LE PROBLÈME À N CORPS

Approches relativistes

Jean-François Mathiot
Laboratoire de Physique Corpusculaire
Université Blaise Pascal, CNRS-IN2P3,
F-63177 Aubière Cedex

Abstract

Ce cours s'attachera dans un premier temps à expliciter les motivations physiques des approches relativistes, en en démontant les mécanismes élémentaires. La deuxième partie sera consacrée à la manière dont on peut comprendre dans ces approches la matière nucléaire, la structure des noyaux finis, et comment on peut déduire très facilement une interaction effective équivalente de type Skyrme. La troisième partie du cours passera en revue, d'un point de vue critique, les résultats les plus récents obtenus en structure nucléaire.

We shall detail in a first part the physical motivations of relativistic approaches, by investigating the underlying elementary mechanisms. The second part will be devoted to the understanding of nuclear matter and finite nuclei in these approaches. We shall see, in particular, how one can easily derive an effective interaction "à la Skyrme" from these relativistic approaches. We shall discuss, in the third part, some recent results obtained in nuclear structure.

1 Préambule

La compréhension de la structure microscopique des noyaux est un des objectifs majeurs de la physique nucléaire depuis maintenant plusieurs décennies. Il s'agit bien sûr, en premier lieu, de comprendre l'origine microscopique des différents termes de la formule de masse de Bethe-Weizsäcker donnant l'énergie de liaison d'un noyau en fonction de son numéro atomique A et de sa charge Z :

$$E = a_v A + a_s A^{1/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \ . \tag{1}$$

Evidemment, cette description des noyaux ne peut s'arréter là et l'on doit aussi comprendre ses propriétés plus fine comme le décalage spin-orbite des orbitales $j = l \pm 1/2$, ou la distribution spatiale des protons et neutrons dans le noyau (densité de charge et de matière).

Dans cette quête, nous pouvons distinguer deux approches complémentaires. L'une, plus macroscopique, consiste à décrire la structure nucléaire en terme de degrés de liberté macroscopiques tels que la densité de protons et de neutrons, leur densité de vitesse, ou encore le gradient de ces densités. Ces approches, basées sur les travaux de Skyrme [1, 2], ont donné lieu à d'innombrables publications, et à toute une succession "d'interactions de Skyrme" pour décrire des propriétés de plus en plus fine du noyau.

La deuxième approche, plus microscopique, consiste à décrire la structure nucléaire à partir de l'interaction élémentaire entre nucléons (interaction nucléon-nucléon, interactions à plus de deux corps, ...). Elle nécessite, entre autre, la maîtrise de techniques de résolution du problème à N corps particulièrement sophistiquées (voir le cours de J.-P. Blaizot). Citons, dans ce cadre, les calculs variationnels qui abordent maintenant des noyaux légers comme ^{16}O.

Les approches de champ moyen relativiste dont nous allons parler dans ce cours sont à la fois macroscopiques puisqu'elles se restreignent à l'approximation de champs moyen ou Hartree-Fock, mais aussi microscopiques puisqu'elles gardent la trace de la structure élémentaire du potentiel nucléon-nucléon en terme d'échange de mésons.

L'objet de ce cours sera de démonter les mécanismes élémentaires de ces approches relativistes, en essayant d'éviter toute discussion technique. Le lecteur intéressé par ces aspects techniques pourra trouver de nombreux cours et articles de revue sur ce sujet [3, 4]. Afin de simplifier les notations, nous prendrons dans ce cours $\hbar = c = 1$, et, pour les calculs de matière nucléaire infinie, nous considérerons un élément de volume unité.

2 Les fondements théoriques de l'approche de champ moyen relativiste

2.1 Quelques faits expérimentaux et ordres de grandeur

Il n'est heureusement pas nécessaire de rentrer dans les détails de la construction du potentiel nucléon-nucléon pour comprendre pourquoi il est indispensable de considérer

les corrections relativistes lorsque l'on s'intéresse à la structure des noyaux. L'existence même des noyaux en est une justification!

En effet, les noyaux sont constitués de protons et neutrons, et non pas de quarks et gluons! Cela nous indique, tout au moins en première approximation, que le potentiel nucléon-nucléon est répulsif à courtes distances, sans quoi les propriétés des noyaux seraient dominées par les propriétés à courtes distances du nucléon, et donc par sa sous-structure en quarks. Cette répulsion intervient typiquement pour des distances relatives entre nucléons inférieures à 0.8 fm.

D'autre part les noyaux sont aussi liés! Cela implique donc que le potentiel nucléon-nucléon est attractif à moyenne distance, typiquement pour des distances de l'ordre de 1 à 2 fm. Comme nous le verrons plus loin, il n'y a pas un mécanisme unique qui permette de comprendre cette répulsion à courte distance et cette attraction à moyenne distance, et cette non-unicité est à l'origine des fortes corrections relativistes que l'ont doit observer dans certains processus. Nous reviendrons évidemment sur ce point dans la suite de ce cours.

D'où provient alors l'énergie de liaison d'un noyau fini? Tout le monde connait par coeur la formule de Bethe-Weizsäcker que nous avons rappelé en préambule. Essayons d'aller un peu plus en détails, en suivant les remarques que nous venons de faire sur le potentiel nucléon-nucléon.

L'énergie de liaison par particule de $\simeq -8\ MeV$ des noyaux finis provient d'un première annulation partielle entre l'énergie de liaison de la matière infinie ($a_v \simeq -15\ MeV$) et des corrections de taille finie, de Coulomb, et d'asymétrie ($\simeq 7\ MeV$). Cette énergie de liaison de la matière résulte ensuite d'une seconde annulation entre énergie cinétique (de l'ordre de $\simeq 20\ MeV$ dans un modèle de champ moyen, mais de l'ordre de $\simeq 35\ MeV$ lorsque l'on traite explicitement les corrélations à courtes portées), et énergie potentielle ($\simeq -35\ MeV$ ou $\simeq -50\ MeV$ suivant le type d'approximation fait). Enfin, comme nous venons de le rappeler, cette énergie potentielle est le résultat de l'annulation antre la partie répulsive du potentiel à courte distance ($\simeq +150\ MeV$), et sa partie attractive à moyenne distance ($\simeq -200\ MeV$).

Du fait de cette machination diabolique de la nature qui, pour obtenir une énergie de liaison par particule de -8 MeV doit considérer des contributions d'énergie potentielle de l'ordre de -200 MeV, il est clair qu'une correction aussi minime soit-elle, de l'ordre de quelque pour cent, sur l'énergie potentielle va engendrer de larges corrections, de l'ordre de 50 %, sur l'énergie de liaison. Les corrections relativistes sont précisément de cette ordre de grandeur puisque, pour un moment de l'ordre du moment de Fermi, le facteur $1-\gamma = 1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, avec $\frac{v}{c} \simeq \frac{p_F}{M}$, vaut environ 3 %. Cela implique ainsi une correction de l'ordre de 6 MeV sur l'énergie de liaison d'un noyau fini!

Comme nous le verrons plus loin, les corrections relativistes dépendent du mécanisme microscopique qui sont à l'origine des différentes contributions à l'énergie potentielle. Il n'est donc plus possible, pour pouvoir les estimer de façon réaliste, d'ignorer l'origine microscopique de la force effective dans les noyaux, comme cela est souvent le cas actuellement.

En résumé, nous pouvons dire que les corrections relativistes sont à la fois faibles et

fortes! Elles sont faibles par rapport aux contributions élémentaires à l'énergie potentielle, de l'ordre de quelque pour cent. Cela est important dans la mesure où il sera alors possible de les traiter par un développement perturbatif en $\frac{p}{M}$. Elles peuvent être aussi fortes selon l'observable que l'on considère, énergie de liaison ou potentiel spin-orbite par exemple. Dans la mesure où un développement perturbatif est théoriquement justifié, il est alors facile de voir qu'il sera possible de générer, dans les approches relativistes, une interaction effective de type Skyrme, ainsi que nous le verrons dans le chapitre suivant. C'est ainsi que l'on peut affirmer que ce qu'un calcul de champ moyen (ou même Hartree-Fock) relativiste peut faire, un calcul à la Skyrme doit aussi pouvoir le faire!

