



**HAL**  
open science

## Le problème à N-corps : approches non relativistes

Jean-Paul Blaizot

► **To cite this version:**

Jean-Paul Blaizot. Le problème à N-corps : approches non relativistes. École thématique. Ecole Joliot Curie "Structure nucléaire : un nouvel horizon", Maubuisson, (France), du 8-13 septembre 1997 : 16ème session, 1997. cel-00652694

**HAL Id: cel-00652694**

**<https://cel.hal.science/cel-00652694v1>**

Submitted on 16 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE PROBLÈME À N CORPS

## Approches non relativistes

Jean-Paul BLAIZOT \*

*Service de Physique Théorique<sup>†</sup>, CE-Saclay*

*91191 Gif-sur-Yvette, France*

**RESUME** Ce cours constitue un brève introduction à quelques unes des notions de base du problème à N corps nucléaire : matière nucléaire considérée comme un liquide de Fermi, notion de quasiparticule, approximation de champ moyen, corrélations et interactions effectives. Les nucléons sont traités comme des particules non relativistes.

**ABSTRACT** These lectures are a brief introduction to some of the basic concepts used in the nuclear many body problem: nuclear matter viewed as a Fermi liquid, quasiparticles, mean field approximation, correlations and effective interactions. Nucleons are treated as non relativistic particles.

## 1 Introduction

La "matière nucléaire" fait partie avec le gaz d'électrons et l'hélium liquide des systèmes de référence pour lesquels ont été élaborées de nombreuses méthodes du "problème à N corps" [1-5]. Par problème à N corps on entend cet ensemble de techniques, issues en partie de la théorie quantique des champs et de la mécanique statistique, qui permettent de décrire les propriétés des systèmes quantiques constitués d'un grand nombre de particules en interaction. Dans les systèmes considérés, les interactions sont fortes (c'est le cas de l'hélium ou de la matière nucléaire) ou de longue portée (gaz d'électrons). De ce fait, l'usage de la théorie de perturbation est limitée, et d'autres schémas d'approximation ont du être inventés, conduisant parfois à des concepts nouveaux. Par ailleurs, avec les progrès récents des ordinateurs, il est devenu possible d'envisager des calculs menant à des solutions pratiquement exactes de l'équation de Schrödinger pour  $N$  particules. Par exemple, on peut maintenant calculer avec une excellente précision l'énergie de l'état fondamental de l'hélium liquide à partir du potentiel d'interaction entre deux atomes d'hélium. Et il en est de même en ce qui concerne la matière

---

\*Affiliated to CNRS

<sup>†</sup>Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Énergie Atomique

nucléaire (avec toutefois une complication liée au fait que le potentiel d'interaction nucléon-nucléon ne suffit pas à expliquer les propriétés de la matière nucléaire, et qu'il faut prendre en compte en particulier l'effet d'interactions à trois corps).

En toute rigueur, la matière nucléaire n'existe pas en tant que système physique observable. Il s'agit en effet d'un système idéal constitué d'un grand nombre de neutrons et de protons sans charge électrique. La charge électrique est ignorée parce que l'on veut construire un système modèle possédant une bonne limite thermodynamique (et l'énergie coulombienne d'un système chargé ne possède pas une telle limite, puisqu'elle croît comme le carré du nombre de charges). Par ailleurs, l'énergie totale des gros noyaux est dominée par l'interaction forte, l'interaction coulombienne ne représentant qu'une petite correction. Ainsi, la matière nucléaire représente approximativement l'état de la matière à l'intérieur des gros noyaux, et on peut déduire ses propriétés de l'étude de ces gros noyaux.

Cela étant, la matière nucléaire partage avec l'hélium 3 la propriété d'être un système de fermions interagissant avec des forces à courte portée, qui sont répulsives à courte distance et attractives à plus grande distance. De tels systèmes sont, à basse température, des "liquides quantiques" bien décrits par la théorie des liquides de Fermi [5] : leurs excitations élémentaires sont constituées de "quasiparticules" et de modes collectifs. Cette image de liquide de Fermi permet de comprendre le succès des approximations de champ moyen utilisées pour décrire les noyaux.

Il est bien évident qu'il n'est pas possible en si peu de temps d'aborder tout l'éventail des méthodes utilisées dans le problème à  $N$  corps (même en restant dans le cadre de la physique nucléaire). Mon objectif est de mettre l'accent sur quelques concepts importants : notions de liquide de Fermi et de quasiparticule, approximation de champ moyen, corrélations et interactions effectives. Dans ce cours, nous considérerons neutrons et protons dans la matière nucléaire comme des particules *non relativistes*. Ce cours est complémentaire de celui de J.-F. Mathiot qui, lui, abordera l'étude des effets relativistes.

## 2 Noyaux et matière nucléaire

L'idée de matière nucléaire repose sur deux observations simples. Tout d'abord, lorsque l'on étudie l'énergie de liaison des noyaux :

$$E = M(N, Z) - Nm_N - Zm_p, \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de neutrons (de masse  $m_N$ ),  $Z$  le nombre de protons (mass  $m_p$ ), et  $M$  la masse du noyau (dans le système d'unités où  $c = 1$ ), on constate qu'en première approximation, cette quantité est proportionnelle au nombre total de nucléons  $A = N + Z$ , et non, comme on aurait pu s'y attendre pour un système qui interagit avec des forces à deux corps, comme  $A^2$  c'est à dire comme le nombre de paires de nucléons. Une étude plus fine conduit à paramétrer la variation de l'énergie de liaison sous la forme suivante (formule de masse de Bethe-Weizsäcker) :

$$E = -a_{vol}A + a_{surf}A^{2/3} + a_{coul}\frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (2)$$

Ainsi, à la limite des gros noyaux,  $E/A$  tend vers une limite,  $a_{vol} \approx -16$  MeV.

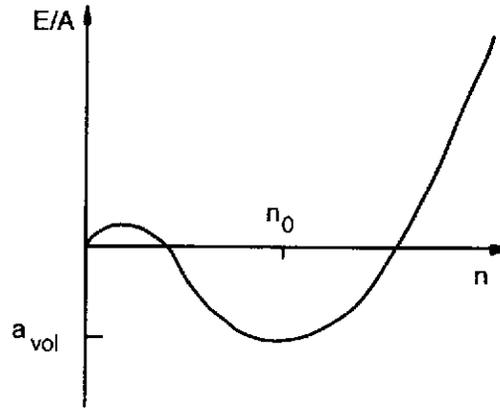


Figure 1: L'énergie de liaison par nucléon en fonction de la densité.  $n_0$  est la densité de "saturation", et  $a_{vol}$  l'énergie de liaison par nucléon de la matière nucléaire à l'équilibre.

