur et une autre qui ne représente que la vapeur. Une méthode pour traiter ce problème a été développée dans les références 17 et 18. Des applications en astrophysique se trouvent dans la référence 21. P. Bonche a donné une revue d'une partie de ces travaux dans son cours à l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire en 1985. Des calculs qui traitent la suprafluidité à température finie ont été faits par P. Ring et al.²²

On arrive à une simplification essentielle si l'on remplace le potentiel "selfconsistent" $\Gamma_{\mu'\mu}$ par les éléments de matrice d'un potentiel de Nilsson ou de Saxon-Woods. Cette approximation est souvent assez satisfaisante. Elle sera traitée en détail dans les cours de Mr. Haas.

3.) Manifestations des corrélations d'appariement

Les corrélations d'appariement disparaissent à une température assez basse d'environ 1 MeV. Pour discerner des effets de la suprafluidité nucléaire nous devons donc considérer les noyaux à température nulle ou dans des excitations de basse énergie.

Les effets pair-impair dans l'énergie de liaison et l'influence de l'appariement sur la valeur du moment d'inertie sont des manifestations bien connues. Le phénomène du "backbending" qui est dû à la brisure et l'alignement d'une paire de Cooper, et aussi la diminution de l'appariement par l'effet Coriolis seront discutés par le Prof. Haas.

Nous avons cru pendant longtemps qu'il y aurait des manifestations de la suprafluidité nucléaire dans la fission nucléaire à basse énergie. Le Dr. C. Signarbieux vous présentera des résultats très intéressants qui suggèrent le contraire.

Il me reste à attirer votre attention sur les effets de la suprafluidité dans les réactions nucléaires:

Considérons une collision périphérique entre deux noyaux qui conduit à un transfert d'une paire de nucléons identiques (nn ou pp) d'un noyau à l'autre. Dans l'approximation semiclassique de ce processus la section efficace $\sigma_{\beta\alpha}(\mathcal{J}; E)$ de cette réaction est donnée par le produit de la section efficace de Rutherford $\sigma_{Ruth}(\mathcal{J}, E)$ pour la diffusion élastique dans le champ Coulombien* multiplié par la probabilité $P_{\beta\alpha}$ de transition de l'état initial α des deux noyaux à l'état final β (\mathcal{J} = angle de diffusion; E = énergie du faisceau)

$$\sigma_{\beta\alpha}(\mathcal{J}, E) = \sigma_{Ruth}(\mathcal{J}, E) \cdot P_{\beta\alpha} \quad (3.1)$$

* Annotation: On peut incorporer l'effet d'un champ moyen nucléaire dans cette section efficace élastique

La probabilité de transition $P_{\beta\alpha}$ est le carré de la matrice S du processus qui peut être écrit comme un produit d'une amplitude au temps $t \rightarrow +\infty$ $F_{\beta\alpha}(t \rightarrow \infty)$ et un facteur exponentiel qui contient l'effet de l'absorption par la partie imaginaire $W(r)$ du modèle optique.^{23,24}

$$S_{\beta\alpha} = F_{\beta\alpha}(t \rightarrow +\infty) \exp\left[-\int_{-\infty}^{+\infty} dt W(r(t))\right] \quad (3.2)$$

$$P_{\beta\alpha} = |S_{\beta\alpha}|^2 \quad (3.3)$$

Dans l'équ. (3.2) la coordonnée $r(t)$ est la distance classique entre les centres des noyaux comme fonction du temps. Les amplitudes $F_{\beta\alpha}(t)$ sont obtenues comme solution d'un système d'équations semiclassiques pour les voies couplées.^{23,25}

Si le transfert peut être traité en 1^{er} ordre de la théorie des perturbations, l'amplitude $F_{\beta\alpha}(t \rightarrow \infty)$ est donnée par une intégrale sur l'élément de matrice de l'interaction \hat{H}_{int} qui effectue le transfert

$$F_{\beta\alpha}(t \rightarrow +\infty) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \Psi_{\beta} | \hat{H}_{int}(r(t)) | \Psi_{\alpha} \rangle e^{i\omega_{\beta\alpha} t} \quad (3.4)$$