2.2 Quelques rappels sur le potentiel nucléon-nucléon

Suivant l'hypothèse de Yukawa, en 1935, prédisant que le potential d'interaction nucléon-nucléon était dû à l'échange de mésons π, notre compréhension de ce potentiel est maintenant arrivée à maturité. C'est ce que j'appellerai le modèle de référence de la structure microscopique des noyaux [5].

Comme nous l'avons vu en introduction, les degrés de liberté physiques dans les noyaux, à densité et température ordinaire, sont les états hadroniques. Parmi ceux-ci trois jouent un rôle tout à fait particulier. Tout d'abord le nucléon bien sûr, de nombre quantique J=1/2, T=1/2, qui donne son numéro atomique au noyau. Il n'est pas tout seul dans la mesure ou, en première approximation, la résonance Δ (J=3/2 et T=3/2) est dégénérée avec le nucléon. Une fois levée cette dégénérescence (échange de gluon entre quarks constituant le nucléon par exemple), la résonance Δ acquière une masse de 1232 MeV. Il conviendra donc d'en tenir compte, implicitement ou explicitement, dans les calculs microscopiques de la structure nucléaire dans la mesure où les énergies mises en jeu sont comparables à l'énergie d'excitation de cette résonance.

Le troisième état hadronique essentiel est le pion. Sa masse ($138\ MeV$) est très faible, contrairement aux autres états mésoniques non-étranges, les résonances ρ ($776\ MeV$) et ω ($783\ MeV$). Cela traduit le statut tout à fait particulier du pion. En effet, il est conçu, dans le cadre de la chromodynamique quantique [6], comme un état collectif quark-antiquark, dont les propriétés, et sa masse presque nulle, sont les conséquences de la brisure spontanée d'une symétrie essentielle de QCD à basse énergie: la symétrie chirale [7]: il est, dans le jargon théorique, un boson de Goldstone.

Ce choix de degrés de liberté n'est bien sûr pas un concept purement théorique, et plusieurs expériences permettent de "voir" les pions dans les noyaux. Nous indiquons sur la figure 1 la section efficace différentielle de l'électrodésintégration du deutéron près du seuil. Le couplage élémentaire du photon virtuel aux nucléons (approximation d'impulsion, figure 2.a) est indiqué par le trait pointillé. Il ne permet pas de comprendre, loin s'en faut, le mécanisme de diffusion d'électrons à des transferts d'impulsion même relativement faibles ($Q^2 \simeq 0.5(GeV/c)^2$). Pour ces transferts d'impulsion, et au delà, la contribution dominante à la section efficace provient du couplage du photon aux mésons échangés entre nucléons, comme indiqué à la figure 2.b. La qualité des résultats expérimentaux, et la compréhension théorique des mécanismes d'échange de mésons à laquelle nous sommes arrivé sont tout à fait impressionnantes, d'autant plus que l'accord

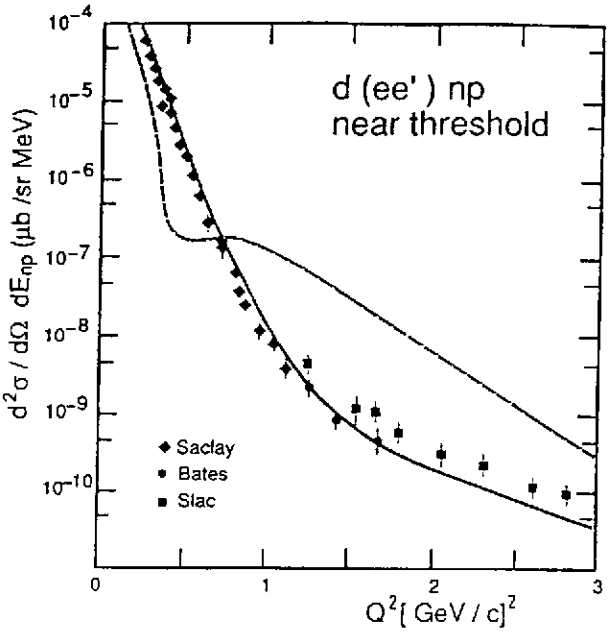


Figure 1: Section efficace d'électrodésintégration du deutéron

entre théorie et expérience persiste bien au delà du domaine de validité de ces modèles [5].

Une fois donc les acteurs bien identifiés, il est aisé, tout au moins d'un point de vue qualitatif, de comprendre quel sera la structure du potentiel nucléon-nucléon, en suivant l'hypothèse de Yukawa. Ce potentiel est représenté à la figure 3. Il provient des contributions d'échange de un pion, deux pions, trois pions, ..., combinées à l'infini. Du fait de la masse non-nulle du pion, la contribution de l'échange d'un nombre de plus en plus important de pions correspond à une portée de l'interaction de plus en plus petite. Ainsi, l'échange d'un seul pion correspond à une interaction de portée $1/m_\pi \simeq 1.4fm$. C'est la partie à longue portée de l'interaction. La partie à moyenne portée correspond à l'échange de deux pions. Elle est attractive. L'échange de trois pions et plus est prépondérente pour

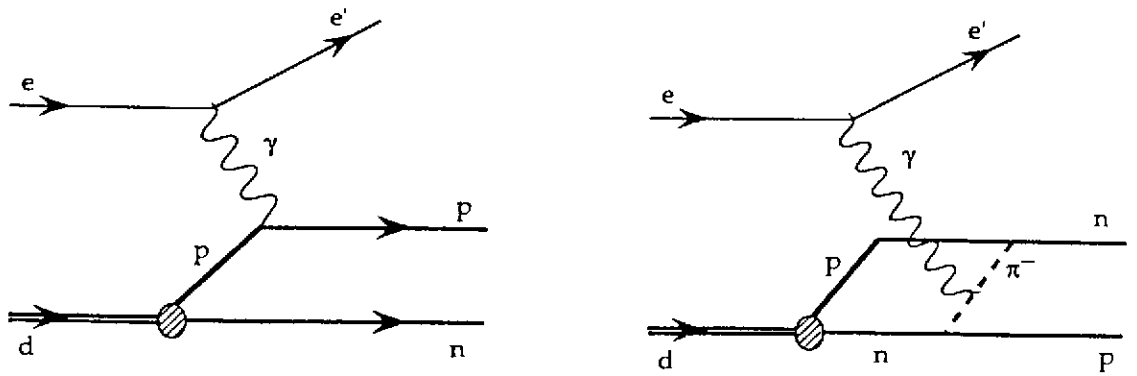


Figure 2: Processus élémentaires contribuant à l'électrodésintégration du deutéron près du seuil. a) Approximation d'impulsion; b) une des contributions de courant d'échange mésonique

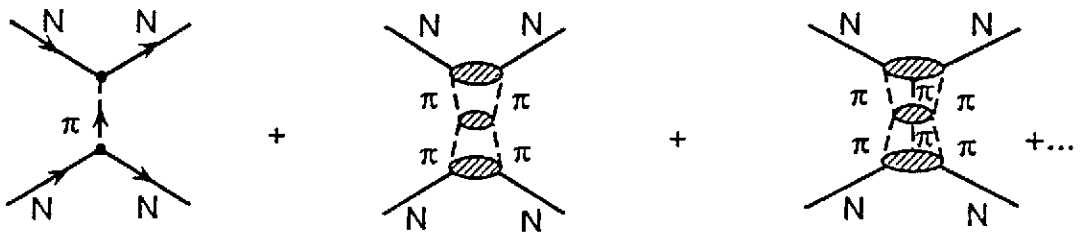


Figure 3: Représentation diagrammatique du potentiel d'interaction nucléon-nucléon

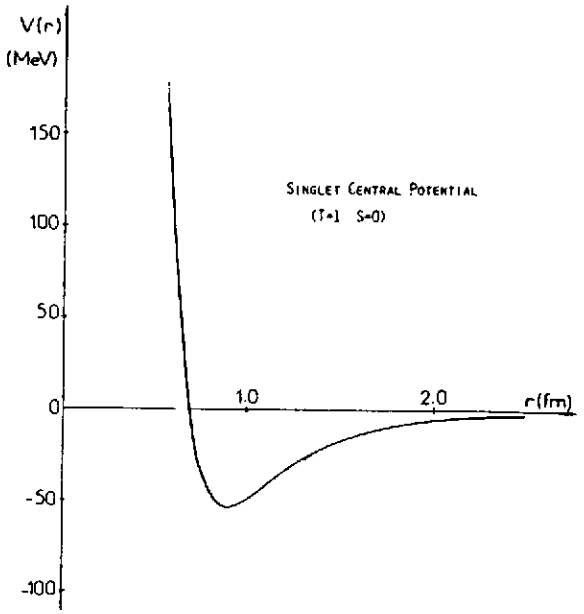


Figure 4: Potentiel nucléon-nucléon dans l'espace des coordonnées, pour une onde S

des distances relatives inférieures à 0.8 fm environ. Au niveau de l'échange de trois pions, cette partie est fortement répulsive. La forme générale du potentiel a ainsi l'allure indiquée sur la figure 4.