La seconde observation concerne la densité des nucléons à l'intérieur des gros noyaux, qui reste approximativement constante lorsqu'on augmente le nombre de nucléons. Ainsi, le rayon d'un gros noyau est donné à une bonne approximation par la formule:  $R = r_0 A^{1/3}$  avec  $r_0$  constant.  $r_0 \approx 1.2$  fm.

Ces deux observations (que l'on résume parfois sous le vocable de "saturation des forces nucléaires") suggèrent que la matière à l'intérieur des gros noyaux est dans un état lié pas trop différent de ce qu'il serait si le système était constitué d'un nombre infini de nucléons, et abstraction faite de l'interaction coulombienne. Pour mieux le voir, écrivons l'énergie de cette matière nucléaire sous la forme:

$$E(\Omega, A) = \Omega \mathcal{E}(n) \quad n = A/\Omega, \quad (3)$$

où  $\Omega$  est le volume, et  $n$  la densité de nucléons. A l'équilibre (encore appelé point de saturation), on a :

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \Omega} \right|_A = 0 = -P(n_0) = \mathcal{E}(n_0) - n_0 \left. \frac{d\mathcal{E}}{dn} \right|_{n_0}, \quad (4)$$

où  $n_0$  est la densité d'équilibre. L'état d'équilibre, pour lequel la pression est nulle, est caractérisé par les conditions:

$$\left. \frac{d(E/A)}{dn} \right|_{n_0} = \left. \frac{d(\mathcal{E}/n)}{dn} \right|_{n_0} = 0. \quad (5)$$

Notons qu'à l'équilibre, le potentiel chimique  $\mu$  est égal à l'énergie de liaison par nucléon:

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_{\Omega} = \left. \frac{dE}{dn} \right|_{n_0} = \left. \frac{E}{A} \right|_{n_0}. \quad (6)$$

Ainsi, l'état d'équilibre peut être relié à l'existence d'un minimum dans la courbe donnant l'énergie de liaison par nucléon,  $E/A$  en fonction de la densité  $n$  (nous verrons plus loin comment une telle courbe peut être obtenue). Cette courbe a typiquement l'allure indiquée sur la figure

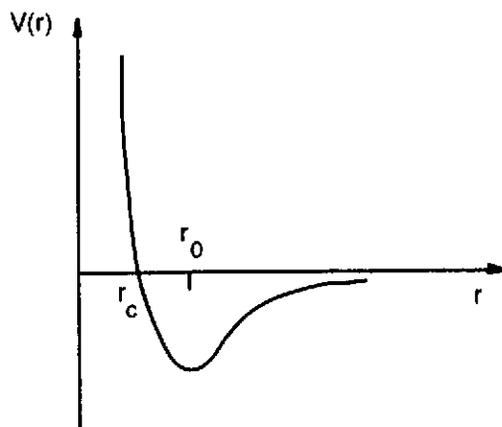


Figure 2: Représentation schématique du potentiel d'interaction nucléon-nucléon, montrant la forte répulsion à courte distance ( $r_c$  est le rayon du "cœur dur"), et l'attraction à longue distance.

2. L'augmentation à basse densité est facile à comprendre : elle résulte du principe de Pauli. Lorsque la densité continue d'augmenter, les forces attractives finissent par l'emporter et lier le système qui s'effondrerait sur lui-même en l'absence d'interactions répulsives. Ces interactions répulsives déterminent le comportement de  $E/A$  à haute densité.

C'est ce minimum de  $E/A$  qui correspond à l'état d'équilibre des noyaux. Une variation du nombre de nucléons, ou encore la perturbation causée par l'interaction coulombienne, modifie légèrement la densité d'équilibre. Mais comme la matière nucléaire est difficilement compressible, cette densité d'équilibre en fait varie peu d'un noyau à l'autre, et est également peu différente de ce qu'elle serait dans la matière nucléaire infinie.

La forme de la courbe donnant  $E/A$  en fonction de  $n$  reflète les propriétés de l'interaction nucléon-nucléon. Cette interaction peut-être modélisée par un potentiel à deux corps  $V(r)$  fonction de la distance  $r$  entre les nucléons. Ce potentiel, que l'on peut déduire de l'analyse des déphasages dans la diffusion nucléon-nucléon, et de l'étude des propriétés du deutéron, est très répulsif à courte distance, présentant ce que l'on appelle un "cœur dur". L'existence de ce cœur dur engendre des corrélations à courte portée entre les nucléons et complique de façon essentielle les calculs de matière nucléaire. Nous y reviendrons. A grande distance le potentiel d'interaction est attractif, et est dominé par l'échange de mésons  $\pi$ . Le potentiel d'interaction dépend également des spins et isospins des nucléons. On peut le construire explicitement à l'aide d'échanges de mésons. Je renvoie au cours de J.-F. Mathiot pour plus de détails [6].

Je terminerai cette discussion par une remarque d'ordre général. La matière nucléaire est un système infini de fermions interagissant par des forces à deux corps attractives à grande distance et très répulsives à courte distance. De ce point de vue la matière nucléaire ne se distingue pas d'autres systèmes de fermions comme l'hélium 3. Et de même que l'hélium 3 est liquide à basse température, on s'attend à ce qu'il en soit de même pour la matière nucléaire. Il est bon de rappeler le rôle essentiel joué ici par la mécanique quantique. Si les nucléons étaient des particules classiques, ils se trouveraient, dans l'état fondamental de la matière nucléaire, à des distances relatives correspondant au minimum ( $r_0$ ) de leur potentiel d'interaction : la matière nucléaire serait alors solide. Cependant l'énergie de point zéro associée à la localisation

d'un nucléon dans une région de taille  $r_0$ , de l'ordre de  $\hbar^2/Mr_0^2$ , est grande devant l'énergie d'interaction  $V_0$ . A titre de comparaison, le paramètre  $\hbar^2/(Mr_0^2V_0)$  vaut approximativement 0.5 pour la matière nucléaire, 0.2 pour  ${}^3\text{He}$ , et 0.06 pour  $\text{H}_2$  et 0.007 pour  ${}^{20}\text{Ne}$ . L'hélium est liquide, et a fortiori aussi la matière nucléaire ; l'hydrogène et le néon sont solides. (On pourra trouver une discussion très intéressante de cette question dans la référence [7]).