Ψ_{α} et Ψ_{β} sont les produits des états nucléaires des deux noyaux avant et après la réaction. $\omega_{\beta\alpha}$ est la "valeur Q " de la réaction

$$\omega_{\beta\alpha} = E_{\beta_1} + E_{\beta_2} - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2} \quad (3.5)$$

($E_{\beta_1}, E_{\alpha_1}$ = énergies intrinsèques des noyaux ; dans l'état final (β) et initial (α))

Nous choisissons comme \hat{H}_{int} une interaction d'appariement qui transfère des paires de Cooper du noyau 1 au noyau 2 et vis et versa.

$$\hat{H}_{int} = V(r(t)) \sum_{\nu_1 > 0; \nu_2 > 0} (c_{\nu_2}^{\dagger} c_{-\nu_2}^{\dagger} c_{-\nu_1} c_{\nu_1} + c_{\nu_1}^{\dagger} c_{-\nu_1}^{\dagger} c_{-\nu_2} c_{\nu_2}) \quad (3.6)$$

Cette interaction est un couplage effectif qui incorpore le transfert en une étape par l'interaction à 2 corps et le transfert consécutif de deux nucléons par un potentiel à 1 corps moyen.²⁷ $V(r(t))$ est un facteur de forme qui décroît rapidement comme fonction de la distance r entre les centres des noyaux. $c_{\nu_i}^{\dagger}$ est un opérateur de création d'un nucléon dans l'orbite φ_{ν_i} du noyau i ($i=1,2$).

Pour un transfert entre les états fondamentaux des noyaux pair-pairs initiaux et finaux, les états Ψ_{α} et Ψ_{β} sont approchés par des produits de deux états BCS

$$\Psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha_1}^{BCS} \Psi_{\alpha_2}^{BCS} \quad (3.7)$$

$$\Psi_{\beta} = \Psi_{\beta_1}^{BCS} \Psi_{\beta_2}^{BCS} \quad (3.7')$$

Les états initiaux et finaux du même noyau ne diffèrent que par le nombre moyen des nucléons, c.a.d. par le potentiel chimique. Cette différence est négligeable:

$$\Psi_{\alpha_1}^{BCS} \approx \Psi_{\beta_1}^{BCS} \quad (3.8)$$

$$\Psi_{\alpha_2}^{BCS} \approx \Psi_{\beta_2}^{BCS} \quad (3.8')$$

L'amplitude $F_{\beta\alpha}(t \rightarrow \infty)$ pour un transfert entre les états fondamentaux est donc donnée par

$$F_{\beta\alpha}(t \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \Psi_{\beta} | \hat{H}_{int}(t) | \Psi_{\alpha} \rangle = -i \tilde{V}(\omega_{\beta\alpha}).$$

$$\cdot \sum_{\nu_1 > 0} \langle \Psi_{d_1}^{BCS} | c_{\nu_1}^{\dagger} c_{-\nu_1} | \Psi_{d_1}^{BCS} \rangle \cdot \sum_{\nu_2 > 0} \langle \Psi_{d_2}^{BCS} | c_{\nu_2} c_{-\nu_2} | \Psi_{d_2}^{BCS} \rangle \quad (3.9)$$

ou $\tilde{V}(\omega_{\beta\alpha})$ est la transformée de Fourier du potentiel $V(t)$

$$\tilde{V}(\omega_{\beta\alpha}) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{\beta\alpha} t} \cdot V(t) \quad (3.10)$$

Un calcul simple rend le résultat

$$F_{\beta\alpha}(t \rightarrow +\infty) = -i \tilde{V}(\omega_{\beta\alpha}) \cdot \frac{\Delta_1}{G_1} \cdot \frac{\Delta_2}{G_2} \quad (3.11)$$

où Δ_i et G_i représentent le paramètre du gap et l'élément de matrice moyen d'appariement dans le noyau $i=1,2$.