Plusieurs paramétrisations du potentiel nucléon-nucléon existent dans la littérature. Elles procèdent toutes des mêmes hypothèses que nous venons de rappeler très succintement. Par contre, elles diffèrent sur la manière de les implémenter d'un point de vue pratique. Le potentiel dit de Paris [8] construit explicitement le potentiel par l'échange d'un, deux et trois pions. La partie à plus courte portée n'est en fait, d'un point de vue phénoménologique, que de très peu d'importance dans la mesure où la probabilité de trouver deux nucléons très proches l'un de l'autre est particulièrement faible, compte tenu de la contribution répulsive provenant de l'échange de trois pions (encore un autre miracle de la nature!).

Comme nous le verrons plus loin, cette représentation du potentiel nucléon-nucléon n'est cependant pas adaptée pour beaucoup d'applications, comme par exemple le calcul

des courants d'échange mésoniques, ou les approches de champ moyen relativiste. Dans ce cas, il est plus judicieux de se placer dans l'approximation d'échange de bosons [9, 10]. Dans cette approximation, la contribution d'échange de deux pions est représentée par l'échange de deux bosons. L'un, dans le canal (J=1, T=1) correspond à la résonance ρ de masse 776 MeV. Le second, dans le canal (J=0,T=0) est la "résonance" σ. Ce dernier boson n'est pas à proprement parlé une résonance, dans la mesure où il n'est pas détecté expérimentalement. Il doit être seulement interprété comme une paramétrisation simple du potentiel d'échange de deux pions dans ce canal. Sa masse est alors fixée à environ 500 MeV. Enfin, la contribution d'échange de trois pions, dans le canal (J=1, T=0) correspond à l'échange de la résonance ω de masse 783 MeV.

Dans cette approximation, qui a maintenant été testée dans de nombreux processus élémentaires, la structure du potentiel nucléon-nucléon est parfaitement déterminée par :

- Les constantes de couplage méson-nucleon,
- La masse des mésons échangés,
- Leur nombre quantique.

Nous indiquons ci-dessous la forme générale du potentiel qui en résulte [11], dans un développement en $1/M$:

$$V^{T=0,1}(\vec{r}) = V_C^T(r) + \mathbf{L.S}\ V_{LS}^T(r) + \vec{\sigma_1}.\vec{\sigma_2}\ V_{SS}^T(r) + S_T^{12}(\vec{r})\ V_T^T(r)\ , \tag{2}$$

où S_T^{12} est l'opérateur tensoriel:

$$S_T^{12}(\vec{r}) = \vec{\sigma_1}.\vec{r}.\vec{\sigma_2}.\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{\sigma_1}.\vec{\sigma_2}\ . \tag{3}$$

Les parties centrales (V_C^T) et spin-orbite (V_{LS}^T) proviennent essentiellement de l'échange de mésons σ et ω, alors que les parties spin-spin (V_{SS}^T) et tenseur (V_T^T) proviennent de l'échange de mésons π et ρ. Les parties centrales et spin-orbite s'écrivent, à l'ordre dominant en 1/M, où M est la masse du nucléon:

$$V_C^T(r) \simeq -\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\sigma r}}{r} + \frac{g_\omega^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\omega r}}{r} \equiv V_{att} + V_{rep}\ , \tag{4}$$

$$V_{LS}^T(r) \simeq -\frac{1}{2M^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[V_{att} - V_{rep}\right]\ . \tag{5}$$

Nous pouvons déjà faire, au vu de ces expressions particulièrement simples, plusieurs remarques importantes. Tout d'abord nous vérifions sur l'expression de V_C^T l'annulation entre partie attractive du potentiel (notée V_{att}, négative) et partie répulsive (notée V_{rep}, répulsive). Alors que la valeur de chaque terme est grande, le potentiel central est relativement faible. Cette annulation par contre ne se produit pas au niveau du potentiel spin-orbite, comme nous le voyons sur l'expression de V_{LS}^T. Ceci explique la grande contribution du potentiel spin-orbite dans les noyaux. Cette contribution est néanmoins quantitativement relativement petite car elle est d'ordre $1/M^2$ par rapport au potentiel

central. C'est donc à proprement parlé une correction d'ordre relativiste. Elle est connue depuis 1926 (précession de Thomas).

Nous aurons l'occasion de revenir sur la partie spin-orbite du potentiel nucléon-nucléon, mais notons déjà que cette correction est d'une certaine manière triviale dans la mesure où elle peut être incorporée simplement dans tout calcul non-relativiste basé sur l'équation de Schrödinger, avec le potentiel (2). Cette correction est dite "cinématique" par opposition aux corrections relativistes "dynamiques " dont nous parlerons plus loin. Ce potentiel est à la base de tous les calculs microscopiques de structure nucléaire [12].

2.3 Le modèle de champ moyen relativiste

2.3.1 L'onde plane relativiste

Nous nous restreindrons, dans un premier temps, à la description de la matière nucléaire infinie symétrique. Dans la limite non-relativiste, la fonction d'onde d'un nucléon de moment $\vec{p}$ est une onde plane définie par:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = e^{i\vec{p}.\vec{r}}\chi_s\chi_\tau \ , \tag{6}$$

où l'état du système est entièrement défini par $\alpha=(\vec{p}, s, \tau)$, s et τ caractérisant le spin et l'isospin du nucléon. Les états de spin ou isospin sont alors déterminés par:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \ . \tag{7}$$

Cette onde plane est solution de l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2M}\nabla^2\phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_p\phi_\alpha(\vec{r}) \ , \tag{8}$$

avec $\epsilon_p = \frac{p^2}{2M}$.

L'onde plane relativiste sera solution de l'équation de Dirac suivante [4]:

$$\left[-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla} + \beta M\right]\phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_p\phi_\alpha(\vec{r}) \ , \tag{9}$$

où $\vec{\alpha}$ et β sont les matrices de Dirac, et $\phi_\alpha(\vec{r})$ a la forme suivante:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = u^0(\vec{p}, s)e^{i\vec{p}.\vec{r}}\chi_\tau \ . \tag{10}$$

L'onde plane relativiste est ainsi entièrement déterminée par le spineur libre de Dirac $u^0(\vec{p}, s)$ défini par :

$$u^0(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{\epsilon_p + m}{2\epsilon_p}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{(\epsilon_p + m)}\end{pmatrix}\chi_s \ , \tag{11}$$

avec $\epsilon_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$. Ce spineur de Dirac est formé de deux composantes: la "grande composante " qui domine dans la limite non relativiste (elle est 1), et la "petite composante " qui s'annulle dans cette limite. On retrouve alors l'onde plane non-relativiste.