Le fait que la matière nucléaire soit un liquide de Fermi a d'importantes conséquences. En particulier, ses excitations élémentaires, appelées quasiparticules, sont très voisines de celles d'un système de particules libres. Nous allons revenir sur ce résultat, mais auparavant nous allons faire une rapide digression pour rappeler quelques éléments de seconde quantification, un langage commode pour discuter les propriétés des systèmes à  $N$  corps.

### Digression: seconde quantification.

La seconde quantification permet de prendre en compte de façon commode l'antisymétrie des états de  $N$  fermions. Désignons par  $\alpha$  l'ensemble des nombres quantiques qui caractérisent l'état d'une particule, et notons cet état  $|\alpha\rangle \equiv a_\alpha^\dagger|0\rangle$  où  $a_\alpha^\dagger$  est appelé *opérateur de création* d'une particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ , et l'état de référence  $|0\rangle$  est appelé vide. Un état antisymétrique à deux particules sera noté de la même manière :  $|\alpha\beta\rangle \equiv a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger|0\rangle$ . La propriété d'antisymétrie est assurée par la *relation d'anticommutation* :  $\{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger + a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger = 0$ . On définit de même des *opérateurs d'annihilation*  $a_\alpha$  en prenant l'hermitique conjugué des relations ci-dessus. Par exemple,  $\langle\alpha| \equiv \langle 0|a_\alpha$ . On pourra vérifier que la relation d'orthogonalité  $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$  est satisfaite lorsque les opérateurs  $a_\alpha$  et  $a_\beta^\dagger$  obéissent à la règle de commutation :  $\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = a_\alpha a_\beta^\dagger + a_\beta^\dagger a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ . Par ailleurs l'opérateur  $a_\alpha$  correspond bien à la destruction d'une particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ . On pourra vérifier en effet que son action sur un état à une particule donne un état proportionnel à l'état de référence qui ne contient pas de particule :  $a_\alpha a_\beta^\dagger|0\rangle = -a_\beta^\dagger a_\alpha|0\rangle + \delta_{\alpha\beta}|0\rangle = \delta_{\alpha\beta}|0\rangle$ .

Plus généralement un état antisymétrique à  $N$  particule est de la forme  $a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\alpha_N}^\dagger|0\rangle$ . L'ensemble de tous ces états obtenus lorsque  $\alpha_i$  parcourt l'ensemble des états à une particule et  $N$  varie de 0 à l'infini, constitue une base de l'espace de Fock.

Considérons maintenant un *opérateur symétrique à une particule*. C'est un opérateur de la forme :  $F_N = \sum_{i=1}^N F^{(i)}$ , où  $F^{(i)}$  agit sur la particule  $(i)$ . Pour une particule, on peut écrire :  $F = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|F|\beta\rangle\langle\beta|$ . Cette écriture de l'opérateur  $F$  permet d'obtenir sans effort (bien entendu la démonstration de ce résultat exige un peu de travail) la forme de l'extension de l'opérateur  $F$  dans l'espace de Fock, c'est à dire dans l'espace des états à nombre arbitraire de particules. Nous noterons (provisoirement)  $\hat{F}$  cette extension. On a :

$$\hat{F} = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger \langle\alpha|F|\beta\rangle a_\beta. \quad (7)$$

On pourra vérifier par exemple que l'*opérateur nombre de particules* est donné par  $\hat{N} = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha$ . Une autre forme commode des opérateurs à un corps est obtenue en remarquant que le choix de la base  $\{\alpha\}$  des états à une particule est arbitraire, et on peut changer de base par transformation unitaire. On peut en particulier choisir comme états à une particule des états localisés au point  $\mathbf{r}$  :

$$|\alpha\rangle = \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\alpha\rangle \quad \mathbf{r} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\mathbf{r}\rangle, \quad (8)$$

où  $\langle\mathbf{r}|\alpha\rangle$  est la fonction d'onde de la particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ . Il est d'usage courant de noter les opérateurs de création et d'annihilation correspondant à ces états localisés  $\psi^\dagger(\mathbf{r})$  et  $\psi(\mathbf{r})$ , et de les appeler opérateurs de champ. Ils satisfont aux règles de commutation suivantes :

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi^\dagger(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9)$$

En termes des opérateurs de champ, l'opérateur nombre de particules s'écrit  $\int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$  et  $n(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$  est la densité de particule au point  $\mathbf{r}$ . De même, un opérateur *local* à un corps prend la forme :

$$\hat{F} = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r})F(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (10)$$

On remarque que l'expression de l'opérateur  $\hat{F}$  dans l'espace de Fock est formellement identique à celle de l'élément de matrice de l'opérateur à une particule  $F$  dans l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$ . Autrement dit, pour obtenir l'expression de l'opérateur  $F$  dans l'espace de Fock, il suffit de réinterpréter ces fonctions d'onde comme des opérateurs de champ satisfaisant aux relations d'anticommutation (9). C'est là l'origine de la terminologie "seconde quantification".

Généralisons cette démarche au cas d'une interaction à deux corps,  $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(i, j)$  où  $V(i, j)$  est un potentiel d'interaction local, par exemple  $V(i, j) = V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ . Dans un premier temps, on peut exprimer l'énergie d'interaction à l'aide de la densité à une particule  $n(\mathbf{r})$  :

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')n(\mathbf{r})], \quad (11)$$

où le second terme élimine l'interaction de la particule avec elle-même. En utilisant l'expression donnée ci-dessus de la densité en terme des opérateurs de champ, on obtient aisément :

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

où, dans la deuxième ligne, nous avons utilisé les relations d'anticommutation (9). En utilisant la transformation unitaire (8), on obtient l'expression équivalente :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\alpha\beta|V|\gamma\delta) a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma. \quad (13)$$