Le facteur $\frac{\Delta_i}{G_i}$ est proportionnel aux nombres d'orbitales qui sont partiellement occupées autour du potentiel chimique μ_i à la suite de l'interaction d'appariement. C'est une mesure du degré de suprafluidité du noyau. Pour un noyau suprafluide on a

$$\frac{\Delta_i}{G_i} \approx 5 \quad (3.12)$$

ce qui signifie un renforcement de la section efficace de transfert par un facteur

$$\left(\frac{\Delta_1}{G_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta_2}{G_2}\right)^2 \approx 5^4 = 625 \quad (3.12')$$

en comparaison avec un transfert de deux nucléons non corrélés. Lorsqu'un seul des deux noyaux est suprafluide, il reste le facteur $\left(\frac{\Delta}{G}\right)^2 \approx 25$. C'est le cas pour les réactions (t,p) of $(^3\text{He},n)$. Des facteurs de renforcement de ces ordres de grandeur ont été vus dans un grand nombre de réactions de transfert. Un exemple est la réaction entre différents isotopes d'étain.²⁶ Un calcul soigneux de ce transfert a été fait par H. Weiss.²⁷

Si le couplage \hat{H}_{int} est suffisamment fort la théorie de perturbation n'est plus valable et on doit faire un calcul des voies couplées pour les amplitudes $F_{\beta\alpha}$. Cela a été fait pour des modèles simples²⁸ où l'on trouve un comportement oscillatoire de la section efficace de transfert comme fonction de la distance minimale $d_0(E,\vartheta)$ entre les noyaux en collision. Elle est produite par l'interférence entre les différentes amplitudes qui correspondent au même transfert net. L'engrenage entre les angles de jauge dans les deux noyaux suprafluides qui est à l'origine de cet effet, représente une analogie avec l'effet Josephson connu de la physique du solide.

Dans les calculs des ref.^{28,29} l'effet d'absorption a été négligé. Pourtant cet effet s'est avéré très important.³⁰ Nous serions donc heureux de trouver, comme trace de l'effet Josephson nucléaire, que la section efficace de transfert d'une paire de Cooper passe par un maximum comme fonction de l'énergie du faisceau pour un angle ϑ de diffraction donné (ou v. v.) à une énergie qui est suffisamment basse pour que l'absorption dans d'autres voies de réaction soit encore négligeable. Dans le travail de la référence ²⁶, on a vu une diminution de la section efficace de transfert audessus d'une certaine énergie, mais les auteurs soupçonnent que le commencement de l'absorption en serait la cause. Peut-être serait-il plus prometteur d'étudier le transfert d'une

paire de protons entre 2 noyaux suprafluides en protons puisque la barriere Coulombienne pourrait réduire l'effet de l'absorption.*

Récemment une description semi-classique très élégante du transfert multiple des paires de Cooper a été publiée. Elle utilise la difference des angles de jauge dans les deux noyaux suprafluides comme variable dynamique.^{31,32} Il a été aussi trouvé que le transfert renforcé d'une paire de Cooper entre deux noyaux fait croire la section efficace de fusion à tres basse énergie.^{33,34} Ce phénomène a de l'importance pour les réactions de nucleo-synthèse dans les étoiles.

Comme dernier exemple d'une manifestation implicite des corrélations d'appariement, je voudrais attirer votre attention sur l'observation suivante faite recemment par R. S. Nikam, P. Ring, et L. F. Canto³⁵: l'élément de matrice du transfert d'une paire de Cooper sur un noyau de nombre de nucleons A et de moment angulaire I(|A,I>)

$$M(I, A) := \langle A+2, I | \{c^+c^+\}_{L=0} | A, I \rangle$$

$$\approx \langle \phi[\mu(A+2), \omega(I)] | \{c^+c^+\}_{L=0} | \phi[\mu(A), \omega(I)] \rangle \quad (3.13)$$

montre un comportement oscillatoire comme fonction de la vitesse angulaire $\omega(I)$ si les potentiels chimiques $\mu(A)$, $\mu(A+2)$ sont proches d'une valeur critique. Ceci est montré sur la figure 5 qui est copiée d'un preprint (ref. 36) de R. S. Nikam et P. Ring. Les auteurs de réf. 35 constatent que le changement de signe de l'élément de matrice comme fonction de $\omega(I)$ a lieu si les potentiels chimiques $\mu(A)$ et la fréquence $\omega(I)$ sont proches d'un "point diabolique". Les points diaboliques dans le plan des paramètres (μ, ω) sont définis comme les lieux où deux énergies propres $E_{\nu_1}(\mu, \omega)$ $E_{\nu_2}(\mu, \omega)$ des équ. (2.17) coïncident. Cela veut dire que la règle de non-croisement de von Neumann-Wigner est violée aux points diaboliques. Dans le preprint 36, Nikam et Ring expliquent que le changement de signe, c.a.d. le passage par zéro, de l'élément matriciel de transfert comme fonction de $\omega(I)$ est une manifestation de la phase de Berry.³⁶ Dans la réf. 38, Berry prouve le théorème suivant: Soit $\hat{H}(R)$ un Hamiltonien qui dépend d'un nombre $n \geq 2$ de paramètres $R=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\phi_{\nu}(R(t))$ une fonction propre de l'Hamiltonien $H(R(t))$ au temps t.