2.3.2 L'approximation Hartree-Fock relativiste

L'approximation de champ moyen relativiste, et plus généralement l'approximation dite Hartree-Fock, sont tout à fait semblables aux mêmes approximations dans les approches non-relativistes [12]. L'état du noyau est représenté par un déterminant de Slater :

$$|\Phi_0 >= a^+_{\alpha_1} \dots a^+_{\alpha_A}|0> , \tag{12}$$

où $a^+_{\alpha_i}$ est l'opérateur de création d'un nucléon dans l'état α_i, et $|0>$ représente l'état de référence (le vide). On recherchera alors une solution sous la forme d'une onde plane, pour un milieu infini et uniforme, soit:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = u(\vec{p}, s)e^{i\vec{p}.\vec{r}}\chi_\tau \ . \tag{13}$$

La forme générale du Hamiltonien s'écrira [4]

$$\begin{aligned} H &= T + V & (14)\\ &= \sum_{\alpha'\alpha} \bar{u}(\alpha')\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta M\right] u(\alpha) a^+_{\alpha'} a_\alpha & (15)\\ &\quad + \sum_{\alpha'\alpha\gamma'\gamma} \bar{u}(\alpha')\bar{u}(\gamma')V(\vec{k})u(\gamma)u(\alpha)a^+_{\alpha'}a^+_{\gamma'}a_\gamma a_\alpha \ . & (16) \end{aligned}$$

Dans cette équation, on note $\bar{u} = u^+\beta$, et $\vec{k} = \vec{p'} - \vec{p}$.

La contribution de l'énergie potentielle à l'énergie totale $E =< \Phi_0|H|\Phi_0 >$ se décomposera de manière traditionnelle en terme direct ($\alpha \equiv \alpha'$ et $\gamma \equiv \gamma'$) et en terme d'échange ($\alpha \equiv \gamma'$ et $\gamma \equiv \gamma'$).

La forme finale de l'onde plane relativiste, c'est-à-dire la forme du spineur de Dirac $u(\vec{p}, s)$, sera alors déterminée par minimisation de l'énergie totale, compte tenu de la contrainte de normalisation de l'état du système,

$$\delta\left[E - \lambda < \Phi_0|N|\Phi_0 >\right] = 0 \ , \tag{17}$$

où N est l'opérateur de normalisation. L'équation dont $u(\vec{p}, s)$ sera solution est ainsi une équation de Dirac dans le milieu nucléaire, qui a la forme suivante:

$$\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta M + \Sigma(\vec{p})\right] u(\vec{p}, s) = \epsilon_p u(\vec{p}, s) \ , \tag{18}$$

ou $\Sigma(\vec{p})$ est la self-energie dans l'approximation de Hartree-Fock. Sa structure générale est donnée par:

$$\Sigma(\vec{p}) = \beta\Sigma_S(p) + \Sigma_0(p) + \frac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{p}\Sigma_V(p) \ . \tag{19}$$

Cette équation a la particularité de pouvoir se réécrire sous forme d'une équation de type libre :

$$\left[\vec{\alpha}.\vec{p^*} + \beta M^*(p)\right] u(\vec{p}, s) = \epsilon^*_p u(\vec{p}, s) \ , \tag{20}$$

avec :

$$\begin{aligned} M^*(p) &= M + \Sigma_S(p) \ , & (21)\\ \epsilon^*_p &= \epsilon_p - \Sigma_0(p) \ , & (22)\\ p^* &= p + \Sigma_V(p) \ . & (23) \end{aligned}$$

On en déduit alors immédiatement la solution:

$$u(\vec{p},s) = \sqrt{\frac{\epsilon_p^* + M^*}{2\epsilon_p^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}^*}{(\epsilon_p^* + M^*)} \end{pmatrix} \chi_s \ , \tag{24}$$

avec $\epsilon_p^* = \sqrt{\vec{p}^* + M^{*2}}$. La masse M^* est alors appelée masse effective relativiste du nucléon dans le milieu nucléaire.

Dans l'approximation de champ moyen (approximation Hartree), l'équation définissant la masse effective est simplement:

$$M^* = M + \Sigma_S = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp \ . \tag{25}$$

2.3.3 Approches microscopiques et phénoménologiques

Avant de continuer plus avant dans la discussion du contenu physique des approches relativistes, je voudrai faire quelques remarques sur les différentes façons de voir la structure nucléaire. Nous en avons déjà discerné trois:

- L'approche microscopique de la structure nucléaire est basée sur l'interaction élémentaire nucléon-nucléon et utilise les techniques du problème à N corps pour calculer les propriétes des noyaux. Actuellement, seuls les noyaux relativement légers (^{16}O par exemple) sont accessibles. Les résultats obtenus sont tout-à-fait encourageants [12]. Il faut cependant bien réaliser que cette approche est limitée à des précisions de l'ordre de quelques pour cent, pour les raisons que nous avons évoquées dans la section 2: une précision de 20 MeV sur l'énergie totale de ^{16}O par exemple correspond à environ 1.5 MeV sur l'énergie par particule, et une précision inférieure à 1 % sur notre connaissance des différentes parties de l'interaction nucléon-nucléon élémentaire. C'est une précision qui ne pourra jamais être envisagée ! Cela bien sûr n'enlève en rien des qualités de cette approche, mais en fixe bien les limites intrinsèques.

- L'approche semi-phénoménologique que nous discutons dans ce cours. Elle garde la structure microscopique du potentiel nucléon-nucléon (échange de mésons $\sigma, \omega, \pi, \rho$) mais considère les constantes de couplage et masses comme paramètres ajustables, dont le domaine de variation est tout de même contraint par les valeurs connues du potentiel élémentaire. De plus, l'approximation de champs moyen, ou plus généralement l'approximation de Hartree-Fock, est utilisée.

- L'approche phénoménologique basée sur l'interaction effective de type Skyrme. Elle permet de reproduire les propriétés globales du noyau. Elle ne peut cependant pas prétendre à être très prédictive en dehors du domaine dans lequel ses paramètres ont été ajustés.

3 Application à la structure microscopique des noyaux

3.1 Mécanisme de saturation de la matière nucléaire

Une fois connue la solution générale de l'équation de Dirac dans le milieu nucléaire, il est facile de calculer la courbe de saturation de la matière nucléaire. L'énergie totale s'écrit:

$$E_T = < \Phi_0|T|\Phi_0 > + < \Phi_0|V|\Phi_0 > \ . \tag{26}$$

Comme dans le cas non-relativiste, la valeur moyenne de l'énergie potentielle se décompose en terme directe (dit de Hartree) et terme d'échange (dit de Fock). Nous reviendrons plus loin sur les différents niveaux d'approximation. Pour illustrer comment interviennent les différents échanges de mésons, nous nous limiterons dans un premier temps à l'approximation de Hartree.

Compte tenu de la sommation sur l'isospin, et pour de la matière nucléaire symétrique, seul l'échange des mésons isoscalaire σ et ω contribue à l'approximation Hartree. Cette approximation est traditionnellement appelée aussi approximation de champ moyen. C'est aussi le modèle dit de Walecka. Dans l'approximation Hartree-Fock, l'échange des mésons isovectoriels π et ρ contribue aux termes d'échange, même dans le cas de la matière nucléaire symétrique [4].

Dans l'approximation de champ moyen, l'équation de Dirac dans le milieu se réécrit:

$$[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta(M + \Sigma_S)]\, u(\vec{p}, s) = (\epsilon_p - \Sigma_0) u(\vec{p}, s) \ , \tag{27}$$

avec:

$$M^* = M + \Sigma_S \ = \ M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp \ , \tag{28}$$

$$\epsilon_p^* = \epsilon_p - \Sigma_0 \ = \ \epsilon_p - \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 dp \ . \tag{29}$$

Dans cette approximation, la self energie vectorielle Σ_V est nulle, et les self-energies scalaire (Σ_S) et temporelle (Σ_0) ne dépendent pas du moment du nucléon. Elles ne dépendent que du moment de fermi p_F, et donc de la densité du milieu. La courbe de variation de M^* en fonction de la densité est indiquée sur la figure 5. Comme cela est connu déjà depuis longtemps, la masse effective decroit en fonction de la densité.