### 3 Gas de Fermi. Liquide de Fermi

Nous reprenons maintenant notre discussion de la matière nucléaire et sa description en termes de liquide de Fermi. Rappelons tout d'abord les propriétés d'un système de fermions sans interaction, appelé encore gaz de Fermi. Dans un tel système, les états à une particule sont états propres de l'impulsion  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  et ont pour énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$  où  $m$  est la masse du nucléon. Dans l'état fondamental, tous les états à une particule sont occupés jusqu'au *niveau de Fermi* caractérisé par l'impulsion  $\hbar k_F$ . La densité de particules est reliée directement à  $k_F$  :  $n = (1/6\pi^2)k_F^3$  (cette formule ne tient pas compte de la dégénérescence de spin-isospin de chaque état à une particule). L'énergie cinétique par particule est simplement  $T/A = (3/5)\epsilon_F$ , où  $\epsilon_F$  est l'énergie d'une particule au niveau de Fermi :  $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ . Les valeurs typiques de ces diverses grandeurs pour la matière nucléaire sont respectivement  $n \approx 0,17 \text{ fm}^{-3}$ ,  $k_F \approx 1,36 \text{ fm}^{-1}$ ,  $\epsilon_F \approx 38 \text{ MeV}$ ,  $T/A \approx 23 \text{ MeV}$ .

En utilisant la seconde quantification, on peut écrire l'état fondamental du gas de Fermi ainsi ( $p_F = \hbar k_F$ ) :  $|\Phi_0\rangle = \prod_{|\mathbf{p}| < p_F} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ . Les excitations élémentaires de ce système correspondent aux états dans lesquels on ajoute (état dit de "particule") ou l'on retranche (état dit de "trou") une particule à  $\Phi_0$ , et sont donc de la forme  $a_{\mathbf{p}}^\dagger |\Phi_0\rangle$  et  $a_{\mathbf{p}} |\Phi_0\rangle$  respectivement, avec,

dans le premier cas,  $|\mathbf{p}| > p_F$  et, dans le second,  $|\mathbf{p}| < p_F$ . Les énergies de ces excitations, mesurées par rapport à l'énergie de l'état fondamental  $|\Phi_0\rangle$  sont respectivement  $\epsilon_p$  et  $-\epsilon_p$ . On peut aussi construire des excitations ayant même nombre de particules que l'état de base : ce sont les excitations "particule-trou", d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \epsilon_p$ , avec  $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F$  et  $|\mathbf{p}| < p_F$ .

L'idée de base de la théorie des liquides de Fermi développée par Landau est que les états propres du système sans interaction se transforment en états propres du système en interaction lorsque l'on "branche" les interactions. Considérons ainsi l'état que l'on obtient en ajoutant une particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  à l'état fondamental exact  $|\Psi_0\rangle$ , c'est à dire l'état :  $a_p^\dagger|\Psi_0\rangle$ . L'état  $|\Psi_0\rangle$  est obtenu en tenant compte des interactions entre les particules qui le constituent. Par contre, l'état  $a_p^\dagger|\Psi_0\rangle$  est état propre d'un hamiltonien qui ne contient pas l'interaction de la particule ajoutée dans l'état libre d'impulsion  $\mathbf{p}$  et des autres particules de  $|\Psi_0\rangle$ . Comme l'état  $a_p^\dagger|\Psi_0\rangle$  n'est pas état propre de l'hamiltonien complet, si on le laisse évoluer, il va se mélanger avec d'autres états à  $N + 1$  particules d'énergies voisines. A l'instant  $t$  l'état du système est :

$$e^{-iHt} a_p^\dagger |\Psi_0\rangle, \quad (14)$$

où  $H$  est le hamiltonien complet du système, et inclut, entre autre, l'interaction de la particule supplémentaire avec les autres particules présentes dans l'état fondamental  $|\Psi_0\rangle$ . La probabilité que le système se trouve encore, à l'instant  $t$ , dans la configuration initiale  $a_p^\dagger|\Psi_0\rangle$  est mesurée par l'amplitude:

$$\langle \Psi_0 | e^{iHt} a_p e^{-iHt} a_p^\dagger | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | a_p(t) a_p^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle, \quad (15)$$

où  $a_p(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt}$ . Le mélange de l'état initial avec d'autres états à  $N + 1$  particules conduit en général une décroissance exponentielle de l'amplitude :

$$\langle \Psi_0 | a_p(t) a_p^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle \sim e^{-i\epsilon_p t} e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

Si  $\gamma$  est petit ( $\gamma \ll \epsilon_p$ ), l'amplitude a un comportement oscillant en  $e^{-i\epsilon_p t}$  analogue à celui qu'on observerait dans un système sans interaction :  $\epsilon_p$  serait alors simplement l'énergie de la particule ajoutée. Ici  $\epsilon_p$  est une énergie qui tient compte des interactions entre toutes les particules du système. Cependant comme le comportement de l'amplitude (15) lorsque  $\gamma = 0$  est identique à celui d'une particule libre, on appelle l'excitation correspondante une *quasiparticule*. (Il convient de ne pas confondre cette notion avec celle introduite dans la description des propriétés d'appariement des noyaux dans le cadre de l'approximation BCS; voir le cours de P.-H. Heenen [9]). Le comportement oscillant de l'amplitude (15) est observé pour des temps  $t \lesssim \tau = 1/\gamma$ . On appelle  $\tau$  la durée de vie de la quasiparticule. Les quasiparticules sont bien définies, i.e. elles ont une grande durée de vie, si  $\gamma \ll \epsilon_p$ , i.e. si  $\tau \gg 1/\epsilon_p$ . Ainsi que nous allons le voir cette condition est réalisée pour des quasiparticules au voisinage de la surface de Fermi. L'énergie d'une quasiparticule au voisinage de la surface de Fermi peut se mettre sous la forme:

$$\epsilon_p = \epsilon_F + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_F) \cdot \mathbf{v}_F, \quad (17)$$

où  $v_F = p_F/m^*$ , et  $\epsilon_F$ , l'énergie d'une particule au niveau de Fermi contient ici la contribution des interactions. La quantité  $m^*$  est appelée *masse effective* de la quasiparticule.