$$\hat{H}(R(t))|\phi_{\nu}(R(t))\rangle = E_{\nu}(R(t))|\phi_{\nu}(R(t))\rangle \quad (3.14)$$

Si au temps $t=0$ la solution de l'équation de Schrödinger

$$\hat{H}(R(t))|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \quad (3.15)$$

est égale à l'état propre $|\phi_{\nu}(R(0))\rangle$, et si le changement des paramètres $R(t)$ est infiniment lent, nous savons du théorème adiabatique³⁹ que $|\Psi(t)\rangle$ reste proportionel a $|\phi_{\nu}(R(t))\rangle$.

Il n'acquiert qu'une phase $\alpha_{\nu}(t)$ dépendante du temps

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\alpha_{\nu}(t)} |\phi_{\nu}(t)\rangle \quad (3.16)$$

Annotation: *Communication privée de la part du Prof. von Oertzen.

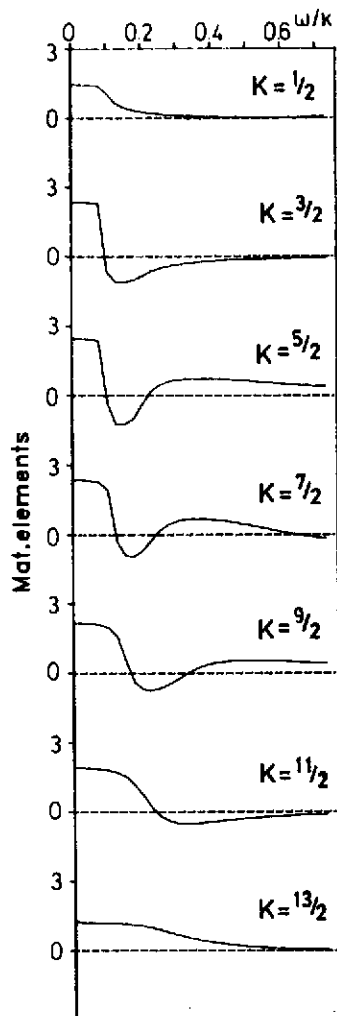


Fig. 5: (de la référence 36)

Élément de matrice de transfert comme fonction de la vitesse angulaire ω pour différentes valeurs du potentiel chimique $\mu(A)$ où A est le nombre de nucléons dans la couche li 13/2 qui pénètre dans la région des couches déformées près du potentiel chimique μ dans les Terres Rares. (κ est une unité d'énergie)

qui consiste d'une "phase dynamique" $\beta_\nu(t)$ et une phase supplémentaire $\gamma_\nu(t)$ ayant une origine géométrique

$$\beta_\nu(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' E_\nu(R(t')) \quad (3.17)$$

$$\alpha_\nu(t) = \beta_\nu(t) + \gamma_\nu(t) \quad (3.18)$$

En substituant (3.16) - (3.18) dans (3.15), on obtient

$$\dot{\gamma}_\nu(t) = i \sum_j \langle \phi_\nu(R(t)) | \frac{\partial}{\partial X_j} \phi_\nu(R(t)) \rangle \dot{X}_j \quad (3.19)$$

Si on change les paramètres $R(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots)$ le long d'une trajectoire close C dans l'espace (X_1, \dots) , on trouve que la phase $\gamma_\nu(T) = \gamma_\nu(C)$ qui est acquise sur ce circuit ne dépend plus de la dépendance détaillée des paramètres R du temps t

$$\gamma_\nu(C) = i \sum_{j=1}^n \oint dX_j \langle \phi_\nu(R) | \frac{\partial \phi_\nu(R)}{\partial X_j} \rangle \quad (3.20)$$

Berry prouve que pour $n=2$ et pour une matrice Hamiltonienne réelle le facteur de phase

$$e^{+i\gamma_\nu(C)} = -1 \quad (3.21)$$

si C entoure un point diabolique où $E_\nu(X_1, X_2) = E_{\nu'}(X_1, X_2)$

et

$$e^{i\gamma_\nu(C)} = +1 \quad (3.22)$$

si C n'entoure pas un point diabolique.