Dans l'approximation de champ moyen relativiste, elle est de l'ordre de $0.5M$ à densité ordinaire. Nous discuterons plus loin de la manière d'interpréter cette masse effective relativiste. On définira les densités baryonique n et scalaire n_s par:

$$n \ \equiv \ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 dp = \frac{2p_F^3}{3\pi^2} \tag{30}$$

$$ns \ \equiv \ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp \ . \tag{31}$$

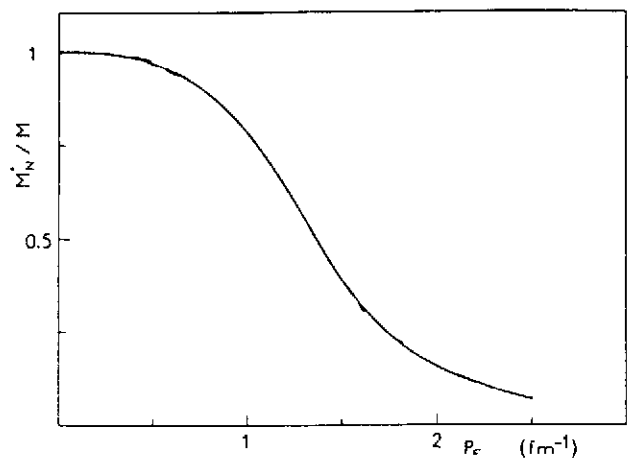


Figure 5: Masse effective relativiste en fonction de la densité

L'énergie totale s'écrit alors facilement:

$$E_T = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 \frac{p^2 + MM^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp + \frac{1}{2}\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n^2 - \frac{1}{2}\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_S^2 \ . \tag{32}$$

On peut ainsi calculer la courbe de saturation de la matière nucléaire avec seulement deux paramètres $\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}$ et $\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}$, pour deux conditions de saturation: $a_v = (E_T/A)_0 - M \simeq -16MeV$ et $n_0 \simeq 0.17$ nucl$/fm^3$ .Cette courbe de saturation est indiquée sur la figure 6. A la saturation $M^*/M \simeq 0.54$ et le paramètre d'incompressibilité est $K \simeq 540MeV$.

Avant de rentrer plus en détails sur les différents niveaux d'approximation, il est important de bien comprendre l'origine du mécanisme de saturation dans cette approximation simple de champ moyen relativiste. Pour cela, on peut calculer l'énergie totale dans deux approximation simples :

- Dans l'approximation purement non-relativiste où l'on ne garde que les termes dominants en p/M, l'énergie totale s'écrit simplement:

$$E_T = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{pF} p^2 dp \left(\frac{p^2}{2M} + M\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\right) n^2 \ . \tag{33}$$

  Dans ce cas, la courbe de saturation est indiquée par la courbe en trait mixte de la figure 6. Comme cela est déjà bien connu dans les approches non-relativistes, il ne peut y avoir de saturation dans ce cas.

- Un premier type de correction relativiste est donné par les corrections dites "cinématiques" que nous avons déjà discutées dans la section 2. Dans cette approximation, on ne considère que les corrections relativistes provenant de la solution libre de l'équation de Dirac, c'est-à-dire en considérant le spineur libre u^0 au lieu du spineur

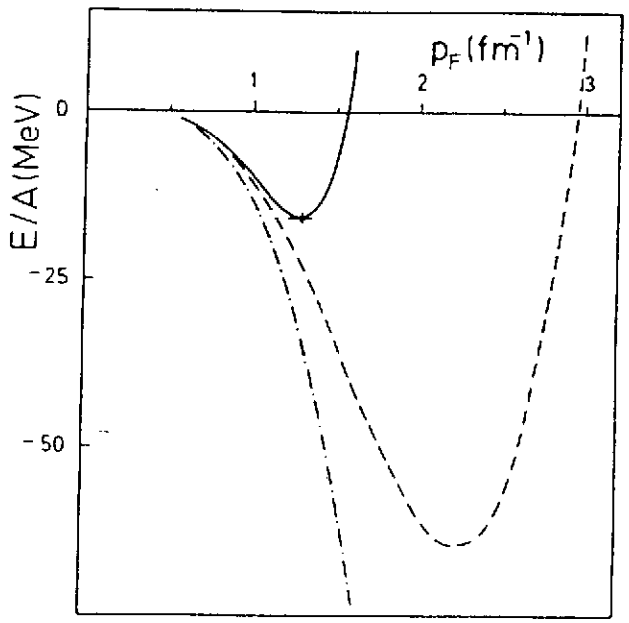


Figure 6: Courbe de saturation de la matière nucléaire

complet u. Dans ce cas, la courbe de saturation est indiquée par la courbe en trait pointillée sur la figure 6. Il existe un point de saturation, mais il correspond à une densité et à une énergie de liaison complètement irréaliste.

Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le calcul complet dans l'approximation de champ moyen relativiste (trait plein) génère une très forte dépendence en densité, donnée par les corrections relativistes cinématiques et dynamiques. Cette dépendence en densité est même trop forte puisque le paramètre d'incompressibilité est particulièrement élevé ($\simeq$ 540 MeV).

3.2 Différents niveaux d'approximation

Cette malencontreuse solution pose en fait plus de questions qu'elle ne semble en résoudre à première vue. Pour voir quelles sont les limitations des approches relativistes, il est indispensable de discuter les différents niveaux d'approximation que l'on peut considérer.

i) Comme nous venons de le voir, l'approximation de champs moyen ou approximation de Hartree est la plus simple. La forte dépendence en densité (répulsive) provenant des corrections relativistes est suffisante pour provoquer la saturation de la matière nucléaire. Dans cette approximation, seules les mésons isoscalaires σ et ω contribuent. La masse effective est particulièrement faible $M^*/M \simeq 0.54$ et le paramètre d'incompressibilité particulièrement élevé ($K \simeq 540 MeV$). Nous verrons que ces quantités anormales sont en fait des conséquences directes de l'approximation de Hartree et ne remettent pas en cause la justification des approches relativistes elles-mêmes.

ii) Dans le cas de la matière nucléaire infinie asymétrique, le potentiel d'échange de méson ρ est non-nulle. Dans ce cas, la constante $\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}$ est ajustée pour reproduire

	T	V_H		V_F			
		σ	ω	σ	ω	π	ρ
$(\sigma,\omega)_H$	8.1	-201	+177				
$(\sigma,\omega,\pi,\rho)_{HF}$	9.2	-135	+131	26	-22	-7	-19

Table 1: Valeur moyenne (en MeV) de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, au point de saturation de la matière nucléaire, dans l'approximation Hartree (H) (ou champ moyen) et Hartree-Fock (HF), en fonction des mésons échangés dans la matière nucléaire infinie.

le paramètre d'asymétrie a_a dans la formule de Bethe-Weizsäcker. Encore une fois, il est malencontreux qu'une solution à cet ajustement existe. Toutefois, la constante de couplage g_ρ^2 ainsi obtenue est supérieur à la valeur communément admise pour le potentiel nucléon-nucléon libre d'un facteur trois, ce qui n'est pas raisonable. Le potentiel d'échange du pion ne contribue toujours pas par conservation de la parité.

iii) Dans l'approximation de Hartree-Fock, c'est-à-dire lorsque l'on considère les termes directe et d'échange dans le calcul de l'énergie potentielle, tous les échanges de mésons contribuent, même pour $N = Z$. Afin de conserver un nombre minimum de paramètres libres, il est raisonable de fixer les constantes de couplage méson-nucléon, et les masses des mésons π et ρ à leurs valeurs physiques. La masse du méson ω est aussi fixée à sa valeur physique, et les paramètres ajustables seront g_σ, g_ω et m_σ. Dans cette approximation en effet, l'énergie totale dépend explicitement des constantes de couplage et des masses, et non plus de leur rapport. La masse du méson σ sera en fait déterminée afin de reproduire le rayon de charge d'un noyau fini, et les deux constantes de couplage restantes sont fixées pour reproduire le point de saturation empirique. Dans cette approximation, la masse effective dépend du moment du nucléon. Au niveau de Fermi, elle vaut $M^*/M \simeq 0.56$ et le paramètre d'incompressibilité vaut $K \simeq 460 MeV$. La masse effective est toujours relativement petite, et le paramètre d'incompressibilité relativement grand. Par contre, la répartition des énergies potentielles est tout-à-fait différente, ainsi que cela est indiqué dans le tableau 1

Comme on peut le remarquer dans ce tableau, l'énergie potentielle, dans l'approximation de Hartree-Fock, est presque essentiellement déterminée par les termes d'échange, compte tenu de l'annulation presque parfaite entre l'échange de σ et de ω. Cette caractéristique est en accord avec les études non-relativistes.

iv) Enfin, il est maintenant possible d'aller au delà de l'approximation de Hartree-Fock, et d'inclure les corrélations à courtes portées, dans un calcul de type Brueckner-Hartree-Fock relativiste. Ces calculs sont là aussi tout-à-fait similaires aux calculs Brueckner-Hartree-Fock non-relativistes [12]. Dans ce cas, la masse effective au niveau de Fermi est de l'ordre de $M^*/M \simeq 0.7$ et le paramètre d'incompressibilité est compris entre 200 et 250 MeV. Ces valeurs sont tout-à-fait en accord avec les estimations phénoménologiques actuelles.