Cette durée de vie peut être calculée approximativement en appliquant la règle d'or de Fermi :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | V_q | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (18)$$

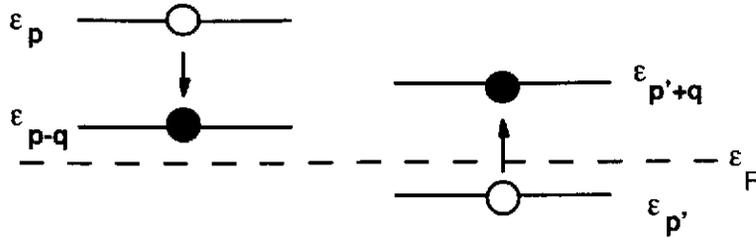


Figure 3: La particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  ( $\epsilon_p > \epsilon_F$ ) fait une collision avec une particule de la mer de Fermi, d'impulsion  $\mathbf{p}'$  ( $\epsilon_{p'} < \epsilon_F$ ). Par suite de cette collision, la particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  perd l'énergie  $\omega = \epsilon_p - \epsilon_{p-q}$  au profit de la particule d'impulsion  $\mathbf{p}'$ , ce qui permet à cette particule d'aller occuper l'état d'impulsion  $\mathbf{p}' + \mathbf{q}$  à l'extérieur de la mer de Fermi.

où l'on a supposé que l'élément de matrice du potentiel d'interaction ne dépend que du transfert d'impulsion  $\mathbf{q}$ . Dans cette équation,  $|i\rangle$  est un état d'impulsion  $\mathbf{p}$  au dessus de la surface de Fermi :  $|i\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |\Phi_0\rangle$ ;  $|f\rangle$  est un état à deux particules et un trou :  $|f\rangle = a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} |\Phi_0\rangle$ . On a donc :

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} | \langle V \rangle |^2 \sum_{\mathbf{p}'} \delta(\epsilon_p + \epsilon_{p'} - \epsilon_{p-q} - \epsilon_{p'+q}) n_{p'} (1 - n_{p'+q}) (1 - n_{p-q}), \quad (19)$$

où  $n_p = 1$  si l'état  $\mathbf{p}$  est occupé, et  $n_p = 0$  sinon.

Il est commode de poser  $\omega = \epsilon_p - \epsilon_{p-q} = \epsilon_{p'+q} - \epsilon_{p'}$ . On a  $0 < \omega < \epsilon_p - \mu$  (voir la figure 3). Dans le régime où  $p \sim p_f$  et  $q \ll p_f$ , on a  $\omega \approx \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} / m^*$ , où  $m^*$  est la masse effective de la quasiparticule, de telle sorte que  $0 < \omega < qv_f$ . Le calcul de l'intégrale ci-dessus conduit alors au résultat classique :

$$\frac{1}{\tau_p} \propto (\epsilon_p - \mu)^2. \quad (20)$$

Ainsi, dans un liquide de Fermi, une quasiparticule à la surface de Fermi a une durée de vie infinie. Ce résultat peut être regardé comme une conséquence du principe d'exclusion de Pauli qui limite l'espace de phase accessible pour la diffusion des particules à la surface de Fermi.

Ainsi une quasiparticule à la surface de Fermi se comporte, pendant un temps de l'ordre de  $\tau$ , comme un état stationnaire de l'hamiltonien complet. Il convient ici de faire deux remarques. La première est que ce résultat n'est valable qu'au voisinage de la surface de Fermi; lorsqu'on s'en éloigne, les collisions de la particule excédentaire avec les autres particules du système deviennent plus efficaces, et la configuration initiale se dilue très vite dans de multiples excitations compliquées : la durée de vie  $\tau$  devient petite et la notion de quasiparticule perd son sens. C'est ainsi par exemple qu'un état de trou "profond", d'énergie  $\epsilon_p \ll \epsilon_F$ , se mélange facilement avec des configurations à  $n$  particules et  $n + 1$  trous et ne correspond pas à une excitation simple du système de type quasiparticule. La seconde remarque concerne la norme de l'état initial (ce qu'en physique nucléaire on appelle parfois le "facteur spectroscopique"). On peut écrire, en supposant  $|\Psi_0\rangle$  normé à 1,  $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | \Psi_0 \rangle = 1 - \langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} | \Psi_0 \rangle$ . La quantité  $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} | \Psi_0 \rangle$  représente le nombre moyen de particules d'impulsion  $\mathbf{p}$  dans l'état  $|\Psi_0\rangle$ . Lorsqu'il n'y a pas d'interactions, ce nombre moyen est nul si  $|\mathbf{p}| > p_F$ . Ce n'est plus le cas en présence d'interactions. On en déduit que la norme de l'état  $a_{\mathbf{p}}^\dagger |\Psi_0\rangle$  est plus petite que 1.

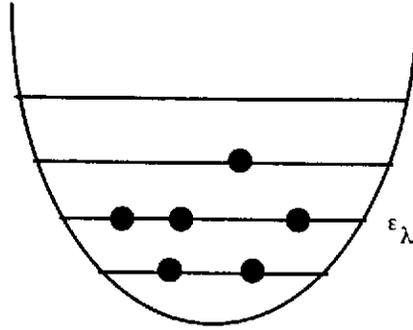


Figure 4: Dans l'image du champ moyen les particules occupent des niveaux d'énergie individuels. Les seules restrictions au remplissage de ces niveaux proviennent du principe d'exclusion de Pauli.

Les considérations précédentes, qui peuvent être rendues rigoureuses dans le cas des systèmes infinis, s'appliquent également aux noyaux (voir en particulier [10]) : les excitations de basse énergie des noyaux peuvent aussi être comprises comme des excitations de quasiparticules qui portent les nombres quantiques du système sans interaction (l'interaction entre quasiparticules, dont nous n'avons pas parlé ici pouvant donner naissance à des modes collectifs). Dans les noyaux cependant, le problème à une particule est beaucoup plus riche que dans la matière nucléaire (où il est essentiellement trivial : il s'agit du gaz de Fermi discuté plus haut). Les nombres quantiques des états à une particule reflètent l'arrangement du système tout entier (par exemple ils diffèrent selon que le noyau est sphérique ou déformé) et un grand nombre de propriétés des noyaux peuvent être déterminées sur la base d'un modèle où l'on suppose que les nucléons se déplacent dans le noyau comme des particules indépendantes placées dans un puits de potentiel qui résulte de leurs interactions mutuelles (fig. 3). C'est cette image que nous allons brièvement rappeler dans la section suivante.