Dans le cas du transfert d'une paire de Cooper, la matrice hamiltonienne est donnée par les équ. (2.17), et les paramètres $(X_1, X_2) = (\mu, \omega)$ sont le potentiel chimique μ et la vitesse angulaire ω . Les points diaboliques dans le plan (μ, ω) sont donnés par les valeurs de μ et ω où deux énergies propres des équ. (2.17) coïncident. Le fait que les équations de Bogoliubov ont en effet des "solutions diaboliques" est connue depuis plusieurs années.^{40,41} C'est précisément dans la région du backbending où l'on trouve des solutions des équ. (2.17) qui sont dégénérées et de la même symétrie.

Si l'on a conjointement transfert d'une paire $(\mu(A), \omega(I)) \rightarrow (\mu(A+2), \omega(I))$ et excitation Coulombienne $(\mu(A), \omega(I)) \rightarrow (\mu(A), \omega(I+2))$ de sorte que la trajectoire $C = C_2 - C_1$

$$C := \mu(A), \omega(I) \rightarrow \mu(A+2), \omega(I) \rightarrow \mu(A+2), \omega(I+2) \rightarrow \\ \rightarrow \mu(A), \omega(I+2) \rightarrow \mu(A), \omega(I)$$

entoure un point diabolique (μ_d, ω_d) , le théorème de Berry exige qu'il y ait interférence destructive entre les amplitudes des réactions qui correspondent aux deux trajectoires C_1 et C_2

$$C_1 := \mu(A), \omega(I) \rightarrow \mu(A+2), \omega(I) \rightarrow \mu(A+2), \omega(I+2) \\ C_2 := \mu(A), \omega(I) \rightarrow \mu(A), \omega(I+2) \rightarrow \mu(A+2), \omega(I+2)$$

Il est démontré dans la référence 31 que cette interférence destructive se manifeste par le passage par zéro de l'élément de matrice de transfert. Il serait sans doute intéressant de démontrer ce comportement dans une expérience de transfert.

Remerciements:

Je remercie Monsieur P. Ring de m'avoir expliqué son travail sur la manifestation de la phase de Berry dans le transfert d'une paire de Cooper entre deux noyaux suprafluides. J'exprime ma gratitude à Mademoiselle Dufour pour m'avoir aidé à rédiger le texte et mes chers collègues P. Bonche et Ph. Quentin pour leur aimable hospitalité à l'Ecole Joliot-Curie de Maubuisson.