3.3 Interaction effective équivalente à la Skyrme

Comme nous l'avons déjà vu dans l'introduction, les corrections relativistes sont intrinsèquement petites, de l'ordre de 3%, et donc un développement perturbatif en p/M est pertinent. Nous nous placerons, pour simplifier l'étude, dans la matière nucléaire infinie. L'énergie de liaison par particule pourra alors s'écrire:

$$a_v = \frac{4}{n}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathcal{H}(p) \ . \tag{34}$$

Dans un développement en p/M, la densité Hamiltonienne $\mathcal{H}$ sera une fonction de la densité baryonique, n, et de la densité d'impulsion au carré, τ, définie par:

$$\tau = 4\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p^2 \ . \tag{35}$$

Dans l'approximation de champ moyen relativiste, on a simplement:

$$\mathcal{H}(p) \simeq \frac{p^2}{2M} + \left(-\frac{1}{2}\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\right)n \tag{36}$$

$$+\frac{1}{2M^2}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\right)p^2 n + \frac{1}{2M^3}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\right)^2 n\tau + \ldots \ . \tag{37}$$

Si l'on se réfère à la nomenclature de l'interaction de Skyrme [1] le deuxième terme de cette équation contribue au terme en t_0, le troisième au terme en t_2 (dépendence en impulsion), et le dernier au terme en t_3. Dans la matière nucléaire infinie, le troisième terme se comporte comme $n^{5/3}$ et le dernier comme $n^{8/3}$. Ces deux termes sont des corrections relativistes. Le premier est une correction relativiste cinématique, le deuxième une correction relativiste dynamique. Elles contribuent typiquement pour 10 MeV et 6 MeV respectivement à l'énergie de liaison par particule à la densité de saturation.

On pourra remarquer sur ces expressions que les premières corrections relativistes, dans la matière nucléaire tout au moins, ne font intervenir que l'échange de mésons σ. Cela démontre, s'il en était encore besoin, qu'il est nécessaire, pour estimer les corrections relativistes, de connaître les mécanismes élémentaires qui génèrent le potentiel nucléon-nucléon.

Comme nous venons de le dire, le terme en p^2n dans l'interaction effective provient de corrections cinématiques. Elles ont la même origine que le potentiel spin-orbite à deux corps que nous avons indiqué en (5). Le terme en $n\tau$ quant-à-lui provient de corrections dynamiques qui n'interviennent pas au niveau du potentiel à deux corps, mais sont générées par le traitement à N-corps. Elles correspondent à la contribution à trois coprs indiquée sur la figure 7. Cette contribution à trois corps, et toutes les autres contributions à trois corps que l'on doit considérer à cet ordre d'approximation, interviennent dans tous les calculs microscopiques non-relativistes (voir par exemple le cas des calculs de type Brueckner-Hartree-Fock [13]).

Les termes d'échange (termes de Fock) ne changent pas la forme de la dépendence en densité, tout au moins au premier ordre. Ils modifient seulement les coefficients.

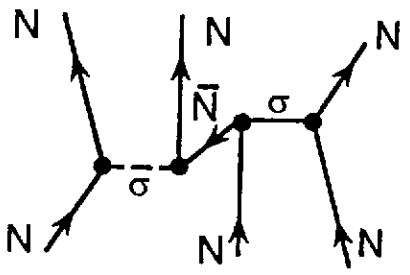


Figure 7: Correction relativiste dynamique interprétée comme contribution à trois corps

3.4 Corrections de portée finie

Afin d'étudier l'effet de la portée finie de l'interaction d'échange de mésons, il convient de regarder la solution de l'équation de Dirac dans un noyau fini. La forme générale du spineur de Dirac, pour un noyau sphérique, sera:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} iG_\alpha(r) \\ F_\alpha(r)\vec{\sigma}.\vec{r} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{ljm}\ \chi_\tau \ , \tag{38}$$

où $\mathcal{Y}_{ljm}$ représente la partie angulaire traditionnelle de la fonction d'onde. Dans l'approximation de champs moyen relativiste, ce spineur de Dirac est solution de l'équation:

$$\left[-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta\left(M + \Sigma_S(r)\right) + \Sigma_0(r)\right]\phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_\alpha\phi_\alpha(\vec{r}) \ , \tag{39}$$

avec, pour calculer les self-énergie Σ_S et Σ_0,

$$\vec{\nabla}^2\Sigma_S(r) - m_\sigma^2\Sigma_S(r) = g_\sigma^2 n_S \ , \tag{40}$$

$$\vec{\nabla}^2\Sigma_0(r) - m_\omega^2\Sigma_0(r) = -g_\omega^2 n \ . \tag{41}$$

Pour un potentiel de portée nulle, c'est à dire pour un méson échangé de masse infinie (en pratique pour une masse plus grande que 1 GeV), on pourra négliger le terme de dérivé devant le terme de masse dans ces équations, et les self-energies sont proportionnelles à g^2/m^2 comme dans le cas de la matière nucléaire infinie. Pour avoir la première correction de portée finie, il suffit de développer les équations (40,41) au premier ordre en $1/m$, c'est-à-dire:

$$\Sigma_0(r) \simeq \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\left(n + \frac{\vec{\nabla}^2 n}{m_\omega^2} + \ldots\right) \ , \tag{42}$$

et de manière similaire pour Σ_S. Le second terme dans l'expression des self-energies va donc induire, dans l'interaction effective, une dépendence explicite en gradient de la densité, combinée, pour les corrections relativistes, à une dépendence en vitesse. Ces dépendences sont parfaitement déterminées une fois les constantes de couplage et les masses fixées.

Dans l'approximation de Hartree, seuls les mésons σ de masse $m_\sigma \simeq 500$ MeV et ω de masse $m_\omega \simeq 780$ MeV contribuent. Cela correspond à deux portées différentes, l'une

courte, pratiquement nulle, et l'autre intermédiaire. Pour les termes de Fock, et en plus de ces deux mésons, les mésons ρ de masse $m_\rho \simeq 780$ MeV et π de masse $m_\pi \simeq 138$ MeV contribuent. Cela correspond à un terme de portée pratiquement nulle pour le ρ et un terme de longue portée pour le π. Nous voyons donc que l'interaction effective, pour être parfaitement réaliste, devrait comporter des interactions correspondant à trois type de portées différentes: courte, intermédiaire et longue. C'est précisément le choix initial de l'interaction D1 dite de Gogny [14].

3.5 Dépendence en isospin

Nous finirons cette discussion de l'interaction effective dans les noyaux par la détermination de la dépendence en isospin de l'énergie par particule dans la matière nucléaire. Comme nous l'avons déjà répété plusieurs fois, cette dépendence, ainsi que l'interaction effective elle-même, est parfaitement déterminée par les nombres quantiques des mésons échangés, et leur couplage au nucléon [15]. Dans l'approximation de champ moyen relativiste, le paramètre d'asymétrie s'écrit:

$$a_a^H = \frac{1}{6}\frac{p_F^2}{\epsilon_p^*(p_F)} + \frac{1}{2}\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} n \ . \tag{43}$$

La première contribution à a_a est environ 20 MeV. Dans cette approximation simple, la constante g_ω^2/m_ω^2 est déterminée pour reproduire la valeur communément admise pour a_a (environ 32 MeV). Dans l'approximation de Hartree-Fock, tous les mésons vont contribuer à l'asymétrie, et la contribution des termes de Fock au paramètre a_a s'écrit alors [15]:

$$\begin{aligned} a_{as}^F &= \frac{1}{A} < V_\sigma^F > + \frac{1}{A} < V_\omega^F > - \frac{1}{3A} < V_\pi^F > - \frac{1}{3A} < V_\rho^F > , \\ &= +26\ MeV - 22\ MeV + 2\ MeV + 6\ MeV \end{aligned} \tag{44}$$

où $< V_m^F >$ représente la valeur moyenne de la contribution de Fock de l'énergie potentielle due à l'échange du méson m. Avec les valeurs des différentes contributions données en (44), on s'aperçoit que la contribution du terme de Fock est de l'ordre de 12 MeV, c'est-à-dire que la constante de couplage du méson ρ n'a pas besoin d'être très grande pour pouvoir reproduire les propriétés d'asymétrie des noyaux. C'est précisément ce qui est nécessaire au niveau du potentiel nucléon-nucléon.