## 4 Théorie du champ moyen

Les théories de champ moyen reposent sur une description du noyau à l'aide de fonctions d'onde de particules indépendantes. Un état de particules indépendantes est typiquement de la forme :

$$|\phi\rangle = a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger \cdots a_{\lambda_N}^\dagger |0\rangle. \quad (21)$$

Il est utile d'associer à cet état une matrice densité à un corps :

$$\rho_{ij} = \langle \Phi | a_j^\dagger a_i | \Phi \rangle \quad (22)$$

Dans la base  $\{\lambda\}$  on a :

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \langle \Phi | a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda | \Phi \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} n_\lambda, \quad (23)$$

où  $n_\lambda = 1$  si  $\lambda$  repère un état occupé dans  $|\Phi\rangle$  et  $n_\lambda = 0$  sinon. Une autre écriture utile pour  $\rho$  est  $\rho = \sum_\lambda n_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|$ , montrant que la matrice  $\rho$  peut être interprétée comme le projecteur sur les états à une particule occupés dans  $|\Phi\rangle$ . Notons qu'une telle matrice densité satisfait les propriétés :  $\text{Tr}\rho = A$ ,  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho^2 = \rho$ , la dernière propriété étant caractéristique d'un état de particules indépendantes.

La matrice densité à une particule permet d'exprimer sous forme très compacte les équations de champ moyen. Rappelons tout d'abord l'expression de l'énergie d'un état de particules indépendantes lorsque l'hamiltonien se compose d'un terme d'énergie cinétique  $T$  à un corps et d'un terme d'interaction à deux corps  $V$ . On a :

$$E[\rho] = \sum_{ij} T_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|V|kl\rangle \rho_{ki} \rho_{lj}. \quad (24)$$

La minimisation de cette quantité par rapport à toutes les variations de  $\rho$  qui satisfont les contraintes indiquées ci-dessus, conduit aux équations de champ moyen :

$$[h, \rho] = 0, \quad (25)$$

où  $h$  est le hamiltonien à une particule suivant :

$$h_{ij} = \frac{\delta E}{\delta \rho_{ji}} = T_{ij} + \sum_{kl} \langle ik|V|jl\rangle \rho_{lk}. \quad (26)$$

L'équation (25) montre qu'il existe une base d'états à une particule dans laquelle  $h$  et  $\rho$  sont simultanément diagonalisables. Dans cette base  $h|\lambda\rangle = e_\lambda|\lambda\rangle$ , avec :

$$e_\lambda = T_\lambda + \sum_{\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda'}. \quad (27)$$

Il est également utile d'écrire l'expression de l'énergie totale dans cette base. On a :

$$E = \sum_{\lambda} T_{\lambda} n_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda} n_{\lambda'} = \sum_{\lambda} e_{\lambda} n_{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda} n_{\lambda'}. \quad (28)$$

**Remarque.** L'expression (28) donne l'énergie de l'état fondamental du système à l'approximation considérée, qui correspond à l'approximation de Hartree-Fock développée pour la première fois en physique atomique. Dans ce dernier cas,  $V$  est l'interaction coulombienne entre les électrons et le calcul variationnel conduit à une *borne supérieure* pour l'énergie : la valeur exacte de l'énergie de l'état fondamental est inférieure à la valeur calculée à partir de l'équation (28). Dans le cas des noyaux, la situation est plus compliquée. En effet, ainsi que nous le verrons dans la section 6, le calcul des éléments de matrice de  $V$  qui figurent dans l'expression (28) n'a pas de sens si  $V$  est le potentiel nucléon-nucléon  $V_{NN}$ , à cause du coeur dur. On peut cependant tenir compte de façon simple des corrélations induites par la forte répulsion à courte distance en définissant une *interaction effective* telle que (schématiquement) :

$$\langle \Psi|V_{NN}|\Psi\rangle = \langle \Phi|V_{eff}|\Phi\rangle, \quad (29)$$

où  $|\Psi\rangle$  est l'état corrélé et  $|\Phi\rangle$  un état de particules indépendantes. La relation entre  $V_{eff}$  et  $V_{NN}$  est compliquée et sera très brièvement esquissée dans la section 6. La propriété variationnelle de l'approximation de Hartree-Fock originale est perdue lorsqu'on travaille avec une interaction effective.

## 5 Matière nucléaire calculée avec une force effective.

Afin d'illustrer la méthode du champ moyen et revenir à la discussion sur la matière nucléaire, nous allons calculer les propriétés de la matière nucléaire à l'approximation du champ moyen, en

utilisant des interactions effectives. Dans ce cadre, la saturation n'est plus assurée par la forte répulsion à courte distance présente dans l'interaction libre, mais absente dans l'interaction effective. Comme nous allons le voir, d'autres mécanismes interviennent, qui dépendent de la façon dont est paramétrée l'interaction effective.

Considérons tout d'abord une force effective dépendant de la densité de la forme :

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \left\{ t_0 + t_3 n^d \left( \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \right\} \quad (30)$$

Le calcul de la densité d'énergie avec une telle interaction est facile et donne :

$$\mathcal{E}(n) = \frac{3\hbar^2 k_0^2 n_0}{10m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + \frac{3}{8} t_0 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + \frac{3}{8} t_3 n_0^{2+d} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{2+d}, \quad (31)$$

où  $n_0$  est la densité à la saturation, et  $\hbar k_0$  le moment de Fermi correspondant. Il est facile de voir que la courbe  $\mathcal{E}(n)/n$  a bien la forme indiquée sur la figure 2.

Un autre type d'interaction souvent utilisée est une interaction dépendant des vitesses. Les éléments de matrice d'une telle interaction sont donnés par :

$$(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | V | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = \frac{1}{\Omega} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \left\{ t_0 + t_2 \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \frac{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}{2} \right\}. \quad (32)$$

Notons que ce type d'interaction est utilisée dans des conditions où  $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \leq 2k_F$ . Elle ne saurait décrire l'interaction entre deux nucléons quelles que soient les valeurs des impulsions. Le calcul de la densité d'énergie avec une telle interaction est à nouveau élémentaire et donne :

$$\mathcal{E}(n) = \frac{3\hbar^2 k_0^2 n_0}{10m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + \frac{3}{8} t_0 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + \frac{3}{16} t_2 k_0^2 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^{8/3}. \quad (33)$$

Notons que lorsque l'interaction dépend de la vitesse, le potentiel moyen dépend de l'impulsion de la particule, et l'on a :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(k), \quad (34)$$

avec pour l'interaction ci-dessus,  $U(k) = 3t_0 n/4 + 5t_2 n k^2/16 + 3t_2 n k_F^2/16$ . On peut réécrire  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  de la façon suivante :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( 1 + \frac{dU}{dT_k} \right) + U(0) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + U(0), \quad (35)$$

où  $T_k$  est l'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2/2m$ , et

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{dU}{dT_k} \right). \quad (36)$$

Notons que si l'interaction dépendant des vitesses doit assurer la saturation, on doit avoir  $t_2 > 0$ ,  $dU/dT_k > 0$ , et donc  $m^* < 1$ . (Notons que lorsque le spectre des états à une particule est quadratique comme ici, i.e.  $\epsilon_{\mathbf{k}} \sim k^2$ , la définition (36) de la masse effective coïncide avec celle donnée plus haut (eq. (17)) pour les quasiparticules à la surface de Fermi).