Liste des References

1. T. H. R. Skyrme, *Phil. Mag.* 1 (1956), 1043
T. H. R. Skyrme, *Nucl. Phys.* 9 (1959), 615
2. D. Gogny, *Proceedings of the International Conference on Nuclear Selfconsistent Fields, Trieste, 1975*. G. Ripka and M. Porneuf, Eds. North Holland, Amsterdam, 1975
3. P. Ring, P. Schuck: "The Nuclear Many-Body Problem", Springer Verlag, New York Inc. 1980
4. J. P. Blaizot, G. Ripka: "Quantum Theory of finite systems", Cambridge, Mass. MIT-Press, 1986
5. J. Bardeen, L. N. Cooper et J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* 108 (1957) 1175
6. N. N. Bogoliubov, *Sov. Phys. JETP* 7 (1958) 41; *Sov. Phys. Usp* 2 (1959) 236; *Usp Fiz. Nauk.* 67 (1959) 549
7. K. Dietrich, H. J. Mang, et J. H. Pradal, *Phys. Rev.* 135 (1964) B22
8. C. Bloch and A. Messiah, *Nucl. Phys.* 39 (1962) 95
9. M. E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum", John Wiley 1957
10. A. R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton Univ. Press, Princeton 1957
11. A. Kamlah, *Z. Phys.* 216 (1968), 52
12. P. Ring, H. J. Mang, and B. Banerjee, *Nucl. Phys.* A225 (1974) 141;
P. Ring and H. J. Mang, *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 1174
13. H. Schmidt, *Diplomarbeit, Universität Frankfurt/Main, 1961 (pas publié)*
14. U. Mosel, P. G. Zint, K. M. Passler, *Nucl. Phys.* A236 (1974) 252
G. Sauer, M. Chanda, U. Mosel, *Nucl. Phys.* A264 (1976) 221
15. M. Brack, P. Quentin, *Phys. Lett.* 52 B (1974) 159; *Phys. Scripta* 10A (1974) 163
16. P. Quentin, H. Flocard, *Ann. Rev. Nucl.Sci.* 28 (1978) 523
17. A. K. Kerman, S. Levit, *Phys. Rev.* C24 (1981) 1029;
A. K. Kerman, S. Levit, T. Troudert, *Ann. of Phys.* 148 (1983) 436
18. P. Bonche, D. Vauthérin, *Nucl. Phys. A* 372 (1981) 496
P. Bonche, S. Levit, D. Vauthérin, *Nucl. Phys. A* 427 (1984) 278; *ibid A* 436 (1985) 265
19. S. Levit, D. Vauthérin, *Nucl. Phys. A* 427 (1984) 278; *ibid A* 436 (1985) 265
20. S. Levit, P. Bonche, *Nucl. Phys. A* 437 (1985) 426
21. P. Bonche, D. Vauthérin, *Nucl. Phys. A* 372 (1981) 496; *Astron-Astrophys.* 112 (1982) 268

22. J. E. Egido, H. J. Mang, P. Ring, Nucl. Phys. A 451 (1986) 77
23. K. Dietrich and K. Hara, Nucl. Phys. A 211, 349 (1973)
24. R. A. Broglia and A. Winther, Nucl. Phys. A 182, 112 (1972); Phys. Reports 4C, No. 4, 152 (1972)
25. K. Dietrich, "Semi-classical Theory of Nuclear Reactions" in "Heavy-Ion High-Spin States and Nuclear Structure", Course in the ICTP, Miramare/Triest, Italy; Proceedings of the IAEA Vienna, 1975; SMR-14/31; Vol. I,p. 77-109
26. W. von Oertzen, B. Gebauer, A. Gamp, H.G. Bohlen, F. Busch, D. Schüll, "Pairing effects in quasi-elastic n-transfer between tin isotopes", Z. f. Physik A 313 (1983) 189
27. H. Weiss, Phys. Rev. C19 (1979) 834
28. K. Dietrich, K. Hara, and F. Weller, Phys. Lett. 35B, 201 (1971); Journal de Phys., coll. C6, suppl. No.11-12, tome 32 (1971), C6-179 et C6-183
29. M. Kleber, H. Schmidt, Z. Physik 245, 68 (1971)
30. S. L. Winnik, Nucl. Phys. A247 (1975) 382
31. C. H. Dasso, A. Vitturi, soumis à Phys. Rev. Lett. 1987
P. Lotti, A. Vitturi, and C. H. Dasso, accepté par Nucl. Phys. A (1987)
32. A. Winther dans "Proceedings of the International Workshop on Semiclassical and Phase space approaches to the Dynamics of the nucleus", Aussois 1987
33. Proceedings of the International Conference on Fusion Reactions below the Coulomb barrier, MIT, Ed. S. G. Steadman, Lecture Notes in Physics 219 (1985)
34. C. H. Dasso, S. Landowne, R. A. Broglia, and A. Winther, Z. Phys. A317 (1984) 187
35. R. S. Nikam, P. Ring, et L. F. Canto, Z. Phys. A324 (1986) 241
36. R. S. Nikam et P. Ring, "A Manifestation of the Berry Phase in Diaboloic Pair Transfer in Rotating nuclei", prétirage, août 1987, Physik-Department TUM, D-8046 Garching, RFA; Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 980
37. J. von Neumann et E. P. Wigner, Phys. Z. 30 (1929) 467
38. M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. (London) A392 (1984)45
39. A. Messiah, Quantum Mechanics, Vol. II, chapter XVII, part II (North Holland Publishing Company)
40. R. Bengtson, I. Hamamoto, et B. R. Mottelson, Phys. Lett. 73B (1978) 259
41. H. Frisk et Z. Szymanski, Phys. Lett. 172B (1986) 272