Dans un noyau fini, il est à prévoir que ces termes de Fock seront d'autant plus importants que l'échange de π est de longue portée [16].

3.6 Masse effective relativiste et non-relativiste

Nous avons défini en (22) la masse effective relativiste par $M^*(p) = M + \Sigma_S(p)$. Comment cette masse effective se compare-t-elle à la masse effective non-relativiste définie par

$$M_{NR}^*(p) = p \left(\frac{\partial \mathcal{H}(p)}{\partial p} \right)^{-1} \ ? \tag{45}$$

Il est facile de voir cette correspondance dans l'approximation de champs moyen. Avec l'expression (25) de la masse effective relativiste, et au premier ordre en p/M

$$M^* \simeq M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n \ . \tag{46}$$

En reprenant la dépendence en vitesse de $\mathcal{H}(p)$, il est par ailleurs possible de calculer la masse effective non-relativiste générée par cette dépendence en moment, c'est-à-dire avec (45):

$$M^*_{NR}(p) = \frac{M}{1 + \frac{n}{M}\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}} \simeq M\left(1 - \frac{n}{M}\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}\right) \ , \tag{47}$$

soit $M^*_{NR}(p) \simeq M^*$. La masse effective relativiste induit donc une contribution identique à la masse effective non-relativiste.

4 Discussion critique des résultats récents

4.1 Mécanisme de saturation de la matière nucléaire

Comme nous l'avons vu dans la section 3, le modèle de champs moyen relativiste, et cela est aussi vrai dans l'approximation Hartree-Fock, attribue tout le mécanisme de saturation à un effet relativiste. Il est clair que cela ne peut pas être physique dans la mesure où l'on sait maintenant depuis de nombreuses années que les corrélations à courtes portées, absentes dans l'approximation Hartree ou même Hartree-Fock, contribuent aussi au mécanisme de saturation [12].

On sait en fait prendre en compte ces corrélations à courtes portées, dans une approche non-relativiste mais aussi relativiste, par exemple par l'approximation Brueckner-Hartree-Fock [12]. Comme nous l'avons déjà mentionné, la masse effective est alors de l'ordre de $M^*/M \simeq 0.7$ et la compressibilité de l'ordre de $K \simeq 250$ MeV. Ces calculs sont actuellement parmi les plus réalistes que l'on puisse avoir pour décrire la structure microscopique de la matière nucléaire: ils tiennent compte de la structure microscopique du potentiel nucléon-nucléon, des corrections relativistes à l'énergie potentielle et cinétique, et des corrélations à courtes portées. Les corrections relativistes sont ici indispensables pour pouvoir reproduire correctement le point de saturation de la matière nucléaire, et sortir de la courbe de Coester [12, 13].

D'un point de vue pratique, et compte tenu du fait que les calculs Brueckner-Hartree-Fock relativistes sont particulièrement longs et délicats, il est souvent utile de redéfinir une interaction effective nucléon-nucléon, à utiliser dans les calculs Hartree-Fock relativistes, et déterminée pour reproduire les mêmes propriétes de la matière nucléaire que le calcul complet (en particulier toutes les self-énergies $\Sigma_S, \Sigma_0, \Sigma_V$ en fonction du moment et de la densité). Pour ce faire, il est suffisant de donner une dépendence en densité aux constantes de couplage méson-nucléon, et aux masses des mésons [17]. Il n'est ainsi plus nécessaire de recourir à des modèles ad-hoc de couplage non-linéaire entre mésons σ pour avoir de bonne propriétés de la matière nucléaire.

4.2 Dépendence en N-Z de l'interaction effective

Nous avons déjà brièvement parlé dans la section 3.4 des calculs relativistes dans les noyaux finis. Nous reviendrons plus particulièrement ici sur la contribution du potentiel spin-orbite aux énergies individuelles à une particule. Pour cela, il est nécessaire de partir de l'équation de Dirac pour un noyau fini, comme indiqué en (39). Avec la forme générale de la fonction d'onde à une particule (38), l'équation de Dirac est équivalente à un système couplé de deux équations à deux inconnues $G(r)$ et $F(r)$. Ce système peut être résolu facilement [4]. Une manière de le faire est d'ailleurs d'éliminer la petite composante $F(r)$ entre ces deux équations. On obtient alors une équation de type Schrödinger pour la grande composante $G(r)$:

$$\left[-\vec{\nabla}\frac{1}{2\bar{M}(r)}\vec{\nabla} + V_C(r) + V_{LS}(r)\vec{L}.\vec{S}\right] G_\alpha(r) = \epsilon_\alpha G_\alpha(r) \ , \tag{48}$$

avec:

$$\bar{M}(r) = M + \frac{\Sigma_S(r) - \Sigma_0(r)}{2} \ , \tag{49}$$

$$V_C(r) = \Sigma_S(r) + \Sigma_0(r) \ , \tag{50}$$

$$V_{LS}(r) = -\frac{1}{2\bar{M}^2(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\Sigma_S(r) - \Sigma_0(r)\right] \ . \tag{51}$$

Rappelons que la self-energie Σ_S provient de l'échange de méson σ. Elle est négative (attraction). La self-energie Σ_O provient de l'échange de méson ω. Elle est positive (répulsion). Pour $\Sigma_S = -\Sigma_0$, on a $\bar{M} = M^* = M + \Sigma_S$. Comme dans un noyau fini, nous avons en général $|\Sigma_0| < |\Sigma_S|$, alors $\bar{M} > M^*$. Rappelons aussi que ces self-energies sont solution, dans l'approximation de champ moyen, des équations (40,41) et donc tiennent compte automatiquement de la portée finie de l'interaction nucléon-nucléon.

Le potentiel spin-orbit V_{LS} a une forme très simple dans l'approximation de champ moyen, et dans l'approximation de portée nulle:

$$V_{LS}(r) \simeq \frac{1}{2\bar{M}^2(r)}\frac{1}{r}\left[\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\right]\frac{dn}{dr} \ , \tag{52}$$

avec :

$$\bar{M}(r) \simeq M - \frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}\right) n \ . \tag{53}$$

Il est important de remarquer à ce niveau que le potentiel spin-orbite dépend explicitement de la densité par le terme de masse effective $\bar{M}$, en plus de sa dépendence triviale en dn/dr. Cette dépendence en densité n'est pas implémentée en général dans les interactions effectives de type Skyrme.