Les deux exemples ci-dessus utilisent deux mécanismes distincts pour assurer la saturation, c'est à dire garantir que la compétition entre forces attractives et répulsives conduise à un état d'équilibre à la densité  $n_0$ . Dans le premier cas, l'intensité des forces répulsives croit lorsque la densité croit. Dans le second cas une augmentation de la densité provoque une augmentation des vitesses relatives entre les nucléons ( $\sim v_F$ ), et donc à une augmentation de l'intensité de l'interaction répulsive correspondante. Notons que dans les deux cas, les forces répulsives doivent conduire à une dépendance de la densité d'énergie qui ne soit pas quadratique (i.e. en  $n^2$ ).

En fait, les deux mécanismes que nous venons de décrire sont présents à des degrés variables dans la plupart des modèles. De façon générale, on peut écrire :

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} + U(p) + R, \quad (37)$$

où  $R$ , appelée énergie de réarrangement, est engendrée par des forces dépendant de la densité. On suppose  $R$  indépendant de  $p$ . Si l'on suppose que l'énergie potentielle totale du système résulte de forces à deux corps uniquement (dépendant éventuellement de la densité), on peut écrire l'énergie de liaison totale ainsi (voir eq. (28)) :

$$\frac{E}{A} = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle U(p) \rangle, \quad (38)$$

où la moyenne  $\langle \rangle$  indique une moyenne sur les impulsions dans la mer de Fermi. Or, comme nous l'avons vu plus haut,  $E/A$  à la saturation est égale au potentiel chimique (eq. (6)), ou encore à l'énergie de Fermi :

$$\frac{E}{A} = \frac{p_f^2}{2m} + U(p_f) + R. \quad (39)$$

En combinant les deux relations ci-dessus, on peut écrire :

$$-\frac{E}{A} = -\frac{1}{5} \frac{p_f^2}{2m} + U(p_f) - \langle U(p) \rangle + R. \quad (40)$$

Par conséquent, si  $R = 0$ ,  $U$  doit dépendre de  $p$ , sinon  $E/A$  est positif et le système n'est pas lié. Supposons qu'on puisse développer  $U(p)$  au voisinage de  $p = 0$  :

$$U(p) = U(0) + a \frac{p^2}{2m}. \quad (41)$$

Alors,

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} (1 + a) + U(0) + R = \frac{p^2}{2m^*} + U(0) + R. \quad (42)$$

Avec cette forme de  $U(p)$ , on peut faire explicitement la moyenne  $\langle U(p) \rangle$  sur les impulsions de la mer de Fermi, et obtenir la relation :

$$\frac{m}{m^*} = \frac{3}{2} - \frac{5m}{p_f^2} \left( \frac{E}{A} + R \right). \quad (43)$$

A titre d'exemple, si  $R = 0$ ,  $m^* = 0,4m$ . Si  $m^* = m$ ,  $R = 24$  MeV.

Mentionnons pour finir cette discussion qu'il existe une grandeur physique dont la valeur est très sensible au mécanisme de saturation. Il s'agit du coefficient d'incompressibilité [13] :

$$K = 9n_0^2 \frac{d^2(E/A)}{dn^2}. \quad (44)$$

On peut paramétrer la variation de la densité d'énergie  $\mathcal{E}(n)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = a \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + b \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + c \left( \frac{n}{n_0} \right)^{d+2}. \quad (45)$$

où  $a = 3\hbar^2 k_0^2 n_0 / 10m$ . Les conditions :

$$\left. \frac{d(E/A)}{dn} \right|_{n_0} = 0 \quad \left. \frac{E}{A} \right|_{n_0} = -B \quad (46)$$

permettent de déterminer la valeur des coefficients  $b$  et  $c$  en fonction de  $B$  et  $n_0$ . On trouve :

$$b = -Bn_0 - a - \frac{1}{d} \left( Bn_0 + \frac{a}{3} \right) \quad c = \frac{1}{d} \left( Bn_0 + \frac{a}{3} \right). \quad (47)$$

Un calcul simple donne alors la valeur de  $K$  :

$$K = \frac{a}{n_0} + 9B + d \left( 9B + \frac{3a}{n_0} \right) \approx 167 + 212d. \quad (48)$$

où, pour obtenir les valeurs numériques, nous avons utilisé  $B = -16$  MeV, et  $n_0 = 0,17$  fm<sup>-3</sup>.

Il se trouve que l'on peut associer une valeur bien précise de  $d$  à chaque mécanisme de saturation utilisant l'approximation de champ moyen. Ainsi pour une force dépendant des vitesses on a  $d = 2/3$  et  $K = 308$  MeV (typique d'une force de Skyrme); pour une interaction dépendant de la densité comme  $n^{1/3}$  (comme par exemple l'interaction de Gogny), on a  $d = 1/3$  et  $K = 238$  MeV; une force de portée finie assurant la saturation grâce aux termes d'échange seuls conduit à  $d = -1/3$  et  $K = 96$  MeV; enfin les champs moyens relativistes discutés par J.-F. Mathiot conduisent (dans leur version la plus simple) à  $d = 5/3$  et  $K = 522$  MeV.

## 6 Problèmes liés au coeur dur

Ainsi que nous l'avons remarqué au début de ce cours, l'interaction nucléon-nucléon présente une très forte répulsion à courte distance qui rend impossible son utilisation dans un calcul de type champ moyen, l'élément de matrice d'un tel potentiel d'interaction entre états à une particule étant infini. (Dans la matière nucléaire, les fonctions d'onde à une particule sont des ondes planes, et le calcul des éléments de matrice de  $V$  fait intervenir l'intégrale sur tout l'espace de  $V_{NN}(r)$ . Cette intégrale diverge si  $V_{NN}(r) \rightarrow \infty$  plus vite que  $1/r^3$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , ce qui est le cas). En fait la forte répulsion induit des corrélations à courte portée entre les nucléons dont il faut tenir compte (voir fig. 6) : ces corrélations assurent que la fonction d'onde relative de deux nucléons s'annule dans la région où le potentiel est très répulsif.

Considérons l'équation de Schrödinger pour une paire de nucléons dans la matière nucléaire :

$$(E - H_0)\psi(1, 2) = V\psi(1, 2), \quad (49)$$

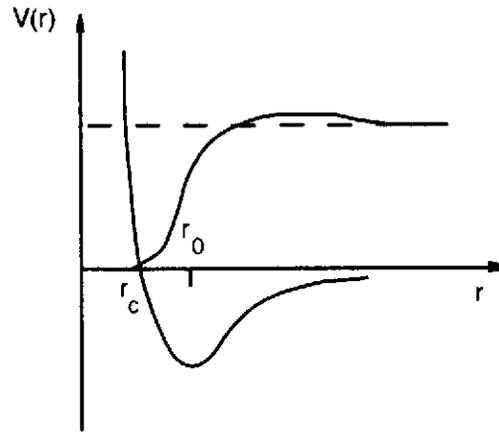


Figure 5: La fonction d'onde exacte décrivant le mouvement relatif de deux particules qui interagissent avec un potentiel fortement répulsif s'annule à l'intérieur du "coeur dur". Par contre, lorsque la distance entre les particules croît, la fonction d'onde tend vers la fonction d'onde du mouvement libre, représentée ici par la ligne horizontale pointillée.

où  $H_0 = T_1 + T_2$  est la somme des énergies cinétiques des deux nucléons, et  $V$  le potentiel d'interaction. Appelons  $\phi_n(1, 2)$  les états propres de  $H_0$ , tels que  $H_0\phi_n(1, 2) = E_n\phi_n(1, 2)$ , et posons  $(\phi_0|\psi) = 1$ . En projetant l'équation de Schrödinger sur ces états propres, et en séparant la contribution de l'état  $n = 0$ , on obtient aisément :

$$E - E_0 = (\phi_0|V|\psi)$$

$$\psi = \phi_0 + \sum_{n \neq 0} \phi_n \frac{1}{E - E_n} (\phi_n|V|\psi). \quad (50)$$

On en déduit le développement de l'énergie de la paire en puissance du potentiel  $V$ :

$$E - E_0 = (\phi_0|V|\phi_0) + \sum_{n \neq 0} (\phi_0|V|\phi_n) \frac{1}{E - E_n} (\phi_n|V|\psi). \quad (51)$$

L'itération de l'équation ci-dessus engendre la famille de diagrammes représentés sur la figure 6. Notons que le développement (51) est un développement formel : en effet chaque terme, pris individuellement diverge ; cependant la somme de tous les termes est finie.

On peut interpréter ce développement de la façon suivante :

$$E - E_0 = (\phi_0|V_{eff}|\phi_0). \quad (52)$$

où  $V_{eff}$  est l'interaction effective. Notons que la construction de cette interaction effective fait intervenir des sommes sur des états intermédiaires où les nucléons doivent, à cause du principe de Pauli, se trouver en dehors de la mer de Fermi. Cette restriction est une des origines de la dépendance en densité de l'interaction effective.

## 7 Calculs exacts.

Les progrès continuels des moyens de calcul numérique (en particulier le développement des calculateurs massivement parallèles) permettent d'envisager maintenant des solutions exactes

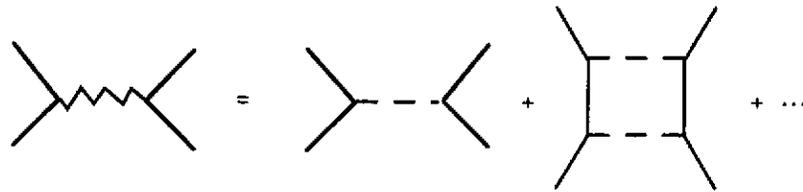


Figure 6: Représentation schématique du développement de l'interaction effective en puissance du potentiel d'interaction nucléon-nucléon. L'interaction effective est représentée par la ligne brisée, le potentiel nucléon-nucléon par la ligne pointillée.

du problème à  $N$  corps pour les noyaux. Par là on entend la résolution explicite de l'équation de Schrödinger pour un noyau dont les nucléons interagissent avec des forces à deux et trois corps, et la détermination de l'état fondamental et des premiers états excités. La mise en oeuvre d'un tel programme met en jeu un arsenal de techniques sophistiquées qu'il n'est pas possible de décrire ici. Pour avoir un aperçu de "l'état de l'art" dans ce domaine, on pourra se reporter à [14] où est présenté le calcul des noyaux légers ayant jusqu'à 7 nucléons.

## References

- [1] G.E. Brown. *Many Body Problems*, North Holland, 1972.
- [2] A. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, (McGraw Hill, New-York, 1971).
- [3] P. Ring et P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, (Springer-Verlag, New-York, 1980).
- [4] J.P. Blaizot et G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, (MIT Press, 1986).
- [5] P. Nozières. *Le problème à  $N$  corps* (Dunod. Paris, 1963).
- [6] J.-F. Mathiot, cours de l'Ecole Joliot-Curie 1997, ce volume.
- [7] B. Mottelson, Cours de l'Ecole de Physique des Houches 1997.
- [8] V.R. Pandharipande, I. Sick and K.A. de Witt Huberts, *Rev. Mod. Phys.***69** (1997) 981.
- [9] P.-H. Heenen, cours de l'Ecole Joliot-Curie 1997, ce volume.
- [10] A.B. Migdal, *Theory of Finite Systems and Applications to Atomic Nuclei* (Wiley Interscience 1967).
- [11] D. Vautherin et D. Brink, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 626; J.W. Negele et D. Vautherin, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 1472.
- [12] J. Dechargé et D. Gogny, *Phys. Rev.* **C21** (1980) 1568.
- [13] J.-P. Blaizot, *Phys. Repts.***64** (1980) 172.
- [14] B.S. Pudliner et al., "Quantum Monte Carlo calculations of nuclei with  $A \leq 7$ ", preprint nucl-th/9705009, mai 1997.