Pour un noyau $N \neq Z$, il faut aussi tenir compte de l'échange de méson ρ. Dans l'approximation de champ moyen, le potentiel s'écrit alors explicitement:

$$V_{LS}^\tau(r) \simeq \frac{1}{2\bar{M}^2(r)}\frac{1}{r}\left[\left(W + \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}\right)\frac{dn^\tau}{dr} + \left(W - \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}\right)\frac{dn^{\tau'\neq\tau}}{dr}\right] \ , \tag{54}$$

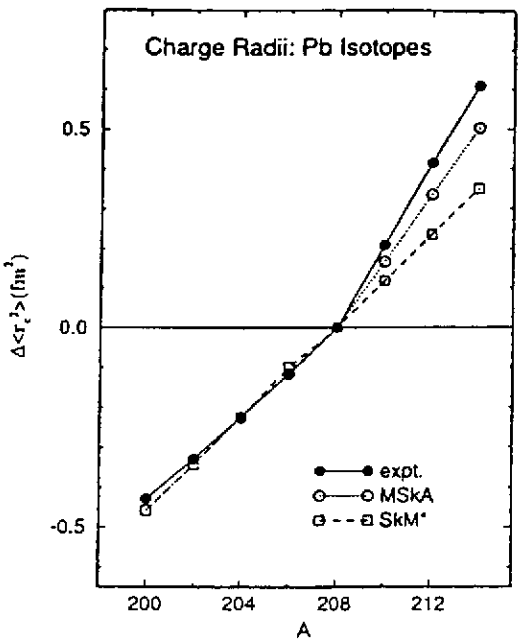


Figure 8: Rayon carré moyen de plusieurs isotopes du Pb

avec :

$$W = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \ . \tag{55}$$

On notera par ailleurs $W_1 = W + g_\rho^2/m_\rho^2$ et $W_2 = W - g_\rho^2/m_\rho^2$. Cette dépendence en isospin, et en densité, du potentiel spin-orbite peut-être en fait testée expérimentalement. Nous avons indiqué sur la figure 8 la variation du rayon carré moyen de plusieurs isotopes du Plomb, en fonction de A [18]. La prédiction d'un calcul Hartree-Fock non-relativiste avec l'interaction de Skyrme SkM* est indiquée par la courbe en trait pointillée sur la figure 8. Elle correspond à $W_1/W_2 \simeq 2$. La prédiction du champ moyen relativiste, indiquée par la courbe en points correspond à $W_1/W_2 \simeq 1.1$. Elle est en très bon accord avec les données expérimentales.

La prédiction d'un calcul relativiste dans l'approximation de Hartree-Fock pour cette même observable n'est pas encore connue. Il est probable que pour ce noyau lourd, les effets de taille finie de l'interaction soient faibles. Il est intéressant de ce point de vue d'étudier le comportement du potentiel spin orbite directement, dans un noyau plus léger. Nous avons indiqué dans le tableau 2 la différence des énergies à une particule de protons dans la couche $^1d_{3/2}$ et $^1d_{5/2}$ [19], dans l'approximation de champ moyen relativiste et dans l'approximation de Hartree-Fock. Il est clair que le potentiel spin-orbite diminue lorsque l'on s'éloigne de la vallée de stabilité, et que ce comportement est parfaitement reproduit dans l'approximation de Hartree-Fock, contrairement au modèle de champs moyen relativiste.

	^{40}Ca	^{48}Ca
Hartree	5.9	6.2
Hartree-Fock	8.0	4.1
Exp.	7.2	4.3

Table 2: Valeurs (en MeV) du splitting des énergies à une particule de protons pour les orbitales $^1d_{3/2}$ et $^1d_{5/2}$ dans ^{40}Ca et ^{48}Ca, pour différentes approximations, comparées aux valeurs expérimentales

5 Conclusions et perspectives

Nous avons démonté dans ce cours les mécanismes élémentaires au coeur des approches relativistes du problème à N corps. Les corrections relativistes générées par ces approches sont maintenant parfaitement bien comprises, dans l'approximation de champs moyen mais aussi dans l'approximation Hartree-Fock. Elles sont heureusement faibles par rapport aux contributions élémentaires à l'énergie potentielle, et peuvent ainsi être traitées en perturbation dans un développement en p/M. Par contre, les corrections obtenues ne sont pas faibles par rapport à l'énergie de liaison totale, ou aux énergies individuelles à une particule, et doivent donc être considérées, d'une manière ou d'une autre.

La connaissance des mécanismes dynamiques élémentaires au niveau du potentiel nucléon-nucléon (échange de mésons isoscalaires σ et ω, et isovectoriels π et ρ) permet de générer automatiquement plusieurs propriétés essentielles de l'interaction effective:

- Le potentiel spin-orbite,
- La dépendence en vitesse,
- La dépendence en isospin de l'énergie de liaison et du potentiel spin-orbite,
- La portée finie de chaque terme de l'interaction.

Ces prédictions dépendent d'un nombre très restreint de paramètres libres (3), eux-mêmes fortements contraints par les propriétés du potentiel nucléon-nucléon lui-même. Les résultats obtenus dans l'approximation Hartree-Fock relativiste sont en très bon accord avec l'expérience d'abord parce qu'ils conservent la trace de ces mécanismes. On sait maintenant incorporer les termes d'échanges, et les corrélations à courte portéé.

Pour finir, nous voudrions faire quatre remarques générales.

En ce qui concerne les études phénoménologiques de l'interaction effective tout d'abord, il nous paraît indispensable, d'un point de vue physique, de prendre en considération les contraintes provenant des approches relativistes. Cela n'a que rarement été fait jusqu'à présent [20]

Les calculs de champ moyen relativiste (approximation Hartree) sont suffisants pour obtenir la saturation de la matière nucléaire. Cela ne veut hélas pas dire que cette approximation est physiquement justifiée. On sait maintenant que les corrélations de Pauli

(termes d'échanges) et les corrélations à courte portée provenant de la répulsion du potentiel nucléon-nucléon sont aussi importantes que les corrections relativistes à proprement parlé. Ces corrélations doivent être considérés, et le sont déjà dans les calculs de type Brueckner-Hartree-Fock.

En ce qui concerne les programmes expérimentaux eux-mêmes, nous avons essayé de montrer dans ce cours qu'il était vain de vouloir opposé interaction effective à la Skyrme et approches relativistes. Il n'est donc pas question de pouvoir favoriser une approche plutôt que l'autre par une quelconque mesure expérimentale. Par contre, les programmes expérimentaux peuvent valider, ou invalider, le concept même d'interaction effective construite à partir d'un potentiel nucléon-nucléon élémentaire. Jusqu'à présent ce concept a montré toute sa puissance. Il n'y a aucune raison théorique pour que ce concept ne s'étende pas naturellement à toutes les nouvelles données issues des expériences avec des faisceaux exotiques.

Pour finir, je voudrais insister encore une fois sur le fait que les approches relativistes du problème à N corps sont maintenant connues depuis plus de 10 ans [3]. Elles ont été extensivement étudiées, à la fois dans le cas de la matière nucléaire mais aussi des noyaux finis, et ceci dans toutes les approximations traditionnelles du problème à N corps, comme nous avons essayé de le montrer dans ce cours. On en connait tous les avantages, et tous les défauts.

References

[1] T.H.R. Skyrme, Phil. Mag. 1 (1956) 1043

[2] D. Vautherin et D.M. Brink, Phys. Rev. C5 (1972) 626
J.W. Negele et D. Vautherin, Phys. Rev. C5 (1972) 1472

[3] J.D. Walecka, Annals of Physics (N.Y.) 83 (1974) 491
B. Serot and J.D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. 16 (1985) 1

[4] J.-F. Mathiot, cours de l'école Joliot-Curie 1985 et 1989

[5] J.-F. Mathiot, Annales de Physique, France, 16 (1991) 527

[6] J.-P. Blaizot, cours de l'école Joliot-Curie 1993

[7] P. Guichon, cours de l'école Joliot-Curie 1986

[8] M. Lacombe et al., Phys. Rev. C21 (1980) 861

[9] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. 19 (1989) 189

[10] M.M. Nagels, T.A. Rijkenaard et J.J. De Swart, Phys. Rev. D17 (1978) 767, D20 (1979) 1633

[11] J.-F. Mathiot, Physics Reports 173 (1989) 63

[12] J.-P. Blaizot, cours dans ce volume (1997)

[13] P. Grangé et al., Phys. Rev. C40 (1989) 1040

[14] J.Dechargé et D.Gogny, Phys. Rev. C21 (1980) 1568

[15] A. Bouyssy et S. Marcos, Phys. Lett. 127B (1983) 157

[16] N. V. Giai et S. Marcos, en préparation

[17] S. Marcos et al., Nucl. Phys. A600 (1996) 529

[18] M.M. Sharma et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3744

[19] A. Bouyssy et al., Phys. Rev. C36 (1987) 380

[20] P.G. Reinhard et H. Flocard, Nucl. Phys. A584 (1995) 